

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Lehrbuch der Physik**

Mechanik und Meßmethoden

**Chvol'son, Orest D.**

**1918**

Dritter Abschnitt. Meßapparate und Meßmethoden

### Dritter Abschnitt.

## Meßapparate und Meßmethoden.

### Erstes Kapitel.

#### Allgemeine Bemerkungen über physikalische Messungen.

**§ 1. Absolute und relative Messungen.** Wir erweitern unsere Kenntnisse über die Naturerscheinungen mit Hilfe von Beobachtung und Experiment; diese führen uns zu neuen Entdeckungen und zur Feststellung der gesetzmäßigen Beziehungen, welche die verschiedenen Erscheinungen miteinander verbinden. Somit ist die Aufgabe, zu deren Lösung wir Beobachtung und Experiment anstellen, eine zweifache: sie kann entweder die qualitative oder die quantitative Seite der Erscheinung berühren. Rein qualitative Beobachtungen und Versuche werden jedoch nur verhältnismäßig selten angestellt. Fast immer schließen sich an sie mehr oder weniger eng auch quantitative Untersuchungen an; diese sollen die näheren Bedingungen feststellen, unter denen die beobachtete qualitative Seite der Erscheinung hervortritt, und sollen ferner die Größen liefern, durch welche eben diese qualitative Seite genau bestimmt wird. Die gesetzmäßigen Beziehungen aber werden, wie dies im § 7 auf S. 24 auseinandergesetzt ist, durch die Untersuchung der quantitativen Seite der Erscheinungen enthüllt, indem Messungen verschiedener Größen, welche für die Entstehungsbedingungen wichtig oder für manche Seiten der Erscheinungen bezeichnend sind, vorgenommen werden.

Demnach spielt die Messung verschiedener Größen bei physikalischen Untersuchungen eine hervorragende Rolle. Die Meßmethoden werden in zahlreichen Sonderwerken behandelt, doch sind, um sich ihrer zu bedienen, nicht bloß Kenntnisse erforderlich, sondern auch eine gewisse Fertigkeit. Natürlich kann letztere nur durch die Ausführung von Messungen selbst und während derselben erworben werden; Bücher können unmöglich alle die Winke und Hinweise enthalten, die für die Vornahme solcher Arbeiten sich als notwendig erweisen.

Gewissenhaftigkeit, Geduld und Arbeitsfreudigkeit, das sind die Eigenschaften, die ein jeder besitzen muß, der physikalische

Messungen ausführen will; dazu kommt noch äußerste Vorsicht und Umsicht. Nicht bloß handelt es sich hierbei um die gewöhnliche Vorsicht, ohne welche leicht die Apparate beschädigt, ja in manchen Fällen uns und anderen Schaden zugefügt wird; es bedarf auch ganz besonders einer weitgehenden Umsicht bei Wahl der Meßmethode, der Aufstellung der Meßapparate und schließlich bei dem Versuche, aus den erhaltenen Resultaten der Messungen irgendwelche Schlüsse zu ziehen.

Wir können in diesem Buche nicht auf alle Einzelheiten eingehen, die in den entsprechenden Lehrbüchern, welche die physikalischen Messungen zu ihrem besonderen Gegenstande haben, behandelt werden; wir müssen uns hier vielmehr auf einige Bemerkungen beschränken, die von grundlegender Bedeutung für den vorliegenden Gegenstand sind. Ebenso werden wir uns begnügen müssen mit der Beschreibung einiger der wichtigsten Methoden, die zur Messung von Längen, Winkeln, Volumina, Massen, Kräften und Zeit dienen. Gesondert werden wir sodann die Methoden zur Bestimmung der Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft und der mittleren Erddichte behandeln.

Eine physikalische Größe messen (vgl. S. 19), heißt bestimmen, wievielmals in ihr eine als Einheit gewählte Größe derselben Art enthalten ist. Man pflegt absolute und relative Messungen zu unterscheiden. Die absoluten Messungen geben uns den Zahlenwert der zu messenden Größe in genau festgesetzten, vollkommen bekannten Einheiten, z. B. die Länge in Metern, die Kraft in Dynen, die Wärmemenge in Kalorien usw. Die relativen Messungen können von dreierlei Art sein:

1. Für die zu messende Größe wird ihr Zahlenwert in sogenannten „willkürlichen Einheiten“ ermittelt, d. h. in Einheiten, deren Größe von zufälligen Eigenschaften des Meßapparates abhängen, von seiner Aufstellung usw. Das Verhältnis zwischen diesen Einheiten und den allgemein üblichen braucht uns hierbei nicht bekannt zu sein. Messungen solcher Art können uns das Verhältnis zweier gleichzeitig zu messender Größen sehr genau liefern, ferner die relative Änderung einer von ihnen usw. Der Zahlenwert  $a$ , den man bei einer derartigen Messung der Größe erhält, ist dem Zahlenwert  $b$ , den eine absolute Messung ergeben hätte, proportional. Der Proportionalitätsfaktor  $C$  in der Formel

$$b = Ca \dots \dots \dots (1)$$

heißt Reduktionsfaktor. Er ist im allgemeinen selbst für Apparate derselben Art verschieden, da diese immer gewisse Verschiedenheit gegeneinander aufweisen. Der Faktor  $C$  kann in einigen Fällen durch gesonderte oder sogar gleichzeitige Messungen irgendeiner Größe nach zwei Methoden bestimmt werden, von welchen eine ihren Zahlenwert  $b$  in bestimmten und bekannten, die andere ihren Zahlenwert  $a$  in „willkürlichen“ Einheiten ergibt. Ist der Reduktionsfaktor  $C$  einmal nach

Formel (1) ermittelt worden, so lassen sich mit Hilfe derselben Formel jedesmal die Messungsergebnisse, die uns die Zahlen  $a$  geben, auf das „absolute“ Maß zurückführen. Die Bestimmung von  $C$  muß von Zeit zu Zeit wiederholt werden, da unmerkliche Veränderungen am Apparat selbst, in seiner Aufstellung oder den äußeren Einflüssen eine Änderung jener willkürlichen Einheit zur Folge haben können, für welche der Apparat den Zahlenwert  $a$  gibt. Besondere Verwickelungen treten meist dann auf, wenn die erwähnte Einheit von äußeren Ursachen, z. B. von der Temperatur, abhängt.

2. Die relative Messung beschränkt sich auf eine einfache Bestimmung des Verhältnisses zweier Größen  $x$  und  $y$ , von denen eine, z. B.  $x$ , als „willkürliche Einheit“ gelten kann. Ist es möglich, eine absolute Messung der Größe  $x$  vorzunehmen, und ist man sicher, daß während dieser Messung und der Vergleichung mit  $y$  keine Änderung von  $x$  erfolgt ist, so hat man auch  $y$  in absolutem Maße gemessen.

3. Zu den relativen Messungen gehören auch die Variationsmessungen, bei denen nicht die Größe selbst gemessen wird, sondern bloß ihre Änderungen mit der Zeit, Temperatur und anderen Faktoren, von welchen die Größe abhängt. Werden außer solchen Änderungsmessungen von Zeit zu Zeit auch absolute Messungen vorgenommen, so erhält man auch für die Zwischenzeiten, in denen nur die Änderungen der Größe bestimmt wurden, deren Werte in absolutem Maße.

**§ 2. Etalons und Meßinstrumente.** Ein Körper, von dem eine für ihn bezeichnende physikalische Größe mit aller nur erreichbaren Genauigkeit bekannt ist, heißt, wenn er zur Vergleichung dieser Größe mit anderen Größen derselben Art dienen kann, Etalon dieser Größe. So können z. B. ein Stab, dessen in Metern ausgedrückte Länge genau bekannt ist, oder ein Draht, dessen galvanischer Widerstand in Widerstandseinheiten (in Ohms) mit größtmöglicher Sorgfalt bestimmt ist, als Etalons bei Messungen der Länge bzw. des galvanischen Widerstandes irgendeines anderen Körpers dienen. Gewöhnlich sucht man die „Größe des Etalons“ so herzustellen, daß sie entweder der Einheit selbst oder einem gewissen Vielfachen oder Teile derselben möglichst nahekommt. So hat z. B. das Etalon der Länge — der Normalmaßstab — entweder die Länge der ganzen Längeneinheit, oder eines bestimmten Vielfachen, oder eines einfachen Teiles ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ) derselben; das gleiche gilt vom Etalon des Widerstandes usw.

Zur Ausführung der Messungen dienen besondere Instrumente, die je nach der Art der zu messenden Größe oder der in Anwendung gebrachten Messungsmethode verschieden sind.

Man unterscheidet „absolute“, „relative“ und „Variationsinstrumente“, je nach der Art der Messung, für welche sie bestimmt sind.

Hinsichtlich der Benennungen für die verschiedenen Instrumente sei hier bemerkt, daß viele von ihnen auf die Silben „skop“, „meter“ und „graph“ endigen.

Die Instrumente, deren Benennungen mit der Silbe „skop“ endigen, dürften eigentlich strenggenommen nicht zu den Meßinstrumenten gezählt werden, wenngleich sie bisweilen bei Messungen, insbesondere nach der später zu erwähnenden „Nullmethode“, eine wichtige Rolle spielen. Eine unmittelbare Messung irgendeiner Größe gestatten sie nicht; sie zeigen nur an, welches Vorzeichen eine gegebene Größe hat oder ob sie gleich Null oder von Null um ein Meßbares verschieden ist (z. B. das Elektroskop, Galvanoskop). Hierher gehören auch die Apparate, die bloß zum Betrachten von irgendwelchen Dingen dienen (das Mikroskop, Teleskop); solche Instrumente haben entweder gar nichts mit Messungen zu tun oder sie bilden nur gewisse Teile von wirklichen Meßinstrumenten. Apparate mit der Bezeichnung „meter“ sind wirkliche Meßinstrumente und dienen mehr oder weniger unmittelbar zur Bestimmung des Zahlenwertes der zu messenden Größe (Elektrometer, Galvanometer, Barometer, Spektrometer, Hygrometer, Kalorimeter usw.). Apparate mit der Bezeichnung „graph“ bilden die besondere Gruppe von „selbstregistrierenden Apparaten“, die entweder ununterbrochen oder in bestimmten, meist gleichen Zeitabständen das Maß der einen oder anderen Größe aufzeichnen. Die Mehrzahl der hierher gehörigen Apparate (jedoch nicht alle) sind Variationsinstrumente: sie verzeichnen die Änderung, welche eine Größe innerhalb einer gewissen Zeit im Vergleiche zu ihrem Werte für einen bestimmten Anfangsmoment erfahren hat (Barograph, Magnetograph, Thermograph usw.). Dagegen gehört z. B. der Anemograph, welcher unmittelbar das Azimut der Windrichtung und die Windstärke (Windgeschwindigkeit) verzeichnet, offenbar nicht zu den Variationsinstrumenten.

**§ 3. Das Meßverfahren.** Jede Messung einer physikalischen Größe zerfällt in eine Reihe verschiedener Arbeitsstufen; diese geben zusammengenommen die Daten, aus welchen entweder unmittelbar oder durch verschiedene Verknüpfungen und Rechnungen der gesuchte Zahlenwert der zu messenden Größe entspringt. Es ist unmöglich, eine genaue Übersicht über alles zu geben, was bei Ausführung physikalischer Messungen in Betracht kommt; über diesen Gegenstand muß sich der Leser in den oben erwähnten Sonderwerken unterrichten. Bei der überwiegenden Mehrzahl physikalischer Messungen hat man es mit drei aufeinanderfolgenden Arbeitsstufen zu tun: der Aufstellung, der Beobachtung und der Ablesung.

I. Die Aufstellung besteht darin, daß man den Apparaten den rechten Ort und die rechte Stellung anweist und sie in geeigneter Weise anordnet, wobei auf äußere und innere Umstände zu achten ist, die

sowohl von den Eigenschaften der benutzten Apparate, als auch von den Besonderheiten der zu beobachtenden Erscheinungen abhängen. Sehr oft muß ein Apparat so aufgestellt werden, daß eine gewisse Ebene desselben horizontal wird. Dies wird häufig unter Zuhilfenahme der Libelle durch Drehen der Fußschrauben des Apparates erzielt. Ferner muß ein Apparat so aufgestellt sein, daß die Messungen mit ihm überhaupt ausführbar und zwar bequem ausführbar sind, zu welchem Zwecke gewisse Teile desselben eine ganz bestimmte Lage haben müssen. Zu den äußeren Aufstellungsbedingungen, auf welche man ganz besonders acht zu geben hat, gehört, daß die Aufstellung eine feste sei: der Apparat darf keinen zufälligen Erschütterungen ausgesetzt sein, die z. B. seine horizontale Stellung allmählich ändern können. Dazu stellt man ihn z. B. auf besondere, an der Wand angebrachte Konsolen oder auf steinerne Pfeiler mit fester Unterlage oder auf Mauerpfosten mit gesondertem Fundament. Ferner ist bei der Aufstellung zu achten auf den Einfluß der Umgebung; hierher gehören Luftströmungen, Temperaturwechsel (durch die Nähe eines Ofens, eines Fensters, des Beobachters), Luftfeuchtigkeit (welche z. B. die Länge der Kokonfäden beeinflusst) usw.; die gegenseitige Beeinflussung der Apparate, der Einfluß von benachbarten Eisenmassen oder Leitern, auf welchen elektrische Ströme auftreten (auf magnetische Apparate) usf. — Die Aufstellung muß begleitet sein von der allergeauuesten Untersuchung aller Nebenumstände, die auf die Angaben des Apparates von Einfluß sein können; solche Umstände müssen dann entweder beseitigt oder es muß die Größe ihres Einflusses in Rechnung gezogen werden.

II. Die Beobachtung besteht bei sehr vielen Messungen in einer allmählichen Verschiebung eines Apparatteiles oder in der Änderung der Lage eines außerhalb befindlichen Gegenstandes bis die gewünschte Erscheinung zutage tritt. Der Zeitaugenblick, wo dieses geschieht, wird meist durch direktes Hinsehen, bisweilen auch nach dem Gehör oder Gefühl (s. u. das Sphärometer) bestimmt. Eine solche Art von Beobachtung nennt man die „Einstellung“ dieses oder jenes Apparatteiles. Diese Operation muß möglich sein, woraus jedoch nicht folgt, daß sie einem Jeden auch gleich das erste Mal gelingt. Vielmehr gehört hierzu oft langdauernde Übung und kann daher eine genaue Messung, d. h. das möglichst richtige Auffassen des Augenblickes, wo irgendeine bestimmte Erscheinung eintritt, wie bereits früher angedeutet wurde, nur einem „geschickten“ Beobachter gelingen.

Die Verstellung eines Apparatteiles oder eines außerhalb des Apparates befindlichen Gegenstandes wird in sehr vielen Fällen durch Drehung eines Schraubenkopfes und nur selten aus freier Hand (wie bei einigen Photometern) vorgenommen. Hierbei kann man meist von zwei entgegengesetzten Seiten einstellen und dadurch, daß man zweimal dreht, das eine Mal von der einen, das andere Mal von

der entgegengesetzten Seite, ein genaueres Resultat erhalten. Besonders hat man hierbei auf den sogenannten toten Gang der Schrauben zu achten; hatte man die Schrauben zuerst nach der einen Seite gedreht, wobei sich ein gewisser Teil des Apparates verschob, und dreht man sie darauf zurück, so beginnt sich der von der Schraube geführte Teil des Apparates nicht auch gleichzeitig nach der anderen Seite zu bewegen, so daß die Größe der Schraubendrehung nicht als Maß für die Verschiebung des betreffenden Apparatteiles dienen kann. Der Experimentator hat nun zu entscheiden, auf welche Weise in jedem gegebenen Falle der schädliche Einfluß des toten Ganges zu beseitigen ist; er kann entweder bei jeder Messung zwei Beobachtungen, die auf entgegengesetzten Seiten liegen, machen, d. h. die Schraube erst vorwärts, dann rückwärts drehen oder eine Reihe aufeinanderfolgender Messungen vornehmen, indem er die Schraube immer nach derselben Seite hin dreht.

Im vorhergehenden war darauf hingewiesen worden, daß die Verschiebung eines Apparatteiles so lange vorgenommen wird, bis man mit dem Auge, Ohre oder Gefühl ein gewisses, ganz bestimmtes Resultat erlangt hat. Meist besteht dies darin, daß zwei zu beobachtende Größen extensive Größen (wie Länge, Winkel) oder intensive Größen (wie Schallstärke, Helligkeitsgrad) einander gleich gemacht werden sollen. Hierher gehört auch der Fall, wo eine gleiche Färbung zweier Flächen, gleiche Höhe zweier Töne und andere qualitative Übereinstimmungen erlangt werden sollen. Wir sind eben nicht imstande, den Augenblick zu erfassen, wo zwei Größen, welche wir beobachten, sich in einem bestimmten Verhältnisse zueinander befinden, z. B. eine von ihnen gerade zweimal intensiver ist als die andere. Dagegen kann die Frage, ob zwei Größen einander gleich sind oder nicht, bei gehöriger Übung mit großer Genauigkeit entschieden werden.

Bei vielen Meßmethoden hat man den Augenblick des Verschwindens einer gewissen Erscheinung zu beobachten; solche Methoden sollen Nullmethoden genannt werden. Sie sind besonders wertvoll, denn über das Vorhandensein oder die Abwesenheit einer Einwirkung auf die Sinnesorgane kann man noch sicherer urteilen, als über die Gleichheit zweier Eindrücke. Übrigens läßt sich in bezug auf die angedeuteten Erscheinungen keine scharfe Grenze ziehen, denn oft kommt gerade das Verschwinden einer Erscheinung auf das Gleichwerden zweier Eindrücke zurück. Wird z. B. (im Photometer) ein Fleck oder Streifen auf hellem Grunde beobachtet und soll der Augenblick erfaßt werden, wo derselbe gerade verschwindet, so hat man doch eigentlich festzustellen, wann die Helligkeit des Fleckes gleich wird der des Hintergrundes, von dem er sich vorher abhob.

Bei sehr vielen Messungen hat man zwei Punkte, einen Punkt und einen Strich, oder zwei Striche zur möglichst vollkommenen Deckung zu bringen, indem man den beweglichen an den anderen festbleibenden heranbringt. Auch hierzu ist Übung erforderlich, denn der „Punkt“ oder „Strich“ ist in Wirklichkeit ein kleiner Kreis bzw. ein schmaler Streifen; zusammenfallen sollen aber ihre geometrischen Mitten.

Wir hatten die „Beobachtung“ im Sinne der genauen Einstellung eines Apparatteiles als zweite der Hauptarbeitsstufen bei jeder Messung bezeichnet. Bei einigen Messungen fehlt dieselbe gänzlich; sie wird durch eine Vorrichtung ersetzt, welche im Apparate selbst irgendeine Verschiebung oder überhaupt eine gewisse Veränderung hervorruft. So ruft z. B. die Schließung des elektrischen Stromes eine Drehung der Galvanometernadel, die Erwärmung (bei Messungen des Ausdehnungskoeffizienten, des Schmelz- und Siedepunktes) eine Bewegung des Quecksilbers hervor usw.

III. Die Ablesung kann sich entweder auf eine Länge oder auf eine Zeit beziehen. Die Ablesung der Länge wird an einer Skala ausgeführt, die entweder an einer Geraden oder einer Kreislinie angebracht ist; hier muß man den Zahlenwert der Skala bestimmen, welcher einem bestimmten Punkte derselben entspricht. Liegt dieser Punkt zwischen zwei ganzen Teilstrichen der Skala, so werden die Bruchteile nach Augenmaß geschätzt.

Die Ablesung der Zeit geschieht 1. nach dem Gehör mittels einer Vorrichtung, welche die ganzen oder halben Sekunden schlägt, wobei der Augenblick zu bestimmen ist, in welchem die zu beobachtende Erscheinung auftritt, und 2. mit Hilfe sogenannter Chronographen (s. u.), welche die Ablesung der Zeit ebenfalls auf eine Längenablesung zurückführen.

**§ 4. Einige besondere Angaben über die Ausführung der physikalischen Messungen.** Nachdem wir die Aufstellung, Beobachtung und Ablesung als die Hauptoperationen, aus welchen jede physikalische Messung besteht, besprochen haben, wollen wir noch einige Hinweise geben, die für Anfänger von Nutzen sein können.

1. Die Kunst, gute, d. h. genaue Messungen auszuführen, besteht darin, daß man die äußersten Grenzen dessen erreicht, was der Apparat zu geben vermag. Für grobe, angenäherte Messungen, mit denen man sich für technische Zwecke (z. B. in der Elektrotechnik) begnügt, können einfache Apparate Verwendung finden, die so bequem konstruiert sind, daß ein jeder in kürzester Zeit mit ihnen umgehen lernt. Etwas ganz anderes ist es aber bei wissenschaftlichen Untersuchungen, wo die äußerste Grenze der Genauigkeit erreicht werden muß. Hierzu ist eine eingehende Kenntnis aller Eigenschaften des Instrumentes und jene Umsicht erforderlich, von welcher

oben die Rede war. Ein geschickter Experimentator wird selbst mit einem relativ schlechten Apparate bessere Resultate erzielen, als ein ungeschickter mit einem vollkommeneren.

2. Wo es irgend möglich ist, muß jede Messung vielmals wiederholt werden. Diese Bemerkung gilt insbesondere für Anfänger, welche erfahrungsgemäß geneigt sind, sich mit nur einer Messung zu begnügen. Meist hat man viel Zeit und Mühe darauf zu verwenden gehabt, um das Resultat der ersten Messung zu erlangen; die späteren, wiederholten Messungen verlangen dagegen schon viel weniger und nicht selten immer weniger Zeit und Mühe.

3. Wenn der Einfluß irgend einer Wirkung  $A$  auf eine gewisse Größe  $B$  gemessen wird (z. B. der Einfluß einer Temperaturänderung auf den elektrischen Widerstand eines Drahtes), so muß man entweder abwechselnd Messungen bei Anwesenheit und Abwesenheit dieses Einflusses vornehmen, oder wenigstens, wenn man die Messung von  $B$ , ohne daß  $A$  vorhanden war, begonnen hatte, wieder auf den Anfangszustand zurückgehen, d. h. wieder eine Messung von  $B$  bei Abwesenheit von  $A$  vornehmen. So kann man sich davon überzeugen, ob während der Versuche am Instrumente selbst oder in der Versuchsanordnung nicht irgendwelche Veränderungen vorgegangen sind, welche auf die Angaben des Instrumentes von Einfluß sein können. Bemerkt man eine solche Veränderung, und ist sie auch nur gering, so muß man sie mit in Betracht ziehen, indem man etwa annimmt, daß sie allmählich und proportional der Zeit, welche seit der ersten Messung verflossen war, erfolgt ist.

4. Niemals darf man unterlassen, zu Beginn der Versuchsreihe aufzuzeichnen, was man mißt und nach welcher Methode man die Messung vornimmt; ferner hat man den Beobachtungsort und die Beobachtungszeit einzutragen, und zwar das genaue Datum und bei jeder Einzelmessung die Minuten, erforderlichenfalls auch die Sekunden bis auf Bruchteile. Fast immer ist auch eine Angabe der Temperatur erforderlich. Auch andere Größen, wie Luftdruck, Luftfeuchtigkeit, magnetische Deklination usw. hat man anzumerken, falls sie einen Einfluß auf das Ergebnis der Messungen haben können.

5. Die numerischen Daten, welche man bei der direkten Ablesung erhält, sind nur in seltenen Fällen den Zahlenwerten der zu messenden Größen gleich, welche man zu bestimmen wünscht. Fast immer erhält man die gesuchten Werte durch Rechnung, indem man in bestimmte Formeln die Resultate der Ablesungen einsetzt. Man muß es sich zur Regel machen, die unberechneten Beobachtungsergebnisse sich nicht anhäufen zu lassen, sondern sie sobald wie möglich zu berechnen, denn die Resultate der Berechnung können oftmals sehr wertvolle Winke über Mängel der angewandten Methode, über äußere

Einflüsse usw. geben. Die Berechnungen, die bisweilen mehr Zeit und Mühe erfordern als die Messungen selbst und jedenfalls eine weit weniger interessante Arbeit darstellen, muß man derart ausführen, daß sie sich leicht übersehen und nachprüfen lassen. Als Hilfsmittel können Rechenmaschinen und verschiedene Tabellen verwandt werden, wie z. B. die Barlowschen Tafeln (enthaltend die Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln der ganzen Zahlen und ihre reziproken Werte) und Crelles Rechentafeln (Multiplikationstabellen).

6. Die gewählte Meßmethode ist zunächst einer theoretischen Prüfung zu unterziehen, um die Bedingungen für ihre größtmögliche Empfindlichkeit zu finden. Letztere ist dann erreicht, wenn eine sehr kleine Änderung der zu messenden Größe eine möglichst große Änderung der Ablesung hervorruft. Allgemeine Regeln lassen sich hier nicht aufstellen, außer etwa für den Fall, daß man die kleine Änderung  $\Delta x$  der Größe  $x$  zu messen hat, welche durch irgendeine äußere Ursache hervorgerufen wird (z. B. die Änderung  $\Delta x$  des Widerstandes  $x$  eines Teiles einer galvanischen Kette durch Erwärmung oder die Änderung  $\Delta x$  der Lichtstärke  $x$  unter dem Einflusse magnetischer Kräfte; vgl. die magnetische Drehung der Polarisationssebene). In diesem Falle hat man darauf zu achten, daß das anfängliche  $x$  möglichst klein, womöglich gleich Null sei, oder daß die Größe  $x$  selbst ohne Einfluß auf die Ablesung sei. Letztere muß einzig von  $\Delta x$  abhängen. Ist der Widerstand  $x$  einer galvanischen Kette sehr groß, so ruft eine dem absoluten Betrage nach kleine Änderung  $\Delta x$  keine merkliche Änderung der Stromstärke hervor, folglich auch keine merkliche Änderung in den Angaben des Instrumentes (des Galvanometers); dieselbe Größe  $\Delta x$  bewirkt dagegen eine große Änderung in den Angaben des Instrumentes, wenn letztere von  $x$  gar nicht abhängen. Eine kleine Änderung  $\Delta x$  einer intensiven Helligkeit bleibt unbemerkt; die ihrem absoluten Betrage nach gleiche Lichtstärke  $\Delta x$  auf dunklem Hintergrunde ist dagegen äußerst merklich.

Eine wichtige Rolle in der vorliegenden Frage spielt das von Fechner aufgestellte psychophysische Gesetz. Bezeichnet man mit  $J$  die Größe eines auf unsere Sinnesorgane ausgeübten Reizes, mit  $\Delta J$  die Änderung desselben, welche eine eben noch merkbare Änderung der Empfindung hervorruft (Schwellenwert der Empfindung), so muß nach diesem Gesetz  $\Delta J$  proportional  $J$  sein. Findet man z. B. beim Heben von zwei einander fast gleichen Gewichten eben noch einen Unterschied heraus, so muß der Unterschied zweier  $n$ mal größerer Gewichte auch selbst  $n$ mal größer sein, um noch mit demselben Grade von Sicherheit erkannt zu werden. Fechner folgert hieraus, daß die Empfindungen eine arithmetische Reihe bilden, wenn die Reize in einer geometrischen anwachsen. Bekanntlich hat man die Sterne

nach ihrer Helligkeit in eine Reihe eingeordnet und unterscheidet demgemäß Sterne erster, zweiter Größe usw.; dabei ordnete man sie der Empfindung nach in eine arithmetische Reihe. Durch photometrische Messungen hat man sich nun überzeugt, daß die wahre Helligkeit der Sterne aufeinanderfolgender Größenklassen eine geometrische Reihe bildet. In der Akustik werden wir sehen, daß die Schwingungszahlen der Töne, welche gleiche Intervalle miteinander bilden, eine geometrische Progression darstellen.

7. Jede theoretisch gefundene Meßmethode stellt etwas Abstraktes, ja man könnte sagen, Ideales, dar. Bei ihrer Anwendung in der Praxis tritt stets eine ganze Reihe von Nebenumständen zutage, welche die endgültige Ablesung beeinflussen und somit die theoretische Formel, die uns den gesuchten Zahlenwert der zu messenden Größe gibt, ändern. Mit Rücksicht hierauf müssen wir, um den wahren Wert der gemessenen Größe zu erhalten, an unseren Rechnungen noch gewisse Korrekturen anbringen. Eine Hauptaufgabe des Experimentators besteht somit auch darin, alle die Nebenumstände ausfindig zu machen, welche das Ergebnis der Messung beeinflussen können und die entsprechenden Korrekturen zu bestimmen.

Bei der Berechnung dieser Korrekturen muß man mit besonderer Umsicht verfahren, um nicht im Streben nach einem möglichst genauen Resultate in folgenden, leicht möglichen Fehler zu verfallen. Die verschiedenen das Ergebnis beeinflussenden Nebenumstände üben einen sehr verschieden großen Einfluß aus; einige der Korrekturen betragen vielleicht mehrere Prozent, andere nur zehntel, hundertstel oder sogar tausendstel Prozent des Resultates. Man hat sich nun durchaus vor einer unnötigen Einführung kleinster Korrekturen zu hüten, bevor nicht die relativ großen Korrekturen bereits angebracht sind. Bei Beobachtung der Schwingungen eines Wagebalkens kann man Korrekturen anbringen, die nur 0,001 Proz. des zu bestimmenden Gewichtes (und noch weniger) betragen; solche Korrekturen sind aber ganz zwecklos und führen zu einer Selbsttäuschung, wenn man nicht gleichzeitig auch die viel bedeutenderen Korrekturen, so z. B. die wegen des Gewichtsverlustes in der Luft, die 0,1 Proz. übersteigen kann, angebracht hat.

8. Beim Endresultat, das meist in Form einer Zahl mit einem Dezimalbruch erscheint, hat man die absolute Genauigkeit desselben von seiner relativen Genauigkeit zu unterscheiden. Diese und jene wird durch denjenigen Teil der erhaltenen Zahl bestimmt, für dessen Richtigkeit wir uns zu verbürgen imstande glauben. Hat sich z. B. ein Gewicht zu 125,0463 g ergeben, und wir können sicher sein, daß die vorletzte Ziffer 6 sein muß (daß also das Gewicht größer als 125,0455 g und kleiner als 125,0465 g ist), so beträgt die absolute Ge-

nauigkeit der Wägung 0,5 Milligramm, die relative Genauigkeit dagegen 0,00001. Ist die Genauigkeit nur in geringem Maße oder gar nicht von den Dimensionen der zu messenden Größe (Winkel, Temperaturdifferenz, bisweilen auch Länge und Zeit) abhängig, so spricht man nur von der absoluten Genauigkeit („genau bis auf 0,1 Bogensekunde“, „bis auf 0,01° C“, „bis auf 0,001 mm“, „bis auf 0,01 Sek.“). In der weitaus größten Mehrzahl der Fälle hat man jedoch, wenn man von der Genauigkeit eines Messungsergebnisses spricht, die relative Genauigkeit im Sinne. Sie wird durch die Ordnung der von links nach rechts gezählten Ziffer bestimmt, für welche man sich noch eben verbürgen kann. Bisweilen ist das Resultat infolge der für die Messung gewählten Einheit durch einen kleinen Dezimalbruch gegeben. In diesem Falle werden die links stehenden Nullen nicht gezählt; als erste geltende Ziffer wird die erste von Null verschiedene angesehen und von ihr aus die Zählung begonnen. Ist z. B. die gemessene Größe gleich 0,0016843 und wir können uns für die Richtigkeit der Ziffer 8 verbürgen, so heißt dies nicht etwa, daß die Genauigkeit 0,00001 beträgt, vielmehr hat man zu sagen, die Größe sei „bis auf die dritte geltende Ziffer genau“ oder bis auf 0,01 genau gemessen. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die erste geltende Ziffer 9 und die folgende 5 oder darüber beträgt. Wäre beispielsweise das Resultat der Messung 0,0096843 und die Ziffer 8 verbürgt, so würde die Genauigkeit fast 0,001 betragen.

Man darf nun nicht vergessen, daß zwischen der Genauigkeit der einzelnen Messungen, die man zur Bestimmung des Zahlenwertes einer Größe vorzunehmen hat und der Genauigkeit des letzteren noch ein großer Unterschied bestehen kann. Hat man z. B., um eine gewisse Größe  $y$  (Torsionskoeffizient, vgl. sechster Abschnitt) zu messen, den Radius  $x$  eines Drahtes, der etwa 0,4 mm beträgt, zu bestimmen, und ist  $y$  proportional  $x^4$ , so kann man selbst bei der äußersten, noch erreichbaren Genauigkeitsgrenze, falls nämlich  $x$  bis auf 0,001 mm genau gemessen ist, doch einen Fehler von 1 Proz. im Zahlenwerte der Größe  $y$  erwarten. Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man sich leicht in ähnlichen Fragen zurechtfinden. Hat man im allgemeinen  $y = f(x)$ , wo  $x$  unmittelbar gemessen und  $y$  nach einer bestimmten Formel berechnet wird, so zieht der bei Messung von  $x$  möglicherweise auftretende Fehler  $\Delta x$  den relativen Fehler  $\Delta y$  in der Bestimmung von  $y$  nach sich; letzteren kann man hinreichend genau durch die Näherungsgleichung

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x) \Delta x}{f(x)} = \Delta \lg f(x) \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{dy}{y} = d \lg y \dots \dots \dots (2, a)$$

finden.

9. Eine oftmalige Wiederholung ein und derselben Messung durch ein und dieselbe Person, ohne Änderung in der Anordnung oder Methode, wird uns stets im Zweifel darüber lassen, ob sich nicht bei diesen Wiederholungen auch gewisse Fehler, die von einer falschen Aufstellung oder Fehlerhaftigkeit der Apparate, äußeren Nebenumständen herrühren oder vom Beobachter selbst begangen sind, ebenfalls wiederholt haben. Daher ist die Änderung der Meßmethode eines der hauptsächlichsten Hilfsmittel zur Erlangung genauer Resultate. Die Änderung kann sich auf gewisse Einzelheiten bei der Messung oder auf die gesamte Methode beziehen.

Die Einzelheiten der Messung muß man unbedingt, wo es nur irgend angeht, abändern; es muß dies schon aus dem Grunde geschehen, weil oftmals irgend eine Ursache  $A$ , deren Größe man nicht bestimmen kann, das Ergebnis der Messung beeinflusst. In solchem Falle muß man die Messung zweimal vorzunehmen suchen, jedoch so, daß der Einfluß von  $A$  beide Male der entgegengesetzte wird, d. h. in einem Falle das numerische Resultat vergrößert, im zweiten vermindert. Nimmt man sodann das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten, so wird dadurch „der Einfluß von  $A$  beseitigt“, freilich nicht ganz, denn jene zwei entgegengesetzte Wirkungen sind im allgemeinen nicht genau gleich. Wenn möglich, muß man auch die Messungen so vornehmen, daß man zu der Größe nach wesentlich verschiedenen Angaben gelangt, die dann übereinstimmende Endresultate geben müssen.

---

## Zweites Kapitel.

### Messung von Längen und Flächen.

§ 1. **Maßstäbe.** Wir wollen nun kurz die Methoden behandeln, die zur Messung von Längen, Winkeln, Volumina, Massen, Kräften und Zeitabschnitten dienen; wie die weiterhin vorkommenden Größen gemessen werden, das soll an entsprechender Stelle auseinandergesetzt werden. Wir beginnen mit der Beschreibung der Messung von Längen und Flächen.

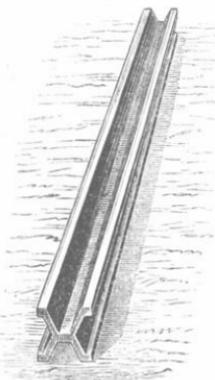
Um genaue Längenmessungen ausführen zu können, muß man die Skalen der einzelnen Instrumente mit einer sicher richtigen Skala vergleichen und zu diesem Zwecke braucht man genaue Normalmaßstäbe (Längentalons).

Es gibt zwei Arten von Längenmaßstäben: 1. Endmaßstäbe (étalons à bout); diese besitzen geringere Genauigkeit, und wird bei ihnen die Länge bestimmt durch den Abstand zwischen den beiden Tangentialebenen, die durch die schwach abgerundeten Ecken derart gezogen werden, daß sie einander parallel und zur Achse des Maßstabes

senkrecht sind (und zwar bei bestimmter Temperatur). 2. Strichmaßstäbe (*étalons à trait*), auf denen zwei Teilstriche senkrecht zur Achse angebracht sind; als Länge des Maßstabes gilt der Abstand zwischen diesen Teilstrichen bei bestimmter Temperatur.

Die genauesten Metermaßstäbe werden gegenwärtig in Sèvres bei Paris im Internationalen Bureau der Maße und Gewichte hergestellt, welches auf Kosten fast aller zivilisierten Nationen unterhalten wird. Diese Maßstäbe bestehen aus einer Legierung von 90 Proz. Platin

Fig. 119.



und 10 Proz. Iridium und haben die Dichte 21,53; ihre Gestalt gibt Fig. 119 wieder. Der Querschnitt ähnelt einem X, und ist diese Form gewählt worden, weil eine Durchbiegung nur in geringem Maße auftritt. Die Endstriche sind auf dem Grunde der oberen Rinne in je 1 cm Abstand von jedem der beiden Enden eingeschnitten; die Fläche, auf der sie sich befinden, geht durch den Schwerpunkt des Maßstabes. Als Urprototyp des Meters gilt der Maßstab, welcher 1799 verfertigt wurde. Die internationale Kommission hat zunächst eine Kopie dieses Maßstabes hergestellt und darauf nach letzterer 31 Maßstäbe, die im Jahre 1891 durch

Loos an die verschiedenen Staaten verteilt wurden, die an der Einrichtung des Internationalen Bureaus der Maße und Gewichte mitgewirkt hatten.

Dem Deutschen Reiche fiel der Stab Nr. 18 zu; seine Länge beträgt

$$1 \text{ m} - 1,0 \mu + [8,642 t + 0,00100 t^2] \mu,$$

wo die Temperatur  $t$  in Graden der im internationalen Dienst für Maß und Gewicht angenommenen Normalskala ausgedrückt ist und  $\mu = 0,001 \text{ mm}$  bedeutet. Bei  $0^\circ$  ist die Länge also gleich  $1 \text{ m} - 1,0 \mu$ . Die Genauigkeit der Bestimmung beträgt bei mittlerer Temperatur ein bis zwei Zehntausendteile Millimeter.

Die wahre, als Längeneinheit geltende Meterlänge wird durch das Meter dargestellt, welches als internationales Prototyp in dem eben genannten Bureau der Maße und Gewichte im Pavillon de Breteuil zu Sèvres bei Paris aufbewahrt wird; für jeden einzelnen Staat gilt das in seinen Besitz übergegangene Maß als Prototyp der Längeneinheit, natürlich mit Rücksicht auf die für dasselbe geltenden, dem Maßstabe beigegebenen Korrekturen. Diese einzelnen Prototypen unterscheiden sich voneinander nicht, wenigstens nicht innerhalb der Grenzen, welche für die heutige Entwicklung der Technik und der Meßmethoden gelten.

