Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Sechster Abschnitt. Anwendung der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis und Geometrie

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis und Geometrie.

In den folgenden Kapiteln XVII—XXI behandeln wir zunächst die Randwertaufgabe für ein simultanes System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus, sodann wird die Methode der „Parametrix" zur Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen auseinander gesetzt und zur Integration der allgemeinsten elliptischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf der Kugel verwandt, wobei die Theorie der Eigenwerte und der Eigenfunktionen auf der Kugel sowie das zugehörige Variationsproblem vollständig erledigt wird. Die dann folgenden letzten drei Abschnitte beschäftigen sich mit besonderen, ganz verschiedenartigen Problemen aus der Geometrie und Analysis, nämlich mit Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche, mit einem Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen und endlich mit einer gewissen zweiparametrigen Randwertaufgabe, die mit Kleins Oszillationstheorem in engster Beziehung steht: ich wollte durch die Auswahl dieser Beispiele die mannigfache Verwendbarkeit meiner Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen offenbar machen.

Siebzehntes Kapitel.

Die Randwertaufgabe für ein System simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus.

In Kapitel VIII habe ich eine Methode angegeben, wie die Randwertaufgaben für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus mittels der Theorie der Integralgleichungen gelöst werden können. Diese Methode ist auch anwendbar, wenn ein System von simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorliegt: nur bedarf es dann einer entsprechenden Greenschen Formel, und an Stelle der früheren Greenschen Funktion mit logarithmischer Unendlichkeitsstelle $x = \xi$, $y = \eta$ tritt ein System von Greenschen Funktionen, die an jener Stelle gewisse Singularitäten erster Ordnung aufweisen. Wir wollen hier die damit angedeuteten Modifikationen der Methode an dem folgenden speziellen Probleme erläutern.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \quad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind; das von C umschlossene Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet. Es seien die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= pu + qv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= ku + lv \end{aligned}$$

vorgelegt, wo p, q, k, l gegebene innerhalb J einschließlich C zweimal stetig differenzierbare Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y bedeuten; es wird nun nach zwei solchen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ gefragt, die innerhalb J den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen, während $u(xy)$ auf der Randkurve C gegebene viermal stetig differenzierbare Werte

$$u(s) = f(s)$$

annimmt.[1])

Für die linker Hand in (1) stehenden Differentialausdrücke erster Ordnung führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \\ M(u, v) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

ein. Alsdann stellen wir die folgende, der bekannten Greenschen Formel entsprechende, für zwei willkürliche Funktionenpaare $u(xy)$, $v(xy)$, $u^*(xy)$, $v^*(xy)$ gültige Identität auf:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\int \{u^* L(u, v) - v^* M(u, v) + u L(u^*, v^*) - v M(u^*, v^*)\} \, dJ \\ &\qquad = \int \left\{ u \left(v^* \frac{dx}{ds} + u^* \frac{dy}{ds} \right) + v \left(u^* \frac{dx}{ds} - v^* \frac{dy}{ds} \right) \right\} ds, \end{aligned}$$

wo das Doppelintegral linker Hand über J oder irgendein innerhalb J gelegenes Gebiet und das einfache Integral rechter Hand über die Randkurven dieses Gebietes zu erstrecken ist.

Es mögen nun $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$, $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1) Die hier dargelegte Methode ist in der Inauguraldissertation von W. A. Hurwitz (Göttingen 1910) auch auf Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von nicht elliptischem Typus sowie auf kompliziertere Randbedingungen ausgedehnt worden.

die Greenschen Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne[1]) sein; dies sind solche Funktionen der Variabelnpaare x, y; ξ, η, deren jede die Form besitzt

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}+\gamma(xy, \xi\eta)$$

— unter γ eine für jeden innerhalb J liegenden Punkt ξ, η und für jeden innerhalb J oder auf C liegenden Punkt x, y zweimal stetig differenzierbare Funktion verstanden —, die ferner identisch in ξ, η den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial y^2}=\frac{2\pi}{J},$$

sowie den Randbedingungen bzw. der Integralbedingung

$$[G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}=0,$$

$$(3)\qquad \left[\frac{\partial G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}=0, \quad \int\limits_{(J)} G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)\,dJ=0$$

genügen, wo J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet und unter n die Richtung der inneren Normalen auf der Kurve C zu verstehen ist.

Wir nehmen jetzt erstens

$$u^*=-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}, \quad v^*=\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y},$$

sodaß

$$L(u^*, v^*)=0,$$
$$M(u^*, v^*)=0$$

wird, und führen diese Werte in die Formel (2) ein, indem wir zuvor die Unendlichkeitsstelle ξ, η durch einen kleinen Kreis ausschließen. Der Grenzübergang bei Zusammenziehung dieses Kreises auf den Mittelpunkt ξ, η liefert dann die Gleichung

$$(4)\qquad -\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}L(u, v)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}M(u, v)\right\}dJ=\int\limits_{(C)}u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds-2\pi u(\xi\eta),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Gebiet J und das einfache Integral rechts über dessen Randkurve C zu erstrecken ist, während n die Richtung der inneren Normale auf C bezeichnet.

Nehmen wir zweitens

$$u^*=\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}, \quad v^*=\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x},$$

wobei

$$L(u^*, v^*)=0,$$
$$M(u^*, v^*)=\frac{2\pi}{J}$$

[1]) Vgl. Kapitel IX, S. 70—75.

wird, so führt das entsprechende Verfahren zu der Formel

$$(5)\quad \int\limits_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} L(u,v) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} M(u,v) - \frac{2\pi}{J} v \right\} dJ = \int\limits_{(C)} u(s) \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s} ds - 2\pi v(\xi\eta).$$

Hilfssatz. Wenn zwei Funktionen $A(xy)$, $B(xy)$ innerhalb J einschließlich des Randes C zweimal stetig differenzierbar und überdies von der Beschaffenheit sind, daß für sie identisch in ξ, η die zwei Integralgleichungen

$$(6)\quad \begin{aligned} &\int\limits_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y} B(xy) \right\} dJ = 0, \\ &\int\limits_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} B(xy) \right\} dJ = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, so sind A und B selbst identisch Null.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bestimmen wir durch Berechnung des ebenen Flächenpotentials auf die in der Potentialtheorie übliche Weise eine Funktion $u(xy)$, die innerhalb J einschließlich C der Differentialgleichung

$$\varDelta u = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

genügt. Alsdann finden wir durch Integration sofort eine zugehörige Funktion v, so daß

$$(7)\quad \begin{cases} L(u,v) = A, \\ M(u,v) = B \end{cases}$$

wird. Führen wir nun die so gefundenen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ in (4) und (5) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (7) und (6) die Gleichungen

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} u(s) \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n} ds,$$

$$v(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} u(s) \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s} ds + \frac{1}{J} \int\limits_{(J)} v(xy) dJ.$$

Die erstere Gleichung zeigt, daß $u(xy)$ nichts anderes als dasjenige ebene Potential ist, das in J der Gleichung $\varDelta u = 0$ genügt und auf C die Werte $u(s)$ aufweist. Bringen wir andererseits die letzte Gleichung auf die Form

$$v(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \frac{du(s)}{ds} G^{\mathrm{II}} ds + \frac{1}{J} \int\limits_{(J)} v(xy) dJ,$$

so erkennen wir, daß v dasjenige ebene Potential ist, dessen normale Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf C gleich den Werten $\frac{du(s)}{ds}$ sind, d. h. es ist v genau ein zu u konjugiertes ebenes Potential, so daß überall innerhalb J die Differentialgleichungen

$$L(u, v) = 0,$$
$$M(u, v) = 0$$

gelten. Wegen (7) folgt hieraus, daß A und B identisch Null sind, und damit ist unser Hilfssatz bewiesen. —

Um nunmehr die anfangs gestellte Randwertaufgabe für die Differentialgleichungen (1) zu lösen, betrachten wir das folgende System von Integralgleichungen

$$(8)\quad -\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}(pu+qv)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}(ku+lv)\right\}dJ=\int\limits_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}\,ds-2\pi u(\xi\eta),$$

$$(9)\quad \int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}(pu+qv)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}(ku+lv)-\frac{2\pi}{J}v\right\}dJ=\int\limits_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}\,ds-2\pi v(\xi\eta),$$

das sich auch in die Gestalt

$$(10)\quad \begin{cases} u(\xi\eta)+\int\limits_{(J)}\{K_1(\xi\eta, xy)u(xy)+K_2(\xi\eta, xy)v(xy)\}\,dJ=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} f(s)\dfrac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}\,ds,\\ v(\xi\eta)+\int\limits_{(J)}\{K_3(\xi\eta, xy)u(xy)+K_4(\xi\eta, xy)v(xy)\}\,dJ=-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\dfrac{df(s)}{ds}G^{\mathrm{II}}\,ds, \end{cases}$$

bringen läßt, wo zur Abkürzung

$$2\pi K_1(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}\,p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}\,k(xy),$$
$$2\pi K_2(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}\,q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}\,l(xy),$$
$$2\pi K_3(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}\,p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}\,k(xy),$$
$$2\pi K_4(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}\,q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}\,l(xy)-\frac{1}{J}$$

gesetzt ist. Nehmen wir in (10) rechter Hand Null, so entstehen die zu (10) zugehörigen homogenen Integralgleichungen.

Wir machen nun zunächst die Annahme, daß diese homogenen Integralgleichungen keine Lösung besitzen. Nach dem bekannten von Fredholm aufgestellten Satze haben dann die inhomogenen Integralgleichungen (10) gewiß eine Lösung, d. h. es gibt stetige Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$, die den Gleichungen (10) genügen. Da wegen der dreimal stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $f(s)$, $\dfrac{df(s)}{ds}$ auch die rechten Seiten in (10) dreimal stetig differenzierbare Funktionen von ξ, η innerhalb J und auf C sind, so folgt in der üblichen Weise durch dreimalige Iteration der Formeln (10), wonach sich $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ schließlich als achtfache Integrale darstellen, daß diese Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ ebenfalls dreimal stetig differenzierbar innerhalb J und auf C sind.

Wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion G^{I} in den Variabelnpaaren x, y und ξ, η folgt nach (3), daß sie identisch in x, y verschwindet, sobald der Punkt ξ, η in einen Punkt σ der Randkurve C rückt, und mithin müssen dann auch $K_1(\sigma, xy)$ und $K_2(\sigma, xy)$ identisch in x, y verschwinden; die erstere der beiden Gleichungen (10) liefert mithin für die Funktion u die vorgeschriebenen Randwerte

(11) $$u(\sigma) = f(\sigma).$$

Nunmehr führen wir die eben als Lösung der Integralgleichungen (10) erhaltenen Funktionen u, v sowohl in die Formeln (4), (5) wie in die Formeln (8), (9) ein. Subtrahieren wir dann (8) von (4) und andererseits (9) von (5), so entstehen unter Benutzung von (11) Gleichungen von der Gestalt

$$\int\limits_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

$$\int\limits_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$A(xy) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - (pu + qv),$$

$$B(xy) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - (ku + lv),$$

gesetzt ist. Da hier offenbar A, B zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln x, y innerhalb J und auf C werden, so sind dieselben mit Rücksicht auf den oben bewiesenen Hilfssatz identisch Null, d. h. die Funktionen u, v genügen den anfangs vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (1) erster Ordnung.

Nunmehr mögen entgegen der oben gemachten Annahme die zu (10) gehörigen homogenen Integralgleichungen eine Lösung $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ besitzen, so daß nicht zugleich $u = 0$, $v = 0$ ist. Dann zeigen die eben dargelegten Überlegungen, daß diese Funktionen Lösungen der Differentialgleichungen (1) sind, von denen die erstere, $u(xy)$, die Randwerte Null besitzt. Ferner sind in diesem Falle — wie die Theorie der Integralgleichungen lehrt —, die inhomogenen Integralgleichungen (10) gewiß lösbar, sobald ihre rechten Seiten gewisse lineare Integralbedingungen erfüllen, d. h. bei der gegenwärtigen Annahme gibt es gewiß dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1), wobei u die Randwerte $f(s)$ hat, wenn $f(s)$ gewissen linearen Integralbedingungen genügt. Doch sei bemerkt, daß unter besonderen Umständen diese Integralbedingungen identisch von allen Funktionen $f(s)$ erfüllt sein können; so besitzt offenbar das für

$$p = 0, \quad q = 0, \quad k = 0, \quad l = 0$$

aus (1) hervorgehende Gleichungssystem stets Lösungen, wobei u beliebig vorgeschriebene Randwerte $f(s)$ aufweist, obwohl dieses Gleichungssystem die von $u = 0$, $v = 0$ verschiedenen Lösungen $u = 0$, $v = 1$ mit den Randwerten $f(s) = 0$ zuläßt.

Durch Zusammenfassung der erhaltenen Resultate gewinnen wir den Satz:

Satz 43. *Wenn die partiellen Differentialgleichungen* (1) *außer* $u = 0$, $v = 0$ *kein Lösungssystem* u, v *besitzen, derart daß* u *auf der Randkurve* C *verschwindet, so besitzen sie stets notwendig ein Lösungssystem* u, v *derart, daß* u *auf der Randkurve* C *irgend vorgeschriebene Werte* $f(s)$ *annimmt. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn es ein Lösungssystem* u, v *der partiellen Differentialgleichungen* (1) *derart gibt, daß* u *auf* C *verschwindet und die Funktionen* u, v *nicht beide überall in* J *Null sind, so existiert ein Lösungssystem* u, v, *wobei* u *auf* C *die vorgeschriebenen Randwerte* $f(s)$ *annimmt, sicher immer dann, wenn* $f(s)$ *gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt.*

Achtzehntes Kapitel.

Eine neue Methode der Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen. Begriff der Parametrix.

Zum Schluß von Kapitel XVI habe ich auf eine neue Methode[1]) hingewiesen, durch welche sich die Lösung linearer Differentialgleichungen mit Hilfe von Integralgleichungen bewerkstelligen läßt. Diese Methode unterscheidet sich von dem in Kapitel VII—VIII entwickelten Verfahren wesentlich dadurch, daß an Stelle der dort benutzten Greenschen Funktion die „Parametrix" tritt, d. h. eine Funktion, die ebenso, wie die Greensche Funktion außer von den Variabeln noch von Parametern abhängt, und auch die Unstetigkeits- und Randbedingungen wie die Greensche Funktion erfüllen muß, aber keineswegs wie diese einer Diffe-

1) Vgl. auch die inzwischen erschienene scharfsinnige Abhandlung von E. E. Levi: I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rom 1909.

rentialgleichung zu genügen braucht. Die hierdurch gekennzeichnete Modifikation bringt den Vorteil mit sich, daß man bei der Integration der Differentialgleichung nicht nötig hat, zuvor die Lösbarkeit einer anderen Differentialgleichung vorauszusetzen, und daß es daher auch gelingt, solche partielle Differentialgleichungen auf Integralgleichungen zurückzuführen, die nicht in derjenigen Normalform vorliegen, wie wir sie im zweiten Abschnitt stets angenommen haben.

Ich entwickle in diesem Kapitel die neue Methode an dem Beispiel der allgemeinsten linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus, während das Integrationsgebiet die Vollkugel ist.

Es seien s, t die unabhängigen Variabeln und z, w irgendwelche Funktionen derselben; als untere Indizes an einer Funktion mögen s, t bedeuten, daß die partiellen Ableitungen der Funktion nach s, t zu nehmen sind. Wir gehen aus von dem allgemeinsten linearen partiellen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}(z) \equiv a z_{ss} + 2 b z_{st} + c z_{tt} + l z_s + m z_t + n z,$$

wo a, b, c, l, m, n gegebene Funktionen von s, t sind. Der zu $\mathfrak{L}(z)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$\mathfrak{M}(z) \equiv (az)_{ss} + 2(bz)_{st} + (cz)_{tt} - (lz)_s - (mz)_t + nz;$$

ferner mögen

$$\mathfrak{P} \equiv a(wz_s - zw_s) + b(wz_t - zw_t) + (l - a_s - b_t)wz,$$
$$\mathfrak{Q} \equiv b(wz_s - zw_s) + c(wz_t - zw_t) + (m - b_s - c_t)wz$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke heißen: es gilt dann bekanntlich die Identität

$$w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t. \tag{12}$$

Wenn wir in $\mathfrak{L}(z)$ statt s, t irgendwelche neue Variable s', t' einführen und den Differentialausdruck dann mit der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Variabeln nach den neuen d. h. mit

$$t_{s'} s_{t'} - t_{t'} s_{s'}$$

multiplizieren, so heiße der so entstehende Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}'(z) = a' z_{s's'} + 2b' z_{s't'} + c' z_{t't'} + l' z_{s'} + m' z_{t'} + n' z$$

der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{L}(z)$; desgleichen heiße der aus $\mathfrak{M}(z)$ durch Einführung der neuen Variabeln s', t' und Multiplikation mit jener Funktionaldeterminante entstehende Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{M}(z)$. Endlich mögen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \mathfrak{P} t_{t'} - \mathfrak{Q} s_{t'}, \\ \mathfrak{Q}' &= \mathfrak{P} t_{s'} + \mathfrak{Q} s_{s'}, \end{aligned} \tag{13}$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ heißen. Indem wir in der Identität statt s, t die neuen Variabeln s', t' einführen, gelangen wir zu der Identität

$$w\mathfrak{L}'(z) - z\mathfrak{M}'(w) = \mathfrak{P}'_{s'} + \mathfrak{Q}'_{t'}$$

und von dieser führen leichte Überlegungen unter Berücksichtigung der Bauart der Ausdrücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ zum Beweise des folgenden Satzes:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ adjungierte Ausdruck, und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke.

Im folgenden wollen wir der Kürze halber die Koeffizienten a, b, c, l, m, n des Differentialausdruckes $\mathfrak{L}$, desgleichen alle anderen vorkommenden Funktionen stets als beliebig oft differenzierbar voraussetzen — soweit nicht ausdrücklich Ausnahmen festgesetzt werden.

Es seien nun auf der Kugel mit dem Radius 1 irgend zwei einfach zusammenhängende Gebiete K_1 und K_2 gegeben, die in dem Gebiete K_{12} übereinandergreifen; s_1, t_1 seien irgendwelche krummlinige Koordinaten für das Gebiet K_1 und s_2, t_2 irgendwelche krummlinige Koordinaten für K_2; ferner sei $\mathfrak{L}_1(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_1, t_1 und $\mathfrak{L}_2(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_2, t_2. Bezeichnen wir das Linienelement auf der Kugel in üblicher Weise mit

$$e_1 ds_1^2 + 2f_1 ds_1 dt_1 + g_1 dt_1^2,$$
$$\text{bzw. } e_2 ds_2^2 + 2f_2 ds_2 dt_2 + g_2 dt_2^2,$$

so ist das Flächenelement der Kugel

$$dk = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\, ds_1 dt_1,$$

bzw.
$$= \sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}\, ds_2 dt_2;$$

ferner wird innerhalb des Gebietes K_{12}

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2} = \frac{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}},$$

und wegen
$$\mathfrak{L}'_1(z) = \mathfrak{L}_1(z)\left(\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2}\right)$$

folgt mithin
$$\frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} = \frac{\mathfrak{L}'_1(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}.$$

Wenn nun der besondere Umstand zutrifft, daß der auf die Variabeln s_2, t_2 transformierte Differentialausdruck $\mathfrak{L}'_1$ mit $\mathfrak{L}_2$ identisch ist, so stellt die Formel

$$L(z) = \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1$$
$$= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2$$

in dem gemeinsamen Gebiete K_{12} den nämlichen Differentialausdruck dar; zugleich erweist sich der Wert dieses Differentialausdruckes $L(z)$, wenn z eine Funktion einer innerhalb K_1 oder K_2 gelegenen Stelle auf der Kugel bedeutet, als unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t. Ist die Vollkugel mit einer endlichen Anzahl von übereinandergreifenden Gebieten $K_1, K_2, \ldots$ bedeckt und in diesen je ein regulärer Differentialausdruck bzw. $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ gegeben von der Art, daß immer in dem gemeinsamen Teile von je zwei übereinandergreifenden Gebieten der transformierte Differentialausdruck des einen Gebietes mit dem Differentialausdrucke des anderen übereinstimmt, so definieren die Formeln

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1, \\ &= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel einen Differentialausdruck, dessen Wert, wenn z eine Funktion der Stelle auf der Kugel bedeutet, ebenfalls unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t ausfällt; der Differentialausdruck $L(z)$ heiße *ein auf der Vollkugel regulärer Differentialausdruck.* Wie man leicht erkennt, bestimmen die zu $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ bzw. in $K_1, K_2, \ldots$ adjungierten Differentialausdrücke $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ vermöge der Formeln

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{\mathfrak{M}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1, \\ &= \frac{\mathfrak{M}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ebenfalls einen auf der Vollkugel regulären Differentialausdruck $M(z)$; dieser heiße *der zu $L(z)$ adjungierte Differentialausdruck.*

Wenn wir die Formel (12) in einem von beliebigen geschlossenen Kurven berandeten Gebiete G der Kugel mit den krummlinigen Koordinaten s, t integrieren, so erhalten wir die Integralformel

$$(14) \qquad \iint_{(G)} \{w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w)\}\, ds\, dt = \int_{(R)} (\mathfrak{P}\, dt - \mathfrak{Q}\, ds),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Innere von G und das Linienintegral rechter Hand über sämtliche Randkurven R und zwar jedesmal in der Richtung hin zu erstrecken ist, daß das Gebiet G zur linken Hand bleibt.

