universität innsbruck

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Fünfter Abschnitt. Neue Begründung der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

wird, so gelangen wir vermöge (119) und (120) zu solchen Werten $x_{e+1}, x_{e+2}, \ldots$, die zusammen mit den gefundenen $x_1, \ldots, x_e$ ein Lösungssystem der homogenen Gleichungen (94) in Satz X ausmachen.

Damit ist Satz 40 vollständig bewiesen.

Da oben auch der Satz 39 über die schiefsymmetrischen Formen lediglich mit Hilfe des Satzes 35 über die orthogonale Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne irgendeine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen worden ist, so ergibt sich, daß auch die Theorie der Gleichungen von der Gestalt (93) und damit überhaupt die Theorie der vollstetigen Bilinearform lediglich auf die Theorie der orthogonalen Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne neue Konvergenzbetrachtungen begründet werden kann — eine bemerkenswerte Tatsache, die der Theorie der vollstetigen Formen von unendlich vielen Variabeln eine wunderbare Durchsichtigkeit und Einheitlichkeit verleiht.

Fünfter Abschnitt.

Neue Begründung der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

In den folgenden Kapiteln XIII—XVI wollen wir die in den Kapiteln XI—XII entwickelte Theorie der linearen, der quadratischen und bilinearen Formen mit unendlich vielen Variabeln auf die Theorie der linearen Integralgleichungen anwenden. Es werden durch dieses neue einfachere und durchsichtigere Verfahren nicht nur alle bekannten Resultate über Integralgleichungen wieder gewonnen werden, sondern es gelingt auch die Theorie der Integralgleichungen wesentlich auszudehnen und zu vervollkommnen. — Weiterhin entsteht dann die Aufgabe, die Methode der unendlich vielen Variabeln direkt ohne Vermittlung der Integralgleichungen in die Theorie der Differentialgleichungen einzuführen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern.

In Kapitel XI[1]) haben wir den Begriff „vollstetig" für eine Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ definiert[2]): wir nennen

1) Die in Kapitel XI und diesem Kapitel XIII angeregten Fragen aus der Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variabeln habe ich in meiner Abhandlung: Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen Variabeln, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. XXVII (1909), weiter ausgeführt.

2) In dem ursprünglichen Abdruck meiner „fünften Mitteilung" hatte ich an Stelle des jetzt durchweg gebrauchten Wortes „vollstetig" das Wort „stetig" eingeführt.

somit eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \ldots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ für sich zu Null werden läßt, d. h. wenn

$$\underset{\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0,\ \ldots}{L} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \ldots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$\underset{h=\infty}{L} \varepsilon_1^{(h)} = 0, \quad \underset{h=\infty}{L} \varepsilon_2^{(h)} = 0, \quad \ldots$$

ist; dabei sind die Variabeln stets an die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1$$

gebunden.

Wenn eine Funktion für jedes dieser Ungleichung genügende Wertsystem der Variabeln stetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. Eine solche Funktion bleibt, wie man unmittelbar durch das bei endlicher Variabelnzahl angewandte Verfahren erkennt, für alle Werte der Variabeln absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze und besitzt stets ein Maximum.

Wenn wir in der Funktion F den Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ sämtlich den Wert 0 erteilen, so heiße die so entstehende Funktion der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ *der n-te Abschnitt* von F; derselbe werde mit $[F]_n$ oder mit F_n bezeichnet.

Ist F eine vollstetige Funktion von $x_1, x_2, \ldots$, so konvergiert das Maximum von

$$|F - F_n|$$

mit unendlich wachsendem n gewiß gegen Null. Im entgegengesetzten Falle nämlich müßte es unendlich viele Wertsysteme

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots$$

geben, so daß die Differenz

$$(1) \qquad |F(a^{(n)}) - F_n(a^{(n)})|$$

für alle n oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfällt. Wählen wir aus jenen Wertsystemen nach einem im 4. Abschnitt oft angewandten Verfahren solche unendlich viele Wertsysteme

$$b_1^{(h)} = a_1^{(n_h)}, \quad b_2^{(h)} = a_2^{(n_h)}, \quad \ldots$$

aus, daß

$$\underset{h=\infty}{L} b_1^{(h)} = b_1, \quad \underset{h=\infty}{L} b_2^{(h)} = b_2, \quad \ldots$$

existiert, wo $b_1, b_2, \ldots$ gewisse Werte bedeuten, so ist wegen der Vollstetigkeit der Funktion F

$$(2) \qquad \underset{h=\infty}{L} F(b^{(h)}) = F(b).$$

Setzen wir nun allgemein

$$c_p^{(h)} = b_p^{(h)} \qquad (p \leqq n_h),$$
$$c_p^{(h)} = 0 \qquad (q > n_h),$$

so ist

$$\underset{h=\infty}{L}\, c_1^{(h)} = b_1, \quad \underset{h=\infty}{L}\, c_2^{(h)} = b_2, \quad \ldots$$

und folglich auch

$$\underset{h=\infty}{L}\, F(c^{(h)}) = \underset{h=\infty}{L}\, F_{n_h}(b^{(h)}) = F(b); \tag{3}$$

die Grenzgleichungen (2), (3) widersprechen aber der obigen Annahme, wonach (1) stets oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfallen sollte.

Aus der eben bewiesenen Tatsache, daß das Maximum von $|F - F_n|$ mit unendlich wachsendem n gegen Null konvergiert, folgern wir leicht folgende Sätze:

1. Die Abschnitte $F_n(x)$ einer vollstetigen Funktion $F(x)$ konvergieren *gleichmäßig* für alle $x_1, x_2, \ldots$ gegen $F(x)$.

2. Ist $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine vollstetige Funktion von $x_1, x_2, \ldots$ und werden $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots$ solche vollstetige Funktionen der endlich vielen oder unendlich vielen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$, daß stets

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq 1$$

ausfällt, so geht F in eine vollstetige Funktion der neuen Variabeln über. Insbesondere geht daher eine vollstetige Funktion durch orthogonale Transformation der Variabeln wieder in eine vollstetige Funktion über.

Wird allgemein

$$F(x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots) = F(x(\xi)),$$
$$F_n(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi)) = F_n(x(\xi))$$

gesetzt, so konvergiert die Funktionenreihe

$$F_1(x(\xi)),\ F_2(x(\xi)),\ \ldots$$

gleichmäßig für alle ξ gegen $F(x(\xi))$.

3. Ist insbesondere eine vollstetige Linearform

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots$$

vorgelegt, so ist der $n$te Abschnitt nichts anderes als die Summe der n ersten Glieder der unendlichen Reihe rechter Hand. Nach Satz 1 konvergiert diese Summe mit wachsendem n gleichmäßig für alle $x_1, x_2, \ldots$ gegen $L(x)$. Die Konvergenz jener unendlichen Reihe ist zugleich eine absolute; denn wenn wir die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in irgendeiner anderen Anordnung mit $x'_1, x'_2, \ldots$ benennen, so müssen nach 1, da $L(x)$ in eine vollstetige Funktion von $x'_1, x'_2, \ldots$ übergeht, die dieser neuen Benennung entsprechend gebildeten Abschnitte der Funktion $L(x)$, d. h.

die Summen der n ersten Glieder der entsprechend umgeordneten unendlichen Reihe, ebenfalls gegen den Wert $L(x)$ konvergieren. Ebenso lehrt 2, daß, wenn wir an Stelle von $x_1, x_2, \ldots$ stetige Funktionen von endlich vielen oder unendlich vielen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ setzen, die der Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq 1$$

genügen, die Reihe

$$L(x(\xi)) = l_1 x_1(\xi) + l_2 x_2(\xi) + \cdots$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Wegen des linearen und homogenen Charakters von $L(x)$ kann jene Bedingung auch durch die Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq M$$

ersetzt werden, wenn M irgendeine von den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Größe bedeutet.

Die in 3 aufgestellten Behauptungen sind auch leicht direkt beweisbar.

Als Bindeglied zwischen der Theorie der Funktionen und Gleichungen mit unendlich vielen Variabeln, wie sie im vierten Abschnitt entwickelt ist, und andererseits der Theorie der Integralgleichungen, die doch Relationen für Funktionen einer Variabeln s ausdrücken, bedarf es irgendeines Systems von unendlich vielen stetigen Funktionen

$$\Phi_1(s),\ \Phi_2(s),\ \ldots$$

der Variabeln s, die im Intervalle $s = a$ bis $s = b$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die sogenannte *Orthogonalitäts-Eigenschaft:*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = 0 && (p \neq q),\\ &\int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1; \end{aligned}$$

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ der Variabeln s

$$\int_a^b u(s)\,v(s)\,ds = \int_a^b u(s)\,\Phi_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_1(s)\,ds + \int_a^b u(s)\,\Phi_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_2(s)\,ds + \cdots$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, .. als ein *orthogonales vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgendeine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige Funktion von s, so mögen die Integrale

$$\int_a^b u(s)\,\Phi_1(s)\,ds, \quad \int_a^b u(s)\,\Phi_2(s)\,ds, \quad \ldots$$

die Fourier-Koeffizienten der Funktion $u(s)$ in bezug auf das orthogonale vollständige Funktionensystem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... heißen und kurz bzw. mit

$$\{u(*)\}_1, \ \{u(*)\}_2, \ \ldots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

ist. Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(5) \qquad \int_a^b u(s)v(s)\,ds = \{u(*)\}_1\{v(*)\}_1 + \{u(*)\}_2\{v(*)\}_2 + \cdots.$$

Um für ein gegebenes Intervall $s = a$ bis $s = b$ ein orthogonales vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, bestimme man zunächst irgendein System von stetigen Funktionen

$$P_1(s), \ P_2(s), \ \ldots,$$

die die Eigenschaft besitzen, daß für eine endliche Anzahl von ihnen niemals eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht, und die überdies von der Art sind, daß, wenn $u(s)$ irgendeine stetige Funktion von s, und ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, allemal eine endliche Anzahl von Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ gefunden werden kann, so daß

$$(6) \qquad \int_a (u(s) - c_1 P_1(s) - c_2 P_2(s) - \cdots - c_m P_m(s))^2\,ds < \varepsilon$$

ausfällt. Wie man sieht, bildet beispielsweise das System aller ganzen Potenzen von s

$$P_1(s) = 1, \quad P_2(s) = s, \quad P_3(s) = s^2, \quad \ldots$$

ein Funktionensystem von der verlangten Art.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \gamma_1 P_1, \\ \Phi_2 &= \gamma_2 P_2 + \gamma_2' \Phi_1, \\ \Phi_3 &= \gamma_3 P_3 + \gamma_3' \Phi_1 + \gamma_3'' \Phi_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und können dann, wie leicht ersichtlich, der Reihe nach die Konstanten $\gamma_1; \gamma_2, \gamma_2'; \gamma_3, \gamma_3', \gamma_3''; \ldots$ so bestimmen, daß die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$

den Orthogonalitäts-Relationen (4) sämtlich Genüge leisten.[1]) Die so konstruierten Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ erfüllen alsdann auch die Vollständigkeits-Relation (5).