Maßstäbe, die nicht einen so hohen Grad von Unveränderlichkeit besitzen müssen, wie die Prototypen, können aus verschiedenem, weniger

kostbarem Material hergestellt werden. Guillaume (1903) hat vorgeschlagen, zu diesem Zwecke gewisse von ihm untersuchte Legierungen von Stahl und Nickel zu benutzen<sup>1)</sup>. Kaye<sup>2)</sup> hat ein Meteretalon aus isotropem (geschmolzenem) Quarz in Form einer Röhre konstruiert (äußerer Durchmesser 19 mm, Wanddicke 1,5 mm), welche mit Wasser gefüllt werden kann. Die Vorteile dieses Maßstabes beruhen auf dem kleinen Wert des Ausdehnungskoeffizienten und der sehr geringen thermischen Nachwirkung (Bd. III).

Zum Vergleichen der verschiedenen Maßstäbe untereinander dient der sogenannte Komparator. In § 4 wird das Prinzip angedeutet werden, auf welchem seine Konstruktion beruht.

Wiederholt ist darauf hingewiesen worden, daß die aufgestellte Längeneinheit durch irgendeine gewaltige Katastrophe oder durch die allmähliche Abnutzung der Urmaßstäbe verloren gehen könnte; auch wäre es möglich, daß sie sich allmählich verändere. In diesen Fällen wäre es erwünscht, wenn man die verloren gegangene Meterlänge genau wiederfinden könnte. Daß sich dieses Ziel erreichen läßt, ist von dem amerikanischen Gelehrten Michelson gezeigt worden; dieser schlug vor, das Verhältnis der Meterlänge zu einer solchen Länge zu bestimmen, die durch Beobachtungen einer bestimmten, nur von den Grundeigenschaften des Äthers oder der Materie abhängenden Erscheinung erhalten werden kann. Diesen Bedingungen genügt die Ausbreitung der Lichtschwingungen durch Luft von bestimmter Temperatur und bestimmtem Druck oder im Vakuum. Wir haben schon wiederholt erwähnt, daß man das Licht als harmonische Schwingungsbewegung betrachten kann. Die verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums unterscheiden sich voneinander durch ihre Schwingungsdauer (Periode), und einem Lichtstrahl von gegebener Farbe (Brechbarkeit) entspricht eine ganz bestimmte Wellenlänge  $\lambda$ . Nach dem Vorschlage von Michelson hat man die Wellenlänge eines bestimmten Strahles unter streng festgelegten Bedingungen als ursprüngliche Längeneinheit anzusehen und ein für allemal ihr Verhältnis zur Meterlänge festzustellen. Zu diesem Zwecke wählte Michelson drei Strahlen, einen roten, einen grünen und einen blauen, welche alle von den leuchtenden Dämpfen des Kadmiams ausgesandt werden, und fand in Luft von 15° C und 0,76 m Quecksilberdruck

für den roten Strahl . . . .	1 m = 1553 163,6 $\lambda_1$ ,
„ „ grünen „ . . . .	1 m = 1966 249,7 $\lambda_2$ ,
„ „ blauen „ . . . .	1 m = 2083 372,1 $\lambda_3$ ,

<sup>1)</sup> Arch. des sc. phys. et natur. 4 période, Vol. 15, p. 403, 1903.

<sup>2)</sup> Proc. R. Soc. 85, 430, 1911; Instrumentenkunde 32, 170, 1912.

wenn  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  die Wellenlängen der betreffenden drei Strahlen sind. Hieraus folgt umgekehrt

$$\lambda_1 = 0,64384722 \mu,$$

$$\lambda_2 = 0,50858240 \mu,$$

$$\lambda_3 = 0,47999105 \mu^1).$$

Mit anderen Methoden, kleine Längen mit Hilfe der Lichtwellen zu messen, werden wir uns im zweiten Bande bekannt machen.

Bei der Messung der Dimensionen fester Körper setzen wir voraus, daß diese Dimensionen von der Lage der Körper im Raume unabhängig sind. Wir werden aber sehen (Bd. II und V), daß mehrere Forscher (Fitzgerald, H. A. Lorentz) auf die Möglichkeit hingewiesen haben, daß alle Materie bei der Bewegung durch den Äther (z. B. mit der Erde) eine Dehnung in der Richtung dieser Bewegung erleidet, während die zu dieser Richtung senkrechten Dimensionen unverändert bleiben. Diese Änderung ist aber jedenfalls äußerst gering: theoretisch soll die relative Längenänderung gleich  $w^2:2v^2$  sein, wo  $v$  die Geschwindigkeit des Lichtes und  $w$  die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers durch den Äther bedeuten.

§ 2. Nonius. Der Nonius dient dazu, die Zehntel der auf Maßstäben angebrachten Teilungen abzulesen; er ist ein kleiner Nebenmaßstab, der am Hauptmaßstabe entlang gleiten kann und gewöhnlich in zehn Teile geteilt ist, deren Gesamtlänge neun (Fig. 120) oder elf (Fig. 122) Teilungen des Hauptmaßstabes gleichkommt, so daß die Abstände seiner Teilstriche der Nebenteilung nur  $\frac{9}{10}$  der Abstände seiner Teilstriche der Hauptteilung betragen. Im ersten Falle müssen die Noniusteilungen aufeinander nach derselben Seite folgen, wie die Teilungen am

Fig. 120.



Fig. 121.

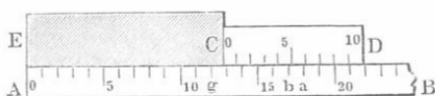
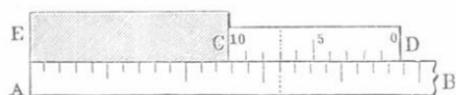


Fig. 122.



Maßstabe (Fig. 120 und 121), im zweiten Falle (Fig. 122) muß die Anordnung die umgekehrte sein. Aus Fig. 121 ist ersichtlich, wie man mit Hilfe des Nonius  $CD$  eine Länge  $EC$  am Maßstabe  $AB$  bis auf 0,1 der Teilungen des letzteren mißt. Ist der Nonius an  $EC$

<sup>1)</sup> Michelson, Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, t. XI; Journ. de phys. (3) 3, p. 5, 1894.

hergebracht, so fällt sein siebenter Teilstrich mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammen. Der sechste Teilstrich des Nonius ist vom nächsten Teilstrich ( $a$ ) des Maßstabes um 0,1, der fünfte von ( $b$ ) um 0,2, der vierte um 0,3 entfernt usw. Somit ist offenbar  $EC = 12,7$  Teilungen des Maßstabes. Ebendieselbe Länge hat  $EC$  auch in Fig. 122.

Bei uns werden fast ausschließlich Nonien der ersten Form angewandt. Die ganzen Teile der Skala werden unmittelbar abgelesen, die Zahl der Zehntel ist gleich der Ordnungszahl des Noniusteilstriches, der mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammenfällt.

**§ 3. Mikrometer.** Unter diesem Namen versteht man Apparate oder Teile von Apparaten, die zum Messen sehr klein linearer Dimensionen dienen.

Zum Messen von mikroskopischen Körpern wendet man bisweilen folgende Methode an. Man bringt in die Fokalebene des Objektivs eines Mikroskops ein dünnes Glasplättchen, auf welchem parallele Teil-

Fig. 123.

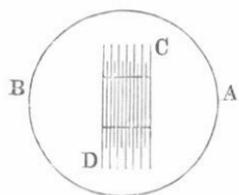


Fig. 124.

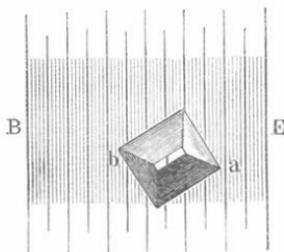
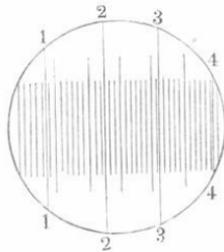


Fig. 125.



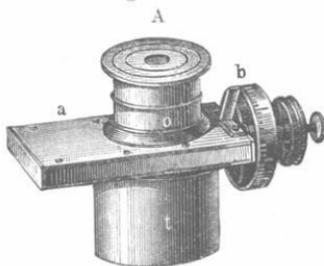
striche von ziemlich beträchtlicher Länge äquidistant eingeritzt sind (vgl. Fig. 123 und 124); es mögen  $n$  solcher Teilstriche auf 1 mm gehen. Durch das Okular sieht man gleichzeitig diese Teilstriche sowie das Bild des zu messenden Gegenstandes, welches vom Objektiv entworfen wird (Fig. 124). Auf diese Weise werden die Dimensionen jener Bilder unmittelbar gefunden. Die wahren Dimensionen des Gegenstandes sind  $k$  mal kleiner, wenn  $k$  die Vergrößerung bedeutet, die vom Objektiv bewirkt wird. Um  $k$  zu finden, betrachtet man unter dem Mikroskop eine andere feine Skala mit bekannter Teilung, von der einige Teilstriche im Gesichtsfelde erscheinen; es mögen etwa  $m$  von diesen Teilstrichen auf 1 mm gehen. Fig. 125 stellt das Gesichtsfeld mit beiden gleichzeitig sichtbaren Skalen dar, wobei 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3 die Teilstriche der Hilfsskala sind. Man bestimmt nun, wieviele Teilstriche der einen Skala auf eine bestimmte Zahl der anderen kommen und hieraus ferner, wieviele Teilstriche der Okularskala (etwa  $p$ ) gleich einer Teilung des Bildes der Hilfsskala sind, deren scheinbare Größe gleich  $\frac{k}{m}$  Millimeter ist. Aus der Beziehung  $\frac{k}{m} = \frac{p}{n}$  wird  $k$  gefunden.

Bei einer Reihe von Mikrometern beruht die Messung darauf, daß man die Umdrehungszahl einer Schraube mit sehr feinem und regelmäßigem Schnitt bestimmt. Solche Schrauben mit der entsprechenden Schraubenmutter nennt man Mikrometerschrauben. Teile von Umdrehungen werden an dem Schraubenkopf abgelesen, welcher mit Teilungen versehen ist, neben denen sich ein unbeweglicher Zeiger oder ein Nonius befindet. Die gesuchten Dimensionen der zu messenden Körper werden hier durch die Größe der Drehung der Mikrometerschraube oder durch die Verrückung der Schraube selbst oder gewisser Teile des Apparates gemessen.

Ein sehr empfindliches elektrisches Mikrometer ist von Ph. Shaw<sup>1)</sup> angegeben worden. Bei der Berührung der Mikrometerschraube mit dem auszumessenden Körper wird ein sehr schwacher elektrischer Strom (0,0002 Ampere) geschlossen, wobei in einem Telephon ein Geräusch entsteht. Guillet<sup>2)</sup> hat eine interessante elektrische Methode angegeben, sehr kleine Längen zu messen, z. B. Deformationen fester Körper bei ihrer Dehnung oder Torsion.

• § 4. **Okularmikrometer.** Dieser wichtige Meßapparat wird am Okular von Mikroskopen und Fernrohren angebracht. Er befindet sich in einem flachen Gehäuse *a* (Fig. 126), welches die Röhre *A* des Okulars umgibt. Von außen sieht man nur den Kopf *b* der Mikrometerschraube,

Fig. 126.



die dazu dient, einen oder mehrere Fäden des Okulars parallel mit sich selbst zu verschieben. Das Innere ist in Fig. 127 abgebildet. *K* ist das flache Gehäuse, in welchem sich der sogenannte Schlitten mit der Platte *p*, welche die Fäden trägt, bewegt. An dieser Platte sind drei Ansätze *K*<sub>1</sub>, *K*<sub>2</sub> und *K*<sub>3</sub> befestigt. *K*<sub>1</sub> ist mit einem Schraubeneinschnitt, durch welchen die Mikrometerschraube hindurchgeht, versehen, *K*<sub>2</sub> dient nur zur Führung; die glatte Fortsetzung der Schraubenspindel geht nämlich frei durch *K*<sub>2</sub> hindurch. Dasselbe gilt für den Ansatz *K*<sub>3</sub> und den Stab *F*, dessen linkes Ende an der inneren Wand des Rahmens *K* befestigt ist. Eine starke Feder, welche den Stab *F* umgibt, wirkt dem Druck der Mikrometerschraube entgegen; dieselbe verhindert den toten Gang der Schraube und bewirkt bei Linksdrehen der Schraube das Zurückgehen (nach rechts) des Schlittens.

Um die Länge irgend einer Linie zu messen, ist es erforderlich, daß sie sich ganz im Gesichtsfelde befinde und zwar senkrecht zu einem

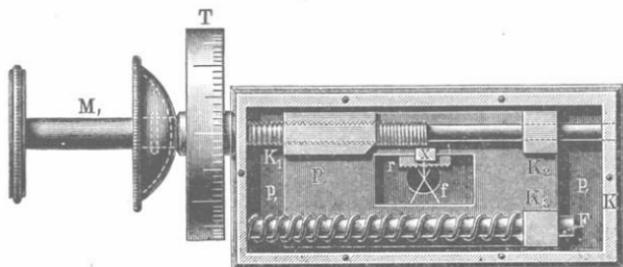
<sup>1)</sup> Phil. Mag. (5) **50**, 537, 1900; Phys. Rev. **16**, 140, 1903; Proc. R. Soc. **76**, 350, 1905; **77**, 340, 1906.

<sup>2)</sup> C. R. **146**, 465, 1908.

der Fäden. Man hat  $M$  so lange zu drehen, bis der Faden zunächst mit einem, dann mit dem anderen Endpunkte des Bildes der zu messenden Länge zusammenfällt.

Die Differenz bei den Ablesungen ergibt die Zahl der Schraubenumdrehungen, welche der Länge des Bildes entspricht. Um nun die wahre Länge der Linie zu finden, hat man den sogenannten Wert einer Schraubenumdrehung zu bestimmen, der unter anderem auch von der Entfernung des Gegenstandes vom Fernrohr abhängt. Man hat also die wahre Länge eines Gegenstandes zu ermitteln, für welchen die Länge seines Bildes im Fernrohr gleich

Fig. 127.



der Verschiebung des Fadens bei einer Schraubenumdrehung ist. Um diese Größe zu finden, hat man einen möglichst genauen Maßstab an die Stelle des zu messenden Gegenstandes oder in parallele Lage zu ihm zu bringen, so daß die Bilder von wenigstens zwei Teilstrichen im Gesichtsfelde erscheinen, und zwar in paralleler Lage zum Faden, den man zuerst mit dem einen und dann mit dem anderen Teilstrich zur Deckung bringt. Kennt man den wahren Abstand der Teilstriche des Maßstabes und bestimmt die entsprechende Zahl der Schraubenumdrehungen, die einer Verschiebung des Fadens um einen Teilstrich entsprechen, so läßt sich leicht die Länge am Maßstabe, welche einer Umdrehung der Mikrometerschraube entspricht, finden.

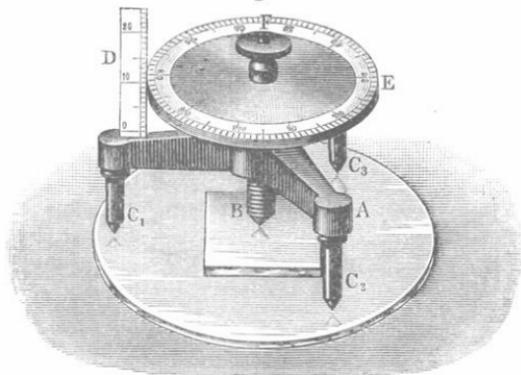
Im § 1 dieses Kapitels wurde erwähnt, daß zum Vergleichen von Maßstäben sogenannte Komparatoren dienen. Ihre Konstruktion versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst. Der Brunnersche Komparator, welcher im internationalen Bureau der Maße und Gewichte gebraucht wird, hat folgende Einrichtung. Zwei mit Okularmikrometern versehene Mikroskope sind vertikal in einem Abstände von beispielsweise einem Meter aufgestellt. Jedes derselben ist auf einem gesonderten, möglichst festen Pfeiler montiert. Unter die Mikroskope wird ein länglicher Kasten gebracht, in welchem die zu vergleichenden Maßstäbe nebeneinander liegen. Dieser Kasten ist senkrecht zu seiner Länge verschiebbar, so daß er sich auf die durch die Achsen beider Mikroskope gehende Vertikalebene zubewegt. Nun werden, indem man

den Kasten entsprechend verschiebt, die einzelnen Maßstäbe unter die Mikroskope gebracht und jedesmal die Endstriche derselben zur Koinzidenz mit den Meßfäden der Mikroskope gebracht. Die algebraische Differenz der mikrometrischen Verschiebungen, die nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet werden, bestimmt die gesuchte Längendifferenz je zweier Maßstäbe.

Lafay<sup>1)</sup> hat einen sehr genauen Komparator für Endmaßstäbe (S. 279) konstruiert. Der Komparator des Standards Departement of the board of trade in London dient hauptsächlich zur Bestimmung der Differenz zwischen einer Längennormale (Imperial Standard Yard) und Kopien davon. Seine Einrichtung beruht auf der Interferenz von Lichtstrahlen (Bd. II), und zwar ist das Okularmikrometer des einen Mikroskops durch einen Teil (beweglicher Spiegel) eines Interferometers ersetzt. Es läßt sich eine sehr große Schärfe der Einstellung erreichen, indem man die Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtet. Die Breite des Striches auf dem Imperial Standard Yard entspricht z. B. 45 Interferenzstreifen. Es muß überhaupt bemerkt werden, daß die Striche auf den alten Längenmaßen viel zu breit und unregelmäßig sind für die neuen Komparatoren. Der Australier Grayton hat eine Methode erfunden, so dünne Striche zu ziehen, daß ihrer 120 000 auf den Zoll gehen und damit ist diese wichtige Frage für die Konstruktion der Längennormalen gelöst. Der Komparator des Standard Departements ist von Tutton beschrieben worden<sup>2)</sup>.

§ 5. **Sphärometer.** Dieser Apparat dient dazu, die Dicke von Platten zu messen, Unebenheiten auf einer ebenen Fläche zu untersuchen, sowie endlich

Fig. 128.



den Krümmungsradius sphärischer Flächen, z. B. optischer Linsen, zu bestimmen. Das einfache Sphärometer (Fig. 128) besteht aus einem dreifüßigen Tischchen, in dessen Mitte sich ein Schraubengewinde zur Aufnahme der Mikrometerschraube *F* befindet, deren Kopf eine kreisrunde Scheibe *E*

bildet. Letztere trägt am Rande eine Teilung, und zwar gewöhnlich 100 Teilstriche. Bei jeder vollen Umdrehung der Schraube hebt oder

<sup>1)</sup> C. R. **133**, 867, 1901.

<sup>2)</sup> Phil. Trans. **210**, 1, 1909; Nature **82**, 338, 1910.

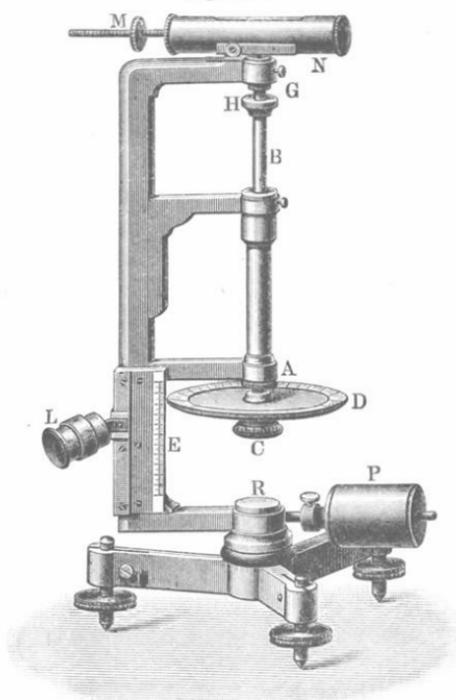
senkt sich *E* um einen Teilstrich der Skala *D*. Schraubt man den Kopf abwärts, so kommt schließlich das spitze Schraubenende in Berührung mit der Fläche *A*, auf welche der Apparat gestellt ist. Diesen Augenblick muß man nach dem Gefühl bestimmen. Liegt die Schraubenspitze noch oberhalb der Fläche, auf welcher die drei Füße stehen, so läßt sich der Apparat leicht zum Gleiten bringen, ist dagegen die Schraube zu weit hinabgeschraubt, so läßt sich der Apparat entweder um die Schraube drehen oder er schaukelt hin und her, da jetzt einer

der Füße die Fläche nicht berührt. Stellt man das Sphärometer auf das Resonanzkästchen einer Stimmgabel, so lassen sich diese geringen Schwankungen des Apparates um die Schraube leicht wahrnehmen. Um den Augenblick, wo die Schraube die Unterlage berührt, festzustellen, bedarf es einiger Übung. Hat man nun die Dicke irgendeines Gegenstandes *B* zu bestimmen, so bringt man die Schraube zunächst in Berührung mit der Fläche *A*, auf welche der Apparat gesetzt ist und liest die Skala *D* und die Teilung des Schraubenkopfes *E* an dem Punkte ab, welcher der vertikalen Kante der Skala gegenübersteht. Hierauf hebt man durch Drehen die Schraube, bringt den zu messenden Gegenstand *B* dar-

unter und stellt die Schraube wieder zur Berührung ein. Dann liest man wiederum ab und findet aus der Differenz beider Ablesungen die gesuchte Dicke. Je genauer man den Augenblick der Berührung zwischen dem Schraubenende und der Unterfläche bestimmt, um so genauer fällt die Messung aus.

In Fig. 129 ist das überaus empfindliche Wildsche Sphärometer abgebildet. Der Schraubenkopf *D* befindet sich gegenüber der Skala *E*; abgelesen wird mit Hilfe des Mikroskops *L*. Am oberen Ende der Schraube ist eine kleine Fläche *H* befestigt, auf welche der zu messende Körper gelegt wird. Durch einen über *H* befindlichen Ring führt ein kleiner Stift leicht hindurch; sein unteres Ende ist keilförmig, das obere

Fig. 129.



abgerundet und stößt gegen eine empfindliche Libelle, die um eine etwas seitlich gelegene Achse drehbar ist. Abgelesen wird zweimal, zuerst ohne, dann mit dem zu messenden Körper auf  $H$ , und zwar jedesmal, wenn das Bläschen in der Mitte der Libelle einspielt. Ein ebenfalls sehr empfindliches Sphärometer stammt von Common<sup>1)</sup>.

**§ 6. Kathetometer.** Dieser wichtige Apparat dient zur Messung des vertikalen Abstandes zweier Punkte. Man unterscheidet Kathetometer mit einem und mit zwei Fernrohren. In Fig. 130 ist ein Kathetometer der ersten Art dargestellt; Fig. 131 zeigt einen Durchschnitt durch den unteren Teil desselben, Fig. 132 einen ebensolchen durch das obere Ende. Der Apparat hat folgende Einrichtung. Auf dem Dreifuß  $D$  ist eine eiserne zylindrische Säule  $S$  befestigt; die Stellschrauben  $m$  dienen dazu, diese Säule vertikal aufzustellen. Nahe an ihrem unteren Ende ist die Säule mit einem kegelförmigen Zapfen  $C$  versehen, an ihrem oberen (Fig. 132) mit einer Vertiefung, welche die Spitze der gleich zu erwähnenden Schraube  $E$  aufnimmt. Diese ist von einem messingenen Hohlzylinder  $H$  umgeben (in Fig. 130 nicht sichtbar), welcher mit dem innen konisch abgedrehten Ringe  $R$  sich frei auf die Oberfläche des Zapfens  $C$  stützt; oben ist der Zylinder durch die Platte  $P$  geschlossen, durch welche die erwähnte Schraube  $E$  hindurchgeht. Hierdurch wird erreicht, daß der Zylinder  $H$  sich leicht um die Achse der Säule  $S$  drehen läßt. An dem Zylinder  $H$  ist der Maßstab  $M$  befestigt, welcher auf einem eingelegten Silberstreifen die Millimeterteilung trägt.

Am Maßstabe entlang läßt sich der Schlitten  $FF'$  bewegen; derselbe besteht aus zwei Teilen, welche durch die Schraube  $J$  verbunden sind. Der Teil  $F'$  kann durch die Klemmschraube  $K$  an dem Maßstabe befestigt werden, worauf eine feinere Einstellung mit Hilfe der Schraube  $J$  erfolgen kann. Eine über die Rolle  $T$  laufende Darmsaite, die das Gegengewicht  $Q$  trägt, hält den Schlitten und ermöglicht ihn bequem hinauf und herab zu bewegen. An dem oberen Teile  $F$  des Schlittens befindet sich ein Vorsprung  $V$ , welcher die horizontale stählerne Achse  $a$  des Gestelles  $G'G'G'$  stützt. An beiden oberen Enden trägt das Gestell, das vermittelt der Schraube  $o$  um diese Achse gedreht werden kann, in ringförmigen Lagern das Fernrohr  $B$ .  $L$  ist eine Libelle, deren Achsenrichtung durch Heben oder Senken des einen Endes, unabhängig von dem Fernrohr und dem Gestell  $G'G'G'$ , geändert werden kann.

Bevor man eine Messung mit dem Kathetometer ausführt, muß man es zunächst richtig aufstellen. Wir wollen hier bloß die Bedingungen aufzählen, denen die Aufstellung zu genügen hat.

1. Die optische Achse des Fernrohres, welche durch den Schnittpunkt der Kreuzfäden gehen muß, soll mit der geometrischen Achse

<sup>1)</sup> Nature 48, 396, 1893.

zusammenfallen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man das Fernrohr um seine Achse drehen kann, ohne daß das Bild irgendeines Punktes am beobachteten Objekt den Schnittpunkt der Fäden verläßt.

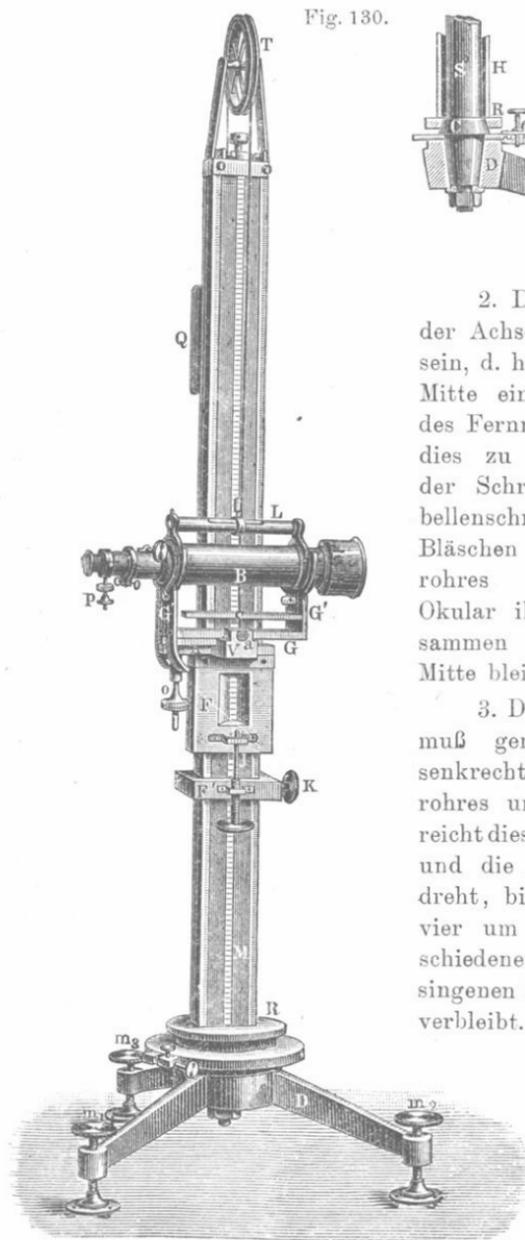


Fig. 130.

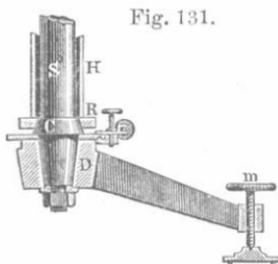


Fig. 131.

Fig. 132.



2. Die Achse der Libelle muß der Achse des Fernrohres parallel sein, d. h. das Bläschen muß in der Mitte einspielen, wenn die Achse des Fernrohres horizontal ist. Um dies zu erreichen, hat man an der Schraube *O* und an der Libellenschraube zu drehen, bis das Bläschen beim Umlegen des Fernrohres (so daß Objektiv und Okular ihre Lage vertauschen) zusammen mit der Libelle in der Mitte bleibt.

3. Die Achse des Kathetometers muß genau vertikal sein, also senkrecht zur Achse des Fernrohres und der Libelle. Man erreicht dies, indem man die Schraube *O* und die Fußschrauben *m* so lange dreht, bis das Libellenbläschen bei vier um je  $90^\circ$  voneinander verschiedenen Stellungen des messingenen Zylinders in der Mittellage verbleibt.

Alle ausführlicheren Hinweise auf die vorzunehmenden Handgriffe sollen hier, als nicht in den Rahmen dieses Buches gehörig, übergangen werden.

Um den Vertikalabstand zweier Punkte zu bestimmen, d. h. zu bestimmen, um wieviel der eine von zwei Punkten, welche übrigens nicht auf einer vertikalen Linie zu liegen brauchen, höher liegt als der andere, stellt man das Fernrohr in solcher Höhe fest, daß zunächst das

Fig. 133.

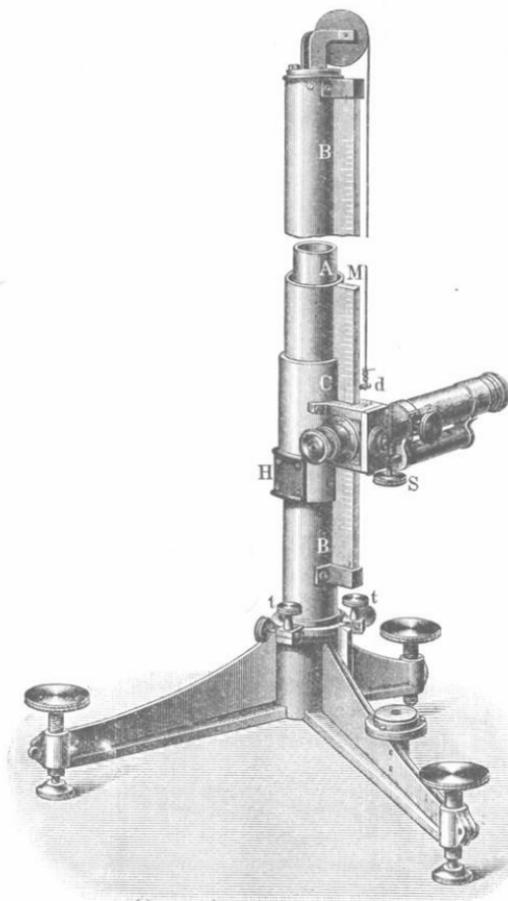


Bild eines der Punkte mit dem Durchschnittspunkt der Fäden zusammenfällt. Hierauf liest man an der Skala unter Benutzung des bei *F* angebrachten Nonius ab. Dasselbe wiederholt man dann, nachdem man das Bild des zweiten Punktes zum Zusammenfallen mit dem Schnittpunkt der Fäden gebracht hat. Zu letzterem Zweck hat man das Fernrohr zu heben oder zu senken und außerdem, falls sich die beiden Punkte nicht auf derselben vertikalen Geraden befinden, den Zylinder um seine vertikale Achse zu drehen. Die Differenz der beiden so erhaltenen Ablesungen ergibt dann den gesuchten Vertikalabstand.

In Fig. 133 ist ein in seiner Konstruktion von dem oben beschriebenen bedeutend abweichendes Kathetometer abgebildet.

Zur größeren Deutlichkeit ist der obere Teil getrennt gezeichnet. *A* ist die innere Säule, *B* der Messingzylinder. In eine flache Längsnute dieses Zylinders ist der gläserne Maßstab *M* eingelassen. Der Schlitten *C* ist an der Seite aufgeschnitten, um den Maßstab *M* hindurchzulassen; an *C* ist ein viereckiger Rahmen befestigt, welcher das Fernrohr trägt. Rahmen und Fernrohr sind gleichfalls mit Einschnitten versehen, durch welche der Maßstab *M* hindurchgeht. Die Seite des Maßstabes, welche die Teilung trägt, befindet sich im Gesichtsfelde des Fernrohrkulars,

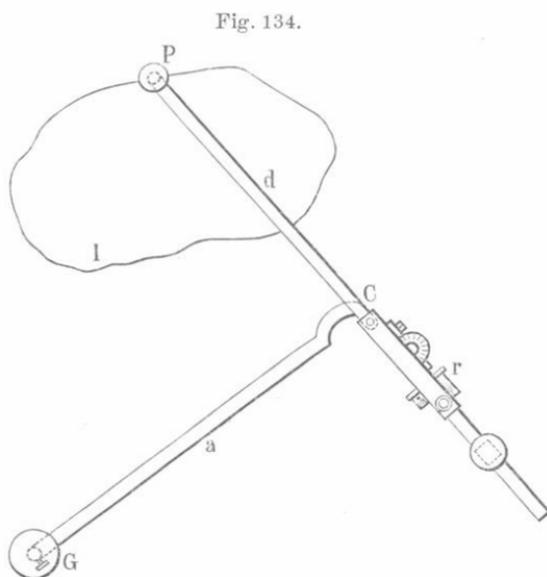
so daß der Beobachter gleichzeitig den Faden, auf welchen der zu beobachtende Punkt eingestellt wird, und die Skala sieht. Die Vorteile dieser Konstruktion liegen auf der Hand.

**§ 7. Flächenmessung. Planimeter.** Bisweilen hat man den Flächenraum einer gezeichneten, von mehr oder weniger unregelmäßigen Kurven begrenzten Figur zu messen. Angenähert kann man ihn finden, wenn man die Figur ausschneidet, abwägt und ihr Gewicht mit dem Gewicht eines aus demselben Papier geschnittenen Quadrates oder Kreises vergleicht.

Genauer erhält man die gesuchte Größe mit Hilfe sogenannter Planimeter. Von den zahlreichen hierher gehörigen Apparaten sollen bloß die Planimeter von Amsler und Prytz ohne Berücksichtigung der Theorie betrachtet werden:

Das Amslersche Planimeter <sup>1)</sup> ist in Fig. 134 schematisch dargestellt. Zwei Stäbchen  $GC$  und  $PCr$  sind in  $C$  durch ein Scharnier verbunden; in  $G$  befindet sich eine Spitze,

die in einem Punkte der Ebene befestigt wird, in welcher die Zeichnung liegt. Bei  $r$  ist eine kleine Rolle angebracht, die sich um eine zu  $CP$  parallele Achse drehen und auf der Zeichnungsebene dahinrollen kann. In  $P$  befindet sich ebenfalls eine Spitze, welche man mit der einen Hand um den Umriß der zu messenden Fläche herumführt, während man mit der anderen



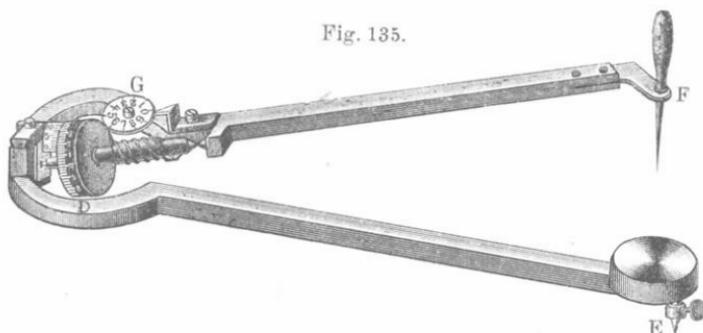
den Stift  $G$  gegen das Papier drückt. Die Zählvorrichtung und die Teilungen der Rolle  $r$  gestatten die Zahl  $n$  der Rollenumdrehungen zu bestimmen. Während  $P$  um den Umfang herumgeführt wird, befindet sich die Rolle bald in rollender, bald in gleitender Bewegung auf der Zeichnungsebene. Der gesuchte Flächeninhalt ist schließlich gleich

<sup>1)</sup> Amsler-Laffon, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, Schaffhausen 1856; siehe auch Zeitschr. f. Instr. 4, 11, 1884.

$S = kn$ , wo  $k$  einen Faktor bedeutet, der für jeden Apparat ein für allemal bestimmt werden muß und von der gewählten Flächeneinheit abhängt.

In Fig. 135 ist ein Amslersches Planimeter von etwas abweichender Form dargestellt; hier ist  $E$  der feste,  $F$  der bewegliche Stift,  $D$  die Rolle nebst dem Nonius,  $G$  die Zählvorrichtung.

Fig. 135.



Das Planimeter von Prytz wurde 1893 erfunden; es hat eine erstaunlich einfache Konstruktion. Seine Beschreibung soll hier wörtlich nach A. L. Gerschun<sup>1)</sup> gegeben werden:

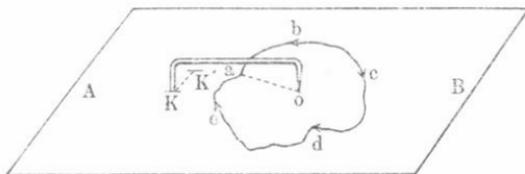
„Es besteht (Fig. 136) aus einem an beiden Enden rechtwinklig umgebogenen Stäbchen aus Stahl; das eine seiner Enden ist mit einer etwas abgerundeten, stumpfen Spitze versehen, während das andere in eine flache, ebenfalls abgerundete Schneide ausläuft. Die Entfernung der Spitze von dem tiefsten Punkte der Schneide muß ein für allemal bestimmt werden und bildet »die Konstante« des Apparates; sie sei gleich  $A$  cm.

Fig. 136.



Um den Flächeninhalt einer von einer geschlossenen Kurve  $abcde$  (Fig. 137) umgrenzten Figur zu bestimmen, setzt man die Spitze des Planimeters angenähert auf deren Schwerpunkt  $O$  und verbindet  $O$  mit irgendeinem Kurvenpunkt  $a$  durch eine Gerade.

Fig. 137.



Hierauf drückt man die Schneide an irgendeiner Stelle (etwa in  $K$ ) gegen die Papierfläche und bezeichnet diese Stelle hierdurch.

