universität innsbruck

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

# Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Dritter Abschnitt. Anwendungen auf Probleme der Funktionentheorie

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

Bezeichnen wir mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \ldots$ die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen dieses Kerns und entwickeln wir die gegebene Funktion $f(x)$ nach diesen Eigenfunktionen, wie folgt

$$f(x) = c_1 \psi^{(1)}(x) + c_2 \psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

so wird das hydrodynamische Problem durch die Formeln

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = c_1 \psi^{(1)}(x) \cos(\sqrt{\lambda^{(1)}} t) + c_2 \psi^{(2)}(x) \cos(\sqrt{\lambda^{(2)}} t) + \cdots$$

$$[U]_{y=0} = \frac{c_1 \psi^{(1)}(x)}{\lambda^{(1)}} \cos(\sqrt{\lambda^{(1)}} t) + \frac{c_2 \psi^{(2)}(x)}{\lambda^{(2)}} \cos(\sqrt{\lambda^{(2)}} t) + \cdots$$

gelöst.

Die Ausdehnung unserer Untersuchungsmethode auf mehr als zwei Veränderliche bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

# Dritter Abschnitt.

# Anwendungen auf Probleme der Funktionentheorie.

## Zehntes Kapitel.

## Riemanns Probleme in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Riemann hat in seiner Inauguraldissertation (Abschnitt 19) die allgemeine Aufgabe gestellt, Funktionen einer komplexen Veränderlichen innerhalb eines von einer gegebenen Randkurve begrenzten Gebietes der komplexen Ebene zu bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf jener Randkurve Relationen gelten sollen, deren Koeffizienten auf der Randkurve sich stetig ändernde gegebene Funktionen sind. Die Theorie der Integralgleichungen bietet die Mittel zur Lösung dieser Riemannschen Fragestellung für den Fall, daß die auf der Randkurve gegebenen Relationen lineare sind.[1])

Die Methode der Integralgleichungen ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten

1) Man vgl. einen Vortrag des Verfassers „Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg 1904“, sowie die Dissertationen von Kellogg und Haseman, Göttingen 1902 u. 1907; vgl. auch den Auszug aus der Dissertation von Haseman: Math. Ann. Bd. 66.

Funktionen mit den Funktionswerten auf der Randkurve in linearer Weise verknüpft auftreten. Durch Behandlung solcher Aufgaben wird, wie mir scheint, der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln ein neues dankbares Kapitel hinzugefügt.

Die in dem oben zitierten Vortrage zur Erläuterung der Methode gewählte Aufgabe ist freilich wegen ihrer besonderen Einfachheit auch ohne dieses Hilfsmittel lösbar, und zwar, indem man zweimal die gewöhnliche Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials anwendet.

Das dort behandelte Problem besteht darin, innerhalb einer geschlossenen Kurve $C$ mit stetig sich ändernder Tangente und von der Gesamtbogenlänge $l$ eine regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bzw. $v(s)$ auf $C$ der linearen Relation

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$

genügen; dabei sind $a(s), b(s), c(s)$ als stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge $s$ mit der Periode $l$ — die ersteren beiden $a(s), b(s)$ ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben.[1])

Ich will nun kurz zeigen, wie man eine dieser Aufgabe genügende Funktion findet, die innerhalb $C$ (nicht notwendig auf $C$) den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Zu dem Zwecke bezeichne ich mit $2ni\pi$ die Änderung, die $l(a(s) + ib(s))$ beim positiven Umlauf längs der geschlossenen Kurve $C$ erfährt. Durch den Imaginärteil von $l(a(s) + ib(s))$, d. h. durch einen Zweig des Ausdruckes

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)},$$

wird dann eine reelle Funktion auf $C$ dargestellt, die von $s$ stetig abhängt mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Punktes $s = 0$, wo ein Sprung ihrer Werte um $2n\pi$ stattfindet.

Mittelst der bekannten Randwertaufgabe in der Theorie des logarith-

1) Aus dem oben zitierten Heidelberger Vortrage geht unmittelbar nur hervor, daß überhaupt eine der Aufgabe genügende Funktion vom Charakter einer rationalen Funktion existiert. Es ist jedoch leicht möglich, durch eine geringe Modifikation des dort angegebenen Verfahrens die etwa innerhalb $C$ auftretenden Pole auf die Kurve $C$ selbst zu verlegen. Ebenso leicht kann man übrigens, indem man den Begriff des Cauchyschen Index heranzieht oder wie hier weiterhin im Text verfährt, feststellen, wann eine Funktion der Aufgabe genügt, die überall innerhalb und auf dem Rande von $C$ den Charakter einer ganzen Funktion hat, und wie groß die Mannigfaltigkeit solcher Lösungen ist.

mischen Potentials bestimme man nun eine analytische Funktion $F(z)$, die sich innerhalb der Kurve $C$ wie eine ganze Funktion verhält und deren Imaginärteil die Randwerte (1) besitzt. Wird dann

$$G(z) \equiv e^{F(z)} = U(xy) + i\,V(xy)$$

gesetzt, während

$$U(s) + i\,V(s)$$

die Randwerte dieser Funktion $G(z)$ bezeichnen, so erkennen wir auf der Kurve $C$ die Übereinstimmung der Imaginärteile von

$$l(U(s) + i\,V(s)) \text{ und } l(a(s) + ib(s)),$$

d. h. es ist auf der Kurve $C$

$$a(s)\,V(s) - b(s)\,U(s) = 0.$$

Endlich konstruieren wir eine analytische Funktion $f^*(z)$, die innerhalb $C$ den Charakter einer ganzen Funktion hat und deren Realteil auf $C$ die Randwerte

$$-\frac{c(s)\,U(s)}{a(s)\,(U^2(s) + V^2(s))} = -\frac{c(s)\,V(s)}{b(s)\,(U^2(s) + V^2(s))}$$

besitzt; dann ist

$$f(z) = G(z) f^*(z)$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Die gefundene Funktion $f(z)$ hat innerhalb $C$ den Charakter einer ganzen Funktion; sie besitzt jedoch, wenn $n$ negativ ausfällt, auf $C$ im Punkte $s = 0$ einen Pol $-2n$ter Ordnung.

---

Wir wenden uns nunmehr zu einer Aufgabe, welche als eine der einfachsten Aufgaben in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen im Sinne der Riemannschen Fragestellung angesehen werden kann: es ist dies die Aufgabe, eine außerhalb der geschlossenen Kurve $C$ regulär analytische Funktion $f_a(z)$ und eine innerhalb $C$ regulär analytische bzw. sich wie eine rationale Funktion verhaltende Funktion $f_j(z)$ zu finden, so daß die Randwerte beider Funktionen auf der Kurve $C$ selbst in einem gegebenen komplexen Verhältnis stehen, d. h. daß

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

wird, wo in dem komplexen Ausdrucke

$$c(s) = a(s) + ib(s)$$

Real- und Imaginärteil $a(s)$, $b(s)$ als zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge $s$ — ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben sind. Die Kurve $C$ werde der Einfachheit halber analytisch vorausgesetzt.

Um diese Aufgabe zu lösen, konstruieren wir zunächst eine Greensche Funktion $G_j(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in bezug auf $xy$ innerhalb $C$ überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} = 0$$

genügen, ferner an der innerhalb $C$ gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden derart, daß bei dem Ansatze

$$(2) \qquad G_j(xy, \xi\eta) = -\log\left|\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right| + A(xy, \xi\eta)$$

die Funktion $A(xy, \xi\eta)$ regulär analytisch in $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ ausfällt, und endlich soll die in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung von $G_j(xy, \xi\eta)$ auf $C$ einen von $s$ unabhängigen Wert $\varkappa$ besitzen. Lassen wir den Punkt $xy$ bzw. die Punkte $xy$ und $\xi\eta$ in die Randpunkte $s$ bzw. $s$ und $\sigma$ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_j(s, \xi\eta) \text{ bzw. } G_j(s, \sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_j(xy)$ irgendeine innerhalb $C$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = 0$$

genügende stetige Funktion, $\frac{\partial u_j}{\partial n}$ ihre in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung auf $C$ und $u_j(s)$ ihre Randwerte auf $C$ bezeichnen, so liefert die Greensche Formel in bekannter Weise:

$$(3) \qquad u_j(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s, \xi\eta)\frac{\partial u_j}{\partial n}\,ds + \frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^l u_j(s)\,ds,$$

wo $l$ die Gesamtlänge von $C$ bedeutet. Für $u_j = 1$ folgt hieraus

$$\varkappa = \frac{2\pi}{l}.$$

Nunmehr sei $v_j(xy)$ eine zu $u_j(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so daß

$$u_j(xy) + i v_j(xy)$$

eine innerhalb $C$ reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln $z$ bedeutet. Bezeichnet $v(s)$ deren Randwerte, so ist

$$\frac{\partial u_j}{\partial n} = -\frac{dv_j(s)}{ds}.$$

Mit Rücksicht hierauf entsteht aus der Gleichung (3), wenn wir den Punkt $\xi\eta$ in den Randpunkt $\sigma$ wandern lassen:

$$u_j(\sigma) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s, \sigma)\frac{dv_j}{ds}\,ds + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(s)\,ds$$

oder bei Vertauschung von $s$, $\sigma$:

$$(4) \qquad u_j(s) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(\sigma, s)\frac{dv_j}{d\sigma}\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(\sigma)\,d\sigma.$$

