

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Vierter Abschnitt. Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen
Variablen

Vierter Abschnitt.

Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln.

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir eine neue Methode zur Behandlung der Integralgleichungen entwickeln, die auf einer Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln beruht.

Die systematische Behandlung der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln ist auch an sich von großer Wichtigkeit und bildet eine wesentliche Ergänzung der bekannten Theorie der quadratischen Formen mit endlicher Variablenzahl. Die Anwendungen der Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln sind nicht auf die Integralgleichungen beschränkt: es bietet sich nicht minder eine Berührung dieser Theorie mit der schönen Theorie der Kettenbrüche von Stieltjes¹⁾ dar, wie andererseits mit der Frage nach der Auflösung von Systemen unendlich vieler linearer Gleichungen, deren Untersuchung Hill, Poincaré, H. v. Koch und andere erfolgreich in Angriff genommen haben. Auch zu den Untersuchungen Minkowskis über Volumen und Oberfläche findet in methodischer Hinsicht nahe Beziehung statt. Vor allem aber eröffnet die Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln einen neuen Zugang zu den allgemeinsten Entwicklungen willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen nach Fourierscher Art, wie am Schlusse von Kapitel XI angedeutet werden wird.²⁾

Elftes Kapitel.

Theorie der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form mit unendlichvielen Variabeln.

Es seien

$$k_{pq} = k_{qp},$$

wo jeder der beiden Indizes p, q die Reihe aller ganzen Zahlen $1, 2, \dots$ durchläuft, beliebig gegebene reelle Konstanten, dann stellt

$$K(x) = \sum_{(p, q = 1, 2, \dots)} k_{pq} x_p x_q$$

eine *quadratische Form* mit den unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \dots$ dar; die Konstanten k_{pq} heißen die Koeffizienten dieser quadratischen Form. Ein Ausdruck

1) Recherches sur les fractions continues, Ann. de Toulouse Bd. 8 (1894).

2) Man vergleiche zu der hier entwickelten Theorie die Habilitationsschrift von Hellinger „Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen“. Journal für Math. Bd. 136.

$$A(x, y) = \sum_{(p, q=1, 2, \dots)} a_{pq} x_p y_q$$

mit irgendwelchen Koeffizienten a_{pq} heißt ein *bilinearer Ausdruck* oder eine *bilineare Form* der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$. Der Ausdruck

$$K(x, y) = \sum_{(p, q=1, 2, \dots)} k_{pq} x_p y_q$$

heißt die zu $K(x)$ gehörige *Bilinearform* der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$.

Lassen wir die Indizes p, q nur die Werte $1, \dots, n$ durchlaufen, wo n eine endliche Zahl bedeutet, so entspringen die Formen mit der endlichen Variablenzahl n , wie folgt:

$$K_n(x) = \sum_{(p, q=1, \dots, n)} k_{pq} x_p x_q,$$

$$K_n(x, y) = \sum_{(p, q=1, \dots, n)} k_{pq} x_p y_q.$$

Die Formen $K_n(x)$, $K_n(x, y)$ mögen die *Abschnitte* der Form $K(x)$ bzw. $K(x, y)$ heißen und auch, mitunter, ohne den Index n ausdrücklich hinzuzusetzen, mit $[K]$ bezeichnet werden.

Wenn irgendein bilinearer Ausdruck mit endlicher Variablenzahl

$$A_n(x, y) = \sum_{(p, q=1, \dots, n)} a_{pq} x_p y_q$$

vorgelegt ist, so heiße die Summe aller Koeffizienten der Glieder $x_p y_p$ die *Faltung* des Ausdruckes $A_n(x, y)$ und werde mit $A_n(\cdot, \cdot)$ bezeichnet; es ist also

$$A_n(\cdot, \cdot) = \sum_{(p=1, \dots, n)} a_{pp}$$

und insbesondere

$$K_n(\cdot, \cdot) = k_{11} + \dots + k_{nn}.$$

Ist

$$B_n(x, y) = \sum_{(p, q=1, 2, \dots, n)} b_{pq} x_p y_q$$

eine zweite Bilinearform, so bilden wir in diesem Sinne die Faltung des als Bilinearform der z_p und z'_p betrachteten Produktes $A_n(x, z) \cdot B_n(z', y)$:

$$A_n(x, \cdot) B_n(\cdot, y) = \sum_{(p, q, r=1, \dots, n)} a_{pq} b_{qr} x_p y_r$$

und bezeichnen diese Bilinearform der x_p, y_p kurz als Faltung von A_n und B_n .

Außer den allgemeinen quadratischen Formen K, K_n ziehen wir noch die besonderen quadratischen Formen

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots,$$

$$(x, x)_n = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

und die besonderen Bilinearformen

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots$$

$$(x, y)_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

in Betracht.

Die Diskriminante der Form

$$(x, x)_n - \lambda K_n(x)$$

d. h. die Determinante

$$(1) \quad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11}, & -\lambda k_{12}, & \dots, & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21}, & 1 - \lambda k_{22}, & \dots, & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1}, & -\lambda k_{n2}, & \dots, & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}$$

ist bekanntlich eine ganze rationale Funktion n ten Grades in λ mit lauter reellen Nullstellen; diese mögen mit

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$$

bezeichnet werden und die *Eigenwerte* der Form K_n heißen; die Gesamtheit dieser n Eigenwerte heiße das *Spektrum* der Form K_n . Wenn ein reeller Wert λ so beschaffen ist, daß in ihm oder in beliebiger Nähe desselben noch für unendlich viele n Eigenwerte von K_n liegen, so heiße dieser Wert λ ein Verdichtungswert von K . Wenn die Beträge der absolut größten Eigenwerte von K_n mit wachsendem n über alle Grenzen wachsen, so soll der Wert $\lambda = \infty$ ebenfalls als Verdichtungswert der Form K gerechnet werden.

Wir bilden nun aus (1) durch Ränderung die Determinante

$$D_n(\lambda; x, y) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11}, & \dots, & -\lambda k_{1n}, & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1}, & \dots, & 1 - \lambda k_{nn}, & x_n \\ y_1, & \dots, & y_n, & 0 \end{vmatrix}$$

und nennen den Quotienten

$$K_n(\lambda; x, y) = -\frac{D_n(\lambda; x, y)}{D_n(\lambda)}$$

bzw.

$$K_n(\lambda; x) = K_n(\lambda; x, x)$$

die *Resolvente der quadratischen Form K_n* ; die Koeffizienten von $x_1, \dots, x_n$ in $K_n(\lambda; x, y)$ geben, wenn λ kein Eigenwert ist, die Lösung der linearen Gleichungen

$$x_p - \lambda(k_{p1}x_1 + \dots + k_{pn}x_n) = y_p, \quad (p = 1, \dots, n);$$

wir drücken dies durch die Identität aus:

$$K_n(\lambda; x, y) - \lambda K_n(x, \cdot) K_n(\lambda; \cdot, y) = (x, y);$$

Es ist offenbar

(2) $K_n(\lambda; x, y) = (x, y)_n + \lambda K_n(x, y) + \lambda^2 K_n K_n(x, y) + \lambda^3 K_n K_n K_n(x, y) + \dots$,
 wo $K_n K_n, K_n K_n K_n, \dots$ die aus K_n durch fortgesetzte Faltungen entstehenden Formen

$$K_n K_n(x, y) = K_n(x, \cdot) K_n(\cdot, y) = \sum_{(p, q, r=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rq} x_p y_q,$$

$$K_n K_n K_n(x, y) = K_n(x, \cdot) K_n K_n(\cdot, y) = \sum_{(p, q, r, s=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rs} k_{sq} x_p y_q,$$

.

bedeuten. Für die Resolvente K_n gilt die Partialbruchdarstellung

$$(3) \quad K_n(\lambda; x, y) = \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^{(n)}}} + \dots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^{(n)}}},$$

wo $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ gewisse lineare Formen der Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit reellen Koeffizienten, die „Eigenformen“ von K_n bedeuten. Insbesondere gelten mithin die Formeln:

$$(x, y)_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y) + \dots + L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y),$$

$$(4) \quad K_n(x, y) = \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{\lambda_n^{(n)}}$$

$$(x, x)_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + (L_n^{(n)}(x))^2,$$

$$K_n(x) = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)}},$$

$$(5) \quad K_n K_n(x) = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^2},$$

$$K_n K_n K_n(x) = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^3},$$

.

Aus (4) folgen die Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$:

$$L_p^{(n)}(\cdot) L_q^{(n)}(\cdot) = 0, \quad (p \neq q),$$

$$L_p^{(n)}(\cdot) L_p^{(n)}(\cdot) = 1,$$

wo $L_p(\cdot) L_q(\cdot)$ die Faltung der Bilinearform $L_p^{(n)}(x) L_q^{(n)}(y)$ bedeutet, und alsdann wiederum ergibt sich durch Faltung

$$K_n(\cdot, \cdot) = \sum_{(p=1, \dots, n)} k_{pp} = \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^{(n)}},$$

$$(6) \quad K_n K_n(\cdot, \cdot) = \sum_{(p, r=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rp} = \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \dots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^2},$$

$$K_n K_n K_n(\cdot, \cdot) = \sum_{(p, r, s=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rs} k_{sp} = \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \dots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^3},$$

.

Unsere erste wichtige Aufgabe besteht darin, den Begriff der Resolvente der Form K_n auf die Form K zu übertragen und zu der Partialbruchdarstellung (3) das Analogon für die Form K mit unendlich vielen Variablen aufzusuchen.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns eines allgemeinen Hilfssatzes aus dem Gebiete der stetigen (gleichmäßigen) Konvergenz.¹⁾

Hilfssatz 1. Es sei J ein ganz im Endlichen gelegenes Intervall für die Variable s , ferner

$$(7) \quad f_1(s), f_2(s), f_3(s), \dots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen der Variablen s , die in J stetig sind, deren Werte absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und deren Differenzenquotienten sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, so daß für alle s, t in J und für alle h

$$\left| \frac{f_h(s) - f_h(t)}{s - t} \right| \leq E$$

gilt, wo E eine endliche von h und von der Wahl der Argumente s, t unabhängige Größe bedeutet:

Alsdann lassen sich aus ebendieser Reihe von Funktionen (7) unendlich viele Funktionen

$$f_1^*(s), f_2^*(s), f_3^*(s), \dots$$

auswählen derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden beliebigen Punkt in J gegen einen endlichen Grenzwert, und zwar stetig (mithin auch gleichmäßig) konvergiert, woraus ersichtlich ist, daß der Limes

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p^*(s)$$

eine in J stetige Funktion von s darstellt.

Zum Beweise bestimmen wir auf die Art, wie es in § 5 der oben zitierten Abhandlung über das Dirichletsche Prinzip geschehen ist, aus der Reihe (7) eine Reihe von Funktionen $f_1^*(s), f_2^*(s), \dots$ derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden Punkt einer in J überall dichten abzählbaren Punktmenge P^* gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert; die so ausgewählten Funktionen sind, wie wir nun zeigen wollen, von der im Hilfssatze verlangten Art.

In der Tat bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \dots$ irgendeine unendliche Reihe von Punkten aus J , die gegen einen bestimmten Punkt s konvergiert. Bedeutet dann ε irgendeine beliebig kleine positive Größe, so bestimmen wir zunächst einen Punkt s^* der Punktmenge P^* derart, daß

$$(8) \quad |s^* - s| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

1) Vgl. die Abhandlung des Verf. „Über das Dirichletsche Prinzip“, Math. Ann. Bd. 59 (1904).

wird; wegen der Konvergenz der Wertreihe

$$f_1^*(s^*), f_2^*(s^*), \dots$$

läßt sich alsdann gewiß eine Zahl N finden, so daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(9) \quad |f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird; wegen der Konvergenz der Punktreihe $s_1, s_2, \dots$ kann diese ganze Zahl N zugleich auch so groß gewählt werden, daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|s - s_p| < \frac{\varepsilon}{8E}, \quad |s - s_q| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

ausfällt. Mit Hilfe von (8) folgt hieraus für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(10) \quad |s^* - s_p| < \frac{\varepsilon}{4E}, \quad |s^* - s_q| < \frac{\varepsilon}{4E}.$$

Andrerseits ist nun wegen der Voraussetzung unseres Hilfssatzes

$$\left| \frac{f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)}{s^* - s_p} \right| < E, \quad \left| \frac{f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)}{s^* - s_q} \right| < E,$$

und folglich mit Hilfe von (10)

$$|f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Addieren wir diese Gleichungen zu (9), so folgt für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| + |f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)| + |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon,$$

und um so mehr

$$|f_p^*(s_p) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon.$$

Da ε eine beliebig kleine Größe war, so folgt hieraus, daß die Wertreihe

$$f_1^*(s_1), f_2^*(s_2), \dots$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, d. h. die Funktionenreihe

$$f_1^*(s), f_2^*(s), \dots$$

konvergiert stetig an jeder Stelle s des Intervalles J , womit der Hilfssatz vollständig erwiesen ist.

Wir kehren zur Theorie der quadratischen Formen zurück, und zwar nehmen wir im folgenden zunächst an, es sei $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert von K , d. h. es sei K eine solche Form, daß die sämtlichen Eigenwerte von K_n für alle n in dem endlichen Intervalle J liegen. Wir definieren sodann gewisse zu K_n gehörige Funktionen der Variablen λ , wie folgt: es werde allgemein

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} \kappa_p^{(n)}(\lambda) &= 0 && \text{für } \lambda \leq \lambda_p^{(n)} \\ \kappa_p^{(n)}(\lambda) &= (L_p^{(n)}(x))^2 (\lambda - \lambda_p^{(n)}) && \text{für } \lambda > \lambda_p^{(n)} \end{aligned} \right\} p = 1, \dots, n$$

und

$$\kappa^{(n)}(\lambda) = \kappa_1^{(n)}(\lambda) + \dots + \kappa_n^{(n)}(\lambda)$$

gesetzt; dann sind $\kappa_p^{(n)}$ und folglich auch $\kappa^{(n)}$ stetige Funktionen von λ , die nirgends negativ ausfallen und bei wachsendem Argument λ und festgehaltenem n niemals abnehmen; die Differenzenquotienten dieser Funktionen, d. h. die Ausdrücke

$$\frac{\kappa_p^{(n)}(\lambda) - \kappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu},$$

$$\frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu}$$

sind, wie wir ebenfalls sofort sehen, nirgends negativ und nehmen, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt und das andere wächst, niemals ab, und zwar gelten die Gleichungen

$$\frac{\kappa_p^{(n)}(\lambda) - \kappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_p (L_p^{(n)}(x))^2$$

und folglich

$$\frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_1 (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + \pi_n (L_n^{(n)}(x))^2,$$

wo $\pi_1, \dots, \pi_n$ zwischen 0 und 1 liegende, von λ, μ abhängige Größen bedeuten. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Ungleichung

$$\left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + (L_n^{(n)}(x))^2,$$

oder wegen (5)

$$(12) \quad \left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Endlich bemerken wir noch, daß auf jeder Strecke, die keinen der Eigenwerte $\lambda_p^{(n)}$ von K_n enthält, die Funktionen $\kappa_p^{(n)}(\lambda)$ und folglich auch die $\kappa^{(n)}(\lambda)$ lineare Funktionen von λ sind. Für alle außerhalb auf der negativen Seite von J gelegenen λ ist $\kappa^{(n)}(\lambda)$ identisch Null; daher ist mit Rücksicht auf (12) stets:

$$\kappa^{(n)}(\lambda) \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2) J,$$

wo J die Länge des Intervalles J bezeichnet. Auf der positiven Seite außerhalb von J ist

$$\kappa^{(n)}(\lambda) = \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2) + C_n(x),$$

wo $C_n(x)$ eine von λ unabhängige Form bedeutet. In bezug auf die Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist $\kappa^{(n)}$ eine quadratische Form.

Es seien nunmehr unendlich viele Variable $x_1, x_2, \dots$ vorgelegt; wir ziehen dann diejenigen speziellen Wertsysteme in Betracht, die entstehen, wenn wir irgendeine dieser Variablen gleich 1 und alle übrigen gleich 0,

oder wenn wir irgend zwei dieser Variablen gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und alle übrigen gleich 0 setzen. Wir denken uns alle diese speziellen Wertsysteme der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ in bestimmter Weise in eine Reihe geordnet und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge als erstes, zweites, drittes usf. spezielles Wertsystem der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$. Für alle diese speziellen Wertsysteme gilt wegen (12) die Ungleichung

$$(13) \quad \left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq 1.$$

Wir betrachten nun die Formenreihe

$$(14) \quad \kappa^{(1)}(\lambda), \kappa^{(2)}(\lambda), \kappa^{(3)}(\lambda), \dots$$

und wenden, indem wir für die Variablen $x_1, x_2, \dots$ das erste spezielle Wertsystem eingesetzt denken, unsern Hilfssatz 1 an: wir sehen, daß dann im Intervalle J für λ die Werte der Formenreihe (14) sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze liegen müssen und wegen (13) auch die weitere Voraussetzung unseres Hilfssatzes erfüllt ist. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich daher aus (14) gewiß eine unendliche Reihe von Formen

$$(15) \quad \kappa^{(1*)}(\lambda), \kappa^{(2*)}(\lambda), \kappa^{(3*)}(\lambda), \dots$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variablen $x_1, x_2, \dots$ das erste spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ in dem Intervalle J gleichmäßig konvergiert.

Sodann wenden wir unsern Hilfssatz auf die Formenreihe (15) an. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich aus jener Formenreihe gewiß eine unendliche Reihe

$$(16) \quad \kappa^{(1^{**})}(\lambda), \kappa^{(2^{**})}(\lambda), \kappa^{(3^{**})}(\lambda), \dots$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variablen $x_1, x_2, \dots$ das zweite spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert. Indem wir ferner unsern Hilfssatz auf die Funktionenreihe (16) anwenden, gelangen wir durch Auswahl zu einer Funktionenreihe

$$\kappa^{(1^{***})}(\lambda), \kappa^{(2^{***})}(\lambda), \kappa^{(3^{***})}(\lambda), \dots,$$

die nach Einsetzung des dritten speziellen Wertsystems gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert.

Endlich betrachten wir, indem wir uns das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt denken, die Formenreihe

$$(17) \quad \kappa^{(1^*)}(\lambda), \kappa^{(2^*)}(\lambda), \kappa^{(3^*)}(\lambda), \dots;$$

dieselbe konvergiert in λ gleichmäßig, sowohl wenn wir darin für die Variablen $x_1, x_2, \dots$ das erste, als auch wenn wir das zweite, als auch wenn wir das dritte spezielle Wertsystem usf. einsetzen. Da sich aber allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ einer quadratischen Form linear aus

den drei Werten zusammensetzen läßt, die die quadratische Form für $x_p, x_q = 1, 0$ bzw. $0, 1$, bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ annimmt, während man alle übrigen Variablen gleich 0 setzt, so folgt, daß auch allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ in der Formenreihe (17) gegen eine gewisse in λ stetige Funktion $\kappa_{pq}(\lambda)$ konvergiert. Wir setzen

$$\kappa(\lambda) = \sum_{p, q=1, 2, \dots} \kappa_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

so daß $\kappa(\lambda)$ eine quadratische Form der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ bedeutet, deren Koeffizienten stetige Funktionen von λ sind. Diese Funktionen von λ sind zunächst nur innerhalb J definiert; da wir aber statt J ein beliebig großes, J enthaltendes Intervall wählen dürfen, so ist damit die Definition jener Funktionen für alle endlichen Werte von λ gegeben.