Darauf führt man die Spitze mit einer Hand von  $O$  nach  $a$  und darauf längs des Umrisses in der Richtung  $abcdea$  und

<sup>1)</sup> Journal „Elektrischestwo“ Nr. 17, 1898.

schließlich von  $a$  zurück nach dem Ausgangspunkte  $O$  längs der Geraden  $aO$ . Unterdes beschreibt die Schneide irgendeine im allgemeinen recht verwickelte Kurve und gelangt dabei in die Endlage  $K'$ , welche man wiederum durch leichtes Andrücken auf dem Papier bezeichnet. Die Entfernung  $KK'$ , multipliziert mit der Konstanten des Apparates, gibt dann den von der Kurve  $abcde$  umgrenzten Flächeninhalt. Ist uns, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, der Schwerpunkt der Fläche unbekannt, so setzt man die Spitze zunächst auf einen Punkt, der nach unserer Meinung dem Schwerpunkt nahe liegt und führt die Messung in der beschriebenen Weise aus. Darauf legt man das Planimeter um  $180^\circ$  um, führt die Spitze nach  $c$ , umläuft die Kurve in entgegengesetzter Richtung, kehrt nach  $O$  zurück und findet somit eine zweite Größe für den Flächeninhalt. Das arithmetische Mittel beider Bestimmungen gibt uns die wahre Größe des Flächeninhalts. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man derartige Messungen wiederholt vornehmen und aus ihnen das arithmetische Mittel wählen; noch einfacher ist es, zunächst von  $O$  nach  $a$ , dann etwa fünfmal um den Umriß herum und wieder nach  $O$  zurückzugehen; die Entfernung  $KK'$  der beiden Endlagen der Schneide, multipliziert mit den Konstanten des Apparates, gibt dann den fünf-fachen Flächeninhalt von  $abcde$ . Ist die zu messende Fläche groß, so zerlegt man sie durch Gerade in mehrere Teile und mißt diese einzeln aus; Prytz selbst schlägt vor, letzteres jedesmal vorzunehmen, wenn eine Dimension der Fläche größer als die Hälfte der Konstanten ist.“

Die recht verwickelte Theorie des Prytzschen Planimeters haben F. W. Hill<sup>1)</sup>, M. Mafiotti<sup>2)</sup> und Koturnizki und Kzilow<sup>3)</sup> entwickelt.

Zum Schluß sei hier noch auf das interessante Werk von Abdank-Abakanowicz „Les Intégraphes“, Paris 1886, hingewiesen, in welchem man eine ausführliche Beschreibung von Apparaten findet, welche mit Hilfe einer gegebenen Kurve  $y = f(x)$  die Integralkurve, deren Gleichung  $\eta = \int f(x)dx + l$  ist, zu zeichnen erlauben. Hierbei braucht die Gleichung  $y = f(x)$  selbst nicht bekannt zu sein, da die gegebene Kurve von beliebiger Form sein kann. Eine stark veränderte und erweiterte Ausgabe dieses Buches erschien 1903 unter der Redaktion von Lossier (Zürich, Verlag von Conradi). Hierher gehört auch das Werk von Bitterei, Die Integraphen, Leipzig 1889.

#### Literatur.

Da wir in diesem Kapitel bei den meisten der von uns erwähnten Forscher schon angegeben haben, wo ihre in Betracht kommenden Arbeiten erschienen

<sup>1)</sup> Phil. Mag. **38**, 265, 1894.

<sup>2)</sup> Rivista di Topogr. **8**, 97; Zeitschr. f. Instr. **16**, 341, 1896.

<sup>3)</sup> Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. (5) **19**, 221, 1903.

sind, genügt es, wenn wir hier noch auf einige wichtige Werke aufmerksam machen.

Mechain et Deslambre, Base du système métrique décimal, Paris 1806, 1807, 1810, 3 Bände.

Bigourdan, Le système métrique des poids et mesures, Paris 1901, 2 Bde.

Guillaume, La convention du mètre et le bureau international des poids et mesures, Paris 1902; Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, S. 78.

Benoît, Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, S. 30.

Macé de Lépinay, Franges d'interférence (Scientia phys.-math. No. 14), Paris 1902; Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, p. 115.

### Drittes Kapitel.

## Messung von Winkeln.

§ 1. **Vernier (Kreisnonius).** Zur Winkelmessung dienen im allgemeinen Apparate, die mit Teilstrichen versehene Kreise enthalten. Sie sind so gebaut, daß der gesuchte Winkel durch einen von zwei Radien dieses Kreises eingeschlossenen Winkel gemessen und durch die Differenz zweier an der Kreisteilung vorgenommenen Ablesungen gefunden wird. Zur Ablesung dient ein Index, der sich neben den Teilstrichen der Skala auf einer besonderen Scheibe (Alhidada) befindet. Es können folgende zwei Fälle vorkommen: 1. die Kreisteilung (Limbus) steht fest und die den Index tragende Scheibe dreht sich um den Mittelpunkt des ersteren; ihre Verschiebung längs der Peripherie des Kreises bestimmt den zu messenden Winkel; 2. die Scheibe mit dem Index steht fest und die Kreisteilung ist drehbar. Bisweilen tritt an Stelle jener Scheibe ein Ring, der den mit Teilungen versehenen Kreis umgibt oder aber, wenn die Teilung sich auf der ebenen Oberfläche des Kreises befindet, innerhalb desselben liegt. Im letzteren Falle sind anstatt eines Index deren zwei im Abstände von  $180^\circ$  oder gar vier im Abstände von  $90^\circ$  angebracht. Auf diese Weise werden die Beobachtungsfehler, welche durch falsche Zentrierung der Kreise entstehen könnten, vermindert.

Um möglichst genaue Messungen vornehmen zu können und Bruchteile der Skalenteile abzulesen, bedient man sich gewisser Hilfsmaßstäbe, die Kreisnonien oder Verniers heißen. Zum Unterschiede vom gewöhnlichen Nonius sind hier zunächst die Teilstriche nicht auf einem geradlinigen Maßstabe aufgetragen, sondern auf einem Kreisbogen, und ferner ist die Zahl der Teilstriche im allgemeinen nicht gleich 10.

Die Kreisteilungen sind sehr verschiedenartig, indem z. B. die ganzen Grade in 2, 3, 4, 6 oder 12 gleiche Teile geteilt werden. Daher können auch die Ablesungswerte eines Teilstriches am Vernier.

d. h. die Differenz zwischen dem zu einem Teilstrich der Hauptskala und einem Teilstrich des Verniers gehörigen Winkel, sehr verschieden sein. Um sich im gegebenen Falle zurechtzufinden, hat man zunächst den Wert eines Skalenteiles zu ermitteln (der z. B. gleich  $p^0$  sein möge) und darauf nachzusehen, wieviele Skalenteile ( $n - 1$ ) auf  $n$  Teile des Verniers kommen. Der Ablesungswert des Verniers ist dann gleich  $\alpha = \left(\frac{p}{n}\right)^0$ . Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

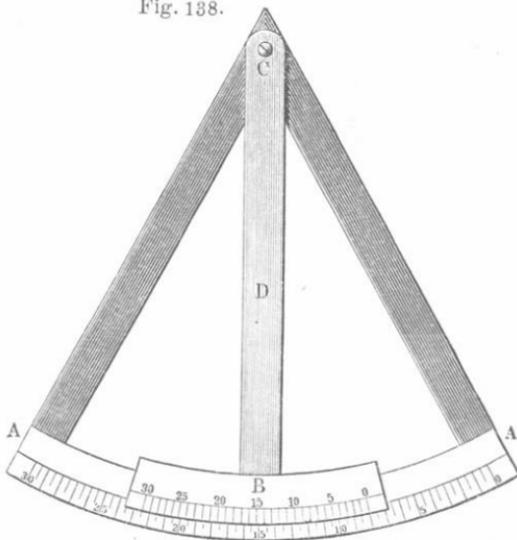
1. Die Skala ist in halbe Grade ( $30'$ ) geteilt, und 30 Teile des Verniers sind gleich 29 Teilen der Skala. Bei der Skalenablesung, d. h. wenn man die Stelle bestimmt, an welcher sich der Nullstrich des Verniers befindet, erhält man unmittelbar halbe Grade. Jeder Teilstrich des Verniers vom nullten bis zu dem, welcher mit einem Skalenstrich zusammenfällt, entspricht der Größe  $\alpha = 1'$ . Ein solcher Vernier ist in Fig. 138 dargestellt.

2. Die Grade sind in Drittel geteilt (also nach  $20'$ ), und 20 Teile des Verniers sind gleich 19 Skalenteilen; auch hier ist  $\alpha = 1'$ .

3. Die Grade sind in Viertel geteilt ( $15'$ ), und 45 Vernierteile sind gleich 44 Skalenteilen;  $\alpha = 20''$ . In diesem Falle ist jeder dritte Teilstrich des Verniers etwas länger und entspricht einer Minute.

4. Die Grade sind in Zwölftel geteilt, also von 5 zu 5 Minuten; 60 Vernierteile kommen auf 59 Skalenteile;  $\alpha = 5''$ . Jeder vierte Vernierteilstrich ist von größerer Länge.

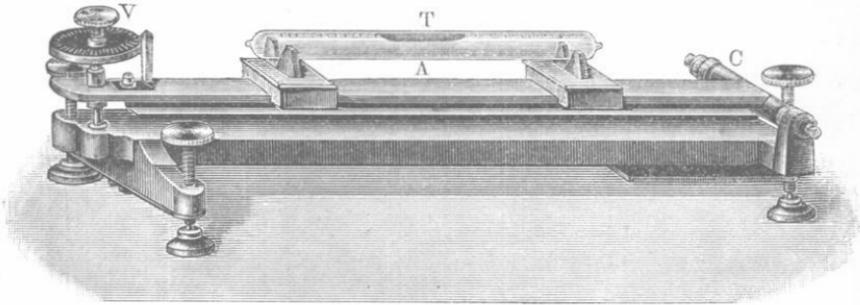
Fig. 138.



**§ 2. Libelle.** Eine richtige Libelle, deren Oberfläche im vertikalen Längsdurchschnitt einen Kreisbogen von großem Radius ergibt, kann zur Winkelmessung dienen, falls der Winkelwert ihrer Skalenteile bekannt ist; es ist das der Winkel, um welchen man die Libelle gegen den Horizont zu neigen hat, damit das Bläschen sich um einen Skalenteil verschiebt. Zur Bestimmung dieser Größe dient der in Fig. 139 abgebildete Apparat. Er besteht aus einer auf drei Fußschrauben montierten T-förmigen Gußeisenplatte und dem Lineal A, auf

welches die Libelle  $T$  gesetzt wird und welches sich einerseits um die horizontale Achse  $C$  drehen kann, während durch das andere eine Mikrometerschraube  $V$  führt. Mit Hilfe dieser Schraube wird  $A$  und die darauf gesetzte Libelle gegen den Horizont geneigt; die ganzen Schraubendrehungen werden an der nebenan befindlichen Skala, die Bruchteile an der Teilung abgelesen, mit welcher der Schraubenkopf versehen ist. Kennt man die Höhe  $a$  des Schraubenganges und die Entfernung  $l$  vom

Fig. 139.



Stützpunkte der Schraube bis zur Achse  $C$ , so erhält man den Winkel  $\varphi$ , um welchen sich die Libellenachse neigt, wenn man die Schraube  $n$  Umdrehungen machen läßt, aus der Formel  $\sin \varphi = \frac{na}{l}$ , oder in Sekunden ausgedrückt

$$\varphi'' = \frac{na}{l \sin 1''} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (1)$$

Auf diese Weise kann man den Winkelwert eines Skalenteiles bestimmen und die Libelle selbst prüfen, nämlich untersuchen, ob alle links und rechts von der Mitte gelegenen Teilstriche gleichen Neigungswinkeln entsprechen. Ist eine derartige Prüfung vorgenommen worden, so kann die Libelle zum Winkelmessen dienen, denn man kann nun einen Schluß ziehen aus der Verschiebung des Bläschens auf die Neigung der Libelle und mithin auf die Neigung der Ebene, auf welche die Libelle gesetzt ist.

Ist einmal der Wert eines Skalenteiles bekannt, so kann man die Libelle auch zur Messung kleiner linearer Größen benutzen, z. B. zur Messung von Krümmungen und Unebenheiten einer ebenen Fläche. Zeigt z. B. die Verschiebung des Bläschens eine Neigung von  $\varphi''$  an und ist die Entfernung zweier Punkte an der Basis der Libelle gleich  $l$ , so gibt uns die Formel  $x = l \varphi \sin 1''$  an, um wieviel einer jener Punkte höher als der andere liegt.

Bruns <sup>1)</sup>, Galle <sup>2)</sup> und andere haben genauere Apparate angegeben.

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Instr. **6**, 198, 1886.

<sup>2)</sup> Ebend. **18**, 72, 1898.

§ 3. **Theodolit.** Der Theodolit (vgl. Fig. 140) dient zum Messen von Winkeln, die in einer horizontalen oder einer vertikalen Ebene ge-

legen sind, also zur Messung der Differenz zweier Azimute oder zweier Höhen.

Er besteht aus folgenden

Teilen. Ein Fernrohr  $f$

dreht sich um eine horizontale

Achse  $h$ , welche durch

den Mittelpunkt des Vertikal-

kreises  $k$  (Höhenkreis)

geht. Dieses ganze System

dreht sich um die vertikale

Achse des Apparates, die

ihrerseits durch den Mittel-

punkt des Horizontalkreises

$k'$  (Azimutalkreis) geht. Am

Kreise  $k$  liest man die

Höhendifferenzen, am Kreise

$k'$  die Differenzen der Azi-

mute ab und bedient sich

hierzu der Mikroskope  $m$

und  $m'$ . Das Gegengewicht  $g$

verlegt den Schwerpunkt

des Apparates in seine

Achse, die mit Hilfe der

drei Fußschrauben  $s$  und

der Libellen  $w$  und  $w'$  verti-

kal gestellt wird. Einige Theodolite haben im unteren Teile noch ein

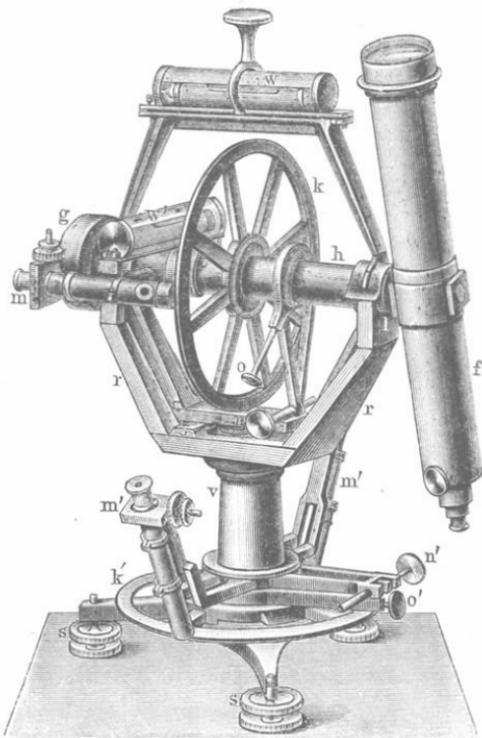
besonderes Kontrollfernrohr, mit dessen Hilfe man sich überzeugen kann,

daß der Apparat während der Messung seine Lage nicht geändert hat.

Zu den Winkelmeßapparaten gehört auch der Sextant, dessen

Beschreibung indes an dieser Stelle unterbleiben soll.

Fig. 140.



§ 4. **Methode der Spiegelablenkung.** (Winkelmessung mit Fern-

rohr, Spiegel und Skala). Diese von Poggendorff 1826 vorgeschlagene

Methode dient zur Messung kleiner Winkel, um welche sich (bei verti-

kaler, selten horizontaler Achse) die beweglichen Teile bei einigen Appa-

raten drehen; sie wird benutzt zur Messung der Ablenkungen von

Magneten, die an dünnen Fäden aufgehängt sind, von metallenen Nadeln

bei einigen Elektrometern usw. Man kann die Beobachtung subjektiv

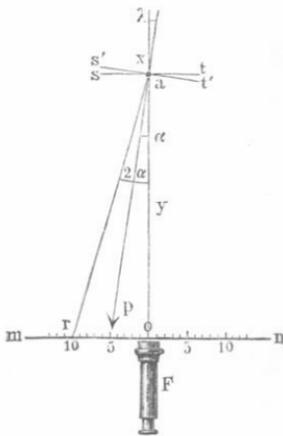
oder objektiv machen.

Wenn auch die objektive Methode vielfach angewandt wird, so ist

die subjektive wohl die üblichere; sie wird auch die Methode mit

Fernrohr und Skala genannt. In Fig. 141 ist die Anordnung des Apparates in der Aufsicht gegeben. Am Körper, dessen Drehung um eine durch  $a$  gehende vertikale Achse gemessen werden soll, ist ein kleines Spiegelchen  $st$  befestigt;  $F$  ist ein Fernrohr,  $mn$  eine horizontale Skala (mit vertikal stehenden Teilstrichen), die entweder höher oder niedriger als das Fernrohr angebracht ist, und zwar derart, daß die Normale zur Oberfläche des Spiegels mitten zwischen Fernrohr und Skala hindurchführt. Der Beobachter möge im Fernrohr zuerst den Teilstrich  $o$  sehen. Hat sich der Körper um den Winkel  $\alpha$  gedreht und hat der Spiegel dann die Stellung  $s't'$ , so gelangt der von  $r$  reflektierte Strahl  $rx$  ins Fernrohr. Derselbe bildet mit dem Einfallslot  $p$  den Winkel  $rxp = pxo = \alpha$ . Für den Beobachter hat es den Anschein, als habe sich die Skala zur Seite bewegt; er erblickt jetzt in der Mitte des Gesichtsfeldes anstatt des Teilstriches  $o$  den Teilstrich  $r$ .

Fig. 141.

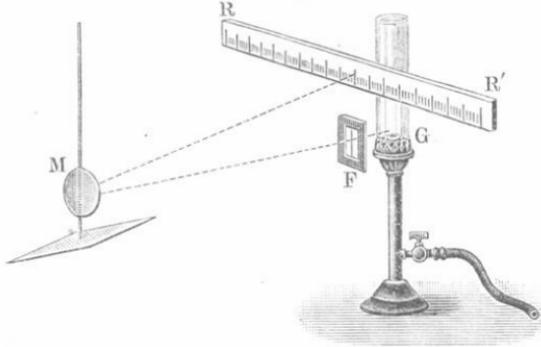


Die Länge  $s = or$  läßt sich direkt an der Skala ablesen. Kennt man dann noch die Entfernung  $y$  von der Skala bis zum Spiegel, die meist etwa zwischen 2 und 4 m schwankt, so erhält man den gesuchten Winkel  $\alpha$  der Drehung nach der Formel

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{s}{y} \dots \dots \dots (2)$$

Nach dieser Methode kann man sehr kleine Drehungswinkel beobachten und messen. Ist  $y = 4$  m, so läßt sich eine Drehung um nur  $2''$  noch wahrnehmen; derselben entspricht die Verschiebung  $s = 0,1$  mm, welche, falls die Vergrößerung des Fernrohres hinreichend ist, noch sehr gut bemerkt werden kann.

Fig. 142.



Bei der objektiven Methode der Beobachtung mit Spiegel und Skala ist ein wenig oberhalb oder unterhalb der Skala  $RR'$  (Fig. 142) ein schmaler vertikaler Spalt  $F$  angebracht und dahinter eine Lichtquelle  $G$ ,

etwa ein Gasbrenner oder eine Lampe. Der Spiegel  $M$  entwirft ein scharfes Bild des Spaltes auf der Skala; zu diesem Zweck erhält der Spiegel  $M$  eine etwas konkave Oberfläche oder man bringt auf der Strecke  $FM$  eine bikonvexe Linse in solche Stellung, daß das Bild des Spaltes nach der Reflexion gerade auf die Skala  $RR'$  fällt. Dreht sich nun der Spiegel um einen Winkel  $\mu$ , so sieht man, wie sich das Bild des Spaltes längs der Skala verschiebt. Häufig spannt man in der Mitte des Spaltes einen Faden parallel zum Spaltrahmen aus. Es wird dann die Verschiebung gemessen, welche das Bild dieses Fadens erfährt.

Formel (2) gilt auch hier, und bedeutet  $s$  die Zahl der Skalenteile, um welche sich das Bild des Spaltes verschoben hat,  $y$  die Entfernung von Spiegel und Skala. Für sehr kleine Winkel  $\alpha$  kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen, so daß

$$\alpha = \frac{s}{2y} \dots \dots \dots (3)$$

wird, d. h. die Zahl  $s$  der Skalenteile kann als Maß des gesuchten Winkels  $\alpha$  gelten. Formel (3) wäre auch für größere Winkel  $\alpha$  streng richtig, wenn die Skala nicht auf einem ebenen Maßstab, sondern auf einem Kreisbogen angebracht wäre, dessen Mittelpunkt an der Spiegeloberfläche liegt. Der strenge Ausdruck für  $\alpha$  lautet

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{s}{y} = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{y^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{y^5} - \dots \right)$$

Ist  $\alpha < 4^\circ$ , so kann man sich mit zwei Gliedern der Reihe begnügen und erhält

$$\alpha = \frac{s}{2y} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{s^2}{y^2} \right) \dots \dots \dots (4)$$

Um  $\alpha$  in Graden, Minuten oder Sekunden auszudrücken, muß man die rechte Seite mit  $\frac{180^\circ}{\pi}$  multiplizieren und erhält:

$$\alpha = K \left( \frac{s}{y} - \frac{1}{3} \frac{s^3}{y^3} \right) \dots \dots \dots (5)$$

wobei  $K = \frac{180^\circ}{2\pi} = 28,648^\circ = 1718,88' = 103132,8''$  ist.

Bei genauen Messungen hat man Korrekturen anzubringen, da die Skala nicht genau senkrecht zur Verbindungsgeraden des Anfangspunktes der Zählung mit der Spiegelmitte ist. Ferner ist die seitliche Ablenkung der Strahlen in den Glasplatten zu berücksichtigen, welche man vor dem Spiegel anbringt, falls der Apparat zum Schutz gegen Luftströmungen etwa von einem Gehäuse aus Metall umgeben ist. Wood<sup>1)</sup> hat eine interessante Methode ausgearbeitet, um Torsions-

<sup>1)</sup> W. A. 56, 171, 1895.

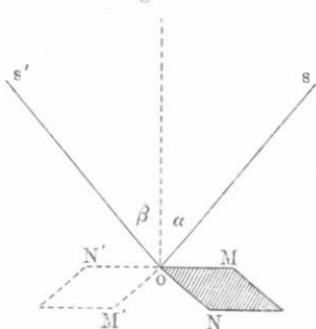
schwingungen zu beobachten. Lermantow<sup>1)</sup> hat die Empfindlichkeit der objektiven Methode der Winkelmessung untersucht. Wadsworth<sup>2)</sup>, Julius<sup>3)</sup>, Taudin Chabot<sup>4)</sup> u. a. haben die Poggendorfsche Methode verbessert. Marcel<sup>5)</sup> und Burton<sup>6)</sup> haben äußerst empfindliche Apparate konstruiert, um Winkel zu messen, die nicht größer sind als  $0,5''$ .

**§ 5. Messung von Flächenwinkeln. Goniometer.** Zur Messung der Flächenwinkel an Glas, Quarz, Steinsalzprismen usw., an Kristallen und überhaupt an Ebenen, welche das Licht regelmäßig reflektieren, dienen verschiedene Apparate, die man Goniometer nennt. Je nach der Messungsmethode, welche der Konstruktion des Apparates zugrunde liegt, unterscheidet man Kontaktgoniometer, Hebelgoniometer, Mikrogoniometer und Reflexionsgoniometer. Wir werden nur die letzteren betrachten; eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Arten von Goniometern findet man in Groth, Physikalische Kristallographie.

Wir besprechen zunächst zwei Methoden der Messung von Flächenwinkeln, welche auf dem Gesetz der Spiegelung von Strahlen an ebenen Flächen beruhen.

Die erste Methode wird durch Fig. 143 erläutert. Es sei  $MON$  der Neigungswinkel des Flächenwinkels, dessen Kante in  $O$  senkrecht

Fig. 143.



zur Ebene der Zeichnung steht. In einer zu dieser Kante senkrechten Ebene befindet sich ein Fernrohr, das von  $s'$  nach  $O$  gerichtet ist, und ferner die Lichtquelle. Letztere besteht gewöhnlich aus einem schmalen, zur Kante  $O$  parallelen hellen Spalt. Fernrohr und Spalt werden derart eingestellt, daß der Lichtstrahl  $sO$ , der vom Spalt kommt, nachdem er von  $OM$  in der Nähe der Kante  $O$  reflektiert worden ist, in der Richtung der Fernrohrachse  $Os'$  weitergeht. Das Bild des Spaltes muß mit einem Faden im Okular zusammen-

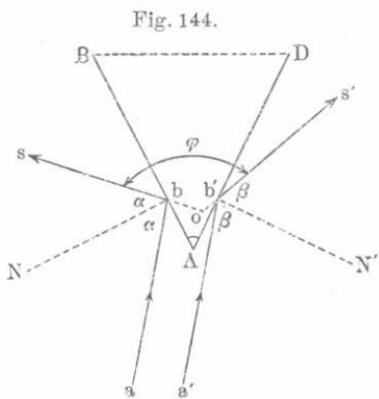
fallen, der parallel zur Kante  $O$  und zum Spalt gestellt wird. Hierauf dreht man den Körper  $OMN$  so lange um  $O$ , bis das Bild des Spaltes wieder erscheint und mit dem Okularfaden zusammenfällt. Es wird jetzt von Strahlen gebildet, die von der anderen Seite  $ON$  des Flächenwinkels, die jetzt die Lage  $ON'$  hat, reflektiert sind. Da  $MO$  und  $ON'$  in einer Ebene liegen müssen, so gilt für den zu messenden Winkel

<sup>1)</sup> Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **22**, 261, 1890. — <sup>2)</sup> Phil. Mag. **44**, 83, 1897. — <sup>3)</sup> Zeitschr. f. Instr. **18**, 205, 1898. — <sup>4)</sup> Phil. Mag. **8**, 111, 1904. — <sup>5)</sup> C. R. **137**, 786, 1903. — <sup>6)</sup> Phil. Mag. **23**, 385, 1912.

$A = \angle MON$  und den Winkel  $\varphi = \angle NON'$ , um welchen sich der Körper gedreht hat, die Beziehung

$$A = 180^\circ - \varphi \dots \dots \dots (6)$$

Die zweite Methode besteht im folgenden. Man bringt den Körper, dessen Flächenwinkel  $A$  (Fig. 144) gemessen werden soll, in eine feste Lage; in einer zur Kante des Flächenwinkels senkrechten Ebene dreht sich ein Fernrohr derart, daß seine Achse auf den Punkt  $o$ , der nahe bei  $A$  innerhalb des Körpers liegt, gerichtet ist. Auf diese Kante richtet man ein Bündel paralleler Lichtstrahlen  $ab, a'b'$ , welche zum Teil von der einen, zum Teil von der anderen Seite des Flächenwinkels reflektiert werden. Hierauf sucht man die beiden Stellungen des Fernrohres auf, bei welchen seine Achse erst mit dem reflektierten



Strahle  $bs$  und darauf mit  $b's'$  zusammenfällt, und mißt den Winkel  $\varphi = \angle sos'$ , um welchen das Fernrohr hierbei gedreht wurde. Man kann nun beweisen, daß der gesuchte Winkel gleich  $A = \varphi : 2$  ist. Es seien  $\alpha = \angle abN = \angle Nbs$  und  $\beta = \angle a'b'N' = \angle N'b's'$  Einfallswinkel und Reflexionswinkel der beiden in Betracht kommenden Strahlen.

Aus der Figur ergibt sich

$$\angle abN + \angle a'b'N' + \angle NbB + \angle N'b'D' + \angle A = 360^\circ$$

d. h.

$$\alpha + \beta + 180^\circ + A = 360^\circ$$

oder

$$\alpha + \beta + A = 180^\circ \quad \text{und} \quad 2\alpha + 2\beta + 2A = 360^\circ.$$

Andererseits ist offenbar  $2\alpha + 2\beta + \varphi = 360^\circ$ . Vergleicht man diese Ausdrücke, so folgt, daß  $\varphi = 2A$  ist, also

$$A = \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots (7)$$

Ein paralleles Strahlenbündel kann man, wie später gezeigt werden soll, künstlich erhalten; man kann jedoch auch das Bild eines sehr entfernten Punktes (einer Mire) wählen, von welchem die Strahlen  $ab$  und  $a'b'$  ausgehen.

Die verschiedenen Goniometer, welche benutzt werden, um die Flächenwinkel bei Kristallen zu messen, können wir hier nicht beschreiben.

## Viertes Kapitel.

## Messung des Volumens.

§ 1. **Bestimmung des Rauminhaltes von Gefäßen.** Der Rauminhalt von Gefäßen wird dadurch gefunden, daß man zunächst das leere Gefäß und dann dasselbe, jedoch mit Flüssigkeit gefüllt, wägt, wobei die Dichte, d. h. das Gewicht der Volumeneinheit dieser Flüssigkeit für die Beobachtungstemperatur, bekannt sein muß. Bezeichnet man mit  $p$  das Gewicht der Flüssigkeit, mit  $\delta$  ihre Dichte und mit  $v$  den gesuchten Rauminhalt des Gefäßes, so ist  $p = v\delta$ , woraus

$$v = \frac{p}{\delta} \dots \dots \dots (1)$$

folgt.

Als Versuchsflüssigkeit wählt man entweder Wasser oder Quecksilber, für deren Dichten  $\delta$  bei verschiedenen Temperaturen genaue Tabellen vorhanden sind.

Drückt man  $p$  in Grammen aus, so erhält man das Volumen  $v$  in Kubikzentimetern.

Anstatt der Dichte  $\delta$  ist es bequemer, ihren reziproken Wert, das spezifische Volumen  $\gamma$ , einzuführen, d. h. die Anzahl Kubikzentimeter, welche von einem Gramm Flüssigkeit eingenommen werden. Es ist dann

$$v = p\gamma \dots \dots \dots (3)$$

Für Quecksilber von  $0^\circ$  ist

$$\gamma = 0,073\ 553\ 2 \dots \dots \dots (4)$$

Verwendet man Quecksilber, so hat man zu beachten, daß seine freie Oberfläche konvex ist; befindet sich diese Oberfläche in einem engen zylindrischen Gefäß aus Glas, so hat sie die Gestalt eines sogenannten Meniskus. Man kann in diesem Falle annehmen, daß das Quecksilber ein Volumen erfüllt, das von oben durch eine horizontale Ebene begrenzt ist, welche um zwei Drittel der Meniskushöhe über dem Kreise liegt, in welchem sich Glas und Quecksilber berühren.

Um das innere Volumen enger Röhren, sogenannter Kapillarröhren, zu bestimmen, legt man sie horizontal und verschiebt eine kleine Quecksilbersäule in ihnen. In genau zylindrischen Röhren bleibt die Länge der Säule überall die gleiche, sonst ändert sie sich an verschiedenen Stellen der Röhre. Bringt man die Quecksilbersäule der Reihe nach in solche Lagen, daß sie jedesmal um ihre eigene Länge weiterbewegt wird, so kann man auf diese Weise das innere Volumen in gleiche Teile zerlegen, die zudem gleich dem Volumen der benutzten Quecksilbermenge sind.

Eine genauere Untersuchung des inneren Volumens der einzelnen Teile einer mit Teilung versehenen Röhre heißt Kalibrierung. Das hierbei in Anwendung kommende Verfahren soll im dritten Bande bei der Herstellung von Thermometern beschrieben werden.

§ 2. **Volumenometer von Regnault.** Volumenometer heißen Apparate, die zur Volumenbestimmung von Körpern dienen, und zwar insbesondere von Körpern mit unregelmäßiger Gestalt, kleinen Kristallen, pulverförmigen Körpern usw. In Fig. 145 und 146 ist das

Fig. 145.

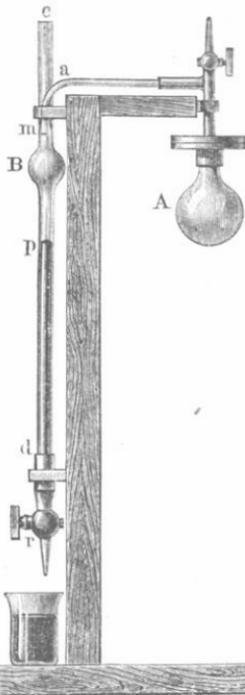


Fig. 146.

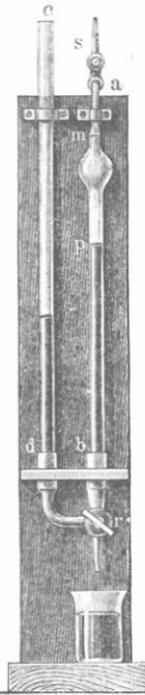


Fig. 147.



Fig. 148.



Volumenometer von Regnault abgebildet, und zwar von vorn (Fig. 146) und in der Seitenansicht (Fig. 145). An einem vertikal aufgestellten Holzbrett sind zwei parallele Glasröhren *b* und *d* befestigt, in welche Quecksilber gegossen wird. Der Hahn *r* hat zwei zueinander senkrechte Durchbohrungen von der Form  $\perp$ ; man kann daher beide Röhren untereinander verbinden (wobei die Stellung der Kanäle  $\perp$  ist, s. Fig. 148), oder das Quecksilber nur aus der linken Röhre (T) oder nur aus der rechten Röhre (T Fig. 147) ablassen oder endlich aus beiden Röhren gleichzeitig (T). Die rechte Röhre hat eine kugelförmige Erweiterung; oberhalb und unterhalb derselben sind zwei Striche *m* und *p* gezogen.

Die rechte Röhre ist mit einer horizontalen Seitenröhre  $a$  (Fig. 145) verbunden, an welche sich ein kurzes, vertikales Röhrrchen anschließt, das in die verjüngte Mündung  $s$  ausläuft und durch einen Hahn verschließbar ist. Unten trägt das Röhrrchen eine runde Scheibe, auf welche eine zweite Scheibe geschraubt ist, die ihrerseits mit einer breiteren Röhre und dem kugelförmigen Gefäß  $A$  zusammenhängt, welche den Körper von gesuchtem Volumen aufzunehmen hat. In das offene Ende  $c$  der links befindlichen Röhre (Fig. 145) kann Quecksilber gegossen werden. Hinter dieser Röhre befindet sich auf dem ihr als Stütze dienenden Brette eine nach Millimetern geteilte Skala. Zunächst muß das Volumen  $v$  der Röhre und der Kugel  $f$  zwischen den Marken  $m$  und  $p$  bestimmt werden. Zu diesem Zweck öffnet man den Hahn bei  $s$ , verbindet durch  $r$  beide Röhren untereinander ( $\perp$ ) und gießt durch  $c$  so viel Quecksilber ein, bis die horizontale Tangentialebene zur Quecksilberoberfläche durch die Marke  $m$  hindurchführt. Hierauf läßt man so viel Quecksilber aus der rechten Röhre ab, daß es bis zur Marke  $p$  sinkt. Nun wägt man das abgelassene Quecksilber und bestimmt nach Formel (1) oder (3) das Volumen  $v$ . Danach hat man noch das Volumen  $V$  der Kugel  $A$  und Röhre  $a$  bis zur Marke  $m$  zu messen. Dies geschieht auf zwei Arten: nach der ersten hat man das Quecksilberniveau zu senken, nach der zweiten zu heben.

1. Man öffnet den Hahn bei  $s$ , verbindet die Röhren  $a$  und  $b$  miteinander und läßt das Quecksilber in der linken Röhre bis zur Marke  $m$  steigen. Hierauf schließt man den Hahn und bestimmt den Luftdruck  $H$ ; die eingeschlossene Luft im Apparate hat das Volumen  $V$  und die Spannung  $H$ . Jetzt läßt man durch  $r$  aus beiden Röhren so viel Quecksilber abfließen, bis es in der rechten Röhre bis zur Marke  $p$  reicht. Die Luft hat sich jetzt auf das Volumen  $V + v$  ausgedehnt, ihre Spannung ist kleiner als  $H$  geworden, und das Quecksilberniveau steht daher in der linken Röhre um  $h$  Millimeter niedriger als  $p$ ; die Spannung der eingeschlossenen Luft ist jetzt  $H - h$ . Nach dem Mariotteschen Gesetz ist

$$VH = (V + v)(H - h) \dots \dots \dots (5)$$

also

$$V = v \frac{H - h}{h} \dots \dots \dots (6)$$

2. Während  $s$  geöffnet ist, bringt man das Quecksilber bis nach  $p$ ; das Luftvolumen  $V + v$  steht unter dem Druck  $H$ . Man schließt nun den Hahn bei  $s$  und füllt die linke Röhre mit Quecksilber, bis es in der rechten Röhre bei  $m$  anlangt; in der linken Röhre muß es hierbei um eine gewisse Höhe  $h_1$  oberhalb  $m$  stehen, so daß die auf das Volumen  $V$  zusammengedrückte Luft sich unter dem Druck  $H + h_1$  befindet.

Nach dem Mariotteschen Gesetz ist

$$(V + v) H = V (H + h_1). \quad (7)$$

also

$$V = v \frac{H}{h_1}. \quad (8)$$

Für  $V$  nimmt man schließlich das arithmetische Mittel aus beiden nach Formel (6) und (8) erhaltenen Werten.

Um das Volumen  $x$  irgendeines Körpers zu bestimmen, etwa eines Häufleins Kristalle oder eines pulverförmigen Körpers, schraubt man das Gefäß  $A$  ab, bringt in dasselbe den Körper und schraubt es wieder an. Hierauf wiederholt man genau die beiden vorher beschriebenen Operationen, wobei indes für  $h$  und  $h_1$  andere Werte  $h'$  und  $h'_1$  erhalten werden; ebenso wird der Luftdruck  $H$  jetzt einen anderen Wert  $H'$  haben. Da der Körper das Volumen  $x$  hat, so ist das Luftvolumen  $V - x$  bzw.  $V + v - x$ , je nachdem das Quecksilbervolumen bis  $m$  oder bis  $p$  reicht. Anstatt der Gleichungen (5) und (7) hat man jetzt

$$(V - x) H' = (V + v - x) (H' - h')$$

$$(V + v - x) H' = (V - x) (H' + h').$$

Diese Gleichungen geben zwei Werte für das gesuchte Volumen  $x$ , aus denen man wiederum das Mittel wählt.

Es gibt eine große Zahl von Volumenometern von verschiedener Form. Von besonderem Interesse ist ein von W. W. Lermantow konstruierter Apparat, der für Laboratoriumsarbeiten der Studierenden bestimmt ist. Bei diesem ist das Gefäß  $A$  durch ein weites Glas, die linke Glasröhre durch ein zylindrisches Gefäß ersetzt, das mit der rechts befindlichen Röhre durch einen langen Gummischlauch verbunden ist. Das Ablassen und Nachfüllen des Quecksilbers wird hier in bequemer Weise dadurch ersetzt, daß man das Gefäß mittels einer um eine Rolle geschlungenen und auf eine Welle gewickelten Schnur hebt, indem man die Welle an einem Griff dreht.

Das Volumenometer kann nicht benutzt werden, um das Volumen von Körpern zu bestimmen, welche eine vom Gasdruck abhängige Gasabsorption zeigen; hierher gehört z. B. Kohle und daher auch Schießpulver. Die Dichte solcher Körper wird durch das von ihnen verdrängte Quecksilbervolumen gemessen, nachdem sie längere Zeit im Vakuum von den absorbierten Gasen befreit wurden.

Einige neuere Volumenometer findet man in den folgenden Abhandlungen beschrieben:

Oberbeck: Wied. Ann. **67**, 209, 1899.

Zehnder: Ann. d. Phys. (4) **10**, 40, 1902; **15**, 328, 1904; Zeitschr. f. Instr. **25**, 83, 1905.

