Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Zweiter Abschnitt. Anwendung der Theorie auf lineare Differentialgleichungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Theorie auf lineare Differentialgleichungen.

In dem ersten Abschnitt haben wir die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

behandelt und sind dabei zu einer Reihe allgemeiner Resultate über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den zum Kern $K(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen gelangt; wir behaupteten in der Einleitung, daß in diesen Resultaten als spezielle Fälle die Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, nach Kugel-, Laméschen und Sturmschen Funktionen, sowie die Entwicklungen nach denjenigen Funktionen mit mehr Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst H. Poincaré bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. In dem folgenden zweiten Abschnitt soll diese Behauptung durch Erörterung einiger Anwendungen der Theorie im Gebiete der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen begründet werden; dabei werden die schönen und wichtigen Resultate E. Picards[1]), soweit diese die linearen Differentialgleichungen betreffen, auf das engste berührt.

Siebentes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ sowie an den Grenzen dieses Intervalles stetig sind; ferner sei p irgendeine innerhalb jenes Intervalles nebst der ersten Ableitung stetige Funktion von x, die überdies innerhalb des Intervalles positiv ausfällt; endlich sei q irgendeine innerhalb jenes Intervalles stetige Funktion von x: dann ist der allgemeinste homogene lineare, sich selbst adjungierte Differentialausdruck zweiter Ordnung von der Gestalt

$$L(u) \equiv \frac{d\left(p \frac{du}{dx}\right)}{dx} + qu \equiv p \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} + qu.$$

1) Vgl. insbesondere Traité d'analyse t. III chap. VI.

Bedeutet v ebenfalls eine Funktion von x mit stetiger erster und zweiter Ableitung, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$(1) \qquad \int_a^b \{v L(u) - u L(v)\} dx = \left[p \left\{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

Der Kürze halber benutzen wir folgende Ausdrucksweise: Wenn eine Funktion die erste Ableitung besitzt und diese Ableitung stetig ist, so heiße die Funktion *(einmal) stetig differenzierbar* und, wenn auch ihre zweite Ableitung existiert und stetig ist, so heiße sie *zweimal stetig differentiierbar.*

Es sei $\gamma(x, \xi)$ eine Funktion der Variabeln x und des Parameters ξ, die in bezug auf x zweimal stetig differenzierbar ist und für alle von ξ verschiedenen Werte von x innerhalb des Intervalles a bis b der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

genügt, die ferner für $x = \xi$ stetig verläuft, während ihre erste Ableitung für $x = \xi$ den Abfall -1 aufweist[1]), so daß

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1$$

wird: eine solche Funktion $\gamma(x, \xi)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$ genannt.

Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige partikuläre Lösungen von $L(u) = 0$, so läßt sich eine Grundlösung offenbar in der Gestalt darstellen

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{|x-\xi|}{x-\xi} \frac{u_2(\xi) u_1(x) - u_1(\xi) u_2(x)}{u_2(\xi) \dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi) \dfrac{du_2(\xi)}{d\xi}}.$$

So besitzt beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

die Grundlösung

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2} |x - \xi|;$$

ferner besitzen die Differentialgleichungen

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0,$$

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} = 0,$$

1) Diese Unstetigkeit hat wohl E. Picard (l. c.), den Begriff der Greenschen Funktion einer Veränderlichen dagegen H. Burkhardt zuerst eingeführt, Bull. soc. math. de France Bd. 22 (1894). Vgl. ferner die Inauguraldissertation von Ch. M. Mason, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Göttingen 1903, sowie dessen Arbeit „Zur Theorie der Randwertaufgaben" Math. Ann. Bd. 58.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

bzw. die Grundlösungen

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\xi\,|lx - l\xi|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}(1 - \xi^2)\left|\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\sin(|x - \xi|),$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}e^{|x-\xi|}.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung gibt es offenbar unendlich viele Grundlösungen; diese werden sämtlich aus einer von ihnen erhalten, wenn man derselben ein beliebiges Integral der Differentialgleichung hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist. Für unsere weiteren Entwicklungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ des Intervalles gewisse homogene Bedingungen erfüllen. Die besonders in Betracht kommenden homogenen Randbedingungen sind folgende:

I. $$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0,$$

II. $$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b} = 0;$$

III. $$\left[\frac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$$

IV. $$f(a) = hf(b), \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b};$$

IV*. $$f(a) = hp(b)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b}, \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\frac{1}{h}f(b).$$

Bei der Anwendung dieser Randbedingungen I—IV* ist stets die Annahme zu machen, daß die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ auch in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ stetig sind und ebenda die Funktion $p(x)$ von Null verschieden ausfällt. Ist diese Voraussetzung für einen Randpunkt oder beide Randpunkte nicht erfüllt, so wähle man als Randbedingung eine solche Forderung, durch welche an dem betreffenden Randpunkt ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt wird. Die einfachsten in unseren späteren Beispielen zur Anwendung kommenden Randbedingungen dieser Art bestehen für den Randpunkt $x = a$ in einer der Forderungen:

V. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ ein endlich bleibendes Integral besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x - a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. In der Tat, bezeichnet u_1 ein endlich bleibendes Integral, so stellen sich die von u_1 unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in der Form

$$u_2 = u_1 \int \frac{dx}{p(x)\, u_1(x)^2}$$

dar, und diese wachsen wegen $s \geqq 1$ gewiß über alle Grenzen; die Bedingung der Endlichkeit bestimmt mithin ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.

V*. $f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x - a)^r e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet.

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ Integrale von eben jener Form $(x - a)^r e(x)$ besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x - a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1 - 2r$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. Der Beweis dafür, daß unter diesen Umständen die Forderung V* ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt; wird leicht wie im vorigen spezielleren Falle geführt.

Die Randbedingungen I—V (V*) sind stets so zu verstehen, daß $f(x)$ (bzw. $e(x)$) in dem betreffenden Randpunkt einmal stetig differenzierbar ist.

Die genannten Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombiniert werden.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$, die an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen der genannten Art erfüllt, heiße *die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $L(u) = 0$; ferner heiße der Quotient

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$; wir bezeichnen die Greenschen Funktionen je nach den Randbedingungen, zu denen sie gehören, auch als *Greensche Funktionen* G^{I}, G^{II}, G^{III}, G^{IV} oder G^{V}.

Beispielsweise lautet die Greensche Funktion G^{I} für den Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{d x^2},$$

d. h. die zu den Randbedingungen I gehörige Greensche Funktion, für das Intervall 0 bis 1

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= (1-\xi)x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= (1-x)\xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Noch einfacher wird die Greensche Funktion für jenen Differentialausdruck, wenn wir am Randpunkt $x = 0$ die Bedingung I und am Randpunkt $x = 1$ die Bedingung II wählen; sie lautet dann

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= \xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Ferner wird die Greensche Funktion G^{I} desselben Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{d x^2}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ durch die Formel

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\{|x-\xi| + x\xi - 1\}$$

dargestellt.

Die Greensche Funktion G^{IV} $(h = -1)$ für denselben Differentialausdruck und das Intervall 0 bis 1, die also den Randbedingungen

$$f(0) = -f(1), \qquad \left[\frac{d f(x)}{d x}\right]_{x=0} = -\left[\frac{d f(x)}{d x}\right]_{x=1}$$

genügt, lautet

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv x \frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d u}{d x}$$

für das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$, die am Randpunkt $x = 0$ der Bedingung V und am Randpunkt $x = 1$ der Bedingung I genügt, lautet:

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= l\xi, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= l x, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Ein weiteres sehr interessantes Beispiel liefert der Differentialausdruck:

$$L(u) \equiv \frac{d}{d x}\left\{(1-x^2)\frac{d u}{d x}\right\} - \frac{4\alpha^2}{1-x^2} u,$$

wo α irgendeine positive Konstante bedeuten soll; die Greensche Funktion G^{V} für das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$ ist:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}, \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}, \qquad (x \geqq \xi).$$

Für die unendliche Gerade $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ besitzt der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} - u$$

die Greensche Funktion G V

$$G(x, \xi) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-\xi|}.$$

Es kann vorkommen, daß für einen Differentialausdruck $L(u)$ bei gewissen Randbedingungen keine Greensche Funktion im eben definierten Sinne vorhanden ist; in diesem Falle existiert, wie aus den späteren allgemeinen Entwicklungen im Kap. IX sowie Kap. XVIII folgt, eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die überall innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist und den betreffenden Randbedingungen genügt; dabei sei der noch willkürliche konstante Faktor so bestimmt, daß

$$\int_a^b (\psi^{(0)}(x))^2\, dx = 1$$

wird. Wir konstruieren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(\xi),$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, während $g(x, \xi)$ an allen anderen Stellen innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist, an den Randpunkten die betreffenden Randbedingungen und überdies die Gleichung

$$\int_a^b g(x, \xi)\psi^{(0)}(x)\, dx = 0$$

erfüllt; die Funktion

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = \psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(\xi).$$

Diese Funktionen $g(x, \xi)$ bzw. $G(x, \xi)$ leisten die nämlichen Dienste wie sonst die Greensche Funktion und werden daher in dem vorliegenden besonderen Falle als *Greensche Funktionen im erweiterten Sinne* bezeichnet. Existiert auch diese Funktion nicht, so kann man einen analogen weiteren Schritt tun, um zu einer geeigneten Greenschen Funktion zu gelangen.

