universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Erster Abschnitt. Allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen.

Es sei $K(s, t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s, t; $f(s)$ sei eine gegebene Funktion von s und $\varphi(s)$ werde als die zu bestimmende Funktion von s angesehen; jede der Veränderlichen s, t möge sich in dem Intervalle a bis b bewegen: dann heiße

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine *Integralgleichung erster Art* und

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine *Integralgleichung zweiter Art*; dabei bedeutet λ einen Parameter. Die Funktion $K(s, t)$ heiße der *Kern der Integralgleichung*.

Durch die Randwertaufgabe in der Potentialtheorie wurde zuerst Gauß auf eine besondere Integralgleichung geführt; die Benennung „Integralgleichung“ hat bereits P. du Bois-Reymond[1]) angewandt. Die erste Methode zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art rührt von C. Neumann[2]) her; dieser Methode zufolge erscheint die Funktion $\varphi(s)$ direkt als eine unendliche Reihe, die nach Potenzen des Parameters λ fortschreitet und deren Koeffizienten gewisse durch mehrfache Integrale definierte Funktionen von s sind. Eine andere Formel zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art fand Fredholm[3]), indem es ihm gelang, $\varphi(s)$ als Bruch darzustellen, dessen Zähler eine beständig konvergente Potenzreihe in λ mit gewissen von s abhängigen Koeffizienten ist, während als Nenner eine beständig konvergente Potenzreihe in λ mit numerischen Koeffizienten auftritt. Den direkten Nachweis der Übereinstimmung der

1) Bemerkungen über $\Delta z = 0$. Journ. f. Math. Bd. 103 (1888).

2) Über die Methode des arithmetischen Mittels. Leipz. Abh. Bd. 13 (1887).

3) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27 (1903), und die daselbst zitierte Abhandlung über denselben Gegenstand aus dem Jahre 1899.

Formeln von C. Neumann und Fredholm erbrachte auf meine Anregung hin Kellogg[1]). In dem besonderen Falle gewisser Randwertaufgaben in der Potentialtheorie hat Poincaré[2]) als der Erste den Parameter λ eingeführt, und ihm gelang es auch zuerst nachzuweisen, daß die Lösung notwendig als Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen in λ darstellbar sein muß. Eine dritte Methode zur Lösung der Integralgleichung zweiter Art, die auch zugleich auf die Integralgleichung erster Art anwendbar ist, werde ich in Kapitel XIII auseinandersetzen. Die Auflösung besonderer Integralgleichungen gelang Volterra[3]). In gewissen Fällen läßt sich die Integralgleichung erster Art auf die zweiter Art nach einer von mir angegebenen Methode[4]) zurückführen.

Die nähere Beschäftigung mit dem Gegenstande führte mich zu der Erkenntnis, daß der systematische Aufbau einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen für die gesamte Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, ferner für die Theorie der linearen Differentialgleichungen und der analytischen Funktionen sowie für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von höchster Bedeutung ist. Ich beabsichtige in diesem Buche die Frage nach der Lösung der Integralgleichungen zu behandeln, vor allem aber den Zusammenhang und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen aufzusuchen, wobei ich meist die für meine Resultate wesentliche Voraussetzung mache, daß der Kern $K(s,t)$ der Integralgleichung eine *symmetrische* Funktion der Veränderlichen s,t ist. Insbesondere im vierten Kapitel gelange ich zu Formeln, die die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach gewissen ausgezeichneten Funktionen, die ich *Eigenfunktionen* nenne, liefern: es ist dies ein Resultat, in dem als spezielle Fälle die bekannten Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, nach Kugel-, Laméschen und Sturmschen Funktionen, sowie die Entwicklungen nach Funktionen mit mehreren Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst Poincaré (a. a. O.) bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. *Meine Untersuchung wird zeigen, daß die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen durchaus nicht die Heranziehung von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen erfordert, sondern daß*

1) Zur Theorie der Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1902.

2) Sur les équations de la physique mathématique. Rendiconti del circolo di Palermo t. 8 (1894). La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica Bd. 20 (1896—97).

3) Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. Annali di matematica s. 2 t. 25 (1897.)

4) Vgl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1902, sowie Math. Ann. Bd. 58.

die Integralgleichung es ist, die die notwendige Grundlage und den natürlichen Ausgangspunkt für eine Theorie der Reihenentwicklung bildet und daß eben jene erwähnten Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen nur Spezialfälle eines allgemeinen Integralsatzes sind — eines Satzes überdies, der als die direkte Erweiterung des bekannten algebraischen Satzes von der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form in die Summe von Quadraten anzusehen ist. *Das merkwürdigste Resultat ist, daß die Entwickelbarkeit einer Funktion nach den zu einer Integralgleichung zweiter Art zugehörigen Eigenfunktionen als abhängig erscheint von der Lösbarkeit der entsprechenden Integralgleichung erster Art.*

Zugleich erhält dabei die Frage nach der Existenz der Eigenfunktionen eine neue und vollständigere Beantwortung. In dem besonderen Fall der Randwertaufgaben der Potentialtheorie hat bekanntlich die Existenz der Eigenfunktionen zuerst H. Weber[1]) auf Grund des Dirichlet-Thomsonschen Minimalprinzipes zu beweisen gesucht, und sodann hat Poincaré (a. a. O.) den Existenzbeweis mit Benutzung der von H. A. Schwarz ausgebildeten Methoden wirklich erbracht. *Durch Anwendung meiner Theoreme folgt nicht nur die Existenz der Eigenfunktionen im allgemeinsten Falle, sondern meine Theorie liefert zugleich in einfacher Form eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz unendlich vieler Eigenfunktionen.*

Die Methode, die ich in den folgenden Kapiteln I—VI anwende, besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln in eine Quadratsumme, ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transzendenten Problemes gelange.[2]) Dieselben Theoreme über Integralgleichungen mit symmetrischem Kern werde ich in Kapitel XIV auf einem anderen Wege mittels der Methode der unendlichvielen Variabeln entwickeln.

Der leichteren Faßlichkeit und der kürzeren Darstellung wegen habe ich mich bei Darlegung der allgemeinen Theorie stets auf den Fall einer Integralgleichung mit einfachem Integrale beschränkt. Doch sind die Methoden und Resultate auch gültig, wenn in den oben angegebenen Integralgleichungen an Stelle der einfachen Integrale Doppel- oder mehrfache Integrale stehen und K sodann entsprechend eine symmetrische Funktion zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

1) Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Math. Ann. Bd. 1. (1868.)

2) Die Grundidee dieser Methode habe ich seit W.-S. 1900—1901 wiederholt im Seminar und in Vorlesungen zum Vortrag gebracht.

Erstes Kapitel.

Lösung des algebraischen Problems.

Es mögen $K(s,t)$, $f(s)$, $\varphi(s)$ die zu Anfang dieser Mitteilung angegebene Bedeutung haben; jedoch nehmen wir das Intervall der Variabeln s,t der Einfachheit halber als das Intervall 0 bis 1 an; außerdem sei $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion in s,t. Ferner verstehen wir unter n eine bestimmte positive ganze Zahl und benutzen für die folgenden Beweisführungen die abkürzenden Bezeichnungen:

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

$$Kxy = K_{11}x_1y_1 + K_{12}x_1y_2 + K_{21}x_2y_1 + \cdots + K_{nn}x_ny_n$$

$$= \sum_{p,q} K_{pq}x_py_q, \qquad (K_{pq} = K_{qp}),$$

$$\varphi_p = \varphi\left(\frac{p}{n}\right), \qquad f_p = f\left(\frac{p}{n}\right), \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$Kx_1 = K_{11}x_1 + K_{12}x_2 + \cdots + K_{1n}x_n,$$
$$Kx_2 = K_{21}x_1 + K_{22}x_2 + \cdots + K_{2n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Kx_n = K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + \cdots + K_{nn}x_n,$$
$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Es ist offenbar

$$Kxy = [Kx, y] = [Ky, x].$$

Wir legen nun das algebraische Problem zugrunde: es seien aus den n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - l(K_{11}\varphi_1 + \cdots + K_{1n}\varphi_n), \\ f_2 &= \varphi_2 - l(K_{21}\varphi_1 + \cdots + K_{2n}\varphi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - l(K_{n1}\varphi_1 + \cdots + K_{nn}\varphi_n) \end{aligned} \tag{1}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - lK\varphi_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - lK\varphi_n \end{aligned} \tag{2}$$

die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, während die Werte f_p und die Koeffizienten K_{pq} gegeben sind und l ebenfalls als ein bekannter Parameterwert anzusehen ist. Wir ziehen zugleich die Eigenschaften der Lösungen und den Zusammenhang mit dem Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form Kxx in Betracht.

Um dieses algebraische Problem zu lösen, gebrauchen wir die Determinanten

$$d(l) = \begin{vmatrix} 1 - lK_{11}, & -lK_{12}, \ldots, & -lK_{1n} \\ -lK_{21}, & 1 - lK_{22}, \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -lK_{n1}, & -lK_{n2}, \cdots, & 1 - lK_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & 1 - lK_{11}, & -lK_{12}, & \ldots, & -lK_{1n} \\ y_2, & -lK_{21}, & 1 - lK_{22}, & \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n, & -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \ldots, & 1 - lK_{nn} \end{vmatrix},$$

deren erste die Diskriminante der quadratischen Form

$$[x, x] - lKxx$$

ist. Bezeichnen wir mit $D\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right)$ diejenige Determinante, die aus $D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ entsteht, wenn man darin allgemein y_p durch

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + K_{p2}y_2 + \cdots + K_{pn}y_n$$

ersetzt, so gilt, wie leicht ersichtlich ist, identisch in x, y und l die Gleichung:

$$d(l)\,[x, y] + D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) - lD\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right) = 0. \tag{3}$$

Unser Problem bestand nun darin, aus den Gleichungen (1) oder (2) die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, d. h. eine Linearform

$$[x, \varphi] = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \cdots + x_n\varphi_n$$

zu finden, die identisch in x die Gleichung

$$[f, x] = [\varphi, x] - l[K\varphi, x]$$

erfüllt.

Diese Gleichung wird, wie aus (3) unmittelbar einleuchtet, durch die Formel:

$$[x, \varphi] = -\frac{D\left(l, \begin{matrix} x \\ f \end{matrix}\right)}{d(l)} \tag{4}$$

gelöst. Wenn also der Parameterwert l so beschaffen ist, daß $d(l) \neq 0$ ausfällt, so sind die Koeffizienten der Linearform (4) die gesuchten Werte der Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Dieses Resultat ist von der Voraussetzung der Symmetrie $K_{pl} = K_{qp}$ unabhängig.

Bekanntlich sind die Wurzeln der Gleichung

$$d(l) = 0$$

sämtlich reell; wir bezeichnen sie mit

$$l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(n)}$$

und nehmen an, daß sie voneinander verschieden sind.