Lo Surdo: N. Cim. (5) **12**, 41, 1906.

Zeleny und McKeehan, Phys. Rev. **30**, 189, 1910.

Dobrochotow: Zeitschr. (Wremennik) d. Hauptanstalt (Palata) f. Maße u. Gewichte **8**, 91, 1907 (russ.).

Chwolson, Physik. 2. Aufl. I. 1.

## Fünftes Kapitel.

## Messung von Kräften und Massen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über das Messen von Kräften und Massen. Die Formel  $f = mw$  liefert die Beziehung der Kraft  $f$  zur Masse  $m$ , auf welche sie wirkt, und der Beschleunigung  $w$ , die sie der Masse erteilt. Nach dieser Formel könnte man Massen messen: 1. durch Bestimmung ihrer Beschleunigungen, während auf sie eine bekannte, oder einfacher, eine konstante Kraft wirkt, oder 2. durch Bestimmung der Kraft, welche erforderlich ist, um den Massen eine uns bekannte oder besser eine konstante Beschleunigung zu erteilen. Ebenso könnte man die Kräfte durch die Beschleunigungen messen, welche sie gegebenen Massen erteilen, oder durch die Massen, deren Bewegungen sie in gegebener Weise beschleunigen. Alle diese Methoden (mit Ausnahme einer, von der im weiteren die Rede sein wird) sind jedoch praktisch nicht wohl anwendbar, da es schwer fällt, die Beschleunigung während der Bewegung zu verfolgen; man verfährt daher anders.

Kräfte werden nicht bloß durch die Beschleunigungen gemessen, die sie in freibeweglichen Körpern hervorrufen, sondern auch durch den Druck, der durch sie auf unfreie Körper ausgeübt wird. Dieser Druck veranlaßt gewisse Formenänderungen in den Körpern, sowie elastische Gegenkräfte, durch welche den wirkenden Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. Aus der Größe der Formänderung eines Körpers kann man auf die Größe der wirkenden Kraft schließen. Hierauf beruhen die sogenannten Dynamometer und unifilaren Torsionswagen, die weiter unten betrachtet werden sollen.

Ferner kann man Kräfte durch andere äußere Kräfte messen, welche ihnen das Gleichgewicht halten, z. B. durch die Schwerkraft. Dies Prinzip kommt zur Anwendung bei den bifilaren Torsionswagen, sowie bei verschiedenen magnetischen und elektrischen Apparaten; dasselbe Prinzip wird häufig bei Messung des Gasdruckes, der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, der elastischen, bei Formenänderung der Körper auftretenden Kräfte usw. angewandt.

Die wichtigste Methode, eine nach Größe und Richtung konstante Kraft aus der von ihr hervorgerufenen Bewegung zu finden, besteht darin, daß man einen Körper unter Einwirkung der gesuchten Kraft Schwingungen um eine gewisse Gleichgewichtslage ausführen läßt, die durch die Richtung dieser Kraft bestimmt wird. Aus der Schwingungsdauer läßt sich, wie wir sehen werden, das Maß für die Kraft ermitteln.

Momentane (instantane oder Stoßkräfte), d. h. sehr kurz dauernde Kräfte, werden, wie früher (S. 86) auseinandergesetzt

worden ist, durch den vollen Kraftimpuls während ihrer kurzen Wirkungsdauer bestimmt; dieser Kraftimpuls ist gleich der Bewegungsmenge  $mv$ , welche der Körper erlangt. Als Maß für die momentane Kraft dient daher die Anfangsgeschwindigkeit  $v$ , welche der ursprünglich\* in Ruhe befindliche Körper in dem Augenblick besitzt, wo die Wirkung der Kraft aufhört. Nach diesem Prinzip werden die momentanen Kräfte gemessen, welche bei Entzündung explosibler Stoffe, beim Stoß, bei Wirkung sehr kurz dauernder Induktionsströme usw. auftreten.

Das Gewicht eines Körpers kann, als besonderer Fall einer Kraft, nach einer der angeführten Methoden bestimmt werden. Nimmt man als Gewichtseinheit das Gewicht irgendeines Körpers für den Ort, an welchem die Wägung vorgenommen wird, an, so kann man das Gewicht eines anderen Körpers bestimmen, indem man ihn an einem ein- bzw. zweiarmigen Hebel befestigt und diesen dann durch eine gewisse Zahl Gewichtseinheiten (Gewichtstücke) äquilibriert. Das Verhältnis der Hebelarme muß dabei natürlich bekannt sein. Die hierzu dienenden Apparate heißen Wagen (die gewöhnliche, die russische, die römische, die Dezimalwage usw.). Man darf jedoch nicht außer acht lassen, daß man an einer Wage das Gewicht eines Körpers nur unter der obengenannten Bedingung erhält. Bei Anwendung von Federwagen müßte man für jede Breite und jede Meereshöhe besondere Gewichtssätze verwenden, falls man als Gewichtseinheit die Dyne oder das Gramm festlegt, d. h. das Gewicht, welches in Paris die Masse eines Gramms besitzt. Im anderen Falle müssen die entsprechenden Korrekturen bekannt sein, mit deren Hilfe sich das wahre Gewicht eines Gewichtstückes berechnen läßt, das in Paris ein Gramm wiegen würde.

Es ist schon auf S. 80 darauf hingewiesen worden, daß Gewichtstücke Massenetalons sind, und daß daher die Wägung ein Verfahren darstellt, bei welchem die Masse eines Körpers durch Vergleichung seines Gewichtes mit dem Gewicht der Masseneinheit ermittelt wird. Da die Masse der Körper für einen gegebenen Ort proportional dem Gewicht ist, so erhalten wir einen richtigen Zahlenwert für die Masse, wo auch immer die Wägung vorgenommen wird, falls nur die Gewichtstücke richtige Massenetalons darstellen. Den Zahlenwert des Gewichtes kann man dagegen nur dann durch Wägung erhalten, falls das Gewicht der Etalons für den Ort bekannt ist, an welchem die Wägung vorgenommen wird.

§ 2. **Gewichtstücke** sind, wie gesagt, in Wirklichkeit Massenetalons. Im Internationalen Bureau der Maße und Gewichte ist die Urmasse des Kilogramms, und zwar aus derselben Legierung (90 Proz. Pt und 10 Proz. Ir) hergestellt worden, wie der Urmaßstab des Meters. Das

Deutsche Reich hat durch Los das Kilogramm-Urgewicht Nr. 22 erhalten. Sein Volumen (bei 0°) und seine wahre Masse sind die folgenden:

Volumen: 46,403 ccm; Masse: 1 kg + 0,053 mg.

Die Genauigkeit der Massenbestimmung beträgt  $\pm 0,002$  mg. Durch eben dieselben Zahlen wie die Masse wird offenbar auch das Gewicht dieses Urmaßes, bezogen auf Paris und auf das Vakuum, ausgedrückt. Entsprechend der üblichen Ausdrucksweise werden wir im folgenden von Wägung, Gewichtstücken usw. reden, obgleich es sich hier nicht sowohl um das Gewicht als vielmehr um die Masse der Körper handelt.

Die Gewichtstücke, deren man sich für die Wage bedient, befinden sich in bestimmter Anordnung in zylindrisch oder sonstwie geformten Vertiefungen einer kleinen Holzleiste. Die besonders großen Stücke bestehen aus Gußeisen oder Schmiedeeisen, die mittleren aus — bisweilen vergoldetem — Messing, die kleineren aus Platin und die allerkleinsten zuweilen aus Aluminium. Besonders beständige Gewichtsätze werden aus Bergkristall oder der oben erwähnten Platiniridiumlegierung hergestellt. Ihrer Größe nach entsprechen sie gewöhnlich folgenden Zahlen:

1—1—1—2—5—10—10—20—50—100—100—200—500—  
500—1000 usw.

so daß man durch Zusammensetzen dieser Stücke alle möglichen zwischenliegenden Gewichte erhalten kann. Die kleinste Einheit wiederholt sich dreimal, die nächst höheren (10, 100 usw.) je zweimal. Bisweilen besteht der Gewichtsatz aus Stücken mit folgendem Gewicht:

1—2—2—5—10—20—20—50—100—200—200—500—  
1000—2000 usw.

D. J. Mendelejew machte 1895 den Vorschlag, die Gewichtsätze folgendermaßen zusammenzustellen:

1—2—3—4—10—20—30—40—100—200—300—400—1000 usw.,

eine Zusammenstellung, die viele Vorzüge bietet.

Die käuflichen Gewichtsätze sind nicht ganz genau. Bevor man sie in Gebrauch nimmt, muß man sie kalibrieren, d. h. das wahre Verhältnis ihrer Massen zur Masse des Etalons oder wenigstens ihr gegenseitiges Massenverhältnis feststellen. Wegen der hierbei in Anwendung kommenden Methoden sei auf die Lehrbücher der praktischen Physik verwiesen.

Der Theorie nach sollte das Kilogramm ursprünglich dem Gewicht von einem Liter reinen Wassers bei 4° C gleichkommen. Nach D. J. Mendelejew ist das wahrscheinlichste Gewicht eines Kubik-

dezimeters reinen Wassers bei 4° C im Vakuum gleich 999,847 g. Später nahm er die Zahl 999,89 g an.

Über diesen Gegenstand ist von 1896 bis 1909 in Frankreich eine Reihe von äußerst sorgfältigen Messungen ausgeführt worden, und zwar von Macé de Lépinay, Fabry, Pérot, Guillaume, Chappuis, Buisson und Benoit. Durch diese Forscher ist die Frage nach dem wahren Verhältnis zwischen Meter und Kilogramm gegenwärtig als endgültig gelöst zu betrachten. Wenn wir die Ergebnisse älterer Messungen weglassen und ebenso auch die Zahlen, welche als vorläufige publiziert wurden, so erhalten wir eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen den in letzter Zeit erhaltenen Resultaten. Es ist wohl unzweifelhaft, daß das Gewicht von 1 cdm reinen Wassers bei 4° etwas größer ist, 999,97 g. Die dritte Dezimalstelle schwankt zwischen 1 und 4 und wird auch von ein und demselben Forscher in verschiedenen Veröffentlichungen nach neuen Rechnungen oder nach Einführung neuer Korrekturen nicht ganz gleich angegeben. Wir stellen einige Zahlen zusammen:

Macé de Lépinay, Fabry und Perot (1899) . . . . .	999,974
Buisson, Macé de Lépinay und Benoit (1905) {	999,971
	999,974
Chappuis (1906) . . . . .	999,974
Benoit (1907) . . . . .	999,972
Guillaume (1909) . . . . .	999,973

Als Mittelwert können wir annehmen, daß das Gewicht von 1 cdm reinen Wassers bei 4° und normalem Druck gleich

**999,973 Gramm**

ist. Hieraus folgt: das Volumen von 1 kg reinen Wassers bei 4° und normalem Druck oder

**1 Liter = 1,000 027 cdm.**

Das internationale Kilogramm ist also um 27 mg schwerer, als es nach dem theoretischen Zusammenhang mit dem internationalen Meter sein müßte. Nimmt man das internationale Kilogramm als Grundlage, so ist das internationale Meter um 0,009 mm = 9  $\mu$  zu lang. Wir stellen einige der wichtigsten Arbeiten zusammen:

- Mendelejew: Wremennik Gl. Palatij Mjer i Wjessow **2**, 162, 1895; **2**, 143, 1895; Proc. R. Soc. **59**, 143, 1896.  
 Macé de Lépinay: Annal. chim. et phys. (6) **10**, 68, 1887; (7) **5**, 210, 1895; **11**, 102, 1897; C. R. **122**, 595, 1896; Journ. de Phys. (3) **5**, 477, 1896.  
 Macé de Lépinay, Fabry und Perot: C. R. **128**, 1317, 1899; **129**, 709, 1899.  
 Chappuis: Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. 1897, p. 66; Arch. sc. phys. (4) **22**, 259, 1906.

Guillaume: Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. 1899, p. 143; Rapp. prés. au Congrès internat. de Phys. **1**, 78, 1900; Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. (2) **5**, 142—171, 1909; Arch. sc. phys. (4) **24**, 382, 1907; Rev. gén. d. sc. **19**, 262, 1908.  
Buisson: Journ. de Phys. (4) **4**, 669, 1905.  
Benoit: C. R. **145**, 1385, 1907.

Besonders wichtig ist die zusammenfassende Darstellung von Guillaume aus dem Jahre 1909.

**§ 3. Die Einrichtung der Wage.** Der wichtigste Bestandteil der Wage ist der Wagebalken — ein gleicharmiger Hebel. In der Mitte desselben ist ein dreiseitiges Prisma befestigt, dessen eine Kante nach unten gerichtet ist; es dient als Stütze für den Balken. An den Enden des Wagebalkens befinden sich zwei weitere Prismen, die mit einer Kante nach oben gekehrt sind; auf diese stützen sich die Haken oder Fassungen, in welchen die Wagschalen hängen. Die Kanten dieser drei Prismen müssen einander parallel sein und, solange die Wage sich in Ruhe befindet, in einer horizontalen Ebene liegen. Ein langer vertikaler Zeiger, der mit dem einen Ende am Wagebalken befestigt ist, erlaubt, die Schwingungen zu beobachten; zu diesem Zweck befindet sich beim anderen Ende des Zeigers eine Skala. In der Mitte der Skala oder besser an einem Ende liegt der Nullpunkt.

Statt des Zeigers kann man eine kleine vertikale Skala benutzen, die an einem Ende des Wagebalkens befestigt ist. Die Schwingungen beobachtet man in diesem Falle mittels eines auf diese Skala gerichteten Mikroskops.

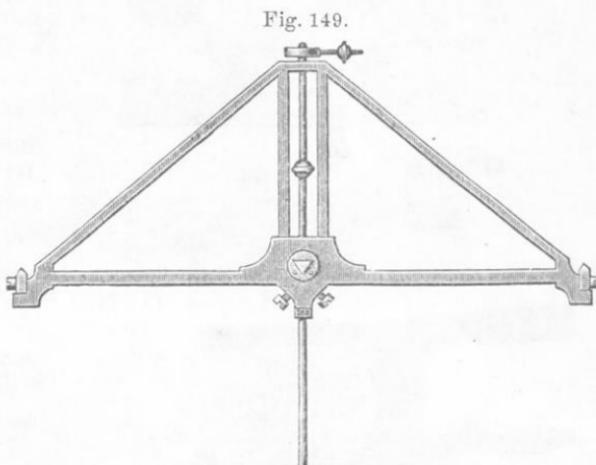
Damit die Kanten der Prismen durch den beständigen Druck des Wagebalkens sowie der Schalen nicht stumpf werden, ist ein beweglicher Rahmen (die Arretierung) angebracht, welcher den Wagebalken und die Stützen der Wagschalen trägt, so daß die Prismen von dem auf ihn lastenden Druck befreit werden. Sobald eine Wägung vorgenommen werden soll, löst man die Arretierung und befestigt sie wieder, sobald die Wägung beendet ist.

Die Wage wird in einem mit Türen versehenen Glasgehäuse untergebracht. Um die Gewichtstücke in bequemer Weise auf die Wagschalen oder auch auf den Wagebalken legen zu können, sind sehr verschiedene Vorkehrungen getroffen worden. Während der Wägung selbst hat man die Wage auf das sorgfältigste vor den geringsten Luftströmungen und ebenso vor einer ungleichmäßigen Erwärmung der beiden Hebelarme (die z. B. durch den Beobachter selbst erfolgen kann) zu schützen.

Gegenwärtig benutzt man bei genauen Wägungen ausschließlich kurzarmige Wagen. Das theoretische und praktische Studium der Bedingungen, unter welchen der höchste Genauigkeitsgrad der Wägung erhalten werden kann, hat D. J. Mendelejew [Die Spannung der Gase

(russ.). St. Petersburg 1875. § 16 und 17] zur Auffindung einer Formel geführt, aus welcher der Nutzen kurzarmiger Wagen hervorgeht, besonders wenn die Wägung bei konstanter und immer der gleichen Belastung vorgenommen wird (s. unten). Es sei hier bloß erwähnt, daß durch Verkürzung des Wagebalkens die Biegung und die Schwingungsdauer vermindert werden, was, wie im weiteren gezeigt werden soll, von hohem praktischen Wert für die Wägung ist. Der Wagebalken muß derartig konstruiert sein, daß alle seine Teile einer Durchbiegung den gleichen Widerstand entgegensetzen. Dies erreicht

man leicht, indem man den Wagebalken sehr breit anfertigt; da hierdurch aber sein Gewicht groß wird, wodurch die Empfindlichkeit (s. § 4) leidet, so wird er durchbrochen, doch darf hierdurch seine Festigkeit nicht leiden. Die in verschiedenen Werkstätten



verfertigten Wagebalken weichen in der Form sehr voneinander ab; Fig. 149 zeigt einen von Sartorius stammenden Wagebalken für geringe Belastung; er ist aus Aluminium mit einem Zusatz von Silber gegossen.

Die Schneiden der drei mit dem Wagebalken verbundenen Prismen müssen untereinander parallel sein, da sich im entgegengesetzten Falle die Abstände der Angriffspunkte der Belastung vom Stützpunkte ändern können. G. K. Brauer in St. Petersburg hat einen Apparat konstruiert, der speziell dazu dient, die Parallelität dieser Schneiden zu untersuchen. Dieser Apparat ist von W. Lermantow<sup>1)</sup> beschrieben worden.

Die drei Schneiden der Prismen müssen sich während der Wägung in einer Ebene befinden. Mendelejew schlägt vor, daß man unter Benutzung einer konstanten Belastung die Prismen derart anbringen soll, daß ihre Schneiden sich, während die Schalen belastet sind, in einer Ebene befinden. Demgemäß muß bei unbelasteter Wage die Schneide des mittleren Prismas ein wenig niedriger liegen, da sich die seitlichen Prismen durch die Belastung senken.

<sup>1)</sup> Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 9, 326, 1877.

Die seitlichen Prismen werden oft beweglich gemacht, damit sich ihre Lage in bequemer Weise regulieren läßt. Eine solche Vorrichtung ist in Fig. 150 abgebildet. Wie ersichtlich, kann man mittels der Schraube *a* das Prisma heben bzw. senken, und mittels der Schraube *b* ein wenig nach links oder rechts rücken.

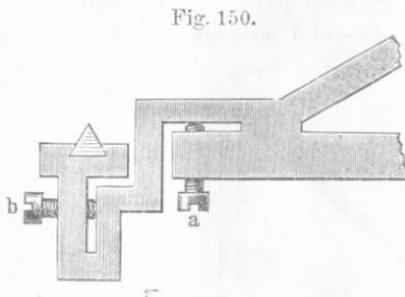


Fig. 150.

Eine andere Konstruktion zeigen Fig. 151 und 152. Das Prisma *b* ist mit Hilfe der Schrauben *v* und *v'* an den stählernen Träger *m* angeschraubt; letzterer ist mit dem Wagebalken durch die Schraube *n* verbunden.

Fig. 151.

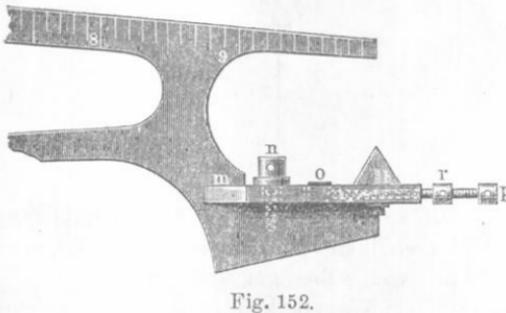
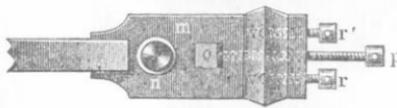


Fig. 152.



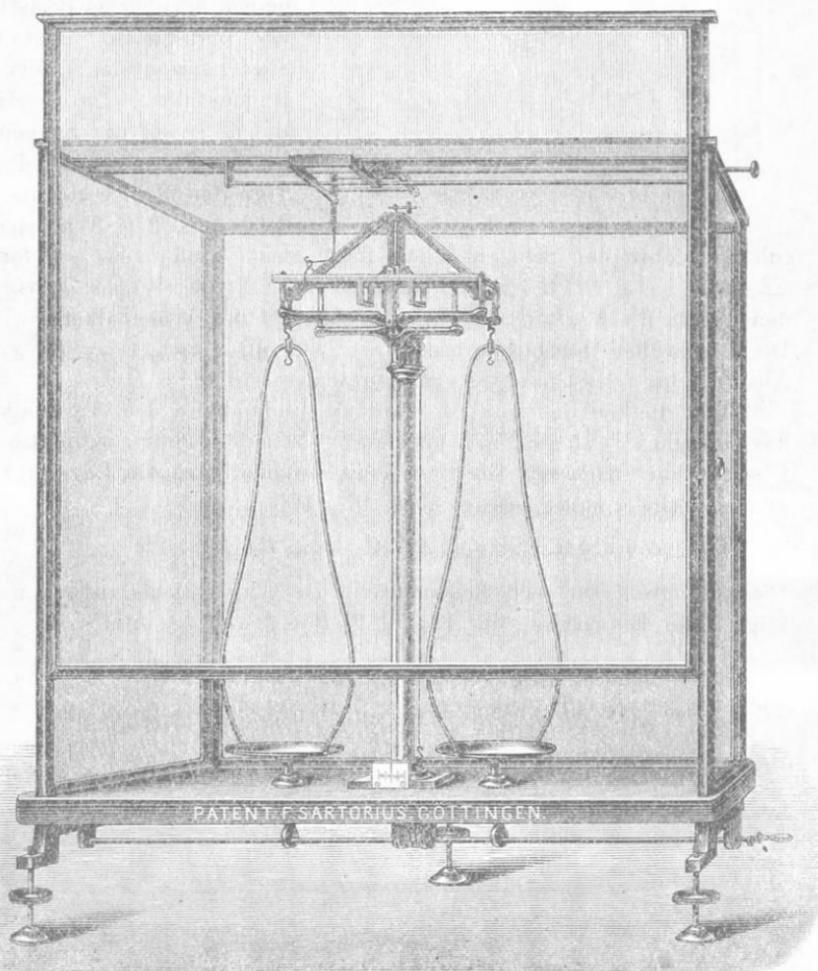
Bei Lüftung derselben kann der Träger *m* mit Hilfe der Schraube *p* in der Längsrichtung verschoben werden, wobei das mit dem Wagebalken verbundene prismatische Stück *o* zur Führung dient. Geringe Drehungen werden hierbei mit Hilfe der Schrauben *r* und *r'* ausgeführt.

D. J. Mendelejew hat eine Arretierung des Wagebalkens vorgeschlagen, die aus zwei Hebelarmen besteht, welche sich um eine in der Verlängerung der mittleren Prismenschnitte befindliche Achse drehen. Eine solche Vorrichtung arretiert den schwingenden Wagebalken, ohne auf ihm zu gleiten, da Balken und Arretierung die gleiche Drehungsachse haben. Das Gleiten der Arretierung längs der Oberfläche des Wagebalkens ruft einen schädlichen Seitendruck hervor, wodurch sich die Schneiden abstumpfen können. Nebenstehende Fig. 153 zeigt eine der kurzarmigen Wagen, welche von Sartorius in Göttingen angefertigt werden.

**§ 4. Stabilität und Empfindlichkeit der Wage.** Für die Stabilität der Wage ist es erforderlich, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens ein wenig unterhalb seines Stützpunktes liegt, d. h. unterhalb

der Schneide des mittleren Prismas. Die Wagschalen nebst ihrer Belastung üben keinen Einfluß auf die Stabilität aus; es würde dies nur dann der Fall sein, wenn sie mit dem Wagebalken fest zusammenhängen. Unter der Empfindlichkeit einer Wage versteht man die

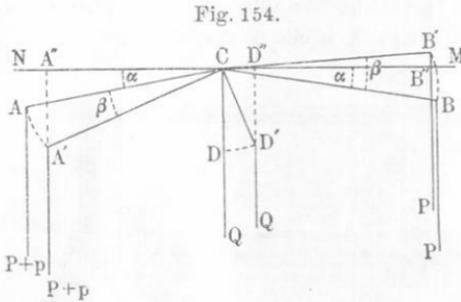
Fig. 153.



Änderung ihrer Einstellung durch ein kleines Übergewicht  $p$ , welches bei gleicher Belastung  $P$  der Wagschalen einer derselben hinzugefügt ist. Bezeichnet man den Ablenkungswinkel des Wagebalkens mit  $\beta$ , so gilt als Maß für die Empfindlichkeit  $\omega$  die Größe

$$\omega = \frac{\beta}{p} \dots \dots \dots (1)$$

Wir wollen jetzt untersuchen, von welchen Konstruktionsbedingungen diese Empfindlichkeit abhängt. Es sei  $NCM$  eine horizontale Linie (Fig. 154);  $AC$  und  $BC$  stellen die Hebelarme dar, die im allgemeinen bei gleicher Belastung der Wagschalen nicht mit jener horizontalen Linie zusammenfallen. Durch  $A, B$  und  $C$  gehen die Schneiden der drei Prismen. An  $A$  und  $B$  greifen Kräfte an, die der Belastung der Wagschalen



(die Gewichte der Schalen inbegriffen) gleich sind. Es sei ferner  $\angle ACN = \angle BCM = \alpha$ ;  $D$  der Schwerpunkt des Waagebalkens, auf den mithin die Kraft  $Q$ , nämlich das Gewicht des Waagebalkens, wirkt. Die Länge der Hebelarme bezeichnen wir mit  $l = AC = BC$ , den Abstand des Schwerpunktes vom Stützpunkt mit  $\delta = DC$ .

Wir denken uns nun, daß auf die rechte Seite des Waagebalkens das Gewicht  $P$ , auf die linke das Gewicht  $P + p$  angreift, wo  $p$  also das Übergewicht bedeutet. Die Hebelarme nehmen jetzt die Lage  $A'CB'$  an, der Schwerpunkt gelangt nach  $D'$ . Wir setzen

$$\angle DCD' = \angle ACA' = \angle CCB' = \beta.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Waagebalkens in der neuen Lage unter Einwirkung der Kräfte  $P, P + p$  und  $Q$  lautet

$$(P + p) \cdot \overline{A''C} = P \cdot \overline{B''C} + Q \cdot \overline{D''C}$$

oder

$$(P + p)l \cos(\beta + \alpha) = Pl \cos(\beta - \alpha) + Q\delta \sin \beta.$$

Entwickelt man  $\cos(\beta + \alpha)$  und  $\cos(\beta - \alpha)$  und dividiert die ganze Gleichung durch  $\cos \beta$ , so erhält man

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{pl \cos \alpha}{(2P + p)l \sin \alpha + Q\delta} \dots \dots \dots (2)$$

Für kleine Winkel  $\beta$  kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen und erhält nach (1)

$$\omega = \frac{l \cos \alpha}{(2P + p)l \sin \alpha + Q\delta} \dots \dots \dots (3)$$

Befänden sich die Schneiden der drei Prismen auf einer Geraden, d. h. wäre  $\alpha = 0$ , so erhielte man die einfache Formel

$$\omega = \frac{l}{Q\delta} \dots \dots \dots (4)$$

Der letzte Ausdruck zeigt, daß die Empfindlichkeit einer Wage direkt proportional der Länge der Hebelarme und indirekt proportional dem Gewichte des Wagebalkens und dem Abstände seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte ist. Um die Empfindlichkeit der Wage zu erhöhen, muß man also den Wagebalken möglichst leicht und bei gegebenem Gewichte möglichst lang machen und den Schwerpunkt dem Unterstützungspunkte möglichst nahe bringen.

Im idealen, der Formel (4) entsprechenden Falle hängt die Empfindlichkeit gar nicht von der Belastung  $P$  der Wage ab. Die allgemeinere Formel (3) zeigt aber, daß sich bei Vergrößerung der Belastung die Empfindlichkeit der Wage verringert, falls Winkel  $\alpha$  positiv ist, d. h. falls der Stützpunkt des Balkens über dem der Wagschalen liegt und sich vergrößert, falls  $\alpha$  negativ ist, d. h. falls die Schneiden der seitlichen Prismen über der des mittleren liegen. Hierbei ist noch zu beachten, daß auch der Winkel  $\alpha$  von der Belastung  $P$  abhängt, indem diese eine Biegung des Wagebalkens, d. h. eine Zunahme des Winkels  $\alpha$  hervorruft. Ist für  $P = 0$  der Winkel  $\alpha$  positiv, so muß sich daher die Empfindlichkeit  $\omega$  bei Vermehrung der Belastung  $P$  aus zweierlei Gründen vermindern; ist dagegen der Anfangswert von  $\alpha$  negativ, so wird bei Zunahme von  $P$  der Winkel  $\alpha$  zunächst gleich Null und darauf positiv. In diesem Falle müßte sich die Empfindlichkeit  $\omega$  der Wage bei Zunahme der Belastung  $P$  zuerst vergrößern und hierauf vermindern, was man auch in der Tat beobachten kann. Eine Verlängerung des Wagebalkens vergrößert die Biegung bei belasteter Wage und vergrößert gleichzeitig die Schwingungsdauer; dies ist der Grund, weshalb man gegenwärtig kurzarmige Wagen gebraucht.

Neuere Untersuchungen über die Empfindlichkeit der Wage findet man in den Schriften:

Carpenter a. Bisbee: Phys. Rev. **22**, 31, 1906.

Gottschalk: Western Chemist and Metallurgist **2**, 37, 55, 83, 91, 1906.

Felgenträger: Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage, Leipzig 1907 (310 Seiten).

**§ 5. Beobachtung der Schwingungen des Wagebalkens.** Die Wägung eines Körpers besteht darin, daß man den Wagebalken durch Auflegen der entsprechenden Gewichtstücke ins Gleichgewicht, d. h. in dieselbe Lage bringt, die er ohne Belastung inne hatte. Es zeigt sich aber nun, daß, wenn man die Arretierung entfernt, die Wage jedesmal sehr lange hin und her schwingt. Da man der Zeitersparnis wegen nicht warten will, bis sie zu völligem Stillstand gelangt, und da es genauer ist, die Wägung im schwingenden Zustand durchzuführen als in der Ruhe, so beobachtet man diese Schwingungen an der Skala und

berechnet den Teilstrich der Skala, welcher der Ruhelage entspricht, d. h. welcher der Spitze des Zeigers bzw. dem horizontalen Okularfaden des zur Ablesung dienenden Mikroskopes gegenüber zu liegen kommen würde. Falls der Wagebalken sehr stark schwingt, hat man ihn zu beruhigen, indem man die Wagschalen mit einem weichen Pinsel leicht berührt. Während man die feineren Schwingungen beobachtet, dürfen sich die Wagschalen bloß heben und senken und nicht etwa seitliche Bewegungen ausführen, da durch letztere eine Zentrifugalkraft hervorgerufen wird, welche die Lage des gesuchten Ruhepunktes verändert. Um diesen Punkt zu finden, beobachtet man an der Skala drei aufeinanderfolgende Ausschläge; es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  die beobachteten Teilstriche der Skala, wobei  $a$  und  $c$  auf der einen und  $b$  auf der anderen Seite des gesuchten Punktes der Ruhelage liegen mögen.

Man nimmt nun das Mittel  $\frac{a+c}{2}$  der Ablesungen auf der einen Seite und darauf das Mittel aus diesem und der Ablesung  $b$  auf der anderen Seite der Skala. Die auf diese Weise berechnete Zahl liefert alsdann den gesuchten Teilstrich  $n$ , welcher der Ruhelage entspricht. Somit ist

$$n = \frac{1}{2} \left( \frac{a+c}{2} + b \right) = \frac{1}{4} (a + 2b + c) \dots \dots (5)$$

Beobachtet man vier Ausschläge  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  (wobei  $a$  und  $c$  auf der einen,  $b$  und  $d$  auf der anderen Seite liegen), so wird  $n$  aus folgender Formel gefunden

$$n = \frac{1}{8} (a + 3b + 3c + d) \dots \dots \dots (6)$$

Diese Formel wird erhalten, wenn man mit Hilfe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $b$ ,  $c$ ,  $d$  nach (5) das Mittel aus beiden Ruhelagen berechnet; man bildet also

$$n = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (a + 2b + c) + \frac{1}{4} (b + 2c + d) \right] = \frac{1}{8} (a + 3b + 3c + d).$$

Bevor man die Wägung selbst vornimmt, hat man nach derselben Methode den Skalenstrich  $n_0$  zu bestimmen, welcher der Ruhelage der unbelasteten Wage entspricht.

Es seien beispielsweise bei unbelasteter Wage die Umkehrpunkte der Schwingungen

links bzw. oben	rechts bzw. unten
10,6	8,3
10,4	
Mittel 10,5	

$$n_0 = \frac{10,5 + 8,3}{2} = 9,4.$$

Somit entspricht der Ruhelage der Teilstrich  $n_0 = 9,4$ . Befindet sich der Nullpunkt der Skala in der Mitte, so hat man die Ablesungen mit einem Vorzeichen zu versehen. Während der Wägung hat man wiederum die Schwingungen zu beobachten und die Summe der Gewichtstücke zu bestimmen, für welche der Teilstrich  $n_0$  abermals der Gleichgewichtslage entspricht. Für gewöhnlich ergibt eine gewisse Belastung eine Ruhelage, die auf der einen Seite von  $n_0$  liegt, und ruft die geringste Vermehrung der Belastung eine Verschiebung der Ruhelage nach der entgegengesetzten Seite von  $n_0$  hervor. Man findet dann aus einer einfachen Proportion jenen Teil des kleinsten Gewichtstückes, durch welchen die Ruhelage in  $n_0$  erreicht wird. Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern. Es sei, wie oben,  $n = 9,4$ . Die Belastung 43,765 g gibt folgende Ablesungen:

links bzw. oben	rechts bzw. unten
9,7	7,2
9,5	
Mittel 9,6	

Die Gleichgewichtslage ist  $n_1 = \frac{9,6 + 7,2}{2} = 8,4$ . Die Belastung 43,766 g gibt:

links bzw. oben	rechts bzw. unten
10,9	8,8
10,7	
Mittel 10,8	

Die Gleichgewichtslage ist jetzt  $n_2 = \frac{10,8 + 8,8}{2} = 9,8$ . Somit verschiebt sich durch Hinzufügen eines Milligramms die Gleichgewichtslage um  $9,8 - 8,4 = 1,4$  Skalenteile. Das gesuchte Gewicht  $x$ , das der Minderbelastung hinzugefügt werden muß, soll eine Verschiebung um  $n_0 - 8,4 = 9,4 - 8,4 = 1,0$  Skalenteile bewirken. Hieraus folgt  $x = 1,0 : 1,4 = 0,71$ ; es ist daher das gesuchte Gewicht des gewogenen Körpers gleich 43,7657 g, falls die letzte Dezimale fortgelassen wird.

P. Curie hat eine aperiodische Wage konstruiert, bei welcher die Schwingungen des Wagebalkens geringe Verdichtungen oder Verdünnungen einer Luftmenge hervorrufen, die sich unterhalb der Wagschalen in besonderen Räumen befindet. Infolgedessen nehmen die Schwingungsamplituden des Wagebalkens sehr schnell ab.

Eingehenderes über die genauesten Wägungsmethoden, die Aufstellung von Wagen usw. findet man in den Arbeiten Mendelejew's<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 1895, chem. Teil, S. 509. Wremennik Glawnoj Palatij Mjer i Wjessow, Teil 3, S. 1 bis 84, 1896. Experimentalunters.

Unter Berücksichtigung aller Nebenumstände und unter Benutzung der besten Wagen kann man einen sehr hohen Genauigkeitsgrad bei der Wägung erreichen. Beispielsweise kann man ein Kilogramm bis 0,1 mg genau wägen, man kann sich also noch für diese Größe verbürgen; dies beträgt ein zehnmilliontel des gesuchten Gewichtes. Unter besonders günstigen Umständen ist es gelungen, eine Genauigkeit von 0,1 mg auf 10 kg und sogar von 0,005 mg auf 1 kg zu erreichen (d. i. ein zweihundertmilliontel des gesuchten Gewichtes). Keine andere Messung einer physikalischen Größe kann mit einem ähnlichen Genauigkeitsgrade ausgeführt werden.

**§ 6. Wägungsverfahren.** Es gibt drei Wägungsverfahren, welche den Einfluß der ungleichen Länge der Hebelarme und des ungleichen Gewichtes der Wagschalen beseitigen.

I. Die Gaußsche Methode der Doppelwägung. Man bringt den Körper zuerst auf die eine, dann auf die andere Wagschale und bestimmt die beiden Belastungen  $p_1$  und  $p_2$ , durch welche er im Gleichgewicht gehalten wird. Bezeichnet man die Länge des Hebelarmes, auf welchen das gesuchte Gewicht  $p$  des Körpers zuerst wirkt, mit  $l_1$ , die Länge des anderen Hebelarmes mit  $l_2$ , so ist

$$p l_1 = p_1 l_2; \quad p l_2 = p_2 l_1 \dots \dots \dots (7)$$

Durch Multiplikation erhält man

$$p^2 = p_1 p_2,$$

d. h.

$$p = \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \dots \dots \dots (8)$$

da man, falls  $p_1$  und  $p_2$  nur wenig voneinander verschieden sind, ihr geometrisches Mittel dem arithmetischen Mittel gleichsetzen kann. Dividiert man die Gleichungen (7) durcheinander, so erhält man das Längenverhältnis  $l_1 : l_2$  der Hebelarme, das mit  $\lambda$  bezeichnet werden möge:

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Ist  $\frac{p_1}{p_2} = 1 + \alpha$ , wo  $\alpha$  eine kleine Größe bedeutet, so ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (9)$$

Somit erhält man bei der Methode der Doppelwägung unter anderem auch das Verhältnis der Hebelarme des Wagebalkens.

---

über Wageschwingungen (russ.), St. Petersburg 1898. Über Wageschwingungen, eine auf der X. allgem. Versamml. der russ. Naturforscher gehaltene Rede, Kiew 1898 (russ.), letztere ist auch im Wrem. Gl. Pal. M. i W. Teil 4, S. 33, 1899 erschienen.

II. Die Bordasche oder Tariierungsmethode. Man bringt den Körper auf eine der Wagschalen und äquilibriert ihn durch Schrot, Sand, Feilicht usw. Hierauf entfernt man den Körper und legt an seiner Stelle Gewichtstücke auf, welche dem Sand, Feilicht usw. das Gleichgewicht halten. Offenbar ist dann das gesuchte Gewicht gleich dem der Gewichtstücke, einerlei ob die Hebelarme gleich sind oder nicht.

III. Die Mendelejewsche Methode der konstanten Belastung oder der konstanten Empfindlichkeit. Wie wir sahen, hängt die Empfindlichkeit der Wage von der Größe der Belastung ab. Um daher eine Reihe von Wägungen bei gleicher Empfindlichkeit der Wage vorzunehmen, verfährt man folgendermaßen. Ist die Wage für die Maximalbelastung von beispielsweise einem Kilogramm pro Schale bestimmt, dann legt man auf die eine Schale ein Kilogrammgewicht und auf die andere eine ganze Reihe von Gewichtstücken, die zusammen 1 kg wiegen. Durch ein kleines, auf die entsprechende Seite gebrachtes Übergewicht verlegt man den Punkt der Ruhelage nach der Skalenmitte, falls der Wagebalken zu stark geneigt sein sollte. Den zu wägenden Körper legt man auf die Schalen mit den kleinen Gewichtstücken und entfernt so viele, bis Gleichgewicht eintritt. Die fortgenommenen Gewichtstücke geben das Gewicht des Körpers an.