Um dies einzusehen, bedenken wir zunächst, daß, wenn $u(s)$ eine stetige Funktion von s ist, die Summe der Quadrate aller Fourier-Koeffizienten von $u(s)$ konvergiert und den Wert des Integrals

$$\int_a^b (u(s))^2 ds$$

niemals übersteigen kann. In der Tat ist für eine beliebige ganze Zahl n gewiß

$$\int_a^b (u(s) - \{u(*)\}_1 \Phi_1(s) - \cdots - \{u(*)\}_n \Phi_n(s))^2 ds \geqq 0$$

und mithin, wie die Rechnung lehrt,

$$\{u(*)\}_1^2 + \cdots + \{u(*)\}_n^2 \leqq \int_a^b (u(s))^2 ds;$$

also auch für die so entstehende konvergente Reihe

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots \leqq \int_a^b (u(s))^2 ds.$$

Wir zeigen sodann, daß genau

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots = \int_a^b (u(s))^2 ds \tag{7}$$

ausfällt. Wäre nämlich im Gegenteil

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots < \int_a^b (u(s))^2 ds$$

d. h.

$$\varepsilon = \int_a^b (u(s))^2 ds - \{u(*)\}_1^2 - \{u(*)\}_2^2 - \cdots > 0, \tag{8}$$

so denken wir uns zu $u(s)$ und ε in (6) die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ bestimmt; setzen wir

$$u'(s) = c_1 P_1(s) + \cdots + c_m P_m(s) = c_1' \Phi_1(s) + \cdots + c_m' \Phi_m(s), \tag{9}$$

wo $c_1', \ldots, c_m'$ ebenfalls gewisse Konstanten bedeuten, so fällt

$$\int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds < \varepsilon \tag{10}$$

aus. Andererseits ergibt sich mit Rücksicht auf (9) und (8)

1) Vgl. hiermit E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen usw., Inaugural-Dissertation (Göttingen 1905), § 3. Abgedruckt in Math. Ann. 63, S 442.

$$\int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds = \int_a^b (u(s) - c_1' \Phi_1(s) - \cdots - c_m' \Phi_m(s))^2 ds$$

$$= \int_a^b u(s)^2 ds - 2c_1' \{u(*)\}_1 - \cdots - 2c'_m \{u(*)\}_m + c_1'^2 + \cdots + c_m'^2$$

$$= \varepsilon + \{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots - 2c_1' \{u(*)\}_1 - \cdots - 2c_m' \{u(*)\}_m + c_1'^2 + \cdots + c_m'^2$$

$$= \varepsilon + (\{u(*)\}_1 - c_1')^2 + \cdots + (\{u(*)\}_m - c_m'^2)^2 + \{u(*)\}^2_{m+1} + \{u(*)\}^2_{m+2} + \cdots,$$

und folglich

$$\int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds \geqq \varepsilon,$$

was der Ungleichung (10) widerspricht.

Damit ist die Gleichung (7) bewiesen, und aus dieser folgt, wenn wir einmal für $u(s)$ die Summe und dann die Differenz irgend zweier stetiger Funktionen nehmen und die erhaltenen Gleichungen subtrahieren, auch die allgemeine Vollständigkeits-Relation (5).

Es sei noch erwähnt, daß man in analoger Weise auch für beliebige Intervallsysteme, ferner für mehrere unabhängige Variable und auf einer beliebigen Fläche ein vollständiges orthogonales Funktionensystem konstruieren kann.

Wir zeigen zunächst, wie die Fredholmschen Sätze[1]) über die Lösung der Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern aus der im vierten Abschnitt entwickelten Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten folgen.

Es sei die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \tag{11}$$

vorgelegt; in derselben bedeute der Kern $K(s, t)$ eine stetige nicht notwendig symmetrische Funktion von s, t, und $f(s)$ sei ebenfalls als eine stetige Funktion gegeben; $f(s)$ möge überdies nicht identisch für alle Werte der Variabeln Null sein; $\varphi(s)$ ist die zu bestimmende Funktion. Wir bilden die Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$, als einer Funktion von t und alsdann die Fourier-Koeffizienten der so entstandenen Funktion von s, wie folgt:

$$k_q(s) = \{K(s, *)\}_q = \int_a^b K(s, t) \Phi_q(t) dt,$$

$$a_{pq} = \{k_q(*)\}_p = \int_a^b \int_a^b K(s, t) \Phi_p(s) \Phi_q(t) ds dt.$$

1) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27 (1903).

Setzen wir in der Vollständigkeits-Relation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen

$$u(t) = v(t) = K(s, t)$$

ein, so finden wir

$$(12) \qquad \int_a^b (K(s, t))^2 dt = (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \cdots.$$

Setzen wir andererseits in (5)

$$u(s) = v(s) = k_q(s),$$

so ergibt sich

$$\int_a^b (k_q(s))^2 ds = a_{1q}{}^2 + a_{2q}{}^2 + \cdots.$$

Aus (12) entnehmen wir die Ungleichung

$$(k_1(s))^2 + \cdots + (k_m(s))^2 \leqq \int_a^b (K(s, t))^2 dt;$$

mithin folgt aus der zuletzt gefundenen Gleichung für jedes m

$$\sum_{\substack{(p=1,2,\ldots)\\(q=1,\ldots,m)}} a_{pq}{}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds\, dt,$$

und daher ist auch

$$\sum_{(p,q=1,2,\ldots)} a_{pq}{}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds\, dt.$$

Diese Ungleichung lehrt mit Rücksicht auf eine Bemerkung in Kapitel XII (S. 165), daß die mit den Größen a_{pq} als Koeffizienten gebildete Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

gewiß vollstetig in den unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ ist. Setzen wir endlich noch

$$a_p = \{f(*)\}_p = \int_a^b f(s)\, \Phi_p(s) ds,$$

so wird

$$\int_a^b (f(s))^2 ds = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots.$$

Wegen der Stetigkeit der Bilinearform $A(x, y)$ und der eben bewiesenen Endlichkeit der Quadratsumme der $a_1, a_2, \ldots$, ist die Anwendung des Satzes 40 (S. 165) in Kapitel XII auf jene Bilinearform $A(x, y)$ und dieses Größensystem $a_1, a_2, \ldots$ gestattet: es sei — dem ersten Falle des Satzes 40 entsprechend —

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (93) daselbst, d. h. es sei

$$\alpha_p + a_{p1}\alpha_1 + a_{p2}\alpha_2 + \cdots = a_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Wegen der Endlichkeit der Quadratsumme der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ stellt die Linearform

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \tag{14}$$

eine stetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ dar. Bezeichnen wir mit M eine endliche obere Grenze für die Werte des Integrales

$$\int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

als Funktion von s, so sind wegen (12)

$$k_1(s),\ k_2(s), \ldots$$

eine unendliche Reihe stetiger Funktionen von s, deren Quadratsumme den Wert M nicht übersteigt. Setzen wir daher diese Funktionen in die Linearform (14) an Stelle der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ ein, so wird dieselbe nach dem zu Anfang dieses Kapitels XIII bewiesenen Satze 3 (S. 176) eine stetige Funktion von s: wir setzen

$$\alpha(s) = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots. \tag{15}$$

Hier konvergiert nach Satz 3 (176) die Reihe rechter Hand gleichmäßig für alle s; multiplizieren wir demnach (15) mit $\Phi_p(s)$ und integrieren nach s zwischen den Grenzen $s = a$ und $s = b$, so erhalten wir

$$\int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)ds = \alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \cdots.$$

und wegen (13)

$$\alpha_p + \int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)ds = a_p$$

oder, wenn

$$\varphi(s) = f(s) - \alpha(s) \tag{16}$$

gesetzt wird,

$$\alpha_p = \{f(*)\}_p - \{\alpha(*)\}_p = \{\varphi(*)\}_p$$

d. h. die Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unserer linearen Gleichungen ergeben sich als die Fourier-Koeffizienten einer in s stetigen Funktion $\varphi(s)$.

Nunmehr folgt unmittelbar, *daß $\varphi(s)$ eine Lösung der ursprünglich vorgelegten Integralgleichung* (11) *ist.* In der Tat, setzen wir in der Vollständigkeitsrelation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen,

$$u(t) = \varphi(t), \quad v(t) = K(s, t),$$

so ergibt sich aus derselben

$$\int_a^b \varphi(t)K(s, t)dt = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots, \tag{17}$$

d. h. wegen (15) und (16)

$$\int_a^b \varphi(t) K(s, t) dt = f(s) - \varphi(s). \tag{18}$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ irgendeine in s stetige Lösung der Integralgleichung (11) oder (18) bezeichnet und dann $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten dieser Lösung $\varphi(s)$ bedeuten, so folgt nach der Vollständigkeits-Relation (5) zunächst (17) und wegen (18)

$$\alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots = f(s) - \varphi(s).$$

Da wegen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = \int_a^b (\varphi(s))^2 ds$$

die Quadratsumme der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ endlich ist, so stellt

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$$

eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ dar, und somit entnehmen wir, wie vorhin, aus der letzten Gleichung durch Multiplikation mit $\Phi_p(s)$ und Integration nach s das Gleichungssystem

$$\alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \cdots = a_p - \alpha_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Wir erkennen somit, *daß die Fourier-Koeffizienten einer Lösung der Integralgleichung stets auch ein System von Lösungen unserer linearen Gleichungen* (13) *und zwar ein solches mit endlicher Quadratsumme liefert.*

Zugleich ist klar, daß, wenn irgend e linear unabhängige Lösungen der Integralgleichung vorliegen, die aus diesen durch Bildung der Fourier-Koeffizienten entstehenden e Lösungssysteme der linearen Gleichungen ebenfalls voneinander linear unabhängig sind.

Trifft für die aus $A(x, y)$ entspringenden linearen Gleichungen der zweite Fall des Satzes 40 im vierten Abschnitte (S. 165) zu, so gibt es diesem Satze zufolge ein Lösungssystem der homogenen linearen Gleichungen (94) (S. 165); es sei alsdann

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots$$

ein solches Lösungssystem mit der Quadratsumme 1. Nehmen wir nunmehr in der vorigen Betrachtung

$$f(s) = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots,$$

so erweisen sich genau wie vorhin, *die Lösungen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *als die Fourier-Koeffizienten einer in* s *stetigen Lösung der homogenen Integralgleichung*

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0, \tag{19}$$

und wegen

$$\int_a^b (\varphi(s))^2 ds = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = 1$$

erkennen wir, daß $\varphi(s)$ nicht identisch verschwindet.