Bedeuten $d_{11}(l), \ldots, d_{nn}(l)$ die Unterdeterminanten der Determinante $d(l)$ in bezug auf ihre n Diagonalelemente und ist $d'(l)$ die Ableitung von $d(l)$ nach l, so gilt identisch in l die Gleichung

$$d_{11}(l) + \cdots + d_{nn}(l) = n d(l) - l d'(l),$$

und hieraus folgt für $l = l^{(h)}$

$$d_{11}(l^{(h)}) + \cdots + d_{nn}(l^{(h)}) = - l^{(h)} d'(l^{(h)}). \tag{5}$$

Da unserer Annahme zufolge $d'(l^{(h)})$ nicht Null sein kann, so sind auch die links stehenden Unterdeterminanten gewiß nicht sämtlich Null, d. h. die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 - l K \varphi_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n - l K \varphi_n &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

besitzen für $l = l^{(h)}$ ein gewisses Lösungssystem

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(h)}, \ \ldots, \ \varphi_n = \varphi_n^{(h)},$$

das bis auf einen allen diesen n Größen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt ist. Da wegen (3) die Koeffizienten von $y_1, \ldots, y_n$ in dem Ausdruck

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

unabhängig von den Werten $x_1, \ldots x_n$ Lösungen der homogenen Gleichungen (6) sein müssen, so gilt der Ansatz

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = [\psi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y],$$

wo der erste Faktor rechts eine lineare Form in $x_1, \ldots, x_n$ bedeutet. Hieraus folgt wegen der Symmetrie des Ausdrucks linker Hand bei Vertauschung von x mit y

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = C[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y],$$

wo unter C eine von x, y unabhängige Konstante zu verstehen ist, und wenn wir den vorhin erwähnten gemeinsamen Faktor geeignet gewählt denken, so finden wir

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm [\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung schließen wir durch Vergleich der Koeffizienten der Produkte

$$x_1 y_1, \ \ldots, \ x_n y_n$$

auf beiden Seiten die speziellere Formel

$$d_{11}(l^{(h)}) + \cdots + d_{nn}(l^{(h)}) = \mp [\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}], \tag{8}$$

und wegen (5) ist somit

$$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}] = \pm l^{(h)} d'(l^{(h)}), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

und sodann nach (7)

$$\frac{D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Die Gleichung (9) zeigt an, daß in den Gleichungen (7), (8) das obere bzw. das untere Vorzeichen auf der rechten Seite zu nehmen ist, je nachdem $l^{(h)} d'(l^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt. Die Gleichungen (6) schreiben wir als Identität in x, wie folgt

$$[\varphi^{(h)}, x] = l^{(h)}[\varphi^{(h)}, Kx] \tag{11}$$

und entnehmen daraus, weil $l^{(h)}$ und $l^{(k)}$ bei ungleichen Indizes verschieden sind, die Beziehung

$$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(k)}] = 0, \qquad (h \neq k).$$

Um endlich den Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Form zu erhalten, gehen wir von dem Ausdruck

$$\frac{D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{d(l)}$$

aus. Da der Zähler eine Funktion $(n-1)$-ten Grades in l und der Nenner vom $n$ten Grade in l ist, so erhalten wir nach den Regeln der Partialbruchentwicklung unter Benutzung von (10)

$$\begin{aligned} \frac{D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{d(l)} &= \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{d'(l^{(1)})} \frac{1}{l - l^{(1)}} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{d'(l^{(n)})} \frac{1}{l - l^{(n)}} \\ &= \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} \frac{l^{(1)}}{l - l^{(1)}} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]} \frac{l^{(n)}}{l - l^{(n)}}, \end{aligned}$$

eine Formel, die identisch in x, y, l erfüllt ist. Für $l = 0$ gehen hieraus die Formeln

$$[x, y] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} \tag{12}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]} \tag{13}$$

hervor. Setzen wir hier an Stelle von y die lineare Kombination Ky, so erhalten wir mit Rücksicht auf (11) die Identität

$$Kxy = [Kx, y] = [x, Ky] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(l^{(n)})^2 d' l^{(n)})} \tag{14}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{l^{(1)}\,[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{l^{(n)}\,[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}. \tag{15}$$

Wir fügen noch die besonderen Formeln hinzu, die aus den beiden letzteren durch Gleichsetzen der x mit den y hervorgehen:

$$(16)\qquad [x,x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} = \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

$$(17)\qquad Kxx = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{(l^{(n)})^2 d'(l^{(n)})} = \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{l^{(1)}[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{l^{(n)}[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}.$$

Zweites Kapitel.

Lösung des transzendenten Problems.

Wir erinnern an die Bedeutung der Größen K_{pq}, wie sie am Anfange vom ersten Kapitel aus der Funktion $K(s,t)$ gebildet worden sind, und nehmen an, daß $K(s,t)$ eine *stetige* Funktion der Variabeln s, t in den betrachteten Intervallen 0 bis 1 sein möge. Unsere Methode erheischt die strenge Durchführung des Grenzüberganges für $n = \infty$. Der im ersten Kapitel zunächst erledigten algebraischen Aufgabe entspricht das transzendente Problem, die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

aufzulösen. Wir beschränken uns in diesem zweiten Kapitel im wesentlichen darauf, nach unserer Methode die zur Auflösung der Integralgleichung nötigen Formeln zu gewinnen, wie sie von Fredholm zuerst angegeben worden sind. Hierbei wird die Symmetrie von $K(s,t)$ noch nicht vorausgesetzt.

Entwickeln wir $d(l)$ nach Potenzen von l, wie folgt:

$$d(l) = 1 - d_1 l + d_2 l^2 - \cdots \pm d_n l^n,$$

so ist, wenn h irgendeinen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ bedeutet,

$$d_h = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_h)} \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \cdots & K_{p_1 p_h} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \cdots & K_{p_2 p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{p_h p_1} & K_{p_h p_2} & \cdots & K_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \quad \left(\begin{matrix} p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_h \\ p_1, p_2, \cdots, p_h = 1, 2, \cdots, n \end{matrix} \right).$$

Die Summe rechter Hand besteht aus $\binom{n}{h}$ Determinanten; nach einem bekannten Satze[1]) überschreitet der absolute Wert einer jeden Determinante

1) Hadamard, Bulletin des sciences mathématiques (2) XVII (1893).

gewiß nicht die Grenze $\sqrt{h^h}K^h$, wo K das Maximum der absoluten Beträge der Funktionswerte $K(s,t)$ bedeutet. Hieraus entnehmen wir

$$|d_h| \leqq \binom{n}{h}\sqrt{h^h}\,K^h \leqq \frac{\sqrt{h^h}}{h!}(nK)^h \leqq \left(\frac{n\,e\,K}{\sqrt{h}}\right)^h$$

d. h. es ist

$$\frac{|d^h|}{n^h} \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{18}$$

Andererseits finden wir leicht, wenn h festgehalten wird, in der Grenze bei unendlich wachsendem n

$$\lim_{n=\infty}\frac{d_h}{n^h} = \delta_h, \tag{19}$$

wo δ_h die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1,s_1), & K(s_1,s_2), & \cdots, & K(s_1,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_h,s_1), & K(s_h,s_2), & \cdots, & K(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\cdots ds_h.$$

Aus (18) und (19) folgt auch

$$|\delta_h| \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{20}$$

Wir führen nun die von Fredholm zuerst angegebene und wegen (20) beständig konvergente Potenzreihe

$$\delta(\lambda) = 1 - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda^3 + \cdots$$

ein und stellen dann folgenden Hilfssatz auf:

Hilfssatz 1. Der Ausdruck $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ konvergiert bei unendlich wachsendem n gegen $\delta(\lambda)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze A gelegen ist. In demselben Sinne konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, nehmen wir im Gegensatz zu demselben an, es existiere eine positive Größe ε derart, daß für unendlich viele ganzzahlige n und zugehörige Werte von λ mit absoluten Beträgen unterhalb A stets

$$\left|d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \delta(\lambda)\right| > \varepsilon$$

ausfällt. Nunmehr wählen wir die ganze Zahl m so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: es soll für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb A liegt,

$$|\delta_{m+1}\lambda^{m+1} - \delta_{m+2}\lambda^{m+2} + \cdots| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \tag{21}$$

sein; ferner sollen die Ungleichungen

$$m > (2eKA)^2 \tag{22}$$

$$\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{23}$$

erfüllt sein; dann ist gewiß im Hinblick auf (18) und (22) für jedes n auch

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right) = 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \mp \frac{d_{m+1}}{n^{m+1}}\lambda^{m+1} \pm \cdots \pm \frac{d_n}{n^n}\lambda^n$$

$$= 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \pm \frac{\vartheta}{2^m} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

oder wegen (23)

$$\left| d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Nachdem die ganze Zahl m in dieser Art bestimmt worden ist, wählen wir die ganze Zahl n so groß, daß

$$\left| \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \frac{d_2}{n^2}\lambda^2 - \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) - \left(1 - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \cdots \pm \delta_m\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{25}$$

ausfällt; wegen der Gleichung (19) ist eine solche Bestimmung von n gewiß möglich. Die Ungleichungen (21), (24), (25) zeigen nun, daß der Unterschied zwischen $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ und $\delta(\lambda)$ absolut genommen weniger als ε betragen muß; diese Folgerung widerspricht unserer Annahme, und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Um zu erkennen, wie sich für die Determinante $D\left(l, \frac{x}{y}\right)$ der Grenzübergang zum transzendenten Problem gestaltet, verstehen wir unter $x(s)$ und $y(s)$ zwei willkürliche stetige Funktionen der reellen Variabeln s im Intervall 0 bis 1 und setzen allgemein

$$x_p = x\left(\frac{p}{n}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

in jene Determinante $D\left(l, \frac{x}{y}\right)$ ein. Sodann entwickeln wir dieselbe nach Potenzen von l, wie folgt:

$$D\left(l, \frac{x}{y}\right) = D_1\left(\frac{x}{y}\right) - D_2\left(\frac{x}{y}\right)l + D_3\left(\frac{x}{y}\right)l^2 - \cdots \pm D_n\left(\frac{x}{y}\right)l^{n-1}$$

und finden leicht in der Grenze bei unendlich wachsendem n, wenn h festbleibt,

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_h\left(\frac{x}{y}\right)}{n^h} = \Delta_h\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo $\Delta_h\left(\frac{x}{y}\right)$ die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\Delta_h\binom{x}{y} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0, & x(s_1), & x(s_2,) & \cdots & x(s_h) \\ y(s_1), & K(s_1,s_1), & K(s_1,s_2), & \cdots, & K(s_1,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y(s_h), & K(s_h,s_1), & K(s_h,s_2), & \cdots, & K(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h.$$

Führen wir nun die beständig konvergente Potenzreihe ein:

$$\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right) = \Delta_1\binom{x}{y} - \Delta_2\binom{x}{y}\lambda + \Delta_3\binom{x}{y}\lambda^2 - \cdots,$$

so folgt durch einen entsprechenden Beweis wie vorhin der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 2. Der Ausdruck $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \binom{x}{y}\right)$ konvergiert bei unendlich wachsendem n gegen $\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze A gelegen ist.

Wie man sieht, ist $\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$ eine Potenzreihe in λ, deren Koeffizienten noch von den willkürlichen Funktionen $x(s)$, $y(s)$ abhängen.

Wir gehen dazu über, in der Formel (3) den Grenzübergang für $n = \infty$ zu vollziehen.