**§ 7. Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft.** Nach dem Archimedischen Prinzip verliert (wie man sich auszudrücken pflegt) jeder Körper in der Luft so viel von seinem Gewicht, als das verdrängte Luftvolumen wiegt. Da die Dichte der Luft ungefähr  $\frac{1}{700}$  beträgt, so verliert offenbar ein Körper mit der Dichte Eins gegen 0,13 Proz. seines Gewichtes, was eine außerordentlich bedeutende Größe ist, im Vergleich mit der Genauigkeit, die beim Wägen erreicht werden kann (0,00001 Proz.). Sogar einer der dichtesten Körper — das Platin — verliert schon 0,006 Proz. seines Gewichtes in der Luft. Beim Wägen eines Kilogramms Platin beträgt dieser Gewichtsverlust 60 mg, d. h. 600 mal mehr als das kleinste auf der Wage noch wahrnehmbare Gewicht (0,1 mg).

Der Gewichtsverlust ändert sich zugleich mit der Dichtigkeit der Luft, d. h. mit dem barometrischen Druck, der Lufttemperatur und ihrer Zusammensetzung, die hinsichtlich des Dampfgehaltes sehr veränderlich ist. Hieraus folgt, daß das „scheinbare Gewicht“ der Körper eine veränderliche Größe ist. Daher wird bei jeder genauen Wägung vorausgesetzt, daß das „wahre Gewicht“, d. h. das Gewicht des Körpers im Vakuum, bestimmt ist. Die Berechnung des wahren Gewichtes aus dem beobachteten heißt die „Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft“.

Mit Änderung des Luftzustandes ändert sich auch das scheinbare Gewicht der Gewichtstücke, und daher muß ein für allemal festgelegt werden, daß sich die Benennung der Gewichtstücke (einschließlich der beim Kalibrieren gefundenen Korrekturen) auf ihr Gewicht im Vakuum bezieht.

Die Korrektur wegen des Gewichtsverlustes fällt fort, falls die Wägung im Vakuum vorgenommen wird, was auch in der Tat bisweilen geschieht. (zuerst von Regnault im Jahre 1860 ausgeführt, neuerdings von Mendelejew in der Hauptanstalt für Maße und Gewichte und auch von anderen). Obige Korrektur fällt ferner fort, wenn der zu wägende Körper und die Gewichtstücke aus demselben Stoff bestehen. Die wichtigste Größe, welche bei der Korrektur wegen des Gewichtsverlustes in Betracht kommt, ist das Gewicht eines Kubikzentimeters trockener Luft bei  $0^\circ$  und 760 mm Druck, d. h. bei einem Luftdruck, welcher gleich dem Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei  $0^\circ$  am Meeresspiegel und unter  $45^\circ$  geographischer Breite ist.

Wir wollen dieses Gewicht mit  $p_0$  bezeichnen. Es ist für verschiedene Breiten verschieden und ist offenbar proportional der Beschleunigung  $g$  der Erdschwere. Nach Mendelejew ist

$$p_0 = 0,131844 g \text{ mg} \dots \dots \dots (10)$$

wo  $g$  in  $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sek.})^2}$  ausgedrückt ist. Nimmt man für St. Petersburg  $g = 9,8188$  an, so erhält man für diesen Ort

$$p_0 = 1,29455 \text{ mg} \dots \dots \dots (11)$$

Die russische Hauptanstalt der Maße und Gewichte bezeichnet das Gewicht eines Liters trockener Luft unter normalen Bedingungen mit  $e_0 = 1000 p_0$ . Wird die Wägung bei einer Temperatur von  $t^\circ$ , einem Barometerstande  $H$  ausgeführt, und ist die Spannung der in der Luft enthaltenen Wasserdämpfe  $h$ , dann ist das Gewicht  $p$  eines Kubikzentimeters Luft gleich

$$p = p_0 \frac{H - h}{760 (1 + \alpha t)} + p_0 \delta \frac{h}{760 (1 + \alpha t)}$$

wo  $\alpha = 0,00367$  der thermische Ausdehnungskoeffizient der Gase und  $\delta$  die Dichte des Wasserdampfes in bezug auf Luft (etwa  $\frac{3}{8}$ ) ist. Vereinfacht man den Ausdruck, so wird

$$p = p_0 \frac{H - \frac{3}{8} h}{760 (1 + \alpha t)} \text{ mg} \dots \dots \dots (12)$$

Die Formel (12) wird nur in Ausnahmefällen gebraucht. Für gewöhnliche, bei Zimmertemperatur vorgenommene Wägungen, wo keine große Genauigkeit erforderlich ist, kann man setzen

$$p = 1,2 \text{ mg} = 0,0012 g \dots \dots \dots (13)$$

Um die Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen:

Es sei  $P$  das wahre gesuchte Gewicht des Körpers,  $V$  sein Volumen,  $D$  seine Dichte;  $Q$  das bekannte wahre Gewicht der Gewichtstücke,  $v$  ihr Volumen und  $\delta$  ihre Dichte. Der Gewichtsverlust des Körpers ist  $pV = p \frac{P}{D}$ ; der Gewichtsverlust der Gewichtstücke

$p v = p \frac{Q}{\delta}$ . Gibt die Wage in Luft Gewichtsgleichheit für den Körper und die Gewichtstücke an, so ist

$$P - p \frac{P}{D} = Q - p \frac{Q}{\delta} \text{ oder } P \left(1 - \frac{p}{D}\right) = Q \left(1 - \frac{p}{\delta}\right),$$

woraus man das gesuchte wahre Gewicht des Körpers erhält

$$P = Q \frac{1 - \frac{p}{\delta}}{1 - \frac{p}{D}}.$$

Wegen der Kleinheit der Korrekturen kann man hierfür setzen

$$P = Q \left(1 - \frac{p}{\delta}\right) \left(1 + \frac{p}{D}\right) = Q \left(1 + \frac{p}{D} - \frac{p}{\delta}\right)$$

oder

$$P = Q + Qp \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

Setzt man hierin für  $p$  den Wert aus (13) ein, so wird

$$P = Q + 0,0012 Q \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) g \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15)$$

oder

$$P = Q + 1,2 Q \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) \text{mg} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (16)$$

Das zweite Glied von (16) gibt die gesuchte Korrektion in Milligrammen;  $Q$  ist in Grammen ausgedrückt. Schreibt man (16) in der Form

$$P = Q + k Q,$$

so ist, wenn man zur Wägung Gewichte aus Messing ( $\delta = 8,4$ ) verwendet

$$k = 1,2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{8,4}\right) \text{mg} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (17)$$

und analog für Gewichte aus Platin ( $\delta = 22$ )

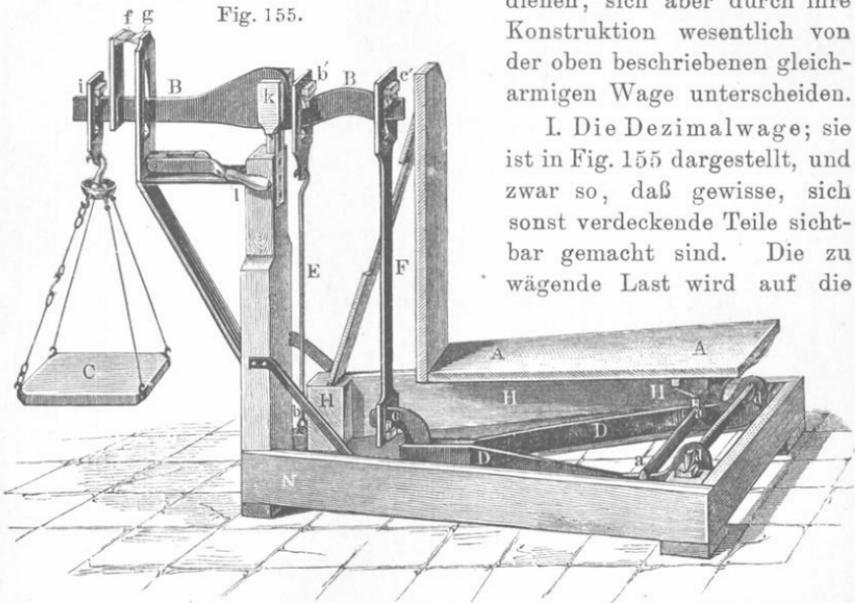
$$k = 1,2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{22}\right) \text{mg}.$$

Man hat Tabellen berechnet, aus denen sich die Werte des Faktors  $k$  für verschiedene Dichten  $D$  des zu wägenden Körpers, und zwar sowohl für Messing- als auch für Platingewichte ablesen lassen.

Von allen Messungen kann das Wägen am genauesten ausgeführt werden, so daß bei entsprechender Güte der Wage und hauptsächlich bei genügender Übung und Umsicht des Beobachters die Genauigkeit bis auf  $\frac{1}{10^7}$  der zu messenden Größe gebracht werden kann, d. h. bis auf 0,1 mg bei Wägung von einem Kilogramm (s. S. 318).

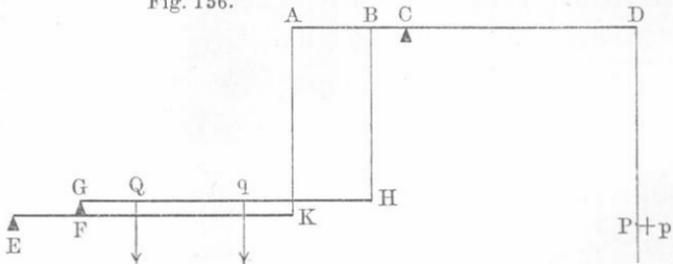
§ 8. Dezimalwage, Wage von Westphal. Mikrowagen. Wir wollen jetzt einige Apparate betrachten, die zwar ebenfalls zum Wägen dienen, sich aber durch ihre Konstruktion wesentlich von der oben beschriebenen gleicharmigen Wage unterscheiden.

I. Die Dezimalwage; sie ist in Fig. 155 dargestellt, und zwar so, daß gewisse, sich sonst verdeckende Teile sichtbar gemacht sind. Die zu wägende Last wird auf die



Brücke *AA*, die Gewichte auf *C* gebracht. Brücke und Wagschale sind miteinander durch ein System von Hebeln verbunden, so daß

Fig. 156.



Gleichgewicht eintritt, wenn das wahre Gewicht des Körpers zehnmal größer ist als das Gewicht der Gewichtstücke; hierbei ist es gleichgültig, auf welche Stelle der Brücke *AA* die Last aufgelegt wird.

In der schematischen Fig. 156 stellt  $GH$  die Brücke dar, die sich einerseits auf den Punkt (eigentlich die Linie)  $F$  des einarmigen Hebels  $EK$  stützt, andererseits im Punkte  $B$  des zweiarmigen Hebels  $AD$  befestigt ist. Mit  $AB$  ist im Punkte  $A$  der Endpunkt  $K$  des Hebels  $EK$  verbunden und an  $D$  die Schale für die Gewichte.  $Q$  möge den Ort sowie das Gewicht des auf die Brücke gesetzten Körpers bedeuten, und  $P$  das Gewicht der Gewichtstücke auf der Wagschale. Es soll jetzt bewiesen werden, daß  $Q = 10 P$  ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$CD = 10 BC; \quad \frac{EF}{EK} = \frac{BC}{AC} \quad \dots \dots \dots (18)$$

Die Last  $Q$  drückt auf  $G$  und  $F$  mit der Kraft  $Q \frac{QH}{GH}$ ; ein Teil  $\frac{EF}{EK}$  dieser Kraft wirkt auf  $K$  und  $A$  und gibt am Hebel das Moment

$$M_1 = Q \frac{QH}{GH} \cdot \frac{EF}{EK} \cdot AC = Q \cdot \frac{QH}{GH} BC \text{ (vgl. 18).}$$

Dieselbe Last wirkt auf  $H$  und  $B$  mit der Kraft  $Q \frac{GQ}{GH}$  und liefert das Moment

$$M_2 = Q \frac{GQ}{GH} BC.$$

Die Summe der Momente  $M_1 + M_2 = Q \frac{QH}{GH} \cdot BC + Q \frac{GQ}{GH} BC = Q \frac{BC}{GH} (QH + GQ) = Q \frac{BC}{GH} GH = Q \cdot BC$  muß gleich dem Momente der Gewichte  $P$  sein, d. h.  $Q \cdot BC = P \cdot CD$ , woraus dann nach (18)  $Q = 10 P$  folgt.

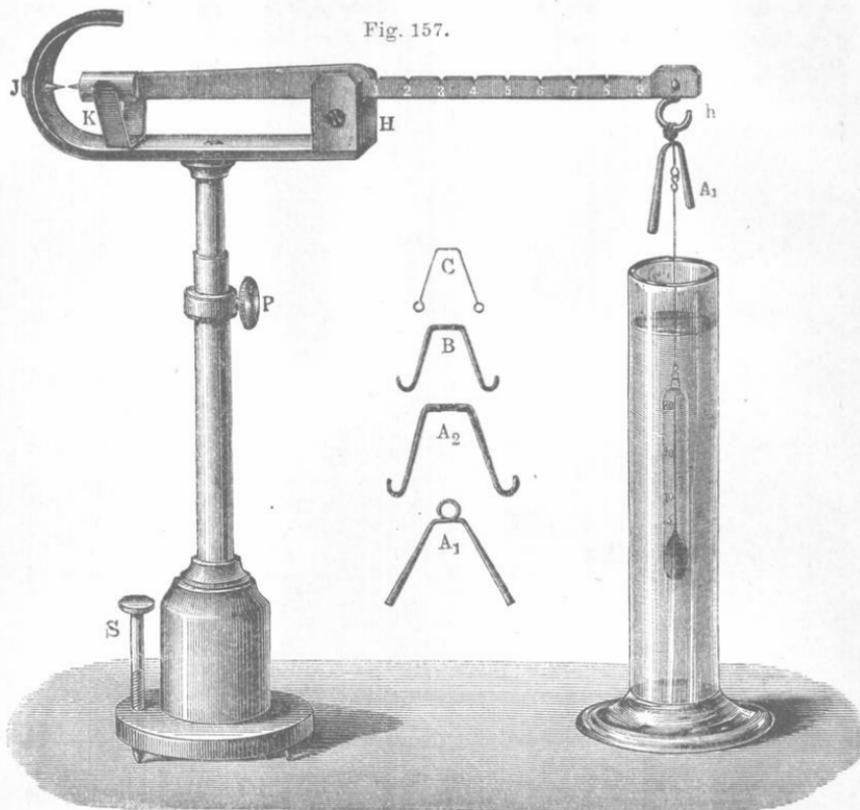
Ist das Gewicht der Brücke  $q$  das Gewicht der Wagschale  $p$ , so ist  $(Q + q) = 10(P + p)$ ; da die unbelastete Wage aber im Gleichgewicht ist, so ist  $q = 10 p$ , woraus wiederum  $Q = 10 P$  folgt.

Es gibt auch Wagen, bei denen  $CD = 100 BC$  ist; bei ihnen ist  $Q = 100 P$ .

Die eben gegebene Beschreibung bezieht sich auf eine Dezimalwage älterer Konstruktion; auf die zahlreichen Abänderungen und Verbesserungen, welche für Zwecke der Technik und des Handels eingeführt worden sind, gehen wir nicht ein.

II. Die Westphalsche Wage, auch einarmige Wage genannt, eine Bezeichnung, die nicht zutreffend ist, dient zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeiten. Da wir später auf sie zurückkommen werden in dem Kapitel bei Besprechung der zur Messung der Dichte von Flüssigkeiten dienenden Methoden, so begnügen wir uns an dieser Stelle mit einer Beschreibung des in Fig. 157 abgebildeten Apparates. Der Hebel  $KHh$  schwingt um die Schneide eines Prismas in  $H$ . Der Arm  $Hh$  ist in 10 Teile geteilt; unmittelbar über den Teilstrichen

befinden sich kleine Einschnitte, welche ebenso wie der Haken  $h$  dazu dienen, die bügelförmigen Gewichte, wie sie in  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  und  $C$  abgebildet sind, in bequemer Weise am Hebelarme anzubringen.  $A_1$  und  $A_2$  haben dasselbe Gewicht,  $B$  hat 0,1 und  $C$  0,01 des Gewichtes von  $A_1$ .



Das Gewicht von  $A_1$  stellt die Gewichtseinheit dar. Hiernach ist ersichtlich, daß die in Fig. 158 dargestellte Belastung 0,747, die in Fig. 159 dargestellte 1,846 Gewichtseinheiten entspricht. Der kleine Zylinder  $K$  dient als Gegengewicht; die Gleichgewichtslage wird dadurch gekennzeichnet, daß die an  $K$  befestigte Spitze der Spitze bei  $J$  genau gegenüberstehen muß. Mit Hilfe der Schraube  $P$  kann man den Wagebalken  $JHh$  höher oder niedriger stellen. Eine Fußschraube dient zur Horizontalstellung des Wagebalkens. Wir werden später sehen, wie man die Gewichte auswählt, um die Dichte von Flüssigkeiten bequem bestimmen zu können. Die Wage kann auch zur Ermittlung des Gewichtes dienen, welches dann aber durch die Einheit ausgedrückt wird, welcher das Gewicht von  $A_1$  gleich ist. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Belastungen, welche die Wage ins Gleichgewicht bringen,

einmal, wenn der Körper an  $h$  befestigt ist, und dann, wenn dies nicht der Fall ist. Die Differenz dieser beiden Belastungen gibt das gesuchte Gewicht des Körpers. Zur größeren Bequemlichkeit vermehrt man bisweilen die Zahl der Wage beigegebenen Gewichtstücke.

III. Mikrowagen. Apparate, welche dazu dienen, äußerst kleine Gewichte mit möglicher Genauigkeit zu messen, nennt man Mikrowagen. Solche Wagen wurden zuerst konstruiert von Warburg und Ihmori, Salvioni und von Nernst und Riesenfeld. Die Wage von Salvioni

besteht aus einem dünnen horizontalen Glasfaden, der an einem Ende festgeklemmt ist; das andere Ende trägt eine Platinspitze, auf welcher ein kleiner Haken ruht, der zum Anhängen der zu messenden Gewichte dient. An dasselbe Ende ist noch ein zweiter gebogener Glasfaden angeschmolzen, der einen horizontalen Spinnwebfaden trägt. Die Größe des Gewichtes wird durch das mit Hilfe eines Mikroskopes gemessene Niedersinken des Spinnwebfadens gemessen. Mit dieser Wage hat Salvioni die Gewichtsabnahme von Moschus mit der Zeit nachgewiesen. Giesen hat diese Wage verbessert und benutzt, um die relative Dichte verschiedener Gase, das Gewicht von dünnen Wasserschichten auf Glas und Metallen und die Absorption verschiedener Gase durch Kohle zu messen. Die Mikrowage von Nernst und Riesenfeld besteht aus einem horizontal ausgespannten Quarzfaden, an welchen ein als Wagebalken dienender Platindraht ebenfalls horizontal, aber senkrecht zum Quarzfaden angekittet ist. Das eine Ende des Drahtes dient als Zeiger an einer Skala, während das andere Ende ein Schälchen trägt zur Aufnahme des zu wägenden Körpers. Während bei Salvioni die Biegung, ist es hier die Drillung eines dünnen Fadens, die zur Messung dient. Ferner haben Crémieu (1902), Brill und Bereton Evans (1908), Steele und Grant (1909) Mikrowagen konstruiert und untersucht.

Eine höchst sinnreiche Mikrowage haben Ramsay und Gray (1911) zur Bestimmung der Dichtigkeit des Nitons, d. h. der gasförmigen Radiumemanation, benutzt. Wir werden auf diese denkwürdige Untersuchung in der Lehre von den Gasen zurückkommen und begnügen uns daher hier mit einem kurzen Hinweis auf die Konstruktion der Wage, deren Idee von Steele und Grant herrührt. An das eine Ende eines

Fig. 158.

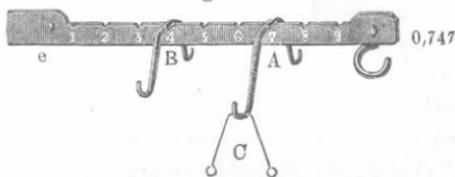
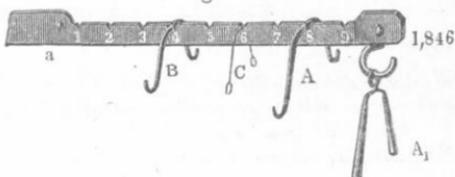


Fig. 159.



sehr leichten Wagebalkens ist eine Quarzkugel (Volumen 22,2 cbmm) gehängt, an das andere der zu wägende Gegenstand. Der ganze Apparat befindet sich innerhalb eines luftdicht schließenden und mit Fenstern versehenen Kastens, welcher mit einer Luftpumpe verbunden ist. Die Einstellung der Wage geschieht durch Änderung des Luftdruckes in dem Kasten; der Druck wird durch ein Manometer gemessen. Eine Änderung des Druckes um 0,1 mm Quecksilberhöhe entspricht einer Änderung des Gewichtes um  $3,6 \cdot 10^{-6}$  mg. Wird die Stellung des Wagebalkens mit Hilfe eines Spiegelchens beobachtet, so kann die Empfindlichkeit der Wage bis auf  $2 \cdot 10^{-6}$  mg gebracht werden.

Die hier erwähnten Schriften sind an folgenden Stellen veröffentlicht:

Warburg und Ihmori: W. A. **27**, 481, 1886.

Salvioni: Misura di masse comprese fra  $g \cdot 10^{-1}$  e  $g \cdot 10^{-6}$ ; Sulla volati lizzazione del muschio. Atti R. Acc. Peloritana, Messina 1901.

Nernst und Riesenfeld: Chem. Ber. **36**, 2086, 1903.

Giesen: Annal. d. Phys. (4) **10**, 830, 1903.

Crémieu: Journ. de Phys. (4) **1**, 441, 1902.

Brill and Brereton Evans, Journ. Chem. Soc. **93**, 1442, 1908.

Steele and Grant: Proc. R. Soc. **82**, 580, 1909; Journ. de Phys. (4) **9**, 480, 1910.

Ramsay and Gray: Journ. de Phys. (5) **1**, 429, 1911; Stark's Jahrb. **8**, 9, 1911; **9**, 499, 1912.

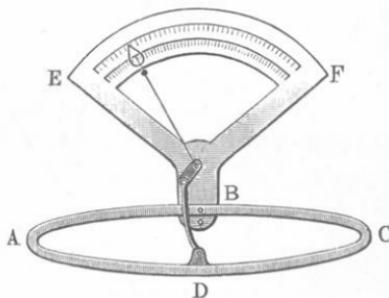
**§ 9. Dynamometer.** Dynamometer heißen Apparate, die zur Messung von Kräften dienen; letztere wirken unmittelbar auf den Apparat ein, rufen in ihm bestimmte Formenänderungen hervor und veranlassen das Auftreten elastischer Gegenkräfte, welche die ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen suchen. Da die elastischen Gegenkräfte um so größer werden, je mehr die Gestalt des Körpers geändert wird, und letztere sich nicht weiter verändert, wenn die gesuchte, von außen wirkende Kraft die inneren elastischen Kräfte im Gleichgewicht hält, so kann die Formenänderung als Maß für die angreifende Kraft dienen.

Zur Kalibrierung des Dynamometers läßt man auf ihn eine Reihe von Kräften von bekannter Intensität wirken oder einfacher eine Reihe von Gewichten, z. B. 1, 2, 3 Gramm bzw. Kilogramm, je nach der Beschaffenheit und Bestimmung des Dynamometers, und merkt sich die hierdurch hervorgerufenen Formenänderungen. Es ist ohne weiteres klar, daß ein kalibriertes Dynamometer auch zur Gewichtsbestimmung von Körpern dienen und somit eine Wage ersetzen kann, nur kann es sich in bezug auf die Genauigkeit seiner Angaben mit letzterer nicht vergleichen. Die gewöhnliche Federwage ist ein einfaches Dynamometer.

Es gibt eine sehr große Zahl verschiedenartiger Dynamometer, welche eine bogenförmige Feder enthalten; eines derselben ist in Fig. 160 abgebildet. Man läßt die Feder von der gesuchten Kraft zusammen-

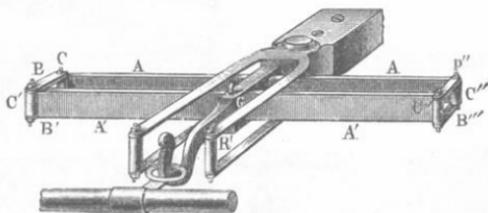
drücken, d. h. beide Hälften  $ABC$  und  $ADC$  einander näher bringen. Wie die Figur zeigt, wirkt  $ADC$  auf den einen Arm eines gebrochenen Hebels, während der andere Arm aus einem Zeiger besteht, dessen Spitze sich längs dem Skalabogen  $EF$  bewegen kann. Die eine Hälfte der Feder muß befestigt werden. Man kann übrigens den Apparat auch in  $C$  befestigen und die Kraft auf  $A$  in der Richtung der Geraden  $CA$  wirken lassen. Entfernen sich  $A$  und  $C$  voneinander, so nähern sich  $B$  und  $D$ , und der Zeiger wird in Bewegung gesetzt. Auf dem Bogen  $EF$  sind zwei Skalen aufgetragen, entsprechend den beiden verschiedenen Gebrauchsanwendungen des Apparates.

Fig. 160.



Größere Genauigkeit erzielt man mit dem Dynamometer von Poncelet und Morin, das in Fig. 161 dargestellt ist. Zwei stählerne Lamellen  $AA$  und  $A'A'$  sind miteinander durch die Scharniere  $C, C', C''$  und  $C'''$  verbunden, um welche sich ihre Enden drehen können, wenn die Lamellen selbst sich biegen. Die Lamelle  $AA$  ist befestigt, an der anderen befindet sich

Fig. 161.



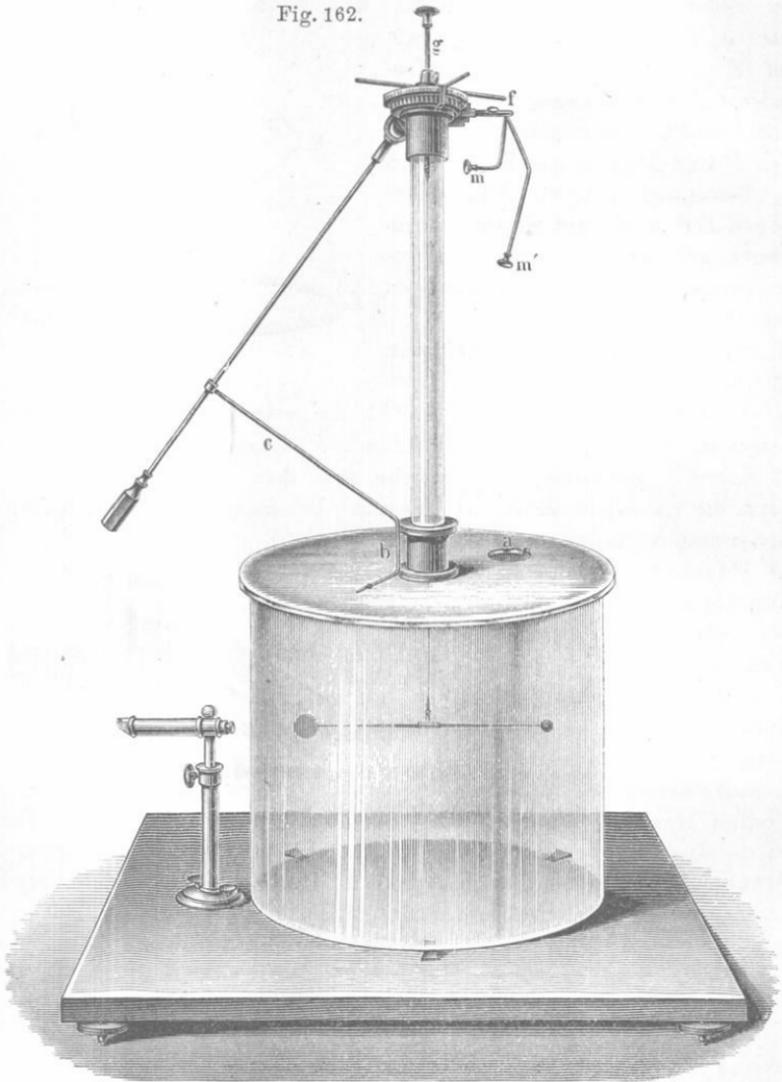
ein Haken zum bequemen Anbringen der Kraft (eines Gewichtes, eines vorgespannten Pferdes usw.). Außerdem ist mit  $A'A'$  ein Zeichenstift, der sich in  $R$  befindet, verbunden; dieser zeichnet auf einem Papierstreifen eine Linie, deren Länge als Maß der gesuchten Kraft dient. Da die angreifende Kraft sehr nahe proportional der Verschiebung des Punktes  $R$  ist, so hat man bloß ein für allemal zu bestimmen, welcher Länge der Verschiebungslinie eine bestimmte Kraft — etwa 100 kg — entspricht, um den Apparat ohne weiteres benutzen zu können. Ein Vorlesungsdynamometer ist von N. A. Hesehus<sup>1)</sup> konstruiert worden.

Zur Messung von Drucken dienen Apparate, die man Manometer nennt. Wir werden sie später kennen lernen. Eine besondere, sehr bemerkenswerte Art von Manometern, welche auf der Änderung des elektrischen Widerstandes von Leitern (z. B. Hg) durch Druck beruhen, werden wir im Bd. IV beschreiben.

<sup>1)</sup> Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 17, 59, 1885.

§ 10. **Unifilare Drehwage.** Dieser wichtige Apparat dient zum Messen von Anziehungs- oder Abstoßungskräften (z. B. bei der allgemeinen Anziehung, Anziehung und Abstoßung von Magneten oder elektrisierten Körpern). Bisweilen bildet er keinen gesonderten Apparat,

Fig. 162.

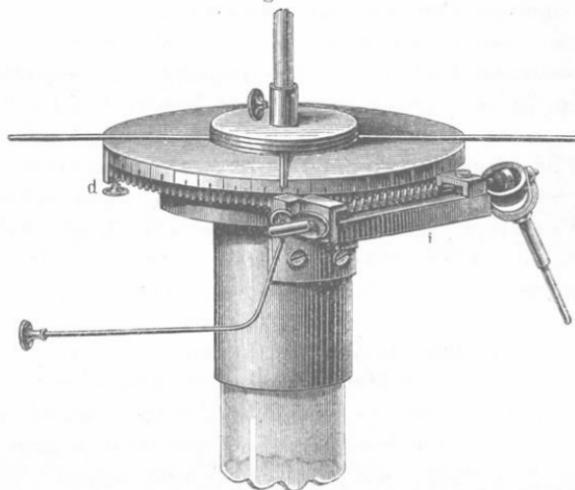


sondern bloß einen Teil anderer Instrumente. In Fig. 162 ist eine der vielen verschiedenartigen Formen dargestellt.

Der wichtigste Teil der Drehwage ist ein horizontaler Körper, gewöhnlich von der Gestalt eines Stäbchens, der an einem dünnen,

oberhalb seines Schwerpunktes befestigten Fadens hängt. Der letztere kann durch einen Metalldraht ersetzt sein (etwa aus Aluminium, Silber, Platin), sonst besteht er aus einem Cocon- oder Glasfaden; in letzterer Zeit benutzt man Quarzfäden (nach dem Vorschlag des englischen Physikers Boys). Der horizontale Körper selbst kann, je nach den Messungen, für welche die Drehwaage bestimmt ist, sehr verschieden gestaltet sein: entweder ist er ein leichtes Stäbchen, das an einem oder beiden Enden Kügelchen trägt, oder ein Magnet oder eine flache längliche Lamelle usw.

Fig. 163.



Er befindet sich in einem viereckigen oder zylindrischen Glasgefäß, auf dessen Deckel sich ein vertikales Glasrohr erhebt, in welchem der Faden herabhängt. Im Deckel ist noch eine Öffnung *a* angebracht, durch welche man einen Körper (Magnet, elektrisiertes Kügelchen) einführen kann, dessen Abstoßung auf das horizontale Stäbchen gemessen werden soll.

Das obere Ende des Fadens ist in der Mitte des Deckels der vertikalen Röhre befestigt. Der Deckel kann um meßbare Winkel gedreht werden; außerdem ist gewöhnlich noch eine Vorrichtung zum Heben oder Senken des Fadens angebracht. In Fig. 163 ist der obere Teil der Röhre in vergrößertem Maßstabe abgebildet. Der Faden ist am Stabe *g* (Fig. 162) befestigt, welcher gehoben, gesenkt, gedreht und in gehöriger Lage mittels einer Klemmschraube, die auch in der Figur sichtbar ist, befestigt werden kann. Der obere Teil der Röhre ist von einer Messingfassung umgeben, an deren festem Teile sich der Index *d* befindet. Der Rand des beweglichen Teiles besteht aus zwei Hälften; die obere Hälfte ist in Gerade geteilt, die untere ist mit Zähnen versehen, in welche die endlose, mittels eines Hookeschen Schlüssels aus

einiger Entfernung in Bewegung zu setzende Schraube hineingreift. Will man den beweglichen Teil schnell um einen größeren Winkel drehen, so rückt man die Schraube ohne Ende mit Hilfe des Griffes  $m$ , der auf eine besondere exzentrische Scheibe wirkt, vom Zahnrade ab und dreht den Deckel an den Stäben  $ff'$  um den gewünschten Winkel.

Das horizontale Stäbchen dreht sich während der Messungen um den Faden. Den Winkel dieser Drehung kann man messen; zu dem Zweck ist bei einigen Apparaten ein Streifen mit Gradteilung von außen auf das Glasgehäuse geklebt oder es ist der Glasdeckel mit einer Kreisteilung versehen. Indem man von der Seite oder von oben her visiert, erhält man einen angenäherten Wert für den Drehungswinkel. Bei genaueren Meßinstrumenten ist der bewegliche Teil mit einem kleinen Spiegel versehen und wird der Drehungswinkel nach der Spiegelablenkungsmethode (vgl. S. 297) bestimmt. Kleine Drehungen können auch von außen vermittelt eines Fernrohres direkt beobachtet werden (s. Fig. 164).

Sind Faden und Stäbchen (falls dieses keine Magnetnadel ist) sich selbst überlassen, so nimmt das Stäbchen eine bestimmte Gleichgewichtslage an, welche dem Normalzustand des Fadens, in welchem er völlig ungedrillt ist, entspricht. Wird nun ein Ende des Fadens um einen gewissen Winkel tordiert, so befindet sich derselbe nicht mehr in seinem Normalzustand — er ist eben tordiert — und es entstehen in ihm innere elastische Kräfte, die den Normalzustand wieder herzustellen suchen, d. h. das untere freie Ende und den daran hängenden Körper zurückzudrehen suchen. Auf dieses Ende und auf den Körper wirkt also nun ein Kräftepaar, dessen Moment wir mit  $M$  bezeichnen wollen. Je größer der Torsionswinkel  $\varphi$  ist, um so größer ist das Moment  $M$  des Kräftepaares. Für sehr dünne Drähte ist das Moment  $M$  dem Winkel proportional und bleibt diese Proportionalität für Winkel bis zu einigen Tausend Grad streng richtig. Wir können mithin setzen

$$M = C\varphi \quad . . . . . (19)$$

wo  $C$  dem Zahlenwert entspricht, welchen das Moment des Kräftepaares annimmt, wenn das freie Fadenende um die Winkeleinheit tordiert wird. Um den Faden in dem Zustande zu erhalten, welchen er bei Drehung um den Winkel  $\varphi$  annimmt, muß man auf ihn ein Kräftepaar wirken lassen, dessen Moment offenbar gleich dem Moment  $M$  der elastischen Kräfte ist. Hieraus folgt, daß Formel (19) auch das Moment  $M$  des von außen wirkenden Kräftepaares bestimmt, welches man auf das freie Fadenende wirken lassen muß, damit der Faden um den Winkel  $\varphi$  tordiert bleibt;  $C$  ist numerisch gleich dem Moment des Kräftepaares, welches eine Torsion um die Winkeleinheit bewirkt.

Den Zahlenwert des Koeffizienten  $C$  kann man aus der Schwingungsdauer  $T$  des aufgehängten Stäbchens finden, wenn

man dasselbe zur Seite dreht und darauf sich selbst überläßt.  $AB$  (Fig. 164) sei die Lage des Stäbchens, wenn der in  $O$  befestigte Faden vollkommen untordiert ist. Ist das Stäbchen um den Winkel  $\varphi$  gedreht und dadurch in die Lage  $CD$  gebracht, so wirkt auf dasselbe ein Kräftepaar, dessen Moment  $M = C\varphi$  ist. Dieses Kräftepaar kann man durch ein beliebiges Kräftepaar  $ff$  ersetzen unter der Bedingung, daß  $2fa = M$  ist, wo  $a = CO = OD$  ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (19), so wird

$$f = \frac{C}{2a} \varphi \dots \dots (20)$$

wo man rechts das Vorzeichen ( $-$ ) setzen könnte, um anzudeuten, daß  $f$  nach der Seite der abnehmenden Winkel  $\varphi$  wirkt. Somit wirkt auf die Hälfte  $OD$  des Stäbchens eine Kraft  $f$ , die dem Winkel  $\varphi$  proportional ist. Dieser Vorgang ist also identisch mit dem, welcher bei sehr kleinen Schwingungen des physischen Pendels auftritt. Für das Pendel gilt allgemein die Beziehung  $f = P \sin \varphi$ , wo  $P$  sein Gewicht bedeutet; für sehr kleine Winkel  $\varphi$  geht diese Formel über in

$$f = P\varphi \dots \dots (21)$$

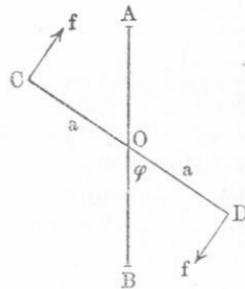
(richtiger  $f = -P\varphi$ ), welche zu dem Gesetz der isochronen Schwingungen führt. In unserem Falle ist  $f$  proportional  $\varphi$  auch für größere Winkel; die Torsionsschwingungen der unifilaren Drehwage stellen daher ein bemerkenswertes Beispiel von Isochronismus dar: für kleine und große Ausschläge ist die Schwingungsdauer  $T$  die gleiche, wenn nur der Faden so dünn ist, daß auch für seine Grenzlagen die Formel (19) in Geltung bleibt.