Als Beispiel diene der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2}$$

mit den Randbedingungen IV ($h = 1$) für das Intervall -1 bis $+1$, so daß die Bedingungen lauten:

$$f(-1) = f(+1), \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=-1} = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=+1}.$$

In der Tat existiert hier eine von Null verschiedene Lösung der homogenen Differentialgleichung, nämlich $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, die die Randbedingungen erfüllt, und die Greensche Funktion im eben erklärten erweiterten Sinne wird:

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x - \xi| + \tfrac{1}{4}(x - \xi)^2 + \tfrac{1}{6}.$$

Ein anderes Beispiel für das letztere Vorkommnis liefert der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d\left\{(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right\}}{dx}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ bei den Randbedingungen V. Auch hier ist $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne lautet

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\, l\{(1 - x)(1 + \xi)\} + c, \quad (x \leqq \xi), \\ &= -\tfrac{1}{2}\, l\{(1 + x)(1 - \xi)\} + c, \quad (x \geqq \xi), \end{aligned}$$

wo c den numerischen Wert $l2 - \frac{1}{2}$ bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (1) an Stelle von $u(x)$, $v(x)$ bzw. die Funktionen $G(x, \xi)$, $G(x, \xi^*)$ und berücksichtigen die Unstetigkeit der Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $x = \xi$ in gehöriger Weise, indem wir dieselbe in ein kleines Intervall einschließen und dann den Grenzübergang zum verschwindenden Intervall ausführen, so finden wir leicht das *Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes*

$$G(\xi, \xi^*) = G(\xi^*, \xi).$$

In allen oben berechneten Beispielen bestätigt sich dieses Symmetriegesetz.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine gegebene stetige Funktion der Variabeln x, und verstehen wir unter f eine überall stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(f) = -\varphi(x), \tag{2}$$

die einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügt, setzen wir dann in der Greenschen Formel (1) an Stelle von u die Lösung f und an Stelle von v die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$, so finden wir für jede der fünf Arten von Randbedingungen

$$\int_a^b G(x, \xi) L(f(x)) dx = f(\xi),$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion, daß die Lösung $f(x)$ sich folgendermaßen durch ein bestimmtes Integral darstellt:

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3}$$

Daß die so dargestellte Funktion $f(x)$ wirklich den betreffenden Randbedingungen genügt, ist offenbar, weil $G(x, \xi)$ denselben genügt; die durch (3) dargestellte Funktion $f(x)$ genügt aber auch der Differentialgleichung (2), wie durch Rechnung leicht gezeigt wird. Wenn somit eine zweimal stetig differenzierbare und einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügende Funktion $f(x)$ und irgendeine stetige Funktion $\varphi(x)$ durch die Relation (2) miteinander verknüpft sind, so folgt für dieselben notwendig auch die Relation (3), und umgekehrt, wenn für zwei solche Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Relation (3) besteht, so folgt für sie notwendig auch die Relation (2). Hieraus entnehmen wir sofort, daß einerseits die Funktion f unter Hinzunahme der betreffenden Randbedingungen durch die Differentialgleichung (2), wobei φ gegeben, und andrerseits die Funktion $\varphi(x)$ durch die Integralgleichung (3), wobei f gegeben, eindeutig bestimmt ist.

Die Gleichung (3) ist eine als Integralgleichung erster Art; $G(x, \xi)$ ist der Kern dieser Integralgleichung und wegen des Symmetriegesetzes eine symmetrische Funktion der Argumente.

Wir fassen die Ergebnisse der vorstehenden Entwicklungen, wie folgt, zusammen:

Satz 11. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für irgendein Paar der Randbedingungen* I—V *als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

genommen wird, wo $f(x)$ eine gegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, die den betreffenden Randbedingungen genügt, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(x)$, und man erhält ihre Lösung durch die Formel

$$\varphi(x) = - L(f(x));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(x)$ *irgendeine stetige Funktion ist, und eine Lösung* $f(x)$ *der Differentialgleichung*

$$L(f(x)) + \varphi(x) = 0$$

gefunden werden soll, die einem ausgewählten Paar von Randbedingungen I—V *genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht, daß die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ einen Kern darstellt, der nach der im ersten Abschnitt Kap. IV eingeführten Ausdrucksweise sowohl abgeschlossen wie auch allgemein ist.

In der Tat, sei $\varphi(x)$ eine solche Funktion, daß

$$\int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

identisch für alle x verschwindet, so müßte die Funktion $f(x) = 0$ der Differentialgleichung $L(f) = -\varphi$ genügen, und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ identisch für alle x verschwindet, d. h. $G(x, \xi)$ ist ein abgeschlossener Kern.

Andrerseits sei $g(x)$ irgendeine stetige Funktion; wir wählen dann eine zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $g^*(x)$ derart, daß

$$\int_a^b (g(x) - g^*(x))^2\,dx$$

kleiner als die beliebig kleine positive Größe ε ausfällt: die stetige Funktion $h(x) = -L(g^*(x))$ erfüllt dann dasjenige Erfordernis, das unserer Definition zufolge einen allgemeinen Kern charakterisiert.

In den vorstehenden Betrachtungen spielte die Integralgleichung erster Art eine wesentliche Rolle; wir werden zu einer Integralgleichung zweiter Art gelangen, wenn wir neben $L(u)$ noch den Differentialausdruck

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

betrachten, wo λ einen Parameter bezeichnet. Es sei wie bisher $G(x, \xi)$ die zu gewissen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $L(u)$, und $\Gamma(x, \xi)$ die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $\Lambda(u)$. Sodann wenden wir die Greensche Formel (1) an; nehmen wir

$$u(x) = G(x, \xi), \quad v(x) = \Gamma(x, \xi^*),$$

so erhalten wir

$$(4)\quad \Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx$$
$$- \left[p(x) \left\{\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x}\right\}\right]_a^b.$$

Wir erörtern zunächst die Randbedingungen I—IV; wenn wir demgemäß die Annahme machen, daß die Funktionen p, q in den Randpunkten sich regulär verhalten und daß überdies p in den Randpunkten von Null verschieden ausfällt, so verhalten sich auch die Integrale der Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ und somit auch die Funktionen $G(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi^*)$ in den Randpunkten regulär, und wir erkennen hieraus, daß die eckige Klammer auf der rechten Seite der Formel (4) verschwindet.

Nunmehr erörtern wir den Fall, daß für den Randpunkt $x = a$ die Bedingung V bzw. V* gestellt sei; demgemäß nehmen wir an, daß die Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ je ein partikuläres Integral besitzen, welches in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form

$$u(x) = (x - a)^r e(x)$$

darstellt, und daß p in der Nähe des Randpunktes $x = a$ von der Form $(x - a)^s E(x)$ sei, wo s einen Exponenten $\geqq 1 - 2r$ bedeutet. Es wird dann

$$\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} = (x - a)^{2r} e^*(x),$$

wo e^* wiederum für $x = a$ endlich bleibt, und es ist daher gewiß

$$\underset{x=a}{L} \left[p(x) \left\{\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x}\right\}\right] = 0.$$

Nehmen wir schließlich, damit das bestimmte Integral in (4) gewiß einen endlichen Wert erhält, den Exponenten $r > -\frac{1}{2}$ an, so erhalten wir in jedem Falle aus (4) die Formel

$$\Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx$$

oder, wenn wir die Buchstaben K, K bzw. an Stelle von G, Γ setzen:

$$\mathsf{K}(x, \xi) - K(x, \xi) = \lambda \int_a^b K(x, \xi^*) \mathsf{K}(\xi, \xi^*)\, d\xi^*.$$

Dabei werde hervorgehoben, daß $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ stetige Funktionen ihrer Argumente sind, außer für die Randbedingung V*; in diesem Falle aber sind wegen unserer Annahme $r > -\frac{1}{2}$ die auftretenden Singularitäten von $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung, und daher erscheinen jene Greenschen Funktionen als Kerne von Integralgleichungen zweiter Art unmittelbar zulässig. Die eben erlangte Formel stimmt genau mit derjenigen überein, die wir im ersten Abschnitt untersucht haben. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 12. *Wenn die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ für irgendein Paar der Randbedingungen* I—V *als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \tag{5}$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu den nämlichen Randbedingungen gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\Delta(u) = L(u) + \lambda u$$

bildet.

Da nach Satz 11 die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta(u) + \varphi(x) = 0 \tag{6}$$

unmittelbar aus der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ gefunden wird, so erweisen sich also die Integration dieser Differentialgleichung (6) bei gegebenen Randbedingungen und die Lösung der Integralgleichung (5) zweiter Art als äquivalente Probleme.

Indem wir die in Kapitel I—VI entwickelte Theorie der Integralgleichungen heranziehen, gelangen wir zu einer Reihe bemerkenswerter Resultate über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und erkennen zugleich die Bedeutung, die den Eigenwerten und Eigenfunktionen der Integralgleichung (5) für die lineare Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ zukommt.

Da die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ sich in der Form eines Bruches $\frac{\Delta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}$ darstellt, dessen Nenner nur für die Eigenwerte $\lambda = \lambda^{(h)}$ verschwindet, so folgt unter der Voraussetzung, daß der Differentialausdruck $L(u)$ eine Greensche Funktion für die betreffenden Randbedingungen besitzt, daß es auch stets eine solche für den Differentialausdruck $\Delta(u)$ gibt, es sei denn λ ein Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Integralgleichung (5); in dem letzteren Falle bezeichne $\psi^{(m)}(x)$ eine normierte zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ gehörige Eigenfunktion des Kerns $K(x, \xi)$; dann ist

$$\psi^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_a^b K(x, \xi) \psi^{(m)}(\xi) d\xi,$$

und wegen

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)$$

folgt aus Satz 11, daß $\psi^{(m)}(x)$ ein überall innerhalb des Intervalles stetig differenzierbares Integral der homogenen Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(m)} u = 0 \tag{7}$$

ist, welches die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Umgekehrt, wenn die homogene Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für den Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ ein Integral besitzt, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt, so ist $\lambda^{(m)}$ ein Eigenwert, und das Integral ist eine zugehörige Eigenfunktion für den Kern $K(x, \xi)$; der Differentialausdruck $\Lambda(u)$ aber besitzt für diesen Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ keine Greensche Funktion im ursprünglichen engeren Sinne.

Wir bezeichnen den Wert $\lambda^{(m)}$ auch kurz als einen *Eigenwert der Differentialgleichung* $\Lambda(u) = 0$ und jene Lösungen $\psi^{(m)}(x)$ auch als *Eigenfunktion dieser Differentialgleichung für die betreffenden Randbedingungen.*

Da die Differentialgleichung (7) überhaupt nur zwei voneinander unabhängige Lösungen besitzt, so ist $\lambda^{(m)}$ höchstens ein zweifacher Eigenwert. Ist $\lambda^{(m)}$ ein zweifacher Eigenwert, so müßten sämtliche Integrale der Differentialgleichung (7) die betreffenden Randbedingungen erfüllen, und da dies offenbar nur im Falle der Randbedingung IV statthaben kann, so ist in allen anderen Fällen jeder Eigenwert gewiß nur ein einfacher.

Da der Kern $K(x, \xi)$ ein abgeschlossener ist, so gibt es jedenfalls unendlich viele Eigenwerte der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$. (Vgl. Kapitel IV.) Wegen desselben Umstandes entnehmen wir aus den Sätzen 5 und 6 in Kapitel IV die Tatsachen:

Satz 13. *Wenn $h(x)$ eine stetige Funktion von x bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_a^b h(x)\, \psi^{(m)}(x)\, dx = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(x)$ identisch Null.