Bedenken wir, daß zufolge der eingangs eingeführten Abkürzungen

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + K_{p2}y_2 + \cdots + K_{pn}y_n$$
$$= K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) y\left(\frac{1}{n}\right) + K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) y\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) y\left(\frac{n}{n}\right)$$

ist, so erhalten wir durch das nämliche Verfahren, das zu den Hilfssätzen 1 und 2 führte, die Formel

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{n^2} D\left(\frac{\lambda}{n}, \binom{x}{Ky}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \binom{x}{\frac{1}{n}Ky}\right)$$
$$= \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right)\right\}_{\bar{y}(s) = \int_0^1 K(s,t)\, y(t)\, dt}$$
$$= \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right)\right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} \cdot y(t)\, dt.$$

Setzen wir daher in der Formel (3) $l = \frac{\lambda}{n}$ ein und dividieren dieselbe durch n, so liefert der Grenzübergang für unendlich wachsende n:

$$(26)\quad \delta(\lambda)\int_0^1 x(s)\, y(s)\, ds + \Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right) - \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right)\right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} y(t)\, dt = 0.$$

Diese Formel ist eine Identität in λ und gilt, wenn $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen ihres Argumentes sind.

Setzen wir in dieser Formel (26)

$$x(r) = K(s, r) \quad \text{und} \quad y(r) = K(r, t)$$

ein und benutzen die Abkürzung

$$\Delta(\lambda; s, t) = \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \right\}_{\substack{x(r) = K(s, r) \\ y(r) = K(r, t)}} - \delta(\lambda) K(s, t), \tag{27}$$

so geht (26) über in

$$\delta(\lambda) K(s, t) + \Delta(\lambda; s, t) - \lambda \int_0^1 \Delta(\lambda; s, r) K(r, t)\, dr = 0. \tag{28}$$

Setzt man endlich

$$\mathsf{K}(s, t) = -\frac{\Delta(\lambda; s, t)}{\delta(\lambda)},$$

so erhält man

$$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s, r) K(r, t)\, dr. \tag{29}$$

Ebenso erhält man, von der zu (3) analogen Identität

$$d(l)[x, y] + \left[D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right] - l \left[D\left(l, \begin{matrix} \bar{x} \\ y \end{matrix}\right)\right]_{\bar{x}_l = \sum_p K_{pl} x_p} = 0,$$

der D gleichfalls genügt, ausgehend, die Gleichung

$$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_0^1 K(s, r) \mathsf{K}(r, t)\, dr. \tag{29'}$$

Im vorstehenden sind $\Delta(\lambda; s, t)$ und $\mathsf{K}(s, t)$ Funktionen der reellen Veränderlichen s, t, die noch den Parameter λ enthalten; die Formeln (28), (29) und (29') gelten identisch in s, t und λ.

Die Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ heiße die *lösende Funktion für den Kern* $K(s, t)$; mittels derselben läßt sich nämlich die zugrunde gelegte Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

auflösen, wie folgt:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s, t)\, f(t)\, dt.$$

Man erkennt dies sofort durch Einführung der rechten Seite der letzten Formel in die voranstehende Integralgleichung; zugleich erkennen wir, da auch umgekehrt die zweite Integralgleichung durch die erste aufgelöst wird, die Eindeutigkeit der Auflösung der Integralgleichung zweiter Art für solche λ, die nicht Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sind.

Für $\Delta(\lambda; s, t)$ erhalten wir aus den obigen Angaben die Reihenentwicklung

$$\Delta(\lambda; s, t) = -K(s, t) + \Delta_1(s, t)\lambda - \Delta_2(s, t)\lambda^2 + - \cdots,$$

wo

$$\Delta_h(s,t) = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,s_1), & \ldots, & K(s,s_h) \\ K(s_1,t), & K(s_1,s_1), & \ldots, & K(s_1,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_h,t), & K(s_h,s_1), & \ldots, & K(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h$$

bedeutet. Aus dieser Formel folgt leicht die Identität in λ:

$$\delta'(\lambda) = \int_0^1 \Delta(\lambda; s, s)\, ds. \tag{30}$$

Die so erhaltenen Formeln sind nichts anderes als die bereits mehrmals erwähnten Formeln von Fredholm.

Drittes Kapitel.

Das transzendente Problem, welches der orthogonalen Transformation der quadratischen Form in eine Quadratsumme entspricht.

Unsere wichtigste Aufgabe besteht darin, diejenigen algebraischen Untersuchungen im ersten Kapitel, welche die orthogonale Transformation der quadratischen Form Kxx betreffen, durch Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ auf das transzendente Gebiet zu übertragen. Von hier ab machen wir die wesentliche Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion in s und t ist.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst folgende Sätze über die Nullstellen von $\delta(\lambda)$.

Satz 1. *Die Funktion $\delta(\lambda)$ besitzt keine komplexen Nullstellen.*

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil das Vorhandensein einer solchen Nullstelle an, schlagen dann um dieselbe als Mittelpunkt in der komplexen λ-Ebene einen Kreis, auf dessen Peripherie und in dessen Inneres keine weitere Nullstelle von $\delta(\lambda)$ fällt und auf dessen Peripherie überdies $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ist. Da $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ nach Hilfssatz 1 für unendlich wachsendes n gleichmäßig gegen $\delta(\lambda)$ und $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$ konvergiert, so müßte für genügend große Werte von n auf der ganzen Peripherie jenes Kreises der Quotient $\dfrac{\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}$ sich von den Werten des Quotienten $\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)}$ um beliebig wenig unterscheiden, und ebenso würde dann auch der Unterschied der über die Kreisperipherie erstreckten Integrale

$$\int \frac{\frac{1}{n} d' \frac{\lambda}{n}}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)} d\lambda \quad \text{und} \quad \int \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} d\lambda$$

beliebig nahe an Null liegen; dies aber wäre unmöglich; denn das erste Integral hat den Wert Null, da die Nullstellen von $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ sämtlich reell sind, das letzte Integral dagegen wird derjenigen ganzen Zahl gleich, die die Vielfachheit der Nullstelle von $\delta(\lambda)$ im Kreismittelpunkt angibt.

In ähnlicher Weise erkennen wir auf Grund der in Hilfssatz 1 angegebenen gleichmäßigen Konvergenz auch folgende Tatsache:

Satz 2. *Wir denken uns für jede der Gleichungen* $d(l) = 0$ *ihre* n *Wurzeln dem absoluten Betrage nach geordnet*

$$l^{(1)}, \ldots, l^{(n)}$$

derart, daß, wenn entgegengesetzt gleiche Wurzeln vorhanden sind, die positive vorangeht und überdies beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln jede so oft gesetzt werden soll, als ihre Vielfachheit beträgt. Ebenso ordne man die Nullstellen von $\delta(\lambda)$, *soweit solche da sind: alsdann ist*

$$\lim_{n=\infty} n l^{(1)} = \lambda^{(1)}, \quad \lim_{n=\infty} n l^{(2)} = \lambda^{(2)}, \quad \lim_{n=\infty} n l^{(3)} = \lambda^{(3)}, \ldots.$$

Man darf jedoch aus Satz 2 keineswegs auf die Existenz von Nullstellen von $\delta(\lambda)$ schließen, da sehr wohl der Fall eintreten könnte, daß bereits $n l^{(1)}$ für unendlich wachsendes n absolut über alle Grenzen zunimmt.

Wir führen hier noch folgende Bezeichnungen ein: die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ mögen die *zum Kern* $K(s, t)$ *gehörigen Eigenwerte* heißen.

Unter $K(s, t)$ wurde bisher irgendeine symmetrische Funktion der reellen Veränderlichen s, t verstanden; wir machen nun in diesem dritten Kapitel durchweg die Annahme, daß die zu $K(s, t)$ gehörige Funktion $\delta(\lambda)$ keine mehrfache Nullstelle besitzen möge, so daß für eine jede Wurzel der Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ gewiß $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ausfällt.

Wir haben ferner zu beachten, daß die gegen Schluß des ersten Kapitels entwickelte Transformationstheorie der quadratischen aus $K(s, t)$ gebildeten Form

$$Kxx = \sum_{p,q} K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p x_q \qquad (p, q = 1, 2 \ldots, n)$$

zur Voraussetzung hatte, daß die Determinante $d(l)$ keine mehrfache Nullstelle besitzt. Sollte nun für irgendwelche Werte von n die zu $K(s, t)$ gehörige Determinante $d(l)$ eine mehrfache Nullstelle aufweisen, so verfahre man in folgender Weise: man denke sich für jeden solchen Wert von n an Stelle von $K(s, t)$ eine modifizierte Funktion $\overline{K}(s, t)$ gesetzt,

so daß die Nullstellen der entsprechend gebildeten Determinante $\bar{d}(l)$ für $\bar{K}(s,t)$ sämtlich einfach ausfallen; doch sollen die Werte der modifizierten Funktion $\bar{K}(s,t)$ sich von denen des ursprünglichen Kerns $K(s,t)$ nur so wenig unterscheiden, daß für alle Werte der Variabeln s, t, für alle Indizes $(h = 1, 2, \ldots, n)$ und für alle Paare von stetigen Funktionen $x(s)$, $y(s)$ die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} |\, K(s,t) - \bar{K}(s,t)\,| &< \frac{1}{n}, \\ |\, d_h - \bar{d}_h\,| &< 1, \\ |\, l^{(h)} - \bar{l}^{(h)}\,| &< \frac{1}{n^2}, \\ \left| D_h\binom{x}{y} - \bar{D}_h\binom{x}{y} \right| &< M(x)\cdot M(y) \end{aligned}\right\} (h = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind; dabei bedeuten $\bar{d}_h$, $\bar{D}_h\binom{x}{y}$ die Koeffizienten der entsprechend für $\bar{K}(s,t)$ gebildeten Determinanten $\bar{d}(l)$, $\bar{D}\left(l, \binom{x}{y}\right)$, ferner $\bar{l}^{(h)}$ die entsprechenden Nullstellen von $\bar{d}(l)$ und $M(x)$, $M(y)$ sollen die Maxima der absoluten Werte der Funktionen $x(s)$ bzw. $y(s)$ sein. Offenbar nähern sich dann die Ausdrücke

$$\bar{K}(s,t), \qquad \bar{d}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \frac{1}{n}\bar{D}\left(\frac{\lambda}{n}, \binom{x}{y}\right)$$

für unendlich wachsendes n gleichmäßig den Grenzen bzw.

$$K(s,t), \qquad \delta(\lambda), \qquad \Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right),$$

d. h. den nämlichen Grenzen, wie die mittels des nicht modifizierten Kernes gebildeten Ausdrücke. Wir sind dadurch in den Stand gesetzt, auch diejenigen Formeln der im ersten Kapitel entwickelten Theorie der quadratischen Form Kxx anzuwenden, zu deren Gültigkeit das Nichtvorhandensein mehrfacher Nullstellen von $d(l)$ eine notwendige Voraussetzung war. Obwohl wir in den fraglichen Fällen mit den modifizierten Ausdrücken operieren müssen, wollen wir doch fortan bei unserer Darstellung der größeren Übersicht halber die ursprünglichen Ausdrücke ohne die Querstriche beibehalten.

