Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen

Hilbert, David

Leipzig [u.a.], 1912

Sachlich geordnete Inhaltsangabe

urn:nbn:at:at-ubi:2-6569

Sachlich geordnete Inhaltsangabe.

(Die römischen Zahlen bezeichnen die Kapitelnummern.)

Hauptteile A—F:

A. Theorie der Funktionen unendlich vieler Veränderlicher.

1. *Definition der Beschränktheit.* Eine Funktion von unendlich vielen Veränderlichen $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ heißt beschränkt, wenn ihr n-ter Abschnitt $F(x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$ dem absoluten Betrage nach für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$, für die

$$\sum_{(p=1,2,\ldots)} x_p^2 \leqq 1$$

ist, unterhalb einer festen, von n unabhängigen Schranke M liegt. Speziell ist eine Linearform

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$$

dann und nur dann beschränkt, wenn

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots$$

konvergiert; eine Bilinearform

$$\sum_{(p,\, q=1,2,\ldots)} a_{pq} x_p y_q,$$

wenn

$$\left| \sum_{p,\, q=1,2,\ldots n} a_{pq} x_p y_q \right|$$

unterhalb einer von n unabhängigen Grenze M liegt.

Eine lineare Transformation

$$y_p = \sum_{(q=1,2,\ldots)} a_{pq} y_q \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

heißt beschränkt, wenn die zugehörige Bilinearform

$$\sum_{(p,\,q=1,\,2,\,\ldots)} a_{pq} x_p y_q$$

beschränkt ist. Eine solche Transformation führt jedes Wertsystem mit konvergenter Quadratsumme in ein ebensolches über. (XI. S. 125—126.)

2. *Die Faltungssätze* besagen, daß die sukzessive Ausführung, d. h. „Faltung", zweier oder mehrerer beschränkter Transformationen selbst wieder eine beschränkte lineare Transformation ergibt, (XI. S. 128) und ferner, daß dieser Zusammensetzungsprozeß assoziativ ist (XI. S. 129). Wendet man auf die Variabeln einer beschränkten linearen, quadratischen oder bilinearen Form eine beschränkte lineare Transformation an, so ist das Resultat eine beschränkte Form derselben Art.

3. Eine *orthogonale Transformation* ist eine solche lineare Transformation

$$y_p = \sum_{(q)} o_{pq} x_q, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

die den beiden Bedingungen

$$\sum_{(r)} o_{pr}\, o_{qr} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

$$\sum_{(r)} o_{rp}\, o_{rq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

genügt (XI. S. 129—130). Zwei Linearformen

$$\sum_{(p)} a_p x_p, \quad \sum_{(p)} b_p x_p$$

heißen zueinander orthogonal, wenn

$$\sum_{(p)} a_p b_p = 0$$

ist. Unendlich viele Linearformen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn ihr Koeffizientenschema dasjenige einer orthogonalen Transformation ist. Ein System von endlich oder unendlich vielen orthogonalen Linearformen kann durch Hinzufügung von endlich oder abzählbar vielen Linearformen zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt werden. (XI. S. 141—143.)

Die Faltung zweier Bilinearformen ist orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant. (XI. S. 131.)

4. *Vollstetigkeit.* Es seien

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \ldots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

unendlich viele Wertsysteme, deren Quadratsumme kleiner als 1 ist und die die „Häufungsstelle“ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen in dem Sinne, daß

$$\underset{n=\infty}{L} x_p^{(n)} = x_p$$

ist; dann heißt eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ vollstetig, wenn für jede Folge solcher Wertsysteme

$$\underset{n=\infty}{L} F(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

ist. (XI. S. 147, XIII. S. 174—175.) Jede beschränkte Linearform ist vollstetig, indessen nicht jede beschränkte quadratische oder bilineare Form; so ist

$$\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \cdots$$

dann und nur dann vollstetig, wenn

$$\underset{n=\infty}{L} \nu_n = 0,$$

während diese Form z. B. für

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1, \ldots$$

noch beschränkt bleibt. (XI. S. 148.) Die Bilinearform

$$\sum_{(p,\,q)} a_{pq} x_p y_q$$

ist jedenfalls dann vollstetig, wenn

$$\sum_{(p,\,q)} a_{pq}^2$$

konvergiert (XI. S. 150—151, XII. S. 164).

Weitere hinreichende Kriterien für Vollstetigkeit beschränkter quadratischer Formen (XI. S. 151. Satz 36).

Für vollstetige Funktionen gilt, wie bei endlicher Variabelnzahl, der Satz von der Existenz des Maximums (XI. S. 148). Weiteres über vollstetige Funktionen (XIII. S. 175—177).

5. *Theorie der vollstetigen Formen.* Jede vollstetige quadratische Form läßt sich durch orthogonale Transformation ihrer Veränderlichen auf die Form bringen

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots,$$

wobei

$$\underset{n=\infty}{L} k_n = 0$$

ist; die k_n sind die reziproken Eigenwerte (XI. S. 148, Satz 35). Direkter independenter Beweis dieses Satzes (XI. S. 148—150).