Wenn wir in dem Linienintegral rechter Hand an Stelle der Variabeln s, t beliebig neue Variable s', t' einführen, so sind nach dem oben bewiesenen Satze die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke; mittels der Formeln (13) folgt hieraus die wichtige Tatsache, daß der Integrand des Linienintegrals rechter Hand in (14) derselbe bleibt, wenn wir bei der Bildung derselben an Stelle von $\mathfrak{L}$ den beliebig transformierten Ausdruck $\mathfrak{L}'$ zugrunde legen.

Teilen wir jetzt die Vollkugel etwa durch den Äquator in die zwei Hälften K_1, K_2 und wenden auf jede derselben die Formel (14) an, so entsteht — wegen der eben bewiesenen Invarianz der Integranden in den Linienintegralen und da in dem Linienintegral der zweiten Formel der Äquator in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen ist, wie bei der ersten Formel — durch Addition die Formel

$$\int\int\{w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w)\}\,ds\,dt = 0,$$

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Führen wir hierin die auf der Kugel regulären Differentialausdrücke $L(z)$, $M(z)$ und das Flächenelement dk der Kugel ein, so erhalten wir

$$\int\{w L(z) - z M(w)\}\,dk = 0, \tag{15}$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Der Differentialausdruck L heiße *von elliptischem Typus*, wenn überall in jedem der Ausdrücke $\mathfrak{L}$ für alle Werte der Variabeln s, t die Ungleichung

$$ac - b^2 > 0 \tag{16}$$

erfüllt ist; wir nehmen zugleich a und c positiv an.

Unser Hauptproblem besteht zunächst in der Integration der Differentialgleichung von elliptischem Typus

$$L(z) = f,$$

wo f eine überall auf der Kugel definierte Funktion bedeutet.

Um dieses Problem auf ein Problem der Theorie der Integralgleichungen zurückzuführen, bedarf es des Begriffes der Parametrix. Für den vorliegenden Fall verstehen wir unter einer *Parametrix* eine Funktion $p(st, \sigma\tau)$ des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel von folgenden Eigenschaften:

1. Die Parametrix $p(st, \sigma\tau)$ ist überall in den Koordinaten des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ stetig und beliebig oft differenzierbar, außer wenn der erstere mit dem letzteren zusammenfällt, d. h. wenn gleichzeitig $s = \sigma$, $t = \tau$ wird: alsdann wird $p(st, \sigma\tau)$ logarithmisch unendlich, wie folgt:

$$p(st,\sigma\tau) = -\frac{\log\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau) + a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\}}{4\pi\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau) - (b(\sigma\tau))^2}} + S(st,\sigma\tau),$$

wo $S(st, \sigma\tau)$ eine Funktion vom Argumentpunkt s, t und vom Parameterpunkt σ, τ auf der Kugel bedeutet, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ zwar stetig sein muß, deren zweite Ableitungen aber für $s = \sigma$, $t = \tau$ von erster Ordnung unendlich werden dürfen — während sonst überall mindestens dreimal stetige Differenzierbarkeit statt haben soll.

2. Die Parametrix ist symmetrisch in bezug auf Argumentpunkt und Parameterpunkt, d. h. es ist

$$p(st, \sigma\tau) = p(\sigma\tau, st).$$

Um eine Parametrix zu konstruieren, betrachten wir die räumlichen Koordinaten x, y, z eines Punktes der Kugel als Funktionen der krummlinigen Koordinaten s, t — indem wir immer in jedem Teilgebiet auf der Kugel die demselben eigenen Koordinaten s, t derart wählen, daß überall auf der Kugel

$$y_s z_t - z_s y_t \neq 0, \quad z_s x_t - x_s z_t \neq 0, \quad x_s y_t - y_s x_t \neq 0 \tag{17}$$

ausfällt. Dann bestimmen wir aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} A x_s^2 + B y_s^2 + C z_s^2 &= c(st)\sqrt{eg - f^2}, \\ A x_s x_t + B y_s y_t + C z_s z_t &= -b(st)\sqrt{eg - f^2}, \\ A x_t^2 + B y_t^2 + C z_t^2 &= a(st)\sqrt{eg - f^2} \end{aligned} \tag{18}$$

die Größen A, B, C als Funktionen des Argumentpunktes s, t; dieselben sind gegenüber einer Transformation der Koordinaten s, t invariant und stellen daher Funktionen auf der Kugel dar; aus (17) folgt leicht, daß die Determinante dieser Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x_s^2 & y_s^2 & z_s^2 \\ x_s x_t & y_s y_t & z_s z_t \\ x_t^2 & y_t^2 & z_t^2 \end{vmatrix}$$

stets von Null verschieden ist.

Nunmehr verstehen wir unter ξ, η, ζ die räumlichen Koordinaten des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, so daß ξ, η, ζ bzw. ebenso von σ, τ abhängen, wie x, y, z von s, t, und bilden dann den Ausdruck

$$\psi(st, \sigma\tau) = A(x - \xi)^2 + B(y - \eta)^2 + C(z - \zeta)^2.$$

Setzen wir hierin

$$\begin{aligned} x - \xi &= x_s(s - \sigma) + x_t(t - \tau) + \cdots, \\ y - \eta &= y_s(s - \sigma) + y_t(t - \tau) + \cdots, \\ z - \zeta &= z_s(s - \sigma) + z_t(t - \tau) + \cdots \end{aligned}$$

ein, so ergibt sich mit Benutzung von (18) die Entwicklung

$$\begin{aligned} \psi(st, \sigma\tau) &= \sqrt{eg - f^2}\,\{c(st)(s-\sigma)^2 - 2b(st)(s-\sigma)(t-\tau) + a(st)(t-\tau)^2\} + (s-\sigma, t-\tau) \\ &= \sqrt{eg - f^2}\,\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau) + a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\} + (s-\sigma, t-\tau) \end{aligned}$$

wo beidemal $(s-\sigma,\ t-\tau)_3$ Ausdrücke mit Gliedern von dritter und höherer Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ bezeichnen. Mit Rücksicht hierauf ist wegen (16) gewiß

$$\psi(st,\sigma\tau)>0, \tag{19}$$

sobald die Differenzen $s-\sigma$, $t-\tau$ absolut genügend klein gewählt, aber nicht beide Null sind: es sei ε eine so kleine Konstante, daß die Ungleichung (19) statt hat, sobald

$$0<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2<\varepsilon^2$$

ist. Endlich sei γ der absolut größte Wert, den $\psi(st,\sigma\tau)$ annimmt, wenn der Argumentpunkt s, t und der Parameterpunkt (σ,τ) beliebig auf der Kugel variieren: alsdann stellt der Ausdruck

$$\Psi(st,\sigma\tau)=\psi(st,\sigma\tau)+\frac{2\gamma}{\varepsilon^4}\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^2$$

eine Funktion dar, die stets positiv ausfällt und nur für $s=\sigma$, $t=\tau$ verschwindet. Da andererseits

$$\Psi(st,\sigma\tau)=\sqrt{eg-f^2}\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2-2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau)+a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\}\{1+(s-\sigma,t-\tau)_1\}$$

wird, wo $(s-\sigma,\ t-\tau)_1$ einen für $s=\sigma$, $t=\tau$ mindestens von der ersten Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ verschwindenden Ausdruck bedeutet und, wie man sofort sieht, $\Psi(\sigma\tau, st)$ sich in die gleiche Gestalt bringen läßt, so besitzt der Ausdruck

$$p(st,\sigma\tau)=\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\log\Psi(st,\sigma\tau)}{\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau)-(b(\sigma\tau))^2}}+\frac{\log\Psi(\sigma\tau,st)}{\sqrt{a(st)c(st)-(b(st))^2}}\right\}$$

die für die Parametrix geforderten Eigenschaften; die Existenz einer Parametrix ist damit bewiesen.

Aus der oben aufgestellten Definition der Parametrix folgern wir eine Reihe von Tatsachen — analog wie dies in der bekannten Theorie des logarithmischen Potentials geschieht.

Erstens: der Ausdruck

$$M(p(st,\sigma\tau))$$

stellt eine Funktion dar, die für $s=\sigma$, $t=\tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Wenn man nämlich alle diejenigen Glieder, die allein von der zweiten Ordnung unendlich werden, ausrechnet, so erkennt man, daß sie sich gegenseitig zerstören.

Zweitens: Wenn $z(st)$ irgendeine überall zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel bedeutet, so ist stets

$$\int\{pL(z)-zM(p)\}dk=-z(\sigma\tau), \tag{20}$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Zum Beweise dieser Formel beschreiben wir um den Punkt σ, τ auf der Kugel einen Kreis k_r mit dem kleinen Radius r und zerlegen dadurch die Oberfläche der Vollkugel in das kreisförmig begrenzte Gebiet k_r und das außerhalb k_r gelegene Gebiet K_r; dann wenden wir die Integralformel (14), indem wir $w(st) = p(st, \sigma\tau)$ nehmen, auf das Gebiet K_r an und führen den Grenzübergang zu $r = 0$ aus.

Drittens: wenn wir unter $z(st)$, wie soeben, eine Funktion auf der Kugel verstehen und ferner mit M denjenigen Differentialausdruck bezeichnen, der aus M hervorgeht, wenn wir darin die Variabeln s, t durch die Parameter σ, τ ersetzen, so gilt die Formel

$$\mathsf{M}\{\int zp\,dk\} = \int z\mathsf{M}(p)\,dk - z(\sigma\tau), \tag{21}$$

wo die Integrale wiederum über die Vollkugel zu erstrecken sind.

Zum Beweise haben wir die in dem Ausdruck M linker Hand geforderten Differentiationen erster und zweiter Ordnung auszuführen. Da die Parametrix $p(st, \sigma\tau)$ für $s = \sigma$, $t = \tau$ nur logarithmisch unendlich wird, so sind die einmaligen Differentiationen nach σ, τ linker Hand ohne weiteres durch Differentiationen unter dem Integralzeichen ausführbar. Aus der ersten Eigenschaft der Parametrix entnehmen wir nun die Gültigkeit von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} p_\sigma &= -p_s + S, \\ p_\tau &= -p_t - T, \end{aligned} \tag{22}$$

wo S, T solche Funktionen von s, t; σ, τ sind, deren erste Ableitungen für $s = \sigma$, $t = \tau$ höchstens von erster Ordnung unendlich werden. Zerlegen wir jetzt wiederum die Oberfläche der Vollkugel in die zwei Teile K_r und k_r und setzen dann in dem über k_r zu erstreckenden Integral die letzteren Ausdrücke für p_σ, p_τ aus (22) ein, so entstehen bei geeigneter Anwendung der Produktintegration (partiellen Integration) Integralausdrücke, bei denen eine nochmalige Differentiation nach σ, τ unmittelbar durch Differentiation unter dem Integralzeichen möglich ist. Der Grenzübergang zu $r = 0$ führt schließlich zu der angegebenen Formel. —

Nunmehr sind wir imstande, das oben bezeichnete Integrationsproblem zu lösen, indem wir den folgenden Satz aufstellen und beweisen.

Satz 44. *Wenn die homogene Differentialgleichung*

$$L(z) = 0 \tag{23}$$

keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung besitzt, so hat die Differentialgleichung

$$L(z) = f, \tag{24}$$

wo f irgendeine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine stetige Lösung; die adjungierte Differentialgleichung

$$M(z) = 0 \tag{25}$$

läßt in diesem Falle gewiß keine Lösung zu.

Besitzt dagegen die homogene Differentialgleichung (23) *Lösungen, so lassen sich aus diesen stets eine gewisse endliche Anzahl, n, linear von einander unabhängiger Lösungen auswählen, so daß jede Lösung von* (23) *eine lineare Kombination derselben wird; die adjungierte Differentialgleichung* (25) *besitzt in diesem Falle auch genau n linear unabhängige Lösungen, und die Differentialgleichung* (24) *ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f die n Integralbedingungen*

$$\int f \psi_h \, dk = 0 \qquad (h = 1, 2, 3 \ldots n) \tag{26}$$

erfüllt, wo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ jene linear voneinander unabhängigen Lösungen von (25) *bedeuten.*

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß die Differentialgleichung (23) keine Lösung besitzt. Eine Lösung z der Differentialgleichung (24) muß wegen (20) die Integralgleichung

$$\int \{pf - zM(p)\} \, dk = -z(\sigma\tau)$$

oder

$$\int zM(p) dk - z(\sigma\tau) = \int pf dk \tag{27}$$

befriedigen; der Kern $M(p)$ dieser Integralgleichung ist der ersten Bemerkung auf S. 225 zufolge eine solche Funktion von s, t, σ, τ, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Die Gesetze über die Auflösung von Integralgleichungen sind, wie bereits Fredholm gezeigt hat, in diesem Falle in gleicher Weise gültig, wie wenn der Kern eine durchweg stetige Funktion wäre. Andrerseits läßt sich auch, ähnlich wie dies auf S. 217—218 geschehen ist, zeigen, daß eine Lösung der Integralgleichung (27) beliebig oft stetig differenzierbar ist, falls diese Annahme für f zutrifft.

Nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen hängt die Lösbarkeit der Integralgleichung (27) von der Beschaffenheit der entsprechenden homogenen Integralgleichung

$$\int zM(p) dk - z(\sigma\tau) = 0 \tag{28}$$

ab. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen dieser homogenen Integralgleichung sei N, und die Lösungen seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$. Wegen (20) haben wir dann

$$\int p L(\Phi_h) dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N),$$

oder wenn

$$\mathsf{X}_h = L(\Phi_h) \qquad (h = 1, \ldots, N) \tag{29}$$

gesetzt wird,

(30) $$\int p \mathsf{X}_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N),$$

d. h. die N Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ genügen, für z eingesetzt, der Gleichung

(31) $$\int p z dk = 0,$$

und wegen (21) sind sie demnach auch Lösungen der homogenen Integralgleichung

(32) $$\int z \mathsf{M}(p) dk - z(\sigma\tau) = 0.$$

Diese homogene Integralgleichung ist aber diejenige, die aus der homogenen Integralgleichung (28) entsteht, wenn man in deren Kern die Argumente s, t mit den Parametern σ, τ vertauscht. Nun sind die N Funktionen X_h voneinander linear unabhängig, da ja sonst wegen (29) eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung (23) existieren müßte. Nach den allgemeinen Sätzen über Integralgleichungen besitzt die Integralgleichung mit dem transponierten Kern $\mathsf{M}(p)$ genau ebenso viele linear unabhängige Lösungen wie die ursprüngliche; es ist mithin jede Funktion z, die der Gleichung (31) genügt, da sie dann auch (32) erfüllt, notwendig in der Gestalt

$$z = C_1 \mathsf{X}_1 + \cdots + C_N \mathsf{X}_N$$

darstellbar, wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten.

Da hiernach die N Funktionen X_h die sämtlichen Lösungen der homogenen Integralgleichung (32) ausmachen, so sind nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (27) die folgenden

$$\int\int \mathsf{X}_h(\sigma\tau) p f(st) dk d\varkappa = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

wo die Vollkugel sowohl bei der Integration nach dem Argumentpunkt s, t, als auch bei der Integration nach dem Parameterpunkt σ, τ als Integrationsgebiet zu nehmen ist. Da aber wegen (30) diese Bedingungen stets erfüllt sind, so besitzt (27) stets eine Lösung; es sei φ^* diese Lösung, so daß

(33) $$\int \varphi^* M(p) dk - \varphi^*(\sigma\tau) = \int p f dk$$

wird. Setzen wir dann andererseits in (20) $z = \varphi^*$ ein und addieren die so entstehende Gleichung zu (33), so ergibt sich

$$\int p \{ L(\varphi^*) - f \} dk = 0.$$

Wegen der vorhin gefundenen Tatsache folgt hieraus

$$L(\varphi^*) - f = C_1 \mathsf{X}_1 + \cdots + C_N \mathsf{X}_N,$$

wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstanten sind. Wegen (29) ist demnach

$$\varphi = \varphi^* - C_1 \Phi_1 - \cdots - C_N \Phi_N$$

eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir erkennen nunmehr auch leicht, daß (25) keine von Null verschiedene Lösung besitzt. Wäre nämlich ψ eine solche Lösung und bestimmen wir dann — was nach dem eben Bewiesenen stets möglich ist — eine Funktion φ derart, daß

$$L(\varphi) = \psi$$

ist, so wird aus (15) für $w = \psi$, $z = \varphi$ die Gleichung

$$\int \psi^2 dk = 0,$$

die nicht statthaben kann, da ja ψ nicht identisch verschwinden sollte. Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes bezeichnen wir mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein vollständiges System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (23). Sodann betrachten wir wiederum die inhomogene Integralgleichung (27) und die zu ihr zugehörige homogene Integralgleichung (28). Die letztere läßt, wie aus (20) sofort folgt, die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zu. Außer diesen n Lösungen und deren linearen Kombinationen kann die Integralgleichung (28) noch weitere Lösungen besitzen; unter diesen wählen wir ein System untereinander und von den Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linear unabhängiger Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ derart aus, daß alle Lösungen von (28) durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_N$ linear darstellbar sind. Wir bilden nun, wie vorhin beim Beweise des ersten Teils unseres Satzes, die N Funktionen

$$(34) \qquad \mathsf{X}_h = L(\Phi_h) \qquad (h = 1, \ldots, N);$$

dieselben genügen, wie aus (20) folgt, den Gleichungen

$$(35) \qquad \int p \mathsf{X}_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

und sind demnach, für z eingesetzt, wegen (21) auch Lösungen der homogenen Integralgleichung (32). Die N Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ sind voneinander linear unabhängig, da sonst entgegen unserer Annahme aus (34) sofort das Bestehen einer linearen Relation zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ folgen würde.

Da die homogene Integralgleichung (28) genau $n + N$ linear unabhängige Lösungen besitzt, so muß nach der allgemeinen Theorie die Integralgleichung (32) mit dem transponierten Kern ebenfalls genau $n + N$ linear unabhängige Lösungen besitzen, d. h. außer den Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ gibt es noch genau n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$, die ebenfalls der Integralgleichung (32) genügen und mit $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ zusammen ein volles System von $n + N$ Lösungen der Integralgleichung (32) bilden.

Die n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$ denken wir uns nun durch geeignete lineare Kombinationen ihrer selbst derart ersetzt, daß gerade für die ν Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ die Gleichungen

$$\int p\chi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu) \tag{36}$$

statthaben und überdies, falls wir aus den übrigen $n - \nu$ Funktionen $\chi_{\nu+1}, \ldots, \chi_n$ die $n - \nu$ Funktionen

$$\psi_h = \int p\chi_h dk \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n)$$

bilden, diese $n - \nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch linear voneinander unabhängig ausfallen. Wegen (21) sind $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ Lösungen der Differentialgleichung (25).

Nunmehr nehmen wir an, daß der zu beweisende Satz für alle Fälle, in denen die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung kleiner als n ausfällt, bereits als richtig erkannt sei; dann folgt, daß die Differentialgleichung (25) mindestens n linear unabhängige Lösungen besitzen muß; denn wäre ihre Anzahl kleiner als n, so würde unser Satz, auf (25) angewandt, aussagen, daß die zu (25) adjungierte Differentialgleichung (23) nur ebensoviel, gewiß also nicht n linear unabhängige Lösungen besitzen könnte, wie wir doch gegenwärtig vorausgesetzt haben. Es ist hiernach gewiß möglich zu den $n - \nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch ν weitere Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ hinzuzufügen, derart, daß die Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ein System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (25) bilden.