Für die Schwingungsdauer  $T$  eines physischen Pendels hatten wir die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \dots \dots (22)$$

gefunden, wo  $K$  das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Drehungsachse,  $P$  sein Gewicht und  $a$  der Abstand des Angriffspunktes der Kraft  $P$  (des Schwerpunktes) von der Drehungsachse bedeutet, vgl. (42) S. 254. Bezeichnet man nun mit  $K$  das Trägheitsmoment des ganzen Stäbchens  $AB$  in bezug auf seine Drehungsachse (die Achse des Fadens) und wendet man (22) auf die Hälfte  $OD$  des Stäbchens an, so muß man anstatt  $K$  jetzt  $\frac{1}{2}K$  setzen. Nach (21) und (20) ist

Fig. 164.



$P = \frac{f}{\varphi} = \frac{C}{2a}$ . Formel (22) gibt demnach

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}K}{\frac{C}{2a}}} = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \dots \dots \dots (23)$$

Hieraus erhält man

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \dots \dots \dots (24)$$

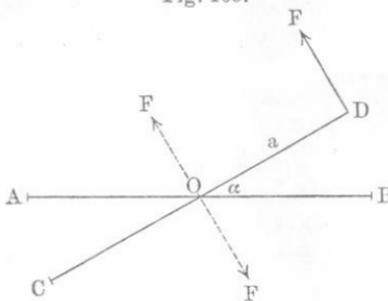
Diese überaus wichtige Formel liefert den Koeffizienten  $C$ , d. h. das Moment des Kräftepaars, welches das untere Fadenende um die Winkeleinheit tordiert. Die Methoden, das Trägheitsmoment  $K$  eines Pendels zu bestimmen, wenn dasselbe nicht aus seiner geometrischen Form berechnet werden kann (S. 98), sollen weiter unten (Kap. VI, § 4, S. 346) besprochen werden. Eine analoge Herleitung liefert  $K$  für den horizontalen Teil der Drehwaage.

Mit Hilfe der unifilaren Drehwaage kann die Kraft  $F$  gemessen werden, welche auf eines der Enden des Stäbchens wirkt. Das Stäbchen befinde sich anfangs in der Ruhelage bei untordiertem Faden. Wir drehen es um den Winkel  $\alpha$  in irgendeiner Richtung; diese Richtung wollen wir als die positive bezeichnen. Tordieren wir dann auch das obere Fadenende, so rechnen wir diesen zweiten Drehungswinkel  $\beta$  positiv in der Richtung, welche der positiven Richtung für  $\alpha$  entgegengesetzt ist. In diesem Falle ist die Torsion  $\varphi$  des Fadens gleich

$$\varphi = \alpha + \beta \dots \dots \dots (25)$$

und das Moment des Kräftepaars, welches das Stäbchen in der Ruhelage erhält, ist gleich  $C\varphi = C(\alpha + \beta)$ . Es sei nun  $AB$  (Fig. 165)

Fig. 165.



die ursprüngliche,  $CD$  die abgelenkte Stellung des Stäbchens und  $\angle BOD = \alpha$ . Die Kraft  $F$  wirke auf den Punkt  $D$  senkrecht zum Stäbchen, wobei  $OD = a$  sei. Wir denken uns bei  $O$  zwei Kräfte  $F$  angreifend, die einander gleich und parallel zu  $DF$  sind. Eine derselben, welche die Richtung der Kraft  $DF$  hat, wird vom Gewicht des Stäbchens aufgehoben und ruft nur eine kleine seitliche Verschiebung

des Punktes  $O$  hervor, die andere Kraft bildet mit  $DF$  ein Kräftepaar, dessen Moment gleich  $Fa$  ist. Damit das Stäbchen im Gleichgewicht

bleibt, muß  $Fa = C\varphi$  sein, woraus sich ergibt

$$F = \frac{C}{a} \varphi \dots \dots \dots (26)$$

Einen anderen Fall haben wir vor uns, wenn die Kraft  $F$  in der Richtung der Verbindungsgeraden der Punkte  $B$  und  $D$  wirkt (Fig. 166), d. h. wenn sich in  $B$  ein Körper befindet, welcher das Ende  $D$  des Stäbchens abstößt.  $F_1$  sei die Komponente der Kraft  $F$ , welche senkrecht zu  $OD$  wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist jetzt  $F_1 a = C\varphi$ ;

es ist aber  $F_1 = F \cos \frac{\alpha}{2}$ , weil  $OE \perp DB$ , also  $\angle FDF_1 = \angle EOD$  ist, als Winkel mit zueinander senkrechten Schenkeln. Wir haben folglich  $Fa \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi$  und hiernach

$$F = \frac{C\varphi}{a \cos \frac{\alpha}{2}} \dots (27)$$

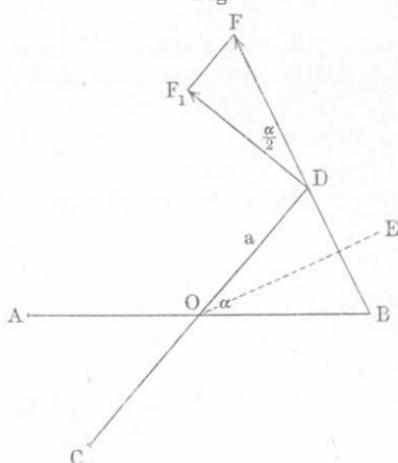
Soll das Verhältnis der beiden Kräfte  $F$  und  $F'$  gefunden werden, welche das Stäbchen um  $\alpha$  und  $\alpha'$  drehen, während die ganzen Drehungswinkel  $\varphi$  und  $\varphi'$  seien, dann haben wir außer (27) noch die Gleichung

$$F' = \frac{C\varphi'}{a \cos \frac{\alpha'}{2}}, \text{ mithin für das Verhältnis}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (28)$$

Wenn das obere Fadenende nicht tordiert wird ( $\beta = 0$ ), so ist  $\varphi = \alpha$  und  $\varphi' = \alpha'$ . Die Formeln (26), (27) und (28) sind unter der Voraussetzung erhalten worden, daß außer der Kraft  $F$  und dem Kräftepaar, das den Faden zurückzudrehen strebt, keine weitere Kraft oder kein Kräftepaar auf das Stäbchen einwirkt. Es gibt jedoch Fälle, wo bei Drehung des Stäbchens außer dem Kräftepaar  $M$  noch ein weiteres Kräftepaar auftritt, welches ebenfalls das Stäbchen in die frühere Lage zurückzuführen sucht, und wo das Moment  $M'$  dieses zweiten Kräftepaares eine Funktion des Winkel  $\alpha$  ist. Dies tritt z. B. ein, wenn das horizontale Stäbchen der unifilaren Drehwage eine Magnetnadel ist, also seine Ruhelage mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt.

Fig. 166.





hindern. Das tordierende Kräftepaar, dessen Moment wir mit  $M$  bezeichnen, wird mithin vom Gewicht  $P$  im Gleichgewicht gehalten. Den Einfluß der geringfügigen Tordierung der Fäden und ihres Gewichtes kann man vernachlässigen.

Wir suchen die Gleichgewichtsbedingung für das Stäbchen  $AB$ , wenn es vom Kräftepaar  $M$  um den Winkel  $\varphi$  gedreht ist. In Fig. 168 ist der mittlere Teil  $CD$  des Stäbchens in normaler Stellung vergrößert dargestellt; es sei  $CO = OD = a$ ,  $ER = RF = b$ ,  $OHR$  eine vertikale Gerade und  $CE = DF = l$  die Länge der Fäden.

Durch Einwirkung des Kräftepaares hat das Stäbchen die Lage  $KL$  erhalten, es hat sich um den Winkel  $JHL = \varphi$  gedreht und um die Höhe  $OH$  gehoben. Wir ziehen nun durch  $F$  die vertikale Gerade  $FJ$  und verbinden die Punkte  $J$  und  $L$  miteinander; es sei  $RH = FJ = z$  und  $JL = c$ ; offenbar ist  $HJ = b$  und daher

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

Ferner ist  $\overline{FJ}^2 = \overline{FL}^2 - \overline{LJ}^2$ , d. h.  $z^2 = l^2 - c^2$ , folglich

$$z^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi. \quad (30)$$

Das von außen wirkende Kräftepaar  $M$  denken wir uns durch zwei Kräfte  $f$  ersetzt, welche an  $L$  und  $K$  angreifen, und zwar senkrecht zu  $KL$ , wobei  $2af = M$  ist. Das Stäbchen befinde sich in der Lage  $KL$  im Gleichgewicht. Um einen Zusammenhang zwischen  $M$  und  $\varphi$  zu finden, nehmen wir an, das Stäbchen drehe sich noch weiter um den kleinen Winkel  $\Delta\varphi$  und hebe sich hierbei über  $H$  hinaus um eine minimale Größe, die wir, da sich  $z$  vermindert, mit  $-\Delta z$  bezeichnen wollen. Das Kräftepaar leistet bei dieser geringfügigen Drehung eine Arbeit gleich  $M\Delta\varphi$  (S. 108), welche gleich der zum Heben der Last  $P$  auf die Höhe  $\Delta z$  aufgewandten Arbeit sein muß. Hieraus folgt

$$M\Delta\varphi = -P\Delta z. \quad (31)$$

Aus (30) erhält man

$$z\Delta z = -ab \sin \varphi \cdot \Delta\varphi. \quad (32)$$

Hieraus entnehmen wir jetzt  $\Delta z$ , setzen es in (31) ein und kürzen durch  $\Delta\varphi$ . So erhalten wir

$$M = \frac{ab}{z} P \sin \varphi.$$

Die Größe  $OH$ , um welche das Stäbchen sich hebt, ist immer sehr klein, daher kann man in der letzten Formel  $l$  anstatt  $z$  setzen; dann ist

$$M = \frac{ab}{l} P \sin \varphi. \quad (33)$$

und im Falle, daß die Fäden einander parallel sind ( $b = a$ )

$$M = \frac{a^2}{l} P \sin \varphi. \quad (34)$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor von  $\sin \varphi$ , der für die gegebene Drehwage maßgebend ist, mit  $C$ , so wird

$$M = C \sin \varphi \dots \dots \dots (35)$$

Vergleicht man diese Formel mit Formel (19),  $M = C\varphi$ , welche für die unifilare Drehwage galt, so sieht man, daß das Moment des Kräftepaares, welches das Stäbchen zurückzuführen sucht, für die unifilare Drehwage proportional dem Torsionswinkel, für die bifilare Drehwage proportional dem Sinus des Torsionswinkels ist. Im weiteren ergibt sich, daß der Proportionalitätsfaktor von der Länge und gegenseitigen Lage der Fäden und dem Gewicht des Stäbchens abhängt. Die Empfindlichkeit der bifilaren Drehwage ist um so größer, je kleiner  $C$  ist; sie ist also proportional der Länge  $l$  der Fäden, indirekt proportional dem Produkt der Abstände der Fadenenden oder dem Quadrat des Fadenabstandes bei parallelen Fäden und endlich indirekt proportional dem Gewicht des horizontalen Stäbchens.

Formel (35) zeigt, daß  $M$  zugleich mit  $\varphi$  bis  $\varphi = 90^\circ$  anwächst. Weiter darf man den Doppelfaden nicht tordieren, da sich sonst das Stäbchen im labilen Gleichgewicht befindet; dann dreht es sich fast immer um den Winkel  $\varphi = 180^\circ$ , wobei die beiden Fäden einander berühren und keinen Doppelfaden mehr bilden.

Der Doppelfaden befindet sich gewöhnlich, ebenso wie der einfache Faden der unifilaren Drehwage, in einem Glasgehäuse bzw. einer Glasröhre, deren Deckel gedreht werden kann. Haben  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\varphi$  dieselbe Bedeutung wie früher, so ist wiederum [vgl. (25)]  $\varphi = \alpha + \beta$ . Wirkt auf das Stäbchen eine Kraft  $F$  (vgl. Fig. 165), senkrecht zu demselben mit einem Angriffspunkt in der Entfernung  $a$  von der Mitte des Stäbchens [es ist dieses  $a$  nicht dasselbe, wie in (32) und (34)], so haben wir statt (26) die folgende Beziehung

$$F = \frac{C}{a} \sin \varphi \dots \dots \dots (36)$$

Hat jedoch die Kraft  $F$  die Richtung der Verbindungsgeraden zwischen der Anfangslage und der neuen Lage desjenigen Punktes des Stäbchens, welches von seinem Mittelpunkt um  $a$  absteht, so haben wir an Stelle von (27)

$$F = \frac{C \sin \varphi}{a \cos \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (37)$$

Für das Verhältnis der beiden Kräfte erhalten wir analog (28):

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (38)$$



## Sechstes Kapitel.

## Messung der Zeit.

§ 1. **Allgemeine Bemerkungen über Zeitmessung.** Die Zeitmessung kann zweierlei Art sein; entweder man hat die „wahre Zeit“ zu finden, d. h. den Zeitpunkt, wo irgendeine Erscheinung auftritt, oder — die Größe des Zeitintervalls, welches zwischen zwei Augenblicken liegt. Strenggenommen bestimmen wir auch im ersten Falle ein gewisses Zeitintervall, nämlich den Abstand von einem nicht von uns gewählten und daher willkürlichen, sondern allgemein festgesetzten Zeitpunkt, von dem an die Zeitrechnung beginnt (Jahr, Monat, Tag, ferner Stunde, Minute und Sekunde von der letzten unteren Kulmination der mittleren Sonne gerechnet) bis zu dem Zeitpunkt, dessen „wahre Zeit“ wir suchen. Indessen sind die Bedingungen, denen die Apparate in diesen beiden Fällen genügen müssen, durchaus verschieden. Bei den Messungen der ersten Art braucht man Uhren, welche die wahre Zeit mit großer Genauigkeit ergeben oder für welche die Korrektion bekannt ist, durch deren Anbringung man aus den fehlerhaften Angaben der Uhren die wahre Zeit finden kann. Im zweiten Falle braucht man nur eine richtige Zählvorrichtung, während die von derselben angegebene Zeit auch unrichtig sein kann. Messungen ersterer Art kommen in der Physik relativ selten vor, sie spielen eine Hauptrolle bei astronomischen Beobachtungen. In der Meteorologie wird auch die wahre Zeit registriert, doch genügen hierfür die Angaben einer „richtig gehenden“ gewöhnlichen Uhr; nur selten, etwa bei Beobachtung von magnetischen Gewittern, Erdbeben usw. ist eine genaue Kenntnis der wahren Zeit erforderlich.

Als Zeiteinheit wird die Sekunde benutzt, d. h. der  $\frac{1}{86400}$  Teil der Dauer eines mittleren Sonnentages. Ein Sterntag enthält nur 86 164,091 Sekunden. Zur Zeitmessung ist ein Apparat erforderlich, bei welchem irgendeine periodische Bewegung vor sich geht, deren Periodendauer entweder gleich einer Sekunde oder gleich einem einfachen Teil oder Vielfachen einer Sekunde ist. Beispiele derartiger Apparate sind die Pendeluhr, Taschenuhren, größere Uhren in horizontalen Gehäusen usw. Uhren mit besonders genauem Gang, bei denen also die Dauer einer Schwingung möglichst konstant ist, heißen Chronometer. Man unterscheidet Uhren mit Federwerk und mit Gewichten (Sonnen-, Sanduhren u. dgl. sollen hier nicht betrachtet werden). Die Uhren müssen aufgezogen werden, und man hat es sich zur Regel zu machen, die Uhren mit Federwerk in gleichen Zeitabständen aufzuziehen, etwa alltäglich um dieselbe Stunde.

Die Uhren, welche zur Zeitmessung bei physikalischen Arbeiten dienen, müssen ganze oder halbe Sekunden laut angeben. Soll das Zeitintervall zwischen zwei Vorgängen gemessen werden, so hat der Beobachter zunächst das Datum, Stunde und Minute sich zu merken, und darauf für sich die Sekunden zu zählen, während er zugleich seine Aufmerksamkeit auf den Augenblick richtet, wo zunächst die eine Erscheinung, und darauf auf den Augenblick, wo die zweite eintritt. Bei einiger Übung gelingt es, selbst Zehntel einer Sekunde nach dem Gehör zu bestimmen, falls die beobachteten Erscheinungen recht plötzlich auftreten. In diesem Falle dient die Uhr als Registrierapparat.

Es gibt besondere, recht bequeme Mechanismen, die dazu dienen, den Zeitabschnitt zwischen den Momenten *A* und *B* des Entstehens zweier Erscheinungen oder der Dauer einer Erscheinung (dann bedeutet *A* den Beginn, *B* das Ende derselben) zu bestimmen. Es sind das Taschenuhren mit einem besonderen Zeiger, der in der Minute einen vollen Umlauf um das in 300 Teile (entsprechend je 0,2 Sekunden) geteilte Zifferblatt ausführt. Beim Druck auf einen Knopf stellt sich der Zeiger auf den Nullpunkt der Kreisteilung ein; drückt man abermals (im Augenblick *A*), so beginnt der Zeiger sich zu bewegen, drückt man zum drittenmal (im Augenblick *B*), so wird er angehalten. Der von diesem Zeiger durchlaufene Weg bestimmt den gesuchten Zeitabstand. Drückt man zum viertenmal auf den Knopf, so springt der Zeiger wiederum auf den Nullpunkt der Kreisteilung zurück. Es gibt auch verwickeltere Registriervorrichtungen mit zwei Zeigern, die in gewissen Fällen von großem Nutzen sind.

Zu den Zeitzählern gehört auch das bekannte Metronom, welches bisweilen, wenn es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, auch bei physikalischen Versuchen benutzt wird.

Die zu physikalischen Arbeiten dienenden Wanduhren haben meist ein Sekundenpendel, d. h. ein Pendel, dessen Schwingungsdauer gleich einer Sekunde ist. Die Bewegungen des Pendels werden durch den Zug eines gehobenen Gewichtes aufrecht erhalten, oder durch eine aufgewickelte Feder, oder endlich durch leichte Stöße eines anderen Sekundenpendels, wobei man sich elektrischer Ströme zur Übertragung der Stöße bedient. Solche Uhren heißen elektrische.

Einen vollkommen richtigen Gang des Pendels zu erreichen, ist eine sehr schwierige Aufgabe. Unter anderen hat Lippmann (Journ. de Phys. 1896, S. 429) eine geistreiche Methode zur elektrischen Übertragung der Pendelbewegung erdacht, bei welcher keinerlei Störungen in der Bewegung des Pendels entstehen.

Die Temperatur hat einen großen Einfluß auf den Gang der Uhr; so nimmt z. B. bei Temperaturzunahme auch die Pendellänge zu, infolgedessen vergrößert sich die Schwingungsdauer (die Uhr geht nach). Um den Einfluß der Temperatur zu beseitigen (Kompensation), kon-

struiert man das Pendel so, daß sein Schwingungsmittelpunkt bei Temperaturänderung selbst unverändert bleibt. Ein solches Pendel heißt

Fig. 169.

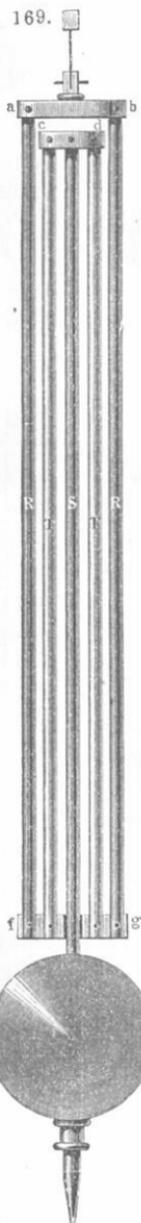
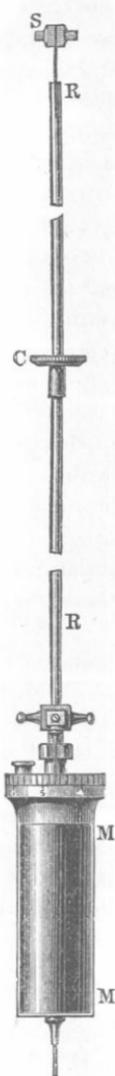


Fig. 170.



Kompensationspendel. In Fig. 169 ist ein oft gebrauchtes sogenanntes Rostpendel abgebildet: an der federnden Lamelle ist ein horizontaler Träger *ab* befestigt, an dessen Ende zwei Stahlstäbe *R* geschraubt sind. Diese sind unten an einem zweiten Träger *fg* befestigt, auf den zwei Messingstäbe *T* geschraubt sind. Ein dritter horizontaler Träger *cd* verbindet die Enden der Messingstäbe und trägt in der Mitte einen Stahlstab *S*, an welchem sich die Linse befindet. Nimmt die Temperatur zu, so senkt sich die Linse, da sich die drei parallelen Stahlstäbe verlängern und hebt sich zugleich durch Ausdehnung der beiden Messingstäbe. Der Koeffizient der thermischen Ausdehnung des Messings ist jedoch 1,74 mal größer als der des Stahls. Gibt man den Stäben eine entsprechende Länge, so kann man es erreichen, daß der Schwingungsmittelpunkt fast vollkommen unbeweglich bleibt, folglich auch die Schwingungsdauer sich bei Änderung der Temperatur nicht ändert. Statt Stahl und Messing können Eisen und Zink genommen werden.

In Fig. 170 ist ein anderes Kompensationspendel abgebildet; es besteht aus einem Stabe *RR*, an welchem ein Glaszylinder *MM* mit Quecksilber hängt. Die thermische Ausdehnung des Quecksilbers ist größer als die des Glases, infolgedessen hebt sich das Niveau des Quecksilbers bei Temperatursteigerung und kompensiert auf diese Weise die Verlängerung des Stahlstabes. — Die Größe des Luftdruckes hat ebenfalls einen, wenn auch sehr geringen Einfluß auf die Schwingungsdauer des Pendels<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Vgl. Tisserand, Compt. rend. **122**, 646, 1896.

**§ 2. Chronographen.** Chronographen nennt man Apparate, welche die Zeitpunkte für gewisse Erscheinungen angeben (registrieren), und es somit ermöglichen, die Intervalle zwischen diesen Zeitpunkten zu bestimmen. Die Registrierung erfolgt gewöhnlich auf einem Papierstreifen, der sich der Länge nach vorwärts bewegt, etwa in der Art, wie beim Morseschen Telegraphenapparat — oder auf einem rotierenden und in der Richtung der Achse fortschreitenden Zylinder. Die Bewegung des Papierstreifens bzw. der Zylindertrommel wird durch ein Uhrwerk bewirkt; bisweilen wird auch die Zylindertrommel mit der Hand gedreht. Die Zeichen auf dem Papierstreifen werden mit Hilfe einer Nadel, eines Bleistiftes oder einer Feder mit farbiger Tinte hervorgebracht, bisweilen auch durch einen Induktionsfunken, der von einer Spitze auf einen kleinen unter dem Papierstreifen befindlichen Metallstreifen überspringt und ein kleines Loch im Papierstreifen hinterläßt. Die Bewegung der Nadel usw. bewirkt ein Elektromagnet. Der Induktionsfunke wird hierbei durch plötzliches Öffnen des galvanischen Stromes, der den Elektromagneten erregt, hervorgebracht. Das Schließen und Öffnen des Stromes wird entweder vom Beobachter selbst im entsprechenden Augenblick vorgenommen oder geschieht automatisch, indem beispielsweise eine abgeschossene Flinten- oder Kanonenkugel beim Verlassen des Geschützes den stromführenden Draht zerreißt.

Die in der Regel metallische Oberfläche der Zylindertrommel schwärzt man mit einer dünnen Rußschicht, nachdem sie zuvor mit Fett oder Vaseline eingerieben worden, oder bestreut sie mit Hexenmehl. Die Zeichen auf dieser Oberfläche werden von einer Spitze oder einem elektrischen Funken hervorgebracht. Bisweilen überzieht man auch die Trommel mit einem Papierstreifen, auf welchem dann in der weiter unten angegebenen Weise Zeichen erhalten werden; den Streifen kann man nachher abnehmen und aufbewahren. Hat die Trommel bloß eine rotierende Bewegung, so muß die Schreibvorrichtung sich parallel zur Trommelachse verschieben können, damit die Zeichen nicht an derselben Stelle entstehen, wenn die Trommel einen vollen Umlauf gemacht hat. Ist dagegen die Schreibvorrichtung unbeweglich, so muß sich die Trommel auf einer Schraubenachse seitlich verschieben können, so daß die aufgezeichneten Linien oder Zeichen sich in einer schraubenförmigen Linie anordnen. Es gibt auch Chronographen, bei denen die Zylindertrommel unbeweglich ist und die Schreibvorrichtung sich um sie herum bewegt. Das Aufzeichnen mittels einer Spitze kann in verschiedener Weise geschehen:

1. Der Zeichenstift steht ein wenig von der Trommelfläche ab und berührt sie nur in den zu bestimmenden Zeiten auf einen Augenblick. Dann entstehen vereinzelte Punkte oder ganz kurze Striche, deren gegenseitiger Abstand als Maß des gesuchten Zeitintervalls dient. Läßt man die Berührung während des gesuchten Zeitabstandes andauern, so

entsteht ein längerer Strich, dessen Länge das Maß für das Intervall liefert.

2. Der Stift berührt die Trommel und entfernt sich dann von ihr in bestimmten Augenblicken oder im Laufe einer gewissen Zeit; hier dienen die Lücken in der Linie zur Ermittlung des gesuchten Zeitintervalls.

3. Der Stift berührt die Trommeloberfläche und wird in bestimmten Augenblicken oder während eines gewissen Zeitraumes zur Seite bewegt. Es entstehen in diesem Falle Linien in der Art von  $AB$  oder  $CD$  (Fig. 171); das gesuchte Zeitintervall entspricht der Länge von  $ab$  bzw.  $cd$ .



Hat man nach einer der obigen Methoden auf der Zylindertrommel des Chronographen Zeichen erhalten, welche ein bestimmtes Zeitintervall anmerken, so muß man noch bestimmen, welche Entfernung der Zeichen einer Sekunde entspricht. Hierzu dienen die folgenden Methoden:

1. Ist die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel bekannt, so entspricht (wenn man die Neigung der Schraubenlinie unbeachtet läßt) einer Sekunde die Länge  $2\pi nR$ , wo  $R$  den Grundflächenradius und  $n$  die Zahl der Umdrehungen in einer Sekunde bedeuten.

2. Man nimmt eine Uhr mit Sekundenpendel, welche bei jeder Schwingung des letzteren einen elektrischen Strom für einen Augenblick schließt oder öffnet; dieser Strom wirkt auf einen zweiten Zeichenstift, der sich neben dem ersten befindet;

dieser zweite bezeichnet auf dem Papierstreifen bzw. der Trommel nach einer der vorher beschriebenen Methoden die um je eine Sekunde voneinander abstehenden Zeitpunkte. In Fig. 171 entsprechen die vier Striche zwischen  $E$  und  $F$  den einzelnen Sekunden, die Striche  $e$  und  $f$  dagegen den gesuchten Zeitpunkten, die, wie man sieht, um  $2,7 - 0,2 = 2,5$  Sekunden voneinander entfernt sind.

3. Auf einem rotierenden Zylinder wird durch einen an der Zinke einer Stimmgabel mit bekannter Schwingungszahl befestigten Stift eine Wellenlinie aufgezeichnet. In Fig. 172 ist der Zylinder nebst Schraubenachse und Stimmgabel  $K$  abgebildet, der Zeichenstift ist hier nicht sichtbar. Versetzt man den Zylinder in Drehung, so zeichnet der Stift, falls der Zylinder keine fortschreitende Bewegung besitzt, eine wellenförmige Kurve, wie sie in Fig. 173 dargestellt ist. Rückt dagegen der Zylinder auf seiner Achse weiter, so umgibt die Wellenlinie den Zylinder schraubenförmig, wie in Fig. 174. Zweckmäßig läßt man den Zylinder zu Beginn des Versuches bei ruhender Stimmgabel

eine Reihe von Umdrehungen ausführen; dann entsteht eine Schraubenlinie, welche die darauf mit schwingender Stimmgabel erhaltenen Wellenlinie in zwei symmetrische Hälften teilt.

Um die Stimmgabel *K* zum Tönen zu bringen, bringt man sie zwischen zwei Elektromagnete *M* und *M'*, durch deren Bewicklung

Fig. 172.

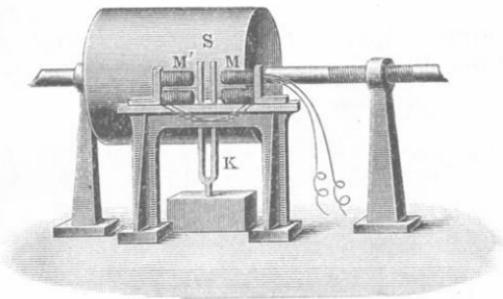
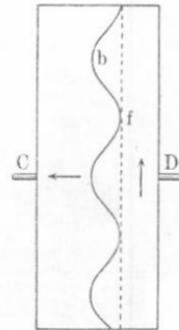


Fig. 173.



man, falls  $n$  die Schwingungszahl der Stimmgabel ist,  $n$  kurzdauernde Ströme in der Sekunde sendet. Hierzu dient die Unterbrecherstimmgabel, die in Fig. 175 dargestellt ist und ebenfalls die Schwingungszahl  $n$  hat. An Zinken der letzteren sind zwei Stifte *K* und *O* befestigt, von denen *K* in das Quecksilber des darunter befindlichen Ge-

Fig. 174.

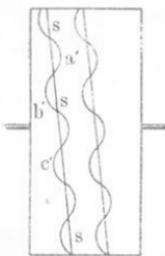
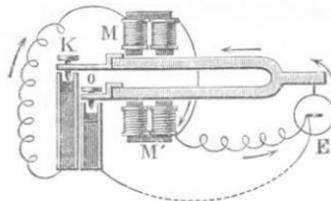


Fig. 175.

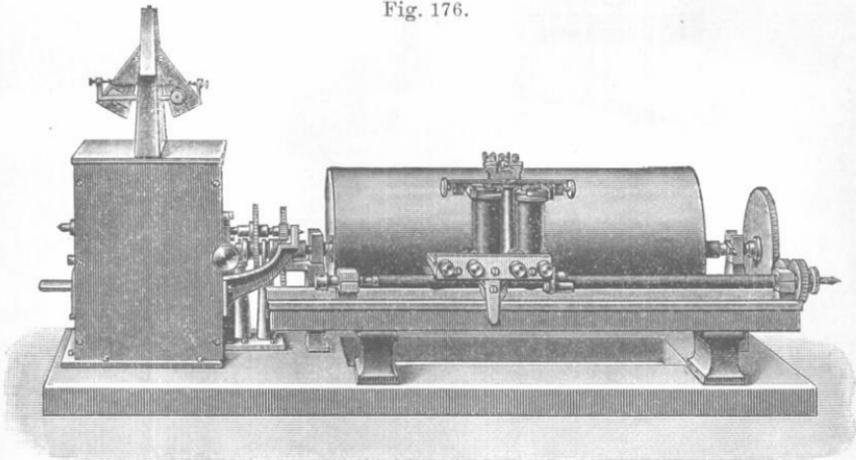


fäßes taucht, während sich *O* ein wenig oberhalb des Quecksilbers im rechten Gefäße befindet. Die Anordnung der Elektromagnete und Drahtleitungen ist aus der Figur ersichtlich. In der durch eine punktierte Linie angedeuteten Nebenleitung befinden sich die Elektromagnete der Stimmgabel *K* (Fig. 172). Ist der Strom des Elementes *E* geschlossen, so fließt er in der Richtung der Pfeile, und die Elektromagnete ziehen die Stimmgabel an. Hierbei hebt sich *K* aus dem Quecksilber und taucht *O* in dasselbe ein, so daß die Hauptleitung geöffnet, die Nebenleitung geschlossen wird. Der Strom geht nun zur Schreibvorrichtung (Fig. 172). Infolge der Unterbrechung der Hauptleitung verlieren die Elektromagnete *M* und *M'* ihren Magnetismus, die Zinken der Stimm-

gabel kehren in die Lage zurück, welche in der Figur dargestellt ist, *K* taucht wieder in das Quecksilber ein, während *O* dasselbe verläßt. Nun wird wiederum die Hauptleitung geschlossen, die Nebenleitung geöffnet, die Elektromagnete ziehen wiederum die Zinken der Stimmgabel an usw. Auf diese Weise beginnt die Unterbrecherstimmgabel (Fig. 175) zu tönen, macht  $n$  Schwingungen in der Sekunde, schließt die Nebenleitung ebensooft und versetzt die Schreibstimmgabel *K* (Fig. 172) in ebenfalls  $n$  Schwingungen pro Sekunde.

In Fig. 176 ist ein Chronograph der Société Genévoise abgebildet. Links befindet sich das Uhrwerk, welches den Zylinder nur in gleich-

Fig. 176.



förmige Drehung versetzt, während der vorn sichtbare Schreibapparat sich durch die gleichzeitige Drehung der horizontalen langen Schraube gleichförmig parallel der Achse des Zylinders bewegt.

Zur Messung äußerst kleiner Zeitabstände dienen verschiedene Verfahren, von denen wir einige später in Band II und IV betrachten werden. H. Abraham und L. Lemoine haben eine Methode angegeben, welche es ermöglicht, Zeitintervalle von der Größenordnung  $10^{-8}$  bis  $10^{-9}$  Sekunden zu messen, und zwar durch Bestimmung der Strecke, welche während dieser Zeit vom Licht zurückgelegt wird. Die Methode von Abraham und Lemoine wurde genau untersucht, angewandt und vervollkommenet durch John James (1904), Mond und Wildermann (1906) und Turpain (1905). Eine andere Methode, sehr kleine Zeitintervalle zu messen, hat Devaux-Charbonnel (1906) angegeben; sie beruht auf der Messung der in jenem Zeitintervall sich entladenden Ladung eines Kondensators.

Abraham und Lemoine: *Ann. chim. phys.* (7) **20**, 264, 1900; *Journ. de phys.* (3) **9**, 262, 1900.

John James: *Annal. d. Phys.* (4) **15**, 954, 1904.

Mond und Wildermann: Phil. Mag. (6) **11**, 393, 1906; Zeitschr. f. phys. Chem. **54**, 294, 1906.

Turpain: C. R. **141**, 422, 1905.

Devaux-Charbonnel: C. R. **142**, 1080, 1906.

§ 3. **Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels.** Wir hatten für die Schwingungsdauer  $T$  eines physischen Pendels die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

gefunden, vgl. (43), S. 254, wo  $K$  das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Drehungsachse,  $P$  sein Gewicht,  $a$  die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachse und  $\alpha$  der Ausschlagswinkel war, um den sich das Pendel aus seiner vertikalen Lage entfernt. Für unendlich kleine Schwingungen war

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \dots \dots \dots (2)$$

so daß

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (3)$$

wurde.

Es soll nun die Größe  $T_0$  gefunden werden. Sind die Schwingungen sehr klein, so kann man annehmen, daß die beobachtete Schwingungsdauer  $T$  gleich  $T_0$  sei. Um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen, registriert man nach einer der im § 2 beschriebenen Methoden die Augenblicke, in welchen das Pendel durch seine Gleichgewichtslage hindurchgeht. Am bequemsten ist es, wenn man zunächst den Zeitpunkt festlegt, wo das Pendel zum erstenmal durch seine Gleichgewichtslage schwingt; dies ist dann der Ausgangspunkt der Zählung. Hierauf merkt man sich den Moment des  $n$ ten, etwa 50ten oder 100ten Durchganges durch die Gleichgewichtslage. Sei der Zeitabstand vom nullten bis zum  $n$ ten Durchgang gleich  $\tau_n$ , so ist für sehr kleine Schwingungen

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \dots \dots \dots (4)$$

Der größeren Genauigkeit halber bedienen wir uns jedoch der Formel (3) und berücksichtigen dabei den Umstand, daß die Pendelschwingungen gedämpfte Schwingungen darstellen (S. 156), deren Amplitude in geometrischer Progression abnimmt. Anstatt  $\alpha$  kann man das arithmetische Mittel aus der Anfangsamplitude  $\alpha_1$  und Endamplitude  $\alpha_n$  wählen; dann ist

$$T = \frac{\tau_n}{n} = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4} \right)$$

oder

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Die genauere Formel hat folgende Form

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_n) \sin(\alpha_1 - \alpha_n)}{32 \lg \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_n}}} \dots \dots (6)$$

wo das Zeichen  $\lg$  den natürlichen Logarithmus bedeuten soll.

Die Größe des Ausschlages kann man dadurch bestimmen, daß man z. B. eine horizontale Skala hinter dem unteren Pendelende parallel zur Schwingungsebene anbringt.

**§ 4. Das Trägheitsmoment eines Pendels.** Das Trägheitsmoment  $K$  eines Pendels kann man nur in seltenen Fällen durch Rechnung finden; möglich ist dies, wenn die Gestalt und die Dimensionen des Pendels einer der auf S. 99—101 gegebenen Formeln entsprechen. Ist  $M$  die Masse des Pendels, so stellt sich  $K$  im allgemeinen in der Form  $M\varrho^2$  dar; setzt man diesen Ausdruck für  $K$  und  $P = Mg$  in (2) ein, so ergibt sich

$$T_0 = \pi \frac{\varrho}{\sqrt{ga}} \dots \dots \dots (7)$$

Besteht z. B. das Pendel aus einem sehr dünnen Faden, dessen Masse vernachlässigt werden kann, und einer massiven Kugel vom Radius  $R$  und bezeichnet  $l$  die Entfernung des Aufhängepunktes vom Kugelmittelpunkt, so erhält man nach Formel (39) auf Seite 101 und Formel (39) auf Seite 253

$$K = \frac{2}{5} MR^2 + Ml^2 \text{ und hieraus } \varrho = \sqrt{l^2 + \frac{2}{5} R^2}$$

Liegt der Schwerpunkt des Pendels im Kugelmittelpunkt, so ist  $a = l$  und Formel (7) gibt in diesem Falle

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \dots \dots \dots (8)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Größe  $K$  verfährt man folgendermaßen. Man ermittelt zunächst die Schwingungsdauer  $T_0$  des Pendels, d. h. die Größe

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \dots \dots \dots (9)$$

Hierauf bringt man am Pendel ein Übergewicht an (das auch aus mehreren einzelnen Teilen bestehen kann), dessen Schwerpunkt mit der Drehungsachse zusammenfällt und dessen auf diese Achse bezogenes Trägheitsmoment  $K_1$  bekannt ist. Hierzu kann z. B. ein flacher Ring

dienen, dessen Mittelpunkt auf der Drehungsachse liegt und dessen Seiten der Schwingungsebene parallel sind; vgl. Formel (36) auf Seite 100. Man erhält die neue Schwingungsdauer  $T_1$ , wenn man in Formel (9)  $K + K_1$  an Stelle von  $K$  und  $(P + P_1)a'$  an Stelle von  $Pa$  einsetzt, wobei  $P_1$  das Gewicht des hinzugekommenen Übergewichtes,  $a'$  den Abstand des neuen Pendelschwerpunktes von der Drehungsachse bedeuten. Formel (27) gibt indessen, da der Schwerpunkt des Übergewichtes in der Drehungsachse liegt,  $(P + P_1)a' = Pa + P_1 \cdot 0$ . Danach erhält man

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K + K_1}{Pa}} \dots \dots \dots (10)$$

die Formeln (9) und (10) ergeben

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{K + K_1}{K} = 1 + \frac{K_1}{K}; \quad \frac{K_1}{K} = \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2}$$

und hieraus folgt

$$K = K_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \dots \dots \dots (11)$$

### § 5. Vergleichung der Schwingungsdauer zweier Pendel; Methode der Koinzidenzen.

Ist die Schwingungsdauer  $T$  eines von zwei Pendeln bekannt, und unterscheidet sich die Schwingungsdauer  $T_1$  des anderen nur wenig von  $T$ , so läßt sich die Schwingungsdauer des zweiten auf folgende Weise bestimmen. Man hängt die beiden Pendel so auf, daß ihre Schwingungen in zu einander parallelen Ebenen erfolgen. Diese Schwingungen beobachtet man mit Hilfe eines Fernrohres, dessen Achse senkrecht zur Schwingungsebene ist und durch die Gleichgewichtslage der Pendel hindurchführt.