Analoge Sätze gelten für die simultane Transformation zweier quadratischer Formen, deren eine vollstetig und definit ist, während die andere die Form $v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots$ hat — unter v_n die Werte ± 1 verstanden — (XIII. S. 156—162 Satz 38, 38*), sowie für die Transformation der Hermiteschen und der schiefsymmetrischen Form auf eine Normalform (XII. S. 162—164, Satz 39).

6. *Vollstetige lineare Gleichungssysteme.* Ist

$$\sum_{(p,\,q)} a_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige Bilinearform, so hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots &= a_1,\\
a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + a_{23}x_3 + \cdots &= a_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1 + a_{33})x_3 + \cdots &= a_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&
\end{aligned}$$

alle wesentlichen Eigenschaften der linearen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten; d. h. dieses Gleichungssystem hat entweder für jedes Wertsystem $a_1, a_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine und nur eine Lösung $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme, oder das homogene Gleichungssystem, das aus ihm entsteht, wenn man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \ldots$$

setzt, besitzt eine endliche Anzahl linear unabhängiger solcher Lösungen; im letzteren Falle besitzt das „*transponierte*" Gleichungssystem

$$\sum_{(q)} a_{qp} x_q + x_p = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

genau ebenso viele linear unabhängige Lösungen, und das ursprüngliche inhomogene Gleichungssystem ist dann und nur dann auflösbar, wenn die rechten Seiten $a_1, a_2, \ldots$ ebenso vielen linearen Bedingungen genügen (XII. S. 164—174, Satz 70).

7. *Theorie der beschränkten quadratischen Formen.* Im Gegensatz zu den vollstetigen Formen bieten die nicht vollstetigen beschränkten Formen Verhältnisse dar, die denen bei endlicher Variabelnzahl nicht analog sind; doch gilt das folgende Theorem, das durch Grenzübergang vom algebraischen Problem (XI. S. 111—112) aus gewonnen wird (XI. S. 113ff.): In einer nicht vollstetigen beschränkten quadratischen Form

$$K(x) = K(x_1, x_2, \ldots)$$

lassen sich die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ stets so orthogonal in $x_1', x_2', \ldots$ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ transformieren, daß

$$K(x) = \sum_{(p)} k_p x_p'^2 + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{\mu}$$

wird. Dabei ist das Integral (im Stieltjesschen Sinne) über eine perfekte Punktmenge s der μ-Achse, das „*Streckenspektrum*", zu erstrecken, und die Spektralform $\sigma(\mu;\, \xi) \equiv \sum_{(p,\,q)} \sigma_{pq}(\mu)\xi_p \xi_q$ bedeutet eine vom Parameter μ

abhängige positiv definite quadratische Form, deren Wert für jedes feste Wertsystem der ξ als Funktion von μ von 0 bis $\sum\limits_{(p)} \xi_p^2$ monoton wächst und die die zu ihrer Charakterisierung hinreichenden Relationen

$$\sum_{(r)} \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{pr}(\mu) \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{rq}(\mu) = \int_{(s)} u(\mu)^2\, d\sigma_{pq}(\mu)$$

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu;\, \xi) = \sum_{(p)} \xi_p^2$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ erfüllt (XI. S. 145—146, Satz 33). Die aus dem Streckenspektrum, den Eigenwerten $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots$ d. h. dem „*Punktspektrum*" (XI. S. 119) und ihren Häufungsstellen bestehende Punktmenge heißt das *Spektrum* von $K(x)$ (XI. S. 122); für jedes dem Spektrum nicht angehörige λ haben die aus der Form

$$\sum_{(p)} x_p^2 - \lambda K(x)$$

entspringenden inhomogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2 \ldots)$$

für jedes Wertsystem y_p von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme; diese wird mit Hilfe einer beschränkten quadratischen Form

$$\mathsf{K}(\lambda;\, x) = \sum_{(p,\, q)} \varkappa_{pq}(\lambda) x_p x_q = \sum_{p = 1, 2, \ldots} \frac{x'^2_p}{1 - \lambda k_p} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}},$$

der „*Resolvente*" von $K(x)$, dargestellt durch die Formeln

$$x_p = \sum_{(q)} \varkappa_{pq}(\lambda) y_q.$$

Für jedes Wertsystem der x ist $\mathsf{K}(\lambda; x)$ eine analytische Funktion von λ. (XI. S. 137—138, Satz 32.) Die homogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

haben dann und nur dann eine Lösung von konvergenter Quadratsumme, wenn λ ein Eigenwert ist, und so viele unabhängige Lösungen, als dessen Vielfachheit angibt (XI. S. 147, Satz 34).

Ein Beispiel einer beschränkten Form mit Streckenspektrum (XI. S. 153—155).

Die Resolvente gewisser nicht beschränkter Formen (XI. S. 124 bis 125, Satz 31).