Aus (15) folgt sofort, daß, wenn die Differentialgleichung (24) lösbar sein soll, notwendig die Integralbedingungen (26) erfüllt sein müssen. Andererseits besitzt die inhomogene Integralgleichung (27) der allgemeinen Theorie zufolge gewiß eine Lösung, wenn die $n + N$ Bedingungen

$$\int\int X_h(\sigma\tau) pf(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N), \tag{37}$$

$$\int\int \chi_h(\sigma\tau) pf(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu), \tag{38}$$

$$\int\int \chi_h(\sigma\tau) pf(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n) \tag{39}$$

bestehen. Nun sind aber wegen (35), (36) die Gleichungen (37), (38) für jede Funktion f erfüllt und die Gleichungen (39) erhalten die Gestalt

$$\int f\psi_h dk = 0 \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n). \tag{40}$$

Bedeutet also f eine diesen $n - \nu$ Bedingungen (40) genügende Funktion, so gibt es gewiß eine Funktion $z = \varphi^*$, die der Integralgleichung (27) genügt. Addieren wir diese Gleichung zu derjenigen, die aus (20) für $z = \varphi^*$ entsteht, so erhalten wir

$$\int p\{L(\varphi^*) - f\} dk = 0, \tag{41}$$

und hieraus entnehmen wir wie vorhin

$$L(\varphi^*) - f = c_1\chi_1 + \cdots + c_n\chi_n + C_1X_1 + \cdots + C_NX_N,$$

wo $c_1, \ldots, c_n$, $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten. Setzen wir aber diesen Ausdruck für $L(\varphi^*) - f$ in (41) ein, so folgt sofort mit Rücksicht auf (35), (36) wegen der linearen Unabhängigkeit der $n - \nu$ Funktionen ψ_h, daß

$$c_{\nu+1} = 0, \ldots, c_n = 0$$

sein muß. Wegen (34) befriedigt mithin

$$\varphi = \varphi^* - C_1 \Phi_1 - \cdots - C_N \Phi_N$$

die Differentialgleichung

$$L(\varphi) = f + c_1 \chi_1 + \cdots + c_\nu \chi_\nu. \tag{42}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die weiteren der Funktion f aufzuerlegenden ν Bedingungen

$$\int f \psi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu) \tag{43}$$

notwendig

$$c_1 = 0, \ldots, c_\nu = 0 \tag{44}$$

zur Folge haben. Zu dem Zwecke setzen wir in (15) $w = \psi_h$ $(h = 1, \ldots, \nu)$ und $z = \varphi$; dann erhalten wir wegen (42)

$$\int \psi_h f dk + c_1 \int \psi_h \chi_1 dk + \cdots + c_\nu \int \psi_h \chi_\nu dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu)$$

oder

$$a_{h1} c_1 + \cdots + a_{h\nu} c_\nu = A_h' \qquad (h = 1, \ldots, \nu), \tag{45}$$

wenn zur Abkürzung

$$\int \psi_h f dk = - A_h \qquad (h = 1, \ldots, \nu),$$

$$\int \psi_h \chi_l dk = \quad a_{hl} \qquad (h, l = 1, \ldots, \nu)$$

gesetzt ist. Da wir nun offenbar durch geeignete Wahl der Funktion f unter Wahrung der Bedingungen (40) den Größen A_h beliebige Werte erteilen können und nach dem eben Bewiesenen die Gleichungen (45) für alle solchen A_h Lösungen $c_1, \ldots, c_\nu$ haben, so muß die Determinante der Größen a_{hk} notwendig von Null verschieden sein. Legen wir daher der Funktion f noch die weiteren ν Bedingungen (43) auf, d. h. nehmen wir

$$A_1 = 0, \ldots, A_\nu = 0,$$

so folgt aus (45) notwendig (44), d. h. wegen (42) ist φ eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Um den Beweis unseres Satzes zu vollenden, bleibt nur noch übrig zu bemerken, daß die Gleichung (25) auch nicht mehr als n linear unabhängige Lösungen haben kann. In der Tat, gäbe es noch eine von $\psi_1, \ldots, \psi_n$ linear unabhängige Lösung von (25), etwa ψ_{n+1}, so würde, wie aus (15) sofort folgt, die Gleichung

$$\int f \psi_{n+1} dk = 0$$

noch eine weitere notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (24) darstellen, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Für die weitere Entwicklung unserer Theorie ist eine Bemerkung über die Beschaffenheit der Funktion f wichtig. Wenn nämlich f in (24) eine nicht durchweg stetige Funktion ist, so bleiben bei geeigneten Voraussetzungen dennoch alle bisher angestellten Überlegungen gültig: es sei etwa f eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t auf der Kugel, die überall stetig ist mit Ausnahme der Stelle $s = \sigma$, $t = \tau$, wo sie von der ersten Ordnung unendlich wird. Um bei dieser Annahme den Charakter der Lösung z der Integralgleichung (24) an der Stelle σ, τ festzustellen, bedenken wir, — wie dies aus der Fredholmschen Methode der inhomogenen Integralgleichung ersichtlich ist — daß für die Beurteilung des Verhaltens jener Lösung z von (24) das Verhalten der rechten Seite der Integralgleichung (27) den Ausschlag geben muß. Nun ist diese rechte Seite, wie man durch eine leichte Untersuchung feststellen kann, bei der über f gemachten Annahme eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t, die an der Stelle σ, τ stetig ist und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden; den gleichen Charakter an der Stelle σ, τ zeigt also in diesem Falle die Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir wollen dieses Ergebnis zur Konstruktion der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $L(z)$ anwenden; dabei sei der Kürze halber $L(z)$ als ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck vorausgesetzt.

Es sind wie im obigen Satze 44 (S. 226—227) zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Differentialgleichung (23) stetige Lösungen besitzt oder nicht. In letzterem Falle ist jederzeit eine geeignet gewählte Lösung der Integralgleichung (27), wenn wir darin $f = L(p)$ nehmen, zugleich die Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = L(p).$$

Bezeichnen wir diese Lösung mit φ, so befriedigt offenbar die Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi$$

die Differentialgleichung (23); G heiße *die Greensche Funktion des Differentialausdruckes* $L(z)$. Aus den obigen Darlegungen über das Verhalten der Lösung φ an der Stelle σ, τ erkennen wir, daß die Greensche Funktion G an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeit besitzt, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (23) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt.

Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st)$$

folgt in der üblichen Weise[1]) mit Benutzung des Umstandes, daß der Differentialausdruck $M(z)$ nach Voraussetzung mit $L(z)$ identisch ausfällt.

Nunmehr nehmen wir im Gegenteil an, die Differentialgleichung (23) besitze genau n voneinander linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; wir denken uns dieselben derart normiert, daß die Orthogonalitätsrelationen

$$\int \varphi_h \varphi_l \, dk = 0 \qquad (h, l = 1, \ldots, n, h \neq l),$$
$$\int \varphi_h^2 \, dk = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

gelten. Nehmen wir dann

$$f(st) = L(p) - \varphi_1(\sigma\tau)\varphi_1(st) - \cdots - \varphi_n(\sigma\tau)\varphi_n(st),$$

so erfüllt f, wie aus (20) sofort zu ersehen ist, die n Bedingungen

$$\int f \varphi_h \, dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

und nach dem Früheren besitzt mithin die Differentialgleichung (24) eine Lösung $z = \varphi$, die an der Stelle σ, τ stetig ausfällt und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden. Wir setzen nunmehr

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi - \int (p - \varphi)\varphi_1 \, dk \cdot \varphi_1 - \cdots - \int (p - \varphi)\varphi_n \, dk \cdot \varphi_n;$$

dann erfüllt G die n Integralbedingungen

$$(46) \qquad \int G(st, \sigma\tau)\varphi_h(st) \, dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

und genügt überdies der Differentialgleichung

$$(47) \qquad L(G) = \varphi_1(\sigma\tau)\varphi_1(st) + \cdots + \varphi_n(\sigma\tau)\varphi_n(st).$$

G heiße die Greensche Funktion (im erweiterten Sinne) des Differentialausdruckes $L(z)$. Die Greensche Funktion G besitzt an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeitsstelle, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (47) und den Integralbedingungen (46) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt. Auch gilt für sie das Symmetriegesetz

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st).$$

Endlich zeigt man in üblicher Weise, daß stets vermittels der Greenschen Funktion die Lösung der Differentialgleichung (24) durch die Formel

$$(48) \qquad z = -\int G f(\sigma\tau) \, d\varkappa$$

---

1) Vgl. den Beweis dieses Symmetriegesetzes im Falle einer Variabeln, wie er in Kapitel VII S. 45 angedeutet worden ist.

geliefert wird, und zwar in dem zuletzt erörterten Falle diejenige Lösung, die die n Orthogonalitätsrelationen

(49) $$\int z\varphi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

erfüllt.

Nachdem im Vorstehenden die Theorie der Integration der linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus auf der Kugel erledigt worden ist, soll nunmehr die in Kapitel I—VI und XIV dargelegte Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und zwar die der orthogonalen Integralgleichungen auf die lineare Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda z = 0$$

angewandt werden, wo $L(z)$ einen sich selbst adjungierten elliptischen Differentialausdruck auf der Kugel bedeutet. Die Greensche Funktion $G(st, \sigma\tau)$ dieses Differentialausdrucks $L(z)$ wird nach dem Obigen symmetrisch in bezug auf den Argumentpunkt s, t und den Parameterpunkt σ, τ der Kugel. Unsere Theorie liefert nun, wenn wir $G(st, \sigma\tau)$ als Kern einer orthogonalen Integralgleichung auf der Kugel nehmen, folgende Sätze:

Es gibt gewiß einen oder beliebig viele Werte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und zugehörige Funktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ auf der Kugel, so daß

(50) $$\psi^{(m)}(st) = \lambda^{(m)} \int G(st, \sigma\tau) \psi^{(m)}(\sigma\tau) d\varkappa$$

wird, die sogenannten *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* des Kerns G; die letzteren besitzen die Orthogonalitätseigenschaft.

Jede Funktion, die sich bei geeigneter Wahl der Funktion $g(\sigma\tau)$ in der Gestalt

(51) $$f(st) = \int G(st, \sigma\tau) g(\sigma\tau) d\varkappa$$

darstellen läßt, ist in eine auf Fouriersche Weise gebildete Reihe nach den Eigenfunktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ entwickelbar:

(52) $$f = c_1\psi^{(1)} + c_2\psi^{(2)} + \cdots,$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten von f in bezug auf das Orthogonalsystem $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ bedeuten.

Wir stellen nunmehr die Bedeutung der Bedingung (51) fest. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die n zueinander orthogonalen Integrale der Gleichung

$$L(z) = 0,$$

dann muß wegen (46) jede in der Gestalt (51) darstellbare Funktion f die n Bedingungen

(53) $$\int \varphi_h(st) f(st) dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

erfüllen. Umgekehrt ist jede diesen n Bedingungen genügende mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion f in der Gestalt (51) darstellbar.

Setzen wir nämlich $g = -L(f)$, so genügt, wie aus (15) folgt, die Funktion g den n Bedingungen

$$\int \varphi_h g \, dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

und daher wird nach (48)

$$f^* = \int G(st, \sigma\tau) g(\sigma\tau) \, d\varkappa$$

eine den Bedingungen (49) genügende Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = g(st).$$

Da aber diese Gleichung nur eine diesen n Bedingungen genügende Lösung besitzen kann, so ist genau $f^* = f$ und mithin f in der Gestalt (51) darstellbar. Aus (50) und (46) schließen wir leicht, daß

$$\int \varphi_h \psi^{(l)} \, dk = 0$$

ausfällt; mithin bilden die Funktionen

(54) $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$$

ein System von Orthogonalfunktionen auf der Kugel.

Wir setzen

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0, \ \lambda_{n+1} = \lambda^{(1)}, \ \lambda_{n+2} = \lambda^{(2)}, \ldots$$
$$\varphi_{n+1} = \psi^{(1)}, \ \varphi_{n+2} = \psi^{(2)}, \ldots$$

und bezeichnen *die Konstanten* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *als die Eigenwerte und die Funktionen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *als die zugehörigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung*

(55) $$L(z) + \lambda z = 0,$$

da sie das volle System stetiger Lösungen dieser Differentialgleichung bilden. Nach dem Obigen ergibt sich sofort:

Satz 45. *Jede mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel läßt sich in der Fourierschen Weise in eine nach den Eigenfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *fortschreitende Reihe entwickeln; die Anzahl der Eigenwerte und der Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (55) *ist mithin unendlich.*

Wir gehen nun dazu über, das zur Differentialgleichung (55) gehörige Dirichletsche Variationsproblem aufzustellen und zu untersuchen.[1]) Da der Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}(z) = a z_{ss} + 2 b z_{st} + c z_{tt} + l z_s + m z_t + n z$$

als sich selbst adjungiert angenommen worden ist, so haben wir

$$a_s + b_t = l,$$
$$b_s + c_t = m,$$

1) Vgl. die den Fall einer Variabeln betreffenden analogen Entwicklungen in Kapitel VII, S. 57f.

und es gilt die Identität

$$z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t, \tag{56}$$

wo

$$\mathfrak{A}(z) \equiv a z_s^2 + 2b z_s z_t + c z_t^2 - n z^2$$

der zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck und

$$\mathfrak{P} \equiv z(a z_s + b z_t),$$
$$\mathfrak{Q} \equiv z(b z_s + c z_t)$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Nebenausdrücke heißen mögen. Führen wir in $\mathfrak{A}(z)$ an Stelle von s, t neue Variable s', t' ein, so heiße der durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante

$$s_{s'} t_{t'} - s_{t'} t_{s'}$$

entstehende Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{A}(z)$; ferner mögen die Ausdrücke

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} t_{t'} - \mathfrak{Q} s_{t'},$$
$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P} t_{s'} + \mathfrak{Q} s_{s'},$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heißen. Es besteht dann die Tatsache:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck, und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Nebenausdrücke.

Aus der Differentialformel (56) ergibt sich durch Integration über ein Gebiet G mit der Randkurve R die Integralformel

$$\iint\limits_{(G)} \{z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = \int\limits_{(R)} (\mathfrak{P}\, dt - \mathfrak{Q}\, ds),$$

und indem wir diese — entsprechend wie wir oben auf S. 222—223 beim Beweise der Formel (15) verfahren — auf die zwei Hälften der Vollkugel anwenden, gelangen wir auf Grund der eben gewonnenen Tatsache zu der Formel

$$\iint \{z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = 0,$$

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Setzen wir nun — entsprechend wie oben S. 222 bei der Definition des Ausdruckes $L(z)$ —

$$A(z) = \frac{\mathfrak{A}(z)}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{\mathfrak{A}'(z)}{\sqrt{e'g' - f'^2}},$$

so ist, — ebenso wie oben der Ausdruck $L(z)$ —, der quadratische Differentialausdruck $A(z)$ eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel definiert, und, wenn z eine Funktion des Ortes auf der Kugel bedeutet, so stellt $A(z)$ einen von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t unabhängigen Wert dar. Durch Einführung von $L(z)$ und $A(z)$ nimmt die obige Integralformel die Gestalt an

$$\int \{zL(z) + A(z)\} dk = 0,$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist. Das Integral

$$D(z) = \int A(z) dk = -\int z L(z) dk \tag{57}$$

heiße das zu $L(z)$ gehörige *Dirichletsche Integral.* Durch Variation von (57) erhalten wir leicht mit Rücksicht auf (15)

$$\delta D(z) = -2 \int L(z) \delta z dk.$$

Wegen (16) ist, wenn wir noch $a > 0$ annehmen, gewiß stets

$$a z_s^2 + 2 b z_s z_t + c z_t^2 \geqq 0.$$

Bestimmen wir sodann eine solche Konstante C, die überall auf der Kugel die Werte der Funktion

$$\frac{n}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{n'}{\sqrt{e'g' - f'^2}}$$

übertrifft, so ist gewiß für alle Funktionen z

$$A(z) + Cz^2 \geqq 0$$

und folglich auch

$$\int \{A(z) + Cz^2\} dk = \int \{-zL(z) + Cz^2\} dk \geqq 0.$$

Insbesondere ergibt sich hieraus für $z = \varphi_h$ mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$L(\varphi_h) = -\lambda_h \varphi_h,$$
$$\int \varphi_h^2 dk = 1$$

die Ungleichung

$$\lambda_h + C \geqq 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_h \geqq -C,$$

d. h. *es gibt zur Differentialgleichung* (55) *nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte.*

Wir denken uns die Eigenwerte von (55) der Größe nach geordnet, so daß λ_1 der kleinste wird und allgemein

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$$

ist.

Das zur Differentialgleichung (55) gehörige Variationsproblem lautet nun: man soll eine Funktion z auf der Kugel derart bestimmen, daß $D(z)$ zum Minimum wird, während die Nebenbedingung

$$\int z^2 dk = 1 \tag{58}$$

erfüllt ist. Zur Lösung dieses Problems setzen wir an

$$z = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots.$$

Wegen

$$D(z) = -\int z L(z) dk$$

wird

$$D(z) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots,$$

während die Nebenbedingung (58) die Gestalt

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots = 1$$

erhält. Daraus entnehmen wir sofort den

Satz 46. *Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ bei der Nebenbedingung* (58) *ist gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1 der Differentialgleichung* (55) *und wird für $z = \varphi_1$ angenommen, wo φ_1 die zu λ_1 gehörige Eigenfunktion von* (55) *bedeutet. Werden zu der Nebenbedingung* (55) *noch die weiteren $h-1$ Nebenbedingungen*

$$\int \varphi_1 z dk = 0, \quad \ldots, \quad \int \varphi_{h-1} z dk = 0$$

hinzugefügt, so ist λ_h der Minimalwert von $D(z)$; derselbe wird für $z = \varphi_h$ angenommen.

Als einfachstes Beispiel für die vorstehende Theorie können die bereits in Kapitel VIII behandelten Kugelfunktionen dienen.

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir noch folgenden Satz, welcher besonders für die Anwendungen dieser Theorie von Wichtigkeit ist.

Satz 47. *Wenn die Koeffizienten des linearen Differentialausdruckes $L(z)$ für alle innerhalb und auf die Grenzen des Intervalles*

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$$

fallenden Werte von μ regulär analytische Funktionen eines Parameters μ sind, und wenn für eben diese Werte μ auch stets die Ungleichung (16) *gilt, so ist allemal der h-te Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.*

Da nach den oben bewiesenen Sätzen für jeden besonderen Wert $\mu = \mu_0$ stets λ_h eine endliche und eindeutig bestimmte Größe darstellt, so kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß λ_h als Funktion von μ an der Stelle $\mu = \mu_0$ auch stetig ausfällt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit $L_0(z)$ den Differentialausdruck $L(z)$ für $\mu = \mu_0$ und nehmen zunächst der Kürze halber an, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L_0(z) + \lambda z = 0 \tag{59}$$

sämtlich positiv ausfallen, so daß die Differentialgleichung

$$L_0(z) = 0$$

gewiß keine stetige Lösung besitzt; es sei G_0 die zu $L_0(z)$ gehörige Greensche Funktion, ferner p die nach der Vorschrift auf S. 224—225 konstruierte von μ abhängige Parametrix für $L(z)$, und endlich bedeute

p_0 den aus p für $\mu=\mu_0$ entstehenden Ausdruck, so daß p_0 zugleich die nach jener Vorschrift gebildete Parametrix für L_0 ist.

Um nun die Greensche Funktion für $L(z)$ zu bilden, wenden wir das oben S. 232f. eingeschlagene Verfahren an, indem wir in (27) an Stelle der dort mit p bezeichneten Parametrix den Ausdruck

$$p^* = p + G_0 - p_0$$

nehmen, der ebenfalls die Eigenschaften einer Parametrix für $L(z)$ besitzt. Die so aus (27) entstehende Integralgleichung

$$\int z L(p^*) dk - z(\sigma\tau) = \int p^* f dk \tag{60}$$

besitzt den Kern

$$\begin{aligned} K(st,\sigma\tau) &= L(p^*) = L(p) + L(G_0 - p_0) \\ &= L(p) + L_0(G_0 - p_0) + (\mu-\mu_0)\bar{L}(G_0-p_0), \end{aligned} \tag{61}$$

wo $\bar{L}$ einen gewissen noch vom Parameter μ abhängigen Differentialausdruck zweiter Ordnung bedeutet. Da $G_0 - p_0$ eine Funktion von $s, t; \sigma, \tau$ ist, deren zweite Ableitungen für $s=\sigma$, $t=\tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden, so stellt $\bar{L}(G_0-p_0)$ eine Funktion dar, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\tau)^2+(t-\tau)^2}$ gewiß absolut genommen für alle $s, t; \sigma, \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. Andererseits ist, wenn wir

$$L(p) + L_0(G_0-p_0) = L(p) - L_0(p_0) = (\mu-\mu_0)\bar{\bar{L}}$$

setzen, $\bar{\bar{L}}$ ebenfalls eine Funktion, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\sigma)^2+(t-\tau)^2}$ absolut genommen gewiß für alle $s, t; \sigma, \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt — da ja $L(p)$ für $s=\sigma$, $t=\tau$ nur höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird und $L_0(p_0)$ den Wert von $L(p)$ für $\mu=\mu_0$ bedeutet. Wegen (61) ist demnach auch

$$K(st,\sigma\tau) = (\mu-\mu_0)\bar{K}(st,\sigma\tau),$$

wo $\bar{K}$ eine Funktion ist, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\sigma)^2+(t-\tau)^2}$ absolut genommen für alle $s, t; \sigma, \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. Infolge der letzteren Eigenschaft erkennt man, daß der aus $\bar{K}$ gebildete dreifach zusammengesetzte Kern $\bar{K}\bar{K}\bar{K}$ eine stetige Funktion von $s, t; \sigma, \tau$ wird, deren absolute Werte für alle $s, t; \sigma, \tau$ unterhalb einer von μ abhängigen Schranke bleiben. Hieraus wiederum folgt, daß der aus K gebildete dreifach zusammengesetzte Kern KKK ebenfalls stetig ist und überdies für ihn eine positive Zahl ε gefunden werden kann derart, daß die absoluten Werte von KKK für alle $s, t; \sigma, \tau$ kleiner als $\frac{1}{2}$ bleiben, sobald nur μ innerhalb des durch die Ungleichung

$$|\mu-\mu_0| \leq \varepsilon \tag{62}$$

bestimmten Intervalles bleibt. Die so gefundene Tatsache bedingt, daß unter dieser einschränkenden Bedingung (62) für μ die inhomogene Integralgleichung

$$\int z K dk - z(\sigma\tau) = F(\sigma\tau)$$

stets nach der Neumannschen Methode lösbar ist, und daß die Lösung z gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig wird, während die entsprechende homogene Integralgleichung

$$\int z K dk - z(\sigma\tau) = 0$$

keine Lösung besitzt. Wenden wir dieses Resultat auf die Integralgleichung (60) für $f = L(p^*)$ an, so erkennen wir, daß dieselbe, falls μ der Bedingung (62) genügt, gewiß eine und nur eine Lösung φ besitzt, und daß diese Lösung für $\mu = \mu_0$ gleichmäßig für alle s, t; σ, τ gegen Null konvergiert — da ja p^* für $\mu = \mu_0$ in G_0 und demnach $L(p^*)$ für $s, t \neq \sigma, \tau$ in Null übergeht. Nach dem von uns befolgten Verfahren ist

$$G = p^* - \varphi$$

die Greensche Funktion von $L(z)$, falls μ der Bedingung (62) genügt. Hieraus folgt wegen der eben erkannten Beschaffenheit von φ, daß der aus G zweifach zusammengesetzte Kern GG gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig ausfällt. Bilden wir daher nach Fredholm den Nenner der lösenden Funktion für die Integralgleichung

$$\lambda \int z\, G G\, dk - z(\sigma\tau) = F(\sigma\tau),$$

so erkennen wir, daß diese beständig konvergente Potenzreihe in λ überdies gleichmäßig für alle der Bedingung (62) genügenden Werte von μ konvergiert. Da andererseits die Nullstellen dieser Potenzreihe sämtlich reell, und zwar die Eigenwerte des Kerns GG sind, diese aber nichts anderes als die Quadrate der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind, so folgt, daß allgemein der $h$te Eigenwert λ_h^2 sich stetig in μ ändert; das gleiche gilt mithin auch von λ_h, solange μ auf das Intervall (62) beschränkt bleibt.

