universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel X. Das Auge und das Sehen durch Linsen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel X.

Das Auge und das Sehen durch Linsen.

§ 192. Das Auge ist ein optisches Instrument, welches im Wesentlichen aus einer Reihe brechender, durch krumme Flächen begrenzter Medien und einem äusserst empfindlichen, einen Theil des Sehnervs bildenden Netz von Nervenfäserchen besteht. Ein in das Auge gelangendes Strahlenbüschel wird an den krummen Flächen gebrochen und auf jenem Netz zu einem Bildpunkt ver-

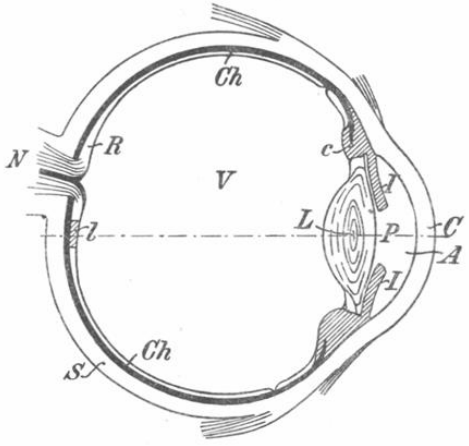

Fig. 103.

einigt und der dadurch erzeugte Eindruck durch den Sehnerv dem Gehirn übermittelt.

Das menschliche Auge, dessen für unsere Betrachtung wichtigsten Theile im ideellen Durchschnitt in Fig. 103 dargestellt sind, hat eine annähernd kugelförmige Gestalt, die vordere Fläche ausgenommen, wo es mit einer etwas stärkeren Rundung aus dem übrigen Theil hervortritt. Es ist von einer dicken zähen Hülle S umkleidet,

welche, den vorderen hervorstehenden Theil ausgenommen, weiss und undurchsichtig ist und die Sehnenhaut oder Sclerotica heisst. Dieselbe ist in dem lebenden Auge theilweise entblösst und wird in der Umgangssprache als das „Weisse“ des Auges bezeichnet. Der stärker vortretende Theil des Augapfels ist mit einer dicken, starken, durchsichtigen Haut C, der sogenannten Cornea oder Hornhaut bedeckt.

§ **193.** Der Augapfel ist ausserdem mit noch zwei anderen Bekleidungen versehen; unmittelbar innerhalb der Sclerotica liegt ein dünnes Häutchen Ch, die sogenannte Aderhaut oder Choroidea, und innerhalb dieser wieder liegt ein anderes dünnes Häutchen, die Retina oder Netzhaut R.

Die Innenfläche der Aderhaut ist mit einem schwarzen Pigment bedeckt, welches derselben ein sammetartiges Aussehen verleiht. Die Funktion dieses Pigmentes besteht darin, durch die Retina gedrungene Lichtstrahlen zu absorbiren und zu verhindern, dass sie von der Retina reflektirt werden, was die Deutlichkeit der erzeugten Bilder beeinträchtigen würde. Der vordere, von der Sclerotica sich abhehende Theil der Aderhaut ist verdeckt und bildet die zusammenziehbare, durch eine centrale Oeffnung, die sogenannte Pupille, durchbrochene Iris oder Regenbogenhaut I. Der äussere Rand der Iris ist fest mit dem Auge verbunden, während der innere Rand mittelst eines starken Muskelbandes, von welchem derselbe umsäumt ist, zusammengezogen werden kann, um so die Grösse der Pupille zu reguliren. Die Iris hat die Bestimmung, die Lichtmenge zu reguliren, welche auf den empfindlichen Theil des Auges fallen soll. Bei hellem Licht zieht sich die Pupille automatisch zusammen, während sie sich bei schwachem Licht erweitert. Die vordere Fläche der Iris ist bei verschiedenen Menschen verschieden gefärbt und tritt in allen Nüancen von blau, braun und grau auf. Ihre hintere Fläche ist mit schwarzem Pigment belegt, welches wieder dazu dient, fremdes, von inneren Reflexionen oder anderen Ursachen herrührendes Licht zu absorbiren. Kurz bevor die Aderhaut sich von der Sclerotica abhebt, spaltet sich die erstere in zwei Schichten; die vordere davon stellt die Iris dar, während die hintere ein kreisförmiges Faltensystem *c* bildet, welches halskrausenartig den äusseren Rand der (weiter unten beschriebenen) Linse umschliesst. Diese Falten, 70 bis 72 an der Zahl, nennt man die Ciliarfortsätze. Unter diesem dunklen Faltenring und daher in Berührung mit der Sclerotica liegt ein mit radial auslaufenden Fasern versehenes Muskelband, der sogenannte Ciliarmuskel.

§ **194.** Die Retina ist eine zarte, halbdurchsichtige Membrane,

welche durch die Verbreiterung des Sehnervs gebildet wird, und besteht aus den Endfasern dieses Nervs und aus Nervenzellen; sie bedeckt das ganze Innere des Augapfels bis zu den Ciliarfortsätzen. Genau im Centrum der Retina befindet sich ein runder gelblicher, etwas erhabener Fleck, welcher ungefähr 1,25 mm im Durchmesser misst und eine kleine Einkerbung, die sogenannte Fovea centralis, trägt. Es ist dieses der Punkt des deutlichen Sehens und die Fovea centralis ist der empfindlichste Theil der Retina. Ungefähr 2,5 mm innerhalb dieses gelben Flecks befindet sich der Punkt, von wo aus der Sehnerv seine die Retina bildenden Fasern aussendet; es ist dieses der einzige Punkt auf der Retina, welcher für Lichtstrahlen ganz unempfindlich ist, und wird daher als der blinde Fleck bezeichnet.

§ **195.** Im Innern des Auges, etwas hinter der Iris, schwebt ein weicher, durchsichtiger Körper, die Krystalllinse, L, welche die Gestalt einer Bikonvexlinse hat, deren vordere Fläche weniger gewölbt ist als die hintere. Die Krystalllinse ist in eine dünne, durchsichtige Kapsel eingehüllt und wird durch die Ciliarfortsätze in ihrer Lage gehalten. Die Substanz, aus welcher die Krystalllinse besteht, ist doppelbrechend und wirkt wie ein uniaxialer, senkrecht zu einer Axe gespaltener Krystall. Sie ist aus einer Reihe von übereinanderliegenden Schichten zusammengesetzt, deren Brechungsexponent nach dem Mittelpunkt hin zunimmt; hier befindet sich der feste Kern, welcher einen sehr kleinen Krümmungsradius hat und das Licht am stärksten bricht.

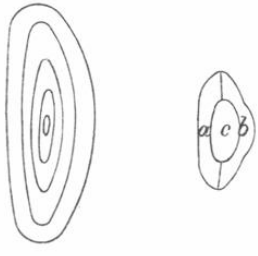

Fig. 104.

Es ist unschwer einzusehen, dass die Wirkung der Linse vermöge dieser Zusammensetzung eine stärkere ist, als wenn sie aus einer homogenen Masse bestände, welche denselben Brechungsexponenten besitzt, wie der Kern. Denn man kann, wie in Fig. 104 angedeutet, die Linse als eine Kombination einer Bikonvexlinse *c* mit zwei anderen, konkaven Linsen *a* und *b* ansehen. Diese konkaven Linsen heben bis zu einem gewissen Grade die Wirkung der Linse *c* auf, aber nicht in dem Maasse, als wenn ihre Brechungsexponenten ebenso gross wie derjenige von *c* wären. Die Brennweite der Linse lässt sich experimentell feststellen, und ist ihre Form bekannt, so lässt sich auch ihr sogenannter totaler Brechungsexponent bestimmen, d. h. der Brechungsexponent, welchen die Linse haben würde, wenn sie homogen wäre. Aus dem Angeführten folgt, dass dieser totale Brechungsexponent grösser als derjenige des Kerns ist.

Die Zunahme des Brechungsvermögens bei dem Uebergange von den äusseren zu den inneren Schichten der Linse dient theilweise dazu, um die Aberration zu korrigiren, indem infolge dieses Umstandes die Konvergenz der Strahlen von dem Rande nach der Axe des Strahlenbüschels hin stärker zunimmt.

§ 196. Der Zwischenraum zwischen der Cornea C (Fig. 103) und der Krystalllinse L ist mit einer durchsichtigen wasserähnlichen Flüssigkeit, der wässerigen Feuchtigkeit oder dem humor aqueus, A, angefüllt. Den Zwischenraum zwischen der Krystalllinse L und der Retina R füllt eine andere durchsichtige Flüssigkeit V von einer im Vergleich mit der erstgenannten Flüssigkeit etwas mehr dickflüssigen Natur aus; dieselbe wird als Glaskörper oder humor vitreus bezeichnet. Diese beiden Flüssigkeiten, ebenso wie die Krystalllinse, sind in durchsichtige, äusserst zarte Membranen eingekapselt.

Bezüglich ihres Brechungsexponenten unterscheiden sich der Glaskörper und die wässerige Flüssigkeit nur wenig vom Wasser, während der totale Brechungsindex der Krystalllinse ein wenig grösser ist als derjenige des Wassers.