Aus (2) entnehmen wir[1])

$$G_j(\sigma, s) = -2\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(\sigma - s)\right| + A^*(\sigma, s),$$

wo $A^*(\sigma, s)$ eine reguläre analytische Funktion von $\sigma, s$ ist. Demnach wird

$$\frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} = 2\frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s - \sigma) + \frac{\partial A^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}. \tag{5}$$

Unter Anwendung der Formel für die Produktintegration nimmt (4) die Gestalt an:

$$u_j(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma, \tag{6}$$

wo für das erste Integral rechter Hand sein Cauchyscher Hauptwert zu nehmen ist; derselbe existiert gewiß stets dann, wenn $v_j(\sigma)$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\sigma$ ist.

Die eben gefundene Formel (6) gilt, wenn $u_j(s) + iv_j(s)$ die Randwerte auf $C$ irgendeiner Funktion der komplexen Veränderlichen $z$

$$f_j(z) = u_j(x, y) + iv_j(xy)$$

sind, die innerhalb $C$ den Charakter einer ganzen Funktion hat. Wenden wir diese Formel auf die Funktion $if_j(z)$ an, so entsteht:

$$v_j(s) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma, \tag{7}$$

wo wieder für das erste Integral rechter Hand der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Ist also der Realteil $u_j(s)$ einer innerhalb $C$ regulären Funktion auf $C$ bekannt, so findet man die Randwerte des Imaginärteiles $v_j(s)$ durch die Formel

$$v_j(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma, \tag{7*}$$

wobei über die additive Konstante in $v_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt. Ist andererseits der Imaginärteil $v_j(s)$ einer innerhalb $C$ regulären Funktion auf $C$ bekannt, so findet man die Randwerte des Realteiles $u_j(s)$ durch die Formel

1) Vgl. E. E. Levi, Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1908, S. 249. In meiner ursprünglichen Veröffentlichung war im folgenden irrtümlich der Faktor 2 weggeblieben.

$$(7^{**}) \qquad u_j(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0 \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei über die additive Konstante in $u_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgendeinen komplexen Ausdruck auf $C$ bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_j W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\, d\sigma.$$

Die Formeln (6) und (7) lassen sich dann in die folgende zusammenfassen

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l}\int_0^l f_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$M_j f_j$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_j(s)$ dar, diese nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve $C$ erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß diese letztere Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

den Randwerten einer innerhalb $C$ regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich gilt die Tatsache, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf $C$ bedeutet, der Ausdruck

$$w + M_j w$$

stets die Randwerte einer innerhalb $C$ regulären Funktion der komplexen Variabeln darstellt. Wir erkennen dies, indem wir für $w(s)$ erst einen reellen und dann einen rein imaginären Ausdruck nehmen und jedesmal bzw. (7*), (7**) anwenden.

Nunmehr konstruieren wir eine Greensche Funktion $G_a(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in bezug auf $x, y$ außerhalb $C$ überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_a}{\partial y^2} = 0$$

genügen, ferner an der außerhalb $C$ gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden, derart daß bei dem Ansatze

$$G_a(xy, \xi\eta) = -\log\left|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right| + B(xy, \xi\eta)$$

die Funktion $B(xy, \xi\eta)$ regulär analytisch in $x, y, \xi, \eta$ ausfällt, und endlich sollen die in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen von $G_a(xy, \xi\eta)$ auf $C$ einen von $s$ unabhängigen Wert $\lambda$ besitzen. Lassen wir den Punkt $xy$ bzw. die Punkte $xy$ und $\xi\eta$ in die Randpunkte $s$ bzw. $s$ und $\sigma$ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_a(s, \xi\eta) \text{ bzw. } G_a(s, \sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_a(xy)$ irgendeine außerhalb $C$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} = 0$$

genügende stetige (auch im Unendlichen endlich bleibende) Funktion, $\frac{\partial u_a}{\partial n}$ ihre in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen auf $C$ und $u_a(s)$ ihre Randwerte auf $C$ bezeichnen, so erhalten wir in bekannter Weise

$$u_a(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(s, \xi\eta)\,\frac{\partial u_a}{\partial n}\,ds + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(s)\,ds. \tag{8}$$

Nunmehr sei $v_a(xy)$ eine zu $u_a(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so daß

$$u_a(xy) + i v_a(xy)$$

eine außerhalb $C$ reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen $z$ bedeutet. Bezeichnet $v_a(s)$ die Randwerte von $v_a(xy)$, so ist

$$\frac{\partial u_a}{\partial n} = \frac{d v_a(s)}{ds},$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (8)

$$u_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(\sigma, s)\,\frac{d v_a(\sigma)}{d\sigma}\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)\,d\sigma. \tag{9}$$

Setzen wir

$$G_a(\sigma, s) = -2\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(\sigma - s)\right| + B^*(\sigma, s),$$

wo $B^*(\sigma, s)$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\sigma, s$ ist, so wird

$$\frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} = 2\,\frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma) + \frac{\partial B^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}. \tag{10}$$

Die Formel (9) transformieren wir in die Gestalt

$$(11) \qquad u_a(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_a(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)\, d\sigma$$

und fügen dieser die entsprechende Formel für $v_a(s)$ hinzu:

$$(12) \qquad v_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_a(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v_a(\sigma)\, d\sigma.$$

In den beiden letzten Formeln sind für die ersten Integrale rechter Hand die Cauchyschen Hauptwerte zu nehmen.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgendeinen komplexen Ausdruck auf $C$ bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_a W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\, d\sigma.$$

Die beiden Formeln (11) und (12) lassen sich dann in die folgende zusammenfassen

$$f_a(s) = -M_a f_a + \frac{1}{l}\int_0^l f_a(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$-M_a f_a$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_a(s)$ dar, diese nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve $C$ erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß diese Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

den Randwerten einer außerhalb $C$ regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich erkennen wir noch, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf $C$ bedeutet, der Ausdruck

$$w - M_a w$$

stets die Randwerte einer außerhalb $C$ regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellt.

Wegen (5) und (10) ist für jeden komplexen Ausdruck $W$ identisch

$$(13) \qquad M_a W = M_j W + \int_0^l D(\sigma, s)\, W(\sigma)\, d\sigma,$$

wo $D(\sigma, s)$ eine regulär analytische Funktion der reellen Variabeln $\sigma, s$ mit rein imaginären Werten bedeutet.

Nunmehr kehren wir zu unserer Aufgabe zurück, die Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ zu finden derart, daß ihre Randwerte auf $C$ die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s) \tag{14}$$

erfüllen. Wir setzen — unter Fortlassung des Argumentes $s$ —

$$\begin{cases} F_a = \quad f_a + M_a f_a \\ F_j = -f_j + M_j f_j + \gamma, \end{cases} \tag{15}$$

wo $\gamma$ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$c(\sigma) = c(s) + c(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \tag{16}$$

wo $c(\sigma, s)$ eine komplexe Funktion bedeutet, die wegen der angenommenen zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $c(s)$ gewiß einmal stetig differenzierbar nach $s, \sigma$ wird.

Wenden wir nun auf (14) die Operation $M_a$ an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) die Gleichung

$$M_a f_a = M_j(c f_j) + \int_0^l D(\sigma, s) c(\sigma) f_j(\sigma) d\sigma,$$

und hieraus entnehmen wir wegen (16)

$$M_a f_a = c(s) M_j f_j + \int_0^l E(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma, \tag{17}$$

wo $E(\sigma, s)$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\sigma, s$ wird.