Die Werte irgendeines Abschnittes einer quadratischen Form mit unendlich vielen Variablen sind als lineare Kombinationen derjenigen Werte darstellbar, die die quadratische Form für unsere speziellen Wertsysteme annimmt. Daraus folgt, daß, wenn wir in den Formen der Formenreihe (17) $x_1, \dots, x_n$ beliebig lassen, die übrigen Variablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ sämtlich $= 0$ setzen, d. h. von jeder Form in (17) denselben Abschnitt nehmen, diese aus den Abschnitten gebildete Reihe gewiß ebenfalls gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen denjenigen Wert, den der betreffende Abschnitt von $\kappa(\lambda)$ annimmt. Wenn wir noch

$$1^* = m_1, 2^{**} = m_2, 3^{***} = m_3, \dots$$

setzen, so gilt also die Gleichung:

$$L_{h=\infty} [\kappa^{(m_h)}(\lambda)] = [\kappa(\lambda)].$$

Der Kürze und Übersicht halber wollen wir im folgenden bei einer Gleichung oder einer Ungleichung die eckigen Klammern fortlassen, d. h. nach dieser Festsetzung ist eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Formen mit unendlich vielen Variablen stets so zu verstehen, daß sie identisch für alle Variablen gilt, wenn man in der Formel auf beiden Seiten die gleichen Abschnitte der Formen nimmt; so lautet die letzte Gleichung

$$(18) \quad L_{h=\infty} \kappa^{(m_h)}(\lambda) = \kappa(\lambda).$$

Zugleich bemerken wir, daß die obengenannten Eigenschaften der Funktionen $\kappa^{(n)}(\lambda)$ als Funktion von λ sich sofort auf einen beliebigen Abschnitt $[\kappa(\lambda)]$ der Form $\kappa(\lambda)$ übertragen, wenn wir diesen als Funktion von λ betrachten. Wir erkennen so, daß die Funktion $[\kappa(\lambda)]$ ebenfalls nirgends negativ ausfällt und bei wachsendem Argument λ niemals ab-

nimmt, ferner, daß der Differenzenquotient dieser Funktion d. h. der Ausdruck

$$\frac{[\kappa(\lambda)] - [\kappa(\mu)]}{\lambda - \mu}$$

wiederum nirgends negativ wird, und, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt, während das andere wächst, niemals abnimmt. Wegen (12) folgt für jenen Differenzenquotienten die Ungleichung

$$(19) \quad \frac{\kappa(\lambda) - \kappa(\mu)}{\lambda - \mu} \leq (x, x).$$

Innerhalb eines Intervalles, das keinen Verdichtungswert der Form K enthält, wird $[\kappa(\lambda)]$ eine lineare Funktion von λ . Außerhalb J ist auf der negativen Seite $[\kappa(\lambda)]$ identisch Null, auf der positiven Seite gleich $\lambda[(x, x)] + C(x)$.

Wir denken uns nun in der Form $\kappa(\lambda)$ das erste spezielle Wertsystem eingesetzt und bezeichnen die so entstehende Funktion von λ mit $\kappa(\lambda)_1$. Nach den obigen Ausführungen wird, wenn wir λ festhalten und μ einen λ übersteigenden Wert beilegen, der Differenzenquotient von $\kappa(\lambda)_1$, sobald μ gegen λ hin abnimmt, gewiß nicht wachsen und mithin, wenn μ nach λ fällt, einem Grenzwert zustreben, d. h. $\kappa(\lambda)_1$ besitzt gewiß für jedes λ einen vorderen Differentialquotienten; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1$. In derselben Weise wird gezeigt, daß $\kappa(\lambda)_1$ für jedes λ einen hinteren Differentialquotienten besitzt; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$.

Aus den obengenannten Tatsachen über die Differenzenquotienten von $\kappa(\lambda)_1$ folgt zugleich, daß sowohl $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1$, wie $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$ Funktionen von λ sind, die nirgends negativ ausfallen, mit wachsendem Argument λ nicht abnehmen und überdies stets den Ungleichungen

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1 &\leq \mathfrak{f}^{(+)}(\mu)_1 \text{ für } \lambda \leq \mu, \\ \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1 &\leq \mathfrak{f}^{(-)}(\mu)_1 \text{ für } \lambda < \mu \end{aligned}$$

genügen.

Da ferner wegen (13) die Differentialquotienten $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1, \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$ den Wert 1 nicht überschreiten können, so gilt dasselbe um so mehr für die Differenz vom vorderen und hinteren Differentialquotienten an der nämlichen Stelle λ , und wir ersehen hieraus, daß, wenn m irgendeine ganze Zahl bedeutet, höchstens m Stellen λ vorhanden sind, für welche

$$\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1 - \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1 \geq \frac{1}{m}$$

gilt. Wegen dieser Tatsache ist die Menge derjenigen Werte λ , für welche vorderer und hinterer Differentialquotient voneinander verschieden ausfallen, notwendig abzählbar.

Nunmehr denken wir uns in $\kappa(\lambda)$ das zweite spezielle Wertsystem eingesetzt, verfahren mit der so entstehenden Funktion $\kappa(\lambda)_2$, wie vorhin

mit $\kappa(\lambda)_1$ geschehen ist, und suchen diejenige Menge von Stellen λ , für welche der vordere und hintere Differentialquotient voneinander verschieden ausfallen. Die Menge dieser Stellen λ ist gewiß wiederum abzählbar. Mit Benutzung des dritten speziellen Wertsystems erhalten wir entsprechend eine abzählbare Menge von Stellen λ usf. Die Gesamtheit aller solchen Stellen ist wiederum abzählbar; sie mögen *die Eigenwerte* der Form K heißen und mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bezeichnet werden. Die Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und ihre Verdichtungsstellen sind gewiß Verdichtungswerte der Form K , da ja $\kappa(\lambda)_1, \kappa(\lambda)_2, \dots$ außerhalb der Verdichtungswerte lineare Funktionen von λ sind und folglich die vorderen und hinteren Differentialquotienten daselbst einander gleich ausfallen. Die Gesamtheit der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ werde *das Punktspektrum oder das diskontinuierliche Spektrum* der Form K genannt.

Da die Koeffizienten einer quadratischen Form sich linear aus den Werten zusammensetzen lassen, die die quadratische Form für die Reihe der speziellen Wertsysteme der Variablen annimmt, so schließen wir, daß die sämtlichen Koeffizienten κ_{pq} der Form $\kappa(\lambda)$ ebenfalls sowohl vordere wie hintere Differentialquotienten besitzen, und daß dieselben für jede Stelle mit Ausnahme der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ einander gleich sind; die vorderen und hinteren Differentialquotienten von κ_{pq} mögen mit $\mathfrak{f}_{pq}^{(+)}$ bzw. $\mathfrak{f}_{pq}^{(-)}$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedene Stelle λ stimmen diese beiden Differentialquotienten miteinander überein; wir setzen daselbst

$$\mathfrak{f}_{pq} = \mathfrak{f}_{pq}^{(+)} = \mathfrak{f}_{pq}^{(-)};$$

die quadratischen Formen mit den Koeffizienten $\mathfrak{f}_{pq}^{(+)}, \mathfrak{f}_{pq}^{(-)}$ mögen mit $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)$ bzw. $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedene Stelle setzen wir

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda) = \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda).$$

Wir bilden nun allgemein für die Stelle λ_h die Differenz $\mathfrak{f}_{pq}^{(+)} - \mathfrak{f}_{pq}^{(-)}$ und nehmen diese Differenz als Koeffizient von $x_p x_q$; die so entstehende quadratische Form mit unendlich vielen Variablen, deren Koeffizienten jedenfalls nicht sämtlich verschwinden, werde *die zum Eigenwert λ_h gehörige quadratische Eigenform* von K genannt und mit E_h bezeichnet. Offenbar ist für jeden Eigenwert λ_p

$$(21) \quad \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda_p) - \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda_p) = E_p,$$

und da auch zu (20) analog

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda) &\leq \mathfrak{f}^{(+)}(\mu) \text{ für } \lambda \leq \mu, \\ \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda) &\leq \mathfrak{f}^{(-)}(\mu) \text{ für } \lambda < \mu \end{aligned}$$

gelten muß, so fällt gewiß

$$(23) \quad E_p \geq 0$$

$[e(\lambda)]$ ist nirgends negativ und nimmt mit wachsendem λ niemals ab; außerhalb J ist $[e(\lambda)]$ auf der negativen Seite Null, auf der positiven gleich $\sum_{(p)} [E_p]$.

$[e(\lambda)]$ ist an allen Stellen stetig, die nicht Eigenwerte sind; für den Eigenwert λ_p besitzt $[e(\lambda)]$ einen endlichen Sprung, und zwar ist bei positivem gegen Null abnehmendem τ :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau=0} L e(\lambda_p - \tau) &= e(\lambda_p), \\ \lim_{\tau=0} L e(\lambda_p + \tau) &= e(\lambda_p) + E_p. \end{aligned}$$

$[\eta(\lambda)]$ hat sowohl einen vorderen, wie einen hinteren Differentialquotienten; diese stimmen an allen Stellen, die nicht Eigenwerte sind, miteinander überein und haben den Wert $[e(\lambda)]$; für den Eigenwert λ_p ist der hintere Differentialquotient $[e(\lambda_p)]$, der vordere $[e(\lambda_p)] + [E_p]$, so daß der Überschuß des vorderen Differentialquotienten über den hinteren $[E_p]$ beträgt.

Aus (27) folgt, wenn $\lambda', \lambda'' > \lambda'$ keine Eigenwerte sind:

$$f(\lambda'') - f(\lambda') \geq \sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p;$$

nun ist

$$\sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p = e(\lambda'') - e(\lambda')$$

und folglich auch

$$(29) \quad f(\lambda'') - f(\lambda') \geq e(\lambda'') - e(\lambda').$$

Ist eine der Größen λ', λ'' ein Eigenwert, bzw. sind beide Eigenwerte von K , so folgt ebenso statt (29) eine entsprechende Ungleichung. Setzen wir nun

$$\varrho(\lambda) = \varkappa(\lambda) - \eta(\lambda),$$

so besitzt mit Rücksicht auf (21) die Funktion $[\varrho(\lambda)]$ vordere und hintere Differentialquotienten, die für jede Stelle λ miteinander übereinstimmen, und dieser Differentialquotient ist überdies, wie aus (29) bzw. aus der entsprechenden Ungleichung folgt, eine mit wachsendem Argument nicht abnehmende Funktion von λ ; daher stellt dieser Differentialquotient eine Funktion dar, die in λ stetig ist. Setzen wir also

$$(30) \quad \sigma(\lambda) = \sum \sigma_{pq} x_p x_q = \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda) - e(\lambda),$$

so ist jeder Abschnitt der Form $\sigma(\lambda)$ eine stetige, nicht negative, mit wachsendem λ nicht abnehmende Funktion von λ . Die Form $\sigma(\lambda)$ der unendlich vielen Variablen, deren Koeffizienten σ_{pq} stetige Funktionen von λ sind, heiße die *Spektralform* von K .

Wegen (24) gilt die Ungleichung

$$(31) \quad \sigma(\lambda) + e(\lambda) \leq (x, x).$$

Die Formen $f(\lambda)$, $e(\lambda)$, $\sigma(\lambda)$ werden für alle außerhalb auf der negativen Seite von J liegenden Werte λ identisch gleich Null; auf der positiven Seite gehen sie in von λ unabhängige Formen über, die wir bzw. mit $f(+\infty)$, $e(+\infty)$, $\sigma(+\infty)$ bezeichnen wollen. Wegen (30) haben wir

$$(32) \quad \sigma(+\infty) = f(+\infty) - e(+\infty).$$

Da $[z(\lambda)]$ rechts von J in $\lambda[[x, x]] + C(x)$ übergeht, so haben wir

$$(33) \quad f(+\infty) = (x, x)$$

und, wie früher bemerkt ist,

$$e(+\infty) = \sum_{(p)} E_p.$$

Wir wählen jetzt solche reelle Werte λ aus, in deren beliebiger Nähe noch Punkte λ' existieren, für die nicht identisch in allen Variablen $x_1, x_2, \dots$

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda')$$

ausfällt. Die Menge s aller solchen Punkte λ ist perfekt (abgeschlossen und in sich dicht); sie heiße *das Streckenspektrum* oder *das kontinuierliche Spektrum* der Form K . Außerhalb der Verdichtungswerte von K sind die Koeffizienten von $z(\lambda)$ sämtlich linear in λ , diejenigen von $e(\lambda)$ konstant, und folglich werden auch die Koeffizienten von $\sigma(\lambda)$ konstant, d. h. das Streckenspektrum liegt gewiß innerhalb der Verdichtungswerte der Form K . Das Punktspektrum nebst den Häufungsstellen der Eigenwerte und das Streckenspektrum zusammengenommen heiße das *Spektrum* der Form K .

Setzen wir nun

$$\sigma(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) = \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

so erhalten wir aus (32), (33)

$$(x, x) = e(+\infty) + \int_{(s)} d\sigma(\lambda)$$

oder

$$(34) \quad (x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

wo die Summe über alle p zu erstrecken ist.

Wir kehren nunmehr zu der quadratischen Form K_n mit endlicher Variablenzahl n zurück. Bedeutet λ eine komplexe oder eine von sämtlichen Eigenwerten $\lambda_p^{(n)}$ der Form K_n verschiedene reelle Größe, so erhalten wir aus der Definition (11) der Funktion $z_p^{(n)}$ sofort die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_p^{(n)}(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = (L_p^{(n)}(x))^2 \int_{\lambda_p^{(n)}}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda_p^{(n)}}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = \frac{1}{2} \frac{(L_p^{(n)}(x))^2}{\lambda_p^{(n)} - \lambda};$$

die Integration ist hier reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\kappa_p^{(n)}(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch für komplexe μ definiert ist. Durch Summation über $p = 1, \dots, n$ finden wir

$$(35) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa^{(n)}(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda} \right\},$$

wobei die Integration wie vorhin auszuführen ist. Andererseits ist, wie aus (3) und (5) folgt,

$$(36) \quad \frac{K_n(\lambda, x) - (x, x)_n}{\lambda} = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda}.$$

Wenn wir in (35), (36) für n die besonderen Zahlen $m_1, m_2, \dots$ einsetzen und auf beiden Seiten einen bestimmten Abschnitt nehmen, ferner unter λ irgendeine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe verstehen, die nicht zum Spektrum der Form K gehört, so erhalten wir wegen (18) durch Grenzübergang die Formel

$$(37) \quad L_{h=\infty} \frac{[K_{m_h}(\lambda, x)] - [(x, x)_{m_h}]}{\lambda} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\kappa(\mu)]}{(\mu - \lambda)^3} d\mu;$$

die Integration ist hier wiederum reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\kappa(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch für komplexe μ definiert ist. Infolgedessen stellt das Integral rechter Hand eine Funktion von λ dar, die für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen reellen λ regulär analytischen Charakter in bezug auf λ besitzt.

Wir setzen

$$(38) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu$$

und nennen diesen Ausdruck *die Resolvente der Form K*; jeder Koeffizient oder Abschnitt derselben ist ebenfalls für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen endlichen reellen Werte von λ regulär analytisch, und man sieht auch, daß derselbe für $\lambda = \infty$ regulär analytisch ist.

Die oben gefundene Gleichung (37) geht über in

$$\lim_{h \rightarrow \infty} L K_{m_h}(\lambda, x) = K(\lambda, x).$$

Aus der Definition der Form $\eta(\lambda)$ entnehmen wir die Gleichung

$$(39) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = \sum_{(p)} E_p \int_{\lambda_p}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda_p}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = \frac{1}{2} \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda},$$

wobei unter λ irgendeine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe zu verstehen ist, die nicht zum Spektrum der Form K gehört, und die Integration nach μ im Falle eines reellen λ mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene ausgeführt werden soll.

Wegen

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda) &= z(\lambda) - \eta(\lambda), \\ \sigma(\lambda) &= \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda} \end{aligned}$$

erhalten wir durch wiederholte Produktintegration und Einführung einer naturgemäßen Erweiterung des Integralbegriffes

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho(\mu)}{(\mu - \lambda)^3} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}$$

Aus (38), (39) ergibt sich

$$(40) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \lambda \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda},$$

und hieraus mit Rücksicht auf (34)

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Diese Formel ist das gesuchte Analogon zu der Partialbruchdarstellung (3) der Resolvente $K_n(\lambda, x)$ der Form K_n mit der endlichen Variabelnzahl n .

Wir fassen die gefundenen Resultate in folgender Weise zusammen:

Satz 31: Die Resolvente einer quadratischen Form K , für welche $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert ist, ist eine quadratische Form mit unendlich vielen Variablen

$$K(\lambda, x) = \sum_{p, q} K_p(\lambda)_q x_p x_q,$$

deren Koeffizienten für alle außerhalb des Spektrums der Form K gelegenen Argumente λ regulär analytische Funktionen dieses Argumentes sind.

Ist $m_1, m_2, \dots$ eine gewisse Reihe ins Unendliche zunehmender ganzer Zahlen, so gilt für jeden Abschnitt der Resolvente die Gleichung

$$(41) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} L K_{m_h}(\lambda, x) = K(\lambda, x),$$

wo K_{m_h} die Resolvente der Form K_{m_h} bedeutet.

Die Resolvente K gestattet folgende Darstellung (für jeden Abschnitt)

$$(42) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}};$$

dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K , d. h. über alle Eigenwerte von K zu erstrecken; E_p bezeichnet allgemein die zu λ_p gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine Form, deren Abschnitte für keinen Wert der Variablen $x_1, x_2, \dots$ negativ sind. Das Integral ist über das Streckenspektrum von K zu erstrecken. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine Form, deren Koeffizienten stetige Funktionen in λ , und deren Abschnitte bei wachsendem Argument λ innerhalb des Streckenspektrums s — von besonderen Werten der $x_1, x_2, \dots$ abgesehen — wachsende Funktionen von λ , in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber sämtlich konstant sind.

Endlich gilt die Gleichung (für jeden Abschnitt)

$$(43) \quad (x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda).$$

Wenn die sämtlichen Abschnitte einer quadratischen oder einer bilinearen Form mit unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ absolut genommen unterhalb einer von der Wahl des Abschnittes unabhängigen endlichen Grenze liegen, sobald man die Variablen den Bedingungen

$$(44) \quad (x, x) \leq 1, \quad (y, y) \leq 1$$

unterwirft, so heiße die quadratische bzw. bilineare Form eine *beschränkte Form*.

