universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel XIII. Brechung durch Medien von variabler Dichtigkeit. Meteorologische Optik

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel XIII.

Brechung durch Medien von variabler Dichtigkeit. Meteorologische Optik.

§ **303.** Variirt das brechende Medium kontinuirlich nach einem gegebenen Gesetze, so lässt sich der für irgend einen Punkt gültige Brechungsexponent als eine gegebene Funktion der Koordinaten jenes Punktes ansehen. Setzt man diese Funktion gleich einer Konstanten, so erhält man die Gleichung einer Fläche, für welche der Brechungsindex konstant ist; die Gestalt dieser Fläche charakterisirt die Art der Schichtung des Mediums. Untersuchen wir nun die Brechung eines Strahls bei seinem Uebergange von einer Schicht von gleichförmigem Brechungsvermögen zu einer ihm unendlich benachbarten Schicht, so werden wir dadurch auf eine Differentialgleichung für den Strahlengang geführt und die Auflösung dieser Gleichung bestimmt den gesammten Strahlenverlauf.

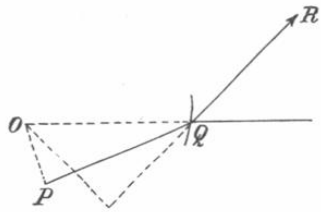

Fig. 145.

§ **304.** Wir wollen zunächst annehmen, das Medium sei um einen Punkt symmetrisch in Bezug auf sein variables Brechungsvermögen, also in koncentrischen Kugelflächen geschichtet, und der Strahl verlaufe in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene.

In Fig. 145 seien PQ und QR zwei einander unendlich benachbarte Richtungen des Strahls vor und nach seiner Brechung an einer

um O als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche. Sind nun i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so ist

$$n \sin i = n' \sin i'.$$

Bedeuten p und p' die Längen der von O auf die Richtung des Strahls vor und nach der Brechung gefällten Perpendikel, so erhält die letzte Gleichung die Form

$$n p = n' p'.$$

Diese Relation gilt für jede beliebige Brechung; verläuft daher der Strahl in einem Medium, das aus koncentrisch um einen Punkt O gruppirten Hohlkugeln von stetig wachsendem Brechungsvermögen besteht, so lässt sich die Gleichung für den Strahlenverlauf folgendermaassen ausdrücken:

$$n p = a, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

worin a konstant ist.

Hieraus lässt sich die Veränderung des Brechungsexponenten in dem Medium berechnen, welche einem gegebenen Strahlenverlauf entspricht. In der Gleichung der Kurve lässt sich p durch ein Vielfaches von r ersetzen und man erhält dann als Gleichung für die Veränderung des Brechungsexponenten:

$$n = \frac{a}{p}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

§ **305.** Um eine Vorstellung zu gewinnen über die Art und Weise, in welcher ein in einem heterogenen Medium befindliches Objekt erblickt wird, wollen wir den Strahlenverlauf für ein Medium untersuchen, für welches

$$n = \frac{b}{a^2 + r^2},$$

worin a und b Konstanten darstellen. Auf diese Gleichung wurde Maxwell durch die Untersuchung eines Fischauges geführt. Die Gleichung für den Verlauf irgend eines Strahls ist $n p =$ konstant, oder

$$\frac{b p}{a^2 + r^2} = \text{konstant} = \frac{b}{2c},$$

wenn hierin c eine willkürliche, von einem Strahl zum anderen sich ändernde Konstante bedeutet. Die Gleichung für irgend einen Strahl ist daher

$$2 p c = a^2 + r^2,$$

woraus folgt:

$$\frac{r\, d r}{d p} = c.$$

Die Relation zeigt, in Worten ausgedrückt, dass der Krümmungsradius der Kurve der nämliche ist für alle Punkte derselben, so dass der Strahlenweg einen Kreis mit dem Radius c bildet. Es ist in der That leicht ersichtlich, dass die Beziehung zwischen r und p für irgend einen Punkt eines Kreises, dessen Radius c ist und dessen Mittelpunkt sich im Abstande k vom Ursprung befindet, sich durch die Gleichung

$$k^2 = r^2 + c^2 - 2\,c\,p$$

ausdrücken lässt, so dass

$$a^2 = c^2 - k^2.$$

Ist daher A O A′ eine Sehne des Kreises, welche durch den Ursprung geht, so ist das Rechteck A O . O A′ $= a^2$. Dieses Resultat gilt für jeden beliebigen Strahl, und es sind somit A und A′ einander konjugirte Punkte. Jedes Paar konjugirter Punkte liegt daher auf derselben durch den Mittelpunkt der sphärischen Straten gehenden Linie, und das Produkt ihrer Abstände von jenem Centrum ist a^2.

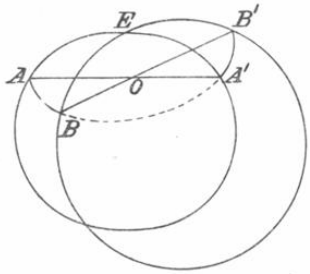

Fig. 146.

Angenommen nun, das Auge betrachte einen Gegenstand durch ein derartig zusammengesetztes Medium und es befinde sich in einer kleinen, von orthotomischen Flächen begrenzten Einsenkung und zwar in Luft dicht neben der Fläche der Einsenkung.

Ist in Fig. 146 A B ein kleines Objekt, A′ B′ dessen Bild und E die Stellung des Auges, so wird man, wenn das Auge auf das Objekt gerichtet wird, das letztere aufrecht stehend erblicken; wird das Auge dagegen von dem Objekt abgewendet, so wird es immer noch in seiner Lage A′ B′ sichtbar bleiben, aber in umgekehrter Stellung. Verfolgen wir ferner die Strahlen, durch welche das letztere Bild dem Auge sichtbar wird, so erkennen wir alsbald, dass dieselben von der Rückseite des Objektes kommen; man erblickt demnach bei A′ B′ die Rückseite des Objektes.

Den so erzeugten Bildern kommt noch eine andere Eigenthümlichkeit zu. Es wird nämlich im Allgemeinen die Divergenz in der

Ebene der Zeichnung nicht die nämliche sein wie in der zu dieser senkrecht gerichteten Ebene; die Strahlen weisen daher für Höhe und Breite verschiedene Divergenzen auf.

§ **306.** Mit astronomischer Refraktion bezeichnet man den Winkel, welchen die scheinbare Richtungslage eines durch die Atmosphäre erblickten Sternes mit derjenigen Richtung einschliesst, in welcher der Stern erblickt werden würde, wenn keine Atmosphäre vorhanden wäre.

Man kann, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die Erde als sphärisch gestaltet ansehen, und ebenso kann man annehmen, die Atmosphäre sei um den Erdmittelpunkt hohlkugelförmig geschichtet. Es wurde oben bereits gezeigt, dass für den Verlauf eines Strahls in einem derartig konstituirten Medium die Gleichung besteht:

$$n\,p = \text{const.},$$

worin p das Loth von dem Erdmittelpunkt auf die Tangente zur Kurve des Strahlenganges in dem Punkte, für welchen der Brechungsexponent n ist, darstellt. x sei der von dem Mittelpunkt nach irgend einem Punkt des Strahlenverlaufs gezogene Radius vector; der Radius vector wird dann eine Normale zum betreffenden sphärischen Stratum sein; i sei der Winkel zwischen dem Strahl und dieser Normalen. Die letzte Gleichung lässt sich dann folgendermaassen schreiben:

$$n\,x \sin i = n_0\,a \sin z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wo n_0, a, z die Werthe von n, x, i an der Erdoberfläche darstellen.