Satz 14. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1 \psi^{(1)}(x) + c_2 \psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(x)\, \psi^{(m)}(x)\, dx$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(x)$ dar.

Nach S. 47 ist $K(x, \xi)$ auch ein allgemeiner Kern. Da ferner wegen Satz 11 jede zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

gestattet, sobald man

$$\varphi(x) = -L(f(x))$$

wählt, so folgt aus Satz 7 der ersten Mitteilung das folgende wichtige Resultat:

Satz 15. *Jede zweimal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.*

Die Sätze 13, 14, 15 schließen den wesentlichen Teil der in neuerer Zeit insbesondere von W. Stekloff[1]) und A. Kneser[2]) gefundenen Resultate über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen in Sturm-Liouvillesche Reihen ein.

Ist statt des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{d\left(p\,\frac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)\,u$$

vorgelegt, wo k irgendeine innerhalb des Intervalles positive Funktion von x bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

und multipliziere dann den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Lambda^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{d\left(p^*\frac{dv}{dx}\right)}{dx} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{d}{dx}\left\{p\,\frac{d\frac{1}{\sqrt{k}}}{dx}\right\} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

---

1) Vgl. z. B. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III (1901).
2) Math. Ann. Bd. 58 (1903).

Als erstes Beispiel dienen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \Lambda(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u,$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $L(u)$ im Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ ist bereits oben (S. 43) aufgestellt worden; wir nehmen sie als Kern:

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= (1 - \xi)x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= (1 - x)\xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion $\Lambda(u)$ in demselben Intervall lautet

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi) &= \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-\xi)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-x)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, \xi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Nach Satz 12 ist sie zugleich die lösende Funktion für den Kern $K(x, \xi)$ und werde als solche mit $\mathsf{K}(x, \xi)$ bezeichnet. Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ zu berechnen, setzen wir

$$\Gamma(x, \xi) = \mathsf{K}(x, \xi) = -\frac{\Delta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}.$$

Hier bestimmen sich Δ als Funktion von λ, x, ξ und δ als Funktion von λ allein eindeutig durch die Forderungen

$$\int_0^1 \Delta(\lambda; x, x)\, dx = \frac{d\delta(\lambda)}{d\lambda} \text{ und } \delta(0) = 1,$$

und zwar ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda; x, \xi) &= -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-\xi)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x)}{\lambda}, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-x)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, \xi)}{\lambda}, \qquad (x \geqq \xi), \\ \delta(\lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Eigenwerte

$$\lambda^{(1)} = 1^2 \pi^2, \quad \lambda^{(2)} = 2^2 \pi^2, \quad \lambda^{(3)} = 3^2 \pi^2, \quad \ldots$$

und vermöge

$$\lambda^{(m)} \Delta(\lambda^{(m)}; x, \xi) = \pm\, \varphi^{(m)}(x)\, \varphi^{(m)}(\xi)$$

die bzw. zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen

$$\sin \pi x, \quad \sin 2\pi x, \quad \sin 3\pi x, \quad \ldots.$$

Unser Satz 15 über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ läuft auf die Aussage hinaus, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion von x, die für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Sinus der ganzen Vielfachen von πx fortschreitet.

Als weiteres Beispiel wählen wir die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \lambda x u = 0$$

und fragen nach ihren Eigenwerten und Eigenfunktionen für das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$, wenn an dem Randpunkte $x = 0$ die Bedingung V und an dem Randpunkte $x = 1$ die Bedingung I erfüllt sein soll. Nach einer früheren Bemerkung (S. 51) haben wir die Substitution $u = \frac{v}{\sqrt{x}}$ anzuwenden; wir gewinnen so die Differentialausdrücke

$$L^*(v) = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{4x^2} v, \qquad \Lambda^*(v) \equiv L^*(v) + \lambda v.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L^*(v)$, die in $x = 0$ der Randbedingung V* $(r = \frac{1}{2})$ und in $x = 1$ der Randbedingung I genügt, lautet:

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \sqrt{x\xi}\, l(\xi), \qquad (x \leqq \xi), \\ &= \sqrt{x\xi}\, l(x), \qquad (x \geqq \xi), \end{aligned}$$

und die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $\Lambda(v)$ ist, wenn in der üblichen Weise

$$J(x) \text{ und } K(x) = J(x)\, l(x) + P(x)$$

die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art bezeichnen:

$$\begin{aligned} \mathsf{K}(x, \xi) &= \sqrt{x\xi}\, \frac{J(x\sqrt{\lambda})\{J(\sqrt{\lambda})\, K(\xi\sqrt{\lambda}) - J(\xi\sqrt{\lambda})\, K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})}, \quad (x \leqq \xi), \\ &= \sqrt{x\xi}\, \frac{J(\xi\sqrt{\lambda})\}J(\sqrt{\lambda})K(x\sqrt{\lambda}) - J(x\sqrt{\lambda})K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})}, \quad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Diese Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ ist mithin nach Satz 12 die lösende Funktion des Kerns K, und wir finden hieraus

$$\delta(\lambda) = J(\sqrt{\lambda});$$

mithin sind die Nullstellen $\lambda^{(m)}$ von $J(\sqrt{\lambda})$ die gesuchten Eigenwerte und, wenn man diese für λ in den Zähler des Ausdruckes für $\mathsf{K}(x, \xi)$ einführt, so ergeben sich die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\varphi^{(m)}(x) = \sqrt{x}\, J(x\sqrt{\lambda^{(m)}}).$$

Unser Satz über die Entwicklung nach Eigenfunktionen des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ läuft, wenn wir nachträglich die zu entwickelnde Funktion durch $\sqrt{x}$ dividieren und den Faktor $\sqrt{x}$ ebenfalls in allen Eigenfunktionen fortlassen, auf die Aussage hinaus, daß im Intervalle 0 bis 1 jede zweimal stetig differenzierbare Funktion von x, die für $x=1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Besselschen Funktionen $J(x\sqrt{\lambda^{(m)}})$ fortschreitet.[1])

Weitere interessante Beispiele für unsere Theorie erhalten wir, wenn wir die Differentialgleichungen der Zylinder- und Kugelfunktionen höherer Art heranziehen; so führt die früher (S. 44) aufgestellte Greensche Funktion:

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha},\quad (x\leqq\xi),$$
$$=\frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\,\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha},\quad (x\geqq\xi)$$

zu der neuen Definition der Kugelfunktion $P_{\alpha}^{(m)}$

$$P_{\alpha}^{(m)}(x)=\lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1}G(x,\xi)\,P_{\alpha}^{(m)}(\xi)\,d\xi,$$

und zu der Tatsache der Entwickelbarkeit einer jeden zweimal stetig differenzierbaren Funktion in eine Reihe, die nach den Kugelfunktionen $P_{\alpha}^{(m}$ fortschreitet.

Tritt der oben (S. 44) behandelte besondere Fall ein, daß zum Differentialausdruck L bei den betreffenden Randbedingungen eine Greensche Funktion im engeren Sinne nicht existiert, so gelten unsere Entwicklungen für die Greensche Funktion in dem dort erklärten erweiterten Sinne. Bezeichnet nämlich wie oben $\psi^{(0)}(x)$ die alsdann vorhandene, den Randbedingungen genügende, überall stetig differenzierbare Lösung der Gleichung $L(u)=0$, so ergibt sich durch Anwendung der Greenschen Formel (1) an Stelle des Satzes 11 leicht die folgende Tatsache:

Satz 16. *Wenn f eine zweimal stetig differenzierbare, den Randbedingungen und der Bedingung*

$$\int_a^b f(x)\psi^{(0)}(x)\,dx=0$$

genügende Funktion bedeutet, so ist die Integralgleichung erster Art

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

lösbar und ihre Lösung gewinnt man durch die Formel

$$\varphi(x)=-L(f(x)).$$

1) Neuerdings hat A. Kneser die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach Besselschen Funktionen nach einer Methode bewiesen, die derjenigen analog ist, die er in der oben genannten Abhandlung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen angewandt hat. Archiv der Math. und Phys. 1903.

Diesem Satze 16 entsprechend müssen wir auch in den Voraussetzungen des Satzes 15 über die Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\int_a^b f(x)\psi^{(0)}(x)\,dx = 0$$

hinzufügen; lassen wir jedoch im vorliegenden Falle $\lambda = 0$ als Eigenwert und die Funktion $\psi^{(0)}(x)$ als zugehörige Eigenfunktion gelten, so bleibt unser früherer Satz 15 auch bei unverändertem Wortlaut gültig.

Als einfachstes Beispiel für das zuletzt behandelte Vorkommnis dienen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad \Lambda(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u.$$

Wenn wir die Randbedingungen IV ($h = 1$) für das Intervall -1 bis $+1$ wählen, nämlich

$$f(+1) = f(-1), \qquad f'(+1) = f'(-1),$$

dann wird $\psi^{(0)}(x) = 1$, und der Ausdruck der Greenschen Funktion im weiteren Sinne ist bereits oben (S. 45) angegeben worden. Wir erhalten dieselben Eigenwerte wie im ersten Beispiel (S. 52); jedoch ist jeder dieser Eigenwerte zweifach: allgemein gehören zu $\lambda^{(m)} = m^2\pi^2$ die zwei Eigenfunktionen $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$. Zu diesen kommt, den letzten Ausführungen entsprechend, $\lambda = 0$ als einfacher Eigenwert der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $\psi^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzu.

Als zweites Beispiel für das in Rede stehende besondere Vorkommnis mögen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right\}, \quad \Lambda(u) = \frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right\} + \lambda u$$

mit den Randbedingungen V für das Intervall -1 bis $+1$ dienen. Wir haben bereits oben (S. 45) für $L(u)$ die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ im erweiterten Sinne aufgestellt. Da die Legendreschen Polynome $P^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$) die Differentialgleichungen

$$L(u) + m(m + 1)u = 0$$

erfüllen und an den Randpunkten endlich bleiben, so sind sie die zu den Eigenwerten

$$\lambda^{(m)} = m(m + 1)$$

gehörigen Eigenfunktionen; die so entstehende neue Definition für die Kugelfunktion $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(x) = \lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1} G(x, \xi)\,P^{(m)}(\xi)\,d\xi, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder einfacher:

$$P^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_{-1}^{+1} G^*(x, \xi) P^{(m)}(\xi) \, d\xi, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

wo

$$\begin{aligned} G^*(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2} l\{(1-x)(1+\xi)\}, \quad (x \leqq \xi), \\ &= -\tfrac{1}{2} l\{(1+x)(1-\xi)\}, \quad (x \geqq \xi) \end{aligned}$$

ist, kann als Grundlage für die Theorie der Kugelfunktionen dienen. Unser soeben verallgemeinerter Satz 15 liefert die Entwicklung einer beliebigen zweimal stetig differentiierbaren und an den Randpunkten $+1$, -1 endlich bleibenden Funktion nach Legendreschen Polynomen.