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Integralgleichung (19) *ist, so liefern deren Fourier-Koeffizienten ein Lösungssystem unserer homogenen linearen Gleichungen.*

Nunmehr sei, wie in Kapitel XII S. 168, e die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der homogenen Gleichungen

$$L_p(x) = x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Die dort bewiesenen e linearen Relationen (107) sagen dann aus, daß die aus (20) durch Transposition entstehenden linearen homogenen Gleichungen

$$x_q + a_{1q}x_1 + a_{2q}x_2 + \cdots = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

die e Lösungssysteme

$$x_1 = \beta_1^{(h)}, \quad x_2 = \beta_2^{(h)}, \quad \ldots \qquad (h = 1, \ldots, e) \tag{21}$$

zulassen. Dieselben Schlüsse, die wir oben auf die ursprünglichen linearen Gleichungen und deren Lösungssystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ angewandt haben, lassen uns erkennen, daß die Größen (21) die Fourier-Koeffizienten gewisser e linear voneinander unabhängiger in s stetiger Funktionen $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(e)}(s)$ sind, die der homogenen Integralgleichung mit dem transponierten Kern $K(t, s)$ genügen. Infolge dieses Umstandes erhalten die e Bedingungen (108) die Gestalt

$$\int_a^b \psi^{(1)}(s) f(s) ds = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b \psi^{(e)}(s) f(s) ds = 0. \tag{22}$$

Nach den obigen Ausführungen zieht unsere Annahme, daß die homogenen Gleichungen (20) genau e linear unabhängige Lösungen besitzen, die Folge nach sich, daß auch die homogene Integralgleichung (19) genau e linear unabhängige stetige Lösungen besitzt. Da ferner jedes System von Lösungen der inhomogenen linearen Gleichungen (13) eine Lösung der inhomogenen Integralgleichung (11) liefert und umgekehrt, *so erweisen sich alsdann die e Bedingungen* (22) *für die Funktion $f(s)$ als notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der ursprünglich vorgelegten inhomogenen Integralgleichung* (11); *dabei sind die $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(e)}(s)$ die Lösungen der homogenen Integralgleichung mit dem transponierten Kern $K(t, s)$.*

Die erhaltenen Lösungen der Integralgleichungen (11), (19) sind von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ wesentlich unabhängig: in der Tat jede aus $K(s, t)$ unter Vermittlung eines anderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems entspringende Bilinearform geht aus der Bilinearform

$A(x, y)$ durch eine simultane orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ hervor, so daß auch das neue Gleichungssystem und dessen Lösungen sich von dem ursprünglichen Gleichungssysteme und dessen Lösungen nicht wesentlich unterscheidet.

Vierzehntes Kapitel.

Die Theorie der orthogonalen Integralgleichung.

Derselbe Grundgedanke, der uns in Kapitel XIII zur Herleitung der Fredholmschen Sätze über die Lösung von Integralgleichungen zweiter Art gedient hat, ermöglicht auch die Neubegründung der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern. Um dies einzusehen, sei eine Integralgleichung von der Gestalt

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{23}$$

vorgelegt, worin $K(s, t)$ eine stetige symmetrische Funktion von s, t, $f(s)$ eine ebenfalls gegebene stetige Funktion von s, $\varphi(s)$ die zu bestimmende Funktion von s und λ einen Parameter bedeute. Der Kürze halber werde eine Integralgleichung von der Gestalt (23) mit symmetrischem Kern als *orthogonale Integralgleichung* bezeichnet.

Wir bilden zunächst durch Vermittlung des orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ aus dem Kern $K(s, t)$ eine Bilinearform, indem wir wie in Kapitel XIII

$$k_q(s) = \{K(s, *)\}_q = \int_a^b K(s, t)\Phi_q(t)dt, \tag{24}$$

$$k_{pq} = \{k_q(*)\}_p = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)dsdt \tag{25}$$

setzen. Wegen der Symmetrie des Kerns $K(s, t)$ in s, t haben wir

$$k_{pq} = k_{qp},$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{pq} gebildete Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p, q)} k_{pq}x_p y_q \tag{26}$$

eine solche symmetrische Form, wie sie aus der quadratischen Form

$$K(x) = \sum_{(p, q)} k_{pq}x_p x_q \tag{27}$$

abgeleitet wird.

Analog wie vorhin in Kapitel XIII (S. 181) schließen wir aus der wie dort folgenden Ungleichung

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 ds dt$$

mit Hilfe des Satzes 36 in Kapitel XI, daß die aus $K(s,t)$ entsprungene quadratische Form $K(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ ist. Infolgedessen ist die Anwendung des Satzes 35 in Kapitel XI gestattet, und dieser Satz ergibt, daß jene quadratische Form durch eine orthogonale Substitution der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in die Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ die Gestalt

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots \tag{28}$$

erhält. Die Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ sind lineare Formen der ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$. Falls nun unter den Größen $k_1, k_2, \ldots$ solche vorhanden sind, die den Wert Null haben, sondern wir die diesen Größen k zugehörigen Linearformen ab: es seien dies die Linearformen

$$\begin{aligned} x'_{h_1} &= M_1(x) = m_{11} x_1 + m_{12} x_2 + \cdots, \\ x'_{h_2} &= M_2(x) = m_{21} x_1 + m_{22} x_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die übrigbleibenden Größen k bezeichnen wir mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$; die zu diesen Größen $\varkappa$ zugehörigen Linearformen seien

$$\begin{aligned} x'_{g_1} &= L_1(x) = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \cdots, \\ x'_{g_2} &= L_2(x) = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Formel (28) nimmt dann die Gestalt an

$$K(x) = \varkappa_1 (L_1(x))^2 + \varkappa_2 (L_2(x))^2 + \cdots,$$

und da die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \ldots, M_1(x), M_2(x), \ldots$ ein vollständiges orthogonales System bilden, so haben wir

$$L_p(.)\, L_q(.) = 0, \qquad (p \neq q) \tag{29}$$

$$\begin{aligned} L_p(.)\, L_p(.) &= 1, \\ L_p(.)\, M_q(.) &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots = (L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \cdots + (M_1(x))^2 + (M_2(x))^2 + \cdots;$$

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots &= L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \cdots \\ &\quad + M_1(x) M_2(y) + M_1(x) M_2(y) + \cdots; \end{aligned} \tag{31}$$

überdies ist

$$K(x, .)\, L_p(.) = \varkappa_p L_p(x), \tag{32}$$

$$K(x, .) M_p(.) = 0. \tag{33}$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten der Linearform $L_p(x)$ nach (30) den Wert 1 hat, also endlich bleibt, so ist diese Linearform eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$, und wir

können sie daher in derselben Weise wie oben S. 182 die Linearform (14) behandeln: wir finden dann, daß die Reihe

$$L_p(k(s)) \equiv l_{p1} k_1(s) + l_{p2} k_2(s) + \cdots \tag{34}$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und also eine stetige Funktion von s bestimmt. Durch Multiplikation mit $\Phi_q(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (24), (25)

$$\int_a^b L_p(k(s))\, \Phi_q(s)\, ds = l_{p1} k_{q1} + l_{p2} k_{q2} + \cdots.$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (32)

$$l_{p1} k_{q1} + l_{p2} k_{q2} + \cdots = \varkappa_p l_{pq},$$

und folglich ist

$$\int_a^b L_p(k(s))\, \Phi_q(s)\, ds = \varkappa_p l_{pq}.$$

Setzen wir

$$L_p(k(s)) = \varkappa_p \varphi_p(s), \tag{35}$$

so ist, da ja $\varkappa_p \neq 0$ ausfällt, $\varphi_p(s)$ eine ebenfalls in s stetige Funktion, die die Gleichung

$$\int_a^b \varphi_p(s)\, \Phi_q(s)\, ds = l_{pq} \tag{36}$$

erfüllt, d. h. die Koeffizienten $l_{p1}, l_{p2}, \ldots$ der Linearform $L_p(x)$ sind die Fourier-Koeffizienten einer gewissen stetigen Funktion $\varphi_p(s)$ in bezug auf das vollständige orthogonale Funktionensystem $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$.

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (5)

$$u(s) = \varphi_p(s), \quad v(s) = \varphi_q(s),$$

so lehrt diese

$$\int_a^b \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds = l_{p1} l_{q1} + l_{p2} l_{q2} + \cdots = L_p(.)\, L_q(.)$$

und folglich wegen (29) und (30)

$$\int_a^b \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds = 0 \qquad (p \neq q),$$

$$\int_a^b (\varphi_p(s))^2 ds \quad = 1, \tag{37}$$

d. h. *die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ bilden ein orthogonales Funktionensystem.*

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (5) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = \varphi_p(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (34) und (35)

$$(38)\qquad \int_a^b K(s,t)\varphi_p(t)\,dt = k_1(s)l_{p1} + k_2(s)l_{p2} + \cdots = \varkappa_p\varphi_p(s),$$

oder, wenn wir

$$\lambda_p = \frac{1}{\varkappa_p}$$

einführen,

$$(39)\qquad \varphi_p(s) = \lambda_p\int_a^b K(s,t)\varphi_p(t)\,dt,$$

d. h. *die zu unserer ursprünglich vorgelegten Integralgleichung* (23) *gehörige homogene Integralgleichung*

$$(40)\qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_p$ *die wegen* (37) *gewiß nicht identisch verschwindende Lösung* $\varphi(s) = \varphi_p(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich zur Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des orthogonalen Systems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ fortschreitet.

Da die Linearform $M_p(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlichvielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ darstellt, so erkennen wir genau wie oben S. 182, daß

$$M_p(k(s)) = m_{p1}k_1(s) + m_{p2}k_2(s) + \cdots$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und eine stetige Funktion von s bestimmt, und hieraus wiederum schließen wir wie oben

$$\int_a^b M_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q1} + \cdots.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (33) erhalten wir

$$m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q2} + \cdots = 0,$$

und folglich ist auch

$$\int_a^b M_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = 0, \qquad (q = 1, 2, \ldots);$$

hieraus aber schließen wir sofort, indem wir in der Vollständigkeits-Relation (5)

$$u(s) = v(s) = M_p(k(s))$$

einsetzen,

$$\int_a^b (M_p(k(s))^2\,ds = 0,$$

d. h. es ist identisch für alle Werte s

$$M_p(k(s)) = 0.$$

Nunmehr wenden wir die Identität (31) an; wir betrachten zunächst den darin rechter Hand vorkommenden Ausdruck

$$L_1(x)L_1(y) + L_2(x)L_2(y) + \cdots. \tag{41}$$

Wenn wir hierin den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ irgendwelche konstante Werte mit endlicher Quadratsumme erteilen, so stellt wegen

$$(L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \cdots \leqq (x, x)$$

der Ausdruck (41) eine vollstetige lineare Funktion von $L_1(y), L_2(y), \ldots$ dar; der Tatsache 3 (S. 176) zufolge muß (41) demnach gleichmäßig und absolut konvergieren für alle Werte von $y_1, y_2, \ldots$, für die

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \cdots$$

unterhalb einer von $y_1, y_2, \ldots$ unabhängigen Grenze bleibt, und dies ist wegen

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \cdots \leqq (y, y)$$

gewiß immer der Fall, wenn (y, y) unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Wir verstehen nunmehr unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in der Identität (31) an Stelle der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ die Konstanten

$$x_p = \{g(*)\}_p, \tag{42}$$

deren Quadratsumme

$$\{g(*)\}_1{}^2 + \{g(*)\}_2{}^2 + \cdots = \int_a^b (g(s))^2 ds$$

endlich ist, und an Stelle der Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ die in s stetigen Funktionen

$$y_p \doteq k_p(s) = \{K(s, *\}_p, \tag{43}$$

deren Quadratsumme

$$(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \cdots = \int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

gewiß unterhalb einer von s unabhängigen Grenze, nämlich dem maximalen Werte M des rechts stehenden Integrales liegt. Mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation erhält dann die linke Seite jener Identität (31) den Wert

$$\int_a^b K(s, t) g(t) dt.$$

Andererseits wird bei Heranziehung der Gleichung (36) und der Vollständigkeits-Relation

$$L_p(\{g(*)\}) = l_{p1}\{g(*)\}_1 + l_{p2}\{g(*)\}_2 + \cdots = \int_a^b g(s)\varphi_p(s)\,ds,$$

und da $M_p(k(s))$ identisch verschwindet, so geht die rechte Seite jener Identität (31) mit Rücksicht auf (35) nach der Substitution (42), (43) in

$$\left(\int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds\right)(\varkappa_1\varphi_1(s)) + \left(\int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds\right)(\varkappa_2\varphi_2(s)) + \cdots$$