Es bezeichne $\lambda^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $\delta(\lambda)$ unter Beachtung der S. 14 festgesetzten Reihenfolge; aus (26) folgt

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \binom{x}{y}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda^{(h)}, \binom{x}{\overline{y}}\right)\right\}_{\overline{y}(r) = K(r,t)} y(t)\,dt, \tag{31}$$

und wegen der Symmetrie des Ausdruckes $\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$ in bezug auf $x(s)$, $y(s)$ ist daher auch:

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \binom{x}{y}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda^{(h)}, \binom{\overline{x}}{y}\right)\right\}_{\overline{x}(r) = K(r,s)} x(s)\,ds$$

und, wenn wir hierin $y(r) = K(r, t)$ einsetzen:

$$\left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} \bar{x} \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{\substack{\bar{x}(r)=K(r,s) \\ y(r)=K(r,t)}} x(s)\, ds$$

oder im Hinblick auf (27)

$$\left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s, t)\, x(s)\, ds. \tag{32}$$

Aus (31) und (32) erhalten wir

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt. \tag{33}$$

Zugleich ergiebt sich, wenn wir in (32) $x(r) = K(r, s)$ einführen, im Hinblick auf (27)

$$\Delta(\lambda^{(h)}; s, t) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; r, t)\, K(r, s)\, dr. \tag{34}$$

Nunmehr bezeichne $l^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $d(l)$ unter Beachtung der oben festgesetzten Reihenfolge. Wegen Formel (7) ist allgemein

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right),$$

und hieraus folgt in der Grenze für unendlich wachsendes n

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right),$$

wenn hierin x^*, y^* ebenso wie x, y stetige Funktionen ihres Argumentes vorstellen, und folglich im Hinblick auf (27)

$$\Delta(\lambda^{(h)}; s, t)\, \Delta(\lambda^{(h)}; s^*, t^*) = \Delta(\lambda^{(h)}; s, s^*)\, \Delta(\lambda^{(h)}; t, t^*). \tag{35}$$

Wegen (30) ist

$$\int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s, s)\, ds = \delta'(\lambda^{(h)}), \tag{36}$$

und da unserer Annahme zufolge die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sämtlich einfach sind, so fällt $\delta'(\lambda^{(h)})$ von Null verschieden aus, und folglich ist auch gewiß $\Delta(\lambda^{(h)}; s, s)$ nicht identisch für alle Werte von s Null; es sei s^* ein solcher spezieller Wert, daß $\Delta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)$ von Null verschieden ausfällt. Alsdann setzen wir

$$\varphi^{(h)}(s) = \sqrt{\frac{\lambda^{(h)}}{\Delta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)}}\, \Delta(\lambda^{(h)}; s, s^*); \tag{37}$$

dadurch ist $\varphi^{(h)}(s)$ als eine stetige Funktion der Variabeln s definiert: sie heiße die *zu dem Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ gehörige Eigenfunktion.* Wir gewinnen aus (35), (37), wenn wir noch t^* durch s^* ersetzen, die Gleichung

$$\lambda^{(h)} \Delta(\lambda^{(h)}; s, t) = \pm\, \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(h)}(t). \tag{38}$$

Mit Hilfe von (36) folgt mithin

$$\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds = \pm\, \lambda^{(h)} \delta'(\lambda^{(h)}),$$

und daraus erkennen wir, daß in den beiden letzten Gleichungen das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt.

Unter Hinzuziehung von (33) leiten wir noch die Formeln ab:

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds$$

und

$$\frac{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \frac{\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds}.$$

Endlich ergibt die Formel (34) in Verbindung mit (38) nach Weglassung des Faktors $\varphi^{(h)}(t)$

$$\varphi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s, t)\, \varphi^{(h)}(t)\, dt,$$

und hieraus leiten wir, wenn $\varphi^{(k)}(s)$ die zu einem anderen Eigenwerte $\lambda^{(k)}$ gehörige Eigenfunktion bezeichnet, sofort die Gleichung ab:

$$\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(k)}(s)\, ds = 0, \quad (h \neq k).$$

Oftmals ist es im Interesse einer kürzeren Schreibweise vorzuziehen, an Stelle der Eigenfunktionen $\varphi^{(h)}(s)$ die Funktionen

$$\psi^{(h)}(s) = \frac{\varphi^{(h)}(s)}{\sqrt{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds}}$$

einzuführen; dieselben mögen *normierte Eigenfunktionen* oder, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, *Eigenfunktionen* schlechtweg heißen: sie genügen den Gleichungen

$$\frac{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds, \tag{39}$$

$$\int_0^1 (\psi^{(h)}(s))^2\, ds = 1,$$

$$\int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds = 0, \qquad (h \neq k)$$

$$\psi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s, t)\, \psi^{(h)}(t)\, dt. \tag{40}$$

Nunmehr haben wir die Vorbereitungen beendet, um diejenige Fragestellung zu erledigen, welche aus dem algebraischen Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form beim Grenzübergange für unendlich wachsendes n entsteht.

Wir haben am Schluß des ersten Kapitels die Formeln erhalten:

$$[x, x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(2)} d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})},$$

$$\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x]^2}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die letzte Formel zeigt, daß jedes Glied der Summe rechter Hand im Ausdruck für $[x, x]$ positiv ausfällt; mithin gilt, wenn m irgendeine ganze Zahl unterhalb n bedeutet, die Ungleichung:

$$\frac{D\left(l^{(m+1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})} + \frac{D\left(l^{(m+2)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} \leqq [x, x]. \tag{41}$$

Da wegen

$$|\,[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]\,| \leqq \tfrac{1}{2}([\varphi^{(h)}, x]^2 + [\varphi^{(h)}, y]^2)$$

notwendig

$$\left|\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})}\right| \leqq \tfrac{1}{2}\left(\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} + \frac{D\left(l^{(h)}, \frac{y}{y}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})}\right)$$

ist, so folgt, indem wir (41) anwenden

$$\left|\frac{D\left(l^{(m+1)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})}\right| + \left|\frac{D\left(l^{(m+2)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})}\right| + \cdots + \left|\frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}\right| \leqq \tfrac{1}{2}([x, x] + [y, y]),$$

und mithin ist um so mehr die Summe der $n - m$ letzten Glieder auf der rechten Seite der Formel (14) absolut nicht größer als

$$\frac{1}{2\,|\,l^{(m+1)}\,|}([x, x] + [y, y]);$$

demnach ist mit Rücksicht auf jene Formel (14) auch

$$\left|Kxy - \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} - \frac{D\left(l^{(2)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(2)})^2 d'(l^{(2)})} - \cdots - \frac{D\left(l^{(m)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(m)})^2 d'(l^{(m)})}\right| \leqq \frac{1}{2\,|\,l^{(m+1)}\,|}([x, x] + [y, y]). \tag{42}$$

In dieser Formel wollen wir, wie bereits früher geschehen ist,

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt denken und sodann nach Division durch n^2, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausführen. Berücksichtigen wir die Grenzgleichungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} Kxy = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p y_q = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt,$$

$$\lim_{n=\infty} n l^{(h)} = \lambda^{(h)},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{[x,x]}{n} = \int_0^1 (x(s))^2 ds, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{[y,y]}{n} = \int_0^1 (y(s))^2 ds$$

und beachten wir, daß den Hilfssätzen 1 und 2 gemäß die Ausdrücke $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right)$ und $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gleichmäßig für alle unterhalb einer festen Grenze liegenden λ gegen $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ bzw. $\delta'(\lambda)$ konvergieren, so geht die Ungleichung (42) in die folgende über:

$$(43) \quad \left| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt - \frac{\Delta\left(\lambda^{(1)}, \frac{x}{y}\right)}{(\lambda^{(1)})^2 \delta'(\lambda^{(1)})} - \frac{\Delta\left(\lambda^{(2)}, \frac{x}{y}\right)}{(\lambda^{(2)})^2 \delta'(\lambda^{(2)})} - \cdots \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta\left(\lambda^{(m)}, \frac{x}{y}\right)}{(\lambda^{(m)})^2 \delta'(\lambda^{(m)})} \right| \leqq \frac{1}{2\, \lambda^{(m+1)}} \left(\int_0^1 (x(s))^2 ds + \int_0^1 (y(s))^2 ds \right).$$

Nunmehr benutzen wir die Tatsache, daß die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$, falls es ihrer unendlich viele gibt, mit unendlich wachsendem m absolut genommen selbst über jede Grenze wachsen, und erkennen dann mit Hilfe der Formel (39), indem wir noch statt der Integrationsgrenzen 0,1 die allgemeineren Grenzen a, b einführen, folgendes grundlegende Theorem:

Theorem. Es sei der Kern $K(s,t)$ einer Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s, t; ferner seien $\lambda^{(h)}$ die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte und $\psi^{(h)}(s)$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen von s: alsdann gilt die Entwicklung

$$(44) \quad \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, y(s)\, ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, y(s)\, ds + \cdots,$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergiert, für welche die Integrale

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \qquad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben.

Dies ist dasjenige Theorem, das für $x(s) = y(s)$ dem im ersten Kapitel genannten algebraischen Satze über die Transformation einer quadratischen Form in die Quadratsumme von linearen Formen entspricht.

Einige unmittelbare Folgerungen dieses Theorems sind folgende:

Die nämlichen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(h)}(s)$ können nicht noch zu einem anderen von $K(s,t)$ verschiedenen Kern gehören; die $\lambda^{(h)}$ und $\psi^{(h)}(s)$ bestimmen vielmehr in ihrer Gesamtheit den Kern $K(s,t)$ vollständig.

Setzt man in die Formel des Theorems an Stelle von $y(t)$ das Integral $\int_a^b K(r,t)\, y(r)\, dr$ ein, so entsteht mit Rücksicht auf (40) die folgende Formel:

$$\int_a^b \int_a^b KK(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \frac{1}{(\lambda^{(1)})^2} \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, y(s)\, ds + \frac{1}{(\lambda^{(2)})^2} \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, y(s)\, ds + \cdots,$$

wobei zur Abkürzung

$$KK(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K(t,r)\, dr$$

gesetzt ist; diese Funktion $KK(s,t)$ möge der *aus $K(s,t)$ zweifach zusammengesetzte Kern* heißen. Aus Formel (44) erkennen wir, daß der aus $K(s,t)$ zweifach zusammengesetzte Kern dieselben Eigenfunktionen besitzt, wie $K(s,t)$, während die Eigenwerte die Quadrate der zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte sind.