Wenn beide Pendel in irgendeinem Augenblick gleichzeitig und in derselben Richtung durch ihre Gleichgewichtslagen gehen, so werden, falls dann  $T_1$  nicht gleich  $T$  ist, sich die Pendel darauf wieder voneinander entfernen; man hat nun darauf zu achten, welches von ihnen schneller schwingt. Nach einiger Zeit, wenn das Pendel  $n'$  Schwingungen vollführt hat, gehen sie wieder beide gleichzeitig durch die Mitte, der sie sich von entgegengesetzten Seiten her nähern. In diesem Augenblick hat das andere Pendel  $n' + 1$  oder  $n' - 1$  Schwingungen vollführt. Diese Begegnung der Pendel läßt sich nicht bequem beobachten, man bestimmt daher die Zahl  $n$  von Schwingungen, welche das erste Pendel bis zu dem Augenblick vollführt, wo beide Pendel wiederum gleichzeitig, d. h. in derselben Richtung, durch die Gleichgewichtslage gehen. In diesem Augenblick hat das zweite Pendel  $n + 2$  oder  $n - 2$  Schwingungen ausgeführt. Die Beziehung  $nT = (n \pm 2)T_1$  liefert das gesuchte Verhältnis

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{n \pm 2} \dots \dots \dots (12)$$

Die Genauigkeit der Bestimmung erhöht sich, wenn man bis zur  $n$ ten Koinzidenz wartet und die entsprechende Zahl  $N$  der Schwingungen des ersten Pendels zählt; in diesem Augenblick beendet das zweite Pendel seine  $(N \pm 2m)$ te Schwingung, und es ist

$$\frac{T_1}{T} = \frac{N}{N \pm 2m} \dots \dots \dots (13)$$

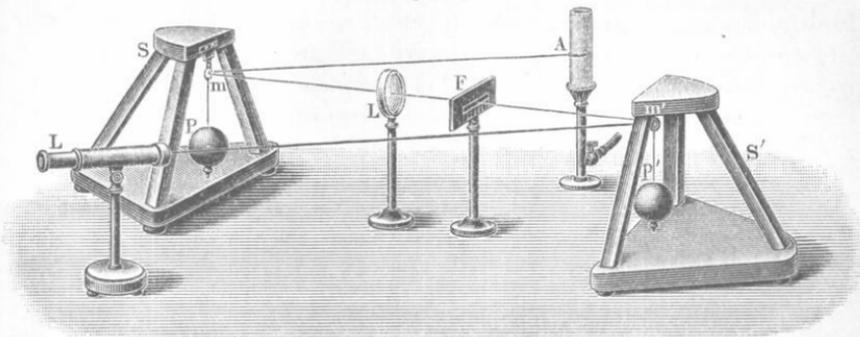
Ist das erste Pendel ein Sekundenpendel ( $T = 1$ ), so erhält man für die Schwingungsdauer  $T_1$  des zweiten Pendels aus (12) bzw. (13)

$$T_1 = \frac{n}{n \pm 2} \text{ Sekunden bzw. } T_1 = \frac{N}{N \pm 2m} \text{ Sekunden} \dots (14)$$

Man hat verschiedenerlei Vorkehrungen ersonnen, die einem die Beobachtung der Koinzidenzen, d. h. des gleichzeitigen Durchganges beider Pendel durch die Gleichgewichtslage, erleichtern; sie hängen von der Form der Pendel ab, und es soll davon im § 3 des folgenden Kapitels (auf S. 356) die Rede sein.

**§ 6. Lippmanns stroboskopische Methode zum Vergleichen der Schwingungsdauer zweier Pendel** [Journ. de phys. (2) 6, 266, 1887]. Fig. 177 gibt ein schematisches Bild von der Anordnung der Apparate.

Fig. 177.



$P$  und  $P'$  sind zwei Pendel, deren Schwingungsdauern nur wenig voneinander verschieden sind; sie schwingen in Ebenen, welche durch  $S$  und  $S'$  gehen. An ihnen sind zwei Spiegelchen  $m$  und  $m'$  angebracht, deren Oberflächen senkrecht zu den Schwingungsebenen sind. In  $A$  befindet sich ein heller horizontaler Spalt. Die von  $A$  ausgehenden Strahlen werden von  $m$  reflektiert und liefern nach Durchgang durch die Linse  $L$  ein Bild des ersten Spaltes an der Stelle, wo sich der horizontale Spalt der Platte  $F$  befindet. Von hier gehen die Strahlen nach  $m'$  und werden ins Fernrohr  $L$  geworfen, mit dem der Spalt  $F$  beobachtet wird. Im Okular des Fernrohres befindet sich eine vertikale, mikrometrische Skala (vgl. S. 283). Befinden sich beide Pendel in Ruhe,

so erscheint im Fernrohr in der Mitte der Skala eine helle, horizontale Linie. Schwingt  $P'$  allein, so erscheint eine helle Linie, die auf- und abwärts schwingt; ist nur  $P$  in Schwingung, so leuchtet in der Skalenmitte eine Linie in den Augenblicken auf, wo das Pendel  $P$  durch seine Gleichgewichtslage geht, weil nur dann das Bild des Spaltes  $A$  auf den Spalt  $F'$  fällt. Bei jeder vollen Doppelschwingung von  $P$  geschieht dies zweimal. Befinden sich endlich beide Pendel in Bewegung und ist ihre Schwingungsdauer die gleiche, so erscheinen abwechselnd zwei helle Linien, wenn  $P$  durch die Gleichgewichtslage geht; sie liegen symmetrisch ober- und unterhalb der Skalenmitte, entsprechend der zufälligen Phasendifferenz der Pendelschwingungen. Ist die Schwingungsdauer nicht genau die gleiche, so ändert sich die Lage dieser beiden Linien allmählich, und zu einer gewissen Zeit treffen sie beide in der Skalenmitte zusammen. In diesem Augenblick „koinzidieren“ die Schwingungen, d. h. gehen beide Pendel gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage. Man hat nun die Zahl  $n$  der Linien, welche bis zur nächsten Koinzidenz auftreten, zu zählen; es ist dann die Dauer von  $n$  Schwingungen des Pendels  $P$  gleich der Dauer von  $\pm 1$  Schwingungen des Pendels  $P'$ .

Im Jahre 1897 hat Lippmann zwei weitere Methoden zum Vergleichen der Schwingungsdauer für Pendel angegeben, falls diese Zeiträume wenig voneinander differieren. (C. R. **124**, 125, 1897; Journ. de Phys. (5) **3**, 5, 1913).

## Siebentes Kapitel.

### Messung der Intensität der Schwerkraft.

§ 1. **Richtung der Schwerkraft.** Das Gesetz der allgemeinen Anziehung lehrt, daß man die Schwerkraft in einem gegebenen Punkte als Resultante aller der Anziehungskräfte ansehen kann, die von allen Teilen der Erdkugel ausgehen. Infolge der Erddrehung tritt eine Zentrifugalkraft auf; durch diese wird die Richtung der auf die Körper an der Erdoberfläche wirkenden Kraft ein wenig geneigt. Diese Neigung ist für die Pole und den Äquator gleich Null und beträgt  $11' 30''$  für  $45^\circ$  Breite. Die Richtung der Resultante aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft heißt die vertikale; sie wird durch die Richtung eines zur Ruhe gekommenen, an einen Ende befestigten Fadens bestimmt, an dessen anderem Ende ein Gewicht angebracht ist; ebenso kann man sie als die Senkrechte zur Horizontalebene definieren, wo dann letztere mit Hilfe der Libelle bestimmt wird.

Die Richtung der Vertikallinie hat man bis in die letzte Zeit hinein für unveränderlich gehalten und auf sie die Lage anderer Linien be-

zogen. Der hohe Genauigkeitsgrad, mit welchem man heutzutage Winkelmessungen ausführen kann, hat zur Entdeckung der Breitenschwankungen geführt, d. h. der Lageänderungen der Erdachse innerhalb der Erde selbst. Man hat sich infolgedessen auch neuerdings wieder die Frage vorgelegt, ob die Richtung der Vertikalen und mithin die Lage des Horizontes wirklich für jeden Erdort konstant sind. Hiermit hat sich als erster Zöllner (1871) beschäftigt, der ein besonderes Instrument — ein Horizontalpendel — konstruierte, mit dessen Hilfe man die kleinsten Schwankungen der Vertikallinie wahrnehmen kann. Ähnliche Apparate sind schon früher von Hengler (1832) und Perrot (1862) zu anderen Zwecken angefertigt worden. Im Jahre 1894 hat Rebeur-Paschwitz eine umfangreiche Arbeit über seine mit dem Horizontalpendel in Wilhelmshafen, Potsdam und Puerto-Orotawa (auf der Insel Teneriffa) ausgeführten Untersuchungen veröffentlicht. Die sehr

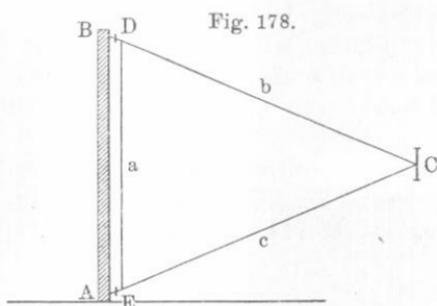


Fig. 178.

einfache Grundidee des Horizontalpendels ersieht man aus der schematischen Fig. 178. An der vertikalen Achse  $AB$  ist das aus drei leichten Röhren  $a, b, c$  bestehende Dreieck  $EDC$  angebracht; die Befestigung ist eine derartige, daß sich das Dreieck, ohne besondere Reibung zu erfahren, um die Achse  $AB$  bewegen

kann. Fällt diese Achse mit der Vertikalen zusammen, so befindet sich das Pendel  $DCE$  im indifferenten Gleichgewicht; schließt sie jedoch mit der Vertikalen einen, wenn auch noch so kleinen Winkel ein, so nimmt das Pendel eine bestimmte Gleichgewichtsstellung an, wobei sein Schwerpunkt in einer durch die Drehungsachse und die Vertikallinie gehenden Ebene zu liegen kommt. Die geringsten seitlichen Schwankungen der vertikalen Richtung führen zu Änderungen der Gleichgewichtslage des Pendels, welche dann nach der Spiegelablenkungsmethode unter Benutzung des in  $C$  angebrachten Spiegelchens beobachtet werden können. Auf diese Weise lassen sich Verschiebungen der Vertikallinie um  $0,001''$  wahrnehmen. Man kann zum gleichen Zweck auch einen selbstregistrierenden Apparat verwenden, dessen Einrichtung darauf beruht, daß ein vom Spiegel  $C$  reflektierter Lichtstrahl auf die Oberfläche eines horizontalen Zylinders fällt, der mit lichtempfindlichem Papier bezogen ist und langsam um seine Achse rotiert.

Derartige Pendel sind unter anderem von E. Kortazzi in Nikolajew und Lewitzki in Charkow und Jurjew (Dorpat) aufgestellt worden. Die Beobachtungen mit dem Horizontalpendel haben gelehrt, daß Schwan-

kungen der Vertikallinie in der Tat vorhanden sind und nicht selten größer werden, als die bei Winkelmessungen möglichen Beobachtungsfehler. Man muß sie daher für genaue astronomische Beobachtungen mit in Rechnung bringen. Man hat periodische, jährliche und tägliche Schwankungen beobachtet, die von der Wirkung der Sonnenstrahlung auf die Erdrinde herrühren, und ebenso halbtägige Schwankungen, die vom Monde hervorgerufen werden. Bei derartigen Beobachtungen muß man sorgsam darauf achten, daß die Messungen nicht durch „seismische Stürme“ oder vereinzelt auftretende Erdbebenstöße gestört werden, denn das Horizontalpendel ist für diese außerordentlich empfindlich. Erdbeben in Zentralasien, Japan und Südamerika senden seismische Wellen aus, die von den Horizontalpendeln in Europa noch registriert werden. Im Verlaufe eines Jahres (vom 4. August 1893 bis zum 4. August 1894) sind in Charkow nicht weniger als 124 Erdbeben verzeichnet worden; am 12. Juni 1897 wurde in Jurjew (Dorpat) eine relativ starke seismische Bewegung registriert, deren Entstehungsherd sich in Indien befand.

Gegenwärtig bildet das Horizontalpendel den wichtigsten Bestandteil der Seismographen, welche dazu dienen, die aus weiter Ferne kommenden, durch Erdbeben erzeugten Erschütterungen zu registrieren. Die vorzüglichsten dieser Apparate sind vom Fürsten Galitzin konstruiert und an verschiedenen Stellen aufgestellt worden. In zahlreichen Schriften hat er die Seismologie auf neuen, streng wissenschaftlichen Grundlagen aufgebaut. Seine neuesten Apparate ermöglichen es, aus den Aufzeichnungen an einem Ort die Lage des Erdbebenmittelpunkts mit großer Genauigkeit zu berechnen. Eine zusammenfassende Darstellung seiner theoretischen und experimentellen Arbeiten findet sich in seinem großen Werke.

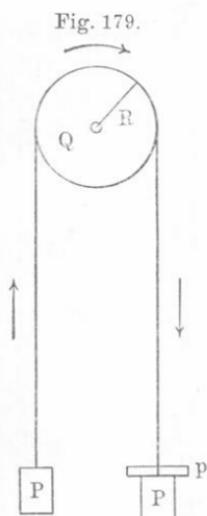
Bei den Beobachtungen mit dem Horizontalpendel muß auch auf die von Winden hervorgerufenen horizontalen Bewegungen der Erdoberfläche Rücksicht genommen werden. Nach O. Hecker (1899), der sich viel mit diesem Gegenstand beschäftigt hat, dringen diese Bewegungen viel tiefer in das Erdinnere ein, als man es vermuten könnte.

**§ 2. Bestimmung von  $g$  mit Hilfe der Atwoodschen Fallmaschine und anderer Apparate, die zur Untersuchung des freien Falles der Körper dienen.** Die Konstruktion der Atwoodschen Fallmaschine setzen wir als bekannt voraus, und ebenso die Art, wie man sich ihrer bedient, um die Gesetze des freien Falles der Körper experimentell abzuleiten ( $v = gt$  und  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ) und um das Grundgesetz der Bewegung (daß die Beschleunigungen direkt proportional den Kräften und indirekt proportional den Massen sind) darzutun. An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie man den genauen Ausdruck für die Be-

schleunigung  $g'$  ableitet, welche die Gewichte der Fallmaschine erlangen. In der Elementarphysik wird nachstehende Formel hergeleitet

$$g' = \frac{p}{2P+p} g \dots \dots \dots (1)$$

wo  $p$  das Übergewicht ist (vgl. Fig. 179) und  $P$  das Gewicht jeder der beiden Belastungen, die unmittelbar an der Schnur wirken. Die



Formel (1) ist, wie wir gleich sehen werden, sehr ungenau; ja ohne einige unumgänglich notwendige Korrekturen ist es sogar unmöglich, mit ihrer Hilfe die Bewegungsgesetze überhaupt und die Fallgesetze im besonderen zu prüfen und die Beschleunigung  $g'$  zu finden. Letztere ergibt sich bekanntlich, indem man die Zeit  $t$ , innerhalb welcher sich das Gewicht  $p$  um die Strecke  $s$  senkt, mittels des Chronographen oder einer im § 1 dieses Kapitels beschriebenen Zählvorrichtung bestimmt, aus der

Formel  $s = \frac{1}{2} g' t^2$  bzw.:

$$g' = \frac{2s}{t^2} \dots \dots \dots (2)$$

Die Formel (1) ist ungenau, da man sie, ohne auf folgende drei verschiedene Umstände zu achten, abgeleitet hat:

1. Das Rad erfährt bei seiner Drehung eine gewisse Reibung, die man, wie wir sehen werden, wie eine Kraft  $f$ , welche die Bewegung hemmt, behandeln kann, so daß also die Bewegung nicht durch das Gewicht  $p$ , sondern durch die geringere Kraft  $p - f$  bewirkt wird.

2. Die bewegende Kraft  $p - f$  versetzt nicht nur die Masse  $2M + m$ , wo  $M = \frac{P}{g}$  und  $m = \frac{p}{g}$  ist, sondern auch die Masse  $\mu$  der Schnur in Bewegung, deren Gewicht wir mit  $\pi = \mu g$  bezeichnen wollen.

3. Dieselbe Kraft  $p - f$  erteilt ferner auch dem Rad eine beschleunigte Drehung; es möge  $Q$  das Gewicht desselben,  $R$  der Radius und  $K$  das Trägheitsmoment in bezug auf seine Drehungsachse sein. Wäre das Rad massiv, so hätte man  $Kg = \frac{1}{2} QR^2$ , vgl. (37), S. 100; könnte man dagegen annehmen, daß die ganze Masse des Rades auf dessen Umfang verteilt sei, so wäre  $Kg = QR^2$ . Der wahre Wert von  $Kg$  liegt zwischen diesen beiden Werten, und wir können

$$Kg = \alpha QR^2 \text{ setzen, wo } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ ist} \dots \dots \dots (3)$$

Um den genauen Ausdruck für  $g'$  herzuleiten, wollen wir uns des Satzes von der Wucht bedienen (S. 111). Für einen gegebenen Augenblick seien  $v$  die Geschwindigkeit der Gewichte nebst Schnur und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Rades; offenbar ist  $\omega R = v$ , da die Peripheriepunkte des Rades dieselbe Geschwindigkeit wie die Schnur haben müssen. Die Wucht  $J$  des ganzen bewegten Systems ist — vgl. (1) und (3) S. 102

$$J = \frac{1}{2}(2M + m + \mu)v^2 + \frac{1}{2}K\omega^2;$$

da  $\omega R = v$  ist, so erhält man

$$J = \frac{1}{2}\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right)v^2 \dots \dots \dots (4)$$

Diese Wucht muß gleich der Arbeit  $(p - f)s$  sein, wo  $s$  der durchlaufene Weg ist. Setzen wir  $v = g't$  und  $s = \frac{1}{2}g't^2$  ein, so erhalten wir

$$\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right)g' = p - f \dots \dots \dots (5)$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit  $g$  und setzen  $Kg = \alpha QR^2$ , vgl. (3); auf diese Weise wird

$$(2P + p + \pi + \alpha Q)g' = (p - f)g \dots \dots \dots (6)$$

und hieraus folgt

$$g' = \frac{p - f}{2P + p + \pi + \alpha Q}g \dots \dots \dots (7)$$

Hier ist  $f$  die Kraft der Reibung,  $\pi$  das Gewicht der Schnur,  $Q$  das Gewicht der Rolle und  $\alpha$  ein Bruch, dessen Wert zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 liegt. Vernachlässigt man  $f$ ,  $\pi$  und  $\alpha Q$ , so erhält man Formel (1); alle unsere drei Korrekturen wirken auf  $g'$  im selben Sinne ein. Um  $f$  zu bestimmen, hat man ein Übergewicht  $p_0$  von solcher Größe zu finden, daß sich das ganze System, nachdem es einen Anstoß erhalten, gleichförmig weiterbewegt, also Wegstrecken durchläuft, welche der Zeit proportional sind; die Beschleunigung ist dann gleich Null und daher  $f = p_0$ . Die Größe  $\pi$  wird durch unmittelbare Wägung erhalten. Die Korrektur  $\alpha Q$  wird durch Rechnung gefunden, nachdem man die Beschleunigungen  $g_1$  und  $g_2$  bei verschiedenen Belastungen  $P_1, p_1$  und  $P_2, p_2$  nach Formel (2) ermittelt hat. Aus Formel (7) folgt

$$g_1 : g_2 = \frac{p_1 - f_1}{2P_1 + p_1 + \pi + \alpha Q} : \frac{p_2 - f_2}{2P_2 + p_2 + \pi + \alpha Q} \dots \dots (8)$$

Aus dieser Proportion läßt sich  $\alpha Q$  berechnen, da in ihr alle anderen Größen bekannt sind. Sind  $f$ ,  $\pi$  und  $\alpha Q$  gefunden, so erhält

man mit Hilfe des durch Beobachtung gefundenen  $g'$  das gesuchte  $g$  nach Formel (7)

$$g = \frac{2P + p + \pi + \alpha Q}{p - f} g' \dots \dots \dots (9)$$

Von anderen Apparaten, die ebenfalls zum Studium der Fallgesetze dienen und ebenso zur Bestimmung des Zahlenwertes der Beschleunigung  $g$  benutzt werden können, seien noch die folgenden erwähnt:

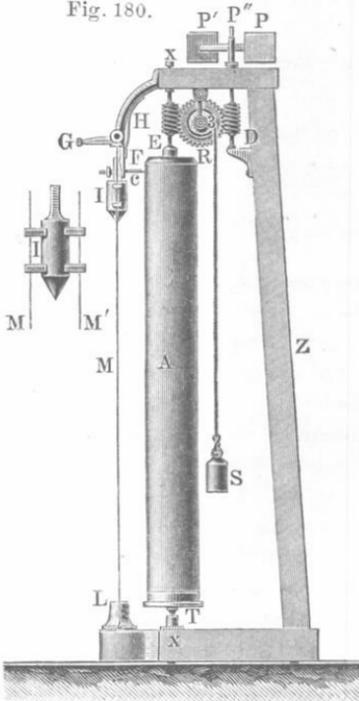
I. Die schiefe Ebene. Läßt man einen verhältnismäßig schweren Wagen auf Schienen von einer schiefen Ebene herabgleiten, so daß die Reibung nach Möglichkeit vermindert wird, so wird die Beschleunigung  $g'$  der Bewegung auf dieser Ebene mit hinreichender Genauigkeit durch die Formel

$$g' = \frac{h}{l} g = g \sin \alpha \dots \dots \dots (10)$$

dargestellt, wo  $h$  die Höhe,  $l$  die Länge und  $\alpha$  der Winkel der schiefen Ebene mit dem Horizont ist. Bestimmt man  $g'$  nach Formel (2), so findet man danach  $g$ .

II. Die Morinsche Fallmaschine. Sie besteht aus einem vertikalen Zylinder  $A$  (Fig. 180), der mit Papier überzogen ist. Mittels des Gewichtes  $S$  kann man den Zylinder in Rotation versetzen, die gleichförmig wird, sobald  $S$  etwa zwei Drittel seines Weges zurückgelegt hat, da der Windfang  $PP'$  bei schneller Drehung wie eine Bremsvorrichtung wirkt. Neben dem Zylinder befindet sich das mit einem Zeichenstift  $c$  versehene Gewicht  $J$ , welches während des Fallens an zwei vertikal ausgespannten Drähten  $M$  und  $M'$  herabgleitet. Sobald die Rotation des Zylinders gleichförmig geworden ist, läßt man das Gewicht  $J$  fallen, wobei dann der Zeichenstift auf der Papierfläche eine gewisse Kurve aufzeichnet. Hat man den Zylinder zum Stillstand gebracht, so nimmt man das Papier herunter und untersucht die Kurve; sie hat die in Fig. 181 dargestellte Form. Zieht man nun durch den Anfangspunkt  $o$  der Kurve eine horizontale und eine vertikale Gerade — die Abszissen-

Fig. 180.



und Ordinatenachse —, so stellen offenbar die Ordinate die durchlaufenen Fallräume dar und die Abszissen die Fallzeiten, da sie den Winkeln

und Ordinatenachse —, so stellen offenbar die Ordinate die durchlaufenen Fallräume dar und die Abszissen die Fallzeiten, da sie den Winkeln

proportional sind, um welche sich der Zylinder während des Fallens von  $J$  gedreht hat. Es ist mithin leicht, das Gesetz der Fallstrecken zu prüfen: man findet, daß die Ordinaten  $AB$  den Quadraten der Abszissen  $OA$  proportional sind. Die Gleichung der Kurve ist also von der Form  $s = pt^2$ , d. h. ist eine Parabelgleichung. Ist die Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders bekannt, so fällt es nicht schwer, den Weg der Abszisse  $OA$  in Sekunden, d. h. also  $t$  zu ermitteln, und dann erhält man aus  $p = \frac{1}{2}g$  die gesuchte Beschleunigung  $g$ .

Man kann mit demselben Apparate auch das Gesetz der Geschwindigkeiten ableiten. Zu diesem Zweck zieht man durch  $B$  die Tangente  $BC$  zur Parabel; sei  $\angle BCA = \alpha$ . Aus den Elementen der Differentialrechnung ist bekannt, daß

$$tg \alpha = \frac{ds}{dt} = v \text{ ist.}$$

Auf diese Weise können wir also den Zahlenwert der Geschwindigkeit  $v$  bestimmen und uns davon überzeugen, daß  $v$  den Abszissen  $t$  proportional ist. Ermittelt man für ein und dieselbe Abszisse  $OA$  die Größe  $s = AB$  und  $v = tg \alpha$ , so erhält man den Zahlenwert der Beschleunigung aus der Formel  $g = \frac{v^2}{2s}$ . Als Zeiteinheit dient hierbei die Zeit, die auf der  $t$ -Achse durch die Länge, nach der wir die Ordinaten  $s$  messen, dargestellt ist (nur unter dieser Bedingung ist  $tg \alpha$  dem Differentialquotienten  $\frac{ds}{dt}$  gleich).

III. Aus der großen Zahl sonstiger hierhergehöriger Apparate sei nur noch auf einen hingewiesen. Sein Hauptbestandteil bildet eine Stimmgabel, die an einer der Zinken einen horizontalen Schreibstift trägt. Die Stimmgabel ist zum dauernden Tönen gebracht (vgl. S. 343) und derartig befestigt, daß die Vibrationen des Stifts in einer horizontalen Ebene erfolgen. Der Schreibstift drückt gegen die Oberfläche einer vertikalen Tafel (Fig. 182), welche parallel zur Linie, in welcher die Zinken schwingen, befestigt ist. Man läßt nun die Tafel frei fallen, während der Schreibstift auf ihrer Oberfläche eine Wellenlinie aufzeichnet. Jede Welle entspricht dem gleichen Zeitabstand  $T$ , welcher die Schwingungsdauer der Stimmgabel ist. Zieht man horizontale Linien durch jede dritte

Fig. 181.

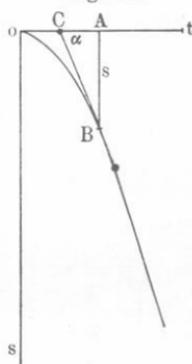
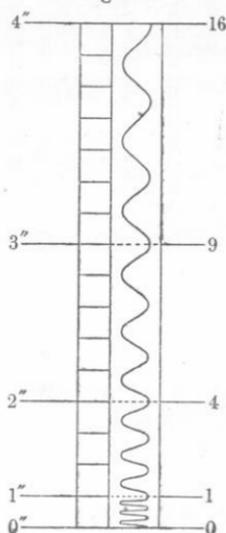


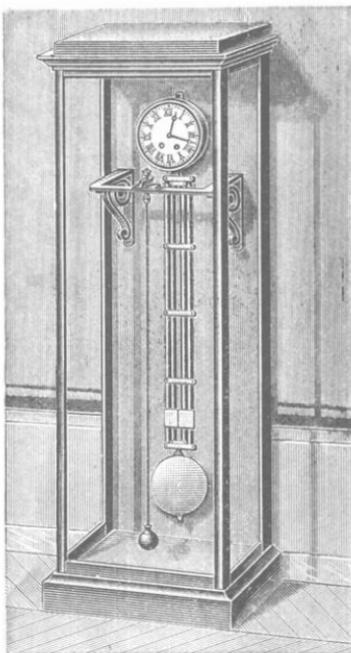
Fig. 182.



Welle, so erhält man die Fallstrecken  $s$ , welche die Tafel in gleichen Zeiträumen durchlaufen hat. Wie aus der Figur hervorgeht, sind diese Fallstrecken den Quadraten der Fallzeiten proportional. Kennt man die Schwingungszahl der Stimmgabel, so kann man die Zeit  $t$  in Sekunden und nach Formel  $g = 2s : t^2$  die Beschleunigung  $g$  finden.

**§ 3. Bestimmung von  $g$  nach Borda durch Messung der Schwingungsdauer eines Pendels.** Die Schwingungsdauer eines Pendels, das seiner Konstruktion nach dem mathematischen Pendel nahe kommt, wird nach der Methode der Koinzidenzen (Kap. VI, § 5, S. 347) durch

Fig. 183.



Vergleichung mit einem Sekundenpendel bestimmt. Fig. 183 stellt den Apparat in der Form dar, in welcher er jetzt meist gebraucht wird. An der Wand des Gehäuses ist die Uhr mit dem Sekundenpendel sichtbar; davor befindet sich die an einem dünnen Draht befestigte Kugel; der Stab schwingt um eine der Kanten eines dreiseitigen Prismas. Die Schwingungsdauer dieses Pendels wird, wie erwähnt, nach der Methode der Koinzidenzen bestimmt. Um diese Koinzidenzen leichter wahrnehmen zu können, ist am Sekundenpendel ein Papierblatt, das einen vertikalen Indexstrich trägt, angebracht. Ein Fernrohr mit mäßiger Vergrößerung wird derart horizontal gerichtet, daß seine verlängerte Achse den Stab des vorderen Pendels und jenen vertikalen Index trifft, wenn beide Pendel sich in der Gleichgewichtslage befinden. Auf diese Weise ist es leicht, den Augenblick zu beob-

achten, wo der Stab den Index gerade überdeckt und dabei durch die Mitte des Gesichtsfeldes im Fernrohr hindurchgeht.

Für eine sehr kleine Schwingungsdauer  $T_0$  des Pendels, das aus einem dünnen Draht und einer Kugel besteht, hatten wir bereits Formel (8) auf S. 346 abgeleitet; setzt man sie in (3) auf S. 345 ein, so erhält man für die Schwingungsdauer  $T$  die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \dots \dots (11)$$

wo  $l$  die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Schwingungsachse,  $R$  der Kugelradius und  $\alpha$  der mittlere Ausschlagswinkel ist. Hieraus ergibt sich

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} \left( l + \frac{2R^2}{5l} \right) \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 \dots \dots (12)$$

Da alle Größen in diesem Ausdruck bekannt sind, kann er zur Bestimmung von  $g$  dienen. Die Länge ( $l - R$ ) des Stabes (Drahtes) wird mit Hilfe des Kathetometers gemessen. Man muß jedoch an Formel (12) noch einige Korrekturen anbringen.

1. Wir hatten die Beschleunigung  $g$  bestimmt, mit welcher die Kugel unseres Pendels frei fallen würde; die Messung war aber im luft-erfüllten Raum ausgeführt worden, wo die Kugel einen gewissen Gewichtsverlust erleidet (vgl. S. 319). Bedeutet  $P$  das wahre Gewicht der Kugel (im Vakuum),  $p$  den Gewichtsverlust, so wird die Beschleunigung  $g$  durch die Kraft  $P - p$  hervorgerufen. Bezeichnet man sonach mit  $G$  die Beschleunigung für den freien Fall im Vakuum, so hat man offenbar  $G : g = P : (P - p)$ . Ist  $D$  die Dichte der Kugel,  $d$  die Dichte der Luft während der Beobachtung, so ist  $P : p = D : d$ , folglich

$$G = g \frac{D}{D - d} \dots \dots \dots (13)$$

Besteht die Kugel aus Platin, so ist  $D = 21$ , während  $d = 0,0013$  ist.

2. Der Luftwiderstand hat auf die Bewegung des Pendels einen sehr geringen Einfluß, er ändert die Schwingungsdauer um weniger als  $\frac{3}{10^9}$  derselben.

3. Die Luft wird von der Kugel gewissermaßen mitgenommen und bewegt sich daher zugleich mit ihr. Poisson hat gezeigt, daß man, um eine entsprechende Korrektur anzubringen, die Größe  $d$  in (13) mit  $\frac{3}{2}$  zu multiplizieren hat; es ist also

$$G = g \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{d}{D}} \dots \dots \dots (14)$$

4. Auch die Reibung der Luft (siehe Abt. II) hat einigen Einfluß; Stokes hat die Größe der entsprechenden Korrektur abgeleitet.

5. Während das Pendel schwingt, bleibt das Stativ nicht völlig in Ruhe; hieraus folgt, daß nicht die ganze Arbeit der Schwerkraft dazu verbraucht wird, das Pendel in Bewegung zu setzen. Dies hatten wir aber bei Herleitung der Formel (42) auf S. 254 angenommen. Eine Formel für die entsprechende Korrektur ist von Peirce hergeleitet worden.



Methode der Koinzidenzen beobachtet) besitzt, mag es auf dem Prisma  $a$  oder  $b$  aufgehängt werden.

Hat man es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer in beiden Fällen den gleichen Wert  $T$ , reduziert auf unendlich kleine Ausschläge, hat, so hat man nur noch den Abstand  $l$  der Prismenkanten zu messen und  $g$  nach Formel (15) zu berechnen. Die anzubringenden Korrekturen sind dieselben, wie sie bereits im § 3 angeführt worden sind. In Fig. 185 ist ein Reversionspendel älterer Konstruktion dargestellt, wo sich die Prismen  $\beta\beta$  in den Rahmen  $cc$  und  $cc$  befinden;  $a$  und  $a$  sind die beiden Laufgewichte, von denen das eine hohl, das andere massiv ist. In der Figur ist ein Teil des Stativs  $ff$  mit dem vorspringenden Teil  $L$  abgebildet; letzterer trägt den Stahlaufsatz  $l$ , dessen Ende eben geschliffen ist. Gegenwärtig wird das Reversionspendel oft in der Form gebraucht, welche ihm von Repsold gegeben worden ist. Eine Beschreibung desselben findet man in den Werken von Ssawitsch und Lenz, Wilkitzky, Zinger und Helmert.

Die Fig. 186 (a. f. S.) zeigt die vollständige Aufstellung eines Reversionspendels der Société Généroise. Links befindet sich das Kathetometer mit zwei Fernrohren zur Ausmessung des Abstandes der beiden Drehungsachsen des Pendels, d. h. der Prismenschnitten.

Eine völlige Gleichheit der Zeiten  $T_1$  und  $T_2$  ist sehr schwer oder sogar unmöglich zu erreichen. Sind sie nahezu gleich, so kann man  $g$  auf folgende Weise finden. Es sei  $K_0$  das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf eine Achse, welche parallel zu den Prismenkanten durch den Schwingungsmittelpunkt geht,  $a_1$  und  $a_2$  die Entfernungen des Schwerpunktes von den Prismenkanten,  $l = a_1 + a_2$  die Entfernungen der Prismenkanten voneinander und  $M$  die Masse des Pendels.

Fig. 184.



Fig. 185.

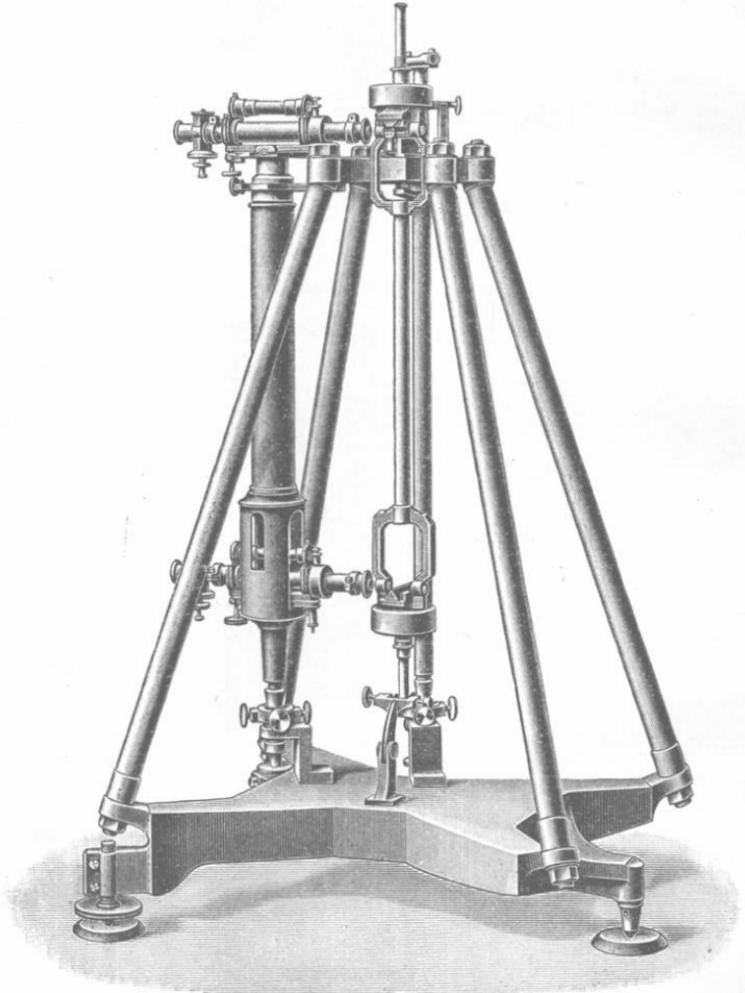


Gemäß der allgemeinen Formel (41) auf S. 254 hat man nach dem Satz auf S. 98

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_1^2}{gMa_1}} \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_2^2}{gMa_2}}$$

d. h.:  $T_1^2 gMa_1 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_1^2$  und  $T_2^2 gMa_2 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_2^2$ .

Fig. 186.



Subtrahiert man die eine Gleichung von der anderen und hebt durch  $M$ , so erhält man

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1^2 - a_2^2};$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(a_1 + a_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(a_1 - a_2)} \dots \dots \dots (16)$$

Im ersten Gliede ist  $a_1 + a_2 = l$ ; im zweiten Gliede stellt  $T_1^2 - T_2^2$  eine kleine Größe dar, während die Differenz  $a_1 - a_2$  beim Katerschen Reversionspendel keine kleine Größe ist, so daß die Kenntnis ihrer angenäherten Werte zur Berechnung des zweiten Gliedes hinreicht.