Ist ferner i' der Winkel, welchen ein unendlich benachbartes Element des Strahlenweges mit der Normalen einschliesst, so stellt die Ablenkung $i - i'$ die Zunahme in der atmosphärischen Refraktion dar. Bezeichnen wir daher die atmosphärische Refraktion mit r, so ist $i - i' = \partial r$. Das Gesetz für die Brechung lautet also

$$n \sin i = (n + \partial n) \sin (i - \partial r),$$

oder

$$n \sin i = (n + \partial n)(\sin i - \partial r \cos i),$$

oder

$$\partial n \sin i - n\,\partial r \cos i = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d\,r}{d\,n} = \frac{\operatorname{tg} i}{n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Substituiren wir hierin i nach z aus Gleichung (3), so erhalten wir

$$\frac{dr}{dn} = \frac{1}{n} \frac{n_0 a \sin z}{\sqrt{n^2 x^2 - n_0^2 a^2 \sin^2 z}},$$

$$r = n_0 a \int \frac{\sin z \, dn}{n \sqrt{n^2 x^2 - n_0^2 a^2 \sin^2 z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Um dies Integral zu lösen, hat man die Relation zwischen n und a zu kennen.

§ **307.** Simpson nahm an, dass die Dichtigkeit der Atmosphäre derartig abnimmt, dass eine gewisse Potenz des Brechungsexponenten der Entfernung vom Erdmittelpunkt proportional sei. Diese Hypothese ist durch die Gleichung

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^{m+1} = \frac{a}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

dargestellt.

Aus dieser Gleichung folgt

$$\sin i = \left(\frac{n}{n_0}\right)^m \sin z.$$

Logarithmiren und differentiiren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{di}{\operatorname{tg} i} = \frac{m \, dn}{n}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

somit

$$dr = \frac{di}{m}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Um für diese Gleichung die Integrationsgrenzen zu finden, nehmen wir an, dass in grosser Entfernung vom Erdmittelpunkt die Luft so dünn wird, dass ihre brechende Wirkung vernachlässigt werden kann. Ist θ der Werth von i für den Theil des Strahlenganges, wo eine Ablenkung nicht mehr stattfiandet, so ist nach (7)

$$\sin \theta = \left(\frac{1}{n_0}\right)^m \sin z.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration von (8)

$$r = \int_\theta^z \frac{di}{m} = \frac{1}{m}(z - \theta),$$

und daher ist schliesslich, wenn man die Substitution für θ vornimmt, die astronomische Refraktion

$$r = \frac{1}{m}\left[z - \arcsin\left(\frac{\sin z}{n_0^{\,m}}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dies ist Simpson's Formel zur Bestimmung der astronomischen Brechung.

§ **308.** Bradley gab dieser Formel eine andere Form. Für Simpson's Formel lässt sich schreiben

$$\frac{\sin z}{\sin(z - m\,r)} = n_0^{\,m}\,.$$

Es ist daher

$$\frac{\sin z - \sin(z - m\,r)}{\sin z + \sin(z - m\,r)} = \frac{n_0^{\,m} - 1}{n_0^{\,m} + 1}\,;$$

hieraus

$$\operatorname{tg}\frac{m\,r}{2} = \frac{n_0^{\,m} - 1}{n_0^{\,m} + 1}\operatorname{tg}\left(z - \frac{m\,r}{2}\right),$$

oder angenähert

$$r = \frac{2}{m}\,\frac{n_0^{\,m} - 1}{n_0^{\,m} + 1}\operatorname{tg}\left(z - \frac{m\,r}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bradley schrieb diesen Ausdruck in der Form:

$$r = g\operatorname{tg}(z - f\,r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und fand, dass für den durchschnittlichen Zustand der Luft bei einem Druck von 752 mm und einer Temperatur von 15,5° C. man mit ziemlicher Genauigkeit

$$g = 57{,}036'', \quad f = 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

nehmen kann.

§ **309.** Biot und Arago haben experimentell nachgewiesen, dass, wenn n der Brechungsexponent, ϱ die Dichtigkeit der Atmosphäre ist,

$$n^2 - 1 = 4\,k\,\varrho, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo $4\,k$ eine empirische Konstante ist, welche den Werth hat

$$4\,k = \cdot\,000\,588\,768. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Drückt man die Dichtigkeit nach x aus, nach der Theorie des atmosphärischen Gleichgewichtes, so lässt sich die genaue Relation zwischen n und x bestimmen. Dies geschah durch Laplace und noch vollständiger durch Bessel; diese Untersuchung ist aber sehr verwickelt und gehört kaum ins Gebiet der Optik. Ausführliches

über Bessel's Untersuchung findet sich in Chauvenet's *Astronomie*, Vol. I.

§ **310.** Untersuchen wir nun den Fall, wo ein Strahl in einer Ebene verläuft in einem Medium, welches in Bezug auf die Ebene symmetrisch ist. Es ist die Gleichung für den Strahlenverlauf zu bestimmen.

Wir nehmen zunächst an, der Brechungsexponent folge einem bekannten Gesetz

$$n = f(x, y).$$

In Fig. 147 sei P der Einfallspunkt des Strahls in irgend einem Stratum von konstantem Brechungsvermögen. Q P sei die Richtung des Strahls vor, Q′ P R nach der Brechung und beide Richtungen schliessen Winkel θ resp. $\theta + \partial\theta$ mit der X-Axe ein.

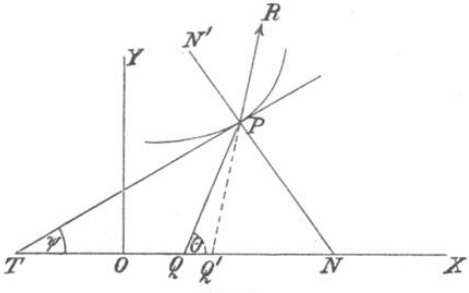

Fig. 147.

Man ziehe die Tangente P T und errichte die Normale N P N′ zu der durch P gehenden Kurve von gleichem Brechungsexponenten, und P T schliesse einen Winkel ψ mit der Axe ein. Nach dem Brechungsgesetz ist dann

$$n \sin \mathrm{QPN} = (n + \partial n) \sin \mathrm{RPN'} = (n + \partial n) \sin \mathrm{Q'PN}$$

oder

$$n \cos(\theta - \psi) = (n + \partial n) \cos(\theta + \partial\theta - \psi).$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von ∂n, $\partial\theta$, so erhält man aus dem letzten Ausdruck:

$$\partial n \cos(\theta - \psi) = n\, \partial\theta \sin(\theta - \psi).$$

Da ferner P T die Tangente an eine Kurve von der Gleichung $n = \text{const.}$ ist, so ist

$$\frac{dn}{dx} \cos\psi + \frac{dn}{dy} \sin\psi = 0$$

und

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds};$$

und aus diesen drei Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg}(\theta - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\psi} = \frac{\frac{dn}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dn}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}}{\frac{dn}{dy}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{dn}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}},$$

wofür sich schreiben lässt

$$\frac{dn}{ds}\operatorname{cotg}(\theta - \psi) = \frac{dn}{dy}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{dn}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

An Stelle der Gleichung für die Brechung lässt sich aber schreiben

$$\frac{dn}{ds}\operatorname{cotg}(\theta - \psi) = n\frac{d\theta}{ds} = \frac{n}{\varrho},$$

wo ϱ der Krümmungsradius des Strahlenverlaufs ist. Die Gleichung des Strahlenverlaufs lautet somit

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{dn}{dy}\frac{dx}{ds} - \frac{dn}{dx}\frac{dy}{ds}.$$

Da nun $-\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dx}{ds}$ die Richtungskosinusse der Normalen, in der Richtung von ϱ gemessen, sind, so kann man für diese Gleichung schreiben

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{dn}{d\nu},$$

wo ν ein Element der Normalen zur Kurve ist; oder endlich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{d\nu}(\log n). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

§ **311.** Ist das Medium aus horizontalen Schichten zusammengesetzt, so ist der Brechungsexponent eine Funktion von y allein und der Winkel ψ ist dann gleich 0. Aus der früheren Untersuchung ergiebt sich dann

$$\partial n \cos\theta = n\,\partial\theta \sin\theta,$$

oder

$$\partial(n\cos\theta) = 0.$$

Hieraus erhalten wir durch Integration

$$n\cos\theta = c,$$

wo c eine Konstante ist; diese Gleichung hätte man direkt aus dem

Brechungsgesetz ableiten können. Die Differentialgleichung des Strahlenweges ist daher

$$n^2 = c^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}$$

oder

$$\frac{dx}{c} = \pm \frac{dy}{\sqrt{n^2 - c^2}} \cdot$$

Sobald n als Funktion von y gegeben ist, kann diese Gleichung integrirt und die Gleichung für den Strahlenverlauf bestimmt werden.