Trifft die zu Anfang dieser Beweisführung gemachte Annahme, wonach die Eigenwerte der Differentialgleichung (59) sämtlich positiv ausfallen, nicht zu, so bezeichnen wir mit λ_1^0 den kleinsten Eigenwert von $L_0(z)$; sodann setzen wir

$$L^*(z) = L(z) + (\lambda_1^0 - 1)z,$$
$$L_0^*(z) = L_0(z) + (\lambda_1^0 - 1)z.$$

Die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L^*(z) + \lambda z = 0$$

sind offenbar

$$\lambda_h - \lambda_1^0 + 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

und diejenigen von

$$L_0^*(z) + \lambda z = 0$$

sind daher sämtlich ≥ 1; folglich läßt sich unsere bisherige Betrachtung auf den Differentialausdruck $L^*(z)$ anwenden und lehrt, daß allgemein $\lambda_h - \lambda_1^0 + 1$ und mithin auch λ_h sich in der Umgebung von μ_0 stetig mit μ ändert.

Da μ_0 willkürlich gewählt werden kann, so ist damit der Beweis des aufgestellten Satzes vollständig erbracht.

Endlich sei noch bemerkt, daß die eben entwickelte Theorie sich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda q z = 0 \tag{63}$$

übertragen läßt, wenn q eine beliebige überall positive (oder negative) Funktion auf der Kugel bedeutet. Es ist nämlich leicht ersichtlich, daß der Differentialausdruck

$$L^*(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} L\left(\frac{z}{\sqrt{q}}\right)$$

wiederum sich selbst adjungiert ist, und durch Einführung dieses Differentialausdruckes erhält die Differentialgleichung (63) die vorhin der Untersuchung zugrunde liegende Gestalt

$$L^*(z) + \lambda z = 0.$$

Wir führen die wesentlichen Sätze über die Differentialgleichung (63) hier kurz, wie folgt, an.

Satz 48. *Die Differentialgleichung* (63) *besitzt unendlichviele Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, *von denen jedoch nur eine endliche Anzahl negativ ausfällt. Die zu diesen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen besitzen die Orthogonalitätseigenschaft*

$$\int q\varphi_h\varphi_l\,dk = 0 \qquad (h \neq l),$$
$$\int q\varphi_h^2\,dk = 1.$$

Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f *auf der Kugel läßt sich nach den zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *auf Fouriersche Weise wie folgt*

$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots \qquad \left(c_h = \int q f \varphi_h\,dk\right)$$

entwickeln.

Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ *bei den Nebenbedingungen*

$$\int q z^2\,dk = 1,$$
$$\int q\varphi_1 z\,dk = 0, \quad \ldots, \quad \int q\varphi_{h-1} z\,dk = 0$$

ist λ_h; *dasselbe wird für* $z = \varphi_h$ *angenommen.*

Hängen die Koeffizienten in $L(z)$ von einem Parameter μ analytisch ab und denken wir uns für jeden Wert von μ die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der Größe nach geordnet, so ist allgemein der $h$te Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.

Neunzehntes Kapitel.

Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.

Der folgende Abschnitt enthält eine Neubegründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche. Der Gedanke, die Kugel der gewöhnlichen Raumgeometrie als Ort der Punkte gleicher Entfernungen von einem festen Punkte durch eine beliebige konvexe Fläche, die sogenannte „Eichfläche," zu ersetzen, bildet die Grundlage der arithmetischen Untersuchungen Minkowkis.[1]) Die mehr geometrische Verfolgung dieses Gedankens hat ihn zu dem fundamentalen Begriffe des gemischten Volumens V_{123} von drei Körpern geführt[2]), und den Kernpunkt seiner Theorie von Volumen und Oberfläche bildet dann die Entdeckung der Ungleichung

$$V_{112}{}^2 \geqq V_{111} V_{122},$$

einer Ungleichung, welche lediglich quadratischen Charakter besitzt, während der Beweis derselben von Minkowski auf Grund einer kubischen Ungleichung geführt wird. Die nachfolgende neue Begründung der Minkowskischen Theorie geschieht mittels der im vorigen Abschnitt entwickelten Sätze über die lineare sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung auf der Kugel, und insbesondere der Nachweis jener quadratischen Ungleichung gelingt hierbei direkt auf Grund der Minimaleigenschaft des Dirichletschen Integrals. Insofern gerade allein die quadratische Ungleichung es ist, die sich eines direkten Beweises mittels der Theorie der linearen Differentialgleichungen fähig erweist — die kubische Ungleichung erscheint als leichte Folge der quadratischen —, scheint mir die Bedeutung der Minkowskischen Entdeckung durch den hier folgenden Beweis noch in helleres Licht gesetzt, und zugleich liefert diese Begründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche ein glänzendes Beispiel für die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen.

Im folgenden wollen wir allgemein unter einer homogenen Funktion νten Grades der Variabeln x, y, z eine solche Funktion $W(x, y, z)$ verstehen, die für alle positiven Werte von μ der Gleichung

$$W(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^{\nu} W(x, y, z)$$

1) Vgl. meinen Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, Nr. 4. Gött. Nachr. 1900.

2) Vgl. meine Gedächtnisrede auf Minkowski. Gött. Nachr. 1909, S. 16—17.

genügt. Ist insbesondere W eine homogene Funktion ersten Grades und werden wieder partielle Ableitungen durch Indizes bezeichnet, so gelten die Identitäten

$$x W_x + y W_y + z W_z = W, \tag{64}$$

$$\left\{\begin{aligned} x W_{xx} + y W_{yx} + z W_{zx} &= 0, \\ x W_{xy} + y W_{yy} + z W_{zy} &= 0, \\ x W_{xz} + y W_{yz} + z W_{zz} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Aus den Identitäten (65) folgt leicht

$$\frac{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2}{z^2} = \frac{W_{yy} W_{zz} - W_{yz}^2}{x^2},$$

und hieraus entnehmen wir, wenn V irgendeine andere homogene Funktion ersten Grades in x, y, z bedeutet, die weitere Identität

$$\frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2} = \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (W, V) &= \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2} \\ &= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{zx} V_{zx} + W_{xx} V_{zz}}{y^2} \\ &= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}. \end{aligned} \tag{66}$$

Es sei nunmehr im XYZ-Raum ein konvexer Körper gegeben, der den Nullpunkt im Inneren enthält; wir bezeichnen die Entfernung des Nullpunktes von derjenigen Tangentialebene dieses Körpers, deren Normale die Richtungskosinus α, β, γ besitzt, mit $\mathsf{H}(\alpha, \beta, \gamma)$ und denken uns die so bestimmte Funktion H auf der Kugel mit dem Radius 1 ausgebreitet. Wir nehmen an, daß H eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion des Parameters auf der Kugeloberfläche sei. Die Gleichung jener Tangentialebene ist

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \mathsf{H}$$

oder, wenn wir

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$H(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \mathsf{H}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

setzen,

$$x X + y Y + z Z = H(x, y, z),$$

wo H eine homogene Funktion ersten Grades in x, y, z ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Differentiation nach x, y, z sofort die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangentialebene als homogene Funktionen nullten Grades von x, y, z, wie folgt:

$$X = H_x, \quad Y = H_y, \quad Z = H_z;$$

diese Gleichungen liefern zugleich eine Parameterdarstellung der Oberfläche des Körpers.

Bezeichnen wir mit S ein ganz auf der oberen Hälfte $z > 0$ der Einheitskugel verlaufendes Gebiet und lassen wir in den Gleichungen

$$X = \mu H_x, \quad Y = \mu H_y, \quad Z = \mu H_z$$

den Faktor μ die Werte 0 bis 1 und x, y, z alle Punkte von S durchlaufen, so durchläuft der Punkt X, Y, Z denjenigen Raumteil Q, der durch einen gewissen Kegel mit der Spitze im Nullpunkte aus unserem konvexen Körper ausgeschnitten wird. Um das Volumen von Q zu berechnen, führen wir statt der Koordinaten X, Z, Y die Variabeln

$$\mu, \; s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

ein und erhalten dann

$$V_Q = \iiint\limits_{(Q)} dX\,dY\,dZ = \iiint\limits_{\substack{(S)\\(\mu = 0, \ldots, 1)}} \Delta\, d\mu\, ds\, dt,$$

wo die Funktionaldeterminante den Wert

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ \mu H_{xs}, & \mu H_{ys}, & \mu H_{zs} \\ \mu H_{xt}, & \mu H_{yt}, & \mu H_{zt} \end{vmatrix} = \mu^2 z^2 \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ H_{xx}, & H_{yx}, & H_{zx} \\ H_{xy}, & H_{yy}, & H_{zy} \end{vmatrix}$$

besitzt. Multiplizieren wir nun in der letzten Determinante die Elemente der ersten Vertikalreihe mit $\frac{x}{z}$, die der zweiten mit $\frac{y}{z}$ und addieren sie dann zur dritten, so erhalten wir mit Rücksicht auf (64), (65), genommen für $W = H$,

$$\Delta = \mu^2 z H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}{}^2),$$

und demnach wird bei Ausführung der Integration nach μ

$$V_Q = \tfrac{1}{3} \iint\limits_{(S)} H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}{}^2) z\, ds\, dt.$$

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist für die Kugel bei Verwendung der Parameter s, t

(67) $$\sqrt{eg - f^2} = z^3,$$

und demnach drückt sich das Oberflächenelement dk der Einheitskugel durch die Koordinaten s, t wie folgt aus

$$dk = z^3 ds\, dt;$$

wir erhalten daher schließlich

$$(68)\qquad \begin{aligned} V_Q &= \tfrac{1}{3}\int\limits_{(S)} H\,\frac{H_{xx}H_{yy}-H_{xy}{}^2}{z^2}\,dk \\ &= \tfrac{1}{6}\int\limits_{(S)} H(H,H)\,dk. \end{aligned}$$

Da nun (H, H), wie aus der Definition (66) hervorgeht, überall auf der Kugel wohl definiert ist, so läßt sich in (68) jetzt das Integral über die ganze Oberfläche der Einheitskugel ausdehnen, und wir erhalten das Gesamtvolumen unseres konvexen Körpers in der Gestalt

$$V = \tfrac{1}{6}\int H(H,H)\,dk.$$

Ist Ω eine willkürliche Funktion auf der Einheitskugel, so stellt

$$W(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Omega(x,y,z)$$

eine willkürliche homogene Funktion ersten Grades von x, y, z dar. Nach (66) ist

$$\begin{aligned} (W,H) &= \frac{1}{x^2}\,(W_{yy}H_{zz} - 2\,W_{yz}H_{yz} + W_{zz}H_{yy}), \\ &= \frac{1}{y^2}\,(W_{zz}H_{xx} - 2\,W_{zx}H_{zx} + W_{xx}H_{zz}), \\ &= \frac{1}{z^2}\,(W_{xx}H_{yy} - 2\,W_{xy}H_{xy} + W_{yy}H_{xx}), \end{aligned}$$

und da hier der erste Ausdruck rechter Hand überall auf der Kugel für $x \neq 0$, der zweite für $y \neq 0$, der dritte für $z \neq 0$ definiert ist, so erkennen wir, daß

$$L(\Omega) = (W, H)$$

im Sinne der Festsetzung zu Beginn des vorigen Kapitels XVIII ein auf der Kugel regulärer linearer Differentialausdruck ist; derselbe ist durch die Funktion H eindeutig bestimmt. Es gilt ferner

Satz 49. *Der lineare Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel ist sich selbst adjungiert und von elliptischem Typus.*

Um die erstere Behauptung zu beweisen, denken wir uns wie vorhin auf einem Teilgebiet S der Kugel als krummlinige Koordinaten die Variabeln

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

eingeführt und wollen dann den zu $L(\Omega)$ gehörigen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(\Omega)$ in den Variabeln s, t aufstellen. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß in unserem Ausdrucke (W, H) die Differentiationen nach x, y, z so zu verstehen sind, daß dabei x, y, z drei unabhängige Variabele sind. Nun gewinnen wir W, H aus den Ω, H, indem wir diese als Funktionen der krummlinigen Koordinaten s, t auf dem Teilgebiet S der Kugel auffassen, durch die Formeln

$$\begin{aligned}
W(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\Omega \\
&= z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t), \\
H(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathsf{H} \\
&= z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t),
\end{aligned}$$

und da hiernach

$$\begin{aligned}
W_{xx} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{ss}, \\
W_{xy} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{st}, \\
W_{yy} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{tt}, \\
H_{xx} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{ss}, \\
H_{xy} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{st}, \\
H_{yy} &= \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{tt}
\end{aligned}$$

wird, so gelangen wir schließlich mit Rücksicht auf (67) zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
(69) \qquad \mathfrak{L}(\Omega) &= \sqrt{eg - f^2}\,L(\Omega) = z^3(W, H) \\
&= \sqrt{1 + s^2 + t^2}\Big\{\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{ss}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{tt} \\
&\qquad - 2\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{st}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{st} \\
&\qquad + \left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{tt}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{ss}\Big\}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir in dem allgemeinsten linearen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(z)$ (S. 220) — unter α irgendeine Funktion von s, t verstanden —

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_{tt}, \quad & b &= -\alpha_{st}, \quad & c &= \alpha_{ss}, \\
l &= 0, & m &= 0, & n &= 0,
\end{aligned}$$

so sind die Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{L}(z)$ sich selbst adjungiert ist, nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
l &= a_s + b_t, \\
m &= b_s + c_t,
\end{aligned}$$

erfüllt; demnach ist der Ausdruck

$$\alpha_{tt} z_{ss} - 2\alpha_{st} z_{st} + \alpha_{ss} z_{tt}$$

und folglich mit Rücksicht auf eine S. 241 gemachte Bemerkung auch der Ausdruck (69) sich selbst adjungiert; das gleiche gilt mithin nach unserer Festsetzung auch für den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel.

Um ferner den elliptischen Charakter des Differentialausdruckes $L(\Omega)$ zu erkennen, haben wir offenbar den Nachweis der Ungleichung

$$(70) \qquad H_{xx} H_{yy} - H_{xy}{}^2 > 0$$

nötig. Nach den Überlegungen, wie wir sie zu Anfang dieses Kapitels XIX (S. 243) angestellt haben, wurden die Tangentialebenen unseres konvexen Körpers durch die Gleichung

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z)$$

dargestellt. Dividieren wir diese Gleichung durch z und führen dann

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

ein, so erhält jene Gleichung die Gestalt

$$sX + tY + Z = H(s, t, 1),$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} X &= H_s, \\ Y &= H_t, \\ Z &= H - sH_s - tH_t. \end{aligned}$$

Wie wir hieraus ersehen, ist der Übergang von der Darstellung der Oberfläche unseres Körpers durch Punktkoordinaten, wobei Z als Funktion der unabhängigen Variabeln X, Y betrachtet wird, zu der Darstellung durch Ebenenkoordinaten, wobei H als Funktion der unabhängigen Variabeln s, t betrachtet wird, nichts anderes als die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen übliche Legendresche Transformation. Die Theorie der Legendreschen Transformation lehrt bekanntlich, daß zwischen den Ableitungen zweiter Ordnung die Gleichung

$$H_{ss} H_{tt} - H_{st}^2 = \frac{1}{Z_{XX} Z_{YY} - Z_{XY}^2}$$

gilt, und da wegen der Konvexität unserer Fläche der Nenner des Bruches rechter Hand positiv ausfällt, so folgt das gleiche für die linke Seite, und mithin gilt auch die Ungleichung (70).

Wir sind nunmehr in der Lage, die allgemeine Theorie des vorigen Kapitels XVIII auf den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ anzuwenden. Was zunächst das Integrationsproblem betrifft (vgl. den allgemeinen S. 226—227 aufgestellten Satz 44), so bedarf es zu dessen Erledigung vor allem der Kenntnis der folgenden wichtigen Tatsache:

Satz 50. *Jede stetige Lösung der homogenen Differentialgleichung auf der Kugel*

$$L(\Omega) = 0 \tag{71}$$

ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

Zum Beweise nehmen wir an, es sei ω eine stetige Funktion auf der Kugel, die der Differentialgleichung (71) genügt. Setzen wir sodann

$$w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\omega\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

so wird w eine homogene Funktion ersten Grades von x, y, z, die der Gleichung

$$(w, H) = 0$$

und daher wegen (66) auch als Funktion der drei unabhängigen Variabeln x, y, z den Gleichungen

$$(72)\qquad \begin{cases} w_{yy}H_{zz} - 2w_{yz}H_{yz} + w_{zz}H_{yy} = 0, \\ w_{zz}H_{xx} - 2w_{zx}H_{zx} + w_{xx}H_{zz} = 0, \\ w_{xx}H_{yy} - 2w_{xy}H_{xy} + w_{yy}H_{xx} = 0 \end{cases}$$

genügt. Es sei jetzt x_1, y_1, z_1 eine Stelle auf der Einheitskugel, an der die Funktion w_x den kleinsten Wert auf der Kugel annimmt. Da w_x homogen vom nullten Grade ist, so wird dieser kleinste Wert k zugleich auch das Minimum der Funktion w_x im Raume für die drei unabhängigen Variabeln x, y, z. Wir setzen

$$\xi = x - x_1,$$
$$\eta = y - y_1,$$
$$\zeta = z - z_1$$

und entwickeln w_x in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe wie folgt

$$(73)\qquad w_x = k + N(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

hier bezeichne N die in der Entwicklung vorkommenden Glieder niedrigster Dimension, und n sei der Grad dieses homogenen Ausdruckes N in ξ, η, ζ: dabei ist die Annahme gemacht, daß w_x nicht konstant sei. Da w_x an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ein Minimum haben soll, so ist N notwendig eine definite Form: es gilt für alle ξ, η, ζ die Ungleichung

$$N(\xi, \eta, \zeta) \geqq 0.$$

Andererseits entwickeln wir auch w in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe, wie folgt

$$(74)\qquad w = c + l(\xi, \eta, \zeta) + M(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

dabei bezeichne c eine Konstante, l die homogenen linearen Glieder und endlich M die nächst den linearen in der Entwicklung vorkommenden Glieder niedrigster Dimension; m sei der Grad dieses homogenen Ausdruckes M in ξ, η, ζ.