Wir haben im Vorstehenden den engen Zusammenhang zwischen der Theorie des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

und der Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(x, \xi)$ kennen gelernt. Dieser enge Zusammenhang zeigte sich am klarsten in der Übereinstimmung der Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ mit denjenigen jener Integralgleichung.

Nun erscheint bekanntlich die Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$, wenn man nach den Regeln der Variationsrechnung das folgende (Dirichletsche) Variationsproblem löst: man soll eine den Randbedingungen I genügende Funktion u von x derart bestimmen, daß das Integral

$$D(u) = \int_a^b \left\{ p \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - q u^2 \right\} dx \tag{8}$$

zu einem Minimum wird, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b u^2 \, dx = 1 \tag{9}$$

erfüllt ist. Andererseits haben wir in Kapitel V allgemein erkannt, wie durch meine Theorie der Integralgleichungen zweiter Art das folgende (Gaußsche) Variationsproblem gelöst wird: es ist ein definiter Kern gegeben; man soll diejenige Funktion $\omega(x)$ finden, für welche das Integral

$$J(\omega) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \, \omega(x) \, \omega(\xi) \, dx \, d\xi \tag{10}$$

seinen größten Wert besitzt, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b (\omega(x))^2 \, dx = 1 \tag{11}$$

erfüllt ist.

Wir wollen den engen Zusammenhang zwischen diesen beiden Variationsproblemen kurz darlegen. Zu dem Zwecke bestimmen wir zunächst eine Konstante c derart, daß für alle Punkte x, y innerhalb J

$$c - q \geqq 0$$

ausfällt. Denken wir uns dann in (8) an Stelle von $-q$ die Funktion $c - q$ eingesetzt, so unterscheidet sich das Variationsproblem, das so modifizierte Integral bei der Nebenbedingung (9) zum Minimum zu machen, in nichts von dem ursprünglichen Variationsproblem; d. h. wir dürfen in unserem ersten Variationsproblem von vornherein $-q \geqq 0$ annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Nunmehr setzen wir zwischen irgend zwei Funktionen u und ω, mit denen wir die Integrale (8) bzw. (10) bilden, die Beziehung

$$L(u(x)) = -\omega(x) \tag{12}$$

fest. Bedenken wir, daß

$$G(x, \xi) = K(x, \xi)$$

die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ ist, so folgt nach Satz 11 aus (12)

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \omega(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

und hieraus entnehmen wir wegen (10), (12) und (13), da

$$D(u) = -\int_a^b u L(u)\, dx$$

ist, die Gleichung

$$D(u) = J(\omega).$$

Wegen $-q \geqq 0$ ist $D(u)$ nur positiver Werte fähig; mithin ist $K(x, \xi)$ ein definiter Kern und seine Eigenwerte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ sind sämtlich positiv (vgl. Abschnitt 1, Kap. V). Setzen wir nun

$$c_h = \int_a^b \omega(x)\, \psi^{(h)}(x)\, dx,$$

wo $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \psi^{(3)}(x), \ldots$ die normierten Eigenfunktionen des Kerns $K(x, \xi)$ bezeichnen, und entwickeln wir $u(x)$ in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\int_a^b K(x, \xi)\, \psi^{(m)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\lambda^{(m)}}\, \psi^{(m)}(x)$$

die Reihe

$$u(x) = \frac{c_1}{\lambda^{(1)}}\, \psi^{(1)}(x) + \frac{c_2}{\lambda^{(2)}}\, \psi^{(2)}(x) + \cdots$$

und folglich

$$\int_a^b (u(x))^2 dx = \frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2} + \frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2} + \cdots.$$

Andererseits ist wegen (10)

$$J(\omega) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots.$$

Nunmehr wird die Reihe rechter Hand, wenn wir die Nebenbedingung (9)

$$\frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2} + \frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2} + \cdots = 1$$

stellen, ihren Minimalwert für

$$c_1 = \lambda^{(1)}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \ldots$$

und, wenn wir die Nebenbedingung (11)

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots = 1$$

stellen, ihren Maximalwert für

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \ldots$$

erhalten, wobei $\lambda^{(1)}$ den kleinsten Eigenwert bedeutet. Demnach werden

$$u(x) = \psi^{(1)}(x) \text{ und } \omega(x) = \psi^{(1)}(x)$$

die gesuchten Lösungen der beiden Variationsprobleme.

Wir sehen also, daß vermöge der Transformation (12) oder (13) das Integral (8) in das Integral (10) übergeht, dagegen nicht zugleich die Nebenbedingung (9) in die Nebenbedingung (11). Wollen wir letztere Nebenbedingung erhalten, so müssen wir vielmehr in dem ersten Variationsproblem an Stelle von (9) die Nebenbedingung

$$\int_a^b (L(u))^2 dx = 1,$$

wählen, wobei u an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ verschwinden soll; in der Tat überzeugt man sich leicht, daß die daraus nach den Regeln der Variationsrechnung entspringende Differentialgleichung wiederum keine andere als $\Lambda(\omega) = 0$ wird, wo $\omega = -L(u)$ ist. Das letztgenannte Variationsproblem erscheint in diesem Sinne mit dem erstgenannten Variationsprobleme äquivalent.

Achtes Kapitel.

Sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus.

Die in Kapitel VII entwickelte Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich vollkommen auf die sich selbst adjungierten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus übertragen, da ja, wie wir in der Einleitung zu Kapitel I bemerkt haben, unsere Methoden und Resultate über die Integralgleichungen auch gültig sind, wenn in denselben an Stelle der einfachen Integrale mehrfache Integrale stehen und dementsprechend der Kern K eine symmetrische Funktion zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \quad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge s sind, deren Ableitungen — von einer endlichen Anzahl von Werten s abgesehen — ebenfalls stetig ausfallen. Das von dieser Kurve C umschlossene endliche Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet, die Kurve C heiße die Randkurve des Gebietes J. Der allgemeinste homogene lineare, sich selbst adjungierte, partielle Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischem Typus kann stets auf die Form

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + qu \\ &\equiv p\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + qu \end{aligned}$$

gebracht werden. Wir machen über die in $L(u)$ auftretenden Funktionen folgende Annahmen. Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, y, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Gebietes J, sowie an der Randkurve C stetig sind; ferner sei p irgendeine innerhalb jenes Gebietes einmal nach x und y stetig differenzierbare Funktion von x, y, die überdies innerhalb J positiv ausfällt; endlich sei q irgendeine innerhalb J stetige Funktion von x, y.

Bedeutet v wie u eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von x, y, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$(14) \qquad \int\limits_{(J)} \{vL(u) - uL(v)\}\,dJ = \int\limits_{(C)} p\left\{u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right\} ds;$$

darin ist das Integral links über das Gebiet J, das Integral rechts über die Randkurve C zu erstrecken, und $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der ins Innere gerichteten Normale der Randkurve C; dJ bedeutet das Flächenelement von J, und ds das Längenelement von C.

Es seien γ_1, γ_2 solche Funktionen der Variabeln x, y und der Parameter ξ, η, die innerhalb J und auf der Randkurve C in bezug auf x, y zweimal stetig differenzierbar und von der Art sind, daß der Ausdruck

$$\gamma(xy, \xi\eta) = -\gamma_1 l\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right) + \gamma_2$$
$$= \gamma_1 l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \gamma_2, \quad \left(\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$$

in bezug auf das Variabelnpaar x, y — wenn nicht gerade $x = \xi$, $y = \eta$ wird — der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

genügt; außerdem sei identisch für alle ξ, η

$$\gamma_1(\xi\eta, \xi\eta) = 1.$$

Ein solcher Ausdruck $\gamma(xy, \xi\eta)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ *für das Gebiet* J genannt.[1])

So besitzt $\Delta(u) = 0$ die Grundlösung $-l(\varrho)$, und für die Differentialgleichung $\Delta(u) + u = 0$ ist $-K(\varrho)$ eine Grundlösung, wenn K die bereits oben (S. 53) benutzte Besselsche Funktion zweiter Art bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (14) für u irgendeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u(xy)) = -2\pi\varphi(xy)$$

und an Stelle von v eine Grundlösung $\gamma(xy, \xi\eta)$ ein, wobei ξ, η einen festen Punkt innerhalb J darstellt, so ergibt sich die Formel

$$(15) \qquad u(\xi\eta) = \frac{1}{p(\xi\eta)} \int\limits_{(J)} \gamma(xy, \xi\eta)\, \varphi(xy)\, dJ$$
$$+ \frac{1}{2\pi p(\xi\eta)} \int\limits_{(C)} \left[p(xy) \left\{ u(xy) \frac{\partial \gamma(xy, \xi\eta)}{\partial n} - \frac{\partial u(xy)}{\partial n} \gamma(xy, \xi\eta) \right\} \right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung $L(u) = 0$ werden offenbar aus einer Grundlösung unendlich viele erhalten, wenn man ein beliebiges Integral von $L(u) = 0$ hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb J stetig ist. Für unsere weiteren Entwicklungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an der Randkurve C gewisse homogene Randbedingungen erfüllen, und zwar kommen dabei insbesondere diejenigen Randbedingungen in Betracht, die den Randbedingungen I—V* (S. 41) in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechen. Wir heben hier nur folgende fünf Arten von Randbedingungen für eine Funktion $f(xy)$ hervor:

I. $f(xy) = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C.

II. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ „ „ „ „ „ „ „

1) Dieser Begriff der Grundlösung ist zuerst von A. Sommerfeld eingeführt worden, vgl. Mathematische Enzyklopädie Bd. II, S. 515. Hinsichtlich ihrer Existenz vgl. E. Holmgren, Math. Ann. Bd. 58 S. 404.

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C.

IV. $[f(xy)]_s = [f(xy)]_{s+\frac{l}{2}}$, $\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_s = -\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s;

dabei bedeutet der Parameter s die Bogenlänge der Randkurve C von einem festen Punkte $s = 0$ an bis zu einem beliebigen Punkte derselben gerechnet, während l die Gesamtlänge der Randkurve C bezeichnet.