Die zu einer beschränkten quadratischen Form gehörige bilineare Form ist ebenfalls eine beschränkte Form.

Beispielsweise sind wegen (23) und (28) die Eigenformen E_i stets beschränkte Formen, und da nach (31) die Ungleichung

$$\sigma(\lambda) + e(\lambda) \leq (x, x)$$

gilt, so sind auch die Spektralformen $\sigma(\lambda)$, ebenso wie die Formen $f(\lambda)$ und $e(\lambda)$ beschränkte Formen. Endlich ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von $K(x)$ liegenden Wert bedeutet, die Resolvente $K(\lambda, x)$, und zwar sowohl der Summen- wie der Integralbestandteil von $K(\lambda, x)$ für sich, eine beschränkte Form.

Ein wichtiges spezielles Beispiel einer beschränkten quadratischen Form ist $\sum_{p+q} x_p x_q$.¹⁾

1) Die von mir gegebene und zuerst von H. Weyl (Inauguraldissertation, Göttingen 1908, S. 83) publizierte Beweisidee hierfür ist kurz folgende: Es gibt identisch in $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$

Die Begriffe „Abschnitt“ und „beschränkt“ können offenbar in gleichem Sinne auch für *lineare Formen* mit unendlich vielen Variablen angewandt werden. Eine lineare Form

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots$$

ist dann und nur dann eine beschränkte Form, wenn die Summe der Quadrate ihrer Koeffizienten

$$l_1^2 + l_2^2 + \dots$$

endlich bleibt.

Die Richtigkeit hiervon erkennt man leicht mit Hilfe der beiden folgenden Tatsachen:

I. Wenn $u_1, u_2, \dots$ und $v_1, v_2, \dots$ irgendwelche Größen sind, so gilt stets die Ungleichung

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v).$$

II. Wenn $u_1, u_2, \dots$ irgendwelche Größen sind, ferner M eine endliche positive Zahl bedeutet und überdies für alle der Bedingung (44) genügenden Werte $x_1, x_2, \dots$ die Ungleichung

$$(u, x) \leq M$$

stattfindet, so ist stets

$$(u, u) \leq M^2.$$

Fortan ziehen wir durchweg nur solche Wertsysteme der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ u. s. f. in Betracht, die der Bedingung (44) genügen. Ist $a_1, a_2, \dots$ ein solches Wertsystem, so existiert, wenn $L(x)$ eine beschränkte lineare Form ist, gewiß der Limes des n ten Abschnittes $[L(a)]_n$ derselben für $n = \infty$; wir setzen

$$L(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} [L(a)]_n;$$

somit haben wir erkannt, daß eine beschränkte Linearform der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ für alle in Betracht kommenden Wertsysteme

$$\sum_{(p, q = 1, 2, \dots, n)} x_p y_q \left\{ \frac{1}{p+q} - \frac{1}{p-q} \right\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{t}{\pi} \left[-x_1 \sin t + y_1 \cos t + x_2 \sin 2t - y_2 \cos 2t - \dots \right]^2 dt,$$

wobei für $p = q$ anstatt $\frac{1}{p-q}$ linker Hand 0 zu nehmen ist. Die rechte Seite dieser Identität ergibt sich, indem wir unter dem Integral t vor der Klammer durch π ersetzen, durch kurze Rechnung kleiner als $\pi(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$, d. h. kleiner als 2π . Setzen wir $x_p = y_p$, so erhalten wir daher unmittelbar

$$\left| \sum_{(p, q = 1, \dots, n)} \frac{x_p x_q}{p+q} \right| < 2\pi.$$

Andere Beweise sowie Erweiterungen dieses Satzes sind gegeben worden von F. Wiener (Math. Ann. Bd. 68, S. 361), J. Schur (Journ. f. Math. Bd. 140, S. 16), O. Toeplitz (Gött. Nachr. 1910, S. 489).

dieser Variablen einen bestimmten endlichen Wert annimmt und demnach eine *Funktion* der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ darstellt.

Es heiße allgemein eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ an der Stelle $a_1, a_2, \dots$ *stetig*, wenn der Wert von $F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \dots)$ gegen den Wert von $F(a_1, a_2, \dots)$ konvergiert, sobald die Summe der Quadrate der Gren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ nach Null abnimmt, d. h. wenn

$$L_{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots = 0)} F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(a_1, a_2, \dots)$$

wird.

Wir sehen sofort, daß die beschränkte Linearform $L(x)$ eine stetige Funktion der unendlich vielen Variablen darstellt.

Die entsprechenden Sätze gelten auch für eine *beschränkte Bilinearform*. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir mit $A(x, y)$ eine beschränkte Bilinearform und mit $a_1, a_2, \dots$ und $b_1, b_2, \dots$ besondere Wertsysteme der unendlich vielen Variablen, sodann setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1, \dots, x_n = a_n, x_{n+1} = 0, & x_{n+2} &= 0, \dots \\ x'_1 &= 0, \dots, x'_n = 0, x'_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\alpha_{nm}}, x'_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{\alpha_{nm}}, \dots, x'_m = \frac{a_m}{\alpha_{nm}}, x'_{m+1} = 0, x'_{m+2} = 0, \dots \\ y_1 &= b_1, \dots, y_n = b_n, y_{n+1} = 0, & y_{n+2} &= 0, \dots \\ y'_1 &= 0, \dots, y'_n = 0, y'_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\beta_{nm}}, y'_{n+2} = \frac{b_{n+2}}{\beta_{nm}}, \dots, y'_m = \frac{b_m}{\beta_{nm}}, y'_{m+1} = 0, y'_{m+2} = 0, \dots \\ \alpha_{nm} &= \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2}, & \beta_{nm} &= \sqrt{b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 + \dots + b_m^2}, \end{aligned}$$

worin n und $m > n$ irgendwelche ganze Zahlen bedeuten. Nun ist, wenn wir mit $[A]_m, [A]_n$ die betreffenden Abschnitte von A bezeichnen,

$$\begin{aligned} [A(a, b)]_m &= A(x + \alpha_{nm}x', y + \beta_{nm}y'), \\ &= A(x, y) + \alpha_{nm}A(x', y) + \beta_{nm}A(x, y') + \alpha_{nm}\beta_{nm}A(x', y'), \\ &= [A(a, b)]_n + \alpha_{nm}A(x', y) + \beta_{nm}A(x, y') + \alpha_{nm}\beta_{nm}A(x', y'). \end{aligned}$$

Da $A(x', y), A(x, y'), A(x', y')$ absolut unterhalb einer von n, m unabhängigen Grenze bleiben und überdies α_{nm}, β_{nm} mit wachsenden n, m verschwinden, so folgt, daß $[A(a, b)]_n$ mit wachsendem n gegen einen Grenzwert konvergieren muß; derselbe werde kurz mit $A(a, b)$ bezeichnet. In analoger Weise folgt, daß die durch $A(x, y)$ dargestellte Funktion der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$ stetig ist.

Insbesondere schließen wir, daß auch eine beschränkte, quadratische Form unendlich vieler Veränderlichen $x_1, x_2, \dots$ stets eine stetige Funktion derselben darstellt.

Wir entnehmen aus den eben bewiesenen Sätzen noch folgende Tatsache: Wenn auf beiden Seiten einer Formel eine endliche Anzahl

quadratischer oder bilinearer beschränkter Formen von unendlich vielen Variablen steht und die durch die Formel dargestellte Gleichung oder Ungleichung für alle Abschnitte beider Seiten gültig ist, so ist sie überhaupt für alle Wertsysteme der unendlich vielen Variablen gültig — wobei stets nur solche Wertsysteme dieser Variablen gemeint sind, die den Bedingungen (44) genügen.

Wenn wir in der beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ die Variablen $y_1, y_2, \dots$ sämtlich Null setzen mit alleiniger Ausnahme der einen Variablen y_p , der wir den Wert 1 erteilen, so entsteht eine beschränkte Linearform der Variablen $x_1, x_2, \dots$; dieselbe werde mit $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_p}$ bezeichnet.

Da $A(x, y)$ beschränkt ist, so folgt auch, daß für $n \geq m$

$$y_1 \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1} + \dots + y_m \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_m}$$

absolut unter einer endlichen, von n und m unabhängigen Grenze liegt, und mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache II liegt mithin auch

$$\left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_m} \right)^2$$

unterhalb einer von n und m unabhängigen Grenze. Nehmen wir nun zuerst $n = \infty$ und dann $m = \infty$, so erkennen wir, daß die Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2} \right)^2 + \dots$$

gegen eine endliche Größe konvergiert. Ist nun $B(x, y)$ ebenfalls eine beschränkte Bilinearform, so bleibt auch die Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2} \right)^2 + \dots$$

unterhalb einer endlichen Grenze, und folglich muß mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache I auch die unendliche Reihe

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1} + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2} + \dots$$

absolut konvergieren; dieselbe stellt dann notwendig wiederum eine Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ dar, die wir analog wie oben bei endlichen Formen mit

$$A(x, \cdot)B(\cdot, y)$$

bezeichnen und die *Faltung* der Bilinearformen A, B nennen.

Die Faltung ist gewiß eine beschränkte Bilinearform, und zwar erkennen wir mit Rücksicht auf die oben angeführten Tatsachen I und II aus der vorangehenden Betrachtung die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hilfssatz 2. Wenn M, N zwei positive Konstanten bedeuten, so daß für alle $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$

$$|A(x, y)| \leq M, \quad |B(x, y)| \leq N$$

ausfällt, so genügt die Faltung notwendig der Ungleichung

$$|A(x, \cdot)B(\cdot, y)| \leq MN.$$

Zugleich stellen wir folgende Hilfssätze auf, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet.

Hilfssatz 3. Für jeden Abschnitt der Faltung zweier beschränkter Bilinearformen A, B gilt

$$[A(x, \cdot)B(\cdot, y)]_m = \lim_{n=\infty} [A_n(x, \cdot)B_n(\cdot, y)]_m,$$

wo rechts unter dem Limes der m te Abschnitt der Faltung der n ten Abschnitte von A, B steht. Der Wert der Faltung ist demnach:

$$A(x, \cdot)B(\cdot, y) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} [A_n(x, \cdot)B_n(\cdot, y)]_m.$$

Es folgt daraus insbesondere:

$$A(x, \cdot)(\cdot, y) = A(x, y),$$

d. h. jede Bilinearform reproduziert sich durch Faltung mit (x, y) ; wir können daher auch den Wert der Bilinearform darstellen als:

$$A(x, y) = y_1 \frac{\partial A}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial A}{\partial y_2} + \dots = x_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + \dots$$

Hilfssatz 4. Wenn $A, B, C, \dots$ beschränkte Bilinearformen sind und mit denselben wiederholt der Prozeß der Faltung ausgeführt wird, so ist das Resultat von der Reihenfolge der einzelnen Faltungen unabhängig; es ist beispielsweise

$$(A(x, \cdot)B(\cdot, \cdot))C(\cdot, y) = A(x, \cdot)(B(\cdot, \cdot)C(\cdot, y)).$$

Wir entwickeln nunmehr die einfachsten Begriffe und Tatsachen über *orthogonale Transformationen* unendlich vieler Variabler.

Bedeutet

$$o_{pq}$$

$$(p, q = 1, 2, \dots)$$

irgendwelche unendlich viele, den Relationen

$$\sum_{(q=1, 2, \dots)} o_{pq}^2 = 1,$$

$$\sum_{(r=1, 2, \dots)} o_{pr} o_{qr} = 0$$

$$(p \neq q)$$

und

$$\sum_{(p=1, 2, \dots)} o_{pq}^2 = 1,$$

$$\sum_{(r=1, 2, \dots)} o_{rp} o_{rq} = 0$$

$$(p \neq q)$$

genügende Konstanten, so definieren die Formeln

$$(45) \quad \begin{aligned} x_1 &= o_{11}x'_1 + o_{12}x'_2 + \cdots, \\ x_2 &= o_{21}x'_1 + o_{22}x'_2 + \cdots, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x'_1 &= o_{11}x_1 + o_{21}x_2 + \cdots, \\ x'_2 &= o_{12}x_1 + o_{22}x_2 + \cdots, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

je eine orthogonale Transformation; die letztere Transformation ist die Umkehrung der ersteren. Die Ausdrücke rechter Hand sind beschränkte Linearformen der unendlich vielen Variablen $x'_1, x'_2, \dots$ bzw. $x_1, x_2, \dots$.

Die Bilinearform

$$O(x, x') = \sum o_{pq} x_p x'_q$$

heiße die zur orthogonalen Transformation (45) zugehörige Bilinearform; dieselbe ist, wie man leicht aus der oben angeführten Tatsache I erkennt, gewiß eine beschränkte Form. Es gelten nach Hilfssatz 3, die Formeln

$$(46) \quad O(., x) O(., y) = (x, y), \quad O(., x) O(., y) = (x, y);$$

insbesondere wird:

$$\begin{aligned} \sum_{(p)} (o_{p1}x'_1 + o_{p2}x'_2 + \cdots)^2 &= (x', x'), \\ \sum_{(p)} (o_{1p}x_1 + o_{2p}x_2 + \cdots)^2 &= (x, x). \end{aligned}$$

Wenn wir auf irgendeine beschränkte Linearform $L(x)$ die orthogonale Transformation (45) anwenden, so entsteht die Linearform

$$L'(x') = L(., x') O(., x');$$

mithin entsteht, wenn wir beide Variabelnreihen irgendeiner beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ jener Transformation unterwerfen, die Bilinearform

$$A'(x', y') = A(., x') O(., x') O(., y').$$

Sind $A(x, y)$, $B(x, y)$ irgend zwei beschränkte Bilinearformen, setzen wir ferner

$$C(x, y) = A(x, .) B(., y)$$

und berechnen die orthogonal transformierten Formen

$$\begin{aligned} A'(x', y') &= A(., x') O(., x') O(., y'), \\ B'(x', y') &= B(o, *) O(o, x') O(*, y'), \\ C'(x', y') &= C(., x') O(., x') O(., y'), \end{aligned}$$

so finden wir als Faltung der transformierten Formen

$$A'(x, o) B'(o, y) = A(., x) O(., x) O(o, *) B(*, y) O(*, o) O(o, y)$$

und mit Benutzung des Hilfssatzes 3 und 4 und der Formel (46)

$$A'(x, o) B'(o, y) = A(., o) B(o, *) O(., x) O(*, y) = C(., *) O(., x) O(*, y)$$

und mithin

$$(47) \quad A'(x, .) B(., y) = C'(x, y)$$

d. h. die Faltung zweier Bilinearformen ist eine Kovariante gegenüber einer orthogonalen Transformation.

Wenn die Summe der Koeffizienten von $x_p y_p$ einer Bilinearform $A(x, y)$ konvergiert, so bezeichnen wir diese Summe allgemein wie bei endlichen Formen mit $A(., .)$.

Wir erwähnen hier noch folgende ebenfalls leicht zu beweisende Tatsache:

Hilfssatz 5. Wenn

$$K(x) = \sum_{(p, q = 1, 2, \dots)} k_{pq} x_p x_q$$

eine quadratische Form von solcher Art ist, daß

$$K(., .) K(., .) = \sum_{(p, q = 1, 2, \dots)} k_{pq}^2$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, so stellt derselbe eine Invariante gegenüber einer orthogonalen Transformation von $K(x)$ dar; d. h. jener Grenzwert stimmt mit

$$K'(., .) K'(., .) = \sum_{(p, q = 1, 2, \dots)} k_{pq}^2$$

überein, wobei

$$K'(x) = \sum_{(p, q = 1, 2, \dots)} k'_{pq} x'_p x'_q$$

die durch orthogonale Transformation aus $K(x)$ hervorgehende quadratische Form bedeutet.

Wir kehren nunmehr zu der oben entwickelten Theorie der quadratischen Form $K(x)$ zurück und nehmen an, daß diese quadratische Form $K(x)$ eine beschränkte Form sei.

Bedeutet wiederum

$$K_n(x) = [K(x)]_n$$

den n ten Abschnitt von $K(x)$, so ist der größte Wert, den $K_n(x)$ absolut genommen annimmt, gleich $\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}$, wenn $\lambda_1^{(n)}$ den absolut kleinsten der n Eigenwerte von $K_n(x)$ bezeichnet. Da $K(x)$ eine beschränkte Form sein soll, so gibt es eine positive Konstante M , so daß für alle Werte n und jedes Variabelnsystem

$$|K_n(x)| \leq M$$

ausfällt, und mithin gilt auch

$$\left| \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} \right| \leq M$$

oder

$$|\lambda_1^{(n)}| \geq \frac{1}{M},$$

d. h. die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K_n(x)$ bleiben sämtlich oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe, und es gehört

somit $\lambda = 0$ gewiß nicht zum Spektrum von $K(x)$. Nehmen wir umgekehrt von einer quadratischen Form $K(x)$ an, daß $\lambda = 0$ nicht zu ihrem Spektrum gehöre, so müssen sämtliche Eigenwerte $\lambda_h^{(n)}$ ihrer Abschnitte $K_n(x)$ von einem gewissen n an absolut genommen oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Grenze m bleiben, und hieraus wiederum folgt, daß die Maxima $\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}$ der absolut genommenen Abschnitte $K_n(x)$ unterhalb der Grenze $\frac{1}{m}$ bleiben müssen, d. h. die Form $K(x)$ ist notwendig eine beschränkte.

Die soeben gemachte und im folgenden stets beibehaltene Annahme, daß $K(x)$ eine beschränkte Form sei, ist also damit völlig äquivalent, daß $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum von $K(x)$ gehöre, während die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K(x)$ sehr wohl über alle Grenzen wachsen dürfen.