Die Gestalt der Kurve ist symmetrisch in Bezug auf eine zur Y-Axe parallel gerichtete Axe. Um die Lage des Scheitels zu bestimmen, haben wir nur die Tangente horizontal werden zu lassen, d. h.

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

zu setzen, und es wird dann

$$n^2 = c^2.$$

Lassen wir den Strahl durch einen Punkt $(0, b)$, z. B. das Auge gehen, so finden wir einen geometrischen Ort für die Scheitelpunkte. Schreibt man $\Phi_{(y)}$ für n^2, so lautet die Gleichung für einen durch den Punkt $0, b$ gehenden Strahl

$$x = c \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{\Phi_{(y)} - c^2}} \cdot$$

Den Scheitel dieser Kurve findet man aber, wenn man deren Gleichung mit der anderen

$$\Phi_{(y)} = c^2$$

verbindet und es ist daher, wenn man mit (ξ, η) den Scheitel irgend eines ins Auge gelangenden Strahls bezeichnet,

$$\xi = \sqrt{\Phi_{(y)}} \int_b^\eta \frac{dy}{b\sqrt{\Phi_{(y)} - \Phi_{(\eta)}}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Um zu bestimmen, in welcher Lage ein dicht am Horizont befindliches Objekt erblickt werden würde, wenn das Auge sich mit demselben auf gleichem Niveau befände, haben wir die Scheitelkurve für sämmtliche Strahlen, welche ins Auge gelangen, zu verfolgen und die Punkte zu bestimmen, wo sie von einer in der Mitte zwischen Objekt und Auge befindlichen Vertikalen getroffen wird;

jeder der Schnittpunkte ist ein Scheitelpunkt des Verlaufs eines Strahls, mittelst dessen das Objekt erblickt wird. Neigt sich an einem dieser Punkte die Scheitelkurve dem Auge entgegen, so kreuzen sich zwei benachbarte Strahlen und es entsteht ein umgekehrtes Bild; neigt sich dagegen die Scheitelkurve vom Auge fort, so kreuzen sich die benachbarten Strahlen nicht und das entstehende Bild erscheint somit aufrecht.

§ **312.** Im Allgemeinen nimmt die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe über dem Boden ab. In sandigen Gegenden tritt jedoch häufig der Fall ein, dass der Sand sich erhitzt, dann die ihm zunächst liegenden Luftschichten erhitzt und verdünnt, so dass die Dichtigkeit der Luft von dem Boden nach oben zu bis zu einer gewissen Grenze zunimmt, dann aber wieder abnimmt. In der Höhe, wo die Dichtigkeit ein Maximum ist, ist n unveränderlich, so dass hier $\frac{dn}{dy} = 0$; aus der Gleichung des Strahls schliessen wir dann, dass $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ ist, so dass der Strahlenverlauf einen Wendepunkt besitzt.

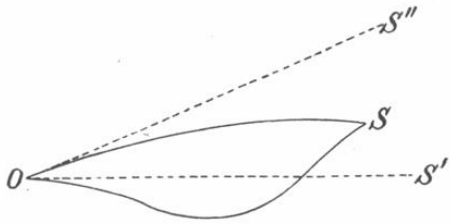

Fig. 148.

Ist S in Fig. 148 ein Gegenstand, O des Beobachters Auge, welche beide über der Schicht grösster Dichtigkeit liegen mögen, so wird ein von S nach O durch die oberen Luftschichten verlaufender Strahl dem Horizont gegenüber eine konkave Kurve beschreiben.

Verfolgen wir den Verlauf von Strahlen, welche in geringerer Neigung zum Horizont von S ausgehen, so werden einige konkav bleiben, dagegen werden die zum Horizont stärker geneigten Strahlen unter Umständen einen Wendepunkt haben und in diesem Falle kann ein Strahl, wenn er in seinem Verlauf durch den Boden unterbrochen wird, das Auge auf einem zweiten Wege erreichen. Es wird dann der Beobachter das Objekt direkt und aufrechtstehend durch den oberen Strahlenweg in der Richtung O S'', und ein umgekehrtes Bild in der Richtung O S' vermöge des unteren Strahlenverlaufs erblicken. Man gewinnt hierbei den Eindruck, als würde

ein oberes, aufrecht stehendes Objekt bei S'' in einem Spiegel oder einer Wasserfläche reflektirt.

Auf See tritt diese Erscheinung oft in umgekehrter Form auf. Hier nimmt die Dichtigkeit der Luft von der Wasserfläche aus schnell ab. Das Bild eines entfernten Schiffes oder der Küste wird daher oft aufrechtstehend durch die fast gleichförmigen unteren Luftschichten erblickt, während gerade über demselben ein umgekehrtes Bild entsteht, welches von den Strahlen herrührt, welche durch die oberen Schichten verlaufen. Diese Erscheinungen sind unter dem Namen Luftspiegelungen bekannt und wurden zuerst von Monge erklärt.

§ **313.** Der Brechungsexponent sei zunächst ganz allgemein durch

$$n = f_{(x,\ y,\ z)}$$

ausgedrückt.

Ein jeder Strahl wird so verlaufen, dass $\int n\,ds$ ein Minimum wird. Es sei $V = \int n\,d\,s$ für den Strahlenverlauf zwischen zwei Punkten A und B. Erfährt nun der Strahlenverlauf eine kleine Aenderung, so wird

$$\partial V = \int \partial n\,d\,s + \int n\,\partial\,(d\,s).$$

Da ferner

$$d\,s = \sqrt{(d\,x)^2 + (d\,y)^2 + (d\,z)^2},$$

so ist auch

$$\partial\,(d\,s) = \frac{d\,x}{d\,s}\,\partial\,(d\,x) + \frac{d\,y}{d\,s}\,\partial\,(d\,y) + \frac{d\,z}{d\,s}\,\partial\,(d\,z),$$

und das zweite Integral lässt sich daher in folgender Weise umformen:

$$\int \left\{ n\,\frac{d\,x}{d\,s}\,\partial\,(dx) + n\,\frac{d\,y}{d\,s}\,\partial\,(d\,y) + \frac{d\,z}{d\,s}\,\partial\,(d\,z) \right\}.$$

Es ist aber $\partial\,(d\,x) = d\,(\partial\,x)$.