V. Ist die Randkurve C singuläre Linie der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von gewisser Art (Nullinie von p), so ist als Randbedingung die Forderung zulässig: es soll $f(xy)$ bei der Annäherung an die Randkurve endlich bleiben.

V*. Wird die bisherige Betrachtungsweise in der Weise verallgemeinert, daß an Stelle der xy-Ebene eine beliebige geschlossene singularitätenfreie Fläche tritt (vgl. diesen Abschnitt S. 64), so kann die Randbedingung für $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll.

Diese Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombiniert werden derart, daß auf einem Teile der Randkurve C die eine, auf einem anderen Teile eine andere Randbedingung erfüllt ist.

Eine Grundlösung $g(xy, \xi\eta)$ für das Gebiet J, die als Funktion von x, y an der Randkurve C eine homogene Randbedingung der genannten Arten erfüllt, heißt *die zu dieser Randbedingung gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $L(u) = 0$; ferner heiße der Quotient

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)},$$

die zu jener Randbedingung gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$.

Wenn für einen Differentialausdruck $L(u)$ keine Greensche Funktion im eben definierten Sinne existiert, so verfahren wir genau analog, wie in dem entsprechenden Falle in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (S. 44): ist dann nämlich $\psi^{(0)}(xy)$ eine von Null verschiedene überall stetige Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die die betreffende Randbedingung, sowie die Relation

$$\int_{(J)} (\psi^{(0)}(xy))^2 dJ = 1$$

erfüllt, so konstruieren wir eine Lösung $g(xy, \xi\eta)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi p(\xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta),$$

die an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ in derselben Weise wie eine Grundlösung logarithmisch unendlich wird, auf C die betreffende Randbedingung und überdies die Gleichung

$$\int\limits_{(J)} g(xy, \xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\,dJ = 0$$

erfüllt. Die Funktion

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta).$$

Die Funktionen $g(xy, \xi\eta)$, $G(xy, \xi\eta)$ werden als Greensche Funktionen im erweiterten Sinne bezeichnet. Man sieht leicht ein, wie die Definition der Greenschen Funktion weiter zu verallgemeinern ist, wenn auch im eben definierten Sinne eine Greensche Funktion nicht existiert.[1])

Wie oben (S. 45) gewinnen wir leicht das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes

$$G(\xi\eta, \xi^*\eta^*) = G(\xi^*\eta^*, \xi\eta)$$

und sodann unter Heranziehung der Formel (15) die folgende Tatsache:

Satz 17. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(xy) = \int\limits_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\,dJ$$

genommen wird, wo $f(xy)$ eine gegebene zweimal stetig differenzierbare, jener Randbedingung genügende Funktion ist, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(xy)$, und man erhält diese Lösung durch die Formel

$$\varphi(xy) = -\frac{1}{2\pi}L(f(xy));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(xy)$ irgendeine stetig differenzierbare Funktion ist und eine Lösung der Differentialgleichung

$$L(f(xy)) + 2\pi\varphi(xy) = 0$$

gefunden werden soll, die der gewählten Randbedingung genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel

$$f(xy) = \int\limits_{(J)} G(xy, \xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,dJ.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht wie oben (S. 47), daß die Greensche Funktion $G(xy, \xi\eta)$ einen Kern darstellt, der nach der im

1) Über den Existenzbeweis der erweiterten Greenschen Funktion vergleiche Kap. IX, und Kap XVIII.

ersten Abschnitt eingeführten Ausdrucksweise sowohl abgeschlossen als auch allgemein ist.

Nunmehr gehen wir zur Behandlung des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u$$

über und erhalten genau wie oben (S. 46—51) durch die analogen Schlüsse der Reihe nach folgende Sätze:

Satz 18. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$f(xy) = \varphi(xy) - \lambda \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\,dJ \tag{16}$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(xy, \xi\eta)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu der nämlichen Randbedingung gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u$$

bildet.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Integralgleichung zweiter Art (16) auch als *die Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für die betreffende Randbedingung.*[1])

Satz 19. *Wenn $h(xy)$ eine stetige Funktion von x, y bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_{(J)} h(xy)\psi^{(m)}(xy)\,dJ = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(xy)$ identisch 0.

Satz 20. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(xy) + c_2\psi^{(2)}(xy) + \cdots,$$

$$c_m = \int_{(J)} f(xy)\psi^{(m)}(xy)\,dJ$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(xy)$ dar.

---

1) Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ hat H. Poincaré untersucht und als „fonctions harmoniques" bezeichnet. Seit dem Erscheinen seiner grundlegenden Abhandlung „Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1894) haben sich zahlreiche Forscher mit dem Beweise für die Existenz jener fonctions harmoniques und mit dem Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach denselben erfolgreich beschäftigt: u. a. Le Roy (Annales de l'École normale supérieure 1898), W. Stekloff (Annales de la faculté de Toulouse 1900), S. Zaremba (Annales de l'École normale supérieure 1899, Journ. de Math. 1900), A. Korn (Abhandlungen zur Potentialtheorie 4. Berlin 1902). Wie es scheint, umschließen die im folgenden gewonnenen allgemeinen Sätze die wesentlichen Resultate der genannten Forscher.

Satz 21. *Jede zweimal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(xy)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.*

Ist statt des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + (q + \lambda k)u$$

vorgelegt, wo k irgendeine innerhalb des Gebietes J positive Funktion von x, y bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

und multipliziere dann den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Lambda^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{\partial\left(p^*\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p^*\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}}\,L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

Die Betrachtungen dieses Kapitels VIII lassen sich leicht auf den Fall übertragen, daß das Integrationsgebiet J auf einer beliebigen Fläche im Raume gelegen ist: an Stelle des bisherigen Differentialausdruckes für das ebene Gebiet J tritt dann eine gewisse Verallgemeinerung des Beltramischen Differentialparameters, nämlich der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{g\,\frac{\partial u}{\partial x} - f\,\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{eg - f^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{e\,\frac{\partial u}{\partial y} - f\,\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{eg - f^2}}\right)\right\} + qu;$$

darin bedeuten x, y die krummlinigen Koordinaten der Fläche und e, f, g in bekannter Weise die Koeffizienten des Quadrates des Linienelementes

$$ds^2 = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2$$

der Fläche; p bedeutet eine innerhalb J positive stetig differentiierbare Funktion und q irgendeine stetige Funktion auf der Fläche. Die Greensche Formel (14) gilt für irgendein Gebiet J auf der Fläche mit der Randkurve C unverändert in der bisherigen Gestalt.[1]

1) Vgl. G. Darboux, Theorie générale des surfaces liv. VII chap. I.

Ist insbesondere die Fläche geschlossen und singularitätenfrei, so kann die Randbedingung für eine Funktion $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll (Randbedingung V* S. 42). Auch in diesem Falle lehrt unsere Theorie die Existenz der Eigenfunktionen und die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion auf der Fläche nach jenen Eigenfunktionen der Fläche.[1])

Als Beispiel diene die Kugel K mit dem Radius 1. Wählen wir für x, y die Polarkoordinaten ϑ, φ, so erhält wegen

$$\begin{aligned} e &= 1, \\ f &= 0, \\ g &= \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

unser Differentialausdruck für $p = \frac{1}{2\pi}$, $q = 0$ die Gestalt:

$$L(u) \equiv \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Greensche Funktion $g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)$ im erweiterten Sinne hat wegen $\psi^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ der Gleichung

$$L(g) = \frac{1}{4\pi}$$

zu genügen. Bedeutet ϱ die kleinste sphärische Entfernung der Punkte ϑ, φ und ϑ^*, φ^* auf der Kugel, so ergibt sich

$$g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*) = -l\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right);$$

dieselbe erfüllt in der Tat das Symmetriegesetz.[2])

Die Eigenwerte zum Kern $G = 2\pi g$ d. h. die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u = 0$$

sind

$$\lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zwar wird allgemein $\lambda^{(n)}$ ein $2n+1$ facher Eigenwert, indem zu $\lambda^{(n)}$ als Eigenfunktionen die $2n+1$ Kugelflächenfunktionen $P^{(n)}$ vom $n$ten Grade gehören; die letzteren erfüllen mithin die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(n)} u = 0$$

1) Vgl. Kap. XVIII.

2) Diese Greensche Funktion für die Kugelfläche haben bereits E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 47 (1902) und J. Hadamard, Propagation des ondes, Paris 1903, berechnet. Bezüglich der Existenz eines Potentials auf einer geschlossenen Fläche vgl. E. Picard C. R. (Paris, 1900 und 1903.)

und die Integralgleichung

$$\lambda^{(n)} \int\limits_{(K)} P^{(n)}(\vartheta^* \varphi^*)\, G(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)\, dK = P^{(n)}(\vartheta\varphi)$$

oder

$$-n(n+1) \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} P^{(n)}(\vartheta^*\varphi^*)\, l\left(2 \sin\frac{\varrho}{2}\right) \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = P^{(n)}(\vartheta\varphi).$$

Unser Satz 21 lehrt, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel nach den Kugelflächenfunktionen entwickelbar ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Bedeutung der Eigenfunktionen als Lösungen gewisser Variationsprobleme, sowie alle hiermit in Zusammenhang stehenden Tatsachen, wie sie für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen am Schluß des Kapitels VII angedeutet sind, entsprechend auch für den gegenwärtigen Fall der partiellen Differentialgleichungen zutreffen.

Neuntes Kapitel.

Existenz der Greenschen Funktion. Auftreten eines Parameters in der Randbedingung bei partiellen Differentialgleichungen.

Auch die Untersuchungen dieses Kapitels betreffen die Integration partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln x, y; doch soll nicht wie in Kapitel VIII die Differentialgleichung den Parameter λ enthalten, sondern wir nehmen vielmehr an, daß der Parameter λ in der Randbedingung auftritt. Es wird sich zeigen, daß auf gewisse dann entstehende Fragen ebenfalls die im ersten Abschnitt entwickelte Theorie der Integralgleichungen erfolgreiche Anwendung findet.

Wenn die zu einer Randbedingung gehörige Greensche Funktion G bekannt ist, so wird stets eine gewisse zugehörige Randwertaufgabe lösbar. Setzen wir beispielsweise in der Formel (15) (S. 60)

$$\gamma(xy, \xi\eta) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta),$$

wo $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ bezeichnet, und wählen dann für u irgendeine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so entsteht die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \left[p(xy) u(xy) \frac{\partial G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das stetige Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn seine Werte auf der Randkurve C gegeben sind.