B. Theorie der linearen Integralgleichungen.

8. *Der Zusammenhang zwischen unendlich vielen Variabeln und Integralgleichungen* wird vermittelt durch ein vollständiges orthogonales Funktionensystem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... für das Intervall $a \leqq s \leqq b$, d. h. ein System von abzählbar vielen Funktionen, die den Bedingungen genügen

$$\int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}, \quad (\textit{Orthogonalitätsrelationen}),$$

$$\sum_{(p)} \left(\int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds \right)^2 = \int_a^b u(s)^2\,ds, \quad (\textit{Vollständigkeitsrelation});$$

dabei muß die letztere Relation für jede stetige Funktion $u(s)$ gelten. (XIII. S. 177—178.) Jeder endlichen und stetigen Funktion $f(s)$ sind in bezug auf dieses System unendlich viele Größen, ihre „*Fourierkoeffizienten*" a_p zugeordnet vermöge der Gleichungen

$$a_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

jeder endlichen und stetigen Funktion $K(s, t)$ von zwei Variabeln s, t ebenso zweifach unendlich viele Größen

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt \qquad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

Die a_p sind Koeffizienten einer beschränkten Linearform, die a_{pq} Koeffizienten einer beschränkten und sogar vollstetigen Bilinearform (XIII. S. 181). Ist $K(s, t)$ symmetrisch, so sind $a_{pq} = a_{qp} = k_{pq}$ Koeffizienten einer vollstetigen quadratischen Form (XIV. S. 186).

9. *Lineare Integralgleichungen zweiter Art.* Setzt man

$$x_p = \int_a^b \Phi_p(s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

so liefert jede stetige Lösung der unhomogenen bzw. homogenen Integralgleichung mit dem „*Kern*" $K(s, t)$

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

bzw.

$$0 = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

eine und nur eine Lösung des inhomogenen bzw. homogenen Gleichungssystemes

$$\left.\begin{aligned} a_p &= x_p + \sum_{(q)} a_{pq} x_q \\ \text{bzw.} \qquad 0 &= x_p + \sum_{(q)} a_{pq} x_q. \end{aligned}\right\} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Umgekehrt gehört zu jeder Lösung von konvergenter Quadratsumme des einen dieser Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variabeln eine und nur eine stetige Lösung der entsprechenden Integralgleichung, nämlich:

$$\varphi(s) = f(s) - \sum_{(p)} x_p \int_a^b K(s, t)\, \Phi_p(t)\, dt;$$

demnach liefern die Sätze von 6. die Fredholmschen Sätze über die Auflösung der unhomogenen und homogenen Integralgleichung (XIII. S. 180 bis 185).

Ableitung der Lösungsformeln (Fredholmsche Formeln) unabhängig von der Theorie unendlich vieler Variabler durch Grenzübergang vom algebraischen Problem aus (II. S. 8—13; IX. S. 68.)

Sätze über die aus K zusammengesetzten Kerne (IX. S. 67—70).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (XV. S. 204; IX. S. 68).

Zusammenfassung zweier simultaner Integralgleichungen in eine Integralgleichung (XVI. S. 210).

10. *Orthogonale lineare Integralgleichung.* In gleicher Weise liefern die Sätze von 5. die Theorie der Integralgleichung mit stetigem *symmetrischen Kern* $K(s, t) = K(t, s)$ und einem Parameter λ (XIV. S. 185—194).

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Jeder nicht identisch verschwindende Kern $K(s, t)$ hat mindestens einen *„Eigenwert"* λ, für den die gzuehörige homogene Integralgleichung ($f = 0$) eine nicht identisch verschwindende Lösung, die zugehörige *„Eigenfunktion"*, besitzt. (XIV. S. 188; zum ersten Male bewiesen III. S. 16.) Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d. h. es gibt nur endlich viele zugehörige linear unabhängige Eigenfunktionen. Falls der stetige Kern $K(s, t)$ nicht eine Summe von endlich vielen Produkten $\varphi_p(s)\varphi_p(t)$ ist, so gibt es unendlich viele Eigenwerte, die sich nur gegen ∞ häufen (XIV. S. 192; IV. S. 22). Ist λ kein Eigenwert, so hat die homogene Integralgleichung keine, die unhomogene eine und nur eine Lösung, die sich durch eine, vom Parameter λ analytisch abhängende *„Resolvente"* $\mathsf{K}(s, t; \lambda)$ in der Form

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(s, t; \lambda) f(t)\, dt$$

ausdrückt (II. S. 12).

Das zugehörige *„Gaußsche“ Variationsproblem*: das Maximum der Werte, die das Doppelintegral

$$J(u) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds\, dt,$$

die *„quadratische Integralform“*, für alle der Bedingung

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = 1$$

genügenden stetigen Funktionen u annimmt, ist gleich dem kleinsten positiven Eigenwert, die zugehörige Funktion u ist irgend eine der zum betreffenden Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen; die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält man, indem man zu diesem Variationsproblem noch sukzessive lineare Nebenbedingungen hinzufügt (XIV. S. 193; V. S. 28—30). Ist stets $J(u) > 0$, so heißt der Kern *definit*. Alle Eigenwerte sind dann positiv (V. S. 28).

Die sämtlichen Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... bilden ein orthogonales Funktionensystem (XIV. S. 187); unter Umständen ist es zugleich ein vollständiges (XIV. S. 193—194).

Jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion g in der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt$$

darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen φ_1, φ_2, ... fortschreitende, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$f(s) = \sum_{(p)} c_p \varphi_p(s) = \sum_{(p)} \varphi_p(s) \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds$$

$$= \sum_{(p)} \frac{\varphi_p(s)}{\lambda_p} \int_a^b g(s) \varphi_p(s) ds$$

entwickeln. (XIV. S. 190.) Speziellere Entwicklungssätze über *„abgeschlossene“* und *„allgemeine“* Kerne. (IV. S. 24—25.)