Wir bezeichnen nun die Werte der Ausdrücke

$$H_{xx},\ H_{yy},\ H_{zz},\ H_{yz},\ H_{zx},\ H_{xy}$$

für $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ d. h. $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ bzw. mit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu,\ \nu;$$

dann ergibt sich, indem wir (74) in die beiden letzten Gleichungen (72) einführen, durch Berücksichtigung der Glieder niedrigster Dimension

$$(75)\qquad \begin{cases} M_{\zeta\zeta}\alpha - 2M_{\zeta\xi}\mu + M_{\xi\xi}\gamma = 0, \\ M_{\xi\xi}\beta - 2M_{\xi\eta}\nu + M_{\eta\eta}\alpha = 0. \end{cases}$$

Es werde erstens angenommen, daß M ein Glied mit der Variabeln ξ enthält: alsdann lehrt der Vergleich von (73) mit (74), daß

$$N = M_{\xi}$$

wird, und daraus wiederum ersehen wir, indem wir (75) nach ξ differenzieren, daß auch N denselben Gleichungen

$$(76)\qquad N_{\zeta\zeta}\alpha - 2N_{\zeta\xi}\mu + N_{\xi\xi}\gamma = 0,$$

$$(77)\qquad N_{\xi\xi}\beta - 2N_{\xi\eta}\nu + N_{\eta\eta}\alpha = 0$$

genügt. Wir setzen nun

$$(78)\qquad N = N_h\zeta^h + Z \qquad (0 \leqq h \leqq n),$$

wo N_h eine nicht identisch verschwindende Funktion vom $n-h$-ten Grade in ξ, η und Z eine Funktion von ξ, η, ζ ist, die den Faktor ζ^{h+1} enthält. Indem wir diesen Ausdruck für N in (77) einführen, erkennen wir, daß auch N_h der Gleichung (77) genügen muß.

Wegen der Konvexität der durch H dargestellten Fläche gelten für die Konstanten α, β, γ, μ, ν die Ungleichungen

$$\alpha\gamma - \mu^2 > 0,$$
$$\alpha\beta - \nu^2 > 0;$$

die letztere zeigt, daß jede nicht konstante Lösung der partiellen Differentialgleichung (77) notwendig eine indefinite Funktion d. h. eine solche Funktion von ξ, η ist, die sowohl positive wie negative Werte annimmt. Wenn aber N_h indefinit wäre, so wäre wegen (78) auch N gewiß bei genügend kleinen Werten von ζ sowohl positiver, wie negativer Werte fähig, was dem oben festgestellten definiten Charakter von N widerspricht. Demnach müßte N_h notwendig eine nicht verschwindende Konstante und zugleich

$$h = n, \quad N = N_n\zeta^n$$

sein. Die Einsetzung dieses Wertes für N in (76) lehrt aber, da $\alpha \neq 0$ ist, die Unmöglichkeit hiervon.

Es bleibt also noch die zweite Annahme zu untersuchen übrig, daß M nur von ξ, η abhängt. Die Einführung von $M_{\xi} = 0$ in (75) lehrt

$$M_{\zeta\zeta} = 0, \quad M_{\eta\eta} = 0$$

d. h.

$$(79)\qquad M = C\eta\zeta,$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Nun genügt w als homogene Funktion ersten Grades in x, y, z der Identität

$$xw_x + yw_y + zw_z = w$$

d. h.

$$(x_1 + \xi)w_\xi + (y_1 + \eta)w_\eta + (z_1 + \zeta)w_\zeta = w$$

oder unter Berücksichtigung von (73), (74), (79)

$$(80)\quad (x_1 + \xi)(k + N + \cdots) + (y_1 + \eta)(l_\eta + C\zeta + \cdots) + (z_1 + \zeta)(l_\zeta + C\eta + \cdots) = c + l + C\eta\zeta + \cdots.$$

Sammeln wir auf beiden Seiten dieser Identität die Glieder erster Ordnung in ξ, η, ζ, so ergibt sich

$$\xi k + y_1 C\zeta + \eta l_\eta + z_1 C\eta + \zeta l_\zeta = l,$$

und wegen

$$k = l_\xi, \quad \xi l_\xi + \eta l_\eta + \zeta l_\zeta = l$$

folgt

$$y_1 C\zeta + z_1 C\eta = 0,$$

d. h.

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

und folglich

$$x_1 = \pm 1.$$

Durch Einführung dieser Werte verwandelt sich (80) in

$$(\pm 1 + \xi)(k + N + \cdots) + \eta(l_\eta + C\zeta + \cdots) + \zeta(l_\zeta + C\eta + \cdots) = c + l + C\eta\zeta + \cdots$$

und wenn wir hierin die Glieder zweiten Grades auf beiden Seiten sammeln, so wird, je nachdem der Grad n von N gleich 2 oder größer als 2 ausfällt, die Gleichung

$$\pm N + C\eta\zeta + C\eta\zeta = C\eta\zeta$$

oder die Gleichung

$$C\eta\zeta + C\eta\zeta = C\eta\zeta$$

erfüllt sein müssen. Die letztere Gleichung ist unmöglich; die erstere ergibt

$$N = \mp C\eta\zeta,$$

was dem definiten Charakter von N widerspricht.

Damit ist unsere ursprüngliche Annahme widerlegt: in der Entwicklung (73) darf ein Glied N nicht auftreten, d. h. w_x ist eine Konstante. Da in gleicher Weise auch w_y und w_z Konstanten sein müssen, so folgt, daß w nichts anderes als eine lineare Kombination der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus dem eben Bewiesenen folgt auf Grund des in Kapitel XVIII (S. 226—227) aufgestellten Satzes 44:

Satz 51. *Die inhomogene Differentialgleichung auf der Kugel*

$$L(\Omega) = f,$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f auf der Kugel die drei Integralbedingungen

$$\int f x \, dk = 0,$$
$$\int f y \, dk = 0,$$
$$\int f z \, dk = 0$$

erfüllt.

Nehmen wir in $L(\Omega)$ insbesondere

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so wird

$$L(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2}\{(1 - y^2) W_{xx} + 2xy W_{xy} + (1 - x^2) W_{yy}\} \qquad (z \neq 0);$$

da, wie eine einfache Rechnung lehrt, der Ausdruck rechts hier nichts anderes als die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien der durch W gegebenen Fläche darstellt, so geht in diesem Falle unser allgemeiner Satz in einen bekannten von A. Hurwitz[1]) aufgestellten und mittelst der Theorie der Kugelfunktionen bewiesenen Satz über.

Dem obigen Ausdruck V (S. 245) für das Volumen eines konvexen Körpers stellt Minkowski einen allgemeineren für das gemischte Volumen von drei konvexen Körpern zur Seite: sind H_1, H_2, H_3 die diese Körper bestimmenden homogenen Funktionen ersten Grades, so definiert Minkowski das gemischte Volumen dreier Körper durch das über die ganze Einheitskugel zu erstreckende Integral

$$V(H_1, H_2, H_3) = V_{123} = \tfrac{1}{6}\int H_1(H_2, H_3) dk.$$

Setzen wir in Formel (15)

$$w = H_1, \quad z = H_2$$

und berücksichtigen, daß unser Differentialausdruck

$$L(\Omega) = (W, H_3)$$

sich selbst adjungiert ist, so zeigt dieselbe unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\int H_1(H_2, H_3) dk = \int H_2(H_1, H_3) dk$$

d. h. es ist

$$V_{123} = V_{213},$$

und da offenbar auch

$$V_{123} = V_{132}$$

wird, so findet sich damit der Minkowskische Satz bestätigt, *daß das gemischte Volumen dreier Körper bei den Permutationen derselben seinen Wert beibehält.*

1) Vgl. Ann. Ec. Norm. Sup. 19 (1902), S. 404.

Da überall auf der Kugel

$$\mathsf{H} > 0, \quad (H, H) > 0$$

ausfällt, so ist auch $\frac{(H, H)}{\mathsf{H}}$ eine durchweg positive Funktion, und daher läßt sich unsere Theorie der partiellen Differentialgleichung auf der Kugel, wie sie in dem zum Schlusse des Kapitels XVIII S. 241—242 ausgesprochenen Satze 48 gipfelt, auf die Differentialgleichung

$$L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0 \tag{81}$$

anwenden. Aus jenem allgemeinen Satze entnehmen wir unmittelbar, daß diese Gleichung nur endlichviele negative, dagegen unendlichviele positive Eigenwerte hat. Nach dem vorhin Bewiesenen wissen wir ferner, daß $\lambda = 0$ ein dreifacher Eigenwert ist. Außerdem sehen wir, daß $\lambda = -1$ jedenfalls ein Eigenwert jener Differentialgleichung und $\Omega = \mathsf{H}$ eine zugehörige Eigenfunktion ist. Wir wollen nunmehr zeigen, daß $\lambda = -1$ nur ein einfacher Eigenwert ist und außer ihm keine weiteren negativen Eigenwerte vorhanden sind. Zu dem Zwecke führen wir in (81)

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ein; wegen

$$(R, R) = 2$$

erhalten wir so die speziellere Differentialgleichung

$$L_0(\Omega) + 2\lambda\Omega = 0, \tag{82}$$

wo

$$L_0(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2}\{(1 - y^2) W_{xx} + 2xy W_{xy} + (1 - x^2) W_{yy}\} \quad (z \neq 0) \tag{83}$$

ist.

Diese Differentialgleichung ist mit der Differentialgleichung der Kugelfunktionen identisch. Bezeichnet nämlich V eine homogene Funktion h-ten Grades, die der Potentialgleichung

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \tag{84}$$

genügt, und setzen wir

$$V = R^{h-1} W,$$

so wird

$$V_{xx} = R^{h-1} W_{xx} + 2(h-1) x R^{h-3} W_x + \{(h-1) R^{h-3} + (h-1)(h-3) x^2 R^{h-5}\} W.$$

Addieren wir hierzu die entsprechenden Ausdrücke für V_{yy}, V_{zz} und berücksichtigen dann die Identitäten (64), (65) — entsprechend dem Umstande, daß W eine homogene Funktion ersten Grades ist —, so erhalten wir auf der Kugel wegen $R = 1$ die Gleichung

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + (h-1)(h+2) W.$$

Nun ist wegen (65) für $R = 1$

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = \frac{1}{z^2}\{(1-y^2)\,W_{xx} + 2xy\,W_{xy} + (1-x^2)\,W_{yy}\},$$

und mithin geht wegen (83) die Potentialgleichung (84) über in die Differentialgleichung

$$(W, R) + (h-1)(h+2)\,W = 0,$$

oder wenn

$$W = R\Omega$$

gesetzt wird, in

$$L_0(\Omega) + (h-1)(h+2)\Omega = 0.$$

Die Theorie der Kugelfunktionen lehrt, daß diese Gleichung keine anderen auf der Kugel stetigen Lösungen zuläßt als eben jene aus den homogenen Potentialen von den Graden

$$h = 0, 1, 2, \ldots$$

entspringenden Funktionen Ω, und da die Potentialgleichung (84) genau $2h+1$ solche Lösungen h-ten Grades besitzt, so folgt, daß die Differentialgleichung (82) allgemein für $h = 0, 1, 2, \ldots$ die Größe

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(h-1)(h+2)$$

als $2h+1$ fachen Eigenwert besitzt. Für $h = 0$ erhalten wir $\lambda = -1$, für $h = 1$ ergibt sich $\lambda = 0$ als dreifacher Eigenwert, womit sich das vorhin für die allgemeine Differentialgleichung (81) gefundene Resultat bestätigt. Darüber hinaus aber erkennen wir die wichtige Tatsache, daß die spezielle Differentialgleichung (82) den Eigenwert $\lambda = -1$ als einfachen Eigenwert besitzt, und daß, von diesem Werte und $\lambda = 0$ abgesehen, alle übrigen Eigenwerte positiv ausfallen, daß insbesondere der kleinste positive Eigenwert $\lambda = 2$ (für $h = 2$) wird.

Es ist nun leicht vermöge des Satzes 47 über die stetige Änderung der Eigenwerte bei stetiger Änderung eines Parameters in der Differentialgleichung (S. 238) die eben gefundene Tatsache auf die allgemeine Differentialgleichung (81) zu übertragen.

Wegen (70) hat die in t quadratische Gleichung

$$H_{xx}t^2 + 2H_{xy}t + H_{yy} = 0$$

keine reelle Wurzel, und da das gleiche von der quadratischen Gleichung

$$R_{xx}t^2 + 2R_{xy}t + R_{yy} = 0$$

gilt, so besitzt auch die Gleichung

$$(\mu H_{xx} + (1-\mu)R_{xx})t^2 + 2(\mu H_{xy} + (1-\mu)R_{xy})t + \mu H_{yy} + (1-\mu)R_{yy} = 0,$$

wo μ einen reellen auf das Intervall

$$0 \leqq \mu \leqq 1 \tag{85}$$

beschränkten Parameter bedeutet, keine reelle Wurzel t, und demnach ist

$$(\mu H_{xx} + (1-\mu) R_{xx})(\mu H_{yy} + (1-\mu) R_{yy}) - (\mu H_{xy} + (1-\mu) R_{xy})^2 > 0;$$

d. h. die sämtlichen durch die Funktionenschar

$$H_\mu = \mu H + (1-\mu) R$$

dargestellten Flächen sind konvex; mithin gelten die vorhin für $L(\Omega)$ entwickelten Tatsachen auch für den Differentialausdruck

$$L_\mu(\Omega) = (W, H_\mu)$$

und für die Differentialgleichung

$$L_\mu(\Omega) + \lambda \frac{(H_\mu, H_\mu)}{H_\mu} \Omega = 0. \tag{86}$$

Die Differentialgleichung (86) geht für $\mu = 0$ in (82), für $\mu = 1$ in (81) über. Die Differentialgleichung (82) besitzt, wie wir sahen, vom kleinsten an der Größe nach geordnet, die folgenden Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2.$$

Die Heranziehung des vorhin genannten Satzes über die stetige Änderung der Eigenwerte (S. 238) und die Berücksichtigung des Umstandes, daß $\lambda = 0$ für alle Werte des Parameters μ genau ein dreifacher Eigenwert sein muß, zeigt, daß, während μ das Intervall (85) durchläuft, der fünfte Eigenwert stets positiv bleiben muß, insbesondere auch für $\mu = 1$. Wir fassen die gefundenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Satz 52. *Die partielle Differentialgleichung* (81) *auf der Kugel besitzt $\lambda = -1$ als einfachen Eigenwert: die zugehörige Eigenfunktion ist $\Omega = \mathsf{H}$; ferner ist für sie $\lambda = 0$ ein dreifacher Eigenwert: die zugehörigen Eigenfunktionen auf der Kugel sind x, y, z; die übrigen Eigenwerte sind positiv. Das System der Eigenfunktionen von* (81)

$$\Omega_1 = \mathsf{H}, \quad \Omega_2 = x, \quad \Omega_3 = y, \quad \Omega_4 = z, \quad \Omega_5, \quad \Omega_6, \quad \ldots$$

bildet ein System von Funktionen, welches für $\mathsf{H} = 1$ in das System der Kugelfunktionen übergeht und als die Verallgemeinerung des letzteren anzusehen ist, wenn man im Sinne der Minkowskischen Geometrie die Kugel durch eine beliebige konvexe Fläche ersetzt. Denkt man $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots,$ wie üblich, orthogonal normiert, so ist jede willkürliche zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf der Kugel nach jenen Eigenfunktionen auf Fouriersche Weise entwickelbar wie folgt:

$$f = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 + \cdots, \quad c_h = \int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} f \Omega_h \, dk.$$

Nunmehr sind wir imstande, diejenige fundamentale quadratische Ungleichung zwischen den gemischten Volumina zweier Körper abzuleiten, die bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitte erwähnt worden ist; dieselbe wird uns als Ausfluß der Tatsache erscheinen, daß der fünfte

Eigenwert λ_5 der Differentialgleichung (81) positiv ausfällt. In der Tat, zufolge des am Schlusse des Abschnittes XVIII aufgestellten allgemeinen Satzes ist λ_5 das Minimum des Dirichletschen Integrales

$$D(\Omega) = -\int H(W, W)dk$$

bei den Nebenbedingungen

$$\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega^2 dk = 1, \tag{87}$$

$$\int (H, H)\Omega dk = 0, \tag{88}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} x\Omega dk = 0, \\ &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} y\Omega dk = 0, \\ &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} z\Omega dk = 0. \end{aligned}\right. \tag{89}$$

Es sei nun G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades, die auf der Kugel, für Ω eingesetzt, der Bedingung (88) genügt. Die durch G bestimmte Funktion auf der Kugel bezeichnen wir mit Γ. Wir wählen dann die drei Konstanten a, b, c derart, daß die Funktion

$$\Omega = \Gamma + ax + by + cz \tag{90}$$

auf der Kugel die drei Bedingungen (89) erfüllt. Dies ist gewiß möglich, da im entgegengesetzten Falle solche Konstante a, b, c, die nicht sämtlich Null sind, existieren müßten, daß die lineare Verbindung $ax + by + cz$ für Ω eingesetzt die drei Bedingungen (89) erfüllt; dann aber wäre als Folge davon, wie man sofort sieht, auch

$$\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} (ax + by + cz)^2 dk = 0,$$

und dies ist nicht der Fall, da der Integrand positiv ausfällt.

Wegen

$$\int (H, H)(ax + by + cz)dk = \int H(H, ax + by + cz)dk = 0$$

erfüllt die in (90) dargestellte Funktion Ω auch die Bedingung (88). Ist nun die Funktion Ω nicht identisch für alle Punkte der Kugel Null, — was nur möglich ist, wenn G einer linearen Kombination von x, y, z gleich wird — so können wir sie mit einer Konstanten derart multipliziert denken, daß auch die Bedingung (87) erfüllt wird. Wegen $\lambda_5 > 0$ folgt alsdann $D(\Omega) > 0$. Da aber

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= -\int H(G + ax + by + cz,\ G + ax + by + cz)dk \\ &= -\int H(G, G)dk \end{aligned}$$

wird, so gelangen wir zu dem Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$\int H(G, G)\,dk \leqq 0, \tag{91}$$

wenn G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int G(H, H)\,dk = 0$$

ausfällt, und dabei gilt in jener Ungleichung (91) das Gleichheitszeichen nur, wenn G eine lineare Verbindung der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus dieser Tatsache entnehmen wir, indem wir $G = H - F$ setzen, unmittelbar das weitere Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$\int H(H, H)\,dk \geqq \int H(F, F)\,dk, \tag{92}$$

wenn F eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int H(H, H)\,dk = \int F(H, H)\,dk$$

ausfällt, und dabei gilt in jener Ungleichung (92) das Gleichheitszeichen nur, wenn drei Konstanten a, b, c existieren, derart daß

$$F = H + ax + by + cz \tag{93}$$

wird.

Die Formeln für die Punktkoordinaten X, Y, Z der Fläche, wie sie zu Anfang dieses Abschnittes S. 244 aufgestellt worden sind, lehren, daß, wenn zwei zu konvexen Körpern gehörige Funktionen F, H durch eine Relation der Gestalt (93) mit einander verbunden sind, der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist. Verstehen wir daher unter F eine zu einem konvexen Körper gehörige homogene Funktion ersten Grades, wie es H ist, so spricht sich das vorhin gefundene Resultat auch wie folgt aus: Wenn für zwei konvexe Körper, die durch H, F bestimmt sind,

$$V(H, H, H) = V(H, H, F) \tag{94}$$

ist, so gilt stets die Ungleichung

$$V(H, H, H) \geqq V(H, F, F), \tag{95}$$

und hier hat das Gleichheitszeichen nur statt, wenn der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist.

Nunmehr seien irgend zwei konvexe Körper vorgelegt; die zu ihnen gehörigen Funktionen seien H, G. Wegen $G > 0$ ist die Konstante

$$V(H, H, G) = \tfrac{1}{6}\int G(H, H)\,dk$$

positiv und folglich auch die Funktion

$$F = \frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\,G.$$

Der durch F definierte Körper geht aus dem durch G definierten Körper, wie man sieht, durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor. Da außerdem F offenbar die Bedingung (94) erfüllt, so folgt aus dem Vorigen die Gültigkeit der Ungleichung (95), d. h. es ist

$$V(H, H, H) \geqq \left(\frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\right)^2 V(H, G, G)$$

oder

$$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G). \tag{96}$$

Es gilt mithin der folgende Satz, der den Kernpunkt der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche ausmacht.

Für zwei konvexe Körper besteht stets die quadratische Ungleichung (96), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Durch Vertauschung der beiden Körper folgt aus (96) die Ungleichung

$$V(H, G, G)^2 \geqq V(G, G, G)\, V(H, H, G). \tag{97}$$

Durch Quadrieren von (96) und Multiplikation mit (97) folgt nach Forthebung des positiven Faktors $V(H, G, G)^2\, V(H, H, G)$ die Ungleichung

$$V(H, H, G)^3 \geqq V(H, H, H)^2\, V(G, G, G); \tag{98}$$

d. h. es gilt der Satz:

Für zwei konvexe Körper besteht stets die kubische Ungleichung (98), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Ist wie früher

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so stellt $H + \varepsilon R$ eine Parallelfläche zu dem durch H definierten Körper im Abstande ε dar. Da nun offenbar die Oberfläche O des durch H definierten Körpers

$$O = \underset{\varepsilon = 0}{L} \frac{V(H + \varepsilon R, H + \varepsilon R, H + \varepsilon R) - V(H, H, H)}{\varepsilon}$$

wird, so erhalten wir

$$O = 3\, V(H, H, R) = \tfrac{1}{2} \int (H, H)\, dk.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} V(H, R, R) &= \tfrac{1}{6} \int H\, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int (R, H)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int (\varrho_1 + \varrho_2)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega, \end{aligned}$$

wenn ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der durch H definierten Fläche und $d\omega$ deren Oberflächenelement bedeutet; wir setzen

$$M = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)d\omega$$

und bezeichnen dieses Integral als das Integral der mittleren Krümmung und des konvexen Körpers.