Es möge hier noch eine Verallgemeinerung der Formel (29) Platz finden. Bringen wir nämlich die Abhängigkeit der lösenden Funktion $\mathsf{K}(s,t)$ vom Parameter λ zum Ausdruck, indem wir für dieselbe die Bezeichnung $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ anwenden, und setzen wir zur vorübergehenden Abkürzung

$$F(s,t) = \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \mathsf{K}(\mu; s, t) + (\mu - \lambda) \int_a^b \mathsf{K}(\lambda; s, r)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr,$$

so erhalten wir mittelst wiederholter Anwendung von (29′) die Identität

$$F(s,t) - \lambda \int_a^b K(r,s)\, F(r,t)\, dr = 0$$

und diese zeigt zu Folge einer Bemerkung am Schluß von II, daß $F(s,t)$ jedenfalls für jeden solchen Wert von λ verschwindet, der von den Eigen-

werten $\lambda^{(h)}$ verschieden ausfällt. Daher ist $F(s, t)$ notwendig für alle Argumente λ, μ, s, t identisch Null, d. h. es gilt die allgemeine Formel

$$(45) \qquad \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \mathsf{K}(\mu; s, t) = (\lambda - \mu) \int_a^b \mathsf{K}(\lambda; s, r)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr.$$

Diese Formel können wir auch in der Gestalt schreiben:

$$(46) \qquad \mathsf{K}(\mu; s, t) = \mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t) - \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\lambda + \mu; s, r)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr;$$

hieraus folgt, daß, wenn wir $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ als Kern für eine Integralgleichung zweiter Art nehmen, die zugehörige lösende Funktion notwendig $\mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t)$ ist. Zugleich finden wir

$$\int_a^b \psi^{(h)}(t)\, \mathsf{K}(\lambda; s, t)\, dt = \frac{\psi^{(h)}(s)}{\lambda^{(h)} - \lambda}$$

und erkennen hieraus, daß zum Kern $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ dieselben Eigenfunktionen wie zum Kern $K(s, t)$ gehören, während die zugehörigen Eigenwerte die Größen $\lambda^{(h)} - \mu$ sind.

Viertes Kapitel.

Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Eigenfunktionen.

Die erste wichtige Anwendung des im dritten Kapitel bewiesenen Theorems geschehe zur Beantwortung der Frage nach der Existenz der Eigenwerte $\lambda^{(h)}$. Diese Frage ist von besonderem Interesse, weil die entsprechende speziellere Aufgabe in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, nämlich der Nachweis der Existenz gewisser ausgezeichneter Werte für die in der Differentialgleichung oder in der Randbedingung auftretenden Parameter bisher wesentliche Schwierigkeiten verursacht hat. Durch Heranziehung unseres Theorems wird die weit allgemeinere Frage nach der Existenz der Eigenwerte, die zu einer Integralgleichung zweiter Art gehören, auf einfache und vollständige Weise beantwortet. Nehmen wir nämlich an, es gäbe keine oder nur eine endliche Anzahl, etwa m Eigenwerte, so ist die in dem Theorem auftretende Reihe (44) eine endliche mit m Gliedern und, da die Formel (44) des Theorems für alle stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ gelten soll, so folgt aus derselben mit Notwendigkeit

$$K(s, t) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\, \psi^{(1)}(s)\, \psi^{(1)}(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda^{(m)}}\, \psi^{(m)}(s)\, \psi^{(m)}(t),$$

d. h. $K(s,t)$ vermag, wenn man eine der beiden Variablen, etwa t, als Parameter auffaßt und diesem irgendwelche konstante Werte erteilt, nur m linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln s darzustellen. Umgekehrt, wenn $K(s,t)$ diese Besonderheit aufweist, so verschwinden, wie man sieht, alle Koeffizienten der Potenzreihe $\delta(\lambda)$, die mit einer höheren als der m-ten Potenz von λ multipliziert sind, d. h. $\delta(\lambda)$ wird eine ganze rationale Funktion in λ, und es gibt dann gewiß nur m Eigenwerte. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 3. *Die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte sind stets in unendlicher Anzahl vorhanden — es sei denn, daß $K(s,t)$ als eine endliche Summe von Produkten darstellbar ist, deren einer Faktor nur von s, deren anderer nur von t abhängt; tritt dieser Fall ein, so ist die Zahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Summanden in jener Summe, und $\delta(\lambda)$ ist eine ganze rationale Funktion von einem Grade gleich dieser Anzahl.*[1])

Wir wenden uns nunmehr zu der Frage der Entwicklung jener willkürlichen Funktion in eine unendliche Reihe, die nach Eigenfunktionen fortschreitet. Führen wir in die Formel (44) unseres Theorems

$$y(t) = K(r,t)$$

ein und setzen

$$f(r) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, K(r,t)\, x(s)\, ds\, dt,$$

bedenken wir sodann, daß mit Rücksicht auf (40)

$$\int_a^b f(r)\, \psi^{(m)}(r)\, dr = \frac{1}{(\lambda^{(m)})^2} \int_a^b x(s)\, \psi^{(m)}(s)\, ds$$

wird, so geht die Formel (44) unseres Theorems über in

$$f(r) = \int_a^b f(s)\, \psi^{(1)}(s)\, ds \cdot \psi^{(1)}(r) + \int_a^b f(s)\, \psi^{(2)}(s)\, ds \cdot \psi^{(2)}(r) + \cdots,$$

d. h. es gilt der Satz:

Satz 4. *Wenn eine Funktion $f(s)$ sich in der Gestalt*

$$f(s) = \int_a^b \int_a^b K(r,t)\, K(s,t)\, h(r)\, dr\, dt$$

darstellen läßt, wo $h(r)$ eine stetige Funktion von r ist, so läßt sie sich auf

1) Der von mir hier zuerst aufgestellte und bewiesene Satz von der Existenz eines Eigenwertes für jeden nicht identisch verschwindenden Kern bildet einen integrierenden Bestandteil meiner Theorie und ist, als ich meine Untersuchungen über Integralgleichungen begann, eines meiner frühesten Ergebnisse gewesen; in neueren Arbeiten findet sich — offenbar versehentlich — eine gegenteilige Behauptung ausgesprochen.

die Fouriersche Weise in eine nach Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ fortschreitende Reihe entwickeln, wie folgt

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots;$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.[1])

Die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über $f(s)$ ist gleichbedeutend mit der Forderung, es soll eine stetige Funktion $h(s)$ geben, so daß die Integraldarstellung

$$f(s) = \int_a^b KK(s,t)\,h(t)\,dt$$

gilt, oder auch mit der Forderung, es soll zwei stetige Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ geben, so daß

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt,$$

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

wird.

Wenn $K(s,t)$ eine solche symmetrische Funktion von s, t ist, daß die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,g(s)\,ds = 0$$

sich niemals durch eine stetige von Null verschiedene Funktion $g(s)$ identisch in t erfüllen läßt, so heiße $K(s,t)$ *ein abgeschlossener Kern.* Es ist leicht, aus Satz 3 zu erkennen, daß zu einem abgeschlossenen Kern stets unendlich viele Eigenwerte gehören. Ferner können wir für einen abgeschlossenen Kern folgende Behauptungen aufstellen:

Satz 5. *Es sei $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern und $\psi^{(m)}(s)$ die zugehörigen Eigenfunktionen: wenn dann $h(s)$ eine stetige Funktion ist, so daß für alle m die Gleichung*

$$\int_a^b h(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(s)$ identisch Null.

---

1) Das soll heißen: die Reihe der absolut genommenen Glieder konvergiert gleichmäßig.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt,$$

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt.$$

Nach Satz 4 gestattet $f(s)$ die Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$, und zwar erhält man für die Koeffizienten dieser Entwicklung

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = \frac{1}{\lambda^{(m)}}\int_a^b g(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = \frac{1}{(\lambda^{(m)})^2}\int_a^b h(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = 0,$$

folglich ist $f(s)$ identisch Null. Da $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern sein sollte, so folgt hieraus zunächst $g(s) = 0$ und sodann auch $h(s) = 0$.

Satz 6. *Es sei $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern und $f(s)$ irgendeine stetige Funktion: wenn sich alsdann herausstellt, daß die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(s)$ dar.

In der Tat erweist sich die Differenz von $f(s)$ und der durch jene Reihe dargestellten Funktion von s unter Benutzung des Satzes 5 als Null.

Für die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $f(s)$ nach Eigenfunktionen haben wir in den Sätzen 4 und 6 gewisse Kriterien aufgestellt. Wir können die Bedingungen des Satzes 4 wesentlich vereinfachen; es gilt nämlich der Satz:

Satz 7.[1]) *Jede unter Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ durch das Integral*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt$$

darstellbare Funktion ist in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe auf Fouriersche Weise entwickelbar, wie folgt

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

1) Vgl. die auf E. Schmidt bezügliche Anmerkung in Kapitel XIV sowie den dort von mir gegebenen Beweis des Satzes 7 mittels der Methode der unendlichvielen Variabeln.

Den Beweis führen wir hier nur unter einer gewissen Voraussetzung über den Kern $K(s, t)$. Wir wollen nämlich eine symmetrische stetige Funktion $K(s, t)$ dann einen *allgemeinen Kern* nennen, wenn es möglich ist, zu jeder stetigen Funktion $g(s)$ und zu jedem beliebig kleinen positiven ε stets eine stetige Funktion $h(s)$ zu ermitteln, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^b (x(s))^2 ds < \varepsilon$$

gilt, d. h. der Kern $K(s, t)$ heißt *allgemein*, wenn das Integral

$$\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

bei geeigneter Wahl der stetigen Funktion $h(s)$ jede stetige Funktion $g(s)$ in dem eben bezeichneten Sinne angenähert darzustellen fähig ist. Nunmehr bezeichnen wir mit ε irgendeine beliebig kleine positive Größe; sodann bedeute M das Maximum der Funktion

$$\int_a^b (K(s, t))^2\, dt,$$

wenn die Variabele s sich im Intervall a bis b bewegt. Da $K(s, t)$ ein allgemeiner Kern und $g(s)$ eine stetige Funktion sein soll, so läßt sich eine stetige Funktion $h(s)$ finden, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds < \left(\frac{2\varepsilon}{3(1+M)}\right) \tag{47}$$

erfüllt ist. Wir setzen

$$g^*(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt,$$

$$f^*(s) = \int_a^b K(s, t)\, g^*(t)\, dt.$$

Nach Satz 4 gestattet die Funktion $f^*(s)$ die Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen

$$f^*(s) = c_1^* \psi^{(1)}(s) + c_2^* \psi^{(2)}(s) + c_3^* \psi^{(3)}(s) + \cdots,$$

und wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz dieser Reihe ist es gewiß möglich, eine ganze Zahl m zu finden, so daß für alle s

$$|f^*(s) - c_1^*\psi^{(1)}(s) - c_2^*\psi^{(2)}(s) - \cdots - c_m^*\psi^{(m)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{48}$$

ausfällt und auch die Ungleichungen noch gelten, die entstehen, wenn man m hierin durch eine größere Zahl ersetzt.