über. Setzen wir daher

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt \tag{44}$$

und, indem wir (38) berücksichtigen,

$$c_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds = \varkappa_p \int_a^b g(t)\varphi_p(t)\,dt,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten jener Identität zu der Formel

$$f(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \cdots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. *jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt* (44) *darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den orthogonalen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ fortschreitende, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickeln.*[1])

Wir haben oben erkannt, daß die homogene Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_p$ eine nicht verschwindende Lösung besitzt; *sie besitzt auch nur für diese Werte $\lambda = \lambda_p$ eine nicht verschwindende Lösung.* In der Tat, ist λ ein von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ verschiedener Wert und $\varphi(s)$ eine stetige jener Integralgleichung (40) genügende Funktion, so lehrt diese Integralgleichung, daß $\varphi(s)$ eine in der Gestalt (44) darstellbare Funktion ist; nach dem eben bewiesenen Entwicklungssatze haben wir mithin

$$\varphi(s) = \varphi_1(s)\int_a^b \varphi(s)\varphi_1(s)\,ds + \varphi_2(s)\int_a^b \varphi(s)\varphi_2(s)\,ds + \cdots. \tag{45}$$

Nun finden wir andererseits, indem wir (39) mit $\lambda\varphi(s)$ multiplizieren und nach s integrieren, ferner (40) mit $\lambda_p\varphi_p(s)$ multiplizieren und nach s integrieren und endlich die so entstehenden Gleichungen voneinander subtrahieren

1) Diesen Entwicklungssatz hatte ich in der ursprünglichen Veröffentlichung meiner „ersten Mitteilung" lediglich unter der Annahme eines „allgemeinen" Kerns bewiesen bzw. bei beliebigem Kern noch die Darstellbarkeit von $f(s)$ durch den zweifach zusammengesetzten Kern $KK(s,t)$ als Bedingung hingestellt; E. Schmidt ist es zuerst in seiner Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1905) gelungen, diese Einschränkung zu beseitigen.

$$(\lambda - \lambda_p)\int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)\,ds = 0,$$

d. h. wegen $\lambda \neq \lambda_p$

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)\,ds = 0;$$

und folglich wegen (45)

$$\varphi(s) = 0.$$

Da die oben S. 186 eingeführten Größen $k_1, k_2, \ldots$ dem dort angewandten Satze 40 in Kapitel XII zufolge notwendig gegen Null konvergieren, so können die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ im Endlichen keine Verdichtungsstelle haben, und es kann daher insbesondere jedesmal nur eine endliche Anzahl von gleichem Werte unter ihnen geben. Sei etwa

$$\lambda_p = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_{p+n-1}$$

und jeder andere Eigenwert von λ_p verschieden, so sind die n linear von einander unabhängigen Funktionen

$$\varphi_p,\ \varphi_{p+1},\ \ldots,\ \varphi_{p+n-1} \tag{46}$$

gewiß Lösungen der homogenen Integralgleichung für $\lambda = \lambda_p$. *Es gibt nun für $\lambda = \lambda_p$ auch keine andere Lösung jener Integralgleichung, die nicht eine lineare Kombination der n Lösungen* (46) *wäre.* In der Tat, ist $\varphi(s)$ irgendeine Lösung der Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_p$, so könnten wir wie vorhin den Ansatz (45) machen; das entsprechende Verfahren führt dann zu der Gleichung

$$(\lambda_p - \lambda_q)\int_a^b \varphi(s)\varphi_q(s)\,ds = 0$$

d. h. es wird

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_q(s)\,ds = 0$$

für alle Werte von q mit Ausnahme der n Werte

$$q = p,\quad p+1,\quad \ldots,\quad p+n-1;$$

damit ist die Behauptung bewiesen.

Was die inhomogene Integralgleichung (25) betrifft, so hat dieselbe nach den allgemeinen Ausführungen im vorigen Kapitel XIII für jedes von λ_p verschiedene λ eine und nur eine Lösung $\varphi(s)$; für $\lambda = \lambda_p$ jedoch ist sie nur lösbar, wenn $f(s)$ genau n lineare von einander unabhängige Integralbedingungen erfüllt. Nun ergibt sich aber, wenn wir die Gleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda_p\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{47}$$

mit $\varphi_q(s)$ multiplizieren und nach s integrieren

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s)\,ds = \int_a^b \varphi_q(s)\varphi(s)\,ds - \lambda_p \int_a^b \int_a^b K(s,t)\varphi_q(s)\varphi(t)\,ds\,dt$$

und mit Rücksicht auf die Symmetrie von $K(s,t)$ wegen (39), wenn $\varphi_p(s)$ eine der n Funktionen (46) bedeutet:

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s)\,ds = 0 \qquad (q = p, p+1, \ldots, p+n-1).$$

Diese n Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend zur Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (47).

Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und die zugehörigen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ sind wesentlich durch den Kern $K(s,t)$ bestimmt; ich habe sie *Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen* des Kerns $K(s,t)$ genannt.

Aus dem Entwickelungssatze folgt wegen

$$\int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_p}\int_a^b g(t)\varphi_p(t)\,dt \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

sofort

$$\begin{aligned} f(s) = \int_a^b K(s,t) g(t)\,dt &= \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b g(t)\varphi_1(t)\,dt \,.\, \varphi_1(s) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_2}\int_a^b g(t)\varphi_2(t)\,dt \,.\, \varphi_2(s) + \cdots. \end{aligned} \tag{48}$$

Besitzt ein Kern $K(s,t)$ nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so bricht die Reihe rechts beim $n$ten Gliede ab, und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(t)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$K(s,t) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n},$$

d. h. $K(s,t)$ *vermag*, wenn man eine der beiden Variabeln, etwa t, als Parameter auffaßt und diesem irgendwelche konstanten Werte erteilt, *nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln s darzustellen; insbesondere ist gewiß ein Eigenwert immer vorhanden, wenn nicht $K(s,t)$ identisch in s, t verschwindet.*

Schreibt man in (48) an Stelle von $g(t)$ die willkürliche Funktion $u(t)$, multipliziert diese Formel mit $u(s)$ und integriert nach s, so entsteht

$$\begin{aligned} \int_a^b\int_a^b K(s,t)u(s)u(t)\,ds\,dt &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{\int_a^b u(t)\varphi_1(t)\,dt\right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_2}\left\{\int_a^b u(t)\varphi_2(t)\,dt\right\}^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$J(u) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds\, dt,$$

$$u_p = \int_a^b u(t) \varphi_p(t) dt,$$

so nimmt jene Formel die Gestalt an

$$J(u) = \frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} + \cdots.$$

Andererseits haben wir

$$\int_a^b (u(s))^2 ds \geqq u_1^2 + u_2^2 + \cdots$$

und folglich

$$J(u) - \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b (u(s))^2 ds \leqq \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) u_2^2 + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1}\right) u_3^2 + \cdots.$$

Nehmen wir nun an, daß die Eigenwerte nicht sämtlich negativ seien und bedeutet dann λ_1 den kleinsten positiven Eigenwert, so fällt die rechte Seite dieser Formel gewiß nicht positiv aus; hieraus folgt, daß *der größte Wert, den das Doppelintegral $J(u)$ annimmt, wenn $u(s)$ eine stetige, der Bedingung*

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = 1$$

genügende Funktion sein soll, gleich dem reziproken Werte des kleinsten positiven Eigenwertes von $K(s, t)$ ist; dieses Maximum tritt ein, wenn $u(s)$ gleich der zugehörigen Eigenfunktion genommen wird.

Zum Schlusse dieses Kapitels berühren wir noch die wichtige Frage, unter welchen Umständen die Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ des Kerns $K(s, t)$ ein *vollständiges* orthogonales Funktionensytem bilden. Wie schon in Kapitel IV angegeben ist, *bilden die Eigenfunktionen gewiß dann ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, wenn der Kern $K(s, t)$ der orthogonalen Integralgleichung allgemein* (Kapitel IV S. 25) *ist.* In der Tat, ist $g(s)$ irgendeine stetige Funktion von s, so gibt es dann eine stetige Funktion $h(s)$, so daß die Ungleichung

$$\int_a^b \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt \right\}^2 ds < \varepsilon$$

gilt; daher wird, indem wir

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \cdots$$

einsetzen, auch

$$\int_a^b \{g(s) - c_1\varphi_1(s) - c_2\varphi_2(s) - \cdots\}^2 dt < \varepsilon.$$

Da die linke Seite durch Subtraktion der positiven Größe

$$\left(c_1 - \int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds\right)^2 + \left(c_2 - \int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds\right)^2 + \cdots$$

sicher nicht vergrößert wird, so folgt leicht

$$\int_a^b (g(s))^2 ds - \left(\int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds\right)^2 - \left(\int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds\right)^2 - \cdots < \varepsilon.$$

Bedenken wir, daß diese Ungleichung für beliebig kleine positive ε gelten muß, so ergibt sich sofort die zu beweisende Vollständigkeits-Relation.

Eine andere Bedingung dafür, daß die Eigenfunktionen von $K(s, t)$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden, ist die Abgeschlossenheit der aus K entspringenden quadratischen Form $K(x)$. Man erkennt auch leicht, daß die aus einem allgemeinen Kerne $K(s, t)$ entspringende quadratische Form stets abgeschlossen sein muß, womit die soeben bewiesene Behauptung übereinstimmt.

Wie wir sehen, sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ und deren Eigenschaften von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s), \ldots$ wesentlich unabhängig: in der Tat, jede aus $K(s, t)$ unter Vermittelung eines anderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems entspringende quadratische Form geht aus der quadratischen Form $K(x)$ durch eine orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ hervor, so daß die neuen Linearformen von den ursprünglichen sich nicht wesentlich unterscheiden.

Ist $\mathfrak{K}(s, t)$ eine nicht symmetrische Funktion der im Intervall a bis b sich bewegenden Variabeln s, t und setzt man

$$\begin{aligned}
K(s, t) &= 0 && \text{für} \quad a \leqq s < b, && a \leqq t < b,\\
&= \mathfrak{K}(s, t - b + a) && \text{„} \quad a \leqq s < b, && b \leqq t \leqq 2b - a,\\
&= \mathfrak{K}(t, s - b + a) && \text{„} \quad b \leqq s \leqq 2b - a, && a \leqq t < b,\\
&= 0 && \text{„} \quad b \leqq s \leqq 2b - a, && b \leqq t \leqq 2b - a,
\end{aligned}$$

so stellt $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion der im Intervall a bis $2b - a$ sich bewegenden Variabeln s, t dar. Die Anwendung meiner Theorie auf diesen Kern $K(s, t)$ führt unmittelbar zu den Entwickelungssätzen von E. Schmidt[1]), betreffend den unsymmetrischen Kern $\mathfrak{K}(s, t)$.