Durch partielle Integration erhält man daher

$$\left[n\,\frac{d\,x}{d\,s}\,\partial\,x + n\,\frac{d\,y}{d\,s}\,\partial\,y + n\,\frac{d\,z}{d\,s}\,\partial\,z \right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

$$- \int \left\{ \frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dx}{ds}\right)\partial\,x + \frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dy}{ds}\right)\partial\,y + \frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dz}{ds}\right)\partial\,z \right\} ds.$$

Nach gehöriger Reduktion erhält man als Werth von $\partial\,V$

$$\partial V = \left[n \left(\frac{dx}{ds} \partial x + \frac{dy}{ds} \partial y + \frac{dz}{ds} \partial z \right) \right]_A^B$$

$$+ \int \left[\left\{ \frac{dn}{dx} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \right\} \partial x + \left\{ \frac{dn}{dy} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \right\} \partial y + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{dn}{dz} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \right\} \partial z \right] ds.$$

Es muss aber ∂V für alle unendlich kleinen Verschiebungen des Strahlenweges verschwinden, so dass für alle Punkte der Kurve die Relationen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) &= \frac{dn}{dx} \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) &= \frac{dn}{dy} \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= \frac{dn}{dz} \end{aligned} \right\}.$$

Für Eintritt und Austritt lautet dann die Endgleichung

$$\frac{dx}{ds} \partial x + \frac{dy}{ds} \partial y + \frac{dz}{ds} \partial z = 0.$$

Nehmen wir an, A und B seien gezwungen, sich auf Flächen zu bewegen, für welche V konstant ist, so ist diese Gleichung die Bedingung dafür, dass beiderendig der Strahl senkrecht zur Fläche V = konstant gerichtet ist.

Aus der Integration irgend zweier der obigen allgemeinen Gleichungen ergiebt sich die Gleichung für den Strahlenverlauf.

Die Richtungskosinusse des Krümmungsradius des Strahlenverlaufs sind

$$\varrho \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \varrho \frac{d^2 y}{ds^2} \quad \text{und} \quad \varrho \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Ist dm ein Element dieser Hauptnormalen, so ist

$$\frac{dn}{dm} = \varrho \left\{ \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dn}{dx} + \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dn}{dy} + \frac{d^2 z}{ds^2} \frac{dn}{dz} \right\} = n \varrho \left\{ \left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2 \right\}$$

$$+ \varrho \frac{dn}{ds} \left\{ \frac{dx}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} \right\} = \frac{n}{\varrho}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{dm}(\log n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

als die Differentialgleichung des Strahlenverlaufs.

Der Regenbogen.

§ **314.** Die erste befriedigende Erklärung des Regenbogens lieferte Antonius de Dominis, Erzbischof von Spalatro, in seinem Werke „De Radiis Visus et Lucis“ (1611). Er weist hierin nach, dass der innere Bogen durch zwei Brechungen und eine dazwischen liegende Reflexion des Sonnenlichtes im Regentropfen entstehe, während der äussere Bogen von zwei Brechungen und zwei dazwischenliegenden Reflexionen herrühre. Descartes nahm ebenfalls diese Erklärung an und bestätigte deren Richtigkeit experimentell durch mit Wasser gefüllte Glaskugeln, welche so aufgestellt waren, dass sie einen künstlichen Regenbogen hervorriefen. Newton vervollständigte die Theorie, indem er das Auftreten der Farben erklärte. Die vollständige Theorie führt auf Erörterungen, welche in die physikalische Optik gehören, und wurde von Airy durchgeführt. Wir müssen uns hier mit der approximativen Theorie begnügen.

§ **315.** Fallen die parallel gerichteten Sonnenstrahlen auf einen Wassertropfen, so wird ein Theil des Lichtes an der äusseren Fläche des Tropfens diffus gemacht und bewirkt, dass der Tropfen sichtbar wird; ein anderer Theil dringt in den Tropfen ein und wird gebrochen; von diesen Strahlen wird wieder ein Theil beim Austritt aus der entgegengesetzten Fläche des Tropfens gebrochen, während der andere Theil in den Tropfen reflektirt wird; dieser Vorgang wiederholt sich beliebig oft. Verfolgen wir nun die Strahlen, welche innerhalb einer Symmetrieebene zum Eintritt gelangen und welche nach einer Reflexion durch Brechung aus dem Tropfen treten; es ist leicht ersichtlich, dass nicht alle Strahlen in derselben Richtung zum Austritt gelangen, denn bekanntlich hängt die Ablenkung von dem Einfallswinkel ab. Ferner, nimmt der Einfallswinkel gleichmässig zu, so ändert sich die Ablenkung bald schneller, bald langsamer; je langsamer die Ablenkung sich ändert, um so geringer wird die Divergenz der austretenden Strahlen sein. Fängt man daher die austretenden Strahlen auf einem Schirm auf, so erscheint die beleuchtete Fläche nicht gleichmässig hell; vielmehr wird sie da am hellsten sein, wo die Divergenz am geringsten ist, d. h. da, wo die Ablenkung die langsamste Veränderung erfährt. Die Verände-

rungen der Ablenkung erfolgen aber immer in der Nähe eines Maximums oder Minimums am langsamsten; die Lichtfläche wird demnach da am hellsten sein, wo die Ablenkung ein Minimum ist. Innerhalb der Richtung kleinster Ablenkung wird überhaupt kein Licht transmittirt.

Wird anstatt eines einzelnen Tropfens eine ganze Schaar von Tropfen von Sonnenstrahlen beleuchtet, so werden diejenigen Tropfen, aus welchen vermöge ihrer Stellung die Strahlen in der Richtung nach dem Auge mit minimaler Ablenkung austreten, heller leuchtend erscheinen als andere und heben sich gegen die Wolke als besonders hell ab. Diese Erscheinung ist dieselbe für alle durch die Verbindungslinie zwischen Sonne und dem Auge des Beobachters gelegten Ebenen, und es wird daher die Vereinigung der hell erglänzenden Tropfen einen Kreisbogen bilden, dessen Mittelpunkt auf dieser Verbindungslinie liegt und dessen Radius vom Auge aus gemessen nur von dem Brechungsexponenten abhängt. Dieser ist aber nicht für alle Strahlengattungen des Sonnenlichtes der nämliche, sondern hat seinen grössten Werth für die violetten, seinen kleinsten Werth für die rothen Strahlen, und es wird daher die Lage des leuchtenden Bogens nicht für alle farbigen Strahlen dieselbe sein. Es entsteht daher eine Reihe von farbigen, ein Spektrum darstellenden Banden. Dies ist das Princip der Erklärung des Regenbogens.

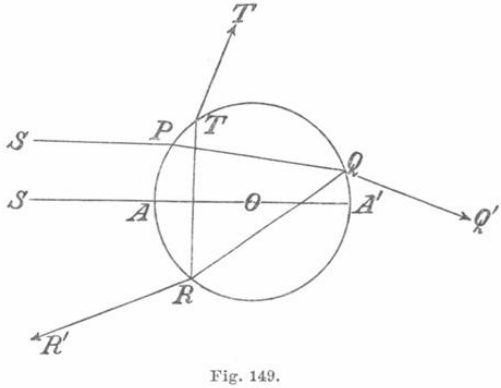

Fig. 149.