Wir bestimmen nun eine Größe α so klein, daß auch $\lambda = \alpha$ nicht dem Spektrum von $K(x)$ angehört. Da dann die Nullstellen der Diskriminanten der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda K(x)$$

sich an der Stelle $\lambda = \alpha$ nicht häufen, so werden diejenigen der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda \{ (x, x) - \alpha K(x) \}$$

absolut genommen nicht über alle Grenzen wachsen, d. h. die quadratische Form

$$K^*(x) = (x, x) - \alpha K(x)$$

hat $\lambda = \infty$ nicht zum Verdichtungswert; diese ist zugleich auch beschränkt. Bezeichnen wir mit $K_n(\lambda; x, y)$ die Resolvente von $K_n(x)$ und mit $K_n^*(\lambda; x, y)$ diejenige von $K_n^*(x)$, so finden wir unmittelbar aus der Definition der Resolvente die Gleichung:

$$(48) \quad K_n(\lambda; x, y) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\alpha}} K_n^* \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}; x, y \right).$$

Wenden wir nun unseren Satz I auf die Form $K^*(x)$ an und bezeichnen die Eigenwerte, Eigenformen, ferner das Streckenspektrum und die Spektralform von $K^*(x)$ bzw. mit

$$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, E_1^*, E_2^*, \dots, s^*, \sigma^*,$$

so ergibt sich für alle außerhalb des Spektrums von K^* liegenden Werte von λ^* die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung

$$(49) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}^*(\lambda^*, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p^*}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_p^*}} + \int_{(s^*)} \frac{d\sigma^*(\mu^*)}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}}$$

und ebenso

$$(x, x) = \sum_{(p)} E_p^* + \int_{(s^*)} d\sigma^*(\lambda^*).$$

Setzen wir in (49)

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}, \quad \lambda_p^* = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \alpha}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu - \alpha}$$

ein, wobei

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_p^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}},$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

wird, und bezeichnen mit s die Menge der Punkte μ , die der Menge s^* der Punkte μ^* entspricht, so ergibt sich mit Rücksicht auf (48) die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung:

$$L_{h=\infty} K_{m_h}(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}};$$

dabei sind dann λ_p als die Eigenwerte, $E_p = E_p^*$ als die zugehörigen Eigenformen, s als das Streckenspektrum, $\sigma(\mu) = \sigma^*(\mu^*)$ als die Spektralform von $K(x)$ zu bezeichnen, und es ist $\lambda = \infty$ als Eigenwert, E_∞ als zugehörige Eigenfunktion von $K(x)$ mitzurechnen, falls $\lambda^* = 1$ Eigenwert von $K^*(x)$ war. Aus der obigen Formel für (x, x) wird

$$(50) \quad (x, x) = \sum_{(p, \infty)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda).$$

Die beiden letzten Formeln stimmen mit (42), (43) überein, wenn $K(x)$ nicht $\lambda = \infty$ zum Verdichtungswert hat; in der Tat folgt dann aus der Definition von $K^*(x)$, daß $\lambda^* = 1$ nicht Verdichtungswert und daher auch nicht Eigenwert von K^* ist; demnach ist $\lambda = \infty$ gewiß nicht Eigenwert von $K(x)$.

Bleibt $K(x, y)$ für alle Variablen x absolut unterhalb der endlichen Grenze M , so entnehmen wir aus (2) und Hilfssatz 2, daß auch für alle m

$$K_m(\lambda; x, y) = (x, y)_m + \lambda K_m(x, y) + \lambda^2 K_m K_m(x, y) + \dots$$

$$+ \lambda^n K_m K_m \dots K_m(x, y) + \frac{\vartheta_n(\lambda M)^{n+1}}{1 - \lambda M}$$

gilt, wo

$$n < m, \quad |\lambda| < \frac{1}{M}, \quad -1 < \vartheta_n < +1$$

ist. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 erhalten wir dann, wenn wir für x, y solche feste Werte nehmen, die von einem endlichen Index an sämtlich verschwinden, für $m = m_h$ in der Grenze $h = \infty$ die Formel

$$(51) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots \\ + \lambda^n K K \dots K(x, y) + \frac{\lambda^n (\lambda M)^{n+1}}{1 - \lambda M},$$

und hieraus für $n = \infty$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots$$

Die so gewonnene Formel sowie die Tatsache, daß jeder Abschnitt der Resolvente außerhalb des Spektrums regulär analytisch in λ ist, zeigt, daß die Resolvente

$$K(\lambda; x, y) = \lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y)$$

der Form $K(x, y)$ eindeutig durch $K(x)$ bestimmt ist, und hieraus wiederum folgt, indem wir auf den Beweis für die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y)$$

zurückgreifen, daß auch allgemein der Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(\lambda; x, y)$$

existiert und dem obigen Grenzwert gleich sein muß. Die letzten Formeln gelten stets für jeden Abschnitt der in Betracht kommenden Formen.

Aus (51) schließen wir, daß die Differenz

$$(52) \quad K(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots + \lambda^n K K \dots K(x, y)\}$$

eine Form ist, bei welcher der absolute Betrag jedes Abschnittes für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ unterhalb der Größe

$$\frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

bleibt. Durch Faltung jenes Ausdruckes (52) mit $K(x, y)$ ergibt sich dann nach Hilfssatz 2, daß der Ausdruck

$$(53) \quad K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) - \{K(x, y) + \lambda K K(x, y) \\ + \lambda^2 K K K(x, y) + \dots + \lambda^n K K K \dots K(x, y)\}$$

absolut genommen im gleichen Sinne die Größe

$$M \frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

nicht überschreitet. Setzen wir in (52) die Zahl $n + 1$ an Stelle von n und subtrahieren dann davon das λ -fache des Ausdruckes (53), so entsteht der Ausdruck

$$K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) - (x, y),$$

und dieser Ausdruck bleibt demnach absolut genommen unterhalb der Größe

$$\frac{2 |\lambda M|^{n+2}}{1 - |\lambda M|}.$$

Da nun diese Größe für $n = \infty$ gegen Null konvergiert, so ist damit die Gültigkeit der Gleichung

$$(54) \quad K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) = (x, y)$$

für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ und für jeden Abschnitt, und einer oben gemachten Bemerkung (S. 127) zufolge daher auch für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen bewiesen.

Wir sind vorhin zu der Gleichung

$$(55) \quad K(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots$$

gelangt und haben die Gültigkeit derselben für jeden Abschnitt und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ erkannt. Aus diesem Umstande wiederum schließen wir, daß für beliebige Werte der Variablen und $|\lambda| < \frac{1}{M}$ jeder Abschnitt von

$$(56) \quad K(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \dots + \lambda^n K K \dots K(x, y)\}$$

absolut kleiner als

$$(57) \quad \frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

ausfällt, und daher muß einer oben (S. 127) gemachten Bemerkung zufolge auch jener Ausdruck (56) selbst für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen absolut kleiner oder gleich der Größe (57) bleiben. Hieraus folgt, indem wir n ins Unendliche zunehmen lassen, daß die Gleichung (55) für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$ und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ gültig ist.

Die Gleichung

$$(58) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

ist — ebenso wie (50) — vorhin nur in dem Sinne als gültig erkannt worden, daß man darin auf beiden Seiten die nämlichen Abschnitte genommen denkt; wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichung für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen gilt — vorausgesetzt, daß λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet.

Es sei $a_1, a_2, \dots$ ein bestimmtes Wertsystem der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$; dann bezeichne

$$E_p(a), [E_p(a)]_n, [E_p(a)]_m$$

den Wert, den E_p bzw. der n te und m te Abschnitt von E_p für jenes bestimmte Wertsystem annimmt. Wegen (50) liegt

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} [E_p(a)]_n$$

unterhalb der von n und P unabhängigen endlichen Grenze (a, a) ; wir setzen

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \dots)} [E_p(a)]_n = \varepsilon(n, P),$$

wo $\varepsilon(n, P)$ eine Größe ist, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert. Da bei festem, außerhalb des Spektrums gelegenen λ die Größen

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} \right|$$

sämtlich eine endliche obere Grenze G haben, so ist, wenn

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \dots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \eta(n, P)$$

gesetzt wird, die Größe $\eta(n, P)$ ebenfalls eine solche, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert.

Da andererseits

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{E_p(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}}$$

eine beschränkte Form ist, und zwar derart, daß die absoluten Beträge ihrer Werte sämtlich unterhalb der von P unabhängigen Grenze G bleiben, so folgt aus unseren früheren Betrachtungen (S. 127), daß

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{[E_p(a)]_m}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} - \sum_{\substack{(p=1, \dots, P) \\ (m > n)}} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = (G) \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2},$$

wird, worin (G) eine zwischen endlichen von n, m, P unabhängigen Grenzen gelegene Größe bedeutet.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{[E_p(a)]_m}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + (G) \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2} + \eta(n, P),$$

und wenn wir hierin zuerst $m = \infty$ und zuletzt $n = \infty$ werden lassen, so erhalten wir

$$\sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{E_p(a)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = L \sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}}.$$

Andererseits wenden wir die oben (S. 127) zum Beweise der Konvergenz von $A(a, b)$ dargelegte Schlußweise auf die Bilinearform $\sigma(\lambda; x, y)$ an. Da mit Rücksicht auf (31)

$$[\sigma(\mu; x, y)] \leq 1$$

folgt und mithin für alle Werte von μ bei beliebigen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$

$$\sigma(\mu; x, y) \leq 1$$

sein muß, so folgt durch jene Schlußweise zugleich in bezug auf alle μ die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $[\sigma(\mu; x, y)]_n$ gegen $\sigma(\mu; x, y)$; mithin stellt die Bilinearform $\sigma(\mu; x, y)$ für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$ eine stetige Funktion von μ dar, und hieraus wiederum folgt

$$\int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = L \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}_n.$$

Mit den beiden letzteren Limesgleichungen ist unsere Behauptung erwiesen, d. h. die Gültigkeit der Partialbruchdarstellung von $K(\lambda; x)$ auf beliebige Werte der unendlich vielen Variablen erweitert.

Die soeben als allgemeingültig erwiesene Partialbruchdarstellung von $K(\lambda; x)$ läßt zugleich erkennen, daß der Wert der Resolvente $K(\lambda, x)$ für jedes beliebige System der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion ist.

Setzen wir in $K(\lambda; x, y)$ allgemein an Stelle von x_p den Ausdruck $\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_p}$, so entsteht die Faltung:

$$K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y),$$

und daher stellt auch diese für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$ eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion dar.

Aus diesen Tatsachen folgern wir die Gültigkeit der Gleichung (54) nicht nur für beliebige Wertsysteme der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$, sondern auch für alle außerhalb des Spektrums liegenden Werte von λ .

Wir fassen die wichtigsten der gewonnenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Satz 32. *Es sei $K(x)$ eine beschränkte quadratische Form der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$. Die Resolvente $K(\lambda; x)$ von $K(x)$ ist eine eindeutig bestimmte quadratische Form eben dieser Variablen $x_1, x_2, \dots$*

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p, q)} K_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

deren Koeffizienten $K_{pq}(\lambda)$ für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ regulär analytische Funktionen von λ sind.

Die Resolvente $K(\lambda; x)$ ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet, eine beschränkte Form; sie stellt für jedes be-

beliebige Wertsystem der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ eine analytische Funktion von λ dar.

Die Resolvente $K(\lambda, x)$ gestattet für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ und für genügend kleine Werte von λ die Potenzreihenentwicklung

$$(59) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda K(x) + \lambda^2 K K(x) + \dots,$$

und ferner gilt ebenfalls für beliebige Werte der unendlich vielen Variablen und überhaupt für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ die Partialbruchdarstellung

$$(60) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K , d. h. über alle Eigenwerte eventuell mit Einschluß des Eigenwertes ∞ zu erstrecken; E_p bezeichnet allgemein die zu λ_p gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine beschränkte Form, die für kein Wertsystem der Variablen $x_1, x_2, \dots$ negativ ausfällt. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine beschränkte Form der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$, und zwar stellt sie für jedes Wertsystem derselben in bezug auf λ eine Funktion dar, die stetig ist und bei wachsendem λ innerhalb des Streckenspektrums s — von besonderen Werten der $x_1, x_2, \dots$ abgesehen — wächst, in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber konstant bleibt.

Insbesondere gelten die Gleichungen

$$(61) \quad (x, x) = \sum_{(p, \infty)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

$$(62) \quad K(x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu}.$$

Die Resolvente $K(\lambda, x)$ ist mit $K(x)$ durch die Relation

$$(63) \quad K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) = (x, y)$$

verknüpft, die für alle außerhalb des Spektrums von K liegenden Werte von λ gültig ist.

Setzen wir

$$K(\lambda; x, y) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gewisse lineare Funktionen von $y_1, y_2, \dots$ mit konvergenter Quadratsumme sind, so folgt aus (63) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von x_p :

$$\alpha_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} \alpha_q = y_p \quad (p = 1, 2, \dots),$$

d. h. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ lösen diese inhomogenen, aus der quadratischen Form $(x, x) - \lambda K(x)$ (wo λ außerhalb des Spektrums liegt) entspringenden unendlich vielen Gleichungen, wenn $y_1, y_2, \dots$ irgendwelche Größen mit konvergenter Quadratsumme sind; sie sind die einzige Lösung mit konvergenter Quadratsumme. —

Wir wollen nunmehr das Verhalten der Resolvente $K(\lambda, x)$ für einen innerhalb des Spektrums von K liegenden Wert von λ untersuchen.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$\lambda = \nu + i\nu',$$

wo ν, ν' reelle Zahlen bedeuten, und fragen, ob das Produkt

$$(\nu - \lambda) \left\{ \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\}$$

für $\nu' = 0$ einem Grenzwerte zustrebt.

Es sei zunächst ν eine Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$, aber nicht gleich einem Eigenwerte von $K(x)$; dann setzen wir

$$\sum_{(p)} E_p = E_1 + \dots + E_m + R_m$$

und bezeichnen mit ν_m denjenigen unter den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, der dem Werte ν am nächsten liegt. Nehmen wir nunmehr m so groß, daß gerade noch

$$\nu' \leq (\nu - \nu_m)^2$$

ist, so wird

$$\text{für } p \leq m \quad \left| \frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq \left| \frac{\nu'}{\lambda_p - \nu} \right| \leq \frac{\nu'}{|\nu_m - \nu|} \leq \sqrt{\nu'}$$

$$\text{und für } p \geq m \text{ gewiß } \left| \frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq 1$$

und daher auch

$$\left| (\nu - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq \sqrt{\nu'} (E_1 + \dots + E_m) + R_m \leq \sqrt{\nu'} + R_m.$$

Da nun für $\nu' = 0$ notwendig m über alle Grenzen wächst und daher R_m gegen Null konvergiert, so folgt

$$(64) \quad \lim_{\nu'=0} L \left\{ (\nu - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right\} = 0.$$

Die letztere Grenzgleichung gilt gewiß auch, wenn ν weder Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$ noch selbst gleich einem Eigenwert ist.

Aus diesen Tatsachen entnehmen wir andererseits, daß, wenn ν dem Eigenwerte λ_p gleich ist, stets notwendig

$$(65) \quad \lim_{\nu'=0} L \left\{ (\lambda_p - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right\} = E_p$$

ausfällt.

Es sei jetzt ν ein Punkt des Streckenspektrums s und μ' eine reelle Zahl $> \nu$. Nehmen wir alsdann

$$\nu' = (\nu - \mu')^2,$$

so erhalten wir durch eine ähnliche Abschätzung des bis μ' erstreckten Integrales

$$(66) \quad \int_{\nu'=0}^{\sigma(+\infty)} \left\{ (\nu - \lambda) \int_{\sigma(\nu)}^{\sigma(+\infty)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\} = 0.$$

Ebenso folgt auch

$$(67) \quad \int_{\nu'=0}^{\sigma(-\infty)} \left\{ (\nu - \lambda) \int_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(\nu)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\} = 0.$$

Wegen

$$K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda \left\{ \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\}$$

folgt aus (64), (65), (66), (67), daß

$$(68) \quad \int_{\nu'=0}^{\sigma(+\infty)} (\nu - \lambda) K(\lambda, x) = 0$$

bzw. $= \lambda_p E_p$

ist, je nachdem ν keiner der Eigenwerte von $K(x)$ ist bzw. dem Eigenwert λ_p gleich wird.

Als Ergänzung hierzu tritt, wenn

$$\lambda = i\nu'$$

gesetzt wird, die Grenzgleichung

$$(69) \quad \int_{\nu'=\infty}^{\sigma(+\infty)} K(\lambda, x) = 0$$

bzw. $= E_\infty$,

je nachdem $\lambda = \infty$ kein Eigenwert ist oder als solcher gerechnet werden muß. Um dies einzusehen, dienen die analogen Überlegungen wie vorhin: man nehme bei der Untersuchung der Summe m so groß, daß gerade noch $\nu' > \nu_m^2$, wenn ν_m den absolut größten der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ bedeutet, und nehme bei der Untersuchung des Integrals $\nu' = \mu'^2$.

Bedeutet μ irgendeinen außerhalb des Spektrums von K liegenden Wert, so folgt aus (63) durch Faltung mit $K(\mu; x, y)$

$$\lambda K(\cdot, \cdot) K(\lambda; \cdot, x) K(\mu; \cdot, y) = K(\lambda; \cdot, x) K(\mu; \cdot, y) - K(\mu; x, y).$$

Aus dieser Formel und derjenigen, welche aus ihr durch gleichzeitige Vertauschung von $\lambda; x_1, x_2, \dots$ mit $\mu; y_1, y_2, \dots$ entsteht, finden wir die Formel

$$(70) \quad (\lambda - \mu) K(\lambda; x, \cdot) K(\mu; y, \cdot) = \lambda K(\lambda; x, y) - \mu K(\mu; x, y).$$

Bedenken wir nun, daß die Faltung

$$K(\lambda; x, \cdot) K(\mu; \cdot, y)$$

denjenigen Ausdruck bedeutet, der entsteht, wenn wir in $K(\lambda; x, y)$ an Stelle der Variablen $y_1, y_2, \dots$ bzw. die Werte

$$\frac{\partial K(u; x, y)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial K(u; x, y)}{\partial x_2}, \quad \dots$$

eintragen, so erkennen wir aus (68), daß bei festgehaltenem u und für $\lambda = \lambda_p + i\nu'$ die Limesgleichung

$$(71) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} L(\lambda_p - \lambda) K(\lambda; x, \cdot) K(u; \cdot, y) = \lambda_p E_p(x, \cdot) K(u; \cdot, y)$$

gelten muß. Da andererseits ebenfalls mit Rücksicht auf (68) in gleichem Sinne

$$(72) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} L(\lambda_p - \lambda) \{ \lambda K(\lambda; x, y) - u K(u; x, y) \} = \lambda_p^2 E_p(x, y)$$

wird, so folgt aus (71), (72) wegen (70), wenn wir noch λ statt μ schreiben;

$$(73) \quad E_p(x, \cdot) K(\lambda; y, \cdot) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} E_p(x, y).$$

Setzen wir in dieser Gleichung wiederum $\lambda = \lambda_p + i\nu'$, so folgt aus ihr durch Multiplikation mit $\lambda_p - \lambda$ und Anwendung von (68) die Formel

$$(74) \quad E_p(x, \cdot) E_p(\cdot, y) = E_p(x, y).$$

Nehmen wir jedoch zuvor in (73) an Stelle von p den von p verschiedenen Index q und verfahren dann in gleicher Weise, so folgt

$$(75) \quad E_p(x, \cdot) E_q(\cdot, y) = 0, \quad (p \neq q).$$

Mit Benutzung von (69) erkennen wir in gleicher Weise, daß die Formeln (74), (75) auch gültig sind, wenn statt E_p die ev. zu $\lambda = \infty$ gehörige Eigenform E_∞ gesetzt wird.