---

1) a. a. O. § 12—§ 14

Fünfzehntes Kapitel.

Die Theorie der polaren Integralgleichung.

Wenn $k(s)$ irgendeine gegebene Funktion von s bedeutet, so möge allgemein

$$f(s) = k(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

eine *Integralgleichung dritter Art* heißen. Es sei im folgenden $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion von s, t mit der Eigenschaft eines positiv definiten Kerns, d. h., wenn $u(s)$ irgendeine stetige Funktion bedeutet, so möge immer

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)u(s)u(t)\,ds\,dt \geqq 0$$

ausfallen; ferner setzen wir insbesondere

$$k(s) = V(s),$$

wo $V(s)$ eine Funktion von s bedeutet, die streckenweise abwechselnd die konstanten Werte $+1$ oder -1 und überhaupt keine anderen Werte annimmt und zwar so, daß $V(s)$ wenigstens an einer Stelle innerhalb des Intervalls a bis b und sicher nur an endlich vielen Stellen sein Zeichen ändert; die so entstehende Integralgleichung

$$f(s) = V(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{49}$$

mit symmetrischem definitem Kern werde der Kürze halber als *polare Integralgleichung* bezeichnet.

Mit Hilfe unserer Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Variabler gelingt es, für die polare Integralgleichung eine analoge Theorie zu entwickeln wie für die orthogonale Integralgleichung. Dabei bedarf es als Bindeglied und zur Vermittelung zwischen Integralgleichung und quadratischer Form irgendeines Systems von unendlichvielen Funktionen

$$\Pi_1(s),\ \Pi_2(s), \ldots$$

der Variabeln s, die im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetig ev. abteilungsweise stetig mit endlichvielen Sprungstellen an bestimmten Punkten des Intervalles sind und die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die *Polaritäts-Eigenschaft*

$$\begin{aligned} &\int_a^b V(s)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(s)\,ds = 0 && (p \neq q), \\ &\int_a^b V(s)(\Pi_p(s))^2\,ds \quad = v_p, \end{aligned} \tag{50}$$

wobei zur Abkürzung

$$v_1 = +1, \quad v_2 = -1, \quad v_3 = +1, \quad v_4 = -1, \quad v_5 = +1, \quad \ldots$$

gesetzt ist;

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ der Variabeln s

$$\int_a^b V(s)u(s)\,ds = v_1 \int_a^b V(s)u(s)\Pi_1(s)\,ds \int_a^b V(s)v(s)\Pi_1(s)\,ds$$
$$+ v_2 \int_a^b V(s)u(s)\Pi_2(s)\,ds \int_a^b V(s)v(s)\Pi_2(s)\,ds + \cdots$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s), \ldots$ als ein *polares vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgendeine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige Funktion von s, so mögen die Integrale

$$v_1 \int_a^b V(s)u(s)\Pi_1(s)\,ds, \quad v_2 \int_a^b V(s)u(s)\Pi_2(s)\,ds, \quad \ldots$$

die *Fourier-Koeffizienten* der Funktion $u(s)$ in bezug auf das polare vollständige Funktionensystem $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s), \ldots$ heißen und mit

$$[u(\star)]_1, \; [u(\star)]_2, \ldots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$[u(\star)]_p = v_p \int_a^b V(s)u(s)\Pi_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

wird.

Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(51) \qquad \int_a^b V(s)u(s)v(s)\,ds = v_1[u(\star)]_1[v(\star)]_1 + v_2[u(\star)]_2[v(\star)] + \cdots.$$

Um für das Intervall a bis b ein polares vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, fassen wir einmal die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = +1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ein orthogonales vollständiges Funktionensystem:

$$\Phi_1^{(+)}(s), \; \Phi_2^{(+)}(s), \; \ldots;$$

sodann fassen wir die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = -1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ebenfalls ein orthogonales vollständiges Funktionensystem

$$\Phi_1^{(-)}(s),\ \Phi_2^{(-)}(s),\ \ldots .$$

Setzen wir nunmehr

$$\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= \Phi_1^{(+)}(s),\\
\Pi_2(s) &= 0,\\
\Pi_3(s) &= \Phi_2^{(+)}(s),\\
\Pi_4(s) &= 0,\\
\Pi_5(s) &= \Phi_3^{(+)}(s),\\
&\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

sobald s in einem der ersteren Teilintervalle liegt, und

$$\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= 0,\\
\Pi_2(s) &= \Phi_1^{(-)}(s),\\
\Pi_3(s) &= 0,\\
\Pi_4(s) &= \Phi_2^{(-)}(s),\\
\Pi_5(s) &= 0,\\
&\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

sobald s in einem der letzteren Teilintervalle liegt, so erkennen wir sofort, daß die so definierten Funktionen $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s)$, ... sowohl die Polaritäts-Eigenschaft besitzen, als auch die Vollständigkeits-Relation erfüllen.

Wir bilden nun durch Vermittelung des polaren vollständigen Funktionensystems $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s)$, ... aus dem Kern $K(s, t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung eine Bilinearform, indem wir analog wie in Kapitel XIV

$$(52)\qquad \begin{aligned}
k_q(s) &= [K(s, *)]_q = v_q \int_a^b V(t) K(s, t) \Pi_q(t)\, dt,\\
k_{pq} &= [k_q(*)]_p = v_p v_q \int_a^b \int_a^b V(s) V(t) K(s, t) \Pi_p(s) \Pi_q(t)\, ds\, dt
\end{aligned}$$

setzen. Wegen der Symmetrie von $K(s, t)$ in s, t haben wir

$$k_{pq} = k_{qp},$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{pq} gebildete Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p y_q$$

eine solche, wie sie aus der quadratischen Form

$$(53)\qquad K(x) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p x_q$$

abgeleitet wird.

Nun ist unser spezielles Polarsystem $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \ldots$, wie sich unmittelbar aus seiner Definition ergibt, auch zugleich ein orthogonales vollständiges Funktionensystem für das Intervall a bis b; für den in dieser Auffassung gebildeten Fourier-Koeffizienten einer Funktion $u(s)$ ergibt sich leicht

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b u(t)\Pi_p(t)\,dt = v_p \int_a^b V(t)u(t)\Pi_p(t)\,dt = [u(*)]_p,$$

und daher sind insbesondere auch k_{pq} als Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$ in bezug auf ein orthogonales System anzusehen; wir können also genau wie in Kapitel XIV (S. 186) schließen, daß $K(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlichvielen Variabeln ist. Überdies ist $K(x)$ eine positiv definite Form; denn der $n$te Abschnitt derselben läßt sich in die Gestalt bringen

$$K_n(x) = \sum_{(p,\,q\,=\,1,2,\ldots,n)} v_p v_q x_p x_q \int_a^b\int_a^b V(s)\,V(t)\,K(s, t)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(t)\,ds\,dt$$
$$= \int_a^b\int_a^b K(s, t)\,P(s)\,P(t)\,ds\,dt,$$

worin zur Abkürzung

$$P(s) = \sum_{(p\,=\,1,2,\ldots,n)} v_p x_p V(s)\,\Pi_p(s)$$

gesetzt ist; das letztere Doppelintegral besitzt aber gewiß keine negativen Werte, da $K(s, t)$ nach Voraussetzung ein positiv definiter Kern ist.

Infolge dieser Tatsachen ist die Anwendung des Satzes 38* in Kapitel XII (S. 162) auf die Form $K(x)$ und die mit abwechselnden Vorzeichen gebildete Form

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots = x_1^2 - x_2^2 + - \cdots$$

gestattet, und dieser Satz liefert für jene quadratische Form eine Darstellung

$$K(x) = \Lambda_1^2(x) + \Lambda_2^2(x) + \cdots; \tag{54}$$

darin sind $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x) \ldots$ stetige Linearformen, die den Relationen

$$\Lambda_p(.)\,V(.,.)\,\Lambda_q(.) = 0 \qquad (p \neq q), \tag{55}$$

$$\Lambda_p(.)\,V(.,.)\,\Lambda_p(.) = \mathfrak{k}_p \tag{56}$$

genügen, wo $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergente Größen sind. Aus (54), (55), (56) folgt überdies

$$\Lambda_p(.)\,V(.,.)\,K(.,x) = \mathfrak{k}_p\,\Lambda_p(x). \tag{57}$$

Aus den obigen Bemerkungen über die orthogonale Natur des Funktionensystems $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \ldots$ folgt auch wie oben

$$\int_a^b ((K(s, t))^2\,dt = k_1^2(s) + k_2^2(s) + \cdots.$$

Setzen wir daher

$$\Lambda_p(x) = \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \cdots \qquad (p = 1, 2, \cdots),$$

so finden wir analog wie in Kapitel XIV, daß die Reihe

$$\Lambda_p(vk(s)) \equiv \lambda_{p1}v_1k_1(s) + \lambda_{p2}v_2k_2(s) + \cdots \tag{58}$$

gleichmäßig konvergiert und also eine stetige Funktion in s bestimmt. Durch Multiplikation mit $v_q V(s)\Pi_q(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (52)

$$[\Lambda_p(vk(*))]_q = \lambda_{p1}v_1k_1 + \lambda_{p2}v_2k_{q2} + \cdots.$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (57)

$$\lambda_{p1}v_1k_{q1} + \lambda_{p2}v_2k_{q2} + \cdots = \mathfrak{k}_p\lambda_{pq},$$

und folglich ist

$$[\Lambda_p(vk(*))]_q = \mathfrak{k}_p\lambda_{pq}. \tag{59}$$

Ist nun insbesondere $\mathfrak{k}_p = 0$, so folgt aus (59) — da ja nach einer obigen Bemerkung die Größen $[\Lambda_p(vk(*))]_q$ auch zugleich Fourier-Koeffizienten in bezug auf ein orthogonales vollständiges System sind — wie oben (S. 189), daß die Funktion $\Lambda_p(vk(s))$ identisch Null ist. Andererseits bezeichnen wir die von Null verschiedenen Größen $\mathfrak{k}_{p'}$ mit $\varkappa_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ und die entsprechenden Linearformen $\Lambda_{p'}$ mit Λ'_p sowie deren Koeffizienten mit $\lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \ldots$; setzen wir dann

$$\Lambda'_p(vk(s)) = |\varkappa_p|^{\frac{3}{2}} V(s)\pi_p(s), \tag{60}$$

so sind $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ abteilungsweise stetige Funktionen von s, für die wegen (59)

$$[V(*)\pi_p(*)_q] = (\pm 1)_p \frac{\lambda'_{pq}}{|\varkappa_p|^{\frac{1}{2}}}$$

wird, wo $(\pm 1)_p$ den Wert $+1$ oder -1 bedeuten soll, je nachdem $\varkappa_p$ positiv oder negativ ist.