§ 197. Um zu untersuchen, welche Veränderungen ein Strahlenbüschel, welches in das Auge gelangt, infolge der Brechung erleidet, müssen wir die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien, aus denen das Auge zusammengesetzt ist, und Gestalt und Lage der dieselben begrenzenden Flächen kennen. Die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien lassen sich in üblicher Weise bestimmen, nachdem man sie aus dem Auge herausgenommen hat. Es hat sich indessen herausgestellt, dass die Krümmungen der Begrenzungsflächen in dem todten Auge erhebliche Veränderungen erleiden, und man ist somit genöthigt, die erforderlichen Messungen an dem lebenden Auge vorzunehmen. Die Einzelheiten dieser Messungsmethoden anzugeben, würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen und wir müssen uns daher damit begnügen, kurz das Princip der Methode anzudeuten. Der Krümmungsradius einer Fläche lässt sich aus der Grösse eines durch Reflexion an derselben hervorgerufenen Bildes eines Objektes, dessen Grösse und Abstand bekannt sind, bestimmen. Die Schwierigkeit der Messung der Bildgrössen liegt in der störenden Beweglichkeit des Auges. Helmholtz hat nun ein Instrument erfunden, das Ophthalmometer, welches sich zu diesem, wie zu vielen anderen Zwecken verwenden lässt. Die Konstruktion dieses Instrumentes beruht auf der Thatsache, dass ein in schräger Richtung durch eine dicke Glasplatte betrachteter Gegenstand in seiner natürlichen Grösse, aber etwas seitlich verschoben, dem Auge sicht-

bar wird, wobei diese Verschiebung eine um so grössere ist, je grösser der Einfallswinkel der auf jene Glasplatte einfallenden Strahlen ist. Das Ophthalmometer besteht aus einem auf kurzen Objektabstand adjustirten Fernrohr, vor dessen Objektiv zwei dicke Glasplatten derartig angebracht sind, dass die eine Platte die eine Hälfte des Objektivs, die andere Platte die andere Hälfte desselben bedeckt. Die Platten lassen sich um ihre aneinander stossenden Kanten drehen; dreht man sie in entgegengesetztem Sinne, so entstehen zwei Bilder und der Abstand zwischen diesen beiden Bildern lässt sich nach den Neigungswinkeln der Platten zur Fernrohraxe berechnen. Ist nämlich h die Dicke der Platte, α der Einfalls- und β der entsprechende Brechungswinkel, so beträgt die scheinbare Verschiebung des Objektes: $\frac{h \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$. Die Platten werden nun soweit gedreht, dass jedes Bild um seine halbe Länge verschoben wird und somit die einander gegenüberliegenden Bildenden zusammenfallen. Die Länge des Bildes ist dann gleich dem Abstande zwischen den beiden Bildern.

§ 198. Der Abstand zwischen der Oberfläche der Cornea und der Ebene der Iris lässt sich messen, indem man das durch die Cornea reflektirte Bild eines hell erleuchteten Objektes beobachtet. Der Abstand zwischen der Cornea und dem hellen Bilde ist bekannt; betrachtet man nun dieses Bild von verschiedenen Punkten aus, so wird es auch auf verschiedene Stellen der Iris projicirt und wenn man die Abstände dieser Projektionen von dem Rande der Iris misst, so lässt sich der Abstand der Irisebene bestimmen. Näheres über diesen Gegenstand giebt das „Handbuch der physiologischen Optik von Helmholtz“.

Die vordere Fläche der Cornea hat sehr annähernd die Gestalt eines Segmentes eines Rotationsellipsoids, dessen Rotationsaxe sich mit der grossen Axe der Ellipse deckt. Die Gestalt der hinteren Fläche hat sich bis jetzt noch nicht ganz genau feststellen lassen. Indessen sind die beiden Flächen der Cornea fast parallel, und da die vordere Fläche immer durch Wasser, dessen Brechungsindex mit demjenigen der wässerigen Feuchtigkeit übereinstimmt, feucht gehalten wird, so wirkt die Cornea wie eine brechende, planparallele Platte und verursacht keine Ablenkung eines einfallenden Strahls. Man kann daher die optische Wirkung der Cornea vollständig unberücksichtigt lassen und kann bei optischen Untersuchungen des Auges annehmen, dass die wässerige Feuchtigkeit sich bis zur vorderen Fläche der Cornea erstreckt.

Die vordere Fläche der Krystalllinse ist der Form nach ein

Segment eines abgeflachten Sphäroids, und die hintere Fläche sieht man als ein Segment eines Rotationsparaboloids an.

§ **199.** Es sind somit drei Flächen vorhanden, an denen Brechung stattfindet, nämlich an der ersten Fläche der Cornea und an den beiden Flächen der Krystalllinse. Die Mittelpunkte dieser Flächen liegen fast genau in einer geraden Linie, der optischen Axe. Solange als die Richtung der Strahlen nicht erheblich von derjenigen der Axe abweicht, kann man die brechenden Flächen als mit den durch die entsprechenden Scheitelpunkte gelegten sphärischen Krümmungsflächen zusammenfallend ansehen. Die Gauss'sche Theorie der Brechung an einer beliebigen Anzahl centrirter Kugelflächen lässt sich daher auch auf diesen Fall anwenden und die Lage der Brennpunkte, der Hauptpunkte und der Knotenpunkte lässt sich rechnerisch feststellen, sobald die Krümmungsradien, die Lagen der brechenden Flächen und die Brechungsexponenten der Medien bekannt sind. Listing hat die folgenden Zahlen als sehr angenäherte Werthe für ein normales Auge angegeben; bei diesen Angaben ist für die Brechungsexponenten derjenige der Luft als Bezugseinheit angenommen.

a) Die Krümmungsradien der Begrenzungsflächen haben die folgenden Werthe:

1. Für die vordere Fläche der Cornea 8 mm
2. Für die vordere Fläche der Linse 10 -
3. Für die hintere Fläche der Linse 6 -

b) Die Abstände zwischen den brechenden Flächen betragen:

Zwischen der vorderen Fläche der Cornea und der vorderen Fläche der Linse . . 4 mm
Dicke der Linse . . . . . 4 -
Zwischen der hinteren Fläche der Linse und der Retina . . . . . 13 -

c) Die Brechungsexponenten der Medien sind:

1. Für die wässerige Feuchtigkeit $\frac{103}{77}$
2. Für die Linse (total) . . . . $\frac{16}{11}$
3. Für den Glaskörper . . . . . $\frac{103}{77}$.

Aus diesen Daten berechnete Listing die Lagen der Kardinalpunkte nach der Gauss'schen Theorie und fand die folgenden Werthe:

1. Der erste Brennpunkt liegt 12,8326 mm vor der Cornea und

der zweite Brennpunkt 14,6470 mm hinter der hinteren Fläche der Linse.

2. Der erste Hauptpunkt liegt 2,1746 mm, der zweite 2,5724 mm hinter der Cornea; der Abstand zwischen beiden ist somit 0,3978 mm.

3. Der erste Knotenpunkt liegt 0,7580 mm, der zweite 0,3602 mm vor der hinteren Fläche der Linse.

4. Die erste Brennweite beträgt somit 15,0072 mm, die zweite 20,0746 mm.

Die optische Wirkung dieses typischen Auges stimmt sehr angenähert mit derjenigen eines natürlichen Auges überein, und berücksichtigt man die individuelle Unterschiedlichkeit des Auges, so stellen die oben angeführten Zahlen eine vollständig genügende Annäherung an das natürliche Auge dar.

§ **200.** Wir sehen aus Obigem, wie in Fig. 105 dargestellt, dass die beiden Hauptpunkte, ebenso wie die beiden Knotenpunkte sehr

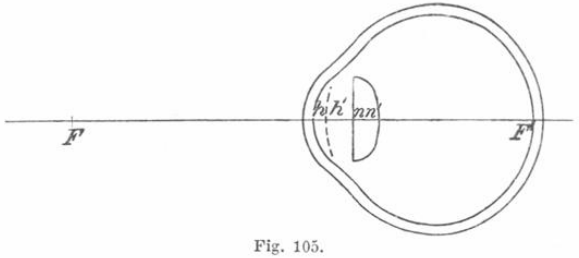

Fig. 105.

dicht neben einander liegen, so dass man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, in beiden Fällen dieselben als zusammenfallend ansehen kann. Unter Zugrundelegung dieser Annahme gelangen wir zu noch einfacheren Werthen, welche dem Listing'schen reducirten Auge entsprechen. Der Hauptpunkt liegt hier 2,3 mm hinter der Cornea und der Knotenpunkt 0,5 mm vor der zweiten Fläche der Linse. Ein solches Auge ist äquivalent einer einzelnen brechenden Kugelfläche, deren Scheitel mit dem Hauptpunkte und deren Mittelpunkt mit dem Knotenpunkte des Auges zusammenfällt, den Brechungsexponent wie vorher zu $\frac{103}{77}$ vorausgesetzt. Ein Punkt und dessen Bild auf der Retina müssen in einer durch den Knotenpunkt gehenden Linie liegen; wenn wir daher feststellen wollen, in welcher Richtung ein Objektpunkt liegt, dessen Bild bezüglich seiner Lage auf der Retina gegeben ist, so haben wir nur den Bildpunkt mit dem Knotenpunkte zu verbinden und diese Linie auswärts zu verlängern.

§ **201.** Wenn das Auge unthätig ist, so ist es klar, dass die Bilder nur solcher Punkte, welche innerhalb einer einzigen Fläche

liegen, genau auf die Retina fallen können. Die Gestalt und Lage dieser Fläche lässt sich aus den optischen Konstanten des Auges berechnen. Jedem in dieser Fläche liegenden Objekt entspricht ein der ursprünglichen Figur ähnliches, aber umgekehrtes Bild auf der Retina, wobei die Linien, welche zusammengehörige Objekte und Bildpunkte verbinden, alle durch den Knotenpunkt gehen. Wenn aber ein Punkt nicht auf dieser Fläche liegt, so wird auch sein Bild nicht auf der Retina liegen, sondern vor oder hinter derselben. In beiden Fällen schneidet die Retina das gebrochene Strahlenbüschel nicht in einem einzigen Punkt, sondern innerhalb eines diffusen Lichtkreises. Hieraus folgt, dass ein unbewegliches Auge nur solche Objekte deutlich sehen kann, welche in einer bestimmten Fläche liegen, und ziehen wir nur Lichtstrahlen in Betracht, welche kleine Winkel mit der Axe des Auges einschliessen, so kann man diese Fläche als eine Ebene ansehen. Alle ausserhalb dieser Ebene liegenden Objekte oder Theile von Objekten geben undeutliche Bilder, in welchen Diffusionskreise leuchtenden Punkten des Objektes entsprechen.