Setzt man den Wert von $K(\lambda; x, y)$ aus (60) in (73) ein, so folgt aus (74), (75), daß identisch in λ die Gleichung

$$(76) \quad E_p(x, \cdot) \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \cdot, y)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 0$$

erfüllt ist; dieselbe Gleichung gilt auch ev. für die Eigenform E_∞ .

In der nachfolgenden Betrachtung verstehen wir allgemein unter einer *Einzelform* eine solche beschränkte quadratische Form E , deren Punktspektrum im Endlichen nur aus dem einen Punkte 1 besteht und die kein Streckenspektrum besitzt. Wenden wir unsere Darstellung (62) auf die Einzelform E an, so folgt, daß E selbst die zum Eigenwert 1 gehörige Eigenform ist und mithin wegen (74) der Relation

$$(77) \quad E(x, \cdot) E(\cdot, y) = E(x, y)$$

genügen muß. Umgekehrt, wenn eine beschränkte quadratische Form E der Relation (77) genügt, so erhalten wir für ihre Resolvente bei Anwendung der Formel (59) den Ausdruck

$$(x, x) + \lambda E + \lambda^2 E + \dots = (x, x) - E + \frac{E}{1 - \lambda},$$

und hieraus erkennen wir mit Rücksicht auf (68), (69), daß E nur den einen endlichen Eigenwert 1 besitzt, und sodann folgt auch das Nichtvorhandensein eines Streckenspektrums; d. h. E ist eine Einzelform.

Wenn

$$L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots,$$

$$L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

irgendwelche Linearformen in endlicher oder unendlicher Zahl bedeuten, deren Koeffizienten den Relationen

$$L_p(\cdot)L_p(\cdot) = \sum_{(r)} l_{pr}^2 = 1,$$

$$L_p(\cdot)L_q(\cdot) = \sum_{(r)} l_{pr}l_{qr} = 0 \quad (p \neq q)$$

genügen, so heiße jenes Formensystem ein *System orthogonaler Linearformen oder kurz ein orthogonales System*.

Der enge Zusammenhang des so definierten Begriffes mit dem Begriff der Einzelform wird erkennbar durch den folgenden Satz:

Jede Einzelform ist als Summe von Quadraten der Linearformen eines orthogonalen Systems darstellbar, und umgekehrt stellt die Summe der Quadrate der Linearformen eines orthogonalen Systems stets eine Einzelform dar.

Zum Beweise der ersten Aussage bedenken wir, daß, wenn

$$E(x) = \sum_{p,q} e_{pq} x_p x_q$$

gesetzt wird, wegen (77)

$$e_{11} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + \dots$$

sein muß; wenn daher die Variable x_1 in E überhaupt vorkommt, so ist gewiß der Koeffizient von x_1^2 in E positiv. Setzen wir

$$L_1(x) = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \frac{\partial E(x, y)}{\partial y_1},$$

so erhalten wir wegen (77)

$$L_1(\cdot)E(x, \cdot) = L_1(x),$$

$$L_1(\cdot)L_1(\cdot) = 1.$$

Bilden wir daher

$$(78) \quad E_1(x) = E(x) - L_1(x)^2,$$

so ergibt sich

$$(79) \quad \begin{aligned} L_1(\cdot)E_1(x, \cdot) &= 0, \\ E_1(x, \cdot)E_1(\cdot, y) &= E_1(x, y), \end{aligned}$$

d. h. E_1 ist ebenfalls eine Einzelform; da E_1 als solche eine definite Form ist und wegen (78) der Koeffizient von x_1^2 in E_1 den Wert Null hat, so kommt die Variable x_1 in E_1 überhaupt nicht vor.

Wenden wir das nämliche Verfahren statt auf E nunmehr auf E_1 an, so gelangen wir zu einer Linearform L_2 und der Einzelform

$$E_2(x) = E_1(x) - L_2(x)^2 = E(x) - L_1(x)^2 - L_2(x)^2,$$

die die Variablen x_1, x_2 nicht enthält; zugleich folgt aus (79)

$$L_1(\cdot)L_2(\cdot) = 0.$$

Schließlich ergibt sich der Ausdruck

$$E(x) - L_1(x)^2 - L_2(x)^2 - \dots$$

als eine definite beschränkte Form, die keine der Variablen $x_1, x_2, \dots$ enthält und daher identisch Null ist, d. h. es ist

$$E(x) = L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \dots$$

Um die umgekehrte Aussage des Satzes zu beweisen, bilden wir zunächst aus den ersten m Linearformen $L_1, \dots, L_m$ des vorgelegten orthogonalen Systems den in $x_1, x_2, \dots$ linearen Ausdruck

$$M(x) = (x, y) - L_1(x)L_1(y) - \dots - L_m(x)L_m(y).$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten von $M(x)$

$$M(\cdot)M(\cdot) = (y, y) - L_1(y)^2 - \dots - L_m(y)^2$$

wird, so folgt, daß hier auch die rechte Seite positiv ausfällt; mithin stellt auch die endliche bzw. unendlich fortgesetzte Formenreihe

$$L_1(y)^2 + L_2(y)^2 + \dots$$

eine beschränkte quadratische Form dar, und wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen $L_1, L_2, \dots$ folgt sodann, daß diese Form die Relation (77) erfüllt.

Die Einzelform (x, x) und nur diese besitzt auch $\lambda = \infty$ nicht als Eigenwert.

Wir wenden nun die vorstehenden Ergebnisse auf die Eigenformen der quadratischen Form $K(x)$ an. Indem wir die sämtlichen Eigenformen E_p bzw. E_p, E_∞ von $K(x)$, die wegen (74) Einzelformen sind, als Summen von Quadraten linearer orthogonaler Formen $x_1', x_2', \dots$ dargestellt denken, gelangen wir in folgender Weise zu einer orthogonalen Substitution der Variablen $x_1, x_2, \dots$.

Wir bilden zunächst die Form

$$(x, x) - x_1'^2 - x_2'^2 - \dots;$$

dieselbe genügt der Relation (77) und ist daher eine Einzelform der Variablen $x_1, x_2, \dots$; setzen wir dieselbe in die Gestalt $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots$, wo $\xi_1, \xi_2, \dots$ ebenfalls ein orthogonales System linearer Formen bedeuten, die auch zu $x_1', x_2', \dots$ orthogonal sind, so haben wir

$$(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots,$$

und mithin definieren die linearen Formen $x_1', x_2', \dots, \xi_1, \xi_2, \dots$ zusammengekommen eine orthogonale Substitution der Variablen $x_1, x_2, \dots$.

Da die Gleichung (76) gewiß für alle in genügend kleiner Umgebung von $\lambda = 0$ liegenden Werte von λ gelten soll, so schließen wir, da man jede stetige Funktion $w(\mu)$ in dem 0 nicht enthaltenden Intervall s durch lineare Aggregate von Funktionen $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ gleichmäßig approximieren kann, daß auch für jede stetige Funktion $w(\mu)$

$$E_p(x, \cdot) \int_{(s)} w(\mu) d\sigma(\mu; \cdot, y) = 0$$

und folglich auch für alle μ

$$(80) \quad E_p(x, \cdot) \sigma(\mu; \cdot, y) = 0$$

sein muß. Denken wir nun hierin an Stelle der Variablen $x_1, x_2, \dots$ die Variablen $x_1', x_2', \dots, \xi_1, \xi_2, \dots$ eingeführt, so lehrt (80) mit Rücksicht auf die Kovarianz der Faltung bei orthogonaler Transformation, daß die so transformierte Spektralform von den Variablen $x_1', x_2', \dots$ frei ist; wir bezeichnen sie mit $\xi(\mu; \xi)$. Die Formel (60) nimmt alsdann die Gestalt an

$$(81) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(h=1, 2, \dots)} \frac{x_h'^2}{1 - k_h \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\xi(\mu; \xi)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

wo $k_1, k_2, \dots$ die betreffenden reziproken Eigenwerte bedeuten, nachdem sie in eine einfach unendliche Reihe gebracht worden sind, wobei derselbe Wert mehrfach vorkommen kann.

Um die charakteristischen Eigenschaften der Spektralform $\xi(\mu; \xi)$ zu finden, tragen wir in (70) den eben gefundenen Ausdruck (81) für die Resolvente ein; wir erhalten

$$\begin{aligned} & (\lambda - \mu) \int_{(s)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \cdot)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \int_{(s)} \frac{d\xi(\varrho; \cdot, \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} \\ &= \lambda \int_{(s)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \mu \int_{(s)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die Identität

$$\frac{\frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \frac{\mu}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}}{\lambda - \mu} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}$$

folgt

$$\int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; \xi, \cdot)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; \cdot, \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} = \int_{(s)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} d\zeta(\varrho; \xi, \eta).$$

Da diese Gleichung für alle Werte von λ, μ gültig sein soll, so schließen wir wie oben, daß auch für beliebige stetige Funktionen $u(\varrho), v(\varrho)$

$$\int_{(s)} u(\varrho) d\zeta(\varrho; \xi, \cdot) \int_{(s)} v(\varrho) d\zeta(\varrho; \cdot, \eta) = \int_{(s)} u(\varrho) v(\varrho) d\zeta(\varrho; \xi, \eta)$$

gilt; für $u(\varrho) = v(\varrho), \xi = \eta$ nimmt die gefundene Relation die Form an

$$\int_{(s)} u(\varrho)^2 d\zeta(\varrho; \xi) = \int_{(s)} u(\varrho) d\zeta(\varrho; \xi, \cdot) \int_{(s)} u(\varrho) d\zeta(\varrho; \cdot, \xi).$$

Weiterhin folgt aus (81) für $\lambda = 0$

$$(\xi, \xi) = \int_{(s)} d\zeta(\mu; \xi).$$

Da umgekehrt aus der vorletzten Relation die vorhergehenden und mithin schließlich auch (70) und daraus mit Hilfe der letzten Gleichung auch (63) gefolgert werden kann, so erkennen wir, daß die beiden zuletzt gefundenen Bedingungen zur Charakterisierung der Spektralform ξ auch hinreichend sind. Aus (68), (69), (74) folgt die eindeutige Bestimmtheit von λ_p, E_p , und andererseits schließen wir, daß auch die Spektralform durch die obigen für sie charakteristischen Relationen und durch die Forderung, es solle K die Darstellung (62) gestatten, eindeutig bestimmt ist; denn die eben angedeutete von den Eigenschaften der Spektralform ausgehende Betrachtungsweise ergibt, daß die Resolvente durch (60) dargestellt ist, und daß also wegen deren eindeutiger Bestimmtheit auch

$\int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$ für alle λ und daher auch die Spektralform selbst eindeutig bestimmt ist.

Wir fassen die gewonnenen Resultate wie folgt zusammen:

Satz 33. *Jede beschränkte quadratische Form K unendlich vieler Variablen läßt sich stets und nur auf eine Weise durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen*

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi)}{\mu},$$

wo $k_1, k_2, \dots$ gewisse absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegende Größen (die reziproken Eigenwerte) bedeuten und die Spektralform $\sigma(\mu; \xi)$ die zu ihrer Charakterisierung hinreichenden Relationen

$$(82) \quad \int_{(s)} (u(\mu))^2 d\sigma(\mu; \xi) = \int_{(s)} u(\mu) d\sigma(\mu; \xi, \cdot) \int_{(s)} u(\mu) d\sigma(\mu; \cdot, \xi), \\ (\xi, \xi) = \int_{(s)} d\sigma(\mu; \xi)$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ erfüllt.

Setzen wir in (63) $\lambda = \lambda_p + i\nu'$, so folgt nach Multiplikation mit $\lambda_p - \lambda$ für $\nu' = 0$ wegen (68):

$$E_p(x, y) - \lambda_p K(x, \cdot) E_p(\cdot, y) = 0.$$

Wenn wir E_p als Quadratsumme eines orthogonalen Systemes darstellen:

$$E_p = \sum_{(h)} (L_{ph}(x))^2,$$

so ergibt sich durch Faltung mit $L_{ph}(y)$:

$$L_{ph}(x) - \lambda_p K(x, \cdot) L_{ph}(\cdot) = 0,$$

d. h. die Gleichung

$$\lambda L(\cdot) K(x, \cdot) = L(x)$$

kann durch eine beschränkte Linearform L gewiß dann identisch in $x_1, x_2, \dots$ befriedigt werden, wenn λ einer der Eigenwerte von K ist. Ebenso folgt aus (69), daß

$$L(\cdot) K(x, \cdot) = 0$$

gewiß dann befriedigt werden kann, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert ist.

Wir können uns jetzt auch umgekehrt davon überzeugen, daß die obige Gleichung nur in diesem Falle durch eine beschränkte Linearform lösbar ist. Mit Rücksicht auf Satz 33 bedarf es dazu nur des Nachweises, daß, wenn L eine beschränkte Linearform der Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ ist, die Relation

$$\lambda L(\cdot) \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, \cdot)}{\mu} = L(\xi)$$

für keinen Wert von λ statthaben kann. Bezeichnen wir die Koeffizienten von L mit l , so nimmt die letztere Relation die Gestalt an

$$\lambda \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, l)}{\mu} = (\xi, l).$$

Hiervon subtrahieren wir die Relation

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; \xi, l) = (\xi, l)$$

und erhalten so die Relation

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\sigma(\mu; \xi, l) = 0,$$

die ebenfalls identisch in $\xi_1, \xi_2, \dots$ erfüllt wäre. Nehmen wir nun in (82)

$u(\mu) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, so folgt hieraus

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 d\sigma(\mu; l) = 0,$$

und dies ist, da

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; l) = (l, l)$$

ist und da σ nie abnimmt, nur möglich für $(l, l) = 0$; wir gewinnen so folgende Tatsache:

Satz 34. Wenn K irgendeine beschränkte quadratische Form ist, so ist die Relation

$$\lambda L(\cdot) K(x, \cdot) = L(x)$$

durch eine beschränkte Linearform L dann und nur dann lösbar, wenn λ ein Eigenwert von K ist.

Insbesondere ist die Gleichung

$$L(\cdot) K(x, \cdot) = 0$$

dann und nur dann lösbar, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert von K ist. Ist $\lambda = \infty$ kein Eigenwert, diese Gleichung also nicht lösbar, so heiße die quadratische Form abgeschlossen.

Wir wollen uns fortan in diesem Kapitel XI mit gewissen zwei Spezialfällen des Satzes 33 ausführlicher beschäftigen.

Wir nennen eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \dots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ für sich zu Null werden läßt d. h. wenn

$$L F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots)$$

$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \dots$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \dots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$L \varepsilon_1^{(h)} = 0, \quad L \varepsilon_2^{(h)} = 0, \dots$$

$h = \infty$ $h = \infty$

ist. Wenn eine Funktion für jedes Wertsystem der Variablen mit konvergenter Quadratsumme vollstetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. An den Begriff der Vollstetigkeit knüpfen sich unmittelbar folgende Schlüsse.

Hat eine vollstetige Funktion F die Eigenschaft, absolut genommen für alle Werte der Variablen unterhalb einer endlichen Größe zu bleiben, so besitzt sie — wie leicht durch das bekannte für endliche Variablenzahl angewandte Verfahren bewiesen werden kann — ein Maximum. Bezeichnen ferner $L_1(x), \dots, L_m(x)$ noch m weitere vollstetige Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \dots$ und werden nur diejenigen Wertsysteme dieser Variablen zugelassen, die den Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \dots, L_m(x) = 0$$

genügen, so besitzt F ein relatives Maximum; dabei sind die Variablen stets an die Ungleichung

$$(x, x) \leq 1$$

gebunden.

Eine beschränkte Linearform der Variablen $x_1, x_2, \dots$ ist, wie man sofort sieht, auch vollstetig in diesen Variablen. Wir schließen daraus leicht, daß eine vollstetige Funktion der Variablen $x_1, x_2, \dots$ durch orthogonale Transformation derselben wiederum eine vollstetige Funktion der neuen Variablen wird.

Ist eine beschränkte quadratische Form K vollstetig, so ist offenbar, daß ihre Eigenwerte sich im Endlichen nicht häufen; zugleich läßt sich zeigen, daß ein Streckenspektrum überhaupt nicht vorhanden sein kann. Aus Satz 33 gewinnen wir mithin folgendes Resultat:

Satz 35. Wenn eine beschränkte Form K vollstetig ist, so läßt sie sich stets durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen

$$(83) \quad K(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots;$$

dabei sind die Größen $k_1, k_2, \dots$ die reziproken Eigenwerte von K und besitzen, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle.

Wegen der mannigfaltigen und wichtigen Anwendungen dieses Satzes geben wir hier für ihn einen sehr einfachen und von der obigen Theorie unabhängigen Beweis.

Wir nehmen zunächst an, daß K eine positiv definite Form sei; alsdann seien

$$x_1 = l_{11}, \quad x_2 = l_{12}, \quad \dots$$

solche Werte der Variablen, für welche $K(x)$ das Maximum k_1 erlangt. Offenbar fällt die Quadratsumme dieser Werte gleich 1 aus, da wir ja sonst den Wert der Form ohne Verletzung der Bedingung $(x, x) \leq 1$ vergrößern könnten.

Wir setzen

$$L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots$$

und bestimmen, indem wir nunmehr den Variabeln die Bedingung

$$L_1(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_2 von $K(x)$; dasselbe werde für die Werte

$$x_1 = l_{21}, \quad x_2 = l_{22}, \quad \dots$$

erlangt, deren Quadratsumme wiederum gleich 1 ausfallen muß. Ferner setzen wir

$$L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots$$

und bestimmen, indem wir den Variabeln die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \quad L_2(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_3 von $K(x)$; dasselbe werde für

$$x_1 = l_{31}, \quad x_2 = l_{32}, \quad \dots$$

erlangt. Wir setzen dann

$$L_3(x) = l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + \dots$$

und erhalten durch Fortsetzung dieses Verfahrens ein System von linearen Formen $L_1, L_2, L_3, \dots$ mit den Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(\cdot)L_p(\cdot) = 1,$$

$$L_p(\cdot)L_q(\cdot) = 0 \quad (p \neq q).$$

Auf Grund der früheren Betrachtungen (S. 143) bestimmen wir zu diesen Linearformen ein solches System von Linearformen

$$M_1(x), M_2(x), \dots,$$

daß

$$x_1' = L_1(x),$$

$$x_2' = L_2(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_1 = M_1(x),$$

$$y_2 = M_2(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

eine orthogonale Substitution der Variabeln $x_1, x_2, \dots$ bilden. Die vermöge dieser orthogonalen Substitution transformierte Form $K(x)$ bezeichnen wir mit $K(x', y)$. Der Koeffizient von $x_1'^2$ in $K(x', y)$ muß offenbar gleich k_1 ausfallen. Andererseits dürfen weitere x_1' enthaltende Glieder in $K(x', y)$ nicht vorkommen, da ja die Differenz

$$K(x', y) - k_1(x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + \dots) = K(x) - k_1(x, x)$$

für alle Werte der Variabeln $x_1', x_2', \dots, y_1, y_2, \dots$ negativ oder Null ausfallen soll. Da die nämlichen Überlegungen für $x_2', x_3', \dots$ gelten, so haben wir

$$K(x', y) = k_1x_1'^2 + k_2x_2'^2 + \dots + R(y),$$

wo $R(y)$ eine quadratische Form bedeutet, die allein die Variablen $y_1, y_2, \dots$ enthält.