Nun ist

$$\left|\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt\right| \leqq \left|\sqrt{\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \cdot \int_a^b (x(t))^2\,dt}\right|$$

und mit Rücksicht auf (47) mithin

$$\leqq |\sqrt{M}|\,\frac{2\varepsilon}{3(1+M)} \leqq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Wegen

$$f(s) = f^*(s) + \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt \tag{49}$$

haben wir folglich die Ungleichung

$$|f(s) - f^*(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{50}$$

Andererseits ist wegen (49)

$$c_j - c_j^* = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(s)\,x(t)\,dt = \frac{1}{\lambda^{(j)}}\int_a^b \psi^{(j)}(t)\,x(t)\,dt$$

und folglich

$$(c_j - c_j^*)\,\psi^{(j)}(s) = \int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt. \tag{51}$$

Nehmen wir

$$A = \frac{\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds}{\sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds}}, \quad B = \sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt},$$

so folgt wegen

$$|AB| \leqq \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

aus (51) die Ungleichung

$$|(c_j - c_j^*)\,\psi^{(j)}(s)| \leqq$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\left(\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds\right)^2}{\sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}} + \sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}\left(\int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt\right)^2\right\}. \tag{52}$$

Wir wenden uns nunmehr zu der Formel (16) zurück. Da jedes Glied der Summe auf der rechten Seite dieser Formel (16) $\geqq 0$ ausfällt, so gilt für $m \leqq n$ die Ungleichung

$$\frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(1)}\, d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(2)}\, d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(m)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(m)}\, d'(l^{(m)})} \leqq [x, x].$$

Denken wir uns in dieser Formel wieder, wie früher

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt und sodann nach Division durch n, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausgeführt, so entsteht die Ungleichung

$$\left\{\int_0^1 \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 + \left\{\int_0^1 \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 + \cdots + \left\{\int_0^1 \psi^{(m)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 \leqq \int_0^1 (x(s))^2\, ds. \tag{53}$$

Mit Benutzung dieser Ungleichung, in der wir wieder die Integrationsgrenzen a bis b eingeführt annehmen, folgt, wenn wir (52) für $j = 1, 2, \ldots, m$ bilden und summieren:

$$\sum_{j=1,\ldots,m} |\,(c_j - c_j^*)\, \psi^{(j)}(s)\,| \leqq \tfrac{1}{2} \sqrt{\int_a^b (x(s))^2\, ds}\quad (1 + M)$$

oder im Hinblick auf (47)

$$\leqq \tfrac{1}{2}\, \frac{2\varepsilon}{3\,(1 + M)}\, (1 + M) = \frac{\varepsilon}{3},$$

d. h. es ist auch

$$|\, c_1 \psi^{(1)}(s) + \cdots + c_m \psi^{(m)}(s) - c_1^* \psi^{(1)}(s) - \cdots - c_m^* \psi^{(m)}(s)\,| \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{54}$$

Aus (48), (50), (54) folgt für alle s

$$|\, f(s) - c_1 \psi^{(1)}(s) - c_2 \psi^{(2)}(s) - \cdots - c_m \psi^{(m)}(s)\,| < \varepsilon,$$

und man sieht zugleich, daß diese Ungleichung gültig bleibt, wenn man auf der linken Seite statt m eine größere Zahl wählt; damit ist der Beweis für unseren Satz unter den gemachten Voraussetzungen erbracht.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes 7 läßt sich auch zeigen, daß die unendliche Reihe

$$\left(\int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds\right)^2 + \left(\int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds\right)^2 + \cdots$$

konvergiert und den Wert

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds$$

besitzt; dabei ist wiederum $K(s, t)$ als allgemeiner Kern vorausgesetzt, und $x(s)$ bedeutet eine beliebige stetige Funktion.

Fünftes Kapitel.

Das Variationsproblem, das der algebraischen Frage nach den Minima und Maxima einer quadratischen Form entspricht.

Die im dritten und vierten Kapitel entwickelte Theorie ist für die Variationsrechnung von besonderer Bedeutung. Ich möchte jedoch hier nur dasjenige transzendente Problem behandeln, welches der algebraischen Frage nach den relativen Maxima und Minima einer quadratischen Form bei Konstanz einer zweiten anderen Form entspricht: es ist dies das Problem, diejenigen Funktionen $x(s)$ zu finden, für welche das Doppelintegral

$$J(x) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt$$

minimale oder maximale Werte besitzt, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b (x(s))^2\,ds = 1 \tag{55}$$

erfüllt ist.

Wenn der Kern $K(s,t)$ die Eigenschaft hat, daß das Integral $J(x)$ nur positive Werte besitzt, was auch $x(s)$ für eine stetige Funktion sei, und Null nur für $x(s) = 0$ wird, so heiße der *Kern $K(s,t)$ definit*. Wir machen im folgenden die Annahme, *daß $K(s,t)$ ein definiter Kern sei.*

Wenn für eine gewisse stetige Funktion $x(s)$ identisch in allen s

$$\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt = 0$$

wird, so folgt offenbar $J(x) = 0$ und hieraus auch $x(s) = 0$, d. h. *ein definiter Kern ist stets auch ein abgeschlossener Kern;* es gibt für ihn also gewiß unendlich viele Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die Eigenwerte eines definiten Kerns sind stets positiv. Denn fiele im Gegenteil etwa $\lambda^{(h)}$ negativ aus, so würde sich aus

$$J(x) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\left\{\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\left\{\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots \tag{56}$$

für $x(s) = \psi^{(h)}(s)$ der Wert des Doppelintegrals $J(x)$ negativ ergeben.

Betreffs der Minima und Maxima von $J(x)$ gelten folgende Sätze:

Satz 8. *Es gibt keine stetige Funktion $x(s)$, welche das Doppelintegral $J(x)$ zu einem Minimum macht, während die Nebenbedingung* (55) *erfüllt ist.*

In der Tat, die Eigenfunktionen $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$, ... erfüllen sämtlich die Nebenbedingung (55); wegen

$$J(\psi^{(1)}) = \frac{1}{\lambda^{(1)}},\ J(\psi^{(2)}) = \frac{1}{\lambda^{(2)}},\ \ldots$$

könnte daher der gewünschte Minimalwert nur gleich Null sein; diesen Wert nimmt $J(x)$ aber nur für $x(s) = 0$ an.

Satz 9. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige der Nebenbedingung* (55) *genügende Funktion sein soll, ist* $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$; *denselben nimmt das Doppelintegral für* $x(s) = \psi^{(1)}(s)$ *an.*

Sei nämlich im Gegenteil $x(s)$ eine Funktion, die der Nebenbedingung (55) genügt und für welche

$$J(x) > \frac{1}{\lambda^{(1)}}$$

ausfiele, so müßte sich eine ganze Zahl m so wählen lassen, daß auch die Summe $S(x)$ der ersten m Glieder rechter Hand in (56) größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ wird. Nunmehr setzen wir

$$x(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots + c_m\psi^{(m)}(s) + y(s),$$

wo zur Abkürzung

$$c_h = \int_a^b \psi^{(h)}(s)\,x(s)\,ds \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt ist und demnach

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\,y(s)\,ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

ausfällt; wir finden dann leicht

$$\int_a^b (x(s))^2\,ds = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 + \int_a^b (y(s))^2\,ds, \tag{57}$$

$$S(x) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}}. \tag{58}$$

Aus (57) folgt mit Rücksicht auf (55)

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 \leqq 1;$$

um so mehr ist also

$$\frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}} \leqq \frac{1}{\lambda^{(1)}},$$

und diese Gleichung steht mit (58) in Widerspruch, da $S(x)$ größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ sein sollte; die ursprünglich gemachte Annahme trifft mithin nicht zu.

In analoger Weise erkennen wir die Richtigkeit des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 10. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige Funktion sein soll, die den Nebenbedingungen*

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds = 1,$$

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m-1)$$

genügt, ist $\frac{1}{\lambda^{(m)}}$; denselben nimmt das Doppelintegral für $x(s) = \psi^{(m)}(s)$ an.

Durch ähnliche Schlüsse erlangen wir auch die Lösung weiterer Maximalprobleme. Beispielsweise gelingt ohne wesentliche Schwierigkeit die Auffindung der Funktion $x(s)$, die das Integral $J(x)$ zu einem Maximum macht, wenn außer der Nebenbedingung (55) noch die folgende Nebenbedingung

$$\int_a^b f(s)\, x(s)\, ds = 0 \tag{59}$$

erfüllt sein soll, wobei $f(s)$ irgendeine gegebene Funktion bedeutet.

Wenn der Kern $K(s, t)$ die Eigenschaft besitzt, stets positive Werte anzunehmen, sobald $x(s)$ eine dieser Nebenbedingung (59) genügende stetige Funktion ist, so heiße er kurz *relativ definit.*

Unter den Eigenwerten eines relativ definiten Kernes ist höchstens einer negativ. Denn wären etwa $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ negativ, so bestimme man die Konstanten c_1, c_2 derart, daß die Funktion

$$x(s) = c_1 \psi^{(1)}(s) + c_2 \psi^{(2)}(s)$$

der Nebenbedingung (59) genügt, und überdies $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ausfällt: alsdann fällt nach (56) gewiß $J(x)$ negativ aus.

Sechstes Kapitel.

Ergänzung und Erweiterung der Theorie.

Wir haben bisher im ersten bis fünften Kapitel stets vorausgesetzt, daß $K(s, t)$ eine *stetige* Funktion der Veränderlichen s, t sei; es ist unsere nächste Aufgabe, festzustellen, inwieweit sich diese Annahme beseitigen läßt.

Wenn es eine endliche Anzahl von analytischen Linien L

$$s = F(t) \text{ oder } t = G(s)$$

in der st-Ebene gibt, so daß $K(s, t)$ in den Punkten dieser Linien unstetig oder unendlich wird, während für einen gewissen positiven, unterhalb $\frac{1}{2}$ liegenden Exponenten α das Produkt

$$(s - F(t))^\alpha K(s, t) \text{ bzw. } (t - G(s))^\alpha K(s, t)$$

daselbst stetig bleibt, so sagen wir, daß $K(s,t)$ *Singularitäten von niederer als der* $\frac{1}{2}$*ten Ordnung besitzt.* Dabei setzen wir voraus, daß $K(s,t)$ außerhalb der Linien L durchweg stetig sei. Nunmehr stellen wir die Behauptung auf:

Die sämtlichen im dritten bis fünften Kapitel bewiesenen Resultate sind gültig, auch wenn der Kern $K(s,t)$ der zugrunde gelegten Integralgleichung Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$*ten Ordnung besitzt. Zugleich dürfen auch die in unserer Theorie auftretenden Funktionen $x(s)$, $y(s)$ solche Funktionen sein, die an einer endlichen Anzahl von Stellen von niederer als der* $\frac{1}{2}$*ten Ordnung unendlich werden, wenn sie sonst stetige Funktionen von s sind.*

Die Methode, mittelst der wir die Gültigkeit dieser Behauptung erkennen, besteht darin, daß wir die Linien L durch Gebietsstreifen der st-Ebene von beliebig geringer Breite ε ausschließen und alsdann eine Funktion $K_\varepsilon(s,t)$ konstruieren, die innerhalb jener Gebietsstreifen Null ist, während sie außerhalb derselben mit $K(s,t)$ übereinstimmt. Die Funktion $K_\varepsilon(s,t)$ ist überall stetig mit Ausnahme der Grenzlinien jener Gebietsstreifen, in denen sie, wie man sieht, sprungweise Wertänderungen erfährt. Für einen solchen Kern wie $K_\varepsilon(s,t)$, dessen Werte überall unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und nur in gewissen Linien unstetig werden, sind unsere früheren Beweise unverändert gültig. Um ihre Gültigkeit für den Kern $K(s,t)$ zu erkennen, bedarf es der Ausführung des Grenzüberganges für $\varepsilon = 0$. Wir wollen im folgenden auseinandersetzen, wie dies zu geschehen hat.