Die Erfahrung hat uns indessen gelehrt, dass ein Auge fähig ist, fast in jeder Entfernung deutlich zu sehen; es muss daher eine Vorrichtung vorhanden sein, welche das Auge verändert und ihm gestattet, willkürlich in verschiedenen Entfernungen zu sehen. Diese Fähigkeit des Auges, sich gegebenen Bedingungen entsprechend zu verändern, bezeichnet man als sein Akkommodationsvermögen. Man hat noch nicht mit absoluter Genauigkeit feststellen können, auf welche Entfernung ein unthätiges, d. h. nicht in Folge seiner Bethätigung akkommodirtes, Auge eingestellt ist, aber man nimmt allgemein an, dass ein passives normales Auge auf unendlich fern liegende Objekte eingestellt ist, so dass in dem ruhenden Auge der zweite Brennpunkt des Auges sich auf der Retina befindet. Hieraus folgt, dass, während das Auge sich auf nahe Objekte akkommodirt, Akkommodation nur in einer Richtung stattfindet.

§ 202. Experimentell hat es sich feststellen lassen, dass die Akkommodation durch Veränderung der Gestalt der brechenden Flächen des Auges bewirkt wird. Während das Auge sich auf nahe Objekte akkommodirt, wölbt sich die vordere Fläche der Krystalllinse etwas stärker und nähert sich der Cornea; dieses ist besonders bei demjenigen Theil der Linse der Fall, welcher nicht von der Iris bedeckt ist und sich so durch die Pupille hindurch wölbt. Diese Veränderungen lassen sich mit Hilfe des folgenden Experimentes beobachten. Wird ein brennendes Licht seitlich neben das Auge gestellt in einem im Uebrigen verdunkelten Raume und sieht

man von der anderen Seite aus in das Auge, so erblickt man in Folge der Reflexionen an den brechenden Flächen des Auges drei Lichtbilder der Flamme; das erste, ein virtuelles, aufrechtstehendes Bild, rührt von der vorderen Fläche der Cornea her; das zweite, ebenfalls aufrechtstehende, aber bedeutend schwächere und etwas grössere Bild rührt von der vorderen Fläche der Linse her; das dritte ist heller und ist ein umgekehrtes reelles Bild und entsteht durch Reflexion an der zweiten Fläche der Linse. Wenn nun das Auge erst einen sehr fernen und dann einen ganz nahe liegenden Gegenstand fixirt, so wird das zweite Bild sichtlich kleiner und nähert sich dem ersten Bilde, ein Beweis, dass die vordere Fläche der Linse sich stärker gewölbt und der Cornea genähert hat.

Statt einer Flamme wendet man besser einen mit zwei Löchern durchbohrten Schirm an, durch welchen man das Licht hindurchfallen lässt; der Abstand zwischen den reflektirten Bildern dieser Punkte lässt sich mittelst des Ophthalmometers messen.

§ **203.** Die folgende Tabelle veranschaulicht die während der Akkommodation auftretenden Veränderungen in den optischen Konstanten des Auges; die Abstände der Kardinalpunkte sind hierbei auf den Scheitel der Cornea bezogen und in mm ausgedrückt. Die Brechungsexponenten der Medien sind dieselben wie die oben angegebenen.

	Ruhendes Auge, eingestellt auf Fernsicht	Akkommodirtes Auge, eingestellt auf naheliegende Gegenstände
Krümmungsradius der Cornea	8	8
- - vorderen Linsenfläche	10	6
- - hinteren -	6	5,5
Lage der ersten Linsenfläche	3,6	3,2
- - zweiten -	7,2	7,2
- des ersten Brennpunktes	— 12,9	— 11,2
- - - Hauptpunktes	1,9	2,0
- - zweiten -	2,4	2,5
- - ersten Knotenpunktes	7,0	6,5
- - zweiten -	7,4	7,0
- - - Brennpunktes	22,2	20,2
Erste Brennweite	14,9	13,3
Zweite -	19,9	17,8

§ **204.** Wie wir wissen, ist, wenn sich das Auge in irgend einer Stellung in Ruhe befindet und für einen Gegenstand akkommodirt ist, das Sehen nur für einen Punkt, die Fovea centralis, deutlich; dies gilt aber auch nur von einer sehr kleinen, diesen Punkt umgebenden Fläche. Das Auge ist indessen mit einer sehr grossen Beweglichkeit begabt und bringt in einem unglaublich kurzen Zeit-

theilchen die verschiedensten Punkte entfernter Gegenstände in den Kreis des deutlichen Sehens. Wir sind hierdurch fähig, uns eine klare Vorstellung von einem Körper oder einer Fläche von beträchtlicher Ausdehnung zu machen. Hierbei wird das Auge wesentlich unterstützt durch die Dauer des Lichteindrucks, welchen dasselbe empfängt. Experimentell hat man festgestellt, dass diese Dauer von der Art des Lichtes abhängt. Für starkes Licht giebt Helmholtz $^1/_{24}$ Sekunde und für schwaches Licht $^1/_{10}$ Sekunde als die Dauer des Eindrucks an. Lissajou und Andere bezeichnen $^1/_{30}$ Sekunde als die untere Grenze für die Dauer eines Lichteindrucks. Wenn daher ein Fleck auf der Retina periodisch Lichteindrücke empfängt, so werden sich diese Lichteindrücke, wenn die Periodicität genügend klein ist, zu einem kontinuirlichen Eindruck summiren, welcher dieselbe Intensität aufweist, welche entstehen würde, wenn das ganze einfallende Licht irgend einer Periode gleichförmig über dieselbe vertheilt wäre.

§ **205.** Betrachten wir ein Auge in einer festen Stellung, so ist das Gebiet des deutlichen Sehens nur klein und man kann die Krümmung der Retina innerhalb dieses Sehfeldes vernachlässigen und die Lage eines Punktes auf derselben auf ein ebenes Koordinatensystem beziehen.

Das Auge ist indessen in seinem Sockel beweglich, so zwar, dass seine Axe bis zu fast 55° allseitig aus seiner Mittelstellung schwingen kann. Den entsprechenden körperlichen Winkel, innerhalb dessen also Gegenstände vermöge der Beweglichkeit des Auges gesehen werden können, nennt man das Sehfeld. Das durch äussere Eindrücke in einem einzelnen Auge erzeugte Bild liesse sich vollständig darstellen durch Punkte und Linien auf einer sphärischen Fläche, deren Mittelpunkt eben jener Punkt ist, um welchen das Auge drehbar angeordnet ist; es ist indessen für praktische Zwecke bequemer, die gesehenen Gegenstände auf eine ebene, statt auf eine sphärische Fläche zu projiciren. Denken wir uns in einiger Entfernung von einem bis zum Boden reichenden grossen Fenster stehend, und nehmen wir ferner an, es seien die durch ein einzelnes Auge durch das Fenster gesehenen Gegenstände auf das Glas gemalt genau in den Stellungen, in welchen sie dem Auge durch das Glas erscheinen, so wird eine solche Darstellung eine perspektivische Ansicht des Gesehenen repräsentiren. Die Projektion irgend eines Punktes ist derjenige Punkt, in welchem die Ebene des Fensters von einer jenen Punkt mit dem Mittelpunkt des Auges verbindenden Linie geschnitten wird. Die Projektion einer geraden Linie wird daher wieder eine gerade Linie sein müssen; denn wir haben nur

eine Ebene durch den Mittelpunkt des Auges und die gegebene gerade Linie gelegt zu denken, es kann diese Ebene die Bildebene nur in einer geraden Linie schneiden und eben diese gerade Linie stellt die Projektion der gegebenen geraden Linie dar. Vereinigen sich eine Reihe von Linien in einem Punkt, so laufen auch ihre Projektionen in einem Punkt zusammen, und es ist dieser Punkt die Projektion des Schnittpunktes der gegebenen Linien. Insbesondere, wenn die gegebenen Linien parallel sind, so laufen ihre Projektionen in einem Punkt zusammen. Um diesen Punkt durch eine geometrische Konstruktion zu bestimmen, ziehen wir von dem Centrum des Auges aus parallel den Linien unseres Systems eine gerade Linie nach der Bildebene. Diesen Punkt nennen wir den Fluchtpunkt des Systems. Vertikale Linien projiciren sich wieder als vertikale Linien. In diesen Bemerkungen liegt der Grundgedanke der Lehre von der linearen Perspektive, und aus den hier dargelegten Principien lassen sich leicht die gewöhnlichen einfachen Regeln für die Konstruktion der Projektionen von Umrissen gegebener Objekte ableiten.