Da K vollstetig ist, so gilt dies auch von der Form

$$K(x', 0) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots,$$

und mithin müssen die Größen $k_1, k_2, \dots$, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen Null konvergieren; denn sonst würde es eine Reihe von Werten von $K(x', 0)$ geben, die gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert, während jedes der Argumente $x_1', x_2', \dots$ für sich gegen Null konvergiert.

Gäbe es nun ein Wertsystem $y_1 = m_1, y_2 = m_2, \dots$, für welches $R(m) > 0$ ausfiele, so könnte man q so bestimmen, daß auch $R(m) > k_q$ wird. Alsdann würde für

$$x_1' = 0, x_2' = 0, \dots, y_1 = m_1, y_2 = m_2, \dots$$

auch $K > k_q$ ausfallen; die Gleichungen

$$L_1(x) = 0, L_2(x) = 0, \dots, M_1(x) = m_1, M_2(x) = m_2, \dots$$

würden mithin ein Wertsystem der Variablen $x_1, x_2, \dots$ bestimmen, für welches insbesondere die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \dots, L_{q-1}(x) = 0$$

erfüllt sind und zugleich $K > k_q$ ausfällt; dies widerspricht der Bestimmungsweise von k_q , und mithin ist $R(y)$ nicht positiver Werte fähig.

Wegen

$$K(0, y) = R(y)$$

ist $R(y)$ gewiß auch negativer Werte nicht fähig, und folglich ist $R(y)$ identisch gleich Null; d. h. es ist

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \dots$$

Wird $K(x)$ nicht als eine definite Form angenommen, so führt die nämliche Überlegung auf die Darstellung

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \dots + R(y),$$

wo $R(y)$ positiver Werte nicht fähig ist. Da sodann $-R(y)$ als positiv definite Form eine Darstellung derselben Art zuläßt, so erhalten wir schließlich auch für K eine Darstellung durch die Quadrate orthogonaler Linearformen, und damit ist der Beweis für den Satz 35 vollständig erbracht. —

Ein hinreichendes Kriterium für die Vollstetigkeit einer Form gewinnen wir durch folgenden Satz.

Satz 36. Wenn für eine quadratische Form K eine der Summen

$$s_2 = \sum_{(p, q)} k_{pq} k_{qp} = \sum_{(p, q)} k_{pq}^2,$$

$$s_4 = \sum_{(p, q, r, s)} k_{pq} k_{qr} k_{rs} k_{sp},$$

$$\dots$$

endlich bleibt oder wenn für eine definite quadratische Form K eine der Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{(p)} k_{pp}, \\ s_3 &= \sum_{(p, q, r)} k_{pq} k_{qr} k_{rp}, \\ &\dots \end{aligned}$$

endlich bleibt, so ist K eine beschränkte vollstetige Form.

In der Tat, ist K eine quadratische Form, deren Koeffizienten eine endliche Quadratsumme besitzen, so folgt wegen

$$\begin{aligned} \left| x_1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_2} + \dots \right|^2 &\leq \left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_2} \right)^2 + \dots, \\ \left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_p} \right)^2 &\leq k_{p1}^2 + k_{p2}^2 + \dots \end{aligned}$$

notwendig

$$|K(x)| \leq \sqrt{\sum_{(p, q)} k_{pq}^2}.$$

Durch Anwendung dieser Tatsache auf die quadratische Form

$$K(x) - K_n(x) = \sum_{(p, q)}^{(n)} k_{pq} x_p x_q,$$

wo rechts p, q alle ganzzahligen Wertepaare, abgesehen von solchen, für die zugleich $p \leq n$ und $q \leq n$ ist, durchläuft, finden wir

$$|K(x) - K_n(x)| \leq \sqrt{\sum_{(p, q)}^{(n)} k_{pq}^2},$$

und hieraus entnehmen wir, da doch

$$L \sqrt{\sum_{(p, q)}^{(n)} k_{pq}^2} = 0$$

wird, die verlangte Vollstetigkeit von $K(x)$.

Ist K eine definite Form, so muß

$$k_{pq}^2 \leq k_{pp} k_{qq}$$

sein, und es ist mithin

$$\sum_{(p, q)} k_{pq}^2 \leq \left(\sum_{(p)} k_{pp} \right)^2;$$

wenn also bei einer definiten Form $\sum_{(p)} k_{pp}$ endlich bleibt, so haben ihre Koeffizienten gewiß auch eine endliche Quadratsumme, und die Form ist nach der vorigen Betrachtung wiederum eine vollstetige Funktion der Variablen.

Nunmehr erkennen wir leicht der Reihe nach folgende Tatsachen:

1. Wenn eine beschränkte quadratische Form K nicht vollstetig ist, so ist sie auch für das besondere Wertsystem $0, 0, \dots$ nicht vollstetig. Diese Behauptung folgt durch Anwendung der Formel

$$K(x + a) = K(x) + 2K(x, a) + K(a),$$

wenn darin für $a_1, a_2, \dots$ ein Wertsystem genommen wird, für welches K nicht vollstetig ist — mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $K(x, a)$ als eine beschränkte Linearform gewiß vollstetig ist.

2. Wenn K eine vollstetige quadratische Form ist, so ist es auch die Form KK ; dies ergibt unmittelbar der Satz 35.

3. Wenn K eine vollstetige, K^* irgendeine quadratische Form ist und für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \dots$ die Ungleichung

$$|K^*(x)| \leq |K(x)|$$

gilt, so ist auch K^* vollstetig; denn aus dieser Ungleichung folgt die Vollstetigkeit für das Wertsystem $0, 0, \dots$.

4. Wenn K eine vollstetige, K^* eine beschränkte Form ist, so ist die Faltung beider Formen vollstetig; wegen

$$|K(x, \cdot) K^*(x, \cdot)| \leq \sqrt{(KK(x))(K^*K^*(x))}$$

ist nämlich diese Faltung für das Wertsystem $0, 0, \dots$ gewiß vollstetig, da nach 2 die Form KK vollstetig ist.

5. Wenn die Faltung KK einer quadratischen Form K mit sich selbst vollstetig ist, so ist es auch die Form K selbst; dies ergibt sich ebenso vermöge 1 aus der Ungleichung

$$|K(x)| \leq \sqrt{KK(x)}.$$

6. Ist eine der Formen, die durch wiederholte Faltung aus der beschränkten Form K entstanden sind:

$$K^{(3)} = KKK, \quad K^{(4)} = KKKK, \quad K^{(5)} = KKKKK, \quad \dots$$

vollstetig, so ist auch K vollstetig. Denn ist etwa $K^{(f)}$ vollstetig, so sind wegen 4 auch die Formen

$$K^{(f+1)}, K^{(f+2)}, \dots$$

vollstetig; wählen wir unter diesen eine Form aus, für die die Faltungszahl eine Potenz von 2 ist, etwa $K^{(2^g)}$, so schließen wir durch g -malige Anwendung von 5 auf die Vollstetigkeit von K .

7. Wenn K eine beschränkte definite Form ist, so sind auch die Faltungen $K^{(3)}, K^{(5)}, \dots$ definit; denn es entsteht beispielsweise $K^{(3)}$ aus K , indem wir in $K(x)$ an Stelle der Variablen x_p die Ausdrücke $\frac{\partial K^{(2)}(x, y)}{\partial y_p}$ einsetzen.

Da nun allgemein s_f nichts anderes als die Invariante $K^{(f)}(.,.)$ d. h. die Summe der Koeffizienten von x_p^2 in $K^{(f)}$ ist, so folgt aus 6 und 7, da der Fall $f=1$ bereits zuvor erledigt worden ist, die Richtigkeit des Satzes 36 allgemein.

Aus Satz 35 und 36 entnehmen wir die folgende Tatsache:

Satz 37. Eine quadratische Form K , die eine der Voraussetzungen des Satzes 36 erfüllt, gestattet gewiß die orthogonale Transformation (83) auf eine Quadratsumme.

Ein Gegenstück zu dem in den Sätzen 35—37 behandelten Fall bildet die Annahme, daß die Form K kein Punktspektrum, sondern nur ein Streckenspektrum besitzt. Um hier nur den einfachsten Fall — der überdies typisch ist — ins Auge zu fassen, fügen wir dieser Annahme noch die weiteren hinzu, daß das Streckenspektrum s aus einer endlichen Anzahl von Intervallen bestehen möge, daß ferner die Koeffizienten der Spektralform $\sigma(\mu, \xi)$ stetig differenzierbare Funktionen von μ seien und endlich, daß, wenn

$$\frac{d\sigma(\mu, \xi)}{d\mu} = \psi(\mu, \xi) = \sum_{(p, q=1, 2, \dots)} \psi_{pq}(\mu) \xi_p \xi_q^{-1}$$

gesetzt wird, $\psi_{11}(\mu)$ innerhalb s nirgends verschwindet und, wenn der Kürze halber

$$\psi_1(\mu) = \frac{\psi_{11}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_{12}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \dots$$

ist, diese unendlich vielen Funktionen $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, ... linear voneinander unabhängig ausfallen, in dem Sinne, daß bei willkürlicher Wahl von $u(\mu)$ zwischen den Integralen

$$(84) \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_1(\mu) d\mu, \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_2(\mu) d\mu, \quad \dots$$

keine lineare Relation bestehen soll, deren Koeffizienten Konstanten mit endlicher Quadratsumme sind.

Führen wir in die Relation (82) diese Annahmen ein und setzen

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \dots,$$

und an Stelle von $u(\mu)$ die Funktion¹

$$\frac{u(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}},$$

so ergibt sich

$$(85) \quad \int_{(s)} (u(\mu))^2 d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \left\{ \int_{(s)} u(\mu) \psi_p(\mu) d\mu \right\}^2,$$

und hieraus entnehmen wir die allgemeinere Formel

$$(86) \quad \int_{(s)} u(\mu) v(\mu) d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \int_{(s)} u(\mu) \psi_p(\mu) d\mu \int_{(s)} v(\mu) \psi_p(\mu) d\mu.$$

Für

$$v(\mu) = \psi_q(\mu)$$

folgt mithin

1) Diese Gleichungen und die daraus entspringenden gelten nur für jeden Abschnitt, da $\psi(\mu, \xi)$ nicht beschränkt ist.

$$(87) \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_q(\mu) d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \int_{(s)} \psi_p(\mu) \psi_q(\mu) d\mu \int_{(s)} \psi_p(\mu) u(\mu) d\mu.$$

Aus unserer Annahme über die lineare Unabhängigkeit der Integrale (84) erkennen wir, daß die Relation (87) identisch für alle Funktionen $u(\mu)$ nicht anders erfüllt sein kann, als wenn

$$(88) \quad \begin{aligned} \int_{(s)} (\psi_p(\mu))^2 d\mu &= 1, \\ \int_{(s)} \psi_p(\mu) \psi_q(\mu) d\mu &= 0 \end{aligned} \quad (p \neq q)$$

ist.

Wegen des positiv definiten Charakters der Form $\psi(\mu, \xi)$ ist

$$(\psi_{11}(\mu) \xi_1 + \psi_{12}(\mu) \xi_2 + \dots)^2 \leq \psi(\mu, \xi) \psi_{11}$$

oder

$$(89) \quad (\psi_1(\mu) \xi_1 + \psi_2(\mu) \xi_2 + \dots)^2 \leq \psi(\mu, \xi).$$

Andererseits haben wir wegen (88)

$$\int_{(s)} (\psi_1 \xi_1 + \psi_2 \xi_2 + \dots)^2 d\mu = (\xi, \xi),$$

und, da auch

$$\int_{(s)} \psi(\mu, \xi) d\mu = (\xi, \xi)$$

ist, so wird

$$\int \{ \psi(\mu, \xi) - (\psi_1(\mu) \xi_1 + \psi_2(\mu) \xi_2 + \dots)^2 \} d\mu = 0.$$

Da aber der hier unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck nach (89) für keinen Wert von μ negativ ausfällt, so ist er stets gleich Null, d. h. es ist

$$\psi(\mu, \xi) = (\psi_1(\mu) \xi_1 + \psi_2(\mu) \xi_2 + \dots)^2.$$

Wir ersehen hieraus, daß unter den gemachten Annahmen die charakteristische Eigenschaft der Spektralform $\sigma(\mu, \xi)$ darin besteht, daß ihre Ableitung nach μ das Quadrat einer Linearform wird, deren Koeffizienten die Orthogonalitätseigenschaften (85) und (88) besitzen. Da umgekehrt eine solche Form alle charakteristischen Eigenschaften einer Spektralform erfüllt, so ist es hiernach leicht, eine quadratische Form K zu konstruieren, deren Spektrum aus einer Zahl gegebener Intervalle besteht: man bestimme für die Intervalle s ein vollständiges System von orthogonalen Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots$ d. h. ein System solcher Funktionen, die den Relationen (85) und (88) genügen, — was leicht geschehen kann (vgl. Kap. XIII) — und setze dann

$$K(\xi) = \int_{(s)} \frac{(\psi_1 \xi_1 + \psi_2 \xi_2 + \dots)^2}{\mu} d\mu.$$

Als einfachstes Beispiel diene die quadratische Form

$$(90) \quad K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots;$$

diese besitzt kein Punktspektrum, und ihr Streckenspektrum besteht aus den Intervallen

$$\lambda = -\infty \text{ bis } -1 \text{ und } +1 \text{ bis } +\infty.$$

Wir finden

$$\psi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} \sin p t,$$

wo t den zwischen 0 und π gelegenen Wert von $\arccos \frac{1}{\mu}$ bedeutet.

In der Tat bestätigt sich dann durch Rechnung

$$\begin{aligned} \int_{\substack{(-\infty \dots -1) \\ (+1 \dots +\infty)}} (\psi_1(\mu)x_1 + \psi_2(\mu)x_2 + \dots)^2 d\mu &= (x, x), \\ K(x) &= \int_{\substack{(-\infty \dots -1) \\ (+1 \dots +\infty)}} \frac{(\psi_1(\mu)x_1 + \psi_2(\mu)x_2 + \dots)^2}{\mu} d\mu. \end{aligned}$$

In Bestätigung von Satz 34 haben ferner, wie man erkennt, die unendlich vielen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{\lambda}{2} x_2 &= 0, \\ x_2 - \frac{\lambda}{2} (x_1 + x_3) &= 0, \\ x_3 - \frac{\lambda}{2} (x_2 + x_4) &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

für keinen Wert von λ Lösungen $x_1, x_2, \dots$, deren Quadratsumme endlich bleibt.

Ein anderes Beispiel liefert die quadratische Form

$$(91) \quad \frac{2}{\sqrt{2^2-1}} x_1 x_2 + \frac{4}{\sqrt{4^2-1}} x_2 x_3 + \frac{6}{\sqrt{6^2-1}} x_3 x_4 + \dots;$$

das Spektrum ist das nämliche wie im ersten Beispiel. Wir finden

$$\psi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} P^{(p-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die P die Legendreschen Polynome sind. Setzen wir noch

$$\chi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} Q^{(p-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die Q die zugehörigen Kugelfunktionen zweiter Art bedeuten, so erhält die Resolvente von K folgende Gestalt:

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p, q \geq p)} 4\lambda \psi_p(\lambda) \chi_q(\lambda) x_p x_q.$$

Die beiden quadratischen Formen (90) und (91) lassen sich durch eine orthogonale Substitution der Variabeln in einander überführen, wie aus ihrer Darstellung durch die Spektralform hervorgeht.

Läßt man die oben gemachte Annahme der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, ... fallen, so wird die Ableitung der Spektralform nicht ein Quadrat, sondern eine Summe von Quadraten linearer Formen von entsprechender Art.

Zwölftes Kapitel.

Simultanes System quadratischer Formen, die Hermitesche Form, die schiefsymmetrische Form und die Bilinearform mit unendlich vielen Variabeln.

Die in Kapitel XI entwickelten Methoden und Resultate lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeit auf allgemeinere Formen mit unendlich vielen Variabeln ausdehnen. Wir betrachten zunächst den Fall eines simultanen Systems zweier quadratischer Formen, von denen die eine definiten Charakter hat, die andere als Aggregat von positiven und negativen Quadraten der Variabeln vorgelegt ist. Mit Hilfe unserer Methode des Grenzüberganges, ausgehend von Formen mit endlicher Variablenzahl, können wir leicht die entsprechende Theorie entwickeln; wir heben nur folgendes Resultat hervor:

Satz 38. *Es sei eine positiv definite, vollstetige, abgeschlossene quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt*

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots$$

vorgelegt, wo $v_1, v_2, \dots$ bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine unendliche Reihe von Null verschiedener Größen $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, deren Vorzeichen bzw. $v_1, v_2, \dots$ sind und die gegen Null konvergieren — ihre reziproken Werte mögen Eigenwerte von K in bezug auf V heißen — und von zugehörigen beschränkten Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ — sie mögen die zugehörigen Eigenformen heißen — von solcher Art, daß die „Polaritätsrelationen“

$$\begin{aligned} L_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) L_p(\cdot) &= v_p, \\ L_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) L_q(\cdot) &= 0, \end{aligned} \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = |\kappa_1| (L_1(x))^2 + |\kappa_2| (L_2(x))^2 + \dots$$

gestattet.

Man kann diesen Satz 38 auch ohne den Grenzübergang von endlicher zu unendlicher Variablenzahl lediglich auf Grund des Satzes 35 mit Ausschluß neuer Konvergenzbetrachtungen beweisen.

Zu dem Zwecke bringen wir die Form $K(x)$ nach Satz 35 durch eine orthogonale Transformation der Variablen $x_1, x_2, \dots$ in die Gestalt einer Quadratsumme; wir bezeichnen die neuen Variablen mit $x'_1, x'_2, \dots$ und finden

$$K(x) = k_1 x'_1{}^2 + k_2 x'_2{}^2 + \dots,$$

wo dann $k_1, k_2, \dots$ lauter positive Größen sind, die gegen Null konvergieren. Ferner bezeichnen wir mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variablen $x'_1, x'_2, \dots$ und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$, die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von $x'_1, x'_2, \dots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ einsetzen.