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (51)

$$u(s) = V(s)\pi_p(s), \quad v(s) = V(s)\pi_q(s),$$

so lehrt dieselbe

$$\int_a^b V(s)\pi_p(s)\pi_q(s)\,ds = (\pm 1)_p(\pm 1)_q \frac{1}{|\varkappa_p\varkappa_q|^{\frac{1}{2}}}\{v_1\lambda'_{p1}\lambda'_{q1} + v_2\lambda'_{p2}\lambda'_{q2} + \cdots\}$$

$$= (\pm 1)_q(\pm 1)_q \frac{1}{|\varkappa_p\varkappa_q|^{\frac{1}{2}}} \Lambda'_p(.)\, V(.,.)\, \Lambda'_q(.)$$

und folglich wegen (55) und (56)

$$\begin{aligned} &\int_a^b V(s)\pi_p(s)\pi_q(s)\,ds = 0 && (p \neq q), \\ &\int^b V(s)(\pi_p(s))^2\,ds = (\pm 1)_p; \end{aligned} \tag{61}$$

wegen des Bestehens dieser Gleichungen sagen wir, daß die Funktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ *ein polares Funktionensystem bilden.*

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (51) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = V(t)\pi_p(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (58), (60)

$$(62) \qquad \int_a^b K(s, t)\pi_p(t)dt = (\pm 1)_p \frac{1}{|\varkappa_p|^{\frac{1}{2}}} (v_1 k_1(s)\lambda'_{p1} + v_2 k_2(s)\lambda'_{p2} + \cdots)$$
$$= \varkappa_p V(s)\pi_p(s),$$

oder wenn wir

$$\lambda_p = \frac{1}{\varkappa_p}$$

einführen,

$$(63) \qquad V(s)\pi_p(s) = \lambda_p \int_a^b K(s, t)\pi_p(t)dt;$$

d. h. *die zu unserer ursprünglichen vorgelegten polaren Integralgleichung* (49) *gehörige homogene polare Integralgleichung*

$$(64) \qquad V(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_p$ *die wegen* (61) *gewiß nicht identisch verschwindende Lösung* $\varphi(s) = \pi_p(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich der Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des polaren Systems $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ fortschreitet.

Bei dieser Untersuchung legen wir die aus (54) hervorgehende Identität

$$(65) \qquad K(x, y) = \Lambda_1(x)\Lambda_1(y) + \Lambda_2(x)\Lambda_2(y) + \cdots$$

zugrunde und wenden auf den hier rechts stehenden Ausdruck die analoge Betrachtung an, wie sie in Kapitel XIV auf den Ausdruck (41) angewandt worden ist. Wir verstehen dann wiederum unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in die Identität (65)

$$(66) \qquad \begin{aligned} x_p &= v_p[V(*)g(*)]_p, \\ y_p &= v_p k_p(s) = v_p[K(s, *)]_p \end{aligned}$$

ein. Da mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation (51) mit Hilfe von (52)

$$k_{1_p} v_1 [V(*) g(*)]_1 + k_{2_p} v_2 [V(*) g(*)]_2 + \cdots = \int_a^b k_p(s) g(s) ds$$
$$= \left[\int_a^b K(s, *) g(s) ds \right]_p$$

wird, so bekommt die linke Seite jener Identität (65) nach Einsetzung von (66) den Wert

$$v_1 k_1(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_1 + v_2 k_2(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_2 + \cdots$$
$$= \int_a^b \int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) g(t) dr dt.$$

Andererseits wird bei Heranziehung von (59) und der Vollständigkeits-Relation (51)

$$\Lambda_p'(v[V(*) g(*)]) = \lambda_{p\,1}' v_1 [V(*) g(*)]_1 + \lambda_{p\,2}' v_2 [V(*) g(*)]_2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{\varkappa_p} \int_a^b \Lambda_p'(v k(s)) g(s) ds$$
$$= \frac{|\varkappa_p|^{\frac{3}{2}}}{\varkappa_p} \int_a^b V(s) \pi_p(s) g(s) ds.$$

Folglich geht die rechte Seite jener Identität (65) nach der Substitution (66) mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $\Lambda_p(v k(s))$ verschwindet, sobald $\mathfrak{k}_p$ Null ist, und mit Bemerkung von (60) in

$$V(s) \left\{ \varkappa_1 |\varkappa_1| \int_a^b V(s) \pi_1(s) g(s) ds \cdot \pi_1(s) + \varkappa_2 |\varkappa_2| \int_a^b V(s) \pi_2(s) g(s) ds \cdot \pi_2(s) + \cdots \right\}$$

über. Setzen wir daher

$$f(s) = \int_a^b \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) g(r) dt dr \tag{67}$$
$$= \int_a^b VKVK(s, r) g(r) dr,$$

wo zur Abkürzung

$$VKVK(s, r) = \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) dt$$

gesetzt ist, und setzen wir ferner, indem wir (62) berücksichtigen,

$$c_p = (\pm 1)_p \int_a^b f(s) V(s) \pi_p(s) ds = \varkappa_p |\varkappa_p| \int_a^b V(s) g(s) \pi_p(s) ds,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten der Identität (65) nach Multiplikation mit $V(s)$ zu der Formel

$$f(s) = c_1\pi_1(s) + c_2\pi_2(s) + \cdots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. wir erhalten den Satz:

Satz 41. *Jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt* (67) *darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Funktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... fortschreitende gleichmäßig und absolut konvergente Reihe*

$$f(s) = c_1\pi_1(s) + c_2\pi_2(s) + \cdots,$$

$$c_p = (\pm 1)_p \int_a^b f(s)\, V(s)\pi_p(s)\, ds$$

entwickeln.

Die Werte λ_1, λ_2, ... wachsen, wenn in unendlicher Zahl vorhanden, absolut genommen über alle Grenzen; sie und die zugehörigen polaren Funktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... sind wesentlich durch $K(s, t)$ und $V(s)$ bestimmt; wir nennen sie die *Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen der polaren Integralgleichung* (49). Den Eigenwerten und Eigenfunktionen einer polaren Integralgleichung kommen die entsprechenden Eigenschaften zu, wie wir sie oben in Kapitel XIV im Falle der orthogonalen Integralgleichung gefunden haben. Insbesondere erkennen wir durch ganz analoge Betrachtungen folgenden Satz:

Satz 42. *Die zur polaren Integralgleichung* (49) *gehörige homogene polare Integralgleichung* (64) *besitzt nur für diese Eigenwerte $\lambda = \lambda_p$ eine nicht verschwindende Lösung, und die zu λ_p gehörigen polaren Eigenfunktionen bzw. deren lineare Kombinationen sind auch die einzigen Lösungen der homogenen Integralgleichung* (64).

Besitzt eine polare Integralgleichung nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so folgt aus dem Entwicklungssatze wegen

$$(\pm 1)_p \int_a^b f(s)\, V(s)\pi_p(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_p \,|\, \lambda_p} \int_a^b V(s)\pi_p(s) g(s)\, ds \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

sofort

$$f(s) = \int_a^b VKVK(s, r) g(r)\, dr$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \,|\, \lambda_1} \int_a^b V(r)\pi_1(r) g(r)\, dr \cdot \pi_1(s) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n \,|\, \lambda_n} \int_a^b V(r)\pi_n(r) g(r)\, dr \cdot \pi_n(s),$$

und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(r)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$VKVK(s,t) = V(t)\left\{\frac{1}{\lambda_1 \mid \lambda_1 \mid}\pi_1(s)\pi_1(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n \mid \lambda_n}\pi_n(s)\pi_n(t)\right\}$$

oder nach Multiplikation mit $V(s)$

$$\int_a^b K(s,r)\,V(r)\,K(r,t)\,dr = V(s)\,V(t)\left\{\frac{1}{\lambda_1 \mid \lambda_1 \mid}\pi_1(s)\pi_1(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n \mid \lambda_n}\pi_n(s)\pi_n(t)\right\},$$

d. h. *$K(s,t)$ ist eine derartige Funktion von s, t, daß, wenn man die Funktion*

$$KVK(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,V(r)\,K(r,t)\,dr$$

bildet und darin eine der beiden Variabeln, etwa t, als Parameter auffaßt, diese Funktion $KVK(s,t)$ für beliebige t nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln darzustellen vermag; insbesondere ist gewiß ein Eigenwert der polaren Integralgleichung immer vorhanden, wenn nicht $KVK(s,t)$ identisch in s, t verschwindet.

Die letzte Aussage gestattet die Umkehrung. In der Tat, verschwindet $KVK(s,t)$ identisch in s, t und besäße dann die homogene polare Integralgleichung (64) für irgendeinen Wert von λ eine Lösung $\varphi(s)$, so würde durch Multiplikation derselben mit $K(r,s)\,V(s)$ und Integration nach s

$$\int_a^b K(r,s)\,\varphi(s)\,ds - \lambda\int_a^b KVK(r,t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

mithin

$$\int_a^b K(r,s)\,\varphi(s)\,ds = 0$$

und wegen (64)

$$\varphi(s) = 0$$

folgen, d. h. *die polare Integralgleichung besitzt gewiß keinen Eigenwert, wenn $KVK(s,t)$ identisch verschwindet.*

Nehmen wir beispielsweise das Intervall $a = 0$ bis $b = 1$,

$$V(s) = +1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < \tfrac{1}{2},$$
$$V(s) = -1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1$$

und

$$K(s,t) = K(s+\tfrac{1}{2}, t) = K(s, t+\tfrac{1}{2}),$$

so gewinnen wir eine polare Integralgleichung mit nicht verschwindendem Kern $K(s,t)$, die keinen Eigenwert besitzt, da, wie leicht erkannt wird, die Funktion $KVK(s,t)$ identisch verschwindet.

Wird von dem Kern $K(s,t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung vorausgesetzt, daß er ein allgemeiner ist, so läßt sich leicht zeigen, daß, wenn $f(s)$ eine beliebige stetige Funktion und ε irgendeine noch so kleine positive Größe bedeutet, stets mittelst geeigneter Koeffizienten eine solche

lineare Kombination $f^*(s)$ aus einer endlichen Anzahl der Eigenfunktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... gebildet werden kann, daß

$$\int_a^b (f(s) - f^*(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt. Ferner ist dann die quadratische Form $K(x)$ abgeschlossen (S 194), und wir können daher in der obigen Entwicklung an Stelle des Satzes 38* in Kapitel XII den Satz 38 ebenda (S. 156) anwenden; wir finden so, daß in diesem Falle die polare Integralgleichung *sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte besitzt.*

Wie man unmittelbar sieht, bleiben die sämtlichen Entwicklungen und Resultate der Kapitel XIII, XIV, XV gewiß dann gültig, wenn der Kern $K(s, t)$ Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt — in dem Sinne, den wir in Kapitel VI (S. 31) festgesetzt haben; denn dann bleibt $(K(s, t))^2$ integrierbar und daher die aus $K(s, t)$ entstehende bilineare bzw. quadratische Form stetig.