Die quadratische Integralform $J(u)$ gestattet für alle stetigen Funktionen $u(s)$ die Entwicklung

$$J(u) = \sum_{(p)} \frac{1}{\lambda_p} \left(\int_a^b u(s) \varphi_p(s) ds \right)^2;$$

dieselbe konvergiert für alle $u(s)$, für die $\int_a^b u^2 ds$ unterhalb einer Schranke bleibt, absolut und gleichmäßig. (III., S. 19—20.)

Ableitung dieser Theorie unabhängig von der Theorie der Funktionen unendlich vieler Variabeln durch Grenzübergang vom entsprechenden algebraischen Problem aus (III. S 13—21; das algebraische Problem: I. S. 4—8). Darstellung der Resolvente $\mathsf{K}(s, t; \lambda)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ, d. h. die *Fredholmschen Formeln* (II. S. 11—13). Ergänzung betreffend mehrfache Eigenwerte (VI. S. 35—38).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (VI. S. 30—35); (XV. S. 204).

Anwendung der Theorie auf die adjungierten Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kernes (XIV. S. 194).

11. *Polare lineare Integralgleichungen.*

Entwicklung der analogen Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie für die Integralgleichung

$$f(s) = V(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

wo $V(s)$ stückweise $+1$ oder -1 ist und $K(s, t)$ einen symmetrischen positiv-definiten Kern bedeutet (XV. S. 195—204).

C. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

12. *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + qu = 0 \qquad (p > 0)$$

lautet die Greensche Formel, wie folgt (VII. S. 40):

$$\int_a^b \{v\,L(u) - u\,L(v)\}\,dx = \left[p\,\left\{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

Die *Grundlösung* $\gamma(x, \xi)$ ist in bezug auf x zweimal stetig differenzierbar und genügt für alle von ξ verschiedenen Werte x innerhalb des Intervalles a bis b der Gleichung $L(u) = 0$; für $x = \xi$ ist sie stetig, während ihre erste Ableitung den Abfall -1 aufweist. Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige Lösungen von $L(u) = 0$, so stellt sich eine Grundlösung in der Gestalt dar:

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2}\,\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\;\frac{u_2(\xi)\,u_1(x) - u_1(\xi)\,u_2(x)}{u_2(\xi)\,\dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\,\dfrac{du_2(\xi)}{d\xi}}$$

(VII. S. 40).

13. *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von homogenen Randbedingungen in Betracht (VII. S. 41—42):

I. $f(a) = 0, \quad f(b) = 0;$

II. $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=b} = 0;$

III. $\left[\frac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$

IV. $f(a) = hf(b),\ p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{ax}\right]_{x=b};$

IV*. $f(a) = hp(b)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b}, \quad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\frac{1}{h}f(b);$

V. $f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x-a)^r\, e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet;

V*. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

14. *Die Greensche Funktion* $G(x, \xi)$.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall (a, b), die in bezug auf x und identisch in ξ an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen befriedigt, heißt die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ (VII. S. 42—43).

Wenn eine Greensche Funktion nicht existiert, so besitzt die Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende stetig differenzierbare Lösung $\psi^0(x)$, die die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Wir konstruieren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\psi^0(x)\psi^0(\xi), \qquad \int_a^b \psi^0(x)^2 dx = 1,$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, das an den Randpunkten die Randbedingungen erfüllt und die Gleichung

$$\int_b^a g(x, \xi)\psi^0(x)\,dx = 0$$

befriedigt. Die Funktionen $g(x, \xi)$ und $\frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$ werden als *Greensche Funktionen im erweiterten Sinne* bezeichnet. (VII. S. 44—45, XVIII. S. 233.)

Das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ (VII. S. 45).

15. *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

wird durch die Formel

$$\varphi(x) = -Lf((x))$$

gelöst; und umgekehrt gibt die Integralgleichung dasjenige Integral $f(x)$ der Differentialgleichung, das dieselben Randbedingungen wie $G(x, \xi)$ erfüllt (VII. S. 45—47).

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

ist gleich der zu denselben Randbedingungen wie G gehörigen Greenschen Funktion des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) = L(u) + \lambda u.$$

(VII. S. 47—49.)

16. *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der Differentialgleichung.*

Die Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ besitzt unendlich viele *Eigenwerte*, d. h. es gibt unendlich viele Werte des Parameters λ, für die die Differentialgleichung $L(u) + \lambda u = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung, die zugehörige *Eigenfunktion*, besitzt, die an den Randpunkten die betr. homogenen Randbedingungen erfüllt (VII. S. 49—50).

Sind $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, ... die zu irgend welchen Randbedingungen gehörigen Eigenfunktionen von $\Lambda(u) = 0$, so folgt für jede stetige Funktion $h(x)$ aus

$$\int_a^b h(x)\psi^{(m)}(x)dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

stets, daß $h(x)$ identisch Null ist (VII. S. 50).

Jede zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar (VII. S. 51).

Übertragung der Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda k(x))u = 0,$$

wobei $k(x) > 0$ ist. Beispiele. (2. S. 51—56.)