§ **206.** Die Retinä beider unserer Augen nehmen Eindrücke auf, wenn wir auf irgend einen Gegenstand blicken, und in gewissen Stellungen der Augen sehen wir zwei von den beiden Retinä herrührende Bilder, während wir in anderen Stellungen nur ein Bild erblicken. Jedem Punkte der einen Retina ist ein Punkt der anderen Retina, ein sogenannter Deckpunkt, zugeordnet. Wenn nun die von den beiden Augen herrührenden Bilder eines Objektpunktes auf solche Deckpunkte fallen, so sehen wir nur einen Punkt, in jedem anderen Falle dagegen zwei Punkte. Die Punkte auf der Retina eines Auges lassen sich auf zwei Meridiane, welche wir uns als von zwei durch die Axe des Auges gelegten Ebenen gebildet denken, beziehen. Wird das Auge in horizontaler Lage vorwärts gerichtet, so entsprechen den Punkten auf dem Horizont Bildpunkte, welche auf einem Meridian liegen, welchen wir als den Netzhauthorizont bezeichnen wollen. Ebenso erscheinen gewisse Linien dem Auge als vertikale Linien; das Netzhautbild solcher vertikaler Linien auf der Retina stellt einen Meridian dar, welchen wir den scheinbar vertikalen Meridian nennen. Durch Versuche ist Helmholtz zu dem Schlusse gelangt, dass der Netzhauthorizont für beide Augen wirklich horizontal ist, dass aber die scheinbar vertikalen Meridiane nicht genau rechtwinkelig zum Netzhauthorizont gerichtet sind, vielmehr an ihrem oberen Ende nach aussen divergiren. Die Neigung eines jeden dieser Meridiane zur wirklichen Vertikalen ist die gleiche und beide schliessen mit einander einen

Winkel von $2^0\,22'$ bis $2^0\,33'$ ein. Helmholtz hat auch gefunden, dass bei normalen Augen sowohl die Punkte des deutlichen Sehens, als auch die Netzhauthorizontale und scheinbaren Vertikalen in beiden Augen aus Deckpunkten bestehen; dass ferner das Nämliche gilt von Punkten auf dem Netzhauthorizont bei gleichem Abstande vom Ursprung, ebenso wie von Punkten auf den scheinbaren Vertikalen bei gleichem Abstande von dem Ursprunge. Da nun das deutliche Sehfeld nicht gross ist und wir die Retinä in der Gegend der Fovea centralis als nahezu eben ansehen können, so haben wir auf jeder derselben ein Paar natürlicher schiefwinkeliger Axen, auf welche wir alle anderen Punkte beziehen können. Das Auge vermag sehr wohl die Parallelität von Linien zu beurtheilen und wir können hieraus den Schluss ziehen, dass Parallele auf der Retina als Parallele erscheinen, so dass aus den obigen Bemerkungen folgt, dass Punkte, deren Koordinaten in den beiden Retinä die gleichen sind, Deckpunkte sind. Oder der symmetrischen Anordnung der Axen entsprechend können wir sagen: Deckpunkte sind von jedem der Netzhauthorizontalen und von jedem der scheinbaren vertikalen Meridiane gleich weit entfernt.

§ **207.** Was nun auch immer die Richtungen sein mögen, nach welchen die Augen gedreht sein mögen, es werden stets solche Objektpunkte vorhanden sein, welche man als einfache Punkte erblickt; den geometrischen Ort solcher Punkte nennt man das Horopter. Wir werden sehen, dass dieses Horopter im Allgemeinen eine geschlungene kubische Kurve ist, welche wir uns als Schnitt zweier Hyperboloide mit einer gemeinsamen Erzeugenden denken können.

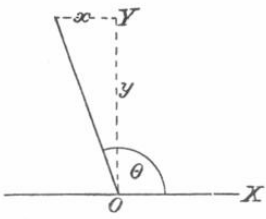

Fig. 106.

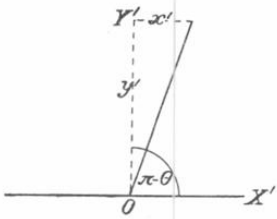

Fig. 107.

Nehmen wir in beiden Augen die optische Axe als die Z-Axe, den Netzhauthorizont als die X-Axe eines rechtwinkeligen Koordinatensystems an und bezeichnen, wie in Figuren 106 und 107, mit θ die Neigung des scheinbaren vertikalen Meridians zum Horizont der einen Netzhaut, so dass $\pi - \theta$ diejenige des Horizontes der anderen Netzhaut ist, so erhalten wir als die Gleichungen der scheinbaren Vertikalen:

$$\left.\begin{aligned} x \sin\theta - y\cos\theta &= 0 \\ x' \sin\theta + y'\cos\theta &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ferner sind (x, y) und (x', y') die Koordinaten von Deckpunkten, vorausgesetzt, dass

$$y = y',$$

und

$$x \sin\theta - y\cos\theta = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

Decklinien auf den Netzhäuten lassen sich dann folgendermaassen charakterisiren:

$$r_x (x \sin\theta - y\cos\theta) + r_y y + r_z = 0,$$

$$r_x (x' \sin\theta - y'\cos\theta) + r_y y' + r_z = 0.$$

Verbindet man nun Deckpunkte auf den beiden Netzhäuten durch gerade Linien mit den Knotenpunkten der beiden Augen, so kann man diese Linien als korrespondirende Sehlinien bezeichnen. Schneiden sich beide in ihrer Verlängerung nach aussen, so erscheint der Schnittpunkt als einfaches Bild. Ganz analog erhält man, wenn man Decklinien auf der Netzhaut mit den Knotenpunkten verbindet, zwei Ebenen, welche man als korrespondirende Sehebenen bezeichnen könnte. Jedes innerhalb solcher korrespondirenden Ebenen gelegene Linienpaar erscheint als einfache Linie.

Sind

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = c; \quad x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = c$$

die Koordinaten der Knotenpunkte, so erhält man ohne Weiteres als Gleichungen eines Paares korrespondirender Sehebenen

$$r_x (x \sin\theta - y\cos\theta) + r_y y + r_z (z - c) = 0,$$

$$r_x (x' \sin\theta - y'\cos\theta) + r_y y' + r_z (z' - c) = 0,$$

denn beide Ebenen gehen durch den Knotenpunkt und schneiden die Netzhäute in Decklinien.

Bislang haben wir unseren Gleichungen ein besonderes Axensystem für jedes Auge zu Grunde gelegt; es ist indessen zweckmässig, alle Punkte auf ein festes Axensystem im Raum zu beziehen. Angenommen, dass nach erfolgter Transformation die Ausdrücke

$$x \sin\theta - y\cos\theta, \quad y, \quad z - c$$

die Form P, Q, R annehmen, cos P, Q, R lineare Funktionen der Koordinaten sind und dass eine analoge Bezeichnungsweise für die übrigen Koordinaten gilt, so erhalten die Gleichungen eines Paares korrespondirender Sehebenen die Form:

$$r_x \mathrm{P} + r_y \mathrm{Q} + r_z \mathrm{R} = 0,$$

$$r_x \mathrm{P}' + r_y \mathrm{Q}' + r_z \mathrm{R}' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass sich durch irgend einen Punkt im Raume eine Linie ziehen lässt, welche als einzelne Linie erblickt wird. Denn substituirt man in den Ausdrücken für P, Q, R, P′, Q′, R′ die Koordinaten jenes Punktes, so dienen die beiden Gleichungen dazu, um die Verhältnisse $r_x : r_y : r_z$ zu bestimmen. Diese Gleichungen erhalten indessen eine unbestimmte Form, sobald

$$\mathrm{P}\,\mathrm{R}' - \mathrm{P}'\,\mathrm{R} = 0,$$

$$\mathrm{Q}\,\mathrm{R}' - \mathrm{Q}'\,\mathrm{R} = 0,$$

und als Folge hiervon

$$\mathrm{P}\,\mathrm{Q}' - \mathrm{P}'\,\mathrm{Q} = 0$$

wird; sobald diese Bedingungen erfüllt sind, lassen sich unendlich viele Linien durch den gegebenen Punkt ziehen, welche alle als einfach gesehene Linien erscheinen müssten, woraus sich ergiebt, dass der Punkt selbst als einfacher Punkt erblickt wird. Die letzte Gleichungsgruppe bestimmt das Horopter.

Die Gleichungen

$$\mathrm{P}\,\mathrm{R}' - \mathrm{P}'\,\mathrm{R} = 0,$$

$$\mathrm{Q}\,\mathrm{R}' - \mathrm{Q}'\,\mathrm{R} = 0,$$

stellen Hyperboloide mit gemeinsamer, durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R} &= 0 \\ \mathrm{R}' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bestimmter Erzeugenden dar.

Eliminiren wir R′ in den Gleichungen der Hyperboloide, so erhalten wir die Gleichung

$$(\mathrm{P}\,\mathrm{Q}' - \mathrm{P}'\,\mathrm{Q})\,\mathrm{R} = 0;$$

ist daher R nicht gleich 0, so haben wir die dritte Gleichung

$$\mathrm{P}\,\mathrm{Q}' - \mathrm{P}'\,\mathrm{Q} = 0.$$

Die Punkte auf der geschlungenen, durch die beiden ersten Gleichungen bestimmten kubischen Kurve genügen daher auch der dritten Gleichung. Das Horopter hat daher die Gestalt einer geschlungenen kubischen Kurve. Die Form der Gleichungen zeigt, dass die Kurve durch die Knotenpunkte beider Augen geht.

Die zwei beliebige Punkte des Horopters verbindende Linie erblickt man als einzelne Linie; hieraus folgt, dass durch irgend

einen Punkt des Horopters unendlich viele, einzeln erblickte Linien gelegt werden können und dass diese Linien auf einem Konus zweiter Ordnung, dessen Spitze mit dem gegebenen Punkt zusammenfällt, liegen.