In entsprechender Weise bezeichnen wir mit $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ und setzen in Formel (15) (S. 60)

$$\gamma(xy) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta);$$

wählen wir dann für u wiederum eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so wird

$$(17) \qquad u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \left[p(xy)\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn die Werte seiner normalen Ableitung auf der Randkurve C gegeben sind.

Umgekehrt sieht man sofort wie in der Potentialtheorie ein, daß, wenn die letztgenannten Randwertaufgaben als lösbar erkannt sind, daraus mit Hilfe einer Grundlösung stets die Existenz der Greenschen Funktionen G^{I} bzw. G^{II} folgt.

Ehe wir nun der Frage nach der Existenz der Greenschen Funktionen näher treten, schicken wir einige Betrachtungen voraus, die sich auf den Zusammenhang zwischen gewissen Kernen von Integralgleichungen beziehen. Wie in Kapitel III werde, wenn $K(s, t)$ irgendein Kern ist, die Funktion

$$KK(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K(t, r)\, dr$$

als der *aus $K(s, t)$ zweifach zusammengesetzte Kern* bezeichnet. Eine Reihe von Eigenschaften lassen sich von dem Kern $K(s, t)$ aussagen, wenn die entsprechenden Eigenschaften von $KK(s, t)$ bekannt sind; hier mögen nur folgende Sätze erwähnt werden:

Satz 20. *Wenn der aus $K(s, t)$ zweifach zusammengesetzte Kern abgeschlossen oder allgemein ist, so ist stets auch der Kern $K(s, t)$ abgeschlossen bzw. allgemein.*

Satz 21. *Wenn $K(s, t)$ ein abgeschlossener Kern ist und die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s, t)$ lösbar ist, so ist es auch die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $K(s, t)$.*

In der Tat, aus

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

folgt durch Multiplikation mit $K(r, s)$ und Integration nach s die Gleichung

$$\int_a^b K(r, s)\, f(s)\, ds = \int_a^b KK(r, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion ist, so wird die linke Seite dieser Gleichung ebenfalls eine bestimmte Funktion, und aus dieser folgt die Funktion $\varphi(t)$ durch Lösung der Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s, t)$.

Satz 22. *Wenn $KK(s, t)$ ein allgemeiner Kern ist, so läßt er sich stets in eine Reihe entwickeln:*

$$KK(s, t) = \frac{\psi^{(1)}(s)\, \psi^{(1)}(t)}{\lambda^{(1)}} + \frac{\psi^{(2)}(s)\, \psi^{(2)}(t)}{\lambda^{(2)}} + \cdots,$$

wobei $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$ die zu $KK(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte bedeuten.

Zum Beweise wende man Satz 7 des ersten Abschnittes auf den Kern $K(s, t)$ an und setze in der so entstehenden Entwicklung an Stelle der Funktion $g(t)$ den Kern $K(t, r)$ ein.

Da in den Entwicklungen des Kapitels II und in Kap. VI die Symmetrie des Kernes $K(s, t)$ nirgends vorausgesetzt wurde, so existiert für eine Integralgleichung zweiter Art, auch wenn ihr Kern $K(s, t)$ unsymmetrisch ist, eine lösende Funktion, d. h. eine Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ von der Art, daß

$$K(s, \mathrm{t}) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_a^b K(s, r)\, \mathsf{K}(r, t)\, dr$$

wird, allemal dann, wenn $K(s, t)$ nur Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt. Ebenso folgt, daß eine Integralgleichung zweiter Art, deren Kern $K(xy, \xi\eta)$ eine Funktion zweier Variabelnpaare ist, gewiß eine lösende Funktion besitzt, wenn der Kern $K(xy, \xi\eta)$ nur Singularitäten von niederer als erster Ordnung besitzt.

Wenn der Kern $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ einer Integralgleichung nicht symmetrisch ist, so verstehen wir unter dem aus $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern die Funktionen

$$KK(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K(r, t)\, dr$$

bzw.

$$KK(xy, \xi\eta) = \int_{(J)} K(xy, \mathfrak{x}\mathfrak{y})\, K(\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \xi\eta)\, dJ.$$

Auch die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenfunktion* sind unmittelbar auf den unsymmetrischen Kern übertragbar. Es kann nun vorkommen, daß der zweifach zusammengesetzte Kern $KK(s, t)$ bzw. $KK(xy, \xi\eta)$ an den Stellen

$$s = t \text{ bzw. } x = \xi, \;\; y = \eta$$

nur von niederer als der $\frac{1}{2}$ten bzw. der ersten Ordnung singulär ist, während dies für den ursprünglichen Kern $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ nicht zutrifft.[1]) In diesem Falle können wir von folgenden Sätzen Gebrauch machen, die von dem Zusammenhange zwischen den Integralgleichungen zweiter Art mit dem ursprünglichen und dem zweifach zusammengesetzten Kern handeln:

Satz 23. *Wenn $\lambda = 1$ ein Eigenwert der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ ist, so gibt es unter den zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gewiß eine solche Eigenfunktion $\varphi(s)$, die entweder die Integralgleichung*

$$\varphi(s) = +\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder die Integralgleichung

$$\varphi(s) = -\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

befriedigt.

Zum Beweise setzen wir

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{18}$$

dann wird

$$\int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds = \int_a^b KK(r, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder, da $\varphi(s)$ als Eigenfunktion von $KK(s, t)$ der Gleichung

$$\varphi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{19}$$

genügt:

$$\varphi(r) = \int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds. \tag{20}$$

Tragen wir diesen Wert von $\varphi(r)$ in die rechte Seite von (18) ein, so entsteht

$$\psi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\psi(t)\,dt,$$

d. h. die Funktion $\psi(s)$ erfüllt die nämliche Integralgleichung wie $\varphi(s)$. Wir nehmen der Kürze wegen an, es gäbe nicht zwei voneinander linear unabhängige Lösungen $\varphi(s)$ der Gleichung (19); alsdann folgt notwendig

$$\psi(s) = c\,\varphi(s),$$

---

1) Diese Tatsache ist bereits von I. Fredholm bemerkt und in ähnlicher Weise wie hier zur Auflösung von Integralgleichungen benutzt worden, wenn der Kern für $s = t$ bzw. $x = \xi$, $y = \eta$ sich singulär verhält, vgl. Acta math. Bd. 27 S. 384.

wo c eine Konstante bedeutet. Die Berücksichtigung dieser Beziehung in (18) und (20) führt zu der Gleichung $c^2 = 1$, womit die in Satz 23 aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Ebenso leicht gestaltet sich der Nachweis ohne jene Annahme.

Satz 24. *Wenn die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ für den Parameterwert $\lambda = 1$, d. h. die Integralgleichung*

$$F(s) = \varphi(s) - \int_a^b KK(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{21}$$

lösbar ist und $\lambda = 1$ nicht gerade einen Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ bedeutet, so ist auch die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(s, t)$, nämlich die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

lösbar.

Zum Beweise setzen wir, wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion bedeutet,

$$F(s) = f(s) + \int_a^b f(t) K(s, t)\,dt$$

und bezeichnen mit $\varphi(s)$ die Lösung der mit diesem $F(s)$ gebildeten Integralgleichung (21). Bilden wir dann die Funktion

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{23}$$

und setzen dieselbe in (21) an Stelle von $\varphi(s)$ ein, so ist die entstehende Gleichung genau dieselbe wie die, die man aus (21) durch Multiplikation mit $K(r, s)$ und Integration nach s erhält. Daraus folgt, daß auch $\psi(s)$ eine Lösung von (21) sein muß. Da aber $\lambda = 1$ kein Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ sein sollte, so besitzt diese Integralgleichung nur eine Lösung; daher muß $\varphi(s)$ mit $\psi(s)$ übereinstimmen, d. h. wegen (23): $\varphi(s)$ ist zugleich die gesuchte Lösung der Integralgleichung (22).

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns nunmehr die Aufgabe, für ein beliebiges Gebiet J mit der Randkurve C die Greensche Funktion erster Art, d. h. diejenige Greensche Funktion $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$, die zu der Randbedingung I gehört, für einen beliebigen Differentialausdruck $L(u)$ zu konstruieren.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den Differentialausdruck

$$D(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

wo P eine beliebige innerhalb J und auf der Randkurve C stetig differenzierbare Funktion sein möge. Wir nehmen nun an, es sei die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bekannt, und bezeichnen dieselbe mit $\Gamma(xy, \xi\eta)$. Ist dann u eine innerhalb J zweimal stetig differenzierbare und auf C verschwindende Funktion, und setzen wir

$$D(u) = f(xy), \tag{24}$$

so entnehmen wir aus der Formel (15) die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta)\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - f\right\} dJ$$

und unter Anwendung der Regel für die Integration eines Produktes:

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\} u(xy)\, dJ$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

d. h. die der Randbedingung I genügende innerhalb J stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (24) genügt der Integralgleichung

$$F(\xi\eta) = u(\xi\eta) - \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, dJ, \tag{25}$$

wo zur Abkürzung

$$F(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

$$K(xy, \xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\}$$

gesetzt ist.

Wir betrachten nun den aus $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern $KK(xy, \xi\eta)$. Da der Kern $K(xy, \xi\eta)$ für $x = \xi$, $y = \eta$ von der ersten Ordnung unendlich wird, so folgt leicht, daß der Kern $KK(xy, \xi\eta)$ für $x = \xi$, $y = \eta$ nur logarithmisch unendlich wird. Nach dem oben Gesagten (S. 68) ist daher die Integralgleichung zweiter Art

$$F^*(xy) = u^*(xy) - \lambda\int_{(J)} KK(xy, \xi\eta)\, u^*(\xi\eta)\, dJ$$

für den variablen Parameter λ auflösbar.

Wäre $\lambda = 1$ ein Eigenwert für diesen Kern $KK(xy, \xi\eta)$, so müßte nach Satz 23 eine Eigenfunktion $\varphi(xy)$ existieren, die zugleich auch eine der Integralgleichungen

$$\varphi(xy) = \pm\int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, \varphi(\xi\eta)\, dJ$$

befriedigt; dann aber wäre $\varphi(\xi\eta)$ ein auf der Randkurve C verschwindendes Integral einer der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Da aber für jede auf C verschwindende Funktion u die Identität

$$\int\limits_{(J)} e^{\pm P}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dJ=-\int\limits_{(J)} e^{\pm P}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}u\,dJ$$

gilt, so würde sich $\varphi(xy)$ notwendig als Konstante und mithin gleich Null ergeben, was nicht der Fall sein sollte. Die Annahme, daß $\lambda=1$ ein Eigenwert für den Kern $KK(xy,\xi\eta)$ sei, ist somit als unzutreffend erkannt.