Differentialgleichungen, für die nur eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne existiert, und der zugehörige Entwicklungssatz. Beispiele. (VII. S. 55—56.)

17. *Allgemeine Differentialgleichungen.*

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda\, k(x))u = 0 \;\; (p > 0)$$

ausgedehnt, wobei $k(x)$ eine endliche Anzahl von Malen sein Vorzeichen ändert. Existenz von unendlich vielen Eigenwerten (XVI. S. 205—206).

18. *Systeme von simultanen Differentialgleichungen.*

Aus dem Variationsproblem

$$\int_a^b Q(u'_1, u'_2, u_1, u_2)\,dx = \text{Min.},$$

wo

$$Q = p_{11}(x)u'^2_1 + 2p_{12}u'_1u'_2 + p_{22}u'^2_2 + 2q_{11}u'_1u_1 + 2q_{12}u'_1u_2 + 2q_{21}u'_2u_1 + 2q_{22}u'_2u_2 + r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2,$$

entspringen die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung (XVI. S. 206 bis 207):

$$L_1(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u'_1}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u'_2}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right) = 0.$$

Die *Greensche Formel* für diese Differentialgleichungen (XVI. S. 207):

$$\int_a^b \big(v_1L_1(u) - u_1L_1(v) + v_2L_2(u) - u_2L_2(v)\big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[v_1\frac{\partial Q}{\partial u'_1} - u_1\frac{\partial Q}{\partial v'_1} + v_2\frac{\partial Q}{\partial u'_2} - u_2\frac{\partial Q}{\partial v'_2}\right]_a^b.$$

Das *Greensche Funktionensystem* für diese Differentialgleichungen ist ein System von Funktionen:

$$G_{11}(x, \xi),\ G_{12}(x, \xi),$$
$$G_{21}(x, \xi),\ G_{22}(x, \xi),$$

die paarweise die Differentialgleichungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sowie die Randbedingungen in bezug auf x befriedigen, und deren Ableitungen für $x = \xi$ einen gegebenen Abfall erfahren. (XVI. S. 207—208.)

Das *Symmetriegesetz* dieses Funktionensystems lautet: (XVI. S. 208)

$$G_{11}(x, \xi) = G_{11}(\xi, x),$$
$$G_{12}(x, \xi) = G_{21}(\xi, x),$$
$$G_{22}(x, \xi) = G_{22}(\xi, x).$$

Die Lösung der *Randwertaufgabe:* diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$L_1(f_1, f_2) = -\varphi_1, \quad L_2(f_1, f_2) = -\varphi_2,$$

die bestimmte homogene Randbedingungen erfüllen, werden durch

$$f_1(x) = \int_a^b \{G_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \{G_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi$$

dargestellt, und umgekehrt, diese Integralgleichungen erster Art werden durch jene Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gelöst. (XVI. S. 208.)

Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie: diejenigen Funktionenpaare $u_1(x)$, $u_2(x)$, die an den Randpunkten homogene Randbedingungen erfüllen und das Gleichungssystem:

$$\Delta_1 \equiv L_1(u_1, u_2) + \lambda\,(k_{11}(x)u_1 + k_{12}(x)u_2) = 0,$$
$$\Delta_2 \equiv L_2(u_1, u_2) + \lambda\,(k_{21}(x)u_1 + k_{22}(x)u_2) = 0$$

befriedigen, sind Eigenfunktionen der Integralgleichungen:

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{12}(x, \xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\} d\xi,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{22}(x, \xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\} d\xi.$$

(XVI. S. 209—211.) Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und Eigenfunktionen; Entwicklungssätze. (XVI. S. 211.)

Greensche Funktionen im erweiterten Sinne (XVI. S. 211—212).

19. *Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem).* Treten in den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda a + \mu b)\,y = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\pi\,\frac{d\eta}{d\xi}\right) - (\lambda \alpha + \mu \beta)\,\eta = 0$$

$$(p(x) > 0,\ a(x) > 0,\ \text{für}\ x_1 \leqq x \leqq x_2)$$
$$(\pi(\xi) > 0,\ \alpha(\xi) > 0,\ \text{für}\ \xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$$

die Parameter λ, μ nicht bloß in der Verbindung $\lambda + C\mu$ auf ($C = \text{const.}$) auf, so existieren unendlich viele Paare von Werten λ, μ, für welche das Differentialgleichungssystem ein Lösungssystem $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ besitzt, derart daß $y_h(x)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles x_1, x_2, $\eta_h(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles ξ_1, ξ_2 verschwindet; zugehöriger Entwicklungssatz. (XXI. S. 262—267.)

D. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

20. *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = 0,\ (p > 0)$$

lautet die Greensche Formel, wie folgt (VIII. S. 59):

$$\int_{(J)} \{ v L(u) - u L(v)\} dJ = \int_{(C)} p\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

wo J ein Gebiet der xy-Ebene mit der Randkurve C ist.

Die *Grundlösung* ist eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von der Gestalt

$$\gamma(x, y;\ \xi, \eta) = \gamma_1(x, y;\ \xi, \eta)\, l \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \gamma_2(x, y;\ \xi, \eta),$$

wobei γ_1, γ_2 zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und außerdem identisch in ξ, η

$$\gamma_1(\xi, \eta;\ \xi, \eta) = 1$$

ist (VIII. S. 59—60).