Nehmen wir in den Ungleichungen (96), (97), (98) $G = R$ und nennen V das Volumen des Körpers, so erhalten wir

$$(99)\qquad \begin{cases} O^2 \geqq 3\,VM, \\ M^2 \geqq 4\pi O, \end{cases}$$

$$(100)\qquad O^3 \geqq 36\pi V^2,$$

und in diesen Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn der konvexe Körper aus der Einheitskugel durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgegangen ist, d. h. wenn er selbst eine Kugel ist. Hiernach drücken die Ungleichungen (99), (100) gewisse leicht zu formulierende charakteristische Minimaleigenschaften der Kugel aus. Die Minkowskischen Ungleichungen (96), (98) sind hiernach Verallgemeinerungen solcher Eigenschaften, wie sie in einer Minkowskischen Geometrie gelten, wo statt der Kugel eine beliebige konvexe Fläche als Eichfläche genommen ist.

Zwanzigstes Kapitel.

Anwendung auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen.

In diesem Abschnitte will ich kurz an einem speziellen Beispiele zeigen, wie die orthogonalen Integralgleichungen auch in der Theorie der automorphen Funktionen erfolgreiche Anwendung finden können.

Die nächstliegende Verallgemeinerung der elliptischen Modulfunktion ist die einfachste automorphe Funktion mit reellen Substitutionen, die vier gegebene reelle Werte ∞, a, b, c ausläßt. Die Aufgabe, diese zu konstruieren, führt zu der allgemeineren, in der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den vier singulären Stellen ∞, a, b, c

$$(101)\qquad \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (x+\lambda)\,y = 0, \qquad \begin{Bmatrix} p = (x-a)(x-b)(x-c) \\ a < b < c \end{Bmatrix}$$

den Parameter λ so zu bestimmen, daß der Quotient zweier partikulärer Lösungen bei den Umläufen der komplexen Variabeln x um die singulären Punkte stets Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.

Wir konstruieren nun diejenigen Potenzreihen, die bzw. nach Potenzen von $x-a$, $x-b$, $x-c$ fortschreiten, für $x=a$, $x=b$, $x=c$ den Wert 1 annehmen und in der Umgebung dieser Stellen reguläre analytische

Lösungen der Differentialgleichung (101) darstellen. Diese Potenzreihen sind, wie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung lehrt, durch jene Forderungen eindeutig bestimmt; sie mögen bzw. mit y_a, y_b, y_c bezeichnet werden. Die anderen Lösungen der Differentialgleichungen sind dann in der Umgebung jener Stellen $x = a$, $x = b$, $x = c$ bzw. in der Gestalt

$$\begin{gathered} A y_a \log(x-a) + \mathfrak{P}_a(x-a), \\ B y_b \log(x-b) + \mathfrak{P}_b(x-b), \\ C y_c \log(x-c) + \mathfrak{P}_c(x-c) \end{gathered}$$

darstellbar, wo A, B, C Konstante sind und $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bedeuten. Hieraus folgt, daß insbesondere die Lösung y_a, wenn wir x von a bis b zunehmen lassen, in der Nähe von b für $x < b$ die Darstellung

$$y_a = \beta y_b \log(b-x) + \mathfrak{Q}(x-b) \tag{102}$$

gestattet, wo β eine bestimmte Konstante, $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten bedeutet und der Logarithmus reell zu nehmen ist. Nunmehr setzen wir die Lösung y_a reell über den Punkt b hinaus in der Weise fort, daß wir für $x > b$ unter y_a diejenige Lösung verstehen, die in der Nähe des Punktes b durch die Formel

$$y_a = \beta y_b \log(x-b) + \mathfrak{Q}(x-b)$$

gegeben ist. Sodann stellen wir die Frage, ob der Parameter λ in der Differentialgleichung (101) sich so bestimmen läßt, daß für denselben die in Rede stehende Lösung y_a, wenn x von b aus in den Punkt c hineinwandert, dort endlich bleibt d. h. bis auf einen konstanten Faktor mit y_c übereinstimmt.

Ehe wir diese Frage untersuchen, wollen wir ihre Bedeutung für das vorhin gestellte, die reellen Substitutionen betreffende Problem feststellen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei $\lambda = \lambda_1$ ein Parameterwert, für den die Lösung y_a die obengenannte Eigenschaft besitzt; diese Lösung y_a die wir nunmehr kurz mit y bezeichnen wollen, hat dann die folgenden Eigenschaften: sie ist eine reelle stetige Funktion innerhalb des Intervalles

$$a \leqq x \leqq c$$

einschließlich der Grenzen, mit Ausnahme des Punktes $x = b$, in dessen Nähe sie sich in der Gestalt

$$y = \beta y_b \log|x-b| + \mathfrak{Q}_b(x-b) \tag{103}$$

darstellen läßt. Hierbei ist die Konstante β gewiß nicht Null. Denn in diesem Falle wäre y als Funktion der komplexen Variabeln x in den Punkten a, b, c regulär analytisch und könnte daher auch nicht im Unendlichfernen logarithmisch singulär sein; mit Rücksicht hierauf ergibt sich aber aus der Differentialgleichung, daß für y im Unendlichfernen die Entwicklung

$$y = \frac{C}{x} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (C \neq 0)$$

gilt, d. h. y hätte den unendlichfernen Punkt zur Nullstelle und wäre demnach überall gleich der Konstanten Null, was nicht angeht.

Neben dieser Lösung y betrachten wir nun die bei $x = b$ reguläre Lösung y_b, die nach dem eben Bewiesenen gewiß von Cy, wo C eine Konstante ist, verschieden ausfällt; lassen wir x von b nach a wandern, so wird in der Umgebung von $x = a$

(104) $$y_b = \alpha y \log(x-a) + \mathfrak{Q}_a(x-a) \qquad (x > a),$$

wenn andererseits x auf den Punkt c zu geht, haben wir

$$y_b = \gamma^* y_c \log(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c) \qquad (x < c),$$

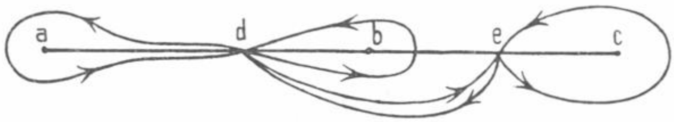
oder da y_c bis auf eine Konstante mit y übereinstimmen muß,

$$y_b = \gamma y \log(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c).$$

Nunmehr untersuchen wir den Quotienten

$$\eta(x) = \frac{y}{i y_b}$$

an einer zwischen a und b gelegenen Stelle d als Funktion der komplexen



Variabeln x: es zeigt sich dann, daß die analytische Funktion $\eta(x)$ beim Umlauf der Variabeln x um eine jede der Stellen a, b, c stets eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten erfährt. In der Tat, bezeichnen wir mit S_a das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt a, so wird

$$S_a y = y;$$

überdies ist wegen (104)

$$S_a y_b = y_b + 2 i\pi \alpha y$$

und folglich

$$S_a \eta = \frac{\eta}{1 - 2\pi\alpha\eta}.$$

Bezeichnet ferner S_b das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt b, so wird wegen (102)

$$S_b y = y + 2 i\pi\beta y_b;$$

überdies ist

$$S_b y_b = y_b$$

und folglich

$$S_b \eta = \eta + 2\pi\beta.$$

Nun lassen wir y von d aus einen Halbumlauf in positivem Sinne um b machen bis zu einem zwischen b und c gelegenen Punkte e, dann einen vollen Umlauf in positivem Sinne um c und alsdann einen Halbumlauf in negativem Sinne um b zum Punkte d zurück: dabei verwandelt sich der Reihe nach y in

$$\begin{aligned} & y + i\pi\beta y_b, \\ & y + i\pi\beta(y_b + 2i\pi\gamma y) = (1 - 2\pi^2\beta\gamma)y + i\pi\beta y_b, \\ & (1 - 2\pi^2\beta\gamma)(y - i\pi\beta y_b) + i\pi\beta y_b, \\ = & (1 - 2\pi^2\beta\gamma)y + 2i\pi^3\beta^2\gamma y_b. \end{aligned}$$

Bei derselben Wanderung der Variabeln x wird aus y_b der Reihe nach

$$\begin{aligned} & y_b, \\ & y_b + 2i\pi\gamma y, \\ & y_b + 2i\pi\gamma(y - i\pi\beta y_b) = 2i\pi\gamma y + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)y_b, \end{aligned}$$

und folglich wird, wenn wir mit S_c das Ergebnis des Umlaufes um c bezeichnen:

$$S_c\eta = \frac{(1 - 2\pi^2\beta\gamma)\eta + 2\pi^3\beta^2\gamma}{-2\pi\gamma\eta + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)}.$$

Wie wir sehen, haben die sämtlichen drei Substitutionen S_a, S_b, S_c reelle Koeffizienten, und wir können auch leicht schließen, daß umgekehrt dieser Umstand, wonach der Quotient zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung (101) beim Umlauf der Variabeln um die singulären Stellen Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt, nur dann eintritt, wenn eine Lösung von den Eigenschaften wie y — Endlichkeit in a, c und logarithmisches Verhalten gemäß (103) in b — vorhanden ist.

Um nun die Frage nach der Existenz der Funktion y in Angriff zu nehmen, beweisen wir zunächst, daß es gewisse Werte von λ gibt, für die die Lösung y_a der Differentialgleichung (101) nach ihrer reellen Fortsetzung gemäß (103) über b hinaus im Punkte c endlich bleibt. Wir beweisen erstens, daß dieses Verhalten gewiß nicht für jeden Wert von λ stattfindet. In der Tat, nehmen wir dies an und bestimmen wir alsdann einen Wert von λ, für den y_a im Punkte b endlich bleibt — nach den Darlegungen des zweiten Abschnittes S. 55 am Beispiel der Kugelfunktion gibt es solcher Werte λ notwendig unendlich viele — so würde für einen Wert von λ die Lösung y_a in allen Punkten a, b, c endlich sein, was nach dem vorhin Bewiesenen nicht zutreffen kann.

Es sei $\lambda = \varkappa$ $(> -c)$ ein Wert von der Art, daß y_a, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, in c nicht endlich bleibt: dann bleibt auch y_c, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, nicht endlich. Aus dem Umstande, daß y_a, y_c Lösungen der Differentialgleichung

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (x + \varkappa)y = 0$$

sind, folgt leicht die Konstanz des Ausdruckes

$$N = p\left(y_a \frac{d y_c}{d x} - y_c \frac{d y_a}{d x}\right)$$

im ganzen Intervall a bis c. Da aber als Folge unserer Annahme über $\varkappa$ der Quotient $\frac{y_a}{y_c}$ nicht konstant ist, so fällt die Konstante N von Null verschieden aus. Setzen wir nun

$$G(x, \xi) = \frac{1}{N} y_a(x) y_c(\xi) \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= \frac{1}{N} y_a(\xi) y_c(x) \qquad (x \geqq \xi),$$

so wird

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = \frac{-1}{p(\xi)},$$

und folglich ist $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(y)$, wenn man als Randbedingungen das Endlichbleiben in a und c und reelle Fortsetzung über b hinweg gemäß (103) verlangt.

Nehmen wir $G(x, \xi)$ als Kern einer Integralgleichung zweiter Art, so führt die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen zu dem Satze:

Satz 53. *Es gibt unendlich viele Werte λ (die Eigenwerte des Problems), so daß die Differentialgleichung* (101) *eine Lösung (die zugehörige Eigenfunktion) besitzt, die bei reeller Fortsetzung über den Punkt b hinweg in den Punkten a und c endlich bleibt; für eben diese Werte λ ist der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung eine analytische Funktion, die beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen der Differentialgleichung Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.*

Die Kennzeichnung der unendlichvielen Eigenfunktionen durch Oszillationseigenschaften, sowie den Zusammenhang mit dem Problem der konformen Abbildung der nullwinkligen Kreisbogenvierecke mit Orthogonalkreis hat F. Klein[1]) untersucht.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem).

Bei allen bisherigen Anwendungen der Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen handelte es sich um Randwertaufgaben für gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, wobei jedesmal ein Parameter λ, sei es in der Differentialgleichung selbst, sei es in der Randbedingung als zu bestimmende Größe auftrat. Im folgenden möchte ich

1) Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 175.

an einem Beispiel zeigen, wie auch im Falle zweier zu bestimmender Parameter λ, μ die Theorie sich als anwendbar erweist.

Es seien für y als Funktion von x und für η als Funktion von ξ zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgelegt von der Gestalt

$$(105)\qquad \frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx}+(\lambda a+\mu b)y=0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

$$(106)\qquad \frac{d\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi}-(\lambda\alpha+\mu\beta)\eta=0 \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2),$$

worin p, a, b Funktionen der unabhängigen Variabeln x und π, α, β Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ bedeuten; diese Funktionen mögen sämtlich der Kürze halber als regulär analytisch angenommen werden, und die Funktionen p, a; π, α mögen überdies die Bedingungen erfüllen:

$$(107)\qquad p(x)>0,\quad a(x)>0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

$$(108)\qquad \pi(\xi)>0,\quad \alpha(\xi)>0 \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2).$$

Alsdann multiplizieren wir die Differentialgleichung (105) mit $\alpha\eta$ und (106) mit ay; durch Addition erhalten wir für die Funktion

$$z(x,\xi)=y(x)\eta(\xi)$$

die partielle Differentialgleichung

$$(109)\qquad \alpha(pz_x)_x+a(\pi z_\xi)_\xi+\mu(\alpha b-a\beta)z=0;$$

dieselbe ist wegen (107), (108) von elliptischem Typus und überdies, wie man leicht erkennt, sich selbst adjungiert. Da das zu dem Differentialausdruck

$$(110)\qquad \alpha(pz_x)_x+a(\pi z_\xi)_\xi$$

gehörige Dirichletsche Integral

$$\int\limits_{x_1}^{x_1}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}(\alpha p z_x^2+a\pi z_\xi^2)\,dx\,d\xi$$

nur positiver Werte fähig ist, so besitzt auch die Greensche Funktion zu (110) definiten Charakter. Endlich ist

$$\alpha b-a\beta=0$$

nur für eine endliche Anzahl analytischer Kurven erfüllt — es sei denn, daß

$$(111)\qquad b(x)=Ca(x),\quad \beta(\xi)=C\alpha(\xi)$$

ausfällt, wo C eine geeignete Konstante bedeutet; dieser Fall (111) ist aber auszuschließen, da ja alsdann die beiden ursprünglichen Differentialgleichungen (105), (106) nur die eine Verbindung $\lambda+C\mu$ der beiden Parameter enthielten.

Wie diese Überlegungen zeigen, erfüllt die partielle Differentialgleichung (109), in der der lineare Parameter μ auftritt, alle Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes, den ich in Kap. XXI, S. 206 ausgesprochen habe. Diesem Satze zufolge besitzt die partielle Differentialgleichung (109) für unendlich viele Werte des Parameters μ, die Eigenwerte, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Lösungen, die zugehörigen Eigenfunktionen z_1, $z_2, \ldots$, deren jede innerhalb des durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2 \end{aligned} \tag{112}$$

bestimmten Rechteckes stetig ist und auf den Seiten dieses Rechteckes verschwindet; nach diesen Eigenfunktionen ist die Entwicklung einer willkürlichen (gewissen Voraussetzungen unterworfenen) Funktion in diesem Rechteck auf die Fouriersche Weise möglich.

Ich betrachte nun die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\left(p\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu_h by + \lambda ay = 0, \tag{113}$$

die aus (105) entsteht, wenn darin für μ der besondere Eigenwert μ_h von (109) eingesetzt wird. Da hierin $p(x)$ und $a(x)$ nach der Voraussetzung (107) positive Funktionen sind, so folgt auf Grund meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen, daß (113) unendlich viele positive Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1^h, \quad \lambda_2^h, \ldots \\ y(x) &= y_1^{(h)}(x), \quad y_2^{(h)}(x), \ldots \end{aligned} \tag{114}$$

besitzt, wenn wir als Randbedingung das Verschwinden für $x = x_1$ und $x = x_2$ nehmen. Entwickeln wir insbesondere die zu μ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109), indem wir sie als Funktion von x betrachten, auf Fouriersche Weise nach den Funktionen $y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \ldots$, so ergibt sich

$$z_h(x, \xi) = \eta_1^{(h)}(\xi) y_1^{(h)}(x) + \eta_2^{(h)}(\xi) y_2^{(h)}(x) + \cdots, \tag{115}$$

wo allgemein

$$\eta_m^{(h)}(\xi) = \int_{x_2}^{x_1} a(x) z_h(x, \xi) y_m^{(k)}(x)\, dx \tag{116}$$

ist.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L^{(h)}(y) \equiv \frac{d\left(p\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} - \mu_h by,$$

$$\Lambda^{(h)}(\eta) \equiv \frac{d\left(\pi\,\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} - \mu_h \beta \eta \cdot$$

dann ist die linke Seite der partiellen Differentialgleichung (109), genommen für $\mu = \mu_h$, identisch mit dem Ausdrucke

$$\alpha L^{(h)}(z) + a \Lambda^{(h)}(z);$$

da z_h eine Lösung von (109) ist, so haben wir

$$\alpha L^{(h)}(z_h) + a \Lambda^{(h)}(z_h) = 0$$

und, wenn wir mit $y_m^{(h)}$ multiplizieren und zwischen den Grenzen x_1 und x_2 nach x integrieren

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha L^{(h)}(z_h) y_m^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} a \Lambda^{(h)}(z_h) y_m^{(h)} dx = 0.$$

Wenden wir hier auf das erste Integral die Greensche Formel an und führen wir sodann mittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Variabeln ξ ein, so erhalten wir

$$\alpha \int_{x_1}^{x_2} L^{(h)}(y_m^{(h)}) z_h dx + \Lambda^{(h)}\left(\int_{x_1}^{x_2} a z_h y_m^{(h)} dx\right) = 0$$

oder, indem wir berücksichtigen, daß

(117) $$L^{(h)}(y_m^{h}) + \lambda_m a y_m^{(h)} = 0$$

wird, und alsdann vermittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Variabeln ξ einführen,

(118) $$\Lambda^{(h)}(\eta^{(h)}) + \alpha \lambda_m \eta_m^{(h)} = 0.$$

Da wegen (116) $\eta_m^{(h)}(\xi)$ eine für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ verschwindende Funktion ist, so wird das Produkt

$$\eta_m^{(h)}(\xi)\, y_m^{(h)}(x)$$

eine auf den Kanten unseres Rechteckes (112) in der $x-\xi$-Ebene verschwindende Funktion; dieselbe genügt, wie aus (117), (118) unmittelbar folgt, der partiellen Differentialgleichung (109) für $\mu = \mu_h$. Andererseits besitzt diese Differentialgleichung gewiß nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, nämlich die zu μ_h gehörigen Eigenfunktionen; mithin dürfen unter den Funktionen zweier Variabeln x, ξ

$$\eta_1^{(h)} y_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)} y_2^{(h)}, \ldots$$

gewiß nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Funktionen vorkommen. Da aber unter den Funktionen der Variabeln x

$$y_1^{(h)},\ y_2^{(h)}, \ldots$$

gewiß keine lineare Abhängigkeit statt hat, so folgt, daß nur eine endliche Anzahl von Funktionen der Variabeln ξ in der Reihe

$$\eta_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)}, \ldots$$

von Null verschieden ist, und die Gleichung (115) zeigt mithin, daß eine jede zu λ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109) sich durch eine endliche Summe von Produkten der Gestalt

$$\eta^{(h)}(\xi)y^{(h)}(x)$$

darstellen läßt, wo jedes einzelne Produkt ebenfalls eine zu μ_h gehörige Eigenfunktion jener partiellen Differentialgleichung (113) ist. Wir denken uns nun in solcher Weise alle zu μ_h gehörigen Eigenfunktionen von (109) durch Produkte dargestellt und alsdann aus den sämtlichen auftretenden Produkten solche ausgewählt, die voneinander linear unabhängig sind und durch die die übrigen Produkte sich linear ausdrücken lassen; die so ausgewählten Produkte bilden nach dem eben Bewiesenen offenbar ein volles System von Eigenfunktionen der partiellen Differentialgleichung (109) für den Eigenwert μ_h.