§ **316.** S P sei in Fig. 149 ein Lichtstrahl, welcher bei P auf einen Wassertropfen fällt, P Q sei der in dem Tropfen gebrochene Strahl. Ein Theil des Lichtes tritt durch Brechung bei Q in der Richtung Q Q′ aus, während ein anderer Theil bei Q in der Richtung QR reflektirt wird, wo wieder theilweise Reflexion und Brechung stattfindet, und so fort; i sei der Einfallswinkel bei P, i' der zuge-

hörige Brechungswinkel, so dass $\sin i = n \sin i'$. Die Ablenkung bei P ist dann $i - i'$. Beim Eintritt bei Q ist der Einfallswinkel i', und der Theil der Strahlen, welcher bei Q zum Austritt gelangt, erfährt wieder eine Ablenkung $i - i'$ in derselben Richtung wie vorher. Für den bei Q reflektirten Theil ist die Ablenkung aber $\pi - 2i'$, und da, wo der Strahl die Fläche wieder bei R trifft, ist der Einfallswinkel wiederum i'. Erfährt der Strahl daher m innere Reflexionen und tritt dann durch Brechung wieder hervor, so wird die Gesammtablenkung:

$$D = 2(i - i') + m(\pi - 2i') \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Die wirksamsten Strahlen sind, wie wir gesehen haben, diejenigen, welche die Ablenkung ein Maximum oder Minimum werden lassen. Um für solche Strahlen den Einfallswinkel zu finden, differentiiren wir D nach i und setzen den Differentialquotienten gleich 0. Es wird dann

$$0 = 1 - (m+1)\frac{di'}{di} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Aus der Relation $\sin i = n \sin i'$ folgt durch Differentiation

$$\cos i = n \cos i' \frac{di'}{di} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

und daher aus (19) und (20)

$$n \cos i' = (m+1) \cos i \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Ferner ist

$$n \sin i' = \sin i.$$

Durch Quadratur und Addition beider Seiten dieser Gleichungen findet sich

$$n^2 = (m+1)^2 \cos^2 i + \sin^2 i,$$

und hieraus

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 + 2m}} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Da i zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so hat i einen unzweideutigen Werth.

§ **317.** Für Wasser hat n ungefähr den Werth $\frac{4}{3}$, und damit i einen reellen Werth hat, muss der Zähler in (22) kleiner sein als der Nenner; es muss also sein $(m+1)^2 > n^2$ oder $m + 1 > \frac{4}{3}$. Es muss also m wenigstens gleich 1 sein und das in diesem Falle bei Q aus dem Tropfen tretende Licht hat weder maximale noch minimale

Ablenkung und bildet daher keinen Regenbogen. Für m existirt keine obere Grenze und theoretisch können Bögen nach jeder beliebigen Anzahl von inneren Reflexionen entstehen.

§ **318.** Wir haben noch festzustellen, ob der in (22) gegebene Werth von i für D ein Maximum, Minimum oder keines von beiden verursacht. Wir haben also noch den zweiten Differentialquotienten auf dessen Vorzeichen zu untersuchen.

Durch successive Differentiation von (18) erhalten wir:

$$\frac{d\,\mathrm{D}}{d\,i} = 2 - 2\,(m+1)\,\frac{d\,i'}{d\,i}\,,$$

$$\frac{d^2\,\mathrm{D}}{d\,i^2} = -\,2\,(m+1)\,\frac{d^2 i'}{d\,i^2}\,.$$

Nach (20) ist aber

$$\frac{d\,i'}{d\,i} = \frac{\cos i}{n \cos i'}$$

und hieraus

$$\frac{d^2 i'}{d\,i^2} = \frac{-\,n \cos i' \sin i + n \sin i' \cos i \dfrac{d\,i'}{d\,i}}{n^2 \cos^2 i'}\,.$$

Das Vorzeichen von $\dfrac{d^2\,\mathrm{D}}{d\,i^2}$ ist somit dasselbe wie dasjenige von

$$\cos i' \sin i - \sin i' \cos i \frac{di'}{di}\,.$$

Für $\dfrac{di'}{di}$ dessen Werth substituirt, ergiebt sich für den letzten Ausdruck

$$\frac{n \cos^2 i' \sin i - \cos^2 i \sin i'}{n \cos i'}\,.$$

Da nun i' immer kleiner als $\dfrac{\pi}{2}$ ist, so ist der Nenner dieses Bruches positiv und der Bruch nimmt also das Vorzeichen des Zählers an, also von

$$n \cos^2 i' \sin i - \cos^2 i \sin i'\,,$$

oder

$$n\,(1 - \sin^2 i') \sin i - (1 - \sin^2 i) \sin i'\,,$$

oder

$$n \sin i - \frac{\sin i}{n}\,,$$

oder schliesslich von

$$\sin i \frac{n^2 - 1}{n}\,.$$

Für Regentropfen ist $n = \frac{4}{3}$ und daher verursacht, da i immer positiv ist, der in (22) gegebene Werth von i für D ein Minimum für jede beliebige Anzahl von inneren Reflexionen. Die Ablenkung erfolgt naturgemäss in verschiedenen Richtungen, je nachdem die obere oder untere Hälfte des Tropfens getroffen wird.

§ **319.** Wir haben nun die Aufeinanderfolge der Strahlenfarben festzustellen, indem wir die Veränderungen in der Richtung der wirksamsten Strahlen für verschiedene Brechungsexponenten bestimmen. Stellt Δ die kleinste Ablenkung dar, so ist nach (18)

$$\Delta = m\pi + 2i - 2(m+1)i'$$

und nach (21)

$$n \cos i' = (m+1) \cos i.$$

Aus der ersteren Gleichung ergiebt sich

$$\frac{d\Delta}{dn} = 2\left\{\frac{di}{dn} - (m+1)\frac{di'}{dn}\right\},$$

ferner aus der Differentiation der Beziehung $\sin i = n \sin i'$

$$\cos i \frac{di}{dn} = n \cos i' \frac{di'}{dn} + \sin i'$$

und daher

$$\frac{d\Delta}{dn} = \frac{2}{\cos i}\left[\sin i' + \left\{n \cos i' - (m+1)\cos i\right\}\frac{di'}{dn}\right] = \frac{2 \sin i'}{\cos i};$$

das heisst

$$\frac{d\Delta}{dn} = \frac{2}{n} \operatorname{tg} i.$$

Hieraus folgt, dass $\frac{d\Delta}{dn}$ positiv ist; es nimmt also Δ mit n zu und die Ablenkung ist somit am stärksten für die violetten, am geringsten für die rothen Strahlen.

§ **320.** Es wurde bereits gezeigt, dass zur Erzeugung eines Regenbogens mindestens eine Reflexion innerhalb des Regentropfens erforderlich ist. Bei jeder weiteren Reflexion geht ein Theil des Lichtes verloren und die entsprechenden Regenbögen erscheinen lichtschwächer. Den durch eine innere Reflexion erzeugten Bogen nennt man den Hauptregenbogen. Der Einfallswinkel für die wirksamsten Strahlen ergiebt sich aus der Formel (22), wenn man hierin $m = 1$ setzt; es ist also

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}},$$

und für die Ablenkung haben wir die Formel:

$$D = 2(i - i') + \pi - 2i',$$

welche sich aus (18) ergiebt.

Die Brechungsexponenten von Wasser für rothe und violette Strahlen sind beziehungsweise $\frac{108}{81}$ und $\frac{109}{81}$. Setzen wir diese Werthe von n in die beiden letzten Formeln ein, so ergeben sich folgende Werthe für die den rothen und violetten Strahlen entsprechenden Ablenkungen

$$D_R = 137^0\,58'\,20''$$

$$D_V = 137^0\,43'\,20''.$$

Ist O in Fig. 150 das Auge des Beobachters und S O S′ eine die Richtung der Sonnenstrahlen darstellende Linie, und machen wir den

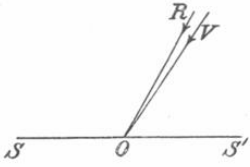

Fig. 150.

Winkel S′ O R gleich dem Supplement von D_R, also gleich $42^0\,1'\,40''$, so ist R O die Richtung, in welcher die wirksamsten Strahlen ins Auge gelangen. Ist ferner S′ O V ein Winkel, welcher gleich dem Supplement von D_V, also gleich $40^0\,16'\,40''$ ist, so ist V O die Richtung, in welcher die wirksamsten violetten Strahlen ins Auge gelangen. Die dazwischen liegenden farbigen Strahlen gelangen in Richtungen, welche zwischen O R und O V liegen, in's Auge.