21. *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von Randbedingungen in Betracht (VIII. S. 60 bis 61):

I. $f(x, y) = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C;

II. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

IV. $(f(x, y))_s = (f(x, y))_{s+\frac{l}{2}},\ \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_s = -\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s,

wobei s die Bogenlänge von einem beliebigen Punkte von C, l die Gesamtlänge bedeutet;

V. $f(x, y)$ soll bei der Annäherung an die Randkurve endlich bleiben.

22. *Greensche Funktion.*

Eine Grundlösung $g(x, y;\ \xi, \eta)$, die als Funktion von x, y identisch in η, ξ an der Randkurve C eine homogene Randbedingung befriedigt, heißt Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $\frac{g(x, y;\ \xi, \eta)}{p(\xi, \eta)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$. (VIII. S. 61.) Symmetriegesetz der Greenschen Funktion. (VIII. S. 62.)

Greensche Funktion im erweiterten Sinne. (XVIII. S. 233.)

23. *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x, y) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

wird durch die Funktion

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} L(f(x, y))$$

gelöst; umgekehrt stellt $f(x, y)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung dar, die denselben Randbedingungen genügt wie $G(xy;\ \xi\eta)$. (VIII. S. 62.)

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \lambda \int_{(J)} G(xy;\ \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Lambda(u) = (Lu) + \lambda u = 0.$$

Beweis der Existenz der Greenschen Funktion und der Lösbarkeit der Randwertaufgabe bei den Randbedingungen I und II (IX. S. 70—77). Existenz der Greenschen Funktion für die Randbedingung III (IX. S. 78).

Andere Beispiele. Die sich gegenseitig auflösenden Integralgleichungen erster Art:

$$u(\xi) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v(x) \cot g \left(\pi \frac{x-\xi}{2}\right) dx$$

$$v(\xi) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(x) \cot g \left(\pi \frac{x+\xi}{2}\right) dx.$$

(IX. S. 75.)

24. *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der partiellen Differentialgleichung.*

Es gibt abzählbar unendlichviele reelle Werte — die Eigenwerte — des Parameters λ, für die die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda u = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung — die Eigenfunktion — besitzt und die auf einer geschlossenen Randkurve homogene Randbedingungen erfüllt (VIII. S. 63); jede willkürliche Funktion ist auf die Fouriersche Weise in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar. (VIII. S. 64.)

Auftreten eines Parameters in der Randbedingung. Es gibt unendlich viele Werte λ, bei denen die vorgelegte Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, die der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

genügt; der zugehörige Entwicklungssatz (IX. S. 77—80).

25. *Allgemeinere partielle Differentialgleichungen.*

Verallgemeinerung auf partielle Differentialgleichungen, die zu Gebieten auf einer beliebigen krummen Fläche (statt zu ebenen Gebieten) gehören (VIII. S. 64—65).

Die Randwertaufgabe für das folgende System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = pu + qv,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = ku + lv.$$

Wenn diese Differentialgleichungen außer $u = 0$, $v = 0$, kein Lösungssystem u, v besitzen, derart, daß u auf der gegebenen geschlossenen Randkurve C verschwindet, so besitzen sie ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf C die vorgeschriebenen Werte $f(s)$ annimmt; im entgegengesetzten Falle existiert ein solches Lösungssystem dann und nur dann, wenn $f(s)$ gewissen, endlichvielen Integralbedingungen genügt (XVII. S. 213 bis 219).

Definition des *auf der Vollkugel regulären Differentialausdruckes;* seine Transformation und der adjungierte Differentialausdruck. (XVIII. S. 219 bis 223.) Die Methode der *Parametrix.* Die Parametrix ist eine symmetrische Funktion des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, die in allen 4 Veränderlichen beliebig oft differenzierbar ist, außer wenn Parameterpunkt und Argumentpunkt zusammenfallen, in welchem Falle sie in bestimmter Weise logarithmisch unendlich wird (XVIII. S. 223—224). Konstruktion der Parametrix einer auf der Vollkugel regulären Differentialgleichung und Nachweis ihrer Eigenschaften (XVIII. S. 224—226). Wenn die auf der Vollkugel reguläre Differentialgleichung vom elliptischen Typus $L(z) = 0$ keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung besitzt, so hat die Differentialgleichung $L(z) = f$, wo f irgend eine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine solche Lösung. Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, daß $L(z) = 0$ solche Lösungen besitzt (XVIII. S. 226—232). Konstruktion der Greenschen Funktion, d. h. einer Parametrix, die die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt. (XVIII. S. 232—234.) Beweis der Existenz der Greenschen Funktion im „erweiterten Sinne". (XVIII. S. 233.) Es gibt unendlichviele Werte von λ, derart daß $L(z) + \lambda z = 0$ eine auf der Vollkugel stetige Lösung, die zu diesem „Eigenwerte" gehörige „Eigenfunktion", besitzt; jede willkürliche Funktion ist nach diesen Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelbar. (XVIII. S. 234—235.) Die sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung $L(z) + \lambda z = 0$ hat nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte (XVIII. S. 235—237).

Hängen die Koeffizienten in $L(z) = 0$ von einem Parameter μ analytisch ab, so ist der h-te Eigenwert eine stetige Funktion von μ (XVIII. S. 238—241).