Wir können nun leicht zeigen, daß $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form der Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ ist. In der Tat ist, wie man sieht, $V'(x')$ als Differenz zweier Einzelformen $E_1(x')$ und $E_2(x')$ darstellbar: diese genügen als solche den Ungleichungen

$$E_1(x') \leq (x', x'), \quad E_2(x') \leq (x', x').$$

Setzen wir an Stelle von $x'_1, x'_2, \dots$ wieder $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ ein, so gehen diese Ungleichungen über in

$$E_1(\sqrt{k}\xi) \leq k_1 \xi_1{}^2 + k_2 \xi_2{}^2 + \dots,$$

$$E_2(\sqrt{k}\xi) \leq k_1 \xi_1{}^2 + k_2 \xi_2{}^2 + \dots.$$

Wären nun diese Einzelformen nicht vollstetig in den Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$, so müßten sich auch Wertsysteme $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots$ finden lassen, für die

$$L_{n=\infty} \alpha_1^{(n)} = 0, \quad L_{n=\infty} \alpha_2^{(n)} = 0, \quad \dots$$

wird, während die Einzelformen, die ja positiv definit sind, für

$$\xi_1 = \alpha_1^{(n)}, \quad \xi_2 = \alpha_2^{(n)}, \quad \dots$$

Werte erhalten müßten, die oberhalb einer positiven von n unabhängigen Größe bleiben; dies aber widerspräche den obigen Ungleichungen, da $K(x)$ vollstetig ist. Da demnach $E_1(\sqrt{k}\xi), E_2(\sqrt{k}\xi)$ vollstetig in $\xi_1, \xi_2, \dots$ sind, so ist dies auch $V'(\sqrt{k}\xi)$. Die Tatsache der Vollstetigkeit von $E_1(\sqrt{k}\xi), E_2(\sqrt{k}\xi)$ in den Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ folgt auch unmittelbar aus 4. auf S. 152.

Nunmehr transformieren wir nach Satz 35 die Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ orthogonal in die neuen Variablen $\xi'_1, \xi'_2, \dots$ derart, daß die Form $V'(\sqrt{k}\xi)$ die Gestalt

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \kappa_1 \xi'_1{}^2 + \kappa_2 \xi'_2{}^2 + \dots$$

erhält, worin $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ gewisse reelle Größen sind, die gegen Null konvergieren. Bezeichnen wir nun diejenigen Linearformen von $x_1', x_2', \dots$, die aus den Formen $\xi_p'(\xi)$ hervorgehen, wenn wir darin für $\xi_1, \xi_2, \dots$ bzw. die Ausdrücke $\sqrt{k_1}x_1', \sqrt{k_2}x_2', \dots$ einsetzen, mit $\xi_p'(\sqrt{k}x')$, so ist, da jene Formen eine orthogonale Transformation definieren,

$$\begin{aligned} K(x) &= (\sqrt{k_1}x_1')^2 + (\sqrt{k_2}x_2')^2 + \dots \\ &= (\xi_1'(\sqrt{k}x'))^2 + (\xi_2'(\sqrt{k}x'))^2 + \dots; \end{aligned}$$

ferner wird:

$$\begin{aligned} \xi_p'(\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\cdot) &= \frac{\partial \xi_p'(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \xi_p'(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_2} + \dots \\ &= \xi_p'(\sqrt{k}\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \cdot), \end{aligned}$$

und folglich wird

$$\xi_p'(\sqrt{k}\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \cdot) = \kappa_p \xi_p'(\xi).$$

Aus dieser Formel schließen wir in gleicher Weise

$$\xi_p'(\sqrt{k}\cdot) V'(\cdot, \cdot) \xi_p'(\sqrt{k}\cdot) = \kappa_p \xi_p'(\cdot) \xi_p'(\cdot).$$

Wenn wir nun wieder zu den Variablen $x_1, x_2, \dots$ zurückkehren und allgemein mit $A_p(x)$ diejenige Linearform von $x_1, x_2, \dots$ bezeichnen, die dabei aus $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ wird, so erhalten wir

$$A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_q(\cdot) = \kappa_p \xi_p'(\cdot) \xi_q'(\cdot),$$

und das ist wegen der Orthogonalität der Formen $\xi_p'(\xi)$ gleich κ_p ($p = q$) oder gleich Null ($p \neq q$); andererseits wird

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots$$

Wäre $\kappa_p = 0$, so müßte für alle $x_1, x_2, \dots$

$$A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) K(\cdot, x) = 0$$

sein, was der Abgeschlossenheit von K und von V widerspräche; folglich sind $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ lauter von Null verschiedene Größen.

Wir können nunmehr die Summanden $\kappa_1 \xi_1'^2, \kappa_2 \xi_2'^2, \dots$ in der obigen Darstellung von $V'(\sqrt{k}\xi)$ derart angeordnet denken, daß allgemein κ_p das Vorzeichen von v_p besitzt. In der Tat: eine solche Anordnung jener Summanden wäre nur dann nicht ausführbar, wenn entweder die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Einheiten in der Reihe $v_1, v_2, \dots$ endlich und zugleich die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Größen, die in der Reihe $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ vorkommen, größer als die erstere Anzahl ausfiele, oder wenn die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Größen in der Reihe $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ endlich und zugleich die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Einheiten in der Reihe $v_1, v_2, \dots$ größer als die erstere Anzahl ausfiele.

Wenn wir nun mit $x_1(\sqrt{k}\xi), x_2(\sqrt{k}\xi), \dots$ diejenigen Linearformen in $\xi_1, \xi_2, \dots$ bezeichnen, die aus $x_1(x'), x_2(x'), \dots$ entstehen, wenn wir für

$x_1', x_2', \dots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ einsetzen, so ist identisch in $\xi_1, \xi_2, \dots$

$$v_1(x_1(\sqrt{k}\xi))^2 + v_2(x_2(\sqrt{k}\xi))^2 + \dots = \kappa_1(\xi_1'(\xi))^2 + \kappa_2(\xi_2'(\xi))^2 + \dots,$$

da beide Seiten dieser Gleichung $V'(\sqrt{k}\xi)$ darstellen.

Wir nehmen — entsprechend dem ersten Falle — an, es seien $v_1, \dots, v_e$ negativ (bzw. positiv), $v_{e+1}, v_{e+2}, \dots$ sämtlich positiv (bzw. negativ), ferner $\kappa_1, \dots, \kappa_{e+1}$ negativ (bzw. positiv). Da die Formen $\xi_1'(\xi), \xi_2'(\xi), \dots$ eine orthogonale Substitution bestimmen, d. h. ein *vollständiges orthogonales System von Linearformen* — wie wir sagen wollen — bilden, so ist jede beschränkte Linearform von $\xi_1, \xi_2, \dots$ als lineare Kombination der Formen $\xi_1'(\xi), \xi_2'(\xi), \dots$ darstellbar; wir setzen insbesondere

$$x_1(\sqrt{k}\xi) = a_{11}\xi_1'(\xi) + a_{12}\xi_2'(\xi) + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_e(\sqrt{k}\xi) = a_{e1}\xi_1'(\xi) + a_{e2}\xi_2'(\xi) + \dots,$$

wo $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{e1}, a_{e2}, \dots$ gewisse Koeffizienten bedeuten. Sodann bestimmen wir solche nicht sämtlich verschwindende Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_{e+1}$, die den e Gleichungen

$$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1e+1}\alpha_{e+1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{e1}\alpha_1 + \dots + a_{ee+1}\alpha_{e+1} = 0$$

genügen, und bilden die Gleichungen

$$\xi_1'(\xi) = \alpha_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi_{e+1}'(\xi) = \alpha_{e+1},$$

$$\xi_{e+2}'(\xi) = 0,$$

$$\xi_{e+3}'(\xi) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Die durch Auflösung dieser Gleichungen entstehenden Werte von $\xi_1, \xi_2, \dots$ würden einen Widerspruch ergeben, da sie in die vorhin aufgestellte Identität

$$v_1(x_1(\sqrt{k}\xi))^2 + v_2(x_2(\sqrt{k}\xi))^2 + \dots = \kappa_1(\xi_1'(\xi))^2 + \kappa_2(\xi_2'(\xi))^2 + \dots$$

eingesetzt der linken Seite einen nicht negativen (bzw. nicht positiven) Wert, der rechten Seite dagegen gewiß einen negativen (bzw. positiven) Wert erteilen würden.

Um den zweiten der oben genannten Fälle zu behandeln, gehen wir von der in $x_1', x_2', \dots$ identischen Gleichung

$$v_1(x_1(x'))^2 + v_2(x_2(x'))^2 + \dots = \kappa_1\left(\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \kappa_2\left(\xi_2'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \dots$$

ein, so erkennen wir, daß die linke Seite dieser Identität, da sie eine beschränkte Form der Variablen $x_1', x_2', \dots$ darstellt und als solche nach S. 127 stetig in diesen Variablen ist, in der Grenze für $h = \infty$ den Wert -1 erhält, während die rechte Seite beständig ≥ 0 ausfällt.

Hiernach sind beide Fälle als unmöglich erkannt, und wir dürfen also von vorneherein allgemein κ_p vom selben Vorzeichen wie v_p annehmen.

Setzen wir daher jetzt

$$I_p(x) = \frac{A_p(x)}{\sqrt{|\kappa_p|}},$$

so sind die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ von der im Satze 38 verlangten Beschaffenheit.

Das nämliche Schlußverfahren ermöglicht die Behandlung einer nicht abgeschlossenen Form K .

Um dies einzusehen, bringen wir wiederum die Form K nach Satz 35 durch eine orthogonale Transformation der Variablen $x_1, x_2, \dots$ in die Gestalt einer Quadratsumme. Wir setzen

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots$$

wo $k_1, k_2, \dots$ teils positive, teils verschwindende Größen sind.

Wir bezeichnen wiederum mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variablen $x_1', x_2', \dots$ und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$, die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von $x_1', x_2', \dots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ einsetzen. Da $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form in $\xi_1, \xi_2, \dots$ ist, so können wir nach Satz 35 die Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ orthogonal in die neuen Variablen $\xi_1', \xi_2', \dots$ transformieren derart, daß

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \kappa_1 \xi_1'^2 + \kappa_2 \xi_2'^2 + \dots$$

sind, worin $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ gewisse teils positive oder negative teils verschwindende Größen sind, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren. Bilden wir endlich entsprechend wie vorhin die Ausdrücke $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ und bezeichnen allgemein mit $A_p(x)$ diejenige Linearform, die aus $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ wird, wenn wir darin statt der Variablen $x_1', x_2', \dots$ wieder die ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \dots$ einführen, so wird wie vorhin

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots,$$

$$A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_q(\cdot) = 0 \quad (p \neq q), \quad \text{bzw.} = \kappa_p \quad (p = q).$$

Wir sprechen dieses den Satz 38 ergänzende Resultat wie folgt aus:

Satz 38*. Es sei eine positiv definite vollstetige quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots$$

vorgelegt, wo $v_1, v_2, \dots$ bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine Reihe von teils positiven oder negativen, teils verschwindenden Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren, und von zugehörigen beschränkten Linearformen $A_1(x), A_2(x), \dots$ derart, daß die Polaritätsrelationen

$$\begin{aligned} A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_p(\cdot) &= \alpha_p, \\ A_p(\cdot) A(\cdot, \cdot) A_q(\cdot) &= 0, \end{aligned} \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind, und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots$$

gestattet.

Unter einer Hermiteschen Form der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ verstehen wir eine Bilinearform dieser Variablen von der Gestalt

$$H(x, y) = \sum_{(p, q)} h_{pq} x_p y_q,$$

deren Koeffizienten h_{pq} komplexe der Bedingung

$$h_{pq} = \bar{k}_{pq} + i s_{pq} = \bar{h}_{qp} = \bar{k}_{qp} - i s_{qp}$$

genügende Größen sind. Stellt sowohl Real- wie Imaginärteil von $H(x, y)$ eine vollstetige Funktion der reellen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ dar, so lassen sich reelle, im Endlichen nirgends sich verdichtende Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — die Eigenwerte von H — und zugehörige Linearformen mit komplexen Koeffizienten $L_1(x), L_2(x), \dots$ — die Eigenformen von H — finden, so daß

$$\begin{aligned} (x, y) &= L_1(x) \bar{L}_1(y) + L_2(x) \bar{L}_2(y) + \dots, \\ H(x, y) &= \frac{L_1(x) \bar{L}_1(y)}{\lambda_1} + \frac{L_2(x) \bar{L}_2(y)}{\lambda_2} + \dots \end{aligned}$$

wird, und daß die Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(\cdot) \bar{L}_p(\cdot) = 1, \quad L_p(\cdot) \bar{L}_q(\cdot) = 0 \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind; die horizontalen Striche deuten die Vertauschung von i mit $-i$ an. — Der Beweis dieser Tatsache kann analog wie unten der Beweis des spezielleren Satzes 39 geführt werden.

Nehmen wir die Koeffizienten der Hermiteschen Form rein imaginär an und unterdrücken alsdann den Faktor i , so entspringt die schiefe

symmetrische Form; unter einer *schiefsymmetrischen Form* verstehen wir mithin eine Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ von der Gestalt

$$S(x, y) = \sum_{(p, q)} s_{pq} x_p y_q,$$

deren Koeffizienten reelle der Bedingung

$$s_{pq} = -s_{qp}, \quad s_{pp} = 0$$

genügende Größen sind. Die vorhin für eine Hermitesche Form ausgesprochene Tatsache drückt sich für den besonderen Fall der schiefsymmetrischen Form, wie folgt, aus:

Satz 39: Wenn die schiefsymmetrische Form $S(x, y)$ vollstetig ist, so gibt es eine orthogonale Transformation der Variablen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

in die neuen Variablen

$$\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \dots$$

so daß, wenn die Variablen $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ mittelst derselben orthogonalen Transformation simultan in die Variablen $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2', \dots$ übergehen, die Form S die Gestalt

$$S(x, y) = k_1(\xi_1 \eta_1' - \xi_1' \eta_1) + k_2(\xi_2 \eta_2' - \xi_2' \eta_2) + \dots$$

erhält; dabei sind $k_1, k_2, \dots$ Größen, die, falls sie in unendlicher Zahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle besitzen.

Zum Beweise betrachten wir $2S(x, y)$ als quadratische Form der unendlich vielen Variablen $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ und erkennen sodann aus Satz 35 das Vorhandensein von Größen $k_1, k_2, \dots$ und zugehörigen Linearformen $L_1(x, y), L_2(x, y), \dots$ jener Variablen, so daß

$$2S(x, y) = k_1(L_1(x, y))^2 + k_2(L_2(x, y))^2 + \dots$$

und

$$(x, x) + (y, y) = (L_1(x, y))^2 + (L_2(x, y))^2 + \dots$$

wird. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der schiefsymmetrischen Form

$$S(x, y) = -S(y, x),$$

$$S(x, y) = -S(-x, y)$$

folgt leicht, daß in der obigen Darstellung für $2S(x, y)$ zu jedem k_p, L_p stets noch die Eigenwerte und zugehörigen Linearformen

$$k_{p'} = -k_p,$$

$$L_{p'}(x, y) = L_p(y, x),$$

$$k_{p''} = -k_p,$$

$$L_{p''}(x, y) = L_p(-x, y),$$

$$k_{p'''} = -k_{p'} = k_p$$

$$L_{p'''}(x, y) = L_{p'}(-x, y) = L_p(y, -x)$$

vorhanden sein müssen, deren Vereinigung in der Darstellung von $2S(x, y)$ die Glieder

$$k_p \{ (L_p(x, y))^2 - (L_p(y, x))^2 - (L_p(-x, y))^2 + (L_p(y, -x))^2 \}$$

und in der Darstellung von $(x, x) + (y, y)$ die Glieder

$(L_p(x, y))^2 + (L_p(y, x))^2 + (L_p(-x, y))^2 + (L_p(y, -x))^2$
liefert.

Setzen wir nun für jedes solche Quadrupel

$$L_p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (O_p(x) + O_p'(y)),$$

wo $O_p(x)$ eine lineare Form von $x_1, x_2, \dots$ und $O_p'(y)$ eine lineare Form von $y_1, y_2, \dots$ ist, so gehen die obigen Darstellungen über in

$$S(x, y) = \sum k_p (O_p(x) O_p'(y) - O_p'(x) O_p(y)),$$

$$(x, x) + (y, y) = \sum (O_p(x))^2 + (O_p'(x))^2 + (O_p(y))^2 + (O_p'(y))^2,$$

und da $L_1(x, y), L_2(x, y), \dots$ zueinander orthogonal sind, folgt leicht auch die Orthogonalität der Formen $O_1, O_2, \dots, O_1', O_2', \dots$; mithin bestimmen

$$\xi_p = O_p(x), \quad \xi_p' = O_p'(x)$$

eine orthogonale Transformation von der verlangten Beschaffenheit.

Aus dieser Darstellung folgt durch eine einfache Überlegung, wie sie später ähnlich angestellt werden wird (S. 171), daß die aus $(x, y) - \lambda S(x, y)$ entspringenden inhomogenen Gleichungen eindeutig lösbar sind, außer wenn $\lambda = \frac{i}{k_1}, \frac{i}{k_2}, \dots$ ist; für diese rein imaginären Eigenwerte der Form $S(x, y)$ haben die homogenen Gleichungen eine nicht identisch verschwindende Lösung, und zwar ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Lösungen stets endlich.

Was schließlich die Theorie der Bilinearform betrifft, so sehen wir zunächst ohne Schwierigkeit folgende Tatsachen ein:

Wenn die Bilinearform $A(x, y)$ eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ darstellt, so ist, wenn A_n den n ten Abschnitt der Bilinearform A bezeichnet, für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variablen

$$\lim_{n=\infty} A_n(., x) A_n(., x) = A(., x) A(., x),$$

und zwar im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, d. h. es ist

$$(92) \quad |A(., x) A(., x) - A_n(., x) A_n(., x)| \leq \varepsilon_n,$$

wo ε_n gewisse von den Variablen $x_1, x_2, \dots$ unabhängige, mit unendlich wachsendem n gegen Null abnehmende Größen sind. Daraus folgt, daß die quadratische Form $A(., x) A(., x)$ stets vollstetig ist, wenn die Bilinearform $A(x, y)$ vollstetig ist.

Eine Bilinearform $A(x, y)$ ist stets vollstetig, wenn die quadratische Form $A(., x) A(., x)$ vollstetig ist, also beispielsweise gewiß, wenn die

Summe der Quadrate der Koeffizienten von A endlich bleibt. In der Tat, fassen wir von $A(x, y)$ als quadratische Form der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ auf, so folgt aus der Ungleichung

$$|A(x, y)| \leq \sqrt{A(\cdot, x)A(\cdot, x)},$$

durch die in 4. und 5. (S. 152) angewandte Schlußweise, daß $A(x, y)$ vollstetig ist.

Diesen Abschnitt wollen wir mit der Entwicklung eines Satzes beschließen, der — wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird — auf die einfachste Weise zur Auflösung der Integralgleichungen zweiter Art mit unsymmetrischem Kern verwandt werden kann; derselbe lautet:

Satz 40. Wenn

$$A(x, y) = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige Bilinearform der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ ist, so haben gewiß entweder die unendlichvielen Gleichungen

$$(93) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots &= a_1, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots &= a_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

für alle möglichen Größen $a_1, a_2, \dots$ mit konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung $x_1, x_2, \dots$ mit konvergenter Quadratsumme — oder die entsprechenden homogenen Gleichungen

$$(94) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots &= 0, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

lassen eine Lösung $x_1, x_2, \dots$ mit der Quadratsumme 1 zu.