Lässt man ferner die Linien O R und O V sich um die Linie O S′ als Axe drehen (Fig. 150), so ist klar, dass alle Tropfen, welche auf der durch Rotation von O R entstandenen Kegelfläche liegen, rothe Strahlen ins Auge senden; und Aehnliches gilt für die übrigen Farben. Das Auge erblickt daher eine Reihe von verschieden farbigen Bögen, deren violetter der am weitesten nach innen gekehrte ist.

Die Wirkung derjenigen Strahlen, welche das Auge mit grösserer Ablenkung treffen, besteht darin, dass sie eine Wolke innerhalb des Bogens mit schwachem Licht beleuchten, während kein Licht von Tropfen ausserhalb des Bogens in das Auge gelangt.

Die Trennung der Farben ist nicht eine vollständige; sie überdecken einander, so dass einige derselben kaum erkannt werden können. Diese Erscheinung findet, genau wie beim Newton'schen Prismenexperiment, ihren Grund darin, dass die Sonne einen Durch-

messer von 33′ hat und, da jeder Punkt der Sonne Strahlen aussendet, so erhalten wir, entsprechend den verschiedenen Elementen der Sonnenoberfläche, eine Reihe von einander überdeckenden und in einander verschmelzenden Regenbögen.

Ausser den bereits betrachteten ist noch eine andere Gruppe von Strahlen vorhanden, welche mit kleinster Ablenkung durch den Tropfen treten; es ist dies diejenige Gruppe von Strahlen, welche den Tropfen auf dessen Unterseite im gleichen Winkel wie vorher treffen. Diese werden nach der Brechung von der Erde abgelenkt und sind einem auf der Erde stehenden Beobachter nicht sichtbar, obgleich sie Bögen erzeugen, welche bisweilen bei Ballonfahrten oder auf über die Wolken sich erhebenden Bergspitzen erblickt werden. Steht die Sonne hinreichend tief, so lässt sich in dieser Weise zuweilen ein vollständiger Kreis beobachten.

§ **321.** Erfahren die Strahlen zwei innere Reflexionen, so erzeugen sie einen Regenbogen, den man als den sekundären oder Nebenregenbogen bezeichnet. Lässt man $m = 2$ werden und setzt die entsprechenden Werthe für n ein, so erhält man nach (18):

$$D_R = 230^0\,58'\,50''$$

$$D_V = 234^0\,9'\,20''.$$

Da diese Ablenkungen grösser als 180^0 sind, so erkennt man ohne Weiteres, dass diejenigen Strahlen, welche in das Auge eines auf der Erde stehenden Beobachters gelangen, auf der Unterseite des Tropfens zum Eintritt gelangen.

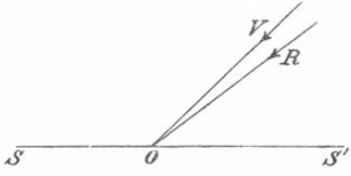

Fig. 151.

Ist S O S′ in Fig. 151 eine in der Richtung der Sonnenstrahlen durch das Auge des Beobachters gezogene gerade Linie und stellen die Winkel S′ O R und S′ O V beziehungsweise die Winkelgrössen $D_R - 180^0 = 50^0\,58'\,50''$ und $D_V - 180^0 = 54^0\,9'\,20''$ dar, so sind R O und V O die Richtungen der wirksamsten rothen und violetten Strahlen und die Erscheinung des sekundären Bogens lässt sich durch Rotation der Linien O R und O V um O S′ als Axe ableiten. Die Aufeinanderfolge der Farben ist in diesem Falle die umgekehrte wie vorher; das Violett bildet den äusseren, das Roth den inneren Saum.

Die Strahlen, welche das Auge unter grösserer Ablenkung treffen, beleuchten eine ausserhalb des Bogens befindliche Wolke. Der Nebenbogen ist weniger hell als der Hauptbogen, aus zwei Gründen: einmal erfährt das Licht infolge zweimaliger innerer Reflexion eine Abschwächung, dann aber auch ist die Dispersion der Strahlen bei diesem Bogen grösser als bei dem Hauptbogen.

§ **322.** Diese beiden Regenbögen sind die einzigen, welche unter gewöhnlichen Umständen sichtbar werden, wenn auch in der Theorie die höheren Bögen vorhanden sind. Die dritten und vierten Bögen werden nur unter ganz besonderen Umständen sichtbar. Denn nehmen wir $m = 3$, so wird für rothe Strahlen $D = 318^0\,24'$ $= 360 - 41^0\,36'$. Die Richtung der Strahlen fällt somit hinter die Wolken und würden einem dort befindlichen Beobachter gegenüber dem weit helleren direkten Sonnenlicht verloren gehen.

Für $m = 4$ ist $D = 360^0 + 44^0\,13'$. Der Fall vierer innerer Reflexionen unterscheidet sich daher nur wenig von dem letzten Fall. Die wirksamen Strahlen treten in die obere Hälfte des Tropfens und fallen wieder hinter die Wolken.

Für den fünften Bogen ist $D = 360 + 126^0$. Der Bogen hat also einen Radius von 54^0 und kann ausserhalb des Nebenbogens bemerkt werden; namentlich tritt dies bei Wasserfällen ein, wo die Tropfen sich in der Nähe der Augen befinden. Die Bögen höherer Ordnung lassen sich nur in Laboratorien unter sorgfältig vorbereiteten Bedingungen sichtbar machen.

Höfe und ähnliche Erscheinungen.

§ **323.** Ausser dem Regenbogen, welcher seine Entstehung Brechungen und Reflexionen des Sonnenlichts an in der Luft befindlichen Wassertropfen verdankt, giebt es andere Erscheinungen ähnlicher Art, welche sich auf die Gegenwart von das Sonnenlicht brechenden und reflektirenden Eiskrystallen in der Luft zurückführen lassen. Wir wollen im Folgenden diese Erscheinungen kurz behandeln.

Die am häufigsten vorkommenden sind die sogenannten Höfe. Es sind dies farbige Ringe, welche um die Sonne und auch um den Mond sichtbar werden. Der am häufigsten zu beobachtende Hof hat einen Radius von 22^0. Die Farben folgen vom inneren roth bis äusseren violett. Diese Erscheinung, welche in nördlichen Breiten eine sehr gewöhnliche ist, lässt sich auch in unserem Klima beobachten; meteorologische Stationen vermögen gewöhnlich mehrere wöchentliche Fälle anzuführen.

Ein anderer Kreis, dessen Winkel 46° beträgt, umgiebt den ersteren und enthält die Farben in derselben Aufeinanderfolge.

Die nächst dieser am häufigsten vorkommende Erscheinung ist ein Kreis weissen Lichtes, welcher durch die Sonne geht und dem Horizont parallel gerichtet ist. Man nennt ihn den parhelischen Kreis.

Auf dem parhelischen Kreis bemerkt man mehrere weisse oder farbige Bilder der Sonne; an den Punkten, wo der Kreis den inneren Hof trifft, beobachtet man zwei farbige Bilder der Sonne, deren inneren Säume roth erscheinen. Diese Bilder treten deutlich hervor, wenn die Sonne am Horizont steht; bei höherer Stellung bemerkt man sie etwas ausserhalb der Schnittpunkte. Man nennt diese Bilder der Sonne Parhelia oder Nebensonnen.

Seltener erblickt man zwei ähnliche Bilder, ebenfalls auf dem parhelischen Kreise und zwar an den Schnittpunkten desselben mit dem äusseren Hof.

Noch seltener erblickt man auf dem parhelischen Kreise Punkte, welche sich durch eine plötzliche Zunahme in der Helligkeit bemerkbar machen. Diese Punkte sind ihrer Lage nach nicht unveränderlich; sie liegen zwischen 90 und 140° von der Sonne. Sie heissen Paranthelia. Das Anthelion ist ein weisses Bild, welches auf dem parhelischen Kreise der Sonne gerade gegenüber erscheint.