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen in 23., 24. erwähnten Resultate auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (q + \lambda k)u = 0$$

ausgedehnt, wobei $k(x, y)$ in einer endlichen Anzahl von Teilgebieten verschiedene Vorzeichen besitzt (XVI. S. 206).

E. Anwendung auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln.

26. *Allgemeines Riemannsches Problem.*

Formulierung desselben: man soll Funktionen einer komplexen Variablen bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf einer gegebenen geschlossenen Randkurve C gegebene Relationen gelten sollen. Man bezeichne die Greenschen Funktionen zweiter Art der Potentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ für das Innere und Äußere der Kurve C bzw. mit $G_j(x, y; \xi, \eta)$ und $G_a(x, y; \xi, \eta)$ und definiere dann zwei *Integralausdrücke*, wie folgt

$$M_j w = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{(C)} \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} w(\sigma) d\sigma,$$

$$M_a w = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{(C)} \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} w(\sigma) d\sigma,$$

wobei $w(\sigma)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf der Kurve C bedeutet. Die Bedingung dafür, daß ein auf C definierter komplexer Ausdruck $f_j(s)$ die Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion darstellt, ist

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l} \int\limits_{(C)} f_j(\sigma) d\sigma,$$

wobei l die Gesamtlänge der Kurve C bezeichnet; ein analoger Satz gilt für die Operation $M_a w$ und das Äußere von C. Die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stellen stets Randwerte einer innerhalb bzw. außerhalb C regulären Funktion dar. (X. S. 81—88.)

Durch die erlangten Hilfsmittel wird der Satz bewiesen, daß, wenn $c(s)$ ein gegebener stetiger komplexer Ausdruck auf der Kurve C ist und $\bar{c}(s)$ den konjugierten Ausdruck bedeutet, entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z)$, $f_a(z)$ existiert, von denen die erstere innerhalb, die zweite außerhalb C regulär analytisch ist und welche auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen, oder ein Funktionenpaar $g_j(z)$ und $g_a(z)$ von demselben Charakter, deren Randwerte die Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

erfüllen (X. S. 89—91). Von diesen beiden Fällen tritt der erste bzw. der zweite ein, je nachdem $\log c(s)$ beim Umlauf in positivem Sinne entlang C eine negative bzw. positive Änderung erfährt (X. S. 91).

Es gibt stets ein Paar von Funktionen $f_a(z)$, $f_j(z)$, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, während auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllt ist (X. S. 91—92).

Untersuchung des Falles, wo $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung der Stetigkeit aufweist (X. S. 92—94).

Aufstellung der Aufgabe: zwei außerhalb C und zwei innerhalb C reguläre analytische Funktionen f_a, f'_a bzw. f_j, f'_j, sollen so bestimmt werden, daß sie auf C die Relationen

$$\begin{aligned} f_a(s) &= c_1(s) f_j(s) + c_2(s) f'_j(s) \\ f'_a(s) &= c'_1(s) f_j(s) + c'_2(s) f'_j(s) \end{aligned}$$

erfüllen, wobei c_1, c_2, c'_1, c'_2 gegebene komplexe zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante

$$c_1 c'_2 - c_2 c'_1$$

für alle s von Null verschieden ausfällt (X. S. 94—95).

Es wird bewiesen, daß entweder die genannte Aufgabe eine Lösung besitzt, oder zwei Funktionenpaare g_a, g'_a, g_j, g'_j existieren, die auf C die Relationen

$$\begin{aligned} g_a &= \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g'_j \\ g'_a &= \bar{c}'_1 g_j + \bar{c}'_2 g'_j \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}'_1$, $\bar{c}'_2$ die zu den gegebenen Ausdrücken c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten. (X. S. 95—98.)

Die Randwerte der soeben konstruierten Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j bzw. g_a, g'_a, g_j, g'_j sind auf C stetig differenzierbare Funktionen von s, und die gestellte Aufgabe besitzt nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Systeme von Lösungen. (X. S. 98—100.)

Beweis des Satzes, daß es stets Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j gibt, die innerhalb bzw. außerhalb C regulär analytisch sind mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb C, die für eine der Funktionen f_j, f'_j oder für beide ein Pol ist, und die auf C die Relationen

$$\begin{aligned} f_a &= c_1 f_j + c_2 f'_j \\ f'_a &= c'_1 f_j + c'_2 f'_j \end{aligned}$$

erfüllen (X. S. 100—102.)

27. *Das Riemannsche Gruppenproblem.*

Das speziellere Riemannsche Problem, die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe zu beweisen, ist für Differentialgleichungen zweiter Ordnung äquivalent mit der folgenden Aufgabe: man verbinde die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(m)}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine reguläre analytische

Kurve C; dann sollen zwei Funktionenpaare f_a, f'_a bzw. f_j, f'_j bestimmt werden, die außerhalb bzw. innerhalb C vom Charakter rationaler Funktionen sind, derart, daß ihre Randwerte auf C überall stetig sind und auf dem Kurvenstücke zwischen $z^{(h)}$ und $^{h+1)}$ $(h = 1, 2 \ldots m)$ die Relationen

$$\begin{aligned} f_a &= \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f'_j \\ f'_a &= \gamma'_1{}^{(h)} f_j + \gamma'_2{}^{(h)} f'_j \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\gamma_1^{(h)}$, $\gamma_2^{(h)}$, $\gamma'_1{}^{(h)}$, $\gamma'_2{}^{(h)}$ gegebene Konstante mit nicht verschwindender Determinante sind. (X. S. 102—104.)