Multiplizieren wir die zweite der Gleichungen (15) mit $-c(s)$ und addieren sie zur ersten, so folgt mit Rücksicht auf (17) und (14)

$$\begin{aligned} F_a - cF_j &= f_a + c f_j + \int_0^l E(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma - c\gamma \\ &= 2c(s)\left\{f_j + \int_0^l \frac{E(\sigma, s)}{2c(s)} f_j(\sigma) d\sigma - \frac{\gamma}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Da $c(s)$ unserer Annahme zufolge nirgends verschwindet, so stellt

$$K(\sigma, s) = -\frac{E(\sigma, s)}{2c(s)} \tag{19}$$

eine stetig differenzierbare Funktion von $\sigma, s$ dar. Wir betrachten die Integralgleichung zweiter Art mit dem komplexen Kern $K(\sigma, s)$

$$\frac{\gamma}{2} = f_j - \int_0^l K(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma; \tag{20}$$

auf dieselbe sind die Fredholmschen Formeln in gleicher Weise anwendbar, wie wenn der Kern eine reelle Funktion von $\sigma, s$ wäre, und wir schließen hieraus, daß diese Integralgleichung gewiß eine Lösung

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

besitzen muß, und zwar entweder, indem wir die Konstante $\gamma$ von Null verschieden setzen oder — falls gerade 1 eine Wurzel der transzendenten zu jener Integralgleichung zweiter Art gehörigen Gleichung, d. h. ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird — indem wir für die Konstante $\gamma$ den Wert Null setzen. Aus der Tatsache, daß der Kern der Integralgleichung stetig differenzierbar ist, folgt —, wie leicht zu erkennen ist — daß gewiß auch die Lösung der Integralgleichung d. h. die Funktionen $u_j(s)$, $v_j(s)$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

Nunmehr bilden wir aus $f_j(s)$ nach (14) den Ausdruck $f_a(s)$ und alsdann nach (15) die Ausdrücke $F_a(s)$, $F_j(s)$. Ergeben sich diese beiden Ausdrücke $F_a(s)$, $F_j(s)$ identisch gleich Null, so zeigen die vorhin gefundenen Resultate (vgl. S. 86 und S. 88), daß die Ausdrücke $f_a$ bzw. $f_j$ die Randwerte einer außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht beide Ausdrücke $F_a(s)$, $F_j(s)$ identisch gleich Null, so betrachten wir die zu $f_j$ bzw. $f_a$ konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j$ bzw. $\bar{f}_a$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 86 und S. 88) stellen für beliebige $w$ die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb $C$ regulär analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für $w$ die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j$ bzw. $\bar{f}_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu $F_j$ bzw. $F_a$ konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{F}_j$ bzw. $\bar{F}_a$ Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb $C$ regulär analytischer Funktionen $g_j(z)$ bzw. $g_a(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittlung von (19), (20) aus (18)

$$F_a - c F_j = 0,$$

d. h. wenn $\bar{c}$ den zu $c$ konjugiert komplexen Ausdruck bedeutet,

$$\bar{F}_a = \bar{c} \bar{F}_j$$

folgt, so sind $g_j(z)$, $g_a(z)$ analytische Funktionen der komplexen Variabeln, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in der für den Rand vorgeschriebenen Relation an Stelle von $c(s)$ den konjugiert imaginären Ausdruck $\bar{c}(s)$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Satz 27. *Wenn $c(s)$ ein gegebener komplexer Ausdruck auf der Kurve $C$ ist, so gibt es entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z)$, $f_a(z)$, von*

*denen die erste innerhalb, die zweite außerhalb der Kurve $C$ regulär analytisch ist, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und die Relation*

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

*erfüllen, oder ein Funktionenpaar $g_j(z)$, $g_a(z)$ von demselben Charakter, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und die Relation*

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

*erfüllen.*

Um zu entscheiden, welcher von beiden Fällen eintritt, bedenken wir, daß die Änderung, die $\log f_a(s)$ bzw. $\log f_j(s)$, beim positiven Umlauf entlang der Kurve $C$ erfährt, gleich $-2i\pi n_a$ bzw. $2i\pi n_j$ ist, wo $n_a$, $n_j$ die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $f_a(z)$ bzw. $f_j(z)$ bezeichnen. Demnach ist $-2i\pi(n_a + n_j)$ gleich der Änderung, die

$$\log \frac{f_a(s)}{f_j(s)} = \log c(s)$$

beim Umlauf im positiven Sinne erfährt, und es wird demnach der erste Fall eintreten, wenn die Änderung von $\log c(s)$ beim Umlauf im positiven Sinne entlang $C$ negativ ausfällt, dagegen tritt der zweite Fall ein, wenn jene Änderung positiv ausfällt.

Ist insbesondere jene Änderung von $\log c(s)$ gleich Null, so existiert sowohl ein Paar außerhalb bzw. innerhalb $C$ holomorpher Funktionen $f_a(z), f_j(z)$, die die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s) \tag{21}$$

erfüllen, als auch ein Funktionenpaar $g_a(z), g_j(z)$ von diesem Charakter mit der Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s). \tag{22}$$

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß nach dem vorhin bewiesenen Satze jedenfalls ein Funktionenpaar $F_a(z)$, $F_j(z)$ existieren muß, das die Relation

$$F_a(s) = c(s)\bar{c}(s) F_i(s)$$

erfüllt, da ja $c(s)\bar{c}(s)$ mit dem konjugierten Ausdrucke übereinstimmt. Ist nun etwa die Gleichung (21) lösbar, so ist wegen unserer Annahme über $c(s)$ notwendig die Anzahl $n_a + n_j = 0$, d. h. $f_a(z), f_j(z)$ besitzen keine Nullstellen, und folglich sind

$$g_a(z) = \frac{F_a(z)}{f_a(z)}, \quad g_j(z) = \frac{F_j(z)}{f_j(z)}$$

ebenfalls regulär analytische Funktionen; dieselben befriedigen die Relation (22).

Die Funktionenpaare $f_a(z), f_j(z)$ und $g_a(z), g_j(z)$ sind, wie man überdies sofort sieht, im eben betrachteten besonderen Falle bis auf je einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Die gleiche Überlegung dient zum Nachweise, daß es stets bei beliebig gegebenem $c(s)$ ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ gibt, von denen die erste außerhalb $C$, die zweite innerhalb $C$ den Charakter einer rationalen Funktion hat, während auf $C$ die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllt ist.

Wenn $\gamma(s) = \log c(s)$ eine eindeutige Funktion von $s$ wird, so gelangen wir durch Logarithmierung zu der Aufgabe, ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ zu finden, von denen die erstere außerhalb $C$, die letztere innerhalb $C$ regulär analytisch ist und für die die Differenz ihrer Randwerte auf $C$ einem gegebenen komplexen Ausdrucke $\gamma(s)$ gleich wird. Wie wir sehen, hat diese Aufgabe stets eine Lösung. Im Falle die Kurve $C$ ein Kreis ist, läßt sich die Lösung auch durch die Entwicklung von $\gamma(s)$ in eine trigonometrische Reihe ableiten.

---

Es bedarf endlich noch der Umstand einer näheren Untersuchung, daß die Funktion $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit aufweist.

Wir fassen zunächst einen Punkt der Kurve $C$ ins Auge; derselbe sei der Koordinatenanfang und zugleich der Anfangspunkt für die Abmessung der Bogenlänge $s$. Da die Kurve $C$ keine Ecke besitzt, so erhalten wir die Punkte auf $C$ in der Umgebung des Koordinatenanfangs für genügend kleine positive oder negative Werte von $s$ durch die Formel

$$z(s) = C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \cdots \tag{23}$$

dargestellt, wo rechter Hand eine Potenzreihe steht, deren erster Koeffizient $C_1$ von Null verschieden ausfällt.

Alsdann handelt es sich zunächst darum, irgendeine innerhalb $C$ nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_j^*(z)$ und irgendeine außerhalb $C$ nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_a^*(z)$ zu bestimmen, so daß der Quotient der Randwerte dieser beiden Hilfsfunktionen auf $C$

$$\mathfrak{Q}(s) = \frac{f_a^*(s)}{f_j^*(s)}$$

in der Umgebung von $z = 0$ den folgenden Bedingungen genügt: $\mathfrak{Q}(s)$ soll für genügend kleine positive $s$ durch eine nach Potenzen von $s$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_+(s)$ und für genügend kleine negative $s$ durch eine andere nach Potenzen von $s$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_-(s)$ darstellbar sein derart, daß der Quotient dieser beiden Potenzreihen die Kongruenz

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv q_0 + q_1 s + q_2 s^2, (s^2) \tag{24}$$

erfüllt; dabei sind $q_0$, $q_1$, $q_2$ gegebene komplexe Konstante, $q_0 \neq 0$, und diese Kongruenz bedeutet, daß

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} - (q_0 + q_1 s + q_2 s^2)$$

eine durch $s^3$ teilbare Potenzreihe werden soll.