Die wesentlichsten der bisher gefundenen Resultate fassen wir wie folgt zusammen:

Satz 54. *Ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt* (105), (106) *vorgelegt, für die die Bedingungen* (107), (108) *erfüllt sind, und treten in denselben die zwei Parameter λ, μ nicht bloß in der Verbindung $\lambda + C\mu$ auf — unter C eine Konstante verstanden, — so existieren unendlichviele Paare von Werten λ, μ, für welche die Differentialgleichungen solche simultane Lösungen $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ haben, daß $y_h(x)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles $x_1 x_2$ und ebenso $\eta_h(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $\xi_1 \xi_2$ verschwindet. Eine willkürliche (gewissen Voraussetzungen unterworfene) Funktion der Variabeln x, ξ ist in Fourierscher Weise in eine nach den Produkten $y_h(x)\eta_h(\xi)$ fortschreitende Reihe entwickelbar.*

Ist noch die Bedingung erfüllt, daß die Funktion $\alpha b - a\beta$ innerhalb und auf dem Rande des Rechteckes nirgends verschwindet, so bedarf es zur Behandlung der partiellen Differentialgleichung (109) nur der Theorie der orthogonalen Integralgleichungen, und es ergibt sich dann, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variabeln x, ξ in Fourierscher Weise nach den Produkten der Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (105), (106) entwickelbar ist.

Wir betrachten zum Schluß als Beispiel die Laméscche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1} + \frac{1}{t-e_2} + \frac{1}{t-e_3}\right)\frac{dy}{dt} - \frac{At+B}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}\,y = 0.$$

Wie die Anwendung unseres Theorems zeigt, lassen sich hierin die Parameter A, B auf unendlichviele Weisen so bestimmen, daß die Differentialgleichung eine Lösung y besitzt, die an den Endpunkten eines gegebenen Intervalles $t_1 t_2$ verschwindet und zugleich eine solche, die an den Endpunkten eines anderen Intervalles $\tau_1 \tau_2$ verschwindet — ein Resultat, welches, wie wir sehen, im engsten Zusammenhange mit der Aussage des Kleinschen Oszillationstheorems steht. — Dabei sind die Intervalle $t_1 t_2$ und $\tau_1 \tau_2$ nur der Einschränkung unterworfen, daß sie einander ausschließen und keinen der Punkte e_1, e_2, e_3 enthalten; dagegen ist es für die Gültigkeit meines Theorems nicht nötig anzunehmen, daß die Intervalle durch einen der Punkte e_1, e_2, e_3 getrennt sind. Um dies einzusehen, nehmen wir etwa

$$e_1 < e_2 < e_3 < t_1 < t_2 < \tau_1 < \tau_2$$

an, wählen dann einen zwischen t_2 und τ_1 gelegenen Punkt a und setzen einmal

$$t = a - x \quad (x_1 = a - t_2, \quad x_2 = a - t_1)$$

und andererseits

$$t = a + \xi \quad (\xi_1 = \tau_1 - a, \quad \xi_2 = \tau_2 - a).$$

Nehmen wir endlich

$$\lambda = A, \quad \mu = aA + B,$$

so entstehen aus der Laméschen Gleichung die folgenden:

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{\lambda x - \mu}{4p}\, y = 0, \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

$$\frac{dp\frac{d\eta}{d\xi}}{d\xi} - \frac{\lambda\xi + \mu}{4\pi}\, \eta = 0, \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$$

wo

$$p = \sqrt{(a - x - e_1)(a - x - e_2)(a - x - e_3)},$$

$$\pi = \sqrt{(a + \xi - e_1)(a + \xi - e_2)(a + \xi - e_3)}$$

gesetzt ist. Da x und ξ in ihren Intervallen $x_1 x_2$ bzw. $\xi_1 \xi_2$ stets positiv bleiben, so sind die Bedingungen unseres Theorems erfüllt und damit die Existenz unendlich vieler Parameterpaare A, B von der verlangten Beschaffenheit erwiesen.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Begründung der kinetischen Gastheorie.

In allen bisher erörterten Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen — sei es auf analytische oder geometrische Probleme oder im Gebiete der theoretischen Physik — war es stets eine gewöhnliche oder partielle Differentialgleichung oder ein System von solchen Differentialgleichungen, das uns bei der Aufstellung der Integralgleichung zur Vermittelung diente. Im folgenden mache ich eine neue direkte Anwendung der Theorie der linearen Integralgleichungen, indem ich zeige, daß es eine gewisse lineare Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern ist, die die mathematische Grundlage der kinetischen Gastheorie bildet und ohne deren Erforschung nach den modernen Methoden der Integralgleichungstheorie eine systematische Begründung der Gastheorie unmöglich ist.

Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen und Annahmen ein. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Raumkoordinaten und t die Zeit; ξ, η, ζ seien die Geschwindigkeitskomponenten der Moleküle; die Moleküle seien Kugeln vom Durchmesser σ. Zur Abkürzung werde ferner das Volumenelement im xyz-Raume mit

$$do = dx\,dy\,dz$$

und das Volumenelement in $\xi\eta\zeta$-Raume mit

$$d\omega = d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

bezeichnet. Den gesamten Zustand des Gases sehen wir als gegeben an durch die Funktion F der sieben Argumente ξ, η, ζ, x, y, z, t, wobei die Bedeutung dieser Funktion die ist, daß

$$F\,do\,d\omega$$

die Anzahl der Moleküle angibt, deren Mittelpunktskoordinaten zur Zeit t bzw.

$$\begin{array}{llll} \text{zwischen} & x & \text{und} & x + dx \\ \text{,,} & y & \text{,,} & y + dy \\ \text{,,} & z & \text{,,} & z + dz \end{array}$$

und deren Geschwindigkeitskomponenten zugleich bzw.

$$\begin{array}{llll} \text{zwischen} & \xi & \text{und} & \xi + d\xi \\ \text{,,} & \eta & \text{,,} & \eta + d\eta \\ \text{,,} & \zeta & \text{,,} & \zeta + d\zeta \end{array}$$

liegen oder kurz, die zur Zeit t in do und deren Geschwindigkeitspunkte ξ, η, ζ in $d\omega$ fallen. Wir nennen diese Funktion F die Maxwellsche Fundamentalfunktion.

Es seien ferner $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten eines Punktes der Einheitskugel

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1 \tag{1}$$

und $d\mathfrak{S}$ das Oberflächenelement dieser Einheitskugel. Bringen wir nun zwei Moleküle mit den Geschwindigkeiten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 zum Zusammenstoß derart, daß im Moment ihrer Berührung die Richtungskosinusse ihrer Zentrilinie $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind, so werden die Geschwindigkeiten der beiden Moleküle nach dem Zusammenstoß durch die Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + \mathfrak{x} W, \\ \eta' &= \eta + \mathfrak{y} W, \\ \zeta' &= \zeta + \mathfrak{z} W,\end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \xi_1 - \mathfrak{x} W, \\ \eta_1' &= \eta_1 - \mathfrak{y} W, \\ \zeta_1' &= \zeta_1 - \mathfrak{z} W,\end{aligned} \tag{3}$$

wobei zur Abkürzung

$$W = \mathfrak{x}(\xi_1 - \xi) + \mathfrak{y}(\eta_1 - \eta) + \mathfrak{z}(\zeta_1 - \zeta)$$

gesetzt ist. Diese Formeln (2), (3) stellen eine lineare homogene Transformation der sechs Variabeln $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ dar, die folgende Eigenschaft besitzt:

Satz 1. Die Transformation ist mit ihrer inversen identisch; ihre Determinante ist gleich 1.

Satz 2. Vertauscht man in einem Ausdrucke, welcher $\xi', \eta', \zeta', \xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ enthält, die Größen ξ, η, ζ bzw. mit ξ_1, η_1, ζ_1 und umgekehrt, so vertauschen sich in jenem Ausdrucke gegenseitig ξ', η', ζ' bzw. mit $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$.

Satz 3. Unsere Transformation besitzt die vier Invarianten

$$\begin{aligned}&\xi + \xi_1, \\ &\eta + \eta_1, \\ &\zeta + \zeta_1, \\ &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,\end{aligned}$$

während W bei ihrer Anwendung das Vorzeichen ändert.

Auch setzen wir noch fest, daß, wenn $(\xi\eta\zeta)$ irgend einen Ausdruck in ξ, η, ζ bedeutet, stets die folgenden abkürzenden Bezeichnungen gelten sollen:

$$\begin{aligned}(\xi\eta\zeta)_1 &= (\xi_1\eta_1\zeta_1), \\ (\xi\eta\zeta)' &= (\xi'\eta'\zeta'), \\ (\xi\eta\zeta)_1' &= (\xi_1'\eta_1'\zeta_1');\end{aligned}$$

und endlich definieren wir die Klammersymbole:

$$[F, G] = \tfrac{1}{4}\sigma^2 |W| (F'G_1' + F_1'G' - FG_1 - F_1G)$$

$$[F, F] = \tfrac{1}{2}\sigma^2 |W| (F'F_1' - FF_1)$$

$$[F] = X\frac{\partial F}{\partial \xi} + Y\frac{\partial F}{\partial \eta} + Z\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t};$$

in letzterer Formel bedeuten rechts die Größen X, Y, Z die Komponenten der äußeren auf das Gas wirkenden Kraft, bezogen auf die Masseneinheit; sie sind gegebene Funktionen von x, y, z, t.

Nunmehr lege ich meiner Untersuchung die Maxwell-Boltzmannsche Fundamentalformel

$$\iint [F, F]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = [F] \tag{4}$$

zugrunde; darin ist links die Integration $d\omega_1$ über den gesamten Geschwindigkeitsraum

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1 = -\infty \text{ bis } +\infty$$

und die Integration $d\mathfrak{s}$ über die gesamte Oberfläche der Einheitskugel (1) zu erstrecken. Diese Gleichung (4) muß identisch für alle $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ erfüllt sein: sie stellt eine notwendige Bedingung dafür dar, daß die Funktion F der sieben Argumente $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ die Maxwellsche Fundamentalfunktion unseres einatomigen Gases ist.

Hierzu fügen wir für F noch folgende Bedingungen hinzu:

1. F darf keinenfalls negative Werte annehmen.

2. F muß verschwinden, sobald eines der Argumente ξ, η, ζ positiv oder negativ unendlich wird.

3. F soll für alle Zeiten t endlich und stetig bleiben.

Die Bedingungen 1. und 2. ergeben sich unmittelbar aus der Bedeutung von F; die Bedingung 3. ist der Ausdruck für die Stabilität des Bewegungszustandes unseres Gases.

Um F auf die allgemeinste Weise als Lösung der Gleichung (4) zu bestimmen, könnte der Ansatz dienen:

$$F = F_0 + F_1(t - t_0) + F_2(t - t_0)^2 + \cdots. \tag{5}$$

Da $\frac{\partial F}{\partial t}$ in (4) nur rechter Hand auftritt, so folgen, wenn F_0 eine willkürlich gewählte Funktion von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ ist, aus (4) offenbar in eindeutiger Weise die weiteren Koeffizienten $F_1, F_2, \ldots$ als Funktionen ebendieser sechs Argumente. Durch Abschätzung dieser Koeffizienten werden wir jedoch eine Konvergenz der Potenzreihe (5) nur dann erwarten dürfen, wenn $t - t_0$ absolut genügend klein ausfällt, und solche Lösungen würden der obigen Stabilitätsbedingung 3. widersprechen. Daher verwerfen wir die Entwicklung (5) und erzielen vielmehr die Auflösung dadurch, daß wir einen positiven Parameter λ mittels des Ansatzes

$$F = \frac{G}{\lambda}$$

in die Gleichung (4) einführen und die so entstehende Gleichung

$$\iint (G, G)\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \lambda[G] \tag{6}$$

vermöge der nach Potenzen von λ fortschreitenden Reihe

$$G = \Phi + \Psi\lambda + X\lambda^2 + \cdots \tag{7}$$

lösen — was darauf hinausläuft, in der ursprünglichen Gleichung (4)

$$F = \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + X\lambda + \cdots \tag{8}$$

einzusetzen; dabei bedeuten $\Phi, \Psi, X, \ldots$ zu bestimmende Funktionen der sieben Argumente $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$, von denen jedenfalls die erste Φ noch den obigen Bedingungen 1., 2., 3. zu genügen hat. In dem Potenzreihenansatze (8) erblicke ich die strenge Formulierung des Maxwellschen Gedankens einer sukzessiven Approximation zur Berechnung seiner Fundamentalfunktion F: in der Tat sollen späterhin beim systematischen Aufbau der Gastheorie sukzessive die Abschnitte

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Phi}{\lambda}, \\ \dfrac{\Phi}{\lambda} + \Psi, \\ \dfrac{\Phi}{\lambda} + \Psi + X\lambda, \\ \dots\dots \end{array}\right\} \tag{9}$$

in erster, zweiter, dritter Annäherung usw. als Ersatz an Stelle der Fundamentalfunktion F genommen werden. Die Potenzreihe (8), die die Fundamentalgleichung (4) befriedigt, ist der allgemeinste Ausdruck für die Maxwellsche Fundamentalfunktion eines in stabilem Bewegungszustand befindlichen Gases.

Unsere wichtigste allgemeine Aufgabe besteht darin, die Mannigfaltigkeit aller derjenigen Lösungen der Fundamentalgleichung (4) zu ermitteln, die durch die Potenzreihenentwicklung (8) dargestellt werden.

Zu dem Zwecke tragen wir (7) in (6) ein; dann finden wir durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von λ auf beiden Seiten

$$\iint [\Phi, \Phi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0, \tag{10}$$

$$\iint [\Phi, \Psi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Phi], \tag{11}$$

$$\iint ([\Phi, X] + \tfrac{1}{2}[\Psi, \Psi])\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Psi], \tag{12}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die Gleichung (10) ist bereits von Boltzmann vollständig gelöst worden, wie folgt. Wegen Satz 1. und Satz 2. auf S. 269 haben wir, wenn H ebenso wie F und G Funktionen der Argumente ξ, η, ζ bedeuten:

$$\begin{aligned} \iiint H[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} &= \iiint H_1 [F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} \\ = -\iiint H'[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} &= -\iiint H_1' [F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}, \end{aligned}$$

und daher wird

$$\iiint H[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{4}\iiint (H + H_1 - H' - H_1')[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}. \tag{13}$$

Aus dieser Formel folgt für

$$H = \log \Phi,$$
$$F = \Phi,$$
$$G = \Phi,$$

mit Rücksicht auf (10)

$$\tfrac{1}{4}\iiint (\log \Phi + \log \Phi_1 - \log \Phi' - \log \Phi_1')\,[\Phi, \Phi]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0$$

oder

$$\iiint |W| \log \frac{\Phi\,\Phi_1}{\Phi'\,\Phi_1'}\ (\Phi'\Phi_1' - \Phi\Phi_1)\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0$$

d. h., da der Integrand hier nirgends positiv ausfallen kann,

$$\Phi'\Phi_1' - \Phi\Phi_1 = 0.$$

Die allgemeinste dieser Gleichung genügende Funktion von $\xi, \eta, \zeta, x, z, y, t$ mit den Eigenschaften 1. und 2. auf S. 270 ist, wie aus dem Satze 3. auf S. 269 leicht erkannt wird:

$$\Phi = a e^{-b\{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + (\zeta-w)^2\}}, \tag{14}$$

wenn u, v, w beliebige Funktionen von x, y, z, t und a, b solche Funktionen derselben Variabeln x, y, z, t bedeuten, die nirgends negativ ausfallen.

Nunmehr haben wir den soeben aus (10) gefundenen Ausdruck (14) für Φ in (11) einzutragen und aus der so entstehenden Gleichung die Funktion Ψ zu ermitteln. Setzen wir zu dem Zwecke

$$\Psi = \psi\,\Phi,$$

wo ψ eine neue zu bestimmende Funktion ist, und berücksichtigen die obige Relation

$$\Phi\Phi_1 = \Phi'\Phi_1',$$

so nimmt (11) die Gestalt an

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2 \iint |W|\ \Phi\Phi_1 (\psi_1' + \psi' - \psi_1 - \psi)\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Phi]. \tag{15}$$

Führen wir hier in dem Ausdrucke linker Hand an Stelle von

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \xi_1,\quad \eta_1,\quad \zeta_1$$

bzw. die Argumente

$$u + \frac{\xi}{\sqrt{b}},\quad v + \frac{\eta}{\sqrt{b}},\quad w + \frac{\zeta}{\sqrt{b}},\quad u + \frac{\xi_1}{\sqrt{b}},\quad v + \frac{\eta_1}{\sqrt{b}},\quad w + \frac{\zeta_1}{\sqrt{b}}$$

ein, so geht derselbe über in

$$-\tfrac{1}{4}\sigma^2 \frac{a^2}{b^2} J,$$

wo zur Abkürzung

$$J = \iint |W|\ e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)} (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} \tag{16}$$

gesetzt worden ist; darin hat φ die Bedeutung

$$\varphi(\xi\eta\zeta) = \psi\left(u + \frac{\xi}{\sqrt{b}},\ v + \frac{\eta}{\sqrt{b}},\ w + \frac{\zeta}{\sqrt{b}}\right).$$

Es ist nun für die Begründung der kinetischen Gastheorie von entscheidender Bedeutung, daß der Ausdruck (16) in die Gestalt

$$J = k\varphi + \int K(\xi\eta\zeta;\ \xi_1\eta_1\zeta_1)\,\varphi_1\, d\omega_1 \tag{17}$$

gebracht werden kann und daß sich daher die zur Bestimmung von ψ dienende Gleichung (15) als eine lineare (orthogonale) Integralgleichung zweiter Art herausstellt.

Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß

$$\int |W|\, d\mathfrak{s} = 2\pi \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2}$$

wird, und setzen

$$\begin{aligned} k(\xi\eta\zeta) &= e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} \\ &= 2\pi e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \int \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2}\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, d\omega_1, \end{aligned} \tag{18}$$

so daß k eine gewisse nur von $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ abhängige stets positive Funktion bedeutet:

Ferner führe ich in dem Integralausdrucke

$$J^* = \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, \varphi'\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}$$

statt des Integrales über die Oberfläche der Einheitskugel ein solches über das Innere derselben ein, indem ich in

$$J^* = 3\int_0^1 J^* r^2 dr$$

statt r und der Richtungskosinusse die drei unabhängigen rechtwinkligen Koordinaten nehme $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Wegen

$$r^2 dr\, d\mathfrak{s} = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}$$

wird dann

$$J^* = 3 \underset{(0 \leqq \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 \leqq 1)}{\iiiint} \left| \frac{\mathfrak{x}(\xi_1 - \xi) + \mathfrak{y}(\eta_1 - \eta) + \mathfrak{z}(\zeta_1 - \zeta)}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}} \right| e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, \varphi'\, d\omega_1\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z},$$

wo nunmehr

$$\varphi' = \varphi(\xi'\eta'\zeta') = \varphi\left(\xi + \frac{\mathfrak{x} W}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2},\ \eta + \frac{\mathfrak{y} W}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2},\ \zeta + \frac{\mathfrak{z} W}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}\right)$$

zu nehmen ist. Führen wir jetzt im Integral J^* statt ξ_1, η_1, ζ_1 die neuen Integrationsvariablen

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1 - \xi}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2},$$

$$\mu_1 = \frac{\eta_1 - \eta}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2},$$

$$\nu_1 = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} J^* = 3 \underset{(0 \leqq \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 \leqq 1)}{\iiiiiint} |\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1|\, (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)^{\frac{7}{2}} \\ e^{-\{(\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\xi)^2 + (\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\eta)^2 + (\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\zeta)^2\}}\, \varphi'\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

wo

$$\varphi' = \varphi(\xi + \mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),\ \eta + \mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),$$
$$\zeta + \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1))$$

zu nehmen ist. Sodann wählen wir statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die neuen Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),\\ \mu &= \mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),\\ \nu &= \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1);\end{aligned}$$

wegen

$$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = (\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1)^2,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)$$

und da die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 2\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{x}\mu_1 & , \mathfrak{x}\nu_1 \\ \mathfrak{y}\lambda_1 & , \mathfrak{x}\lambda_1 + 2\mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{y}\nu_1 \\ \mathfrak{z}\lambda_1 & , \mathfrak{z}\mu_1 & , \mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + 2\mathfrak{z}\nu_1 \end{vmatrix} = 2(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{3}{2}}$$

wird, erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß zu jedem Wertsystem λ, μ, ν zwei Wertsysteme $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gehören:

$$\begin{aligned} J^* = 3 \underset{(0 \leqq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \leqq \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)}{\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int} & \frac{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)^{\frac{7}{2}}}{(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{9}{2}}} \\ e^{-\left\{\left(\lambda_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \xi\right)^2 + \left(\mu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \eta\right)^2 + \left(\nu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \zeta\right)^2\right\}} & \\ \varphi(\xi + \lambda, \eta + \mu, \zeta + \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1. & \end{aligned} \tag{19}$$

Um hierin die Integration nach λ_1, μ_1, ν_1 auszuführen, bedenken wir, daß das Integral

$$\begin{aligned} \underset{0 \leqq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \leqq \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)}{\int\!\!\int\!\!\int} & \frac{1}{(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{9}{2}}} \\ e^{-\left\{\left(\lambda_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \xi\right)^2 + \left(\mu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \eta\right)^2 + \left(\nu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \zeta\right)^2\right\}} & d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1 \end{aligned} \tag{20}$$

eine Orthogonalinvariante der beiden Variabelnreihen

$$\lambda, \mu, \nu \text{ und } \xi, \eta, \zeta$$

ist und folglich nur eine Funktion der drei Ausdrücke

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

werden kann. Um diese Funktion zu ermitteln, nehmen wir $\mu = 0$, $\nu = 0$. Für $\lambda > 0$ geht jenes Integral (20) dann über in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda\lambda_1)^{\frac{9}{2}}} e^{-\left\{(\lambda + \xi)^2 + \left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1} + \eta\right)^2 + \left(\frac{\lambda\nu_1}{\lambda_1} + \zeta\right)^2\right\}} d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1$$

$$= \frac{\pi}{\lambda^{\frac{13}{2}}} e^{-(\lambda + \xi)^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\pi}{3\lambda^8} e^{-(\lambda + \xi)^2},$$

und mithin wird das Integral (20) notwendigerweise gleich

$$\frac{2\pi}{3(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^4}\, e^{-\frac{\{\lambda(\lambda+\xi)+\mu(\mu+\eta)+\nu(\nu+\zeta)\}^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

da ja dieser Ausdruck für $\mu=0$, $\nu=0$ den eben berechneten Wert bekommt. Infolgedessen wird, wenn wir endlich in J^* anstatt λ, μ, ν die Argumente von φ, nämlich

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi+\lambda,\\ \eta_1 &= \eta+\mu,\\ \zeta_1 &= \zeta+\nu\end{aligned}$$

als Integrationsvariable einführen,

$$J^* = \int K^*(\xi\eta\zeta;\,\xi_1\eta_1\zeta_1)\,\varphi_1\,d\omega, \tag{21}$$

wo

$$K^* = \frac{2\pi}{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\, e^{-\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}$$

gesetzt ist.