Nunmehr lehrt Satz 24, daß auch die Integralgleichung (25) eine Lösung besitzt; diese Lösung $u(xy)$ ist das gewünschte Integral der Differentialgleichung (24), welches auf der Randkurve C verschwindet.

Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$P_\xi=\frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial\xi},\qquad P_\eta=\frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial\eta},$$
$$P_{\xi\xi}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\xi^2},\qquad P_{\xi\eta}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta},\qquad P_{\eta\eta}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\eta^2},$$
$$r=\left|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right|,$$
$$\begin{aligned}\gamma_1=1&-\tfrac12 P_\xi(x-\xi)-\tfrac12 P_\eta(y-\eta)\\&+\tfrac1{16}\{3P_\xi^2+P_\eta^2-2P_{\xi\xi}+2P_{\eta\eta}\}(x-\xi)^2\\&+\tfrac14\{P_\xi P_\eta-2P_{\xi\eta}\}(x-\xi)(y-\eta)\\&+\tfrac1{16}\{P_\xi^2+3P_\eta^2+2P_{\xi\xi}-2P_{\eta\eta}\}(y-\eta)^2.\end{aligned}$$

Wegen

$$D\left(\gamma_1 l\frac1r\right)=D(\gamma_1)\cdot l\frac1r-\left(2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}\gamma_1\right)\frac{x-\xi}{r^2}-\left(2\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}\gamma_1\right)\frac{y-\eta}{r^2}$$

folgt durch eine leichte Rechnung, daß $D\left(\gamma_1 l\frac1r\right)$ eine auch an den Stellen $x=\xi$, $y=\eta$ stetige Funktion wird. Wir bezeichnen mit γ_2 irgendeine Funktion von x, y, die innerhalb J zweimal stetig differenzierbar ist und auf der Randkurve C dieselben Werte wie $\gamma_1 l\frac1r$ annimmt, und konstruieren alsdann nach dem Vorstehenden die auf C verschwindende Lösung der Differentialgleichung (24) für

$$f(xy)=D\left(\gamma_1 l\frac1r-\gamma_2\right);$$

ist γ_3 diese Lösung, so stellt offenbar

$$G^{\mathrm I}=\gamma_1 l\frac1r-\gamma_2-\gamma_3$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $D(u)=0$ dar.

Mit Hilfe des Satzes 18 und unter Berücksichtigung einer früheren Bemerkung (S. 64) folgt dann auch die Existenz der zur Randbedingung I gehörigen Greenschen Funktion für den beliebigen Differentialausdruck $L(u)$.

Wir wenden uns nun zu der Frage nach der Existenz der zur Randbedingung II gehörigen Greenschen Funktion und betrachten zunächst den spezielleren Differentialausdruck

$$L^*(u) \equiv \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y},$$

der aus $L(u)$ entsteht, wenn man $q = 0$ nimmt. Ist u eine der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ genügende Funktion, so gibt es offenbar eine Funktion v der nämlichen Veränderlichen x, y von der Art, daß

$$p\,\frac{\partial u}{\partial x} = \quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$p\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

wird. Die Funktion v ist hierdurch bis auf eine additive Konstante bestimmt; sie genügt der Differentialgleichung

$$M^*(v) \equiv \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0$$

und heiße die zu u konjugierte Funktion.

Wenn durch s, n irgend zwei von einem Punkte ausgehende Richtungen bezeichnet werden, die in dem Sinne wie die positiven Richtungen der x- und y-Achse zueinander senkrecht stehen, so ist stets

$$p\,\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{p}\,\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe für den Differentialausdruck $M^*(v)$ eine zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion G^{I}, so existiert notwendig für den Differentialausdruck $L^*(u)$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion G^{II}.

In der Tat läßt sich die zweite Randwertaufgabe für $L^*(u) = 0$ auf die erste Randwertaufgabe für $M^*(v) = 0$ zurückführen. Bezeichnen wir nämlich mit $f(s)$ die für $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorgeschriebenen Werte auf der Randkurve C, so muß notwendig

$$\int\limits_{(C)} p f(s)\,ds = 0$$

ausfallen, und daher stellt

$$g(s) = -\int\limits_0^s p f(s)\,ds$$

eine stetige Funktion auf der Randkurve C dar. Wir bestimmen nun das Integral v der Differentialgleichung $M^*(v) = 0$ mit den Randwerten $g(s)$; ist alsdann $-u$ die zu v konjugierte Funktion, so besitzt u offenbar die vorgeschriebenen normalen Ableitungen auf der Randkurve C.

Wir wenden jetzt die Greensche Formel (14) an, indem wir in derselben für v die eben konstruierte Greensche Funktion G^{II} und für u irgendeine stetige Lösung von $L^*(u) = 0$ nehmen. G^{II} ist im gegenwärtigen Falle der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne, da die Konstante eine Lösung von $L^*(u) = 0$ mit verschwindender normaler Ableitung liefert; wir haben demgemäß

$$\psi^{(0)}(xy) = \frac{1}{\sqrt{J}},$$

$$L^*(G^{\mathrm{II}}) = \frac{2\pi}{J},$$

$$\int\limits_{(J)} G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)\, dJ = 0,$$

worin J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet. Die Greensche Formel (14) liefert

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \left[p\frac{\partial u}{\partial n} G^{\mathrm{II}}\right]_{\substack{x = a(s)\\ y = b(s)}} ds + \frac{1}{J}\int\limits_{(J)} u\, dJ.$$

Setzen wir

$$[u(xy)]_{\substack{x = a(s)\\ y = b(s)}} = u(s),$$

$$[v(xy)]_{\substack{x = a(s)\\ y = b(s)}} = v(s),$$

$$[G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x = a(s),\ \xi = a(\sigma)\\ y = b(s),\ \eta = b(\sigma)}} = G^{\mathrm{II}}(s, \sigma),$$

so folgt

$$u(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \frac{dv(s)}{ds} G^{\mathrm{II}}(s, \sigma)\, ds + c_u, \tag{26}$$

wo c_u eine durch die Funktion u bestimmte Konstante bedeutet.

Andererseits gehen wir von der Gleichung $M^*(v) = 0$ aus und bezeichnen mit $H^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zugehörige Greensche Funktion für die Randbedingung II und mit $H^{\mathrm{II}}(s, \sigma)$ die betreffende aus ihr entsprechend hervorgehende Funktion von s, σ. Da offenbar die zu $v(xy)$ konjugierte Funktion $-u(x, y)$ wird, so erhalten wir nunmehr die Gleichung

$$v(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \frac{du(s)}{ds} H^{\mathrm{II}}(s, \sigma)\, ds + c_v, \tag{27}$$

wo c_v wiederum eine Konstante bedeutet.

Die gefundenen Gleichungen (26), (27) sind Integralgleichungen erster Art mit den symmetrischen Kernen $G^{\mathrm{II}}(s, \sigma)$, $H^{\mathrm{II}}(s, \sigma)$. Diese Kerne sind von der Gestalt

$$c\,l(|s-\sigma|)+S(s,\sigma),$$

wo c eine Konstante und $S(s, \sigma)$ eine stetige Funktion von s, σ bedeutet. Mittelst (27) folgern wir dann, daß $v(\sigma)$ gewiß einmal stetig differentiierbar ist, sobald $\frac{du(s)}{ds}$ einmal, d. h. sobald $u(s)$ zweimal stetig differentiierbar ist. Da unter dieser Voraussetzung die Formel (27) die Integralgleichung (26) auflöst, so schließen wir leicht, daß der Kern $G^{\mathrm{II}}(s, \sigma)$ der Integralgleichung (26) sowohl abgeschlossen wie allgemein ist.

Als Beispiel wählen wir den Fall $p = 1$, wo die Gleichung $L^*(u) = 0$ die bekannte Potentialgleichung wird; als Gebiet J diene der Kreis mit dem Radius 1. Die Rechnung ergibt das Statthaben der Relationen

$$u(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dv(s)}{ds}\,l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right)ds,$$

$$v(\sigma)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{du(s)}{ds}\,l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right)ds,$$

wobei $u(s)$ die Werte des Realteiles, $v(s)$ diejenigen des Imaginärteiles einer analytischen Funktion auf der Kreisperipherie bedeuten, während die Gleichungen

$$\int_{-\pi}^{+\pi}u(s)\,ds=0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}v(s)\,ds=0$$

erfüllt sind.

Setzen wir an Stelle der Veränderlichen s, σ bzw. πx, $\pi\xi$, so nehmen die gefundenen Formeln die Gestalt an

$$(28)\quad u(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dv(x)}{dx}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}v(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right)dx,$$

$$(29)\quad v(\xi)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{du(x)}{dx}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}u(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right)dx.$$

Die letztere Formel (29) geht durch Produktintegration und Differentiation nach x in die Formel

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi}=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx$$

über. Die Einsetzung dieses Wertes von $\frac{dv}{dx}$ in die erstere Formel (28) liefert

$$(30)\quad u(\xi) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\left\{\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right) dy\right\} dx;$$

diese Formel gilt für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion u, die von -1 bis $+1$ integriert Null liefert.

Wenden wir nun Satz 11 (S. 46) auf den Differentialausdruck $\frac{d^2u}{dx^2}$ an, indem wir als Greensche Funktion die zu den Randbedingungen IV gehörige, oben (S. 45) berechnete Funktion wählen, so folgt für jede zweimal stetig differenzierbare, jenen Randbedingungen genügende Funktion u die Identität

$$(31)\qquad u(x) = -\int_{-1}^{+1}\left\{-\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}\right\}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\,dx.$$

Aus den Formeln (30) und (31) entnehmen wir durch eine sehr leichte Überlegung, daß notwendig

$$-\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right) dy$$

sein muß; wenn wir also die symmetrischen Funktionen

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\pi}\, l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-x}{2}\right|\right),$$
$$KK(x,\xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}$$

als Kerne auffassen, so ist der letztere derjenige Kern, der aus dem ersteren durch zweifache Zusammensetzung entsteht. Der Kern $K(x,\xi)$ muß mithin dieselben Eigenfunktionen besitzen, wie $KK(x,\xi)$; dieselben sind nach dem Obigen (S. 55)

$$\sin m\pi x,\quad \cos m\pi x,\qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Eigenwerte von $K(x,\xi)$ sind die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten des Kerns $KK(x,\xi)$, d. h. da jener Kern definit ist, gleich den ganzen positiven Vielfachen von π. Diese Eigenwerte sind zweifach; doch ist der Eigenwert Null, zu dem die Konstante als Eigenfunktion gehört, noch als einfacher Eigenwert hinzuzurechnen.