Um die Bestimmung solcher Funktionen $f_j^*(z), f_a^*(z)$ zu ermöglichen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi_j(z) = \log(z)$$

innerhalb der Kurve $C$; die Werte derselben in der Umgebung von $z = 0$ auf $C$ stellen sich, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} \varphi_j(s) &= -i\pi + l(s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots, \ (s > 0), \\ &= \quad l(-s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots, \ (s < 0), \end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ die reellen Logarithmen und $J_0$, $J_1$, $J_2$, ... gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten. Ferner betrachten wir außerhalb der Kurve $C$ die Funktion

$$\varphi_a(z) = \log\left(\frac{\quad}{z - p_j}\right),$$

wo $p_j$ einen innerhalb $C$ gelegenen Punkt bedeutet; die Werte dieser Funktion in der Umgebung von $z = 0$ auf $C$ stellen sich, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} \varphi_a(s) &= i\pi + l(s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s > 0), \\ &= \quad l(-s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s < 0), \end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ wiederum die reellen Logarithmen und $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten.

Nunmehr bestimmen wir die ganze rationale Funktion $K_a(z)$ vom zweiten Grade in der komplexen Veränderlichen $z$ derart, daß vermöge (23)

$$\frac{K_a(z(s))}{(z(s) - p_j)^2} \equiv \frac{1}{2i\pi} l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3) \tag{25}$$

wird, und ferner die ganze rationale Funktion $K_j(z)$ zweiten Grades in der komplexen Veränderlichen $z$ derart, daß vermöge (23)

$$K_j(z(s)) \equiv \frac{1}{2i\pi} l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3) \tag{26}$$

wird.

Setzen wir nunmehr

$$f_j^*(z) = e^{K_j(z)\varphi_j(z)},$$

$$f_a^*(z) = e^{\frac{K_a(z)}{(z-p_j)^2}\varphi_a(z)},$$

so erfüllen diese Funktionen der komplexen Veränderlichen $z$ alle verlangten Bedingungen. In der Tat haben wir auf $C$ in der Umgebung von $z = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_a(s) - \varphi_j(s) &= 2i\pi + (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots (s > 0)\\ &= \qquad\quad (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots (s < 0);\end{aligned}$$

folglich gilt mit Rücksicht auf (25) und (26) auch die Kongruenz (24).

Die gefundenen Funktionen $f_j^*(z), f_a^*(z)$ sind, wie man sieht, auch auf der Kurve $C$, vom Punkte $s = 0$ abgesehen, regulär analytisch.

Es sei nun in dem vorgelegten, oben behandelten Problem $c(s)$ ein komplexer Ausdruck, der an einer Stelle, etwa für $s = 0$, eine Unterbrechung seiner Stetigkeit bzw. stetigen Differenzierbarkeit erleidet derart, daß die Darstellung der Werte von $c(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ durch zwei voneinander verschiedene Potenzreihen $\mathfrak{P}_+(s)$ und $\mathfrak{P}_-(s)$ bewirkt wird, je nachdem $s > 0$ oder $s < 0$ ist. Alsdann bestimmen wir drei Konstante $q_0$, $q_1$, $q_2$ aus der Kongruenz

$$q_0 + q_1 s + q_2 s^2 \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)} \tag{27}$$

und bilden dann in der eben angegebenen Weise zu diesen Konstanten $q_0$, $q_1$, $q_2$ die analytischen Funktionen $f_a^*(z)$, $f_j^*(z)$, so daß deren Randwertquotient $\mathfrak{Q}(s)$ die Kongruenz (24) erfüllt und folglich mit Rücksicht auf (27) auch

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{P}_-(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{Q}_+(s)} \tag{28}$$

wird. Setzen wir

$$C(s) = \frac{c(s)}{\mathfrak{Q}(s)},$$

so lehrt (28), daß $C(s)$ auch für $s = 0$ zweimal stetig differenzierbar wird; mithin ist nach dem Früheren das Problem, eine innerhalb und eine außerhalb der Kurve $C$ reguläre Funktion $F_a(z)$ bzw. $F_j(z)$ mit der Randbedingung

$$F_a(s) = C(s)F_j(s)$$

zu finden, lösbar; wegen

$$f_a^*(s) = \mathfrak{Q}(s)f_j^*(s)$$

erfüllen die Funktionen

$$f_a(z) = F_a(z)f_a^*(z), \quad f_j(z) = F_j(z)f_j^*(z)$$

die Randbedingung

$$f_a(s) = c(s)f_j(s)$$

und lösen daher unser vorgelegtes Problem.

---

Die Aufgabe, die wir nunmehr in Angriff nehmen, besteht darin, zwei außerhalb der geschlossenen Kurve $C$ regulär analytische Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und zwei innerhalb $C$ regulär analytische bzw. sich wie

rationale Funktionen verhaltende Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ zu finden, so daß die Randwerte dieser beiden Funktionenpaare auf der Kurve $C$ selbst eine gegebene lineare Transformation mit komplexen Koeffizienten erfahren, d. h. daß

$$(29)\qquad \begin{cases} f_a(s) = c_1(s) f_j(s) + c_2(s) f_j'(s), \\ f_a'(s) = c_1'(s) f_j(s) + c_2'(s) f_j'(s) \end{cases}$$

wird, wo $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_1'(s)$, $c_2'(s)$ gegebene komplexe, zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in $s$ sind, deren Determinante

$$c_1(s) c_2'(s) - c_2(s) c_1'(s)$$

für alle $s$ von Null verschieden bleibt. Die Kurve $C$ werde der Einfachheit halber wiederum analytisch vorausgesetzt.

Zur Lösung der Aufgabe setzen wir, indem wir der Kürze halber das Argument $s$ fortlassen:

$$(30)\qquad \begin{cases} F_a = \phantom{-}f_a + M_a f_a, & F_a' = \phantom{-}f_a' + M_a f_a' \\ F_j = -f_j + M_j f_j + \gamma, & F_j' = -f_j' + M_j f_j', \end{cases}$$

wo $\gamma$ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$(31)\qquad \begin{cases} c_1(\sigma) = c_1(s) + c_1(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_2(\sigma) = c_2(s) + c_2(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_1'(\sigma) = c_1'(s) + c_1'(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_2'(\sigma) = c_2'(s) + c_2'(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \end{cases}$$

wo nun die Funktionen $c_1(\sigma, s)$, $c_2(\sigma, s)$, $c_1'(\sigma, s)$, $c_2'(\sigma, s)$ gewiß für alle Argumente $\sigma, s$ einmal stetig differenzierbar nach diesen Argumenten sind.

Wenden wir auf (29), indem wir uns die Randwerte $f_a, f_a', f_j, f_j'$ als stetig differenzierbare Funktionen von $s$ denken, die Operation $M_a$ an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) und (31)

$$(32)\qquad \begin{cases} M_a f_a = c_1 M_j f_j + c_2 M_j f_j' + \int\limits_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \\ M_a f_a' = c_1' M_j f_j + c_2' M_j f_j' + \int\limits_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \end{cases}$$

wo $E_1(\sigma, s)$, $E_2(\sigma, s)$, $E_1'(\sigma, s)$, $E_2'(\sigma, s)$ stetig differenzierbare Funktionen von $\sigma, s$ sind und das Argument $s$ wiederum der Kürze halber weggelassen worden ist.

Multiplizieren wir die in der unteren Zeile von (30) stehenden zwei Gleichungen einmal mit $-c_1$, $-c_2$ und ein anderes Mal mit $-c_1'$, $-c_2'$ und addieren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der

zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf (32)

$$F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = f_a + c_1 f_j + c_2 f_j' + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1 \gamma,$$

$$F_a' - c_1' F_j - c_2' F_j' = f_a' + c_1' f_j + c_2' f_j' + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1' \gamma,$$

und mit Hilfe von (29)

$$(33) \quad \begin{cases} F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = 2(c_1 f_j + c_2 f_j') + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1 \gamma, \\ F_a' - c_1' F_j - c_2' F_j' = 2(c_1' f_j + c_2' f_j') + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma) f_j'(\sigma, s)) d\sigma - c_1' \gamma. \end{cases}$$

Setzen wir die rechten Seiten dieser beiden letzten Formeln gleich Null, so erhalten wir durch Kombination der so entstehenden Gleichungen — da ja die Determinante $c_1 c_2' - c_2 c_1'$ unserer Annahme zufolge für keinen Wert von $s$ verschwindet — Gleichungen von der Form