Zum Beweise betrachten wir zunächst irgendein System von n linearen Gleichungen und n Unbekannten mit nicht verschwindender Determinante von der Gestalt

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n &= b_1, \\ &\dots \\ b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Bezeichnen $\beta_1, \dots, \beta_n$ die Lösungen dieser Gleichungen, so ist

$$\begin{aligned} &(b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n)^2 + \dots + (b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ &= b_1(b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n) + \dots + b_n(b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n), \end{aligned}$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} &(b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n)^2 + \dots + (b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ &\leq \sqrt{(\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2)\{(b_{11}b_1 + \dots + b_{n1}b_n)^2 + \dots + (b_{1n}b_1 + \dots + b_{nn}b_n)^2\}}. \end{aligned}$$

Nunmehr sei m das Minimum der quadratischen Form

existieren; die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ haben eine ebenfalls unterhalb der Grenze (98) liegende Quadratsumme und müssen wegen der Vollstetigkeit der Linearformen

$$a_{p_1}x_1 + a_{p_2}x_2 + \dots$$

gewiß jede der Gleichungen des vorgelegten Systems (93) befriedigen.

Zweitens mögen die Minima $m_1, m_2, \dots$ gegen Null konvergieren; die Werte der Variabeln mit der Quadratsumme 1, für welche diese Minima eintreten, seien

$$\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_n^{(n)}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & ((1 + a_{11})x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + (1 + a_{nn})x_n)^2 \\ &= A_n(\cdot, x)A_n(\cdot, x) + 2A_n(x, x) + (x, x)_n \end{aligned}$$

und folglich

$$(99) \quad A_n(\cdot, \mu^{(n)})A_n(\cdot, \mu^{(n)}) + 2A_n(\mu^{(n)}, \mu^{(n)}) + 1 = m_n.$$

Nun denken wir uns wieder eine solche Reihe ganzer Zahlen $n_1, n_2, \dots$ herausgegriffen, daß die Grenzwerte

$$\mu_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_1^{(n_h)}, \quad \mu_2 = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_2^{(n_h)}, \dots$$

existieren; die Größen $\mu_1, \mu_2, \dots$ genügen dann der Bedingung

$$(100) \quad (\mu, \mu) \leq 1.$$

Mit Rücksicht auf (92) und wegen der Vollstetigkeit der quadratischen Form $A(x, x)$ folgt aus (99), wenn wir darin n_h an Stelle von n einsetzen und zur Grenze $h = \infty$ übergehen,

$$(101) \quad A(\cdot, \mu)A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + 1 = 0.$$

Wir betrachten nun die quadratische Form

$$(102) \quad \begin{aligned} & ((1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots)^2 + (a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots)^2 \\ &= A(\cdot, x)A(\cdot, x) + 2A(x, x) + (x, x); \end{aligned}$$

da dieselbe positiv definit ist, so folgt insbesondere

$$(103) \quad A(\cdot, \mu)A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) \geq 0;$$

hieraus entnehmen wir wegen (101)

$$(\mu, \mu) \geq 1;$$

mithin ist wegen (100):

$$(\mu, \mu) = 1.$$

Nunmehr erkennen wir wegen (101), daß auch

$$A(\cdot, \mu)A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) = 0$$

ist, d. h. im Hinblick auf (102), die Größen $\mu_1, \mu_2, \dots$ befriedigen die homogenen Gleichungen (94). Damit ist gezeigt, daß stets mindestens einer der in Satz 40 unterschiedenen Fälle stattfindet.

Wenn die homogenen Gleichungen (94) eine Lösung mit der Quadratsumme 1 besitzen, so können die durch Transposition entstehenden inhomogenen Gleichungen

$$(104) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \cdots &= a_1, \\ a_{12}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \cdots &= a_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

gewiß nicht für alle $a_1, a_2, \dots$ mit endlicher Quadratsumme eine Lösung von endlicher Quadratsumme besitzen, da ja zwischen ihren linken Seiten eine lineare Identität besteht: es müssen daher dem eben Bewiesenen zufolge alsdann die transponierten homogenen Gleichungen

$$(105) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \cdots &= 0, \\ a_{12}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \cdots &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eine Lösung mit der Quadratsumme 1 zulassen. Also können die in homogenen Gleichungen (93) gewiß nicht für alle $a_1, a_2, \dots$ eine Lösung mit endlicher Quadratsumme besitzen; daher schließen sich die beiden Fälle des Satzes 40 wirklich aus, und die Lösung im ersten Falle ist eindeutig. Damit ist der Beweis für unsern Satz völlig erbracht.

Um die Mannigfaltigkeit der Lösungen der homogenen Gleichungen (94) festzustellen, haben wir nur nötig, die in Kapitel XI entwickelte Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen auf die Form (102) anzuwenden. Da $A(., x)A(., x)$ und $A(x, x)$ vollstetige quadratische Formen sind, so ist dies auch die Form

$$A(., x)A(., x) + 2A(x, x);$$

dieselbe besitzt daher den Wert -1 höchstens als Eigenwert von endlicher Vielfachheit; mithin besitzt die quadratische Form (102) den Wert ∞ nur als Eigenwert von endlicher Vielfachheit, d. h. es gibt eine orthogonale Transformation der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots$ in $x'_1, x'_2, \dots$, so daß jene quadratische Form (102) die Gestalt

$$k_{e+1}x'^2_{e+1} + k_{e+2}x'^2_{e+2} + \cdots$$

erhält, wo $k_{e+1}, k_{e+2}, \dots$ lauter positive, von Null verschiedene, gegen 1 konvergierende Größen und e eine endliche ganze Zahl bedeuten. Die Lösungen der homogenen Gleichungen (94) erhält man aus

$$x'_1 = u_1, \dots, x'_e = u_e, x'_{e+1} = 0, x'_{e+2} = 0, \dots,$$

wo $u_1, \dots, u_e$ willkürliche Konstanten sind, und wir ersehen daraus, daß es nur eine endliche Anzahl, und zwar genau e linear unabhängige Lösungen von (94) gibt.

Wir erkennen ferner, daß, wenn e die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der homogenen Gleichungen

$$(106) \quad L_p(x) = x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = 0, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

sind, zwischen den Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ genau e voneinander unabhängige lineare Identitäten von der Gestalt

$$(107) \quad \beta_1^{(h)}L_1(x) + \beta_2^{(h)}L_2(x) + \cdots = 0, \quad (h = 1, \dots, e)$$

bestehen müssen, wobei die Koeffizienten $\beta_1^{(h)}, \beta_2^{(h)} \dots$ in diesen Identitäten eine endliche Quadratsumme besitzen, und ferner, daß die inhomogenen Gleichungen (13)

$$x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = a_p, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

nur dann und stets dann lösbar sind, wenn die Größen $a_1, a_2, \dots$ die e Bedingungen

$$(108) \quad \beta_1^{(h)}a_1 + \beta_2^{(h)}a_2 + \cdots = 0, \quad (h = 1, \dots, e)$$

erfüllen.

In der Tat, es sei wie oben e die genaue Zahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichungen (106) und f die Zahl der voneinander unabhängigen Identitäten von der Gestalt (107): dann lassen sich aus den Variablen $x_1, x_2, \dots$ gewiß e solche auswählen, daß die Gleichungen (106) keine Lösung mehr besitzen, bei der die e ausgewählten Variablen sämtlich Null sind; wir bezeichnen die übrigbleibenden Variablen mit $x'_1, x'_2, \dots$. Wäre nun $f > e$, so müßten sich aus den Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ e solche aussuchen lassen, die lineare Kombinationen der übrigen sind, während die übrigbleibenden unendlich vielen Linearformen, die mit $L'_1(x), L'_2(x), \dots$ bezeichnet werden mögen, gewiß noch einer linearen Identität von der Gestalt

$$(109) \quad \beta_1 L'_1(x) + \beta_2 L'_2(x) + \cdots = 0$$

genügen, wo die Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \dots$ eine endliche Quadratsumme haben und nicht sämtlich Null sind. Wir setzen nun in den Linearformen $L'_1(x), L'_2(x), \dots$ die vorhin ausgewählten e Variablen Null und bezeichnen die so entstehenden Linearformen der Variablen $x'_1, x'_2, \dots$ mit $L'_1(x'), L'_2(x'), \dots$. Endlich bestimmen wir irgendwelche Größen $a_1, a_2, \dots$ mit endlicher Quadratsumme, für welche

$$(110) \quad \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots \neq 0$$

ausfällt.

Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$(111) \quad \begin{aligned} L'_1(x') &= a_1, \\ L'_2(x') &= a_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

mit den Unbekannten $x'_1, x'_2, \dots$; dasselbe nimmt bei geeigneter Anordnung der Gleichungen wieder die Gestalt des Gleichungssystems (93).

an. Wir sehen dies am leichtesten ein, indem wir zum Gleichungssystem (106) den zugehörigen Bilinearausdruck

$$(112) \quad y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots = (x, y) + A(x, y)$$

bilden; darin ist $A(x, y)$ eine stetige Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$. Der entsprechende Bilinearausdruck für das Gleichungssystem (111)

$$y_1' L_1'(x') + y_2' L_2'(x') + \cdots$$

entsteht dem Obigen zufolge, indem wir in (112) gewisse e von den Variablen $x_1, x_2, \dots$ und gewisse e von den Variablen $y_1, y_2, \dots$ Null setzen und die übrigbleibenden Variablen mit $x_1', x_2', \dots$ bzw. $y_1', y_2', \dots$ bezeichnen. Hierbei verwandelt sich nun (x, y) , wenn wir noch nötigenfalls gewisse Produkte $x_h' y_h'$ in endlicher Anzahl addieren, in

$$(x', y') = x_1' y_1' + x_2' y_2' + \cdots,$$

und da sich zugleich $A(x, y)$ in eine vollstetige Bilinearform der Variablen $x_1', x_2', \dots, y_1', y_2', \dots$ verwandelt, so haben wir

$$y_1' L_1'(x') + y_2' L_2'(x') + \cdots = (x', y') + A'(x', y'),$$

wo $A'(x', y')$ gewiß ebenfalls eine vollstetige Bilinearform von $x_1', x_2', \dots, y_1', y_2', \dots$ wird; daraus folgt die behauptete Gestalt des Gleichungssystems (111). Aus (109), (110) erkennen wir, daß das Gleichungssystem (111) keine Lösung besitzt; da aber das aus ihm durch Nullsetzen der linken Seiten entstehende homogene Gleichungssystem ebenfalls keine Lösung zuläßt, so zeigt dieser Widerspruch mit dem Satze 40 (S. 165), daß die Annahme $f > e$ unzutreffend war. Da die Anwendung des eben Bewiesenen auf das transponierte Gleichungssystem zeigt, daß auch $e > f$ unzutreffend sein muß, so ist notwendig $e = f$. Zugleich erkennen wir auch die Richtigkeit der letzten oben gemachten Aussage.

Bei der Voraussetzung, daß $A(x, y)$ eine vollstetige Bilinearform ist, kommen also dem Gleichungssysteme (93) alle wesentlichen Eigenschaften eines Systemes von endlich vielen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten zu. —

Zum Schluß möge noch gezeigt werden, mit welcher überraschender Eleganz und Einfachheit der Satz 40 ohne irgendeine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen werden kann, indem man sich der Sätze 35 und 39 bedient.

In der Tat, aus Satz 39 leiten wir sofort folgende Tatsache ab:

Hilfssatz 6. Wenn $x_1, x_2, \dots$ eine unendliche Reihe positiver Größen ist, die gegen 1 konvergieren und

$$S(x, y) = \sum_{(p, q)} s_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige schiefsymmetrische Form der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ bedeutet, so gibt es stets eine vollstetige Bilinearform $T(x, y)$ der nämlichen Variablen, so daß

$$(113) \quad \{\kappa(x, \cdot) + S(x, \cdot)\} \{(\cdot, y) + T(\cdot, y)\} = (x, y)$$

wird, wo $\kappa(x)$ die quadratische Form

$$\kappa(x) = \kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2 + \dots$$

bedeutet. Die Relation (113) ist damit gleichbedeutend, daß das Gleichungssystem

$$(114) \quad \begin{aligned} \kappa_1 x_1 + s_{12} x_2 + s_{13} x_3 + \dots &= y_1, \\ s_{21} x_1 + \kappa_2 x_2 + s_{23} x_3 + \dots &= y_2, \\ s_{31} x_1 + s_{32} x_2 + \kappa_3 x_3 + \dots &= y_3, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

die Auflösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_1}, \\ x_2 &= y_2 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_2}, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

besitzt.

Zum Beweise setzen wir in $S(x, y)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} x'_1, & x_2 &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} x'_2, \dots, \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} y'_1, & y_2 &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} y'_2, \dots, \end{aligned}$$

ein und erhalten dann eine schiefsymmetrische vollstetige Form $S'(x', y')$, während $\kappa(x)$ in (x', x') übergeht. Aus (114) wird ein Gleichungssystem von folgender Gestalt

$$(115) \quad \begin{aligned} x'_1 + s'_{12} x'_2 + s'_{13} x'_3 + \dots &= y_1^*, \\ s'_{21} x'_1 + x'_2 + s'_{23} x'_3 + \dots &= y_2^*, \\ s'_{31} x'_1 + s'_{32} x'_2 + x'_3 + \dots &= y_3^*, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Führen wir nunmehr in S' nach Satz 39 die orthogonale Transformation aus, so geht das zu S' gehörige Gleichungssystem (115) in ein Gleichungssystem von folgender Gestalt über:

$$\begin{aligned} \xi_1 + k_1 \xi'_1 &= \eta_1, \\ -k_1 \xi_1 + \xi'_1 &= \eta'_1, \\ \xi_2 + k_2 \xi'_2 &= \eta_2, \\ -k_2 \xi_2 + \xi'_2 &= \eta'_2, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt, wie man sieht, die Auflösungen

$$\xi_1 = \eta_1 + \frac{\partial T(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_1' = \eta_1' + \frac{\partial T(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_1'},$$

$$\xi_2 = \eta_2 + \frac{\partial T(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_2},$$

$$\xi_2' = \eta_2' + \frac{\partial T(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_2'},$$

$$\dots \dots \dots$$

wenn

$$\begin{aligned} T(\xi\xi', \eta\eta') = & -\frac{k_1^2}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1 + \xi_1'\eta_1') - \frac{k_2^2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2 + \xi_2'\eta_2') - \dots \\ & -\frac{k_1^2}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1' - \xi_1'\eta_1) - \frac{k_2^2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2' - \xi_2'\eta_2) - \dots \end{aligned}$$

gesetzt wird. Da die Größen $k_1, k_2, \dots$ gegen Null konvergieren, so ist T eine vollstetige Form.

Die Rückkehr zu den Variablen $x_1', x_2', \dots, y_1', y_2', \dots$ und von diesen zu den ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$, wobei aus T die Form T entsteht, lehrt die Richtigkeit des Hilfssatzes.

Um nunmehr Satz 40 zu beweisen, bedenken wir, daß das Gleichungssystem (93) in Satz 40 seine Gestalt behält, wenn wir auf die Variablen $x_1, x_2, \dots$ irgendeine orthogonale Transformation ausführen und zugleich entsprechend die linken Seiten jener Gleichungen orthogonal kombinieren, da dies ja auf eine simultane orthogonale Transformation beider Variablenreihen in $A(x, y)$ hinausläuft. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei bereits eine solche orthogonale Transformation der Bilinearform $A(x, y)$ ausgeführt, daß die aus $A(x, y)$ durch Gleichsetzung der beiden Variablenreihen entspringende quadratische, vollstetige Form $A(x, x)$ nur die Quadrate der Variablen enthält und demnach in der Gestalt

$$A(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots$$

oder

$$(116) \quad A(x, y) + A(y, x) = 2(\alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \dots)$$

erscheint. Da hierin $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gegen Null konvergierende Größen sind, so gibt es gewiß nur eine endliche Anzahl unter ihnen, die ≤ -1 ausfallen; es sei etwa e eine ganze Zahl, so daß

$$(117) \quad \alpha_{e+p} > -1, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

ausfällt.

Alsdann sondern wir von den Gleichungen (93) in Satz 40 zunächst die ersten e Gleichungen ab und schreiben die übrigen in der Gestalt:

$$\begin{aligned}
 (118) \quad & (a_{e+1,e+1} + 1)x_{e+1} + a_{e+1,e+2}x_{e+2} + \cdots = y_{e+1}, \\
 & a_{e+2,e+1}x_{e+1} + (a_{e+2,e+2} + 1)x_{e+2} + \cdots = y_{e+2}, \\
 & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

wird, so gelangen wir vermöge (119) und (120) zu solchen Werten $x_{c+1}, x_{c+2}, \dots$, die zusammen mit den gefundenen $x_1, \dots, x_c$ ein Lösungssystem der homogenen Gleichungen (94) in Satz X ausmachen.

Damit ist Satz 40 vollständig bewiesen.

Da oben auch der Satz 39 über die schiefsymmetrischen Formen lediglich mit Hilfe des Satzes 35 über die orthogonale Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne irgendeine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen worden ist, so ergibt sich, daß auch die Theorie der Gleichungen von der Gestalt (93) und damit überhaupt die Theorie der vollstetigen Bilinearform lediglich auf die Theorie der orthogonalen Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne neue Konvergenzbetrachtungen begründet werden kann — eine bemerkenswerte Tatsache, die der Theorie der vollstetigen Formen von unendlich vielen Variablen eine wunderbare Durchsichtigkeit und Einheitlichkeit verleiht.

Fünfter Abschnitt.

Neue Begründung der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

In den folgenden Kapiteln XIII—XVI wollen wir die in den Kapiteln XI—XII entwickelte Theorie der linearen, der quadratischen und bilinearen Formen mit unendlich vielen Variablen auf die Theorie der linearen Integralgleichungen anwenden. Es werden durch dieses neue einfachere und durchsichtigere Verfahren nicht nur alle bekannten Resultate über Integralgleichungen wieder gewonnen werden, sondern es gelingt auch die Theorie der Integralgleichungen wesentlich auszudehnen und zu vervollkommen. — Weiterhin entsteht dann die Aufgabe, die Methode der unendlich vielen Variablen direkt ohne Vermittlung der Integralgleichungen in die Theorie der Differentialgleichungen einzuführen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern.

In Kapitel XI¹⁾ haben wir den Begriff „vollstetig“ für eine Funktion der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ definiert²⁾; wir nennen

1) Die in Kapitel XI und diesem Kapitel XIII angeregten Fragen aus der Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variablen habe ich in meiner Abhandlung: *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen Variablen*, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* t. XXVII (1909), weiter ausgeführt.

2) In dem ursprünglichen Abdruck meiner „fünften Mitteilung“ hatte ich an Stelle des jetzt durchweg gebrauchten Wortes „vollstetig“ das Wort „stetig“ eingeführt.