§ **208.** Bei einer bestimmten Stellung der Augen kann der Fall eintreten, dass das Horopter eine Ebene darstellt. Dieses ist dann der Fall, wenn beide Augen horizontal gegen den Horizont gerichtet sind. In diesem Falle können wir den Koordinatenursprung in einen in der Mitte zwischen den Augen und in der Ebene der Netzhäute liegenden Punkt verlegen, während die Z-Axe in die gegebene horizontale Richtung fällt und parallel zu den Axen beider Augen gerichtet ist und die Y-Axe vertikal steht. Ist a der Abstand zwischen den beiden Augen, c der Abstand des Knotenpunktes von den Netzhäuten, so lautet die Gleichung eines Paares korrespondirender Sehebenen

$$r_x \left\{ (x - a) \sin\theta - y \cos\theta \right\} + r_y\, y + r_z\,(z - c) = 0\,,$$

$$r_x \left\{ (x + a) \sin\theta + y \cos\theta \right\} + r_y\, y + r_z\,(z - c) = 0\,.$$

Diesen Gleichungen ist für sämmtliche Werthe von $r_x : r_y : r_z$ genügt, vorausgesetzt, dass

$$y \cos\theta + a \sin\theta = 0$$

ist. Die Gleichung des Horopters ist somit:

$$y = -a \operatorname{tg}\theta\,. \qquad (1)$$

Dasselbe ist eine *zum Horizont parallel gerichtete Ebene, welche durch den Schnittpunkt der scheinbaren vertikalen Meridiane geht.*

Nach Helmholtz fällt beim normal konstituirten Menschen diese Ebene sehr angenähert mit der Fussbodenebene zusammen und es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Obliquität der scheinbaren vertikalen Meridiane in dieser Relation der Fusspunktebene zu den Augen ihre Begründung findet.

§ **209.** Unsere Fähigkeit, die Entfernungen sichtbarer Körper abzuschätzen, beruht in erster Linie auf der Thatsache, dass wir zwei Augen haben. Während wir successive den Blick auf Punkte verschiedener Entfernung richten, müssen wir die Konvergenz der Axen beider Augen verändern, und der Grad der Konvergenz dieser Axen, während der Blick auf irgend einen Punkt gerichtet ist, verschafft uns eine Vorstellung von der Entfernung dieses Punktes. Entfernungen vermag indessen auch das einzelne Auge abzuschätzen, indem es die den Veränderungen der Stellung des Beobachters entsprechenden Lagenänderungen der Objekte beobachtet.

Unsere Vorstellung der Körperlichkeit beruht auf dem Vorhandensein zweier Augen. Die jedem der beiden Augen sich darbietenden Ansichten weichen um ein Weniges von einander ab, entsprechend der kleinen Abweichung der Stellung der Augen zum Objekt; durch die Verschmelzung der von den Retinä aufgenommenen Eindrücke erhalten wir die Vorstellung der Körperlichkeit. Dieser Vorgang lässt sich in leichter Weise am Stereoskop veranschaulichen. Dieses Instrument wurde von Wheatstone erfunden behufs Vereinigung zweier verschiedener auf photographischem Wege hergestellter Bilder, deren jedes von je einem Auge betrachtet wird. Diese beiden Bilder stimmen nicht vollkommen überein; vielmehr sind dieselben mit Hilfe einer photographischen Kamera hergestellt, welche mit zwei in geringem Abstande von einander gefassten Linsen versehen ist, so dass die mit diesem Apparat gemachten Aufnahmen zwei verschiedene Ansichten eines Gegenstandes darstellen, wie diese sich thatsächlich bei einer Betrachtung mit dem einen oder anderen Auge dem Beobachter darbieten. Mittelst Spiegel oder Prismen werden diese beiden Bilder zur Deckung gebracht und erzeugen dadurch den nämlichen Eindruck, als habe man körperliche Objekte vor sich, d. h. jeder Gegenstand erscheint dem Auge plastisch. Soll die stereoskopische Darstellung eine vollkommene sein, so müssen in unendlicher Entfernung liegende Punkte bei parallel gerichteten Augenaxen auf Deckpunkte der beiden Netzhäute fallen. Werden nun die Bilder innerhalb derselben Ebene in eine Entfernung von einander gerückt, welche noch kleiner ist als die soeben bestimmte, so entspricht der hierdurch erhaltene Eindruck demjenigen eines Reliefbildes.

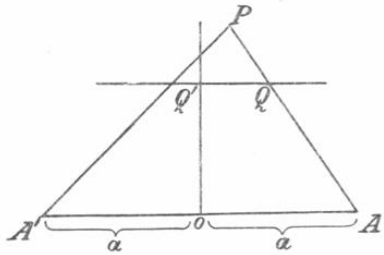

Fig. 108.

§ **210.** Die Veränderungen, welche bei der Annäherung zweier stereoskopischer Bilder gegen einander auftreten, lassen sich unter Zugrundelegung eines Axensystems sehr wohl analytisch untersuchen.

A und A' seien in Fig. 108 die Mittelpunkte beider Augen, $2a$ deren Abstand von einander.

Man nehme O, den Mittelpunkt von A A′, als Koordinatenursprung, O A als die positive Richtung der X-Axe und eine durch O gelegte Horizontale als Z-Axe. Ist nun P irgend ein Punkt, Q und Q′ die Schnittpunkte der Linien A P und A′ P mit der Ebene $z = b$, so sind Q und Q′ als die stereoskopischen Projektionen des Punktes P anzusehen. Sind (ξ, η, ζ) die Koordinaten von P, (u, v, b) und (u', v', b') diejenigen von Q und Q′, so hat A P die Gleichung

$$\frac{x-a}{\xi-a} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}.$$

Setzen wir daher $z = b$, so ergeben sich aus den Gleichungen $\frac{u-a}{\xi-a} = \frac{b}{\zeta}$ und $\frac{v}{\eta} = \frac{b}{\zeta}$ für u und v die Werthe

$$\left.\begin{aligned} u &= a + \frac{b}{\zeta}(\xi - a) \\ v &= \frac{b}{\zeta}\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Analog finden wir nach entsprechender Veränderung des Vorzeichens von a

$$\left.\begin{aligned} u' &= -a + \frac{b}{\zeta}(\xi + a) \\ v' &= \frac{b}{\zeta}\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Kombination beider Gleichungspaare erhalten wir

$$2a + u' - u = \frac{2ab}{\zeta} = e. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Diese Grösse e nennt man die stereoskopische Differenz. Sie ist konstant für alle Punkte innerhalb jeder beliebigen, zu O Z senkrecht gerichteten Ebene und verschwindet für unendlich entfernte Punkte.

Kennen wir die Koordinaten der Projektionen Q und Q′, so sind damit diejenigen des Punktes P bekannt. Denn bezeichnen wir mit x das arithmetische Mittel zwischen u und u', so folgt aus (2), (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\,\frac{2\,a}{e} \\ \eta &= v\,\frac{2\,a}{e} \\ \zeta &= b\,\frac{2\,a}{e} \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{\zeta} &= \frac{x}{b} \\ \frac{\eta}{\zeta} &= \frac{v}{b} \\ \frac{1}{\zeta} &= \frac{e}{2\,b\,a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

§ **211.** Denkt man sich nun das rechtsseitige Bild nach links, das linksseitige nach rechts verschoben und zwar beide um die Strecke η, so wird x unverändert bleiben, während e den neuen Werth $e + 2\,\eta$ erhält. Nehmen wir ferner an, der Maassstab der ursprünglichen Zeichnung werde im Verhältnis von $1 : n$ verjüngt, so dass wir für ξ, η, ζ der Reihe nach $n\,\xi$, $n\,\eta$, $n\,\zeta$ setzen müssen, und bezeichnen die Koordinaten des dem Punkte (ξ, η, ζ) korrespondirenden Punktes nach der angenommenen Transformation mit (ξ', η', ζ'), so ist

$$\frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{x}{b} = \frac{\xi}{\zeta},$$

$$\frac{\eta'}{\zeta'} = \frac{v}{b} = \frac{\eta}{\zeta},$$

$$\frac{1}{\zeta'} = \frac{e + 2\,\eta}{2\,a\,b} = \frac{1}{n\,\zeta} + \frac{\eta}{a\,b}. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Setzen wir der Kürze halber in (6) $\frac{a\,b}{\eta} = p$, so ist

$$\frac{1}{\zeta'} = \frac{1}{n\,\zeta} + \frac{1}{p}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Hieraus folgt, dass alle ursprünglich in unendlich grosser Entfernung liegenden Punkte nach der Transformation Punkten der Ebene

$$z = p$$

entsprechen.

Diese Ebene hat man als die Hauptebene des Reliefbildes bezeichnet.

Jede Ebene des ursprünglichen Systems stellt sich nach der Transformation wieder als Ebene dar. Denn die Gleichung

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

erhält, wenn man die Grössen (ξ', η', ζ') einführt, und durch ζ, dessen Werth sich aus (7) ergiebt, dividirt, die Form

$$A\frac{\xi'}{\zeta} + B\frac{\eta'}{\zeta} + C + D\left\{\frac{n}{\zeta'} - \frac{n}{p}\right\} = 0,$$

oder

$$A\xi' + B\eta' + \left(C - \frac{nD}{p}\right)\zeta' + Dn = 0.$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Transformation einer Reihe von Ebenen, welche durch eine Linie hindurchgehen, wieder eine Reihe von Ebenen ergeben, welche durch eine Linie gehen.

Eine Reihe paralleler Ebenen erhält man, wenn man D als variablen Parameter auftreten lässt. Die transformirten Ebenen gehen dann, wie ohne Weiteres einzusehen ist, durch eine durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\xi' + B\eta' + C\zeta' &= 0 \\ \zeta' &= p \end{aligned}\right\}$$

bestimmte Linie.

Hiermit ist eine Reihe von parallelen Ebenen in eine Reihe von Ebenen transformirt, welche durch eine in der Hauptebene liegende Linie gehen.