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\gamma}{2} = f_j - \int_0^l (K_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma, \\ 0 = f_j' - \int_0^l (K_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma, \end{cases}$$

wo $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ ebenfalls stetig differenzierbare Funktionen von $\sigma$, $s$ sind. Diese Gleichungen lassen sich in eine einzige Integralgleichung zweiter Art

$$(35) \qquad \gamma(s) = \varphi(s) - \int_0^{2l} K(\sigma, s) \varphi(\sigma) d\sigma$$

zusammenfassen, indem wir die Funktionen $\gamma(s)$, $\varphi(s)$, $K(\sigma, s)$, wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \tfrac{\gamma}{2}, \quad 0 \leqq s \leqq l \\ &= 0, \quad l < s \leqq 2l; \\ \varphi(s) &= f_j(s), \quad 0 \leqq s \leqq l \\ &= f_j'(s - l), \quad l < s \leqq 2l; \\ K(\sigma, s) &= K_1(\sigma, s), \quad \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases} \\ &= K_2(\sigma - l, s), \quad \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ l < \sigma \leqq 2l \end{cases} \end{aligned}$$

$$= K_1'(\sigma, s-l), \quad \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases}$$

$$= K_2'(\sigma - l,\ s-l), \quad \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ l < \sigma \leqq 2l. \end{cases}$$

Die Anwendung der Fredholmschen Formeln zeigt, daß die Integralgleichung (35) stets eine Lösung $\varphi(s)$ besitzen muß, und zwar entweder, indem wir der Konstanten $\gamma$ irgendeinen von Null verschiedenen Wert erteilen oder — falls gerade 1 ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird — indem wir für die Konstante $\gamma$ den Wert Null wählen, wodurch die Integralgleichung zu einer homogenen wird. Diese Lösung $\varphi(s)$ liefert die Lösungen $f_j(s), f_j'(s)$ der Gleichungen (34), und die so gewonnenen Funktionen $f_j(s), f_j'(s)$ sind gewiß ebenfalls stetig differenzierbar — wie aus der stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ sofort zu erkennen ist, indem man allgemein zeigt, daß Integrale von der Gestalt

$$\int_0^l K^*(\sigma, s)\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

gewiß notwendig stetig differenzierbare Funktionen von $s$ darstellen, sobald $\varphi(\sigma)$ stetig in $\sigma$ und $K^*(\sigma, s)$ stetig differenzierbar in bezug auf beide Variable $\sigma, s$ ist.

Nunmehr bilden wir aus $f_j(s), f_j'(s)$ nach (29) die Ausdrücke $f_a(s), f_a'(s)$ und alsdann nach (30) die Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$. Ergeben sich diese vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$ sämtlich identisch gleich Null, so zeigen unsere obigen Resultate (vgl. S. 86 und S. 88), daß die Ausdrücke $f_a, f_a'$ und $f_j, f_j'$ die Randwerte außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulärer analytischer Funktionen der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht alle vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$ identisch gleich Null, so betrachten wir die zu $f_j, f_j'$ und $f_a, f_a'$ konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}_j'$ bzw. $\bar{f}_a, \bar{f}_a'$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 86 und S. 88) stellen für beliebige $w$ die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb $C$ regulärer analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für $w$ die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}_j'$ bzw. $\bar{f}_a, \bar{f}_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu $F_j, F_j'$ bzw. $F_a, F_a'$ konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{F}_j$, $\bar{F}_j'$, $\bar{F}_a$, $\bar{F}_a'$ Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb $C$ regulärer analytischer Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ bzw. $g_a(z), g_a'(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittlung von (32), (34) aus (33) offenbar

$$F_a = c_1 F_j + c_2 F_j',$$
$$F_a' = c_1' F_j + c_2' F_j'$$

folgt und mithin, wenn $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten, auch

$$\bar{F}_a = \bar{c}_1 \bar{F}_j + \bar{c}_2 \bar{F}_j',$$
$$\bar{F}_a' = \bar{c}_1' \bar{F}_j' + \bar{c}_2' \bar{F}_j'$$

wird, so sind offenbar $g_j(z)$, $g_j'(z)$, $g_a(z)$, $g_a'(z)$ analytische und auf $C$ gewiß stetige Funktionen der komplexen Variabeln $z$, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in den für den Rand vorgeschriebenen linearen Relationen an Stelle der Koeffizienten $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ die konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation gewiß lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Satz 28. *Wenn $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ gegebene komplexe zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke auf der Kurve $C$ sind, so gibt es entweder zwei Funktionenpaare $f_j(z)$, $f_j'(z)$ und $f_a(z)$, $f_a'(z)$, von denen die ersteren innerhalb, die letzteren außerhalb der Kurve $C$ regulär analytisch sind, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und die Relationen*

$$f_a = c_1 f_j + c_2 f_j',$$
$$f_a' = c_1' f_j + c_2' f_j'$$

*erfüllen, oder zwei Funktionenpaare ebenfalls von regulärem Charakter innerhalb bzw. außerhalb $C$: $g_j(z)$, $g_j'(z)$ und $g_a(z)$, $g_a'(z)$, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und die Relationen*

$$g_a = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g_j',$$
$$g_a' = \bar{c}_1' g_j + \bar{c}_2' g_j'$$

*erfüllen, wo $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2'$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu den gegebenen Ausdrücken $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ bzw. konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten.*

Wir fügen diesem Resultate noch folgende Bemerkungen hinzu.

Es seien $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb von $C$ stetig differenzierbare Funktionen, deren Randwerte auf $C$ stetig differenzierbare Funktionen von $s$ seien und den Bedingungen (29) genügen mögen: dann gelten, wie vorhin gezeigt, für die Randwerte $f_a$, $f_a'$, $f_j$, $f_j'$ die Gleichungen (32). Ferner ist unseren früheren Ausführungen (vgl. S. 86 bis S. 88) zufolge

$$f_a + M_a f_a - \frac{1}{l}\int_0^l f_a(\sigma)\,d\sigma = 0,\quad f_a' + M_a f_a' - \frac{1}{l}\int_0^l f_a'(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

$$f_j - M_j f_j - \frac{1}{l}\int_0^l f_j(\sigma)\,d\sigma = 0,\quad f_j' - M_j f_j' - \frac{1}{l}\int_0^l f_j'(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Multiplizieren wir hier die in der unteren Zeile stehenden zwei Gleichungen einmal mit $c_1, c_2$ und ein anderes Mal mit $c_1', c_2'$ und addieren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so gelangen wir mit Rücksicht auf (32) und bei Benutzung von (29) zu Gleichungen der Gestalt

$$2(c_1 f_j + c_2 f_j') + \int_0^l (G_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0,$$

$$2(c_1' f_j + c_2' f_j') + \int_0^l (G_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0;$$

und durch deren Kombination entstehen die Integralgleichungen:

$$(36) \qquad \begin{cases} f_j - \int_0^l (L_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0, \\ f_j' - \int_0^l (L_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0; \end{cases}$$

dabei sind $G_1(\sigma, s)$, $G_2(\sigma, s)$, $G_1'(\sigma, s)$ $G_2'(\sigma, s)$ und mithin auch $L_1(\sigma, s)$, $L_2(\sigma, s)$, $L_1'(\sigma, s)$, $L_2'(\sigma, s)$ stetig differenzierbare Funktionen von $\sigma, s$. Die Integralgleichungen (36) lassen sich wieder in analoger Weise wie früher die Integralgleichungen (34) in eine homogene Integralgleichung zweiter Art zusammenfassen, wenn wir wie dort an Stelle der Funktionen $f_j$, $f_j'$ eine Funktion $\varphi(s)$ einführen. Da aber eine Integralgleichung zweiter Art gewiß nur eine endliche Anzahl linear von einander unabhängiger Lösungen besitzt, so folgt, daß es auch nur eine *endliche* Anzahl von Funktionenpaaren $f_j$, $f_j'$ und zugehörigen $f_a$, $f_a'$ von der in Rede stehenden Beschaffenheit geben kann.

Setzen wir von den Randwerten $f_a$, $f_a'$, $f_j$ $f_j'$ der analytischen Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ nicht die stetige Differenzierbarkeit, sondern nur Stetigkeit in $s$ voraus, so können wir diese Randwerte $f_a$, $f_a'$, $f_j$, $f_j$ doch stets durch gewisse Ausdrücke $f_a^{(r)}$, $f_a'^{(r)}$, $f_j^{(r)}$, $f_j'^{(r)}$ in $s$ gleichmäßig annähern, welche die Randwerte von analytischen außerhalb und auf $C$ bzw. innerhalb und auf $C$ regulären Funktionen in $z$ sind und welche daher in $s$ analytisch ausfallen.

Um dies etwa für die Randwerte $f_j$, $f_j'$ einzusehen, seien

$$Z = \Phi(z) \quad \text{oder} \quad z = \varphi(Z)$$

die analytischen Beziehungen zwischen den komplexen Veränderlichen $z$, $Z$, vermöge derer das Innere der Kurve $C$ in der komplexen $z$-Ebene auf das Innere des Einheitskreises in der komplexen $Z$-Ebene konform abgebildet wird. Alsdann stellen für $r < 1$ die Ausdrücke

$$f_j(\varphi(r\Phi(z))), \quad f_j'(\varphi(r\Phi(z)))$$

innerhalb und auf $C$ regulär analytische Funktionen von $z$ dar, deren Randwerte auf $C$

$$f_j^{(r)} = f_j(\varphi(r\,\Phi(s))), \quad f_j'^{(r)} = f_j'(\varphi(r\,\Phi(s)))$$

beim Grenzübergange zu $r = 1$ gleichmäßig gegen die Randwerte $f_j$, $f_j'$ konvergieren.