Zu dem Zwecke wenden wir uns zunächst zu den Potenzreihen $\delta(\lambda)$ S. 9 und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ S. 11. Die Koeffizienten δ_h bzw. $\Delta_h \binom{x}{y}$ derselben lassen sich für den Kern $K(s,t)$ gewiß dann nicht bilden, wenn $K(s,s)$ als Funktion von s keine Bedeutung hat, d. h. sobald die Linie $s=t$ oder ein Teil derselben zu den singulären Linien des Kerns gehört. Diesem Übelstande helfen wir dadurch ab, daß wir an Stelle der früher angewandten Formeln für δ_h S. 9 bzw. $\Delta_h \binom{x}{y}$ S. 11 die folgenden eingesetzt denken

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0 & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_h) \\ K(s_2,s_1) & 0 & \cdots & K(s_2,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_h,s_1) & K(s_h,s_2) & \cdots & 0 \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h,$$

$$\Delta_h \binom{x}{y} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0 & x(s_1) & x(s_2) & \cdots & x(s_h) \\ y(s_1) & 0 & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_h) \\ y(s_2) & K(s_2,s_1) & 0 & \cdots & K(s_2,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y(s_h) & K(s_h,s_1) & K(s_h,s_2) & \cdots & 0 \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h.$$

Wie man sieht, unterscheiden sich die neuen Ausdrücke für δ_h bzw. $\Delta_h\binom{x}{y}$ von den früheren nur dadurch, daß in der Determinante die Elemente der Diagonalreihe überall 0 sind. Die mit den neuen Koeffizienten gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ bzw. $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ stimmen mit den früheren bis auf einen unwesentlichen Exponentialfaktor überein, der für $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ derselbe ist und daher bei der Bildung des Quotienten $\dfrac{\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\delta(\lambda)}$ wegfällt.[1])

Hilfssatz 3. Die neuen Ausdrücke δ_h und $\Delta_h\binom{x}{y}$ haben für unsern Kern $K(s, t)$ stets einen Sinn und die mit ihnen gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ in λ sind beständig konvergent.

Wir wollen der Einfachheit halber den Beweis hierfür nur in dem Falle erbringen, daß $s = t$ die einzige singuläre Linie von $K(s, t)$ ist. In dem h-fachen Integrale für δ_h sollen die Integrationsveränderlichen $s_1, \ldots, s_h$ alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen. Wir betrachten zunächst den $h!$-ten Teil T dieses h-dimensionalen Integrationsgebietes, der durch die Ungleichungen

$$s_1 > s_2 > \cdots > s_h$$

charakterisiert ist. Wir denken uns dann in der h-reihigen Determinante, die im Ausdruck für δ_h auftritt, die Elemente

der ersten Horizontalreihe mit $\quad |(s_1 - s_2)^{\alpha}|$

„ zweiten „ „ $\quad \{|(s_1 - s_2)^{-\alpha}| + |(s_2 - s_3)^{-\alpha}|\}^{-1}$

„ dritten „ „ $\quad \{|(s_2 - s_3)^{-\alpha}| + |(s_3 - s_4)^{-\alpha}|\}^{-1}$

. . . . . .

„ h-ten „ „ $\quad |(s_{h-1} - s_h)^{\alpha}|$

multipliziert; dadurch entsteht eine Determinante, deren Elemente, wie man leicht sieht, gewiß sämtlich für alle Werte der Variabeln absolut genommen unterhalb einer endlichen positiven Größe K liegen. Der Wert der letzteren Determinante ist gewiß $\leqq \sqrt{h^h}\, K^h$, und folglich ergibt sich für das über T erstreckte h-fache Integral als obere Grenze der Ausdruck

$$\sqrt{h^h} K^h \int \cdots \int |(s_1 - s_2)^{-\alpha}| \{|(s_1 - s_2)^{-\alpha}| + |(s_2 - s_3)^{-\alpha}|\} \{|(s_2 - s_3)^{-\alpha}| + |(s_3 - s_4)^{-\alpha}|\} \cdots |(s_{h-1} - s_h)^{-\alpha}|\, ds_1 ds_2 \cdots ds_h, \tag{60}$$

$$1 > s_1 > s_2 > \cdots > s_h > 0.$$

Wenn wir in dem h-fachen Integral hier die neuen Veränderlichen

$$s_1 - s_2 = \sigma_1,\ s_2 - s_3 = \sigma_2,\ \ldots,\ s_{h-1} - s_h = \sigma_{h-1},\ s_h = \sigma_h$$

1) Vgl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, § 5. Göttinger Nachr. 1902.

einführen und die Produkte unter den Integralzeichen ausmultiplizieren, so erkennen wir, daß jenes Integral sich aus 2^{h-2} h-fachen Integralen von folgender Gestalt zusammensetzt:

$$\int\cdots\int \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdots\sigma_h^{\alpha_h}\, d\sigma_1\, d\sigma_2\cdots d\sigma_h, \tag{61}$$

$$\left(\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ \ldots,\ \sigma_h>0,\quad \sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_h<1\right)$$

wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ die Werte $0, -\alpha$ oder -2α haben, ihre Summe $\alpha_2+\alpha_2+\cdots+\alpha_h$ jedoch stets gleich $-h\alpha$ ausfällt. Die Berechnung des Integrals (61) liefert für dasselbe als obere Grenze einen Ausdruck

$$\frac{A^h}{\Gamma(1+h-\alpha h)} < \frac{B^h}{h^{h(1-\alpha)}},$$

wo A, B gewisse von h unabhängige positive Größen bedeuten, und hieraus folgt für (60) eine obere Grenze

$$\frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}}, \tag{62}$$

wo C wiederum eine von h unabhängige positive Größe darstellt. Der Ausdruck (62) ist zugleich eine obere Grenze für den über T erstreckten Teil des h-fachen Integrales, das in δ_h auftritt. Da aber alle übrigen $h!-1$ Teile jenes h-fachen Integrales, wie sich bei Vertauschung der Integrationsveränderlichen zeigt, den gleichen Wert besitzen, so folgt, daß das vollständige h-fache Integral, das in δ_h auftritt, den mit $h!$ multiplizierten Ausdruck (62) zur oberen Grenze hat, d. h. es ist

$$|\delta_h| \leqq \frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}}. \tag{63}$$

Wegen $\alpha<\frac{1}{2}$ folgt hieraus die Richtigkeit des Hilfssatzes 3 in betreff der Potenzreihe $\delta(\lambda)$.[1])

Die nämliche Beweisführung gelingt für die Potenzreihe $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$.

Wir kehren nun zu dem Kern $K_\varepsilon(s,t)$ zurück; erinnern wir uns, wie $K_\varepsilon(s,t)$ aus $K(s,t)$ durch Ausschalten der singulären Stellen entstand, so erhellt, daß $K_\varepsilon(s,t)$ als abhängig von der Streifenbreite ε zu betrachten ist. Da für ein bestimmtes ε $K_\varepsilon(s,t)$ absolut genommen stets unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so ist unsere frühere Theorie für $K_\varepsilon(s,t)$ unverändert gültig. Wir bezeichnen die hier zu $K_\varepsilon(s,t)$ gehörigen Potenzreihen in λ mit $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\Delta_\varepsilon\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$. Da offenbar die Ungleichung (63)

1) Die Darstellung dieses Beweises in den früher genannten Dissertationen von Kellogg und Andrae ist unrichtig.

und die entsprechende für $\Delta_h\binom{x}{y}$ um so mehr für die Koeffizienten der Potenzreihen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\Delta_\varepsilon\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$ gültig sind, so erkennen wir durch das nämliche Schlußverfahren, wie wir es zum Beweise des Hilfssatzes 1 (Kap. II) angewandt haben, die Richtigkeit der folgenden Tatsache:

Hilfssatz 4. Die Funktionen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\Delta_\varepsilon\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$ konvergieren für $\varepsilon = 0$ gegen $\delta(\lambda)$ bzw. $\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze A gelegen ist.

Es ist nicht schwer, nach diesen Vorbereitungen die Gültigkeit unseres grundlegenden Theorems S. 19 auf den Fall auszudehnen, daß der Kern $K(s, t)$ Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$-ten Ordnung aufweist.

Für den Kern $K_\varepsilon(s, t)$ ist unser Theorem bereits als gültig erkannt, vorausgesetzt, daß die Nullstellen der zugehörigen Funktion $\delta_\varepsilon(\lambda)$ sämtlich einfach sind. Sollte diese Voraussetzung für einen Kern $K_\varepsilon(s, t)$ nicht zutreffen, so denke man sich — ähnlich wie zu Beginn des dritten Kapitels ausgeführt worden ist — den betreffenden Kern $K_\varepsilon(s, t)$ ein wenig modifiziert, so daß jener Voraussetzung genügt wird und doch die modifizierten Ausdrücke für $\varepsilon = 0$ nach denselben Grenzen $K(s, t)$ bzw. $\delta(\lambda)$ $\Delta\left(\lambda, \binom{x}{y}\right)$ gleichmäßig konvergieren.

Es sei jetzt A irgendeine positive Größe; aus Hilfssatz 4 kann dann geschlossen werden, daß diejenigen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ von $\delta_\varepsilon(\lambda)$, deren absolute Beträge auch für $\varepsilon = 0$ unterhalb A bleiben, in der Grenze für $\varepsilon = 0$ in die Nullstellen $\lambda^{(h)}$ von $\delta(\lambda)$, die absolut genommen unterhalb A liegen, übergehen, und daß die zu jenen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ zugehörigen Werte von $\Delta_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{(h)}, \binom{x}{y}\right)$ bei diesem Grenzübergang $\varepsilon = 0$ in die bezüglichen Werte von $\Delta\left(\lambda^{(h)}, \binom{x}{y}\right)$ übergehen.

Wir bezeichnen nun die zum Kern $K_\varepsilon(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen mit $\psi_\varepsilon^{(1)}(s)$, $\psi_\varepsilon^{(2)}(s)$, ... Da wegen (53) S. 27 für jedes noch so große m die Ungleichung

$$\left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots + \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(m)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2\,ds$$

gilt, so ist auch gewiß:

$$(64)\qquad \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq A)} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2 ds.$$

Nunmehr setzen wir in der Formel (44) unseres Theorems an Stelle von $y(s)$ die Funktion $x(s)$ ein und schreiben die entstehende Formel dann in der Gestalt

$$(65)\qquad \int_a^b \int_a^b K_\varepsilon(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < A)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 + \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq A)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2;$$

dabei soll die erstere Summe rechter Hand über alle Eigenfunktionen $\psi_\varepsilon^{(h)}(s)$ erstreckt werden, deren zugehörige Eigenwerte $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ absolut genommen unterhalb A bleiben, während die zweite Summe rechter Hand ebenso wie die Summe linker Hand in (64) alle übrigen Glieder enthält. Wegen (64) folgt aus (65) die Gleichung:

$$\int_a^b \int_a^b K_\varepsilon(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < A)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \pm \frac{\vartheta}{A} \int_a^b (x(s))^2 ds. \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

und durch Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ entsteht hieraus:

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda^{(h)} < A)} \frac{1}{\lambda^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \pm \frac{\vartheta}{A} \int_a^b (x(s))^2 ds. \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Wenn wir nun A über jede Grenze zunehmen lassen, so ergibt sich die Formel (44) unseres Theorems für den Kern $K(s,t)$, im Falle $x(s) = y(s)$ genommen wird. Die letzte Einschränkung läßt sich sofort beseitigen.

Wir erkennen ohne Schwierigkeit auch alle früheren Folgerungen unseres Theorems für den Kern $K(s,t)$ als gültig, insbesondere die Sätze 4 und 7 über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen, die zu $K(s,t)$ gehören.