Diese Aufgabe wird durch Einführung neuer Funktionen auf die in 26. am Schluß gelöste (wo die Substitutionskoeffizienten stetige Funktionen des Ortes sind) zurückgeführt (X. S. 104—106).

Durchführung des Existenzbeweises (Riemannsches Gruppenproblem) (X. S. 106—108).

28. *Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen.*

Automorphe Funktionen mit reeller Substitution, die vier gegebene Werte ∞, a, b, c auslassen. Beweis des Satzes: es gibt unendlichviele Werte λ, so daß der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right) + (x+\lambda)y = 0$$

beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen a, b, c Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt. (XX. S. 258—262.)

F. Anwendung auf Variationsrechnung, Geometrie, Hydrodynamik und Gastheorie.

29. *Variationsprobleme.*

Zusammenhang zwischen dem *Dirichletschen* Variationsproblem

$$\int_a^b \left[p\left(\frac{du}{ax}\right)^2 - qu^2\right]dx = \text{Min.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b u^2 dx = 1$$

und dem *Gaußschen* Variationsproblem (s. oben, 10)

$$\int_a^b\int_a^b G(x, \xi)\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi = \text{Max.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b \omega^2 dx = 1.$$

(VII. S. 56—58.) Das gleiche Problem für zwei unabhängige Variable. (VIII. S. 66.)

Das *Dirichletsche Variationsproblem auf der Kugel:* das absolute Minimum des über die Vollkugel erstreckten Integrals

$$D(z) = \int \frac{a z_s^2 + 2 b z_s z_t + c z_t^2 - n z^2}{\sqrt{eg - f^2}}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int z^2 dk = 1$$

ist gleich dem kleinsten Eigenwert der Differentialgleichung

$$L(z) \equiv \frac{a z_{ss} + 2 b z_{st} + c z_{tt} + (a_s + b_t) z_s + (b_s + c_t) z_t + n z}{\sqrt{e g - f^2}} + \lambda z = 0$$

Verallgemeinerung dieses Satzes. (XVIII. S. 237—238.)

30. *Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.*

Das Volumen V eines konvexen Körpers K ist

$$V = \tfrac{1}{6} \int H(H, H) dk,$$

wobei $H(\alpha, \beta, \gamma)$ diejenige auf der Kugel definierte homogene Funktion bedeutet, die die Entfernung der Tangentialebene des Körpers vom Nullpunkt mit den Richtungskosinus α, β, γ angibt, und wobei allgemein für zwei beliebige homogene Funktionen $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$

$$\begin{aligned}(W, V) &= \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2} \\ &= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{zx} V_{zx} + W_{xx} V_{zz}}{y^2} \\ &= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}\end{aligned}$$

gesetzt ist. (XIX. S. 242—245.) Das gemischte Volumen dreier konvexer Körper

$$V_{123} = \tfrac{1}{6} \int H_1 (H_2, H_3) dk$$

und ihre Symmetrieeigenschaften. (XIX. S. 245.)

Ist H eine gegebene homogene Funktion, so stellt

$$L(\Omega) = (W, H), \quad W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \Omega(x, y, z)$$

einen für Ω linearen Differentialausdruck auf der Kugel dar, der sich selbst adjungiert und vom elliptischen Typus ist. (XIX. S. 245—247.)

Beweis der Sätze: Jede auf der Vollkugel stetige Lösung von $L(\Omega) = 0$ ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

(XIX. S. 247—250.) Die partielle Differentialgleichung

$$L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0, \quad (H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathsf{H})$$

besitzt $\lambda = -1$ als einfachen, $\lambda = 0$ als dreifachen Eigenwert, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind H bzw. x, y, z; die übrigen Eigenwerte sind positiv. (XIX. 250—254.)

Beweis der Minkowskischen Ungleichung

$$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht. (XIX. S. 254—257.)

Die Ungleichungen:

$$O^2 \geqq 3VM, \quad M^2 \geqq 4\pi O, \quad O^2 \geqq 36\pi V^2,$$

wobei O die Oberfläche, V das Volumen und

$$M = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega$$

die mittlere Krümmung eines konvexen Körpers bedeutet, und das Gleichheitszeichen nur statthaft, wenn der konvexe Körper die Kugel ist. (XIX. S. 257—258.)

31. *Ein Problem der Hydrodynamik.*

Anwendung des Entwicklungssatzes in 23. (Parameter λ in der Randbedingung) auf das Problem der kleinen Schwingungen einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit. (IX. S. 80—81.)

32. *Begründung der Gastheorie.*

Aus der Maxwell-Boltzmannschen Stoßformel entspringt eine lineare (orthogonale) Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern; diese spielt beim Aufbau der Gastheorie die fundamentale Rolle, indem sie die Lösung der Stoßformel durch sukzessive Approximationen ermöglicht. (S. 268 ff.)