Entsprechend gelangen wir für die Randwerte $f_a$, $f_a'$ zu gleichmäßig annähernden Randwerten $f_a^{(r)}$, $f_a'^{(r)}$ von der gewünschten Art.

Bestimmen wir nun vier Funktionen $c_1^{(r)}$, $c_2^{(r)}$, $c_1'^{(r)}$, $c_2'^{(r)}$ auf $C$, die noch von dem Parameter $r$ abhängen und für $r = 1$ bzw. in $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ übergehen, während für alle $r$ die Relationen

$$\begin{aligned} f_a^{(r)} &= c_1^{(r)} f_j^{(r)} + c_1^{(r)} f_j'^{(r)}, \\ f_a'^{(r)} &= c_1'^{(r)} f_j^{(r)} + c_2'^{(r)} f_j'^{(r)} \end{aligned}$$

gelten, so müssen unserer obigen Überlegung zufolge die Werte $f_j^{(r)}$, $f_j'^{(r)}$ gewisse entsprechende Integralgleichungen von der Gestalt (36) erfüllen, die für $r = 1$ in die Integralgleichungen (36) übergehen. Hieraus erkennen wir, daß die Funktionen $f_j$, $f_j'$ die Integralgleichungen (36) befriedigen, und erschließen so ihre stetige Differenzierbarkeit.

Wir fassen diese Bemerkungen in folgendem Satze zusammen:

Satz 29. *Wenn $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulär analytische Funktionen von $z$ und ihre Randwerte auf $C$ stetige, den Relationen* (29) *genügende Funktionen von $s$ sind, so sind diese Randwerte auf $C$ notwendig auch stetig differenzierbare Funktionen von $s$.*

*Es gibt gar keine oder nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Systeme von Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$, die außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulär analytisch sind und auf $C$ stetige, den Relationen* (29) *genügende Randwerte besitzen.* —

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es stets Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf $C$ gibt, wenn wir von $f_a(z)$, $f_a'(z)$ wiederum regulär analytischen Charakter außerhalb $C$, dagegen von den Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ nur verlangen, daß sie innerhalb $C$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen.

Um diese Frage zu beantworten, fassen wir diejenigen Systeme von Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ ins Auge, die außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulär analytischen Charakter besitzen, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und den Relationen

$$\begin{cases} g_a = \bar{c}_1' g_j + \bar{c}_2 g_j', \\ g_a' = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2' g_j' \end{cases} \tag{37}$$

genügen, wo $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu den gegebenen Ausdrücken bzw. $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ konjugiert imaginären Ausdrücke bedeuten. Nach dem eben

bewiesenen Satze gibt es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Funktionensysteme solcher Art, und deswegen fällt es uns leicht, wenn $z = p_j$ einen irgendwie gegebenen Punkt innerhalb $C$ bedeutet, eine ganze positive Zahl $n$ zu finden, so daß gewiß kein Funktionensystem $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ der in Rede stehenden Art existiert, wobei die Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ im Punkte $z = p_j$ von der $n$ten Ordnung Null sind.

Bezeichnen wir nun die Randwerte der Funktion $(z - p_j)^n$ auf $C$ mit $\tilde{\omega}$, so gibt es sicherlich kein System von Funktionen $g_a^*(z)$, $g_a'^*(z)$, $g_j^*(z)$, $g_j'^*(z)$, die außerhalb bzw. innerhalb $C$ regulär analytisch sind und stetige, den Relationen

$$g_a^* = \bar{c}_1 \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}_2 \tilde{\omega} g_j'^*,$$
$$g_a'^* = \bar{c}_1' \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}_2' \tilde{\omega} g_j'^*$$

genügende Randwerte auf $C$ besitzen; denn andernfalls wären

$$g_a(z) = g_a^*(z), \quad g_a'(z) = g_a'^*(z)$$
$$g_j(z) = (z - p_j)^n g_j^*(z), \quad g_j'(z) = (z - p_j)^n g_j'^*(z)$$

regulär analytische Funktionen, deren Randwerte den Relationen (37) genügen und von denen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ im Punkte $z = p_j$ eine Nullstelle $n$ter Ordnung besitzen, was nicht der Fall sein sollte.

Auf Grund der eben festgestellten Tatsache schließen wir wegen Satz 28, daß es gewiß ein System von Funktionen $f_a^*(z)$, $f_a'^*(z)$, $f_j^*(z)$, $f_j'^*(z)$ geben muß, die außerhalb bzw. innerhalb $C$ sich regulär analytisch verhalten und stetige, den Relationen

$$f_a^* = c_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c_2 \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*,$$
$$f_a'^* = c_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c_2' \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*$$

genügende Randwerte auf $C$ besitzen, wobei $\bar{\tilde{\omega}}$ den zu $\tilde{\omega}$ konjugiert komplexen Ausdruck auf $C$ bedeutet.

Nunmehr bestimmen wir — was unseren Ausführungen auf S. 91 zufolge möglich ist — eine außerhalb $C$ und eine innerhalb $C$ regulär analytische Funktion $\psi_a(z)$ bzw. $\psi_j(z)$, deren Randwerte auf $C$ stetig sind und der Relation

$$\psi_a = \frac{1}{\tilde{\omega}\bar{\tilde{\omega}}} \psi_j$$

genügen. Dann sind offenbar

$$f_a(z) = \psi_a(z) f_a^*(z), \qquad f_a'(z) = \psi_a(z) f_a'^*(z)$$
$$f_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z - p_j)^n} f_j^*(z), \qquad f_j'(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z - p_j)^n} f_j'^*(z)$$

Funktionen der verlangten Art mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf $C$.

Wir sprechen daher den Satz aus:

Satz 30: *Es gibt stets Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ der komplexen Variabeln $z$, die auf der Kurve $C$ stetige, den Relationen* (29) *genügende Randwerte besitzen und die außerhalb bzw. innerhalb $C$ von regulär analytischem Charakter sind — mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb $C$, die für eine der Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ oder für beide ein Pol ist.*

---

Zum Schluß mache ich von dem eben bewiesenen Satze eine Anwendung auf den Beweis für die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe, d. h. auf die Lösung des besonderen der Theorie der linearen Differentialgleichungen entsprungenen Riemannschen Problems[1]). Zu dem Zwecke verbinde ich die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(m)}$ der linearen Differentialgleichung in der komplexen $z$-Ebene in dieser Folge zyklisch mittels einer geschlossenen analytischen Kurve $C$: es kommt dann darauf an — wir haben der Einfachheit halber den Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Sinn[2]) —, ein Paar von Funktionen $f(z)$, $f'(z)$ zu konstruieren, die sich überall in der Ebene, insbesondere auch auf dem zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)} = z^{(m+1)}$ verlaufenden Stücke der Kurve $C$ wie rationale Funktionen der komplexen Veränderlichen $z$ verhalten und nur in den zwischen $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$, $z^{(2)}$ und $z^{(3)}, \ldots, z^{(m-1)}$ und $z^{(m)}$ verlaufenden Kurvenstücken ein singuläres Verhalten zeigen, insofern ihre Werte auf der äußeren Seite dieser Kurvenstücke aus den Werten auf der inneren Seite durch lineare homogene Kombinationen mit gegebenen konstanten Koeffizienten abzuleiten sind. Bezeichnen wir die Funktionen $f(z)$, $f'(z)$ innerhalb bzw. außerhalb $C$ mit $f_j(z)$, $f_j'(z)$ bzw. $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und bedenken, daß die für das Kurvenstück zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)}$ geltende Forderung

1) Diesen Gedanken zur Lösung des besonderen Riemannschen Problems hat der Verfasser bereits in Vorlesungen über Integralgleichungen (Wintersemester 1901/02) entwickelt; O. Kellogg hat ihn dann in einer Note („Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann", Math. Ann. Bd. 60) auszuführen gesucht. — Kürzlich hat L. Schlesinger („Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem", Journ. für Math., Bd. 130 und Math. Ann., 63) die Kontinuitätsmethode zum Beweise für die Lösbarkeit des besonderen Riemannschen Problems heranzuziehen gesucht. — Man vgl. ferner die Abhandlung von Plemelj „Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe", Monatshefte für Math. und Phys. XIX., wo eine vereinfachte Darstellung meiner Lösung des speziellen Riemannschen Problems gegeben wird.