Ferner bleibt jede durch den Ursprung gelegte Ebene von der Transformation unberührt. Dies erhellt, wenn wir in den vorhergehenden Gleichungen $D = 0$ werden lassen.

Aus diesen Sätzen folgt ohne Weiteres, dass eine Reihe von Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, bei der Transformation in eine andere Reihe in einem Punkte sich schneidender Linien übergehen, und dass eine Reihe paralleler Linien durch die Transformation zu einem System von Linien wird, welche sich innerhalb der Hauptebene in einem Punkte schneiden.

Ferner folgern wir aus Gleichung (7)

$$\zeta = \zeta',$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{1}{\zeta}\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \frac{1}{p},$$

oder

$$\zeta = \frac{p(n-1)}{n}$$

ist. Ferner ist in demselben Fall $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, so dass ein jeder Punkt der Ebene

$$\zeta = p\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

bei der Transformation keine Verschiebung erfährt. Diese letztere Ebene bezeichnet man als die Kongruenzebene.

Rückt die Kongruenzebene unendlich nahe an die Hauptebene heran, d. h. wird n unendlich gross, so wird aus dem Reliefbild eine perspektivische Zeichnung.

Ein Reliefbild, bei welchem die Entfernungen und Tiefen sehr viel kleiner sind als bei dem Original, bringt in Bezug auf Form und Grössenverhältnisse, selbst bei binokularer Betrachtung, den Eindruck des körperlichen Originals hervor und stellt daher eine weit vollkommenere Nachbildung des Objektes dar, wenigstens, was dessen Gestalt anbetrifft, als dies bei der ebenen Darstellung jemals möglich ist.

Das Sehen durch eine dünne Linse.

§ **212.** *Bestimmung des Sehwinkels, unter welchem ein in der Linsenaxe liegendes Auge ein Objekt erblickt.*

Bedeuten in Fig. 109 β und β' die linearen Dimensionen des

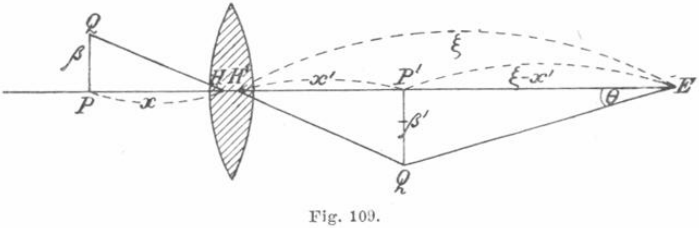

Fig. 109.

Objektes und seines Bildes, x und x' deren Entfernungen von dem ersten resp. zweiten Hauptpunkt, so ist

$$\beta' = -\beta \frac{x'}{x} \cdot$$

Bezeichnet man mit ξ den Abstand des Auges von dem zweiten Hauptpunkt, so dass $\xi - x'$ den Abstand des Bildes von dem Auge darstellt, so ist die Grösse des Winkels θ, unter welchem der auf

einer Seite der Axe liegende Theil des Bildes von dem Auge erblickt wird, gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta'}{\xi - x'} = \frac{\beta}{x\left(1 - \frac{\xi}{x'}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Mathematisch lässt sich daher die Grösse des Winkels θ beliebig derjenigen eines rechten Winkels nähern, wenn man nur x' fast ebenso gross wie ξ werden lässt. Der physiologische Vorgang des Sehens setzt indessen dieser beliebigen Annäherung an den rechten Winkel eine Grenze, indem das Auge, sobald ein bestimmter Abstand unterschritten wird, das Bild nicht mehr deutlich zu erkennen vermag. Bezeichnet λ den kleinsten zulässigen Abstand für das deutliche Sehen, so erhält man als grössten Werth für θ, wenn man $\xi - x' = \lambda$ werden lässt, nämlich

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{x'}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Minuszeichen deutet an, dass das Bild ein umgekehrtes ist.

§ **213.** Fällt das Bild auf die andere Seite der Linse, so wird x' negativ und θ erhält dann seinen grösstmöglichen Werth, wenn man das Auge möglichst nahe an die Linse bringt. In diesem Falle ist ξ so klein, dass man es gewöhnlich vernachlässigen kann, und man erhält dann aus (9) als angenäherten Werth von θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hieraus folgt, dass wir rein geometrisch $\operatorname{tg}\theta$ durch Verkleinerung von x einen beliebig grossen Werth geben können. Es ist nun nach (14, IV)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

und setzt man hierin $x' = -\lambda$, so erhält man als die Gleichung für den Fall, dass x' seinen kleinsten Werth erreicht hat,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{f}.$$

Der grösste Sehwinkel, unter welchem ein Objekt deutlich gesehen werden kann, ist somit nach (11) bestimmt durch die Formel

$$\operatorname{tg}\theta = \beta\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{f}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die Tangente des Sehwinkels, unter welchem das in die Lage des Bildes gebrachte Objekt erscheinen würde, ist $\frac{\beta}{\lambda}$. Das Verhältnis der Tangenten beider Sehwinkel stellt die Vergrösserung oder das Abbildungsverhältnis dar. Für diese Grösse erhalten wir somit

$$N = 1 + \frac{\lambda}{f}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Für Konvexlinsen ist f positiv und somit erscheint das Objekt durch die Linse vergrössert; für Konkavlinsen dagegen ist f negativ und durch die Linse betrachtet erscheint in diesem Falle das Objekt verkleinert.

§ **214.** Substituiren wir in Formel (9) für x' seinen Werth aus (12), so wird daraus

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta}{x + \xi - \frac{x\xi}{f}}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Aus dieser Formel erkennt man unschwer, in welcher Weise der Sehwinkel sich entsprechend verschiedenen Stellungen des Objektes und des Auges ändert.

Wir erkennen, dass die Formel in Bezug auf x und ξ symmetrisch ist, so dass man Auge und Objekt bezüglich ihrer Lagen in jedem Falle vertauschen kann, ohne dass dadurch eine Aenderung des Sehwinkels eintritt.

Befindet sich das Auge in einem der Brennpunkte, so ist die scheinbare Grösse unabhängig von der Lage des Objektes; und umgekehrt, wenn das Objekt mit einem der Brennpunkte zusammenfällt, so ist die scheinbare Grösse unabhängig von der Lage des Auges. Es ist nämlich in beiden Fällen die scheinbare Grösse die nämliche, wie in dem Falle eines mit dem blossen Auge gesehenen Objektes, das sich in Brennweitenabstand von dem Auge befindet. Setzen wir nämlich in Formel (15) $x = f$ oder $\xi = f$, so erhalten wir in beiden Fällen

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta}{f}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15a)$$

Andererseits ist, wenn das Objekt oder Auge sich unmittelbar vor der Linse befinden, die scheinbare Grösse dieselbe, in welcher das Objekt von dem blossen Auge gesehen würde. Denn in diesen Fällen müssen wir ξ oder x als sehr klein ansehen, und es wird somit nach (15)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta}{x} \text{ oder } \frac{\beta}{\xi}.$$

§ 215. In jedem Falle ist aber der Sehwinkel nothwendigerweise durch die Apertur der Linse beschränkt; es ist nämlich, wenn y die halbe Apertur der Linse bedeutet, der grösste Werth von tg θ angenähert gleich $\frac{y}{\xi}$. Die grösste lineare Ausdehnung eines bei beliebiger Lage durch eine Linse betrachteten Objektes bezeichnet man als das (lineare objektive) Gesichtsfeld. Einen Ausdruck für seine Grösse erhält man alsbald, wenn man in die Formel (15) $\frac{y}{\xi}$ für tg θ einsetzt. Der grösste zulässige Werth von β wird somit

$$\beta = yx\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{f}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Unter sonst gleichen Bedingungen ist also das lineare objektive Gesichtsfeld der Apertur der Linse proportional.

Befindet sich das Objekt in dem (vorderen) Brennpunkt der Linse, so ist $x = f$ und somit $\beta = \frac{yf}{\xi}$. Befindet sich dagegen das Auge in dem (hinteren) Brennpunkte der Linse, so ist die lineare Ausdehnung des Sehfeldes gleich der Apertur der Linse, was auch immer die Lage des Objektes sein mag. Denn wenn $\xi = f$, so ist nach (16) $\beta = y$.

Rückt man das Objekt dicht an die Linse, so wird x verschwindend klein und β wird nahezu gleich y, so dass in diesem Falle die Ausdehnung des Sehfeldes von der Lage des Auges unabhängig ist. Andererseits wird, wenn das Auge dicht an die Linse herangerückt wird, d. h. wenn man ξ verschwindend klein werden lässt, das Sehfeld sehr gross.

Brillen- und Lesegläser.

§ 216. Die Deutlichkeit der durch das blosse Auge aufgenommenen Bilder beruht auf der Genauigkeit der Vereinigung der Strahlen verschiedener Strahlenbüschel in Punkten der Retina. Wir haben bereits angeführt, dass das Auge mit einem Mechanismus begabt ist, welcher ihm ermöglicht, Objekte in verschiedenen Entfernungen deutlich zu erkennen. Ein normales, d. h. nicht akkommodirtes, Auge ist für aus grosser Entfernung kommende, sagen wir für parallele Strahlen eingestellt; um in der Nähe liegende Objekte deutlich wahrzunehmen, muss es das Akkommodationsvermögen zu Hilfe nehmen. In normalen Fällen liegt der Bereich des deutlichen Sehens zwischen 125 bis 150 mm und ∞. Augen, für welche

die grösste Entfernung des deutlichen Sehens endlich ist, nennt man kurzsichtig oder myopisch; solche Augen können nur divergente Strahlen auf der Retina in einem Punkte vereinigen. Augen dagegen, welche nicht nur parallele, sondern auch konvergente Strahlen auf der Retina zur Vereinigung zu bringen vermögen, bezeichnet man als weitsichtig oder hypermetropisch. Die hervorgehobenen Mängel finden in beiden Arten von Augen ihren Ursprung in Fehlern in der Länge der Augenaxe; bei kurzsichtigen Augen ist diese zu lang, bei weitsichtigen Augen dagegen zu kurz. Sowohl im kurzsichtigen als auch im weitsichtigen Auge kann hierbei das Akkommodationsvermögen ein vollkommen normales sein. Wenn dies der Fall ist, können die Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit hervorrufenden Fehler des Auges durch die Anwendung von Brillen vollständig kompensirt werden.