Nunmehr behandeln wir das Integral

$$J^{**} = \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\,\varphi_1'\,d\omega_1\,d\mathfrak{S}$$

ähnlich, wie soeben das Integral J^*. Zunächst finden wir genau wie vorhin

$$J^{**} = 3\underset{0\leqq\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2\leqq 1}{\iiiint\!\!\iint} |\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1|\,(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^{\frac{7}{2}}$$
$$e^{-\{(\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\xi)^2+(\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\eta)^2+(\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\zeta)^2\}}\,\varphi_1'\,d\lambda_1\,d\mu_1\,d\nu_1\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z},$$

wo jetzt

$$\begin{aligned}\varphi_1' = \varphi\,(&\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\xi,\\ &\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\eta,\\ &\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\zeta)\end{aligned}$$

zu nehmen ist. Sodann wählen wir statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die neuen Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1),\\ \mu &= \mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1),\\ \nu &= \nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1);\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}&\mathfrak{x}\lambda+\mathfrak{y}\mu+\mathfrak{z}\nu=0,\\ &\lambda^2+\mu^2+\nu^2=(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)\,(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1),\end{aligned}$$

und da die Funktionaldeterminante, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{x}\mu_1-2\mathfrak{y}\lambda_1, & \mathfrak{x}\nu_1-2\mathfrak{z}\lambda_1\\ \mathfrak{y}\lambda_1-2\mathfrak{x}\mu_1, & \mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{y}\nu_1-2\mathfrak{z}\mu_1\\ \mathfrak{z}\lambda_1-2\mathfrak{x}\nu_1, & \mathfrak{z}\mu_1-2\mathfrak{y}\nu_1, & \mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1\end{vmatrix} = 2(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1)(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)$$

wird, erhalten wir durch Vergleich mit (19) das einfache Resultat

$$J^{**} = J^{*}. \tag{22}$$

Mit Rücksicht auf (18), (21), (22) erhält der Integralausdruck (16) die Gestalt (17), wie oben behauptet worden ist, wo der Kern K die Bedeutung hat:

$$K(\xi\eta\zeta;\xi_1\eta_1\zeta_1) = 2\pi e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\Big\{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}\,e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\,e^{-\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\Big\}. \tag{23}$$

Unter Benutzung der Identität

$$\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}+\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$
$$=\frac{(S_1-P)^2+S(S+S_1-2P)}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}=\frac{(S+S_1-P)^2-SS_1}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2},$$

wo

$$S = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$
$$S_1 = \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2,$$
$$P = \xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1$$

bedeutet, ersehen wir, daß K ein symmetrischer Kern der beiden Variabelnreihen ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 ist Außerdem zeigt der eben gefundene Ausdruck (23), daß der Kern K für

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1$$

nur von der ersten Ordnung unendlich wird und daher die gesamte Theorie der Integralgleichungen auf ihn anwendbar ist.

Insbesondere entnehmen wir hieraus, daß die Frage der Auflösung der Integralgleichung

$$J = f(\xi\eta\zeta), \tag{24}$$

wenn f eine gegebene Funktion von ξ, η, ζ ist, notwendig durch die Kenntnis der Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$J = 0 \tag{25}$$

bedingt ist. Um diese Lösungen zu ermitteln, multipliziere man den Ausdruck (16) für J mit φ und integriere nach ξ, η, ζ über den unendlichen Geschwindigkeitsraum; nach Formel (13) wird dann, wenn wir in derselben

$$H = \varphi,\ F = e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},\ G = e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\varphi$$

nehmen:

$$\int\varphi J d\omega = \tfrac{1}{4}\iiint |W|\, e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}(\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1')^2 d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{S}.$$

Soll nun φ eine Lösung von (25) sein, so muß für ein solches φ auch das Integral rechts hier verschwinden, und dies ist nur möglich, wenn der Integrand Null ist, d. h. wenn

$$\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1' = 0$$

wird. Dem Früheren zufolge gibt es lediglich die fünf linear voneinander unabhängigen Funktionen

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= 1,\\ \psi^{(2)} &= \xi,\\ \psi^{(3)} &= \eta,\\ \psi^{(4)} &= \zeta,\\ \psi^{(5)} &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\end{aligned} \tag{26}$$

die jene Gleichung erfüllen, und damit ist bewiesen, daß die lineare homogene Integralgleichung (25) keine anderen Lösungen besitzt als diejenigen, die aus jenen fünf Lösungen durch lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten entstehen.[1])

Hiermit ist die Untersuchung der linearen Integralgleichung (24), auf welche wir durch die Gleichung (11) geführt wurden, beendet, und ich fasse die gefundenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Die zur Bestimmung der Funktion φ dienende Gleichung (24) *ist eine lineare* (*orthogonale*) *Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern. Die zugehörige homogene Integralgleichung* (25) *hat genau die fünf linear voneinander unabhängigen Lösungen* (26), *und mithin besitzt* (24) *dann und nur dann eine Lösung φ, wenn f die fünf Integralbedingungen* (*Orthogonalitätsbedingungen*)

$$\int \psi^{(i)} f d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

erfüllt.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, ψ aus (15) d. h. Ψ aus (11) zu bestimmen, das Bestehen der fünf Gleichungen:

$$\int \psi^{(i)}[\Phi] d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{27}$$

Dies sind, wie die Ausrechnung zeigt und schon von Maxwell erkannt worden ist, nichts anderes als die hydrodynamischen Gleichungen einschließlich der Kontinuitätsgleichung und der thermodynamischen Grundgleichung für ein ideales Gas in erster Annäherung: die hydrodynamischen Gleichungen erscheinen somit als die Orthogonalitätsbedingungen für die Lösbarkeit unserer linearen Integralgleichung; es sind fünf partielle Differentialgleichungen für die fünf Größen a, b, u, v, w (bez. Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit) als

---

1) Den schönen Beweis dieses Satzes hat zuerst Herr Dr. E. Hecke gefunden, dessen Hilfe — er war in der von mir im Wintersemester 1911/12 über Gastheorie gehaltenen Vorlesung mein Assistent — mir auch sonst bei der Ausarbeitung der hier entwickelten Theorie von großem Werte war.

Funktionen von x, y, z, t. Da die Determinante ihrer linken Seiten in bezug auf die zeitlichen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial t}, \quad \frac{\partial b}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \tag{28}$$

— sie ist im wesentlichen die aus den Elementen

$$\int \psi^{(i)} \psi^{(j)} \Phi d\omega, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

gebildete Determinante — nicht Null ist, so sind die Lösungen der fünf partiellen Differentialgleichungen (27) eindeutig bestimmt, wenn man die Werte von a, b, u, v, w oder auch — was offenbar auf das nämliche hinausläuft — die Werte von

$$\int \psi^{(i)} \Phi d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{29}$$

für $t = t_0$ als Funktionen von x, y, z willkürlich — etwa gleich $f^{(i)}$ — vorschreibt; wir wollen die so erhaltenen allgemeinsten Lösungen von (27) mit a^*, b^*, u^*, v^*, w^* bezeichnen und überdies

$$\Phi^* = a^* e^{-b^* \{(\xi - u^*)^2 + (\eta - v^*)^2 + (\zeta - w^*)^2\}}$$

setzen.

Nachdem wir so das erste Glied in der Entwicklung (8) von F auf die allgemeinste Weise bestimmt haben, führen wir die nämliche Aufgabe für das zweite Glied durch.

Es sei jetzt $\psi^{(0)}$ diejenige völlig bestimmte Lösung der aus (15) hervorgehenden linearen Integralgleichung

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2 \iint |W| \, \Phi^* \Phi_1^* (\psi_1' + \psi' - \psi_1 - \psi) \, d\omega_1 \, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2} [\Phi^*],$$

für welche

$$\int \psi^{(i)} \psi^0 \Phi^* d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wird; dann ist

$$\Psi^0 = \psi^0 \Phi^*$$

diejenige völlig bestimmte Lösung der aus (11) hervorgehenden Integralgleichung

$$\iint [\Phi^*, \Psi] \, d\omega_1 \, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2} [\Phi^*], \tag{30}$$

für welche

$$\int \psi^{(i)} \Psi^0 d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{31}$$

wird, und die allgemeinste Lösung von (30) ist

$$\Psi = \Psi^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{32}$$

wobei die fünf Größen $c^{(j)}$ willkürliche Funktionen von x, y, z, t bedeuten. Nunmehr schreiben wir die zur Bestimmung von X dienende Gleichung (12) wie folgt

$$\iint [\Phi, X]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Psi] - \tfrac{1}{2}\iint [\Psi, \Psi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}, \tag{33}$$

und tragen darin Φ^* an Stelle von Φ und den Ausdruck (32) an Stelle von Ψ ein. Da diese Gleichung dieselbe Gestalt wie (11) oder (30) aufweist und daher ebenfalls auf die lineare Integralgleichung (24) zurückführbar ist, so erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, X zu bestimmen, die Gleichungen

$$\int \psi^{(i)}[\Psi]\, d\omega - \iiint \psi^{(i)}[\Psi, \Psi]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

oder, da wegen (13) das zweite Integral verschwindet,

$$\int \psi^{(i)}[\Psi]\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{34}$$

d. h. wenn (32) an Stelle von Ψ eingetragen wird:

$$\int \psi^{(i)}[\Psi^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}]\, d\omega = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Dies sind fünf lineare partielle Differentialgleichungen für die fünf Funktionen $c^{(j)}$. Da die Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten nach den zeitlichen Ableitungen (28) genau mit der oben betrachteten Determinante übereinstimmt und daher von Null verschieden ausfällt, so sind die Lösungen dieser Differentialgleichungen eindeutig bestimmt, sobald man die Werte von $c^{(j)}$ oder auch, — was offenbar auf das nämliche hinausläuft — die Werte von

$$\int \psi^{(i)}\, \Psi\, d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{35}$$

für $t = t_0$ willkürlich als Funktionen von x, y, z — etwa gleich $g^{(i)}$ — vorschreibt; wir wollen die so erhaltene allgemeinste Lösung von (34) mit Ψ^* bezeichnen.

So fortfahrend verstehen wir unter X^0 diejenige völlig bestimmte Lösung der Integralgleichung (33), für welche

$$\int \psi^{(i)} X^0\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{36}$$

wird; die allgemeinste Lösung von (33) ist dann

$$X = X^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wobei die Größen $c^{(j)}$ willkürliche Funktionen von x, y, z, t bedeuten. Da jedoch wiederum die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int \psi^{(j)}[X]\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{37}$$

erfüllt sein müssen, so bleiben nur die Werte von $c^{(j)}$ für $t = t_0$ willkürlich: wir schreiben statt ihrer die Werte von

$$\int \psi^{(i)} X\, d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{38}$$

für $t = t_0$ willkürlich als Funktionen von x, y, z — etwa gleich $h^{(i)}$ — vor und bezeichnen die so erhaltene allgemeinste Lösung von (37) mit X^*.

Bei diesem Prozesse der Herstellung der allgemeinsten Lösung

$$F^* = \frac{\Phi^*}{\lambda} + \Psi^* + X^*\lambda + \cdots \tag{39}$$

der Fundamentalgleichung (4) treten in jedes einzelne Glied jedesmal fünf neue willkürliche Funktionen von x, y, z, nämlich die Funktionen (29), (35), (38), ... ein; diese willkürlichen Funktionen erscheinen aber in dem Gesamtausdruck für F in der Weise kombiniert, daß derselbe in Wahrheit nur fünf willkürliche Funktionen der Variabeln x, y, z enthält.

Um diese wichtige Tatsache einzusehen, bedenken wir, daß (39) eine der Fundamentalgleichung (4) genügende Potenzreihe von λ ist derart, daß die Ausdrücke

$$\int \psi^{(i)} F^* d\omega = \frac{\int \psi^{(i)} \Phi^* d\omega}{\lambda} + \int \psi^{(i)} \Psi^* d\omega + \lambda \int \psi^{(i)} X^* d\omega + \cdots \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

für $t = t_0$ bzw. in die Potenzreihen:

$$A^{(i)} = \frac{f^{(i)}}{\lambda} + g^{(i)} + \lambda h^{(i)} + \cdots, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

übergehen, und daß es nur eine solche Potenzreihe gibt. Wir bestimmen jetzt andererseits nach dem eben dargelegten Verfahren eine der Fundamentalgleichung (4) genügende Potenzreihe F von λ derart, daß wir für die fünf Ausdrücke (29) für $t = t_0$ nicht wie früher $f^{(i)}$ sondern die Werte $\lambda A^{(i)}$ und sodann für (35), (38), ... an Stelle $g^{(i)}, h^{(i)}, \ldots$ jedesmal Null vorschreiben. Dieser Konstruktion zufolge wird F eine solche Potenzreihe von λ, daß die fünf Ausdrücke $\int \psi^{(i)} F d\omega$ ebenfalls für $t = t_0$ identisch für alle λ in $A^{(i)}$ übergehen. Folglich ist

$$F = F^*;$$

wir erkennen also, daß auch F die allgemeinste Potenzreihenlösung der Fundamentalgleichung (4) darstellt, und damit ist unsere Behauptung bewiesen. Die gefundenen Resultate fassen wir in folgendem Theorem zusammen:

In der Mannigfaltigkeit aller nach Potenzen von λ fortschreitenden Lösungen der Fundamentalgleichung (4) *ist eine Lösung F eindeutig bestimmt, sobald man für sie die Werte der fünf Integrale*

$$\int \psi^{(i)} F d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{40}$$

für $t = t_0$ als Funktionen von x, y, z vorschreibt — etwa gleich $A^{(i)}$.

Man erhält diese Lösung durch folgendes Verfahren: zunächst nehme man für Φ den Ausdruck (14) *und bestimme darin a, b, u, v, w als Funktionen von x, y, z, t aus den fünf partiellen Differentialgleichungen* (27), *wobei man für $t = t_0$ die fünf Integralwerte* (29) *gleich $\lambda A^{(i)}$ vorschreibt;*

sodann bestimme man diejenige Lösung Ψ^0 der linearen Integralgleichung (11), *für welche die fünf Bedingungen* (31) *erfüllt sind, setze*

$$\Psi = \Psi^0 + \Phi \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

und bestimme die fünf Funktionen $c^{(j)}$ von x, y, z, t aus den fünf linearen partiellen Differentialgleichungen (34), *wobei man für $t = t_0$ die fünf Integralwerte* (35) *gleich Null vorschreibe; endlich bestimme man diejenige Lösung X^0 der linearen Integralgleichung* (12), *welche die fünf Bedingungen* (36) *erfüllt, setze*

$$X = X^0 + \Phi \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}$$

und bestimme hierin die fünf Funktionen $c^{(j)}$ von x, y, z, t aus den linearen partiellen Differentialgleichungen (37), *wobei man wiederum für $t = t_0$ die Integralwerte* (38) *gleich Null vorschreibe usw. Die Ausdrücke* (9) *stellen dann die Fundamentalfunktion F in erster, zweiter, dritter Annäherung usw. dar.*

Nach den Ausführungen auf S. 270 ist die Potenzreihenentwicklung (8) nach λ der mathematische Ausdruck für die Stabilität des Bewegungszustandes des Gases, und da F den Zustand des Gases für alle Zeit bestimmt und die Kenntnis der Integralwerte (40) uns gerade die Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit des Gases liefert, so entnehmen wir aus dem obigen Theorem das folgende für die Gastheorie grundlegende Resultat.

Der Zustand eines stabilen Gases ist für alle Zeit eindeutig bestimmt, wenn man für dasselbe zur Zeit $t = t_0$ Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit als Funktionen des Ortes kennt.

Wir haben früher auf S. 270 gesehen, daß bei der Entwicklung nach Potenzen von $t - t_0$ die Mannigfaltigkeit der Lösungen F der Fundamentalgleichung (4) eine weit höhere ist, als sie sich jetzt bei der Entwicklung nach Potenzen von λ unserem Theorem zufolge herausstellt: damals durfte F für $t = t_0$ willkürlich als Funktion von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ vorgeschrieben werden, jetzt dagegen nur die fünf Integralwerte (40) als Funktionen von x, y, z. Es ist also lediglich die Forderung der Stabilität in der von mir aufgestellten Formulierung auf S. 270, die die Mannigfaltigkeit der Lösungen der Fundamentalgleichung (4) so wesentlich einschränkt, daß dadurch eine Gastheorie möglich wird. — Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, wie sie zur Begründung der Fundamentalformel selber herangezogen werden, spielen hierbei keine Rolle. Zur weiteren Begründung der Gastheorie haben wir vielmehr nur nötig, die Vorschriften unseres oben aufgestellten Theorems auszuführen; dieses Verfahren bietet keinerlei Schwierigkeit und läßt nirgends einen Zweifel entstehen, welche Glieder bei Berechnung einer bestimmten Annäherung zu berücksichtigen sind. So liefert ohne Zuhilfenahme einer neuen Annahme beispielsweise die Berechnung der zweiten Annäherung nicht nur den Beweis des zweiten Wärmesatzes und den Boltzmannschen Ausdruck für die Entropie des Gases, sondern auch die Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung und der Wärmeleitung[1]); dabei erscheinen die Reibungs- und Wärmeleitungskonstanten als Zahlen, die durch Auflösung gewisser Integralgleichungen numerisch zu berechnen sind.

Zum Schlusse sei noch eines Ergebnisses Erwähnung getan, das ich eben gefunden habe und die elementare Theorie der Strahlung, insbesondere den bekannten Kirchhoffschen Satz über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption betrifft. Ich erkannte, daß es wiederum eine gewisse Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern ist, die den Mittelpunkt dieser Theorie bildet, und während bei näherer Prüfung alle bisherigen Beweise des Kirchhoffschen Satzes sich als ungenügend herausstellten, gelingt mittelst jener Integralgleichung dieser Beweis auf Grund der elementaren Definitionen und Begriffe der Strahlungstheorie auf die einfachste und vollständigste Weise — ein neues bedeutsames Zeugnis für die weitreichende Kraft, die der Theorie der linearen Integralgleichungen innewohnt.

1) H. A. Lorentz hat in seinen anregenden und tiefsinnigen Untersuchungen über Gastheorie das nämliche Ziel verfolgt; er gelangt dort zu einer Gleichung, die die Rolle der Gleichung (11) in meiner Theorie vertritt, und sucht die Eindeutigkeit der Lösung derselben durch Berufung auf einen Satz von Boltzmann zu beweisen (vgl H. A. Lorentz, Gesammelte Abhandlungen Bd. I S. 88); diese Schlußweise von H. A. Lorentz ist aber nicht stichhaltig, und auch seine weiteren Entwicklungen daselbst sind, selbst für den einfachsten Fall des einatomigen Gases, mathematisch unbegründet, nicht nur weil sie wesentlich die Tatsache der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung benutzen, sondern vor allem auch weil die Existenz einer Lösung für die Lorentzsche Gleichung nicht erwiesen wird — und ohne Heranziehung der Theorie der linearen Integralgleichungen auch nicht erwiesen werden kann.