Die Formeln (28), (29) sind wegen ihrer fruchtbaren Anwendung auf die Theorie der analytischen Funktionen von besonderer Wichtigkeit.[1])

---

1) Vgl. O. D. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, Inauguraldissertation Göttingen 1902, wo einige der in den Vorlesungen des Verfassers dargelegten Anwendungen berührt werden.

Wir haben oben die Greensche Funktion $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für den Differentialausdruck $L^*(u)$ konstruiert. Wenn aber die Gleichung $L^*(u) = 0$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion besitzt, so folgt aus Satz 18 unter Heranziehung einer früheren Bemerkung (S. 64) auch die Existenz der Greenschen Funktion $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für den allgemeinen Differentialausdruck

$$L(u) = L^*(u) + qu.$$

Wir kommen endlich auf das zu Beginn dieses Kapitels in Aussicht gestellte Problem zurück.

Es sei für das Gebiet J der xy-Ebene die sich selbst adjungierte Differentialgleichung $L(u) = 0$ vorgelegt; man soll dasjenige Integral dieser Differentialgleichung finden, welches auf der Randkurve C des Gebietes J die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u + h(s) = 0 \tag{32}$$

erfüllt, wo λ den Parameter und $h(s)$ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s auf der Randkurve C bedeutet. $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ bezeichne wiederum die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion, so daß überall auf der Randkurve C

$$\frac{\partial G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)}{\partial n} = 0$$

wird; alsdann gilt die Formel (18) und wegen (32) erhält diese die Gestalt

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} [p(xy)(\lambda u(xy) + h(s))\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}\, ds;$$

diese Formel werde mit $\sqrt{p(\xi\eta)}$ multipliziert und in ihr $\xi = a(\sigma)$, $\eta = b(\sigma)$ genommen. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$[\sqrt{p(\xi, \eta)}\, u(\xi, \eta)]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} = \varphi(\sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi} [\sqrt{p(xy)\, p(\xi, \eta)}\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} = K(s, \sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} [p(xy) \sqrt{p(\xi, \eta)}\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}}\, h(s)\, ds = f(\sigma),$$

so erhält sie die einfache Gestalt

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda \int\limits_{(C)} K(s, \sigma)\, \varphi(s)\, ds. \tag{33}$$

Da wegen des Symmetriegesetzes der Greenschen Funktion auch die Funktion $K(s, \sigma)$ in den Veränderlichen s, σ symmetrisch wird, so erkennen wir in der Gleichung (33) eine Integralgleichung zweiter Art, die genau von derjenigen Gestalt ist, wie wir sie im ersten Abschnitt behandelt haben. Der Kern $K(s, \sigma)$ dieser Integralgleichung ist in den Variabeln s, σ stetig außer für $s = \sigma$, wo $K(s, \sigma)$ wie der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus von $|s - \sigma|$ unendlich wird.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$ der Integralgleichung (33) auch als *die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

für die Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Da $K(s, \sigma)$ nach der obigen Bemerkung (S. 75) ein abgeschlossener und allgemeiner Kern ist, so folgen, wenn wir die oben (S. 74) gefundene Auflösung der Integralgleichung erster Art (26) berücksichtigen, aus den Sätzen 3—7 des Abschnittes I eine Reihe von Tatsachen, unter denen der Kürze halber nur die folgende hervorgehoben werde:

Satz 25. *Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Randkurve C ist in der Fourierschen Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

fortschreitet; die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Aus den letzten Betrachtungen kann zugleich die Existenz einer zur Randbedingung III gehörigen Greenschen Funktion G^{III} gefolgert werden. Da wir oben unter der Annahme der Greenschen Funktion G^{I} für die Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ die Existenz von G^{I} und G^{II} für den allgemeinen Differentialausdruck $L(u)$ bewiesen haben, so können wir zusammenfassend folgendes Resultat aussprechen:

Satz 26. *Für einen Differentialausdruck $L(u)$ gibt es stets die Greenschen Funktionen G^{I}, G^{II}, G^{III}, die zu den Randbedingungen bzw.* I, II, III *gehören, wobei besonderenfalls der Begriff der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne zu verstehen ist.*

Um noch kurz das zugehörige Variationsproblem zu berühren, nehmen wir an, es sei q eine innerhalb J nirgends positive Funktion; alsdann wird das Integral

$$D(u) = \int_{(J)} \left\{ p\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) - q u^2 \right\} dJ$$

gewiß niemals negative Werte erhalten. Sollen wir nun diejenige Funktion u bestimmen, die $D(u)$ zu einem Minimum macht, während für die Randwerte von u die Bedingung

$$\int\limits_{(C)} pu^2 ds = 1$$

erfüllt ist, so führt die Variationsrechnung auf die Differentialgleichung $L(u) = 0$, während am Rande die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \qquad (\lambda = \text{konst.})$$

gelten muß. (Dirichletsches Variationsproblem.)

Setzen wir, wenn $u(xy)$ irgendeine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bedeutet, zur Abkürzung

$$\omega(s) = \left[\sqrt{p(xy)}\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}},$$

so ist wegen Formel (17)

$$\begin{aligned}[\sqrt{p(\xi\eta)}\,u(\xi\eta)]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\left[p(xy)\sqrt{p(\xi\eta)}\,G^{\mathrm{II}}(xy,\xi\eta)\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} ds\\ &= -\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds.\end{aligned}$$

Andererseits wird

$$\begin{aligned}D(u) &= -\int\limits_{(J)} u\,L(u)\,dJ - \int\limits_{(C)} pu\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\\ &= \int\limits_{(C)}\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma.\end{aligned}$$

Hiernach geht das vorige Variationsproblem in folgende Aufgabe über: man soll eine Funktion $\omega(s)$ bestimmen, für welche das Integral

$$\int\limits_{(C)}\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma$$

ein Minimum wird, wenn die Nebenbedingung

$$\int\limits_{(C)}\Big\{\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds\Big\}^2 d\sigma = 1$$

erfüllt ist. (Gaußsches Variationsproblem).

Die Formel (34) lehrt, daß bei unseren Annahmen der Kern $K(s,\sigma)$ definit ist und daher die Eigenwerte sämtlich positiv ausfallen; wir bezeichnen die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des Kerns $K(s,\sigma)$ mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ bzw. $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$.

In ganz analoger Weise, wie in Kapitel VII (S. 57—58) ausgeführt wurde, erkennen wir nunmehr leicht, daß

$$\omega(s) = \lambda^{(1)}\psi^{(1)}(s)$$

das gewünschte Minimum liefert; mithin ist:

$$\left[\sqrt{p(xy)}\,u(xy)\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = \psi^{(1)}(s).$$

Eine interessante Anwendung findet unser Satz 25 zur Lösung des Problems der kleinen Schwingungen einer in einem Gefäße befindlichen, der Schwere unterworfenen Flüssigkeit.[1]) Hierbei handelt es sich um die Auffindung des Geschwindigkeitspotentiales U. Dasselbe ist eine Funktion des Ortes x, y und der Zeit t, die im Innern der Flüssigkeit für alle Zeiten t der Gleichung

$$\varDelta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

an der festen Wand für alle t der Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

und auf der Horizontalen $y = 0$ für alle t der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

genügt, während für $t = 0$ die freie Oberfläche in der Horizontalen $y = 0$ liegen und daselbst die vertikale Geschwindigkeit $\frac{\partial U}{\partial y}$ als Funktion von x etwa $= f(x)$ gegeben sein soll.

Der Ansatz

$$U = u \cos\left(\sqrt{\lambda}\, t\right)$$

liefert für die von t unabhängige Funktion u an der festen Wand die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

und an der Horizontalen $y = 0$ die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0, \quad (\lambda = \text{konst.}),$$

während im Inneren der Flüssigkeit überall $\varDelta u = 0$ sein muß. In der voranstehenden allgemeineren Entwicklung haben wir mithin $p = 1$; $q = 0$ zu nehmen und das Randintegral nicht über die ganze Randkurve C, sondern nur über die Horizontale $y = 0$ zu erstrecken. Bedeutet also $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion für das von der Gefäßwand und der Horizontalen $y = 0$ begrenzte Gebiet, so lautet der in Betracht kommende Kern

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi}\, G^{\mathrm{II}}(x0, \xi 0).$$

---

1) Vgl. insbesondere Poincaré, Journ. de Math., 1896.

Bezeichnen wir mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \ldots$ die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen dieses Kerns und entwickeln wir die gegebene Funktion $f(x)$ nach diesen Eigenfunktionen, wie folgt

$$f(x) = c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

so wird das hydrodynamische Problem durch die Formeln

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = c_1\psi^{(1)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}t) + c_2\psi^{(2)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}t) + \cdots$$

$$[U]_{y=0} = \frac{c_1\psi^{(1)}(x)}{\lambda^{(1)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}t) + \frac{c_2\psi^{(2)}(x)}{\lambda^{(2)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}t) + \cdots$$

gelöst.

Die Ausdehnung unserer Untersuchungsmethode auf mehr als zwei Veränderliche bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen auf Probleme der Funktionentheorie.

Zehntes Kapitel.

Riemanns Probleme in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Riemann hat in seiner Inauguraldissertation (Abschnitt 19) die allgemeine Aufgabe gestellt, Funktionen einer komplexen Veränderlichen innerhalb eines von einer gegebenen Randkurve begrenzten Gebietes der komplexen Ebene zu bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf jener Randkurve Relationen gelten sollen, deren Koeffizienten auf der Randkurve sich stetig ändernde gegebene Funktionen sind. Die Theorie der Integralgleichungen bietet die Mittel zur Lösung dieser Riemannschen Fragestellung für den Fall, daß die auf der Randkurve gegebenen Relationen lineare sind.[1])

Die Methode der Integralgleichungen ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten

1) Man vgl. einen Vortrag des Verfassers „Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg 1904", sowie die Dissertationen von Kellogg und Haseman, Göttingen 1902 u. 1907; vgl. auch den Auszug aus der Dissertation von Haseman: Math. Ann. Bd. 66.