Ausserhalb des parhelischen Kreises sieht man oft Kurven, welche weniger einfach gestaltet sind als die Höfe oder der parhelische Kreis. Von den Parhelien des inneren Hofs gehen zwei schräge Bögen aus, welche man als Löwitz'sche Bögen bezeichnet.

Zu anderen Zeiten erblickt man an den oberen und unteren Theilen jedes Hofs tangentiale Bögen. Diejenigen des inneren Hofs erscheinen zuweilen verlängert und bilden dann gewissermaassen einen elliptischen Hof. Der Hof von 46° hat auch Tangentialbögen; diese treten aber niemals verlängert auf.

Schliesslich lassen sich an den Seiten des Hofes von 46° supralaterale und infra-laterale Tangentialbögen beobachten.

§ **324.** Diese Phänomene lassen sich nicht auf kleine Wassertropfen zurückführen. Bei den meisten derselben treten Farbenerscheinungen auf, ein Beweis, dass sie auf Brechung beruhen. Ferner kommen sie in unseren Himmelsstrichen öfter im Winter als im Sommer vor; in den Polargegenden scheinen sie mit einer Lebhaftigkeit, welche wir nie zu beobachten Gelegenheit haben.

Mariotte führte einige der beobachteten Erscheinungen auf die Anwesenheit von winzigen Eiskrystallen in der Luft zurück und andere Phänomene hat man derselben Ursache zugeschrieben. Einige von den hierbei gemachten Annahmen sind zwar willkürlich, aber

Galle und Bravais haben diese Theorie auf eine so feste Basis gestellt, dass sie kaum mehr bezweifelt werden darf.

Man hat die Eiskrystalle sorgfältig untersucht und hat konstatirt, dass eine Krystallform öfters vorkommt als alle anderen; es ist dies die hexagonale Säule, und zwar entweder in ihrer länglichen Form als Nadel, oder in ihrer flachen Form als hexagonales Blättchen.

Aus diesen Formen von Eiskrystallen resultiren drei Arten von brechenden Winkeln. Zwei benachbarte Seiten schliessen einen Winkel von 120°, zwei nicht benachbarte Seiten einen Winkel von 60° mit einander ein, während die Seiten mit der Basis einen Winkel von 90° einschliessen.

§ **325.** Der Hof von 22° wurde von Mariotte erklärt. Angenommen, die Atmosphäre sei mit nach allen Richtungen geneigten Eiskrystallen erfüllt, so wird unter diesen sich stets eine grosse Anzahl solcher Krystalle befinden, deren Axen senkrecht zu einer die Sonne und das Auge des Beobachters verbindenden Geraden gerichtet sind. Nun stellt aber ein Winkel von 22° die kleinste Ablenkung für einen durch ein Prisma mit einem brechenden Winkel von 60° tretenden Strahl dar. Hiernach würde also für alle Richtungen, welche einen Winkel von 22° mit der Auge und Sonne verbindenden Geraden einschliessen, ein Maximum für das transmittirte Licht bestehen. Ferner ist der Winkel kleinster Ablenkung für rothe Strahlen kleiner, als für violette und es wird daher der Hof farbig, und zwar roth innen, violett aussen erscheinen müssen.

Cavendish erklärte den Hof von 46° als von der Lichtbrechung durch Flächen herrührend, welche unter 90° zu einander geneigt sind; bei einer solchen Brechung ergiebt sich 46° als kleinster Ablenkungswinkel. Diese Erscheinung lässt sich im Uebrigen genau so wie die frühere erklären, und man erhält auch hier dieselbe Aufeinanderfolge der Farben. Da aber der brechende Winkel für den äusseren Hof grösser als für den inneren ist, so wird im ersteren Falle das Licht stärker diffundirt. Hieraus erklärt sich, dass der Hof von 46° weniger lichtstark ist, denn das Licht vertheilt sich über eine Ringfläche von doppelt so grossem Radius und doppelt so grosser Breite.

§ **326.** Die beiden Höfe sind die beiden einzigen Phänomene, deren Erklärung die Annahme zulässt, dass die Eiskrystalle in allen möglichen Richtungen angeordnet sind. Es ist indessen sehr wohl denkbar, dass gewisse Richtungen vorherrschen, indem die nadelförmigen Krystalle vermöge ihrer Schwere sich mit Vorliebe in vertikaler Stellung gruppiren werden, während die flachen Krystalle sich bestreben werden, sich mit ihren Grundflächen vertikal zu stellen.

Die Reflexion des Lichtes an den nach allen Richtungen vertheilten, aber mit ihren brechenden Flächen vertikal gerichteten Eisprismen bringt den parhelischen Kreis hervor. Sind diese vertikalen Flächen sehr zahlreich, so rufen sie im Auge den Eindruck eines vollständigen Kreises hervor. Die Reflexion an den Vertikalflächen der flachen Säulen führt zu derselben Erscheinung. Diese Erklärung wurde von Young geliefert.

§ **327.** Die Parhelia wurden von Mariotte erklärt. Sie sind auf die Anwesenheit von vertikal gruppirten, nadelförmigen Krystallen zurückzuführen. Angenommen, es sei eine grosse Anzahl vertikal gestellter Prismen mit einem brechenden Winkel von 60° vorhanden und es befinde sich die Sonne am Horizont, so werden die Sonnenstrahlen auf den Hauptschnitt der Prismen fallen. Die kleinste Ablenkung für solche Strahlen ist 22°, so dass die Parhelia sich nicht nur auf dem parhelischen Kreise, sondern auch auf dem Hof von 22° befinden. Befindet sich die Sonne über dem Horizont, so liegen die Sonnenstrahlen nicht in einer Hauptebene; sobald sie aber aus den Prismen hervortreten, schliessen sie denselben Winkel mit den brechenden Kanten, also mit der Vertikalen, ein wie beim Eintritt, so dass die Strahlen scheinbar von Punkten auf dem parhelischen Kreise ins Auge gelangen. Die kleinste Ablenkung in Bezug auf den Azimuth ist grösser als 22° und hängt von der Höhe der Sonne ab. Da die kleinste Ablenkung für verschiedene Farben eine verschiedene ist, so werden die Farben ein Spektrum bilden, dessen rother Bezirk der Sonne zugekehrt ist; auf der von der Sonne abgekehrten Seite überdecken die Strahlen einander, so dass sie einen Schweif weissen Lichtes bilden, welcher über 10 bis 20° längs des parhelischen Kreises sich erstreckt. Die Parhelia sind heller als die Höfe, da die vertikalen Prismen zahlreicher sind als die nach allen Richtungen geneigten.

Die von Löwitz beobachteten schrägen Bögen wurden von Galle und Bravais erklärt und kleinen Oscillationen der vertikalen Prismen um ihre mittlere vertikale Axe zugeschrieben. Die Konsequenzen dieser Anschauung sind indessen noch unvollkommen durch die Beobachtung bestätigt worden.

Die Parhelia von 46° sind sehr selten zu beobachten und man kennt ihre Lage mit wenig Bestimmtheit. Bravais nimmt an, sie entstehen bei 44° infolge der wie die Sonne wirkenden Parhelia von 22°.