Aber es zeigt sich sogar, daß im wesentlichen die absolute Integrabilität des Kerns — wenn dieser bei $s = t$ unendlich wird — für die Gültigkeit der Theorie genügt. Hier sei nur erwähnt, daß der Beweis hierfür wiederum in der einfachsten Weise mittelst der Methode der unendlich vielen Variabeln durch eine geringe Modifikation des obigen Verfahrens gelingt, während, wie es scheint, alle bisher zur Auflösung der Integralgleichungen benutzten Methoden, insbesondere auch die Methode von Fredholm nicht anwendbar sind, da für einen solchen Kern die im Nenner der „Fredholmschen Resolvente" auftretende Potenzreihe nicht konvergieren muß und auch für keinen der durch Iteration entstehenden Kerne die Konvergenz der entsprechenden Potenzreihe stattzufinden braucht. Um mittelst der Methode der unendlich vielen Variabeln die Lösung der Integralgleichung in diesem Falle zu erzielen, bedienen wir uns des Satzes, daß die aus einem Kern $K(s, t)$ entspringende Bilinearform mit unendlich vielen Variabeln gewiß vollstetig ausfällt, sobald die Singularität des Kerns von der Art wie $f(s - t)$ ist, wo $f(x)$ eine bei $x = 0$ absolut integrable, sonst stetige Funktion bedeutet. Man hat alsdann zum Beweise nur nötig, diejenige Integral gleichung heranzuziehen, der die Funktion

$$\psi(s) = \int_a^s \varphi(s) ds$$

genügt.

Sechszehntes Kapitel.

Anwendung der Theorie der polaren Integralgleichungen auf Differentialgleichungen und auf Systeme von simultanen Differentialgleichungen.

Die im vorigen Kapitel XV gefundene Entwicklung willkürlicher Funktionen, die nach polaren Funktionen fortschreiten, bildet eine wesentliche Ergänzung der bekannten Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen; insbesondere kommen in der Theorie der Differentialgleichungen polare Funktionensysteme neben den orthogonalen Systemen zur Anwendung und erweisen sich dann als ein ebenso notwendiges Hilfsmittel, wie die in der Literatur bisher allein behandelten orthogonalen Funktionensysteme.

So ist bisher in der bekannten Sturm-Liouvilleschen Theorie der Differentialgleichung[1])

$$\frac{d\left(p\,\frac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)u = 0 \tag{68}$$

stets die Voraussetzung gemacht worden, daß k eine im betrachteten Intervalle a bis b positive Funktion sei.[2]) Lassen wir diese Voraussetzung fallen und nehmen vielmehr an, daß k eine stetige Funktion sei, die im Intervalle a bis b eine endliche Anzahl von Malen ihr Vorzeichen wechselt, so führt, wenn $q \leqq 0$ ausfällt, die in Kapitel VII—VIII dargelegte Methode nicht wie dort auf eine orthogonale, sondern auf eine polare Integralgleichung mit definitem Kern, und da dieser Kern überdies allgemein ist, so zeigt die im vorigen Kapitel XV begründete Theorie, daß die Differentialgleichung (68) nunmehr sowohl für unendlich viele positive, wie für unendlich viele negative Werte des Parameters λ — die sogenannten Eigenwerte — Lösungen besitzt, die den betreffenden homogenen Randbedingungen genügen und die Eigenfunktionen der Differentialgleichung heißen mögen. Diese Eigenfunktionen bilden, von dem Faktor $\sqrt{|k|}$ abgesehen, ein polares Funktionensystem, und es folgt der Satz, daß jede viermal stetig differenzierbare Funktion, die in den Randpunkten a, b und den Nullpunkten von k gewisse Bedingungen erfüllt, sich in eine nach jenen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Wir erkennen somit, daß alle wesentlichen Aussagen der Sturm-

1) Vgl. Kapitel VII.

2) Vgl. indes Bôcher, Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. IV (1898), pag. 367, wo das die Gleichung $y'' = \varphi(x, \lambda)y$ betreffende Oszillationstheorem bewiesen wird.

Liouvilleschen Theorie unabhängig von der Voraussetzung des definiten Charakters der Funktion k gültig bleiben, wenn nur die Funktion p den definiten Charakter besitzt und $q \leqq 0$ ist.

Die in Kapitel VIII gegebene Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + (q + \lambda k)u = 0$$

gestattet nunmehr die entsprechende Erweiterung auf den Fall, daß die stetige Funktion k in einer endlichen Anzahl von regulär begrenzten Teilgebieten innerhalb des Gebietes J verschiedene Vorzeichen besitzt. Wir erkennen wiederum genau auf dem eben angedeuteten Wege, daß diese partielle Differentialgleichung sowohl für unendlich viele positive, wie für unendlich viele negative Werte des Parameters λ der betreffenden homogenen Randbedingung genügende Lösungen besitzt[1]), nach denen sich gewiß eine jede viermal stetig differenzierbare Funktion entwickeln läßt, wenn sie auf dem Rande sowie in den Grenzkurven jener Teilgebiete gewisse leicht anzugebende Bedingungen erfüllt.

Die in Kapitel VII—VIII entwickelte Theorie der linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich auch auf Systeme von simultanen linearen Differentialgleichungen ausdehnen. Dies soll an dem Beispiel des Systems zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Variabeln gezeigt werden.

Es seien $u_1(x)$, $u_2(x)$ die zu bestimmenden Funktionen der unabhängigen Variabeln x und

$$\begin{aligned} Q(u_1', u_2', u_1, u_2) = \; & p_{11}(x)u_1'^2 + 2p_{12}(x)u_1'u_2' + p_{22}u_2'^2 \\ & + 2q_{11}(x)u_1'u_1 + 2q_{12}u_1'u_2 + 2q_{21}u_2'u_1 + 2q_{22}u_2'u_2 \\ & + r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2 \end{aligned}$$

ein homogener quadratischer Ausdruck in u_1, u_2 und den ersten Ableitungen

$$u_1' = \frac{du_1(x)}{dx}, \quad u_2' = \frac{du_2(x)}{dx},$$

dessen Koeffizienten p_{11}, p_{12}, p_{22}, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, r_{11}, r_{12}, r_{22} gegebene stetige Funktionen von x sind und worin überdies $p_{11}p_{22} - p_{12}^2$ für keinen Wert des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ verschwinden soll.

---

1) Die Existenz dieser Funktionen für die partielle Differentialgleichung $\Delta u + \lambda k u = 0$ hat bereits M. Mason nach einer von mir herrührenden Methode gezeigt; Journ. de Math. 1904.

Durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals

$$D(u_1, u_2) = \int_a^b Q(u_1', u_2', u_1, u_2)\,dx$$

entsteht das System der zwei linearen Differentialgleichungen

$$L_1(u_1, u_2) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) = 0, \tag{69}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L_1(u) &= L_1(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,\frac{\partial Q}{\partial u_1'}}{dx} - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right), \\ L_2(u) &= L_2(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,\frac{\partial Q}{\partial u_2'}}{dx} - \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right) \end{aligned} \tag{70}$$

gesetzt wird.

Bedeuten v_1, v_2 wiederum zwei Funktionen von x, so finden wir durch Anwendung der Produktintegration das Analogon der Greenschen Formel, wie folgt

$$\begin{aligned} &\int_a^b \{v_1 L_1(u) - u_1 L_1(v) + v_2 L_2(u) - u_2 L_2(v)\}\,dx \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\left[v_1 \frac{\partial Q}{\partial u_1'} - u_1 \frac{\partial Q}{\partial v_1'} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial u_2'} - u_2 \frac{\partial Q}{\partial v_2'}\right]_a^b. \end{aligned} \tag{71}$$

Wir wollen nun die Lösungen $u_1(s), u_2(s)$ der Differentialgleichungen (69) bei homogenen Randbedingungen nach Analogie der in Kapitel VII (S. 41—42) aufgestellten Bedingungen I—V unterwerfen. Der Kürze halber ziehen wir jedoch hier nur die Forderung des Verschwindens beider Funktionen an den Randpunkten a, b, also die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(a) &= 0, \quad u_1(b) = 0, \\ u_2(a) &= 0, \quad u_2(b) = 0 \end{aligned} \tag{72}$$

in Betracht. Wir nehmen nunmehr an, es gäbe zwei den Parameter ξ enthaltende Systeme von Lösungen der Differentialgleichungen (69)

$$\begin{aligned} u_1 &= G_{11}(x, \xi), \quad & u_1 &= G_{12}(x, \xi), \\ u_2 &= G_{21}(x, \xi), \quad & u_2 &= G_{22}(x, \xi) \end{aligned} \tag{73}$$

von folgender Beschaffenheit:

1. Die vier Funktionen G_{11}, G_{21}, G_{12}, G_{22} sind sämtlich zweimal stetig differenzierbare Funktionen für alle x mit Ausnahme der Stelle $x = \xi$ innerhalb des Intervalles a bis b; für $x = \xi$ sind jene vier Funktionen vielmehr von der Gestalt

$$\begin{aligned} G_{11}(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\pi_{11}(\xi)\,|x - \xi| + S_{11}(x), \quad & G_{12}(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\pi_{12}(\xi)\,|x - \xi| + S_{12}(x), \\ G_{21}(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\pi_{21}(\xi)\,|x - \xi| + S_{21}(x), \quad & G_{22}(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\pi_{22}(\xi)\,|x - \xi| + S_{22}(x), \end{aligned}$$

wo π_{11}, π_{12}, π_{21}, π_{22} die aus den Gleichungen

$$\pi_{11}p_{11} + \pi_{21}p_{12} = 1, \quad \pi_{12}p_{11} + \pi_{22}p_{12} = 0,$$
$$\pi_{11}p_{12} + \pi_{21}p_{22} = 0, \quad \pi_{12}p_{12} + \pi_{22}p_{22} = 1$$

zu bestimmenden Funktionen des Parameters ξ, und S_{11}, S_{21}, S_{12}, S_{22} stetig differenzierbare Funktionen von x sind.

2. Die beiden Funktionenpaare G_{11}, G_{21} und G_{12}, G_{22} genügen identisch in ξ den Randbedingungen (72).

Das System der vier Funktionen (73) heiße dann *das Greensche System für die Differentialausdrücke L_1, L_2 bei den Randbedingungen* (72).

Setzen wir in der Greenschen Formel (71)

$$u_1 = G_{11}(x, \xi), \quad v_1 = G_{11}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{21}(x, \xi), \quad v_2 = G_{21}(x, \xi^*),$$

ferner

$$u_1 = G_{11}(x, \xi), \quad v_1 = G_{12}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{21}(x, \xi), \quad v_2 = G_{22}(x, \xi^*)$$

und endlich

$$u_1 = G_{12}(x, \xi), \quad v_1 = G_{12}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{22}(x, \xi), \quad v_2 = G_{22}(x, \xi^*),$$

so finden wir leicht das *Symmetriegesetz des Greenschen Systems der Differentialausdrücke L_1, L_2,*

$$G_{11}(x, \xi) = G_{11}(\xi, x),$$
$$G_{12}(x, \xi) = G_{21}(\xi, x),$$
$$G_{22}(x, \xi) = G_{22}(\xi, x).$$

Bezeichnen nun $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gegebene stetige Funktionen der Variabeln x und verstehen wir unter $f_1(x)$, $f_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen

$$(74) \qquad \begin{aligned} L_1(f_1, f_2) &= -\varphi_1(x), \\ L_2(f_1, f_2) &= -\varphi_2(x), \end{aligned}$$

die durchweg innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar sind und den Randbedingungen (72) genügen, so finden wir mit Hilfe der Greenschen Formel (71) ebenfalls leicht

$$(75) \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi) \} d\xi, \\ f_2(x) &= \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi) \} d\xi. \end{aligned}$$

Umgekehrt, die so dargestellten Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ sind Lösungen von (74) und genügen zugleich den Randbedingungen (72).