2) Für den Kenner der Determinantentheorie gilt dann die Schlußweise zugleich für den Fall einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung.

$$f_a = f_j,$$
$$f_a' = f_j'$$

der identischen Substitution gleich kommt, so gelangen wir zu der folgenden Aufgabe:

Man soll außerhalb der Kurve $C$ die Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und innerhalb $C$ die Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ vom Charakter rationaler Funktionen derart bestimmen, daß die Randwerte $f_a$, $f_a'$, $f_j$, $f_j'$ dieser Funktionen auf $C$ überall stetig sind und bzw. für die Kurvenstücke

$$\text{zwischen } z^{(h)} \text{ und } z^{(h+1)} \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} f_a &= \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f_j', \\ f_a' &= \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f_j' \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

erfüllen, wobei

$$\gamma_1^{(h)},\ \gamma_2^{(h)},\ \gamma_1'^{(h)},\ \gamma_2'^{(h)} \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gegebene Konstanten mit nicht verschwindender Determinante sind. Der doppelten Schreibweise des Punktes

$$z^{(m+1)} = z^{(1)}$$

entsprechend werde noch

$$\gamma_1^{(m+1)} = \gamma_1^{(1)}, \quad \gamma_2^{(m+1)} = \gamma_2^{(1)}, \quad \gamma_1'^{(m+1)} = \gamma_1'^{(1)}, \quad \gamma_2'^{(m+1)} = \gamma_2'^{(1)}$$

gesetzt.

Zur Lösung dieser Aufgabe setzen wir zunächst

$$\left\{\begin{aligned} f_a^* &= \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f_j' \\ f_a'^* &= \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f_j', \end{aligned}\right. \tag{39}$$

wo $f_a^*$, $f_a'^*$ Hilfsausdrücke in $s$ sind, berechnen hieraus die Werte von $f_j$, $f_j'$ und führen dieselben rechter Hand in (38) ein. Die so aus (38) und (39) entstehende Substitution

$$f_a = \Gamma_1^{(h)} f_a^* + \Gamma_2^{(h)} f_a'^*,$$
$$f_a' = \Gamma_1'^{(h)} f_a^* + \Gamma_2'^{(h)} f_a'^*$$

schreiben wir nun in der Form

$$\left\{\begin{aligned} M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f_a' &= \mu^{(h)} (M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^*), \\ M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f_a' &= \mu'^{(h)} (M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^*), \end{aligned}\right. \tag{40}$$

indem wir der Kürze halber annehmen, daß die Elementarteiler der zu jener Substitution gehörigen charakteristischen Determinante demgemäß ausfallen. Bei Gebrauch von (39) werde identisch:

$$\begin{aligned} M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a^* &= N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f_j', \\ M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a^* &= N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f_j'; \end{aligned} \tag{41}$$

dabei bedeuten die Größen $\Gamma$, $\Gamma'$ bzw. $M$, $M'$ bzw. $N$, $N'$ Konstante jedesmal mit nicht verschwindender Determinante und $\mu$, $\mu'$ von Null verschiedene Konstante.

Nunmehr konstruieren wir in ähnlicher Weise, wie dies oben (vergl. S. 92) geschehen ist, innerhalb bzw. außerhalb von $C$ regulär analytische Hilfsfunktionen, deren Randwertquotienten auf $C$ in den Punkten $z^{(h)}$ gewisse Unstetigkeiten aufweisen.

Zunächst bilden wir die innerhalb bzw. außerhalb $C$ regulär analytischen Funktionen

$$\varphi_j^{(h)}(z) = l(z - z^{(h)}) \text{ bzw. } \varphi_a^{(h)}(z) = l\left(\frac{z - z^{(h)}}{z - p_j}\right),$$

wo $p_j$ wiederum irgendeinen, innerhalb $C$ gelegenen Punkt bedeutet. Setzen wir dann

$$\varepsilon^{(h)} = \frac{1}{2i\pi}\, l\mu^{(h)}, \quad \varepsilon'^{(h)} = \frac{1}{2i\pi}\, l\mu'^{(h)},$$

wo für $l\mu^{(h)}$, $l\mu'^{(h)}$ diejenigen Werte des Logarithmus zu nehmen sind, für die — unter $\Re(\varepsilon^{(h)})$, $\Re(\varepsilon'^{(h)})$ Realteil von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ verstanden —

$$0 < \Re(\varepsilon^{(h)}) \leqq 1, \quad 0 < \Re(\varepsilon'^{(h)}) \leqq 1$$

ausfällt, und bilden die Funktionen:

$$\psi_a^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)}} \varphi_a^{(h)}(z), \qquad \psi_a'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)}} \varphi_a^{(h)}(z),$$
$$\psi_j^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)}} \varphi_j^{(h)}(z), \qquad \psi_j'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)}} \varphi_j^{(h)}(z),$$

so sind die Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$ außerhalb $C$, die Funktionen $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ innerhalb $C$ und sämtliche Funktionen überdies auch auf $C$ regulär analytisch mit Ausnahme jedesmal des Punktes $z = z^{(h)}$.

Ferner bestimmen wir die ganzen rationalen Funktionen von $z$

$$A^{(h)}(z),\ A'^{(h)}(z),\ J^{(h)}(z),\ J'^{(h)}(z), \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

in der Weise, daß sie folgende Kongruenzen erfüllen:

$$(42) \qquad \left.\begin{array}{ll} A^{(h)}(z) \equiv 1, & (z - z^{(h)})^4 \\ A^{(h)}(z) \equiv 0, & (z - z^{(k)})^4 \\ A'^{(h)}(z) \equiv 1, & (z - z^{(h)})^4 \\ A'^{(h)}(z) \equiv 0, & (z - z^{(k)})^4 \\ J^{(h)}(z) \equiv 1, & (z - z^{(h)})^4 \\ J^{(h)}(z) \equiv 0, & (z - z^{(k)})^4 \\ J'^{(h)}(z) \equiv 1, & (z - z^{(h)})^4 \\ J'^{(h)}(z) \equiv 0, & (z - z^{(k)})^4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c} h, k = 1, 2, \ldots, m \\ h \neq k \end{array}\right),$$

und setzen dann der Kürze halber

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
M_1(z) &= A^{(1)}(z)\,M_1^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)\,M_1^{(m)},\\
M_2(z) &= A^{(1)}(z)\,M_2^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)\,M_2^{(m)},\\
M_1'(z) &= A^{(1)}(z)\,M_1'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)\,M_1'^{(m)},\\
M_2'(z) &= A^{(1)}(z)\,M_2'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)\,M_2'^{(m)},\\
\psi_a(z) &= A^{(1)}(z)\psi_a^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z)\,\psi_a^{(m)}(z),\\
\psi_a'(z) &= A^{(1)}(z)\psi_a'^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z)\,\psi_a'^{(m)}(z),\\
N_1(z) &= J^{(1)}(z)\,N_1^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)\,N_1^{(m)},\\
N_2(z) &= J^{(1)}(z)\,N_2^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)\,N_2^{(m)},\\
N_1'(z) &= J^{(1)}(z)\,N_1'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)\,N_1'^{(m)},\\
N_2'(z) &= J^{(2)}(z)\,N_2'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)\,N_2'^{(m)},\\
\psi_j(z) &= J^{(1)}(z)\psi_j^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z)\,\psi_j^{(m)}(z),\\
\psi_j'(z) &= J^{(1)}(z)\psi_j'^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z)\,\psi_j'^{(m)}(z).
\end{aligned}
$$

Endlich denken wir uns nötigenfalls die Kurve $C$ ein wenig variiert derart, daß auf der variierten Kurve — die wiederum analytisch sei, die Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ enthalte und auch kurz mit $C$ bezeichnet werde — die Funktionen

$$\psi_j(z), \psi_j'(z), \psi_a(z), \psi_a'(z), M_1(z), M_2'(z);\quad M_2(z), M_1'(z), N_1(z) N_2'(z);\quad N_2(z), N_1'(z)$$

überall mit etwaiger Ausnahme dieser Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ von Null verschieden ausfallen.

Bezeichnen wir dann mit $s^{(h)}$ den zu $z^{(h)}$ gehörigen Wert der Bogenlänge $s$, so gelten wie oben (vgl. S. 93) auf $C$ in genügender Nähe von $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$
(44)\quad
\begin{cases}
\varphi_j^{(h)} = -i\pi + l(s - s^{(h)}) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)})\\
\phantom{\varphi_j^{(h)}} = \phantom{-i\pi +{}} l(s^{(h)} - s) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}),\\
\varphi_a^{(h)} = \phantom{-}i\pi + l(s - s^{(h)}) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)})\\
\phantom{\varphi_a^{(h)}} = \phantom{-i\pi +{}} l(s^{(h)} - s) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}),
\end{cases}
$$

wo $l(s - s^{(h)})$, $l(s^{(h)} - s)$ die reellen Logarithmen und $J_0^{(h)}, J_1^{(h)}, \ldots A_0^{(h)}, A_1^{(h)}, \ldots$ gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten.