§ **328.** Um eine Erklärung für die Entstehung der Paranthelia, der Punkte auf dem parhelischen Kreise, welche eine grössere Helligkeit besitzen als der übrige Theil des Kreises, zu finden, haben

wir diejenigen Krystallformen ins Auge zu fassen, welche eine konstante Ablenkung in den Lichtstrahlen hervorrufen. Bekanntlich tritt dies bei zwei Reflexionen an ebenen Flächen auf; denn wird ein Lichtstrahl an jeder von zwei ebenen Flächen reflektirt, so erfährt der Strahl eine Ablenkung, welche gleich dem doppelten Winkel zwischen den reflektirenden Flächen ist. Eisprismen aber, deren Axen vertikal sind und welche sich an zwei Flächen berühren, weisen äusserlich zwei reflektirende Flächen auf, welche um 120° gegen einander geneigt sind. Strahlen, welche an diesen Flächen reflektirt werden, erfahren eine Ablenkung von 240°. Hierdurch entstehen zwei weisse Bilder der Sonne auf dem parhelischen Kreise, jedes in einer Entfernung von 120° von der Sonne.

Dieselbe Wirkung wird durch Reflexion an den inneren Flächen eines Prismas hervorgerufen. Denn tritt ein Strahl an der Fläche a ein, wird dann bei b reflektirt, dann bei c und gelangt schliesslich bei d zum Austritt, so sind, wenn man die Winkel zwischen den Seiten mit $(a\,b)$, $(b\,c)$ und $(c\,d)$ bezeichnet und voraussetzt, dass

$$(a\,b) + (c\,d) = (b\,c),$$

Einfalls- und Austrittswinkel bei a und d einander gleich sind mit entgegengesetzten Vorzeichen und daher die Ablenkung gleich dem doppelten Winkel $(b\,c)$, also konstant ist. Prismen von Dreiecksquerschnitt oder sternförmigem Querschnitt liefern die hierzu erforderlichen Bedingungen.

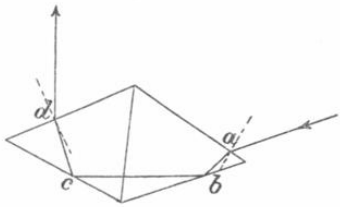

Fig. 152.

Figur 152 stellt zwei in Kontakt befindliche Prismen von dreieckigem Querschnitt dar, Fig. 153 einen sternförmigen Krystall mit sechs Spitzen. In jedem der beiden Fälle beträgt die hervorgerufene Ablenkung 240° und die Kombination erzeugt daher ein weisses Sonnenbild auf dem parhelischen Kreise in einem Abstande von 120° von der Sonne.

Verfolgen wir nun den Verlauf eines Strahls durch einen Krystall, dessen orthogonaler Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 154) ist, und nehmen wir an, der Strahlengang erfolge innerhalb einer Hauptebene, der Strahl treffe zuerst die Basis, werde dann durch

die beiden anderen Seiten reflektirt und gelange schliesslich in der Basis wieder zum Austritt, so erkennt man alsbald, dass in einem solchen Falle $\varphi + \psi$ die gesammte Ablenkung darstellt, wenn hierin φ und ψ beziehungsweise den Einfalls- resp. Austrittswinkel bezeichnen.

Für diese Ablenkung besteht ein Minimum, wenn sie 98^0 mit der Richtung der Sonnenstrahlen einschliesst; es entsteht dann ein farbiges Bild der Sonne auf dem parhelischen Kreise, in einem Abstande von ungefähr 98^0 von der Sonne.

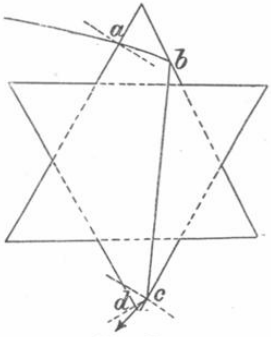

Fig. 153.

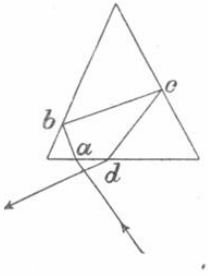

Fig. 154.

Befindet sich die Sonne nicht am Horizont, so lässt sich die letztere Untersuchung auf die Projektion des Strahlenganges auf eine horizontale Ebene anwenden, indem man an Stelle des Verhältnisses $n : 1$ das Verhältnis $n \cos \eta' : \cos \eta$ einführt, so dass

$$\sin \eta = n \sin \eta'.$$

§ **329.** Das Anthelion ist ein heller weisser Lichtfleck von undeutlichen Kontouren und erscheint oft grösser als der scheinbare Durchmesser der Sonne. Es befindet sich auf dem parhelischen

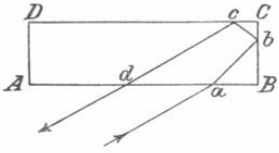

Fig. 155.

Kreis der Sonne diametral gegenüber. Um hierfür eine Erklärung zu finden, hat man anzunehmen, dass die sechsseitigen flachen Prismen so gruppirt sind, dass die Axe horizontal, eine der drei Diagonalen dagegen vertikal ist. Verfolgen wir nun die Lichtstrahlen, welche nach dem Durchtritt durch eine der vier vertikalen Flächen

des Krystalles innerhalb desselben zweimal an Krystallflächen, welche unter rechtem Winkel gegen einander geneigt sind, reflektirt werden und schliesslich an der Eintrittsfläche wieder zum Austritt gelangen, so erkennt man ohne Weiteres, dass die Strahlen beim Austritt parallel zur Eintrittsrichtung gerichtet sind (Fig. 155).

Diese Rückkehrstrahlen veranlassen das Anthelion. Befindet sich die Sonne über dem Horizont, so gilt das soeben Bemerkte in Bezug auf die horizontale Projektion des Strahlenweges.

§ **330.** Die Tangentialbögen wurden von Young, der sie erklärte, Krystallen mit brechendem Winkel von 60° und horizontaler Axe zugeschrieben. Sind von solchen Krystallen eine grosse Anzahl so gruppirt, dass deren horizontale Axen alle möglichen Lagen einnehmen, so erzeugen sie eine unendlich grosse Anzahl von Parhelien, von denen eines das Parhelion von 22° ist und auf dem höchsten Punkt des inneren Hofes liegt. Diese Reihen von Parhelien bilden zwei den Hof tangirende Bögen, welche sich zuweilen zu einem kontinuirlichen Bogen vereinigen. Ist eine grosse Anzahl von mit ihren Axen horizontal gerichteten Prismen vorhanden, so werden die winzigen Seiten dieser Prismen nur eine geringe Menge Licht transmittiren, so dass die Lichtstärke der Bögen verglichen mit derjenigen des parhelischen Kreises nur schwach ist.

Die den Hof von 46° tangirenden Bögen werden öfter sichtbar und leuchten dann mit grösserer Helligkeit; sie entstehen durch Lichtbrechung bei einem brechenden Winkel von 90°, welchen die nicht zugespitzten vertikalen Prismen darbieten; diese Prismen kommen in der Atmosphäre sehr oft vor. Jedes System von Prismen, deren Kanten zu einer bestimmten Richtung innerhalb einer horizontalen Ebene parallel gerichtet sind, erzeugt einen Lichtpunkt, und das Aggregat dieser Punkte bildet den Tangentialbogen an den Hof.

Die seitlichen Tangentialbögen rühren von flachen, mit ihren Axen horizontal gerichteten Prismen her.

Wegen näherer Ausführungen über diese Erscheinungen und ihre Theorie sei auf die Abhandlungen von Fraunhofer, Theorie der Höfe, Nebensonnen und verwandter Phänomene in Schumacher's Astron. Abh. 3. Heft, S. 31—92, 1825 (Ges. Schriften hrsg. v. Lommel, München 1888, S. 181—232), Bravais, Ueber Höfe, Journ. de l'École polytechn. t. XVIII, 1847, und das Werkchen von Clausius, Die Lichterscheinungen der Atmosphäre (Beiträge zur meteorologischen Optik, hrsg. v. Grunert I, 4, S. 367—462), Leipzig 1850, verwiesen.