Sollte der vorgelegte Kern $K(s,t)$ singuläre Linien von höherer als der $\frac{1}{2}$ten und niederer als erster Ordnung besitzen, so bedürfen unsere Sätze gewisser Modifikationen; man erkennt diese leicht, wenn man die zweifach bzw. mehrfach aus $K(s,t)$ zusammengesetzten Kerne (vgl. S. 20) bildet; bedenkt man, daß unter diesen Kernen stets solche Kerne vorhanden sein müssen, für die unsere oben dargelegte Theorie gültig ist, so ergeben sich die gewünschten Folgerungen für den Kern $K(s,t)$.

Wir haben bisher durchweg — auch in den Entwicklungen dieses Kapitels VI — die Voraussetzung gemacht, daß für den zugrunde

gelegten Kern $K(s, t)$ die Potenzreihe $\delta(\lambda)$ nur einfache Nullstellen besitzt. Es sind nunmehr die Modifikationen zu ermitteln, die unsere Theorie erfährt, wenn wir diese beschränkende Annahme fallen lassen.

Zu dem Zwecke sei $K(s, t)$ ein solcher Kern, zu dem $\lambda^{(h)}$ als n_h-facher Eigenwert gehört, d. h. $\lambda^{(h)}$ sei genau eine n_h-fache Nullstelle von $\delta(\lambda)$. Sodann bietet es keine erhebliche prinzipielle Schwierigkeit, einen Kern $K_\mu(s, t)$ von folgenden Eigenschaften zu finden: $K_\mu(s, t)$ sei eine solche Potenzreihe von μ, deren Koeffizienten stetige symmetrische Funktionen von s, t sind, die für genügend kleine Werte von μ konvergiert und für $\mu = 0$ in $K(s, t)$ übergeht. Es sei $\delta_\mu(\lambda)$ die fragliche zum Kern $K_\mu(s, t)$ gehörige Potenzreihe, so daß $\delta_\mu(\lambda)$ für $\mu = 0$ in die zu $K(s, t)$ gehörige Potenzreihe $\delta(\lambda)$ übergeht; $\delta_\mu(\lambda)$ wird, wie man aus dem früheren Beweise leicht erkennt, eine Potenzreihe in λ, die für alle λ und genügend kleine μ konvergiert; diese Konvergenz ist außerdem für alle absolut unterhalb einer endlichen Grenze A liegenden λ bei genügend kleinem μ gewiß eine gleichmäßige, so daß $\delta_\mu(\lambda)$ auch als Potenzreihe in λ und μ darstellbar ist. Endlich gestatte — so sei der Parameter μ gewählt — die Gleichung

$$\delta_\mu(\lambda) = 0$$

in der Umgebung von $\lambda = \lambda^{(h)}$ die folgenden n_h Auflösungen:

$$\begin{aligned} &\lambda_\mu^{(h)} = \mathfrak{P}(\mu), \\ &\lambda_\mu^{(h+1)} = \mathfrak{P}_1(\mu), \\ &\quad\cdots\cdots \\ &\lambda_\mu^{(h+n_h-1)} = \mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu); \end{aligned} \tag{66}$$

hierin sollen $\mathfrak{P}(\mu)$, $\mathfrak{P}_1(\mu)$, $\ldots$ $\mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu)$ Potenzreihen in μ bedeuten, und unter diesen seien keine zwei in μ einander identisch gleich. Die letztere Festsetzung bringt die für die nachfolgenden Entwicklungen wesentliche Eigenschaft der Funktion $K_\mu(s, t)$ zum Ausdruck, die darin besteht, daß für alle genügend kleinen, von Null verschiedenen Werte des Parameters μ die Funktion $K_\mu(s, t)$ einen Kern darstellt, der lauter einfache Eigenwerte besitzt. Wir bilden nunmehr für $K_\mu(s, t)$ nach Art von (27) die Potenzreihe $\Delta_\mu(\lambda; s, t)$, die für $\mu = 0$ in die zu $K(s, t)$ gehörige Potenzreihe $\Delta(\lambda; s, t)$ übergeht. $\Delta_\mu(\lambda; s, t)$ ist gewiß für alle λ und genügend kleine μ ebenso wie $\delta_\mu(\lambda)$ gleichmäßig konvergent und auch als Potenzreihe von λ und μ darstellbar. Endlich konstruieren wir für $K_\mu(s, t)$ die zu

$$\lambda_\mu^{(h)},\ \lambda_\mu^{(h+1)},\ \ldots,\ \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$$

gehörigen normierten Eigenfunktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s),\ \psi_\mu^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s),$$

indem wir in $\delta_\mu(\lambda)$ und $\Delta_\mu(\lambda; s, t)$ an Stelle von λ der Reihe nach aus (66) die Werte für $\lambda_\mu^{(h)}, \lambda_\mu^{(h+1)}, \ldots, \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$ als Potenzreihen in μ einsetzen; wir erhalten zunächst

$$\psi_\mu^{(h)}(s)\psi_\mu^{(h)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h)})} = \mu^{\pm e}\{\Psi^{(h)}(s, t) + \Psi_1^{(h)}(s, t)\,\mu + \cdots\},$$

$$\psi_\mu^{(h+1)}(s)\psi_\mu^{(h+1)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h+1)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+1)})} = \mu^{\pm e_1}\{\Psi^{(h+1)}(s, t) + \Psi_1^{(h+1)}(s, t)\,\mu + \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s)\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)})} = \mu^{\pm e_{n_h-1}}\{\Psi^{(h+n_h-1)}(s, t) + \Psi_1^{(h+n_h-1)}(s, t)\,\mu + \cdots\};$$

darin bedeuten $e, e_1, \ldots e_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten, die $\geqq 0$ sind; ferner bedeuten die Ausdrücke $\Psi(s, t)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, t. Es fällt nicht schwer, hieraus für die gesuchten Eigenfunktionen Formeln von folgender Art abzuleiten:

$$\begin{aligned}
&\psi_\mu^{(h)}(s) = \mu^{\pm f}\{\psi^{(h)}(s) + \psi_1^{(h)}(s)\,\mu + \cdots\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s) = \mu^{\pm f_{n_h-1}}\{\psi^{(h+n_h-1)}(s) + \psi_1^{(h+n_h-1)}(s)\,\mu + \cdots\};
\end{aligned} \tag{67}$$

darin bedeuten wiederum $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten, die $\geqq 0$ sind. Ferner bedeuten die Ausdrücke $\psi^{(j)}(s)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, und insbesondere dürfen wir annehmen, daß von den Funktionen

$$\psi^{(h)}(s),\ \psi^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi^{(h+n_h-1)}(s) \tag{68}$$

keine für alle s identisch gleich Null sei. Da andererseits für alle genügend kleinen von Null verschiedenen μ die Gleichungen

$$\int_a^b (\psi_\mu^{(h)}(s))^2\,ds = 1,\ \ldots,\quad \int_a^b (\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s))^2\,ds = 1$$

bestehen müssen, so folgt, daß die Exponenten $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ sämtlich Null sind, und die Formeln (67) lehren dann, daß die Funktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s),\ \psi_\mu^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi_\mu^{h+n_h-1}(s)$$

für $\mu = 0$ stetig in die Funktionen (68) übergehen. Diese Funktionen (68) heißen *die zum n_h-fachen Eigenwert $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen;* sie erfüllen, wie man aus den Formeln für die Eigenfunktionen $\psi_\mu^{(1)}(s), \psi_\mu^{(2)}(s), \ldots$ durch Grenzübergang zu $\mu = 0$ sofort erkennt, die folgenden Gleichungen:

$$\int_a^b (\psi^{(k)}(s))^2\,ds = 1,$$

$$\int_a^b \psi^{(k)}(s)\,\psi^{(k')}(s)\,ds = 0,$$

$(k = h, h+1, \ldots h+n_h-1;\ k' \neq k).$

Wir wenden nunmehr die Formel (43) auf den Kern $K_\mu(s,t)$ an, wobei μ einen genügend kleinen von Null verschiedenen Wert bedeutet. Mit Rücksicht auf (39) erhalten wir

$$\left|\int_0^1\int_0^1 K_\mu(s,t)x(s)y(t)ds\,dt - \frac{1}{\lambda_\mu^{(1)}}\int_0^1\psi_\mu^{(1)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(1)}(s)y(s)\,ds\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_\mu^{(2)}}\int_0^1\psi_\mu^{(2)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(2)}(s)y(s)\,ds - \cdots - \frac{1}{\lambda_\mu^{(m)}}\int_0^1\psi_\mu^{(m)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(m)}(s)y(s)\,ds\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\,|\,\lambda_\mu^{(m+1)}|}\left(\int_0^1(x(s))^2ds + \int_0^1(y(s))^2ds\right);$$

wenn wir hierin zur Grenze $\mu = 0$ übergehen und alsdann m über jede Grenze wachsen lassen, so erkennen wir, daß auch für den Kern $K(s,t)$ die Formel (44) des grundlegenden Theorems unverändert gültig bleibt; *man hat nur nötig, für den Fall eines n_h-fachen Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ rechter Hand in* (44) *der Reihe nach jede der n_h verschiedenen, zu $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen zu berücksichtigen, so daß in jedem dieser n_h Glieder der reziproke Wert desselben Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ als Faktor zu stehen kommt.*

Eine einfache Methode zur Berechnung der Eigenfunktionen (68) gewinnen wir, indem wir von der Formel

$$\int_a^b\int_a^b \mathsf{K}(\lambda;s,t)x(s)y(t)\,ds\,dt = \sum_{(h=1,2,\ldots)}\frac{1}{\lambda^{(h)}-\lambda}\int_a^b\psi^{(h)}(s)x(s)ds\cdot\int_a^b\psi^{(h)}(s)y(s)\,ds$$

ausgehen. Setzen wir hierin

$$\mathsf{K}(s,t) = -\frac{\Delta(\lambda;s,t)}{\delta(\lambda)}$$

ein, multiplizieren dann die Formel mit $\lambda - \lambda^{(h)}$ und gehen zur Grenze $\lambda = \lambda^{(h)}$ über, so erhalten wir schließlich:

$$\left\{\begin{matrix}\frac{\partial^{n_h-1}}{\partial\lambda^{n_h-1}}\Delta(\lambda;s,t)\\ \hline \frac{\partial^{n_h}}{\partial\lambda^{n_h}}\,\delta(\lambda)\end{matrix}\right\}_{\lambda=\lambda^{(h)}} = \psi^{(h)}(s)\psi^{(h)}(t) + \psi^{(h+1)}(s)\psi^{(h+1)}(t) + \cdots + \psi^{(h+n_h-1)}(s)\psi^{(h+n_h-1)}(t).$$

Durch diese Gleichung sind die zu dem n_h-fachen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen (68) eindeutig bestimmt, wenn man von einer unwesentlichen orthogonalen Kombination derselben mit konstanten Koeffizienten absieht.

Mittelst der eben bewiesenen Verallgemeinerung unseres grundlegenden Theorems sind wir imstande, auch die anderen im Falle mehrfacher Eigenwerte entstehenden Fragen ohne Schwierigkeit zu beantworten.