§ **217.** Die Grenzen des deutlichen Sehens für das blosse Auge seien durch die Abstände a und b des Objektpunktes gegeben. Für das normale Auge ist b unendlich gross, in dem kurzsichtigen Auge ist b endlich und positiv, für ein weitsichtiges Auge dagegen ist b endlich und negativ. Erblickt das Auge ein Objekt durch eine unmittelbar vor das Auge gesetzte Linse von der Brennweite f, und setzen wir f als positiv voraus für eine Sammellinse, als negativ für eine Zerstreuungslinse, so haben wir, wenn x, x' die Abstände eines Objektes resp. seines Bildes von dem Auge (oder von der Linse) nach aussen gemessen darstellen, nach (14, IV) die Beziehung:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Die in das Auge gelangenden Strahlen erscheinen nun als von dem Bilde divergirend; die Strahlen werden daher vereinigt, vorausgesetzt, dass x' zwischen den Grenzen a und b liegt Substituiren wir in (17) für x' die Werthe a resp. b, so ergeben die hieraus resultirenden Werthe von x die Grenzen des deutlichen Sehens durch Brillen.

Ist das Akkommodationsvermögen ein vollkommenes, so haben wir nur f so zu wählen, dass die Grenze des weitesten Sehens in der Unendlichkeit liegt. Wir müssen daher für $x' = b$, x unendlich gross annehmen, und als Brennweite des Brillenglases ergiebt sich somit aus (17) $f = -b$. Als Grenzwerth für den Abstand beim Sehen in der Nähe erhält man dann aus (17), indem man $x' = a$ setzt,

$$x = \frac{a\,b}{b - a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

es erstreckt sich somit der Umfang des deutlichen Sehens durch Brillengläser von $\frac{a\,b}{b-a}$ bis ∞.

Bei kurzsichtigen Menschen ist b endlich und positiv, somit f negativ; diese müssen daher Zerstreuungslinsen anwenden, gewöhnlich in Gestalt von Bikonkavlinsen, deren Brennweiten gleich der grössten, deutliches Sehen bei blossem Auge noch zulassenden Entfernung sein müssen. Stellen daher in einem gegebenen Falle Abstände vom Auge von 75 und 150 mm die Grenzen des deutlichen Sehens dar, so ermöglicht die Anwendung einer Konkavlinse mit einer Brennweite von 150 mm deutliches Sehen zwischen den Grenzen 150 mm bis ∞.

Bei einem weitsichtigen Auge ist dagegen b negativ und daher f positiv. Wenn z. B. die deutliche Sehweite sich von 300 mm, durch unendlich bis — 300 mm erstreckt, so müssen die gewählten Brillengläser Sammellinsen von 300 mm Brennweite sein. Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Formel (17) oder (18), so ergeben sich als Grenzen der Sehweite 150 mm und ∞.

Ein einfaches praktisches Mittel, um die für ein kurzsichtiges oder weitsichtiges Auge passenden Gläser zu finden, besteht darin, dass man den Patienten das Auge auf einen fernen Gegenstand richten lässt; das schwächste Konkavglas, durch welches einem kurzsichtigen Auge der entfernte Gegenstand deutlich erscheint, oder anderseits, das stärkste Bikonvexglas, mittelst dessen ein weitsichtiges Auge den fernen Gegenstand deutlich erkennt, kann dann als das passende Glas angesehen werden.

Die Grenzen der deutlichen Sehweite lassen sich dadurch bestimmen, dass man den Patienten durch derartig gewählte Konvexlinsen blicken lässt, dass die fraglichen Punkte innerhalb 300 mm von dem Auge zu liegen kommen, worauf man an einer Skala ihre Abstände vom Auge ablesen kann. Im Allgemeinen sind diese Abstände nicht für beide Augen dieselben, so dass die beiden Augen auch verschiedener Gläser bedürfen.

Kurzsichtige Personen, welche sehr feine Arbeiten zu verrichten haben, haben oft die Gegenstände sehr dicht an die Augen zu führen; in solchem Falle sollten reichlich schwächere Konkavgläser als die nach der oben angegebenen Methode ermittelten zur Anwendung kommen. Zu gleichem Zwecke verwendet man auch prismatische Gläser, welche ihre dicken Enden der Nase, die dünneren den Schläfen zukehren, indem mittelst dieser die Objekte unter geringerer Konvergenz der Augenaxen beobachtet werden können.

§ **218.** In dem Maasse, wie das Alter eines Menschen fort-

schreitet, verliert das Auge allmählich einen Theil seines Akkommodationsvermögens; man nimmt an, dass die äusseren Schichten der Krystalllinse ihre Elasticität verlieren und dass dadurch die Fähigkeit der Linse, ihre Gestalt und Krümmung willkürlich zu verändern, vermindert wird. Diesen Fehler bezeichnet man als Presbyopie. Die Presbyopie hat nichts mit der oben beschriebenen Weitsichtigkeit zu thun, wenn auch bejahrte Personen als weitsichtig bezeichnet zu werden pflegen. Die Structur des Auges ändert sich nicht mit dem steigenden Alter, so dass ein mit normalen Augen begabter Mensch im Alter noch entfernte Gegenstände erkennt, dagegen erleidet das Akkommodationsvermögen eine Verminderung, so dass das Auge nicht mehr Strahlen, welche von nahe liegenden Punkten kommen, auf der Retina vereinigen kann; mit anderen Worten, die untere Grenze der deutlichen Sehweite hat sich von dem Auge entfernt. Presbyopische Augen bedürfen daher konvexer Gläser, um sie nahe Gegenstände erkennen zu lassen, wie es beim Lesen und Schreiben erforderlich ist; diese Gläser müssen aber bei Seite gelegt werden, sobald die Entfernung des betrachteten Gegenstandes eine grössere wird. In der Regel wählt man die Gläser so, dass die geringste deutliches Sehen zulassende Entfernung von dem Auge 250 mm bis 300 mm beträgt. Bei sehr hohem Alter, bei welchem das Gesicht seine Schärfe verloren hat, wendet man oft zweckmässig Brillen an, welche die untere Grenze der deutlichen Sehweite auf 200 bis 175 mm oder weniger bringen, so dass die Objekte unter einem grösseren Winkel betrachtet werden können. Nach dem eben Gesagten ist es einleuchtend, dass Presbyopie gleichzeitig neben den anderen oben erwähnten Fehlern auftreten kann. Sowohl weitsichtige als auch kurzsichtige Augen lassen sich, wie wir gesehen haben, mit Hilfe einer Brille korrigiren. Tritt indessen Presbyopie ein, so bedürfen diese Augen zweier verschiedener Paare von Brillen, eines für das Sehen im Freien, das andere zum Lesen und Schreiben.

§ **219.** Vergrössernde Konvexlinsen von grosser Apertur werden oft zum Lesen oder zur Betrachtung kleiner Objekte angewandt. Solche Linsen können sowohl bei kurzsichtigen, als auch bei weitsichtigen Augen zur Anwendung kommen. Angenommen nämlich, die Linse werde in eine solche Lage zum Objekte gebracht, dass das letztere sich im Brennpunkte derselben befindet, so werden die aus der Linse tretenden Strahlen parallel. Nähert man nun die Linse etwas dem Objekte, so werden die Austrittsstrahlen divergent und lassen sich im kurzsichtigen Auge in einem Punkte der Retina vereinigen; entfernt man dagegen die Linse etwas von dem Objekte,

so werden die Strahlen konvergent und verhelfen somit dem weitsichtigen Auge zum deutlichen Sehen. In jedem Falle wird hier nach (14) die Vergrösserung $1 + \frac{\lambda}{f}$ sein, wenn hierin λ die kleinste deutliche Sehweite, f die Brennweite der Linse bedeutet.

Der Astigmatismus.

§ **220.** Abgesehen von den beschriebenen Fehlern des Auges kommt auch oft der Fall vor, dass das Auge in Bezug auf seine Axe nicht symmetrisch ist, und ferner leidet es auch, wie andere optische Instrumente, an sphärischer Aberration. Alle aus diesen Ursachen resultirenden Fehler des Auges fasst man unter dem Namen Astigmatismus zusammen[1]).