Bezeichnen wir die Randwerte der Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$, $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ auf $C$ bzw. mit $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$, so gelten demnach auf $C$ in genügender Nähe des Punktes $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$
(45)\quad \begin{cases}
\psi_j^{(h)} = e^{-\frac{1}{2} l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s - s^{(h)})} \mathfrak{P}_j^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\
\qquad = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)} - s)} \mathfrak{P}_j^{(h)} & (s < s^{(h)}), \\
\psi_j'^{(h)} = e^{-\frac{1}{2} l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s - s^{(h)})} \mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\
\qquad = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)} - s)} \mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\
\psi_a^{(h)} = e^{\frac{1}{2} l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s - s^{(h)})} \mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\
\qquad = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)} - s)} \mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\
\psi_a'^{(h)} = e^{\frac{1}{2} l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s - s^{(h)})} \mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\
\qquad = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)} - s)} \mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s < s^{(h)}),
\end{cases}
$$

wo $\mathfrak{P}_j^{(h)}$, $\mathfrak{P}_j'^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a'^{(h)}$ reguläre, nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende, für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind.

Wenden wir uns nach diesen Vorbereitungen zu der ursprünglich vorgelegten Aufgabe zurück und führen statt der gesuchten Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ die Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$ vermöge der Gleichungen

$$
(48)\quad \begin{aligned}
M_1(z) f_a(z) + M_2(z) f_a'(z) &= \psi_a(z) g_a(z), \\
M_1'(z) f_a(z) + M_2'(z) f_a'(z) &= \psi_a'(z) g_a'(z)
\end{aligned}
$$

und statt der gesuchten Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ die Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ vermöge der Gleichungen

$$
(49)\quad \begin{aligned}
N_1(z) f_j(z) + N_2(z) f_j'(z) &= \psi_j(z) g_j(z), \\
N_1'(z) f_j(z) + N_2'(z) f_j'(z) &= \psi_j'(z) g_j'(z)
\end{aligned}
$$

ein, so geht die ursprünglich vorgelegte Aufgabe in die Aufgabe über, die Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb der Kurve $C$ vom Charakter rationaler Funktionen derart zu bestimmen, daß ihre Randwerte $g_a$, $g_a'$, $g_j$, $g_j'$ auf $C$ die Relationen

$$
(50)\quad \begin{aligned}
g_a &= c_1 g_j + c_2 g_j', \\
g_a' &= c_1' g_j + c_2' g_j'
\end{aligned}
$$

erfüllen, wobei die Koeffizienten $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ gewisse endliche Ausdrücke in $s$ mit von Null verschiedener Determinante sind, die leicht aus (38) vermittels (48) und (49) berechnet werden können.

Zur Lösung dieser letzteren Aufgabe können wir unseren Satz 30 anwenden, da die Koeffizienten $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in $s$ werden. Den Nachweis hierfür erbringen wir, wie folgt.

Da die Kurve $C$ als analytisch angenommen war, so erhalten wir die Punkte auf $C$ in der Umgebung von $z = z^{(h)}$ durch die Formel

$$
z(s) = z^{(h)} + C_1(s - s^{(h)}) + C_2(s - s^{(h)})^2 + \cdots,
$$

wo rechter Hand eine reguläre nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende Reihe steht. Die Kongruenzen (42) werden demnach, wenn wir die Variable $z$ in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf $C$ wandern lassen, unmittelbar in Kongruenzen für die entsprechenden Randwerte nach dem Modul $(s - s^{(h)})^4$ übergehen.

Wir erweitern noch den Begriff der Kongruenz auf allgemeinere Ausdrücke $S_1$, $S_2$ in $s$, indem wir, wenn in einer Formel

$$S_1 - S_2 = (s - s^{(h)})^{\mathfrak{e}} \mathfrak{P} + (s - s^{(h)})^{\mathfrak{e}'} \mathfrak{P}'$$

beide Exponenten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ Realteile $\geqq 3$ bzw. $\geqq 4$ besitzen und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ reguläre Potenzreihen in $s - s^{(h)}$ sind, ebenfalls

$$S_1 \equiv S_2, \quad (s - s^{(h)})^3$$

bzw.

$$S_1 \equiv S_2, \quad (s - s^{(h)})^4$$

schreiben.

Alsdann folgt aus (48), wenn wir die Variable $z$ in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf $C$ wandern lassen, mit Rücksicht auf die Kongruenzen (42) und (43):

$$(51) \qquad \begin{aligned} M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f_a' &\equiv \psi_a^{(h)} g_a, \quad (s - s^{(h)})^4, \\ M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f_a' &\equiv \psi_a'^{(h)} g_a', \quad (s - s^{(h)})^4. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (49) mit Rücksicht auf (42) und (43):

$$\begin{aligned} N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f_j' &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f_j' &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich wegen (41)

$$(52) \qquad \begin{aligned} M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4. \end{aligned}$$

Nunmehr unterscheiden wir die beiden Fälle, ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt. Im *ersteren* Falle liefert (38) die Relationen

$$\begin{aligned} f_a &= \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f_j', \\ f_a' &= \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f_j', \end{aligned}$$

d. h. mit Benutzung der Hilfsausdrücke (39)

$$\begin{aligned} f_a &= f_a^*, \\ f_a' &= f_a'^*; \end{aligned}$$

folglich ergeben (51) und (52) die Kongruenzen

$$\begin{aligned} \psi_a^{(h)} g_a &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ \psi_a'^{(h)} g_a' &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4; \end{aligned}$$

und, wenn wir hier die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$ bei $s < s^{(h)}$ aus (45) berücksichtigen und bedenken, daß die Realteile der Exponenten von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen,

$$(53)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_\alpha^{(h)} g_\alpha \equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, & (s - s^{(h)3}), \\ \mathfrak{P}_\alpha'^{(h)} g_\alpha' \equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g_j', & (s - s^{(h)3}) \end{array}\right\} \quad s < s^{(h)}.$$

Ferner, im *zweiten* Falle $s > s^{(h)}$, liefert (38) die Relationen

$$f_\alpha = \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f_j',$$
$$f_\alpha' = \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f_j';$$

dies sind mit Benutzung der Hilfsausdrücke (39) die Formeln (40), und folglich ergeben jetzt (51) und (52) die Kongruenzen

$$\psi_\alpha^{(h)} g_\alpha \equiv \mu^{(h)} \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4,$$
$$\psi_\alpha'^{(h)} g_\alpha' \equiv \mu'^{(h)} \psi_j'^{(h)} g_j', \qquad (s - s^{(h)})^4.$$

Berücksichtigen wir hierin die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_\alpha^{(h)}$, $\psi_\alpha'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$ bei $s > s^{(h)}$ aus (45) und bedenken, daß die Realteile der Exponenten $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen, so wird bei Forthebung von $\mu^{(h)}$, $\mu'^{(h)}$ wiederum

$$(54)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_\alpha^{(h)} g_\alpha \equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, & (s - s^{(h)})^3, \\ \mathfrak{P}_\alpha'^{(h)} g_\alpha' \equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g_j', & (s - s^{(h)})^3 \end{array}\right\} \quad s > s^{(h)}.$$

Da $\mathfrak{P}_j^{(h)}$, $\mathfrak{P}_j'^{(h)}$, $\mathfrak{P}_\alpha^{(h)}$, $\mathfrak{P}_\alpha'^{(h)}$ reguläre nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende und überdies für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind, so erkennen wir aus (53) und (54), daß, gleichviel ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt, die Kongruenzen

$$g_\alpha \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_\alpha^{(h)}} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^3$$
$$g_\alpha' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_\alpha'^{(h)}} g_j', \qquad (s - s^{(h)})^3$$

gelten müssen. Durch Vergleichung dieser Kongruenzen mit der Substitution (50) folgen für die Koeffizienten dieser Substitution die Kongruenzen

$$c_1 \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_\alpha^{(h)}}, \quad c_2 \equiv 0, \quad (s - s^{(h)})^3,$$
$$c_1' \equiv 0, \qquad c_2' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_\alpha'^{(h)}}, \quad (s - s^{(h)})^3,$$

und diese zeigen, daß die Ausdrücke $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ beim Durchgang durch den Punkt $s = s^{(h)}$ gewiß zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

Damit haben wir unsere Behauptung, wonach $c_1$, $c_2$, $c_1'$, $c_2'$ in (50) zweimal stetig differenzierbar in $s$ sind, als richtig erkannt und *zugleich das besondere Riemannsche Problem der Auffindung von Funktionensystemen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe vollständig gelöst.*