Um die Intensität der Schwerkraft an verschiedenen Orten zu vergleichen, bedient man sich eines gewöhnlichen Pendels, dessen Schwingungsdauer für die betreffenden Orte direkt bestimmt wird. Aus der Formel  $g_1 : g_2 = T_2^2 : T_1^2$  findet man das gesuchte Verhältnis der Intensitäten der betreffenden Kraftfelder (S. 95) für die verschiedenen Orte. Sterneck (1887) hat einen transportablen Apparat mit mehreren Pendeln gebaut, welche nacheinander an dasselbe Stativ gehängt werden. Dieser Apparat wurde lange Zeit benutzt, z. B. Sergijewski in Pulkowo. Hecker und Borrass haben seine Konstruktion verbessert. Der zu früh verstorbene Hansky hat den Heckerschen Apparat auf Spitzbergen (1889—1901) benutzt. Benutzt man zwei Pendel, die an zwei Orten schwingen, und mißt man die Zeit mit einer Uhr, welche alle Sekunden elektrische Signale nach beiden Beobachtungsorten sendet, so kann man relativ leicht und bequem das Verhältnis der Beschleunigungen  $g_1 : g_2$  für die beiden Beobachtungsorte finden. Selbstverständlich müssen die Schwingungsdauern beider Pendel zuvor unter gleichen Bedingungen miteinander verglichen worden sein.

Unter der Länge eines Sekundenpendels versteht man die Länge  $L$  eines mathematischen Pendels, für welches die Dauer unendlich kleiner Schwingungen gleich einer Sekunde ist. Aus Formel (15) erhält man, wenn man  $T = 1$  und  $l = L$  setzt

$$L = \frac{g}{\pi^2} \dots \dots \dots (17)$$

Somit ist die Länge des Sekundenpendels proportional der Beschleunigung  $g$ .

**§ 5. Abhängigkeit der Beschleunigung  $g$  von der Höhe und geographischen Breite des Beobachtungsortes.** Man pflegt die Beschleunigung  $g$  in CGS-Einheiten auszudrücken; demnach hätte man für 45° Breite (nach Helmert)

$$g = 980,597 \frac{\text{cm}}{(\text{sek})^2}$$

zu schreiben; da jedoch die Sekunde immer als Zeiteinheit gewählt wird, so schreibt man gewöhnlich bloß  $g = 980,597 \text{ cm}$ . Im folgenden soll selbst die Bezeichnung der Längeneinheit fortgelassen werden.

Der Wert von  $g$  ändert sich mit der vertikalen Erhebung und der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Ist  $R$  der Erdradius und seien  $g$  und  $g_h$  auf das Meeresniveau bzw. auf die Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel und über der Erdoberfläche bezogen, so gilt

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R}} = 1 - 2\frac{h}{R},$$

falls man die höheren Potenzen von  $\frac{h}{R}$  fortläßt. Es ist also

$$g_h = g \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

Ist  $h$  in Zentimetern gegeben, so ist

$$g_h = g (1 - 0,000\,000\,003\,14\,h) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

Setzt man im zweiten Gliede  $g = 981$ , so ist

$$g_h = g - 0,000\,003\,h \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (20)$$

Einer Erhebung um  $h = 100\text{ m} = 10\,000\text{ cm}$  entspricht also eine Abnahme von  $g$  um  $0,03\text{ cm} = 0,3\text{ mm}$ . Vorausgesetzt wird hierbei, daß man sich in der freien Luft bzw. auf einem Turm, bis zu der entsprechenden Höhe erhebt. So ist z. B. auf der Höhe des Eiffelturmes zu Paris ( $h = 30\,000\text{ cm}$ ) der Wert von  $g$  beinahe um  $1\text{ mm}$  kleiner, als am Fuße. Richarz und Krigar-Menzel haben den Wert der Differenz  $g - g_h$  in Spandau für  $h = 226\text{ cm}$  bestimmt; sie fanden  $g - g_h = 0,000\,652 \frac{\text{cm}}{(\text{sek})^2}$ , während nach der Theorie  $0,000\,697$  zu erwarten war.

Genauere Messungen von Scheel und Diesselhorst haben gezeigt, daß sich das Gewicht von  $1\text{ kg}$  bei jedem Meter Erhöhung um  $0,295\text{ mg}$  (für Charlottenburg bei Berlin) verringert. Auf einem Hochplateau mit der Höhe  $h$  ist

$$g_h = g (1 - 0,000\,000\,001\,96\,h) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (21)$$

Hansky fand auf dem Gipfel des Montblanc  $g = 9,79472$  und in Chamounix  $g = 9,79999$ . Weitere theoretische Untersuchungen über die Reduktion der auf der Oberfläche der Erde beobachteten Schwerebeschleunigung auf ein gewisses Niveau sind in letzter Zeit von Brillouin, H. Poincaré und Helmert ausgeführt worden.

Die Beschleunigung  $g$  ändert sich ferner mit der geographischen Breite des Ortes, und zwar aus zweierlei Gründen. Erstens wirkt die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde der Schwerkraft entgegen; sie ist am Äquator am größten und für die Pole gleich Null. Zweitens ist die Erdgestalt (das Geoid) nahezu die eines abgeplatteten

Rotationsellipsoids, infolgedessen die Beschleunigung  $g$  ebenfalls von den Polen zum Äquator hin abnehmen muß. Unter Berücksichtigung aller dieser Umstände erhält man für die Beschleunigung  $g$  in der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel (und über der Erdoberfläche) und der geographischen Breite  $\varphi$  nach Helmert (1901) folgende Formel

$$g = 980,665 (1 - 0,002648 \cos 2\varphi) (1 - 0,00000000314h) . . (22)$$

An der Erdoberfläche selbst erhält man in der Meereshöhe  $h$

$$g = 980,665 (1 - 0,002648 \cos 2\varphi) (1 - 0,0000000196h) (22, a)$$

Hier ist  $h$  überall in Zentimetern ausgedrückt.

Die Zahl  $g = 980,665$  bezieht sich auf  $h = 0$  und  $\varphi = 45^\circ$ .

Später gab Helmert die folgende sehr genaue Formel (wir unterdrücken den von  $h$  abhängigen Faktor):

$$g = 978,046 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi) . . (23)$$

Als Grundlage diente ihm hierbei die im Geographischen Institut zu Wien ausgeführte absolute Messung von  $g$ , welche  $g = 980,876$  cm ergeben hat. Kühnen und Furtwängler (1898—1906) haben jedoch eine neue sehr genaue Messung von  $g$  im Potsdamer Geodätischen Institut ausgeführt und daselbst  $g = 981,274$  cm gefunden. Dies führt zu der Formel

$$g = 978,030 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi) . . (24)$$

Die Grenzwerte von  $L$  und  $g$  in Zentimetern sind, wenn  $h = 0$  ist,

$$\text{für den Pol} . . . . . \varphi = 90^\circ \quad L = 99,61 \quad g = 983,11$$

$$\text{für den Äquator} . . . . . \varphi = 0^\circ \quad L = 99,10 \quad g = 978,10$$

Für einige wichtige Städte folgen hier die Werte von  $\varphi$ ,  $h$  und der Wert von  $g$ , wenn  $g_{45^\circ} = 1$  gesetzt wird, sowie die Länge des Sekundenpendels.

	$\varphi$	$h$	$g$	$L$
Berlin . . . . .	$52^\circ 30'$	40,0 m	1,0006625	0,994235 m
London . . . . .	$51^\circ 31'$	5,5 m	1,0005815	0,994140 „
Paris . . . . .	$48^\circ 50'$	67,0 m	1,0003322	0,993882 „
St. Petersburg . .	$59^\circ 56'$	11,0 m	1,0012798	0,994876 „

In der Art, wie Intensität und Richtung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche verteilt sind, treten besondere Unregelmäßigkeiten, sogenannte Anomalien auf. Defforges fand, daß  $g$  auf Inseln im allgemeinen den Mittelwert, welcher der gleichen Breite entspricht, übertrifft. Im Innern von Festländern bleibt  $g$  hinter diesem Mittelwert zurück. Bemerkenswerte Anomalien treten in der Umgegend von Moskau auf; in Moskau selbst ist die Lotlinie um  $10,6''$  nach Norden abgelenkt. Unter dem ganzen Moskauer Gouvernement ziehen sich offenbar unterirdische Hohlräume oder Schichten von geringerer Dichte in der Richtung von WSW nach ONO hin.

Wichtige Untersuchungen über derartige Anomalien wurden in letzter Zeit von Collet, Ricco, Lapparent und Platania veröffentlicht.

Koch (1904) hat darauf hingewiesen, daß die Größe der Schwerkraft an einem gegebenen Orte vielleicht im Laufe der Zeit Änderungen erleidet. Für die Differenz der Werte von  $g$  in Karlsruhe und Stuttgart fand er im Juni 1900 und im März 1904 zwei Größen, deren Unterschied fünfmal größer war, als der wahrscheinliche mittlere Fehler.

R. v. Eötvös hat sowohl die Verteilung der Erdschwere als auch die Form einer solchen Fläche  $S$  untersucht, welche normal zur Richtung der Schwere für den gegebenen Beobachtungsort ist. Die von ihm hierbei benutzten Apparate besaßen einen erstaunlich hohen Empfindlichkeitsgrad. Sie bestanden in einer unifilaren Drehwage mit sehr großer Schwingungsdauer (bis zu 20 Minuten). Die Schwingungen des horizontalen Stäbchens wurden in zwei zu einander senkrechten Ebenen beobachtet, woraus sich, wie die Theorie lehrt, die Größen der Hauptkrümmungsradien der Fläche  $S$  berechnen lassen. Ein anderer Apparat, bei welchem die Belastung des einen Stabendes niedriger angebracht ist (an das Stäbchen gehängt ist), ermöglicht die Änderung der Schwerkraft längs der Fläche  $S$  zu bestimmen; hierbei wird die Torsion des Aufhängefadens bei verschiedenen Lagen der durch die Achse des Stäbchens gehenden Vertikalebene gemessen; diese Torsion ändert sich bei Drehung des ganzen Apparates um eine vertikale Achse.

Wäre die Erde eine homogene Kugel vom Radius  $R$ , so wäre der Wert von  $g'$  im Innern der Erdkugel direkt proportional dem Abstände  $r$  des betreffenden Punktes vom Erdmittelpunkt (vgl. S. 219) und man hätte die einfache Beziehung  $g = \frac{r}{R} g$ . In der Tat sind aber (vgl. das folgende Kapitel) die inneren Erdschichten dichter als die der Erdoberfläche näheren; infolgedessen wächst  $g'$  zunächst, wenn man sich dem Erdmittelpunkt nähert. Unter der Voraussetzung, daß die Erddichte  $d$  eine Funktion von  $r$  von folgender Form  $d = d_0 - \alpha r^2$  sei, wo  $d_0$  die Erddichte im Mittelpunkt und  $\alpha$  ein Zahlenkoeffizient ist, hat Roche folgende Formel hergeleitet:

$$g' = 1,92 \frac{r}{R} \left( 1 - \frac{12 r^2}{25 R^2} \right) g \dots \dots \dots (25)$$

Nach dieser Formel wächst  $g'$  zunächst bei Annäherung an den Erdmittelpunkt bis  $r = \frac{5}{6} R$ , wo  $g' = \frac{16}{15} g$  wird, um dann bis auf Null für  $r = 0$  abzunehmen. Beobachtungen von Airy in einem 383 m tiefen Schacht bestätigen die Richtigkeit obiger Formel. Nimmt man an, daß  $d = d_0 - \alpha r$  ist, so entspricht das Maximum  $g' = 1,055 g$  dem Wert  $r = 0,814 R$ .

## Literatur.

## Zu § 1. Das Horizontalpendel.

- Messerschmidt: Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. Sammlung: „Die Wissenschaft“, Nr. 27. Braunschweig 1908. 158 S.  
 Hengler: Dinglers polytechnisches Journal 1832.  
 Perrot: Compt. rend. **54**, 728, 1862.  
 Zöllner: Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1869.  
 Rood: Amer. J. of Sc. **9**, 1875.  
 Chaplin: Trans. of the Seism. Soc. of Japan. **4**.  
 Gray: Phil. Mag. (4) **12**, 1881.  
 Rebeur-Paschwitz: Das Horizontalpendel, Halle 1882; Gerlands Beiträge zur Geophysik **2**, 1895.  
 Hecker: Instr. **16**, 2, 1896; **19**, 261, 1899; Beiträge zur Geophysik **4**, 64, 1889.  
 Lentz: Progr. Realgymnasium, Karlsruhe 1898.  
 Fürst B. Galitzin: Vorlesungen über Seismometrie. St. Petersburg 1912. 654 Seiten (russ.).

## Zu § 2.

- Atwood: On the rectilinear motion and rotation of bodies. Cambridge 1784.  
 Morin: Mémoires des savants étrangers VI, 641, 1838.

## Zu § 3.

- Die klassischen Arbeiten sind zusammengestellt in den „Mémoires sur le pendule“, s. „Collection des Mémoires relatifs à la Physique, publiés par la Société de Physique“, Bd. IV u. V, Paris 1891.  
 Borda: Mémoire sur la mesure du pendule 1792 (Mesure de la méridienne).  
 Brillouin: Compt. rend. **125**, 292, 1897.  
 Threefall und Pollock: Phil. Trans. **193**, 215, 1900.  
 Brillouin: Verh. d. 14. allgemeinen Konferenz der Internat. Erdmessung **2**, 456, Berlin 1905.  
 Pagnini: Journ. de Phys. (4) **6**, 128, 1907.  
 Pellat: C. R. **149**, 773, 980, 1909.

## Zu § 4.

- Kater: Phil. Trans. 1818.  
 Sterneek: Instr. **8**, 157, 1888.  
 Helmert: Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Leipzig 1898.  
 Bessel: Länge des einfachen Sekundenpendels. Ostw. Klass. Nr. 7.  
 Hecker: Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Instituts, neue Folge, Nr. 11. Berlin 1903.  
 Hansky: Intensité de la pesanteur, St. Pétersbourg 1905 (Missions Scientif. au Spitzberg. Mission Russe, tome I, section V).  
 Borrass: Verh. d. 16. allgem. Konferenz der Internat. Erdmessung, III. Teil. Berlin 1911.

## Zu § 5.

- Richarz und Krigar-Menzel: Wied. Ann. **51**, 559, 1894.  
 Scheel und Diesselhorst: Instr. 1896, 2.  
 Hansky: Compt. rend. **127**, 942, 1898.  
 Helmert: Berl. Ber. 1901, S. 329.  
 Poincaré: Bull. astr. 1901, S. 5.

- Kühnen und Furtwängler: Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Instituts, neue Folge, Nr. 27. Berlin 1906.  
 Ricco: Rendic. Acc. dei Lincei **12**, 483, 1903.  
 Collet: Compt. rend. **135**, 956, 1903.  
 Lapparent: Compt. rend. **137**, 827, 1903.  
 Platania: Compt. rend. **138**, 859, 1904.  
 Koch: Annal. d. Phys. (4) **15**, 146, 1904.  
 Defforges: Compt. rend. **117**, 205.  
 R. v. Eötvös: W. A. **59**, 354, 1896; Rapp. prés. au Congr. internat. de Phys. **3**, 371, 1900; Verh. d. 15. allgem. Konf. d. Intern. Erdmessung, I, Berlin 1903; ebenfalls der 16. Konferenz I. Berlin 1910.  
 Hecker (Wage von v. Eötvös): Verh. d. 16. allgem. Konferenz der Intern. Erdmessung II. Berlin 1911.

## Achtes Kapitel.

### Messung der mittleren Erddichte.

§ 1. Messungen von Maskelyne. (1775.) Unter mittlerer Erddichte  $D$  versteht man die Dichte eines homogenen Körpers, der die gleiche Masse und das gleiche Volumen wie die Erde selbst hat [vgl. Formel (25) auf S. 45]. Zu ihrer Bestimmung sind zahlreiche Messungen nach sehr verschiedenen Methoden angestellt worden; wir wollen zunächst die Maskelyneschen Messungen erwähnen. Diese sind nach einer von Bouguer vorgeschlagenen Methode ausgeführt worden,

Fig. 187.



welche darauf beruht, daß man die Anziehung der Erde mit der eines sehr großen Körpers von bekannter Masse vergleicht. Als solcher diene der sich isoliert erhebende Berg Shehallien in Schottland, dessen Volumen und mittlere Dichte angenähert bekannt waren. Die Masse des Berges sei  $m$  und die Masse der Erde  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 D$ , wo  $R$  der Radius ist. Die Anziehung des Berges lenkt die Lotrichtungen  $Z$  und  $Z'$  (Fig. 187), die man beobachten würde, falls jene Anziehung nicht

wirkte, derart ab, daß man statt ihrer die Richtungen  $Z_1$  und  $Z'_1$  erhält. Die Punkte  $A$  und  $B$  lagen zu beiden Seiten des Berges auf demselben Meridian; in diesem Falle haben die Ablenkungen der Lotlinien sowie der Horizontalebene ( $H_1$  und  $H'_1$  anstatt  $H$  und  $H'$ ) an den Punkten  $A$  und  $B$  den entgegengesetzten Sinn. Die Breiten­differenz  $\lambda$  der Punkte  $A$  und  $B$  wurde aus ihrer Entfernung durch geodätische Messungen gefunden;  $AP$  und  $BP$  bedeuten die Richtung der Himmelsachse. Wäre der Berg nicht vorhanden, so erhielte man für die Differenz der Polhöhen  $\angle PBH' - \angle PAH$  den Wert  $\lambda$ . Bei der Messung erhält man jedoch diese Polhöhen nicht, sondern in Wirklichkeit die Winkel  $PBH'_1$  und  $PAH_1$ . Ihre Differenz  $\lambda_1$  sei um  $\varepsilon$  größer als  $\lambda$ , so daß also  $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$  ist. Die Beobachtung ergab  $\varepsilon = 11,66''$ . Offenbar ist  $\varepsilon = \angle H'BH'_1 + \angle HAH_1$ , d. h. der Winkel, um welchen der Berg die Vertikallinie ablenkt, ist gleich  $\frac{1}{2}\varepsilon$ , falls sich  $A$  und  $B$  im selben Abstände  $r$  vom Berge befinden. Bedeutet  $F$  die Anziehung der Pendelmasse  $\mu$  durch die Erde,  $f$  die Anziehung seitens des Berges, so ist offenbar

$$tg \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{f}{F} = \frac{\frac{m\mu}{r^2}}{\frac{M\mu}{R^2}} = \frac{mR^2}{Mr^2} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi RDr^2}$$

und hieraus folgt

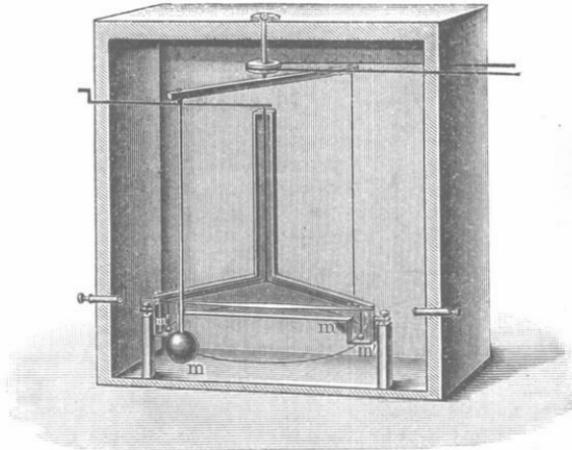
$$D = \frac{3m}{4\pi Rr^2 tg \frac{\varepsilon}{2}} \dots \dots \dots (1)$$

Maskelyne fand  $D = 4,8$ . Ähnliche Messungen führten James und Clarke (1855) am Berge Arthurs Seat in Schottland ( $D = 5,32$ ) und E. D. Preston (1887) am Berge Habakab auf der zum Hawaii­archipel gehörigen Insel Marui aus ( $D = 5,13$ ).

**§ 2. Messungen von Cavendish.** (1798.) Cavendish führte seine Messungen mittels der in Fig. 188 abgebildeten unifilaren Drehwage aus. An den Enden eines langen, leichten Stäbchens hingen zwei Metallkugeln  $m'$  und  $m''$ , von denen jede 730 g wog. Die Gleichgewichtslage derselben wurde an einer horizontalen Skala mittels zweier in unserer Figur sichtbaren Fernrohre abgelesen. Zwei große Bleikugeln  $m$  und  $m$  konnten den Kugeln  $m'$  derart von zwei Seiten her genähert werden, daß sich ihre auf letztere ausgeübten Anziehungen summieren und die Wage um einen gewissen sehr kleinen Winkel drehen. Dadurch, daß man die horizontale, die Bleikugel tragende Stange um die mittlere Achse des ganzen Apparates (wie durch eine

Linie in der Figur angedeutet) drehte, konnte man die Bleikugeln den Kugeln  $m'$  von der entgegengesetzten Seite her nähern und eine Drehung der Wage im entgegengesetzten Sinne hervorrufen. Da man ferner die Länge  $2l$  des Wagebalkens und den Wert  $\delta$  eines Skalenteiles

Fig. 188.



kannte, konnte man aus der Zahl  $n$  der Skalenteile, um welche sich die Gleichgewichtslage der Kugeln verschob, den Winkel  $\varphi$  bestimmen, um den sich die Wage dank der wechselseitigen Anziehung der beiden Kugelpaare gedreht hatte. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{n \delta}{l} \dots \dots \dots (2)$$

Die Drehung der Wage um den Winkel  $\varphi$  wird durch das Kräftepaar hervorgerufen, dessen Moment gleich  $C\varphi$  ist; vgl. (19), S. 330. Bezeichnet man mit  $F$  die Kraft der gegenseitigen Anziehung jedes einzelnen Kugelpaares  $m$  und  $m'$ , so hat man

$$2Fl = C\varphi = C \frac{n \delta}{l} \dots \dots \dots (3)$$

Der Koeffizient  $C$  wird durch Messung der Schwingungsdauer  $T$  der Drehwage erhalten; wir sahen, vgl. (23), S. 332, daß

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \dots \dots \dots (4)$$

ist, wo  $K$  das Trägheitsmoment des Stäbchens samt den Kugeln  $m'$  in bezug auf die Drehungsachse bedeutet. Vernachlässigt man die Masse des Stäbchens selbst, so ist  $K = 2 m' l^2$  und man erhält nach Formel (4)

$$C = \frac{2 m' l^2 \pi^2}{T^2}.$$

Setzt man diesen Wert in Formel (3) ein, so erhält man

$$F = \frac{\pi^2 n \delta m'}{T^2} \dots \dots \dots (5)$$

Ist  $m'$  in Grammen und  $T$  in Sekunden ausgedrückt, so erhält man die Anziehungskraft  $F$  nach dieser Formel in Dynen. Sei ferner  $\varrho$  der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln  $m$  und  $m'$ , während sie die Anziehung  $F$  aufeinander äußern,  $r$  der Radius,  $d$  die Dichte der Bleikugeln  $m$ ,  $R$  der Erdradius,  $D$  die Erddichte,  $M$  die Masse der Erde und endlich  $P$  das Gewicht der kleinen Kugeln  $m'$ , so haben wir dann

$$F = c \frac{mm'}{\varrho^2}; \quad P = m'g = c \frac{Mm'}{R^2} \dots \dots (6)$$

wo  $c$  derselbe Koeffizient ist, der in Formel (1) auf S. 204 mit  $C$  bezeichnet war. Die Formeln (6) geben, wenn man  $m = \frac{4}{3} \pi r^3 d$  und

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 D \text{ setzt}$$

$$\frac{F}{P} = \frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{M\varrho^2} = \frac{r^3 d}{\varrho^2 R D}$$

und hieraus folgt

$$F = \frac{r^3 d g m'}{\varrho^2 R D} \dots \dots \dots (7)$$

Setzt man (5) und (7) einander gleich, so erhält man

$$D = \frac{g T^2 r^3 d}{\pi^2 n \delta \varrho^2 R} \dots \dots \dots (8)$$

Cavendish benutzte zu seinen Messungen zwei verschiedene Fäden; für den dünneren war  $T = 840$  Sek., für den dickeren  $T = 420$  Sek. Als Mittel aus 29 Messungen fand er

$$D = 5,45.$$

### § 3. Neuere Messungen nach der Methode von Cavendish.

Die Größe  $D$  ist sowohl in früherer, als auch in neuerer Zeit von vielen Seiten nach der oben angegebenen Methode mittels der Drehwaage bestimmt worden. Reich (1837—1852) hat zuerst diese Messungen nach einer Methode, die genauer war als die von Cavendish gegebene, wiederholt; er fand endgültig (1852)

$$D = 5,58,$$

Baily (1842) erhielt

$$D = 5,67.$$

In den Jahren 1870 bis 1878 führten Cornu und Baille eine Reihe bemerkenswerter Messungen aus, wobei sie alle nur erdenklichen Vorsichtsmaßregeln beobachteten und die neuesten und genauesten Meßmethoden in Anwendung brachten. Um die Erschütterungen zu ver-

meiden, welche bei der Lagenänderung der schweren Kugeln so gut wie unvermeidlich sind, brachten sie vier gußeiserne Hohlkugeln (von 12 cm Durchmesser) paarweise in symmetrische Lage zu den kupfernen Kugeln der Drehwage. Letztere wogen je 109 g. Jedes Paar der einander übers Kreuz gegenüberliegenden Kugeln wurde abwechselnd mit Quecksilber gefüllt, welches aus dem einen Paar in das andere übergeführt wurde. Cornu und Baille fanden (1878)

$$D = 5,56.$$

Sehr genaue Messungen haben ferner Boys (1893) und C. Braun (1896) ausgeführt. Boys benutzte zum Aufhängen die von ihm gefundenen Quarzfäden. Die anziehenden Bleikugeln hatten Durchmesser von 4,25 und 2,25 Zoll; die Durchmesser der angezogenen Goldkugeln betragen 0,2 bzw. 0,25 Zoll. Die Versuche wurden im Kellerraum des Laboratoriums (Clarendon) zu Oxford ausgeführt. Boys fand  $D = 5,527$ . Braun hing einen kupfernen Querbalken an einem sehr dünnen Messingdraht auf; die Enden des ersteren trugen zwei vergoldete Kugeln von 55 g Gewicht. Als anziehende Massen dienten mit Quecksilber gefüllte gußeiserne Hohlkugeln. Die Drehwage selbst befand sich unter einem Rezipienten, aus welchem die Luft ausgepumpt war.

Burgess (1902) hat eine Drehwage mit sehr dünnem Quarzfaden konstruiert. Mit dem drehbaren Arm ist ein vertikaler Zylinder starr verbunden, dessen Achse in der Verlängerung des Fadens liegt, und der in Quecksilber taucht. Durch den hydrostatischen Auftrieb wird das Gewicht des drehbaren Systems fast vollständig kompensiert, wodurch eben die Möglichkeit geboten wird, einen äußerst dünnen Faden zu benutzen.

#### § 4. Andere Methoden zur Bestimmung der mittleren Erddichte.

Airy (1866) bestimmte die mittlere Erddichte  $D$ , indem er die Beschleunigung  $g$  an der Erdoberfläche mit der Beschleunigung  $g'$  in einer Tiefe  $h$  unter der Erdoberfläche verglich. Unter der Voraussetzung, daß der Erdradius gleich  $r + h$  ist und die Erde selbst aus einer Kugel mit dem Radius  $r$  und der Dichte  $D$  und aus einer Kugelschicht von der Dicke  $h$  und der Dichte  $d$  besteht, sieht man leicht ein, daß für die Erdoberfläche

$$g = k \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 D}{(r + h)^2} + k \frac{\frac{4}{3} \pi [(r + h)^3 - r^3] d}{(r + h)^2}$$

ist, wo  $k$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Vernachlässigt man das Quadrat des Bruches  $\frac{h}{r}$ , so erhält man

$$g = \frac{4}{3} \pi k [(r - 2h) D + 3hd].$$

Ferner ist, wie leicht ersichtlich

$$g' = k \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3} \pi k r D.$$

Hieraus folgt

$$D = \frac{d}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g'}{g}\right) \frac{r}{3h}} \dots \dots \dots (9)$$

Die Bestimmungen von  $g$  und  $g'$  wurden nach der Methode von Borda ausgeführt, wobei die eine Uhr mit dem Sekundenpendel sich an der Erdoberfläche, die andere Uhr unter der Erdoberfläche befand. Beide Uhren waren miteinander elektrisch verbunden, so daß sie einen genau gleichen Gang hatten. Zur Bestimmung von  $D$  muß man jedoch offenbar die mittlere Dichte  $d$  der Oberflächenschicht kennen, worin ein Nachteil der Methode besteht. Airy nahm  $d = 2,5$  an; ferner  $\frac{r}{h} = 16000$  und fand  $1 - \frac{g'}{g}$  gleich  $\frac{1}{19200}$ . Diese Zahlen geben  $D = 6,57$ . Haughton verbesserte später die Airyschen Rechnungen und fand  $D = 5,48$ . R. Sterneck fand  $D = 5,52$ , indem er  $g$  an der Erdoberfläche und in einer Tiefe von 1100 m miteinander verglich. Carlini (1824), Mendenhall (1880) und E. D. Preston (1892) beobachteten die Pendelschwingungen auf dem Gipfel hoher Berge (ersterer auf dem Mont Cenis, der zweite auf dem Berge Fusiama bei Tokio, letzterer auf dem Berge Mauna Kea auf der Insel Hawaii); Carlini fand  $D = 4,837$ , Mendenhall  $D = 5,77$ , E. Preston  $D = 5,13$ .

Wilsing (1885 bis 1887) beobachtete die durch eine anziehende Masse bewirkte seitliche Ablenkung eines überaus empfindlichen Pendels und fand zunächst  $D = 5,594$ , darauf nach Anbringung verschiedener Verbesserungen des Apparates  $D = 5,579 \pm 0,012$ .

Jolly (1881) maß die Anziehung einer beträchtlichen kugelförmigen Bleimasse von 5775 kg Gewicht auf einen auf der Wagschale befindlichen Körper und fand  $D = 5,692$ .

Ferner bestimmten A. König und Richarz die Größe  $D$  auf folgende Weise: Unmittelbar über einem großen Bleiklotz befand sich das eine Paar Wagschalen, während das andere mit dem obigen durch 226 cm lange Stangen, die durch den Bleiklotz hindurchführten, verbunden und genau unterhalb des ersteren angebracht war. Der Körper wurde dann beispielsweise zuerst auf die linke obere Wagschale, die Gewichte auf die rechte untere gebracht; darauf der Körper auf die linke untere, die Gewichte auf die rechte obere. Durch Wiederholung derselben Manipulation, jedoch ohne den Bleiklotz (um die Wirkung auszuschließen, welche durch die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe hervorgebracht war), konnte man die Größe der Anziehung dieser Masse und hieraus die mittlere Erddichte  $D$  finden.

Endgültige Resultate veröffentlichten Richarz und Krigar-Menzel im Jahre 1903. Sie fanden:

$$D = 5,507 \pm 0,009.$$

Für den Koeffizienten  $C$  in der Newtonschen Formel, vgl. (1) auf S. 204, also für die in Dynen ausgedrückte Größe der gegenseitigen Anziehung zweier Grammassen, die sich in der Entfernung von 1 cm befinden, geben die genannten Autoren folgende Zahl

$$C = (6,682 \pm 0,011) \cdot 10^{-8}.$$

Die benutzte Bleimasse hatte ein Gewicht von mehr als 100 000 kg. Take (1903) hat diese Arbeit kritisch untersucht. Poynting (1890) hängt an die Enden eines Wagebalkens Kugeln, deren Einzelgewicht etwa 21,57 kg betrug. Eine Kugel von 153,41 kg Gewicht wurde dann abwechselnd unter die eine oder andere der obigen Kugeln gebracht und die hierdurch bewirkte Änderung der Gleichgewichtslage beobachtet. Poynting fand hierbei  $D = 5,4934$ . Berget untersuchte die Anziehung einer Wasserschicht an der Oberfläche eines Sees, dessen Niveau um 1 m geändert werden konnte; er erhielt  $D = 5,41$ .

Die Ergebnisse der verschiedenen Messungen für  $D$  weichen beträchtlich voneinander ab. Am meisten Zutrauen verdienen die folgenden Werte:

	$D$
Cornu und Baille (1878) . . . . .	5,56
Boys (1893) . . . . .	5,527
Braun (1896) . . . . .	5,527
Poynting (1890). . . . .	5,493
Richarz und Krigar-Menzel (1896) . . .	5,507

Als wahrscheinlichsten Wert können wir gegenwärtig annehmen

$$D = 5,5136,$$

d. h. eine Zahl, die kleiner ist, als die früher angenommene  $D = 5,55$ .

A. L. Gerschun hat 1899 eine neue Methode zur Bestimmung der mittleren Erddichte vorgeschlagen, die auf folgender Idee beruht. Nähert man der horizontalen Oberfläche einer Flüssigkeit von oben her eine Kugel vom Radius  $r$  und der Dichte  $\delta$ , so wird die Oberfläche konvex, wobei die Vertikalebene, welche durch den Kugelmittelpunkt gehen, diese Fläche in Kurven schneiden. Der Krümmungsradius  $\varrho$  dieser Kurven im höchsten Punkte, der mit dem Kugelmittelpunkt auf der gleichen Vertikale liegt, wird aus folgender Gleichung bestimmt

$$\frac{R}{\varrho} = 1 + \frac{\delta}{D} \left( \frac{r}{h} \right)^3 \dots \dots \dots (10)$$

wo  $R$  der Erdradius,  $D$  die Erddichte und  $h$  die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Wie Formel (10) zeigt, hängt bei gegebenem  $\delta$  (wenn also das Material der Kugel be-

kannt ist) der Radius  $\varrho$  nur vom Verhältnis  $r:h$  ab und hieraus geht hervor, daß man zweckmäßig eine kleine Kugel von möglichst großer Dichte verwendet, die man der Flüssigkeitsoberfläche so nahe als möglich bringt. Für eine Platinkugel vom Radius  $r = 0,9h$  erhält man als Krümmungsradius  $\varrho = 1650$  km. Gerschun hat auch eine optische Methode zur Messung solcher großen Krümmungsradien angegeben, die im zweiten Bande (vgl. sphärische Aberration bei der Reflexion) besprochen werden soll. Hat man  $\varrho$  bestimmt, so berechnet man  $D$  nach Formel (10). A. Sella hat diese Methode einer kritischen Besprechung unterworfen; ausgeführt wurde sie bisher noch nicht.

Die Dichte der Erdrinde ist, wie bekannt, im Mittel nicht größer als 2,3; hieraus folgt, daß das Erdinnere eine sehr viel größere Dichte besitzen muß. Roche gab für den Wert der Erddichte in der Entfernung  $x$  vom Erdmittelpunkt die Formel

$$d = 10,6 \left( 1 - 0,8 \frac{x^2}{R^2} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

in der  $R$  den Erdradius bedeutet. Diese Formel gibt für den Erdmittelpunkt  $d_0 = 10,6$ , für die Erdoberfläche  $d = 2,1$ . Wiechert nimmt an, die Erde bestehe aus einer Kugel, deren Radius gleich 0,8 des Erdradius ist und aus einer Oberflächenschicht von 1400 km Dicke. Der Erdkern besteht nach seiner Meinung größtenteils aus Eisen. Licondès hat vorgeschlagen, in der Formel von Roche anstatt der Zahlen 10,6 und 0,8 die Werte 10 und 0,75 zu substituieren.

Es seien an dieser Stelle einige Worte über die bemerkenswerten Apparate von Eötvös hinzugefügt, obgleich sie offenbar nicht zur Messung der Größe  $D$  bestimmt waren. Einer derselben bestand aus einer unifilaren Drehwage, die zwischen zwei Säulen aus Blei angebracht war. Die Schwingungsdauer des Stäbchens war gleich 641 Sek., wenn die Gleichgewichtslage mit der die Säulen verbindenden Geraden zusammenfiel, und gleich 860 Sek., wenn die Gleichgewichtslage senkrecht zu dieser Geraden war. Hieraus erhält man für den Koeffizienten  $C$  in der Gravitationsformel, d. h. für die Kraft, mit der sich zwei um einen Zentimeter voneinander entfernte Gramm Massen anziehen, }

$$C = 6,65 \cdot 10^{-8}.$$

Ein anderer Apparat (der Gravitationskompensator) zeigte die Anziehung einer 300 kg schweren Masse in 5 m Entfernung vom Apparat an. Bei einem dritten Apparat (dem Gravitationsmultiplikator) brachte Eötvös die anziehenden Massen bald auf die eine, bald auf die andere Seite des Stäbchens; es gelang ihm auf diese Weise, das Stäbchen in Schwung zu bringen und damit Ablenkungen zu erhalten, welche die bei einfacher Anziehung derselben Massen 150 mal übertrafen.

Wir wollen nun noch kurz einige weitere hierher gehörige Untersuchungen besprechen.

Austin und Thwing (1897) haben zuerst mit der von Boys konstruierten Drehwage untersucht, ob die Anziehung zwischen zwei Körpern durch andere, zwischen ihnen befindliche Körper verändert wird. Sie fanden kein positives Resultat, als sie dicke Platten zwischen die Körper schoben, deren Anziehung gemessen wurde. Bei dieser Anordnung entsteht eine Komplikation durch die Anziehung, welche die Platten ihrerseits ausüben.

Lager (1904) benutzte hohle Zylinder, welche die Kugeln umgaben; doch ist auch in diesem Falle die direkte Wirkung des Zwischenkörpers nicht gleich Null. Kleiner (1905) hat daher die beweglichen Kugeln mit Hohlkugeln umgeben, deren Wirkung für den Innenraum Null ist (S. 217). Hohlkugeln aus Cu, Fe und Pb hatten keine merkbare Wirkung auf die Anziehung der Bleikugeln. Das gleiche Resultat erhielt Erisman (1908), als er die beweglichen Kugeln mit doppelwandigen Hohlkugeln umgab, welche Wasser, Quecksilber oder Paraffinöl enthielten.

Crémieu (1905—1909) hat mehrere sehr empfindliche Drehwagen konstruiert, wobei er besonders die Bedingung einer möglichst vollständigen Symmetrie des Apparates berücksichtigte. Die anziehenden Kugeln ersetzte er durch Hohlzylinder, die mit Hg gefüllt werden konnten. Die beweglichen Kugeln machte er gleichfalls hohl und füllte sie mit Wasser oder Quecksilber.

Eine plötzliche Entfernung des anziehenden Körpers (Bleimasse), welcher auf eine Kugel wirkte, die an einer sehr empfindlichen Wage hing, erzeugte keine momentane Vergrößerung der Anziehung, wie Crémieu erwartet hatte.

Ferner hat Crémieu (1905) Ölkugeln in einer Mischung von Wasser und Alkohol sehr langsam in die Höhe steigen lassen. Eine einzelne Kugel stieg genau vertikal in die Höhe. Befinden sich aber zwei oder mehr Ölkugeln in der Flüssigkeit, so bewegen sie sich in gekrümmten Bahnen, welche einer gegenseitigen Anziehung entsprechen.

Besonders wichtig ist seine Untersuchung über den Einfluß eines umgebenden Mittels auf die Anziehung. Es gelang ihm, die Drehwage und die anziehenden Zylinder vollständig mit Wasser zu umgeben und zu zeigen, daß auch hierbei sehr genaue Messungen möglich sind. Es sei  $\delta$  die Ablenkung der beweglichen Kugeln in Luft,  $\delta'$  — im Wasser; ferner sei  $d$  die Dichte der beweglichen Kugeln,  $d'$  die Dichte der umgebenden Flüssigkeit. Dann wäre zu erwarten:

$$\delta' = \delta \frac{d - d'}{d}.$$