Wir definieren jetzt folgende Funktion von x bzw. x, ξ in dem Intervalle a bis $2b-a$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) && \text{für } a \leqq x < b \\
&= f_2(x-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \\
\varphi(x) &= \varphi_1(x) && \text{„ } a \leqq x < b, \\
&= \varphi_2(x-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \\
G(x,\xi) &= G_{11}(x,\xi) && \text{„ } a \leqq x < b, \quad a \leqq \xi < b, \\
&= G_{12}(x,\xi-b+a) && \text{„ } a \leqq x < b, \quad b \leqq \xi \leqq 2b-a, \\
&= G_{21}(x-b+a,\xi) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \quad a \leqq \xi < b, \\
&= G_{22}(x-b+a,\xi-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \quad b \leqq \xi \leqq 2b-a.
\end{aligned}$$

Alsdann stellen sich die Integralgleichungen (75) in der Gestalt der einen Integralgleichung dar (vgl. Kap. XIV, S. 194):

$$f(x) = \int_a^{2b-a} G(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{76}$$

Die Funktion $G(x,\xi)$ ist nach dem vorhin aufgestellten Symmetriegesetz symmetrisch in bezug auf die beiden Variabeln x, ξ; sie stellt überdies einen Kern dar, der, wie wir aus (74) schließen, abgeschlossen und allgemein ist.

Wir betrachten nun die durch Einfügung eines Parameters λ erweiterten simultanen Differentialausdrücke

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(u_1,u_2) &= L_1(u_1,u_2) + \lambda(k_{11}(x)u_1 + k_{12}(x)u_2), \\
\Lambda_2(u_1,u_2) &= L_2(u_1,u_2) + \lambda(k_{21}(x)u_1 + k_{22}(x)u_2),
\end{aligned} \tag{77}$$

wo k_{11}, $k_{12} = k_{21}$, k_{22} gegebene stetige Funktionen von x sein mögen, deren Determinante $k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ nur in einer endlichen Zahl von Teilintervallen verschiedene Vorzeichen besitzt.

Wir lösen nun die Gleichungen

$$\begin{aligned}
v_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2, \\
v_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2
\end{aligned} \tag{78}$$

nach u_1, u_2 auf, wie folgt

$$\begin{aligned}
u_1 &= \varkappa_{11}v_1 + \varkappa_{12}v_2, \\
u_2 &= \varkappa_{21}v_1 + \varkappa_{22}v_2, \quad (\varkappa_{12} = \varkappa_{21}),
\end{aligned} \tag{79}$$

und bestimmen dann α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} als irgendwelche Funktionen von x derart, daß, wenn

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11}\varphi_1 + \alpha_{12}\varphi_2, \\
v_2 &= \alpha_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2
\end{aligned} \tag{80}$$

gesetzt wird, in φ_1, φ_2 die Identität

$$\varkappa_{11}v_1^2 + 2\varkappa_{12}v_1v_2 + \varkappa_{22}v_2^2 = V_1(x)\varphi_1^2 + V_2(x)\varphi_2^2 \tag{81}$$

besteht, wo $V_1(x)$, $V_2(x)$ Funktionen von x sein sollen, die nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Die Substitution (80) möge ferner die Identität

$$(82)\quad \begin{aligned} &G_{11}v_1(x)v_1(\xi) + G_{12}v_1(x)v_2(\xi) + G_{21}v_2(x)v_1(\xi) + G_{22}v_2(x)v_2(\xi) \\ &= H_{11}\varphi_1(x)\varphi_1(\xi) + H_{12}\varphi_1(x)\varphi_2(\xi) + H_{21}\varphi_2(x)\varphi_1(\xi) + H_{22}\varphi_2(x)\varphi_2(\xi) \end{aligned}$$

liefern, wo H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} Funktionen von x, ξ werden; endlich bezeichne $H(x, \xi)$ diejenige symmetrische Funktion von x, ξ im Intervalle a bis $2b - a$, die aus H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} ebenso gebildet ist, wie vorhin $G(x, \xi)$ aus G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}.

Damit haben wir die Mittel zur Erledigung der Frage gewonnen, ob die homogenen Differentialgleichungen

$$(83)\qquad \Lambda_1(u_1, u_2) = 0, \quad \Lambda_2(u_1, u_2) = 0$$

außer Null Lösungen besitzen, die zugleich den Randbedingungen genügen. In der Tat, aus

$$L_1(u_1, u_2) = -\lambda(k_{11}u_1 + k_{12}u_2),$$
$$L_2(u_1, u_2) = -\lambda(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)$$

folgt nach (74), (75)

$$u_1(x) = \lambda\int_a^b \{G_{11}(x, \xi)(k_{11}(\xi)u_1(\xi) + k_{12}(\xi)u_2(\xi)) + G_{12}(x, \xi)(k_{21}(\xi)u_1(\xi) + k_{22}(\xi)u_2(\xi))\}\, d\xi,$$

$$u_2(x) = \lambda\int_a^b \{G_{21}(x, \xi)(k_{11}(\xi)u_1(\xi) + k_{12}(\xi)u_2(\xi)) + G_{22}(x, \xi)(k_{21}(\xi)u_1(\xi) + k_{22}(\xi)u_2(\xi))\}\, d\xi,$$

oder nach Ausführung der Substitution (78), (79)

$$\varkappa_{11}(x)v_1(x) + \varkappa_{12}(x)v_2(x) = \lambda\int_a^b \{G_{11}(x, \xi)v_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)v_2(\xi)\}\, d\xi,$$

$$\varkappa_{21}(x)v_1(x) + \varkappa_{22}(x)v_2(x) = \lambda\int_a^b \{G_{21}(x, \xi)v_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)v_2(\xi)\}\, d\xi.$$

Wenden wir endlich auf die Funktionen v_1, v_2 die Substitution (80) an und kombinieren diese Gleichungen entsprechend, so erhalten dieselben unter Zuziehung von (81), (82) die Gestalt

$$V_1(x)\varphi_1(x) = \lambda\int_a^b \{H_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + H_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\, d\xi,$$

$$V_2(x)\varphi_2(x) = \lambda\int_a^b \{H_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + H_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\, d\xi,$$

oder

$$(84)\qquad V(x)\varphi(x) - \lambda\int_a^{2b-a} H(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi = 0,$$

wo φ, H die festgesetzte Bedeutung haben und $V(x)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} V(x) &= V_1(x), & a \leqq x \leqq b, \\ &= V_2(x-b+a), & b \leqq x \leqq 2b-a \end{aligned}$$

definiert ist.

Aus (84) haben wir zunächst φ zu bestimmen und daraus die Funktionenpaare φ_1, φ_2, alsdann nach (80) v_1, v_2 und schließlich aus (79) die gesuchten Integrale u_1, u_2 von (83) zu entnehmen. Hinsichtlich des Charakters der Integralgleichung (84) sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $V(x)$ für alle x dasselbe Vorzeichen darstellt oder nicht.

Der erste Fall tritt ein, wenn die quadratische Form

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2$$

für alle Argumente x positiv oder negativ definit ausfällt, d. h. wenn für alle x

$$k_{11}(x)k_{22}(x) - k_{12}^2(x) > 0 \tag{85}$$

ist. Die Integralgleichung (84) ist dann eine orthogonale, und es gibt unserer Theorie zufolge *unendlich viele Werte von λ — die Eigenwerte $\lambda^{(p)}$ —*, für die Lösungen der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare $u_1^{(p)}$, $u_2^{(p)}$ jenes Differentialgleichungssytems* (83). Jedes Paar zweimal stetig differenzierbarer, in den Randpunkten verschwindender Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln wie folgt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c_1u_1^{(1)}(x) + c_2u_1^{(2)}(x) + \cdots, \\ f_2(x) &= c_1u_2^{(1)}(x) + c_2u_2^{(2)}(x) + \cdots. \end{aligned}$$

Ist die Bedingung (85) nicht erfüllt, so wird $V(x)$ gewiß beide Werte $+1$ und -1 annehmen. Die Integralgleichung (84) ist dann eine polare Integralgleichung mit definitem Kern, sobald die quadratische Form $Q(u_1', u_2', u_1, u_2)$ für alle Variabelnwerte x hinsichtlich der vier Argumente u_1', u_2', u_1, u_2 positiv definiten oder negativ definiten Charakter hat. Ist diese Bedingung erfüllt, so findet die in Kapitel XV entwickelte Theorie der polaren Integralgleichung Anwendung, und wir erkennen, daß es wiederum unendlich viele und zwar sowohl *unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Werte von λ — die Eigenwerte* — gibt, für die Lösungen von der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare jenes Differentialgleichungssystems* (83). Jedes Paar viermal stetig differenzierbarer Funktionen, die in Randpunkten und in den Nullstellen von $k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ gewissen Bedingungen genügen, läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln.

Daß es für die simultanen Differentialgleichungen (69) stets ein Greensches Funktionensystem ev. im erweiterten Sinne (vgl. Kapitel VII

S. 44) gibt, wird in derselben Weise gezeigt, wie im Falle einer einzigen Differentialgleichung.

Eine genau entsprechende Behandlung gestatten die Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen.

Was die Konstruktion Greenscher Funktionen für simultane partielle Differentialausdrücke betrifft, so können wir uns desselben Verfahrens bedienen, das ich im zweiten Abschnitt für einen einzelnen linearen partiellen Differentialausdruck entwickelt habe.[1]) Dieses Verfahren erfordert aber nicht nur, daß der vorgelegte Differentialausdruck die Normalform besitzt, sondern es setzt auch die Kenntnis der Greenschen Funktion für den Ausdruck Δ voraus — zwei Umstände, die die Verallgemeinerungsfähigkeit des Verfahrens erheblich beeinträchtigen. Es ist daher die Bemerkung von Wichtigkeit, daß bei jenem Verfahren die Eigenschaft der Greenschen Funktion, der Gleichung $\Delta = 0$ zu genügen, gar nicht wesentlich benutzt wird und daher in demselben die Greensche Funktion sich durch irgendeine Funktion der Variabelnpaare xy, $\xi\eta$ ersetzen läßt, die nur die übrigen für das Verfahren wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzt. Auf diese Weise entsteht ein neues Verfahren,[2]) welches, wie mir scheint, eine sehr weite Anwendungsfähigkeit besitzt, indem es auch zum Ziele führt, wenn die Glieder zweiter Ordnung in den partiellen Differentialgleichungen nicht in der üblichen Normalform vorgelegt sind, ja sogar auch auf Differentialgleichungen erster Ordnung, sowie auf partielle Differentialgleichungen von parabolischem und hyperbolischem Typus mit vollem Erfolge anwendbar ist. — Im folgenden Abschnitt wird diese Methode an dem Beispiel der partiellen Differentialgleichung auf der Kugel ausführlich dargelegt werden (Kap. XVIII).

---

1) Betreffs der hier angedeuteten Methode der „Parametrix" vgl. den Bericht über einen von mir in der mathematischen Gesellschaft zu Göttingen gehaltenen Vortrag, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907), S. 77—78.

2) Dieses von mir in Kapitel IX (zuerst Gött. Nachr. 1904, S. 247—250) dargelegte Verfahren ist dasselbe, dessen sich neuerdings auch É. Picard (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXII, 1906, S. 250—254) zur Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung, die auch erste Ableitungen enthält, bedient hat.