Blickt eine Person nach einem entfernten kleinen, hellen Punkt, während ihre Augen auf einen näher liegenden Gegenstand akkommodirt sind, so müsste man erwarten, dass ein kleiner kreisförmiger Lichtfleck auf der Retina erscheint; oft aber erblickt man anstatt eines solchen kreisförmigen Lichtflecks ein sternartiges, vier bis acht Strahlen aussendendes Gebilde. Die Form dieser Figur ist bei verschiedenen Individuen und meistens auch für beide Augen verschieden. Ist das Licht weiss, so treten an den Rändern der hellen Theile der Figur blau gefärbte Säume auf, während die nach der Mitte zu liegenden röthlich-gelb gefärbt erscheinen. Ist das Licht nur schwach, so sind nur die hellen Theile der Figur sichtbar und die Augen erblicken dann mehrere Bilder des leuchtenden Punktes. Die bekannte Erscheinung, dass uns ein Stern oder ein entferntes Licht nicht als eine scharfe Figur, sondern als ein glitzerndes Gebilde erscheint, ist mit dieser Anomalie in der Struktur der Augen eng verknüpft. Ist umgekehrt das Auge für eine grössere Entfernung als die des leuchtenden Punktes akkommodirt, so erblickt man eine andere sternartige Figur; selbst wenn das Auge sich auf den leuchtenden Punkt akkommodiren kann, so treten, vorausgesetzt, dass das Licht genügend stark ist, dieselben Erscheinungen auf. Stellt das Objekt eine ferne leuchtende Linie dar, so lassen sich die Formen, in welchen die Linie den Augen erscheint, leicht aus den früheren Erscheinungen folgern; man sieht mehrere Bilder der Linie; bei den meisten Augen beträgt die Anzahl der Bilder wenigstens zwei.

In einigen Fällen rühren diese Erscheinungen von Feuchtigkeit auf der Cornea her, und es lässt sich dann durch das Blinzeln mit

---

[1]) In Deutschland nicht. Man bezeichnet hier mit diesem Worte nur die nachstehend beschriebenen Fehler. Cz.

den Augenlidern Abhilfe schaffen. In den meisten Fällen beruhen diese Erscheinungen auf Unregelmässigkeiten in dem Bau der Krystalllinse.

Diese Erscheinungen bezeichnet man als irregulären Astigmatismus; sie lassen sich durch optische Hilfsmittel nicht beseitigen.

Donders untersuchte das Wesen dieser Anomalien, indem er durch einen engen Spalt Licht in das Auge treten liess und hierbei den Spalt in verschiedene Meridianebenen brachte. Er fand, dass gewöhnlich jeder Sektor der Linse die einfallenden Strahlen in einem Punkt vereinigt, dass aber die Vereinigungspunkte für verschiedene Sektoren nicht zusammenfallen. Ferner fand er, dass selbst innerhalb eines einzelnen Sektors nicht eine streng genaue Strahlenvereinigung stattfindet, dass vielmehr ein Vereinigungspunkt für in der Nähe der Augenaxe einfallende Strahlen weiter von der Linse entfernt liegt als ein solcher für in der Nähe des Pupillenrandes zum Eintritt gelangende.

§ **221.** Die Fehler im Bilde, welche von einer mangelhaften Symmetrie in der Krümmung der brechenden Flächen herrühren, nennt man regulären Astigmatismus. Diese Art des Astigmatismus kommt in fast allen Augen vor. Das Auge ist im Allgemeinen nicht geeignet, horizontale und vertikale Linien gleichzeitig mit gleicher Schärfe zu sehen. Blickt man auf eine Figur, welche aus mehreren, von einem Punkt ausgehenden Linien besteht, so werden, wenn sich irgend eine dieser Linien scharf und deutlich hervorhebt, die anderen unscharf erscheinen, und in dem Maasse, wie sich die Entfernung ändert, tritt bald die eine, bald eine andere als die deutlichste hervor. Oder blickt man auf eine aus einer Anzahl von koncentrischen, durch kleine Zwischenräume getrennte Kreise, so nimmt man in der Figur noch eine eigenthümliche sternartige Zeichnung wahr. Für die weissen Strahlen treten die Grenzlinien zwischen den schwarzen Kreisen und den weissen Intervallen scharf hervor und diese Deutlichkeit nimmt in dem Maasse ab, als man sich den dunkleren Strahlen nähert. Lässt man die Akkommodation des Auges sich ändern oder bringt man die Figur in eine grössere Entfernung vom Auge, so erscheinen andere Theile der Figur deutlich und wir erhalten den Eindruck, als ob die deutlicheren Strahlen hin- und herschwankten.

Hierfür giebt uns die Theorie dünner Strahlenbüschel eine Erklärung. Verfolgen wir den Verlauf eines von einem Punkte der Retina ausgehenden engen Strahlenbüschels von dem Auge aus nach aussen, so finden wir, dass das austretende Strahlenbüschel orthogonal ist und zwei Brennlinien hat, welche zur Axe des Büschels

senkrecht gerichtet sind und in Ebenen liegen, welche durch die Axe des Büschels gehen und senkrecht zu einander gerichtet sind. Für den jeweiligen Akkommodationszustand des Auges repräsentiren die Lagen dieser Brennlinien die Abstände, in welchen sich zu ihren Richtungen parallel gerichtete Linien am deutlichsten erkennen lassen. Bezeichnen wir die Abstände dieser Brennlinien von dem Auge mit p und q, so können wir nach § 157 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ als ein Maass für den Astigmatismus des Auges für den betreffenden Akkommodationszustand ansehen. Setzt man eine Linse vor das Auge, so wird dadurch der Werth von $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ nicht beeinflusst, so dass wir annehmen dürfen, dass, während der Zustand der Akkommodation sich ändert, der Werth von $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ fast konstant bleibt.

§ **222.** Diese Form des Astigmatismus lässt sich durch eine passend gewählte astigmatische Linse korrigiren. Setzen wir vor das Auge eine Linse solcher Art, dass einem von einem leuchtenden Punkt ausgehenden, durch dieselbe tretenden Strahlenbüschel ein Paar Brennlinien entsprechen, welche mit den bereits für das Auge gefundenen zusammenfallen, so wird das Strahlenbüschel bei seinem Eintritt in das Auge derartig gebrochen, dass die Strahlen sich in einem Punkte vereinigen.

Bei den zu diesem Zweck verwendeten Linsen ist die eine Fläche cylindrisch. Nach (45, VIII) ist das Maass des Astigmatismus einer cylindrischen Linse mit den Krümmungsradien a und b und dem Neigungswinkel 2α zwischen den Erzeugenden der beiden Cylinderflächen durch die Formel

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = (n-1)\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab}\cos 4\alpha}$$

ausgedrückt, oder für den Fall, dass die hintere Fläche eben ist (46, VIII), durch die Gleichung

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{n-1}{a}.$$

Eine Linse dieser letzteren Art lässt sich immer finden, um den Astigmatismus des Auges aufzuheben. Der Radius der cylindrischen Fläche muss dann der Bedingung genügen:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

§ **223.** Verbindet man zwei astigmatische Linsen, eine konkave und eine konvexe, derartig, dass ihre ebenen Flächen zu-

sammenfallen, so erhält man damit wieder eine cylindrische Linse wie im ersteren Falle. Sind die Radien der cylindrischen Flächen einander gleich, also $a = b$, so ist

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{2(n-1)\sin 2\alpha}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Diese Linsen können nun so gefasst werden, dass sie um ihre gemeinsame Axe gedreht werden können, so dass man α verändern kann. Der Astigmatismus der Kombination kann dann verschiedene Werthe annehmen und zwar von 0 für $2\alpha = 0$ bis zu $\frac{2(n-1)}{a}$ für $2\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Man gewinnt hiermit ein sehr bequemes Mittel, um den Astigmatismus eines Auges zu bestimmen. Man lässt den Patienten durch eine Konvexlinse eine durch eine Reihe von einem Punkt ausgehender Linien gebildete Figur betrachten und schiebt diese Figur allmählich so weit zurück, bis der äusserste Punkt erreicht ist, bei welchem der Patient noch irgend eine der vorhandenen Linien deutlich erkennen kann. Es wird nun ein Paar astigmatischer Linsen der eben beschriebenen Art eingeschaltet und diese dann um ihre gemeinsame Axe so weit gedreht, bis alle Linien sichtbar geworden sind; der Astigmatismus des Auges lässt sich alsdann durch denjenigen der Kombination corrigiren und ein Maass für die Grösse des Astigmatismus erhält man, indem man den Winkel zwischen den Erzeugenden der cylindrischen Flächen misst[1]).

§ 224. Die Richtung der Brennlinien des Auges lassen sich durch die Beobachtung bestimmen. Lassen wir die Brennebenen mit den Koordinatenaxen zusammenfallen, so ist, wenn wir uns der im § 157 angenommenen Bezeichnungen bedienen, $\theta = 0$. Somit ist $\sin 2\alpha = 0$ und hieraus $\alpha = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$.

Lassen wir die Erzeugende der cylindrischen Fläche mit der Richtung der entfernter liegenden Brennlinie zusammenfallen, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{(n-1)}{a}.$$

Hieraus ersehen wir, dass a negativ, somit die cylindrische Fläche konvex sein muss.

Soll die Fläche dagegen konkav sein, so müssen wir $\alpha = 0$

---

[1]) In Deutschland sind andere Verfahren üblich. S. die Lehrbücher der Augenheilkunde. Cz.

werden lassen, d. h. die Richtung der Erzeugenden der cylindrischen Fläche muss mit der Richtung der näher liegenden Brennlinie zusammenfallen.

Die zweite Fläche des Brillenglases kann anstatt eben auch sphärisch geschliffen werden. Die Wirkung einer solchen Linse ist dieselbe, wie die einer aus einer astigmatischen Linse und einer gewöhnlichen plan-sphärischen Linse bestehenden Doppellinse. Durch Anfügung einer solchen Linse wird die Grösse des Astigmatismus nicht beeinflusst und durch geeignete Wahl der Linsenkrümmung erhält man daher ein Mittel, um mittelst eines Brillenglases gleichzeitig den Astigmatismus und Myopie, Hypermetropie oder Presbyopie zu kompensiren.

Die Anwendung cylindrischer Linsen, um die aus dem Astigmatismus entspringenden Fehler zu korrigiren, wurde zuerst von Airy empfohlen.

Das Sehen durch eine beliebige Anzahl von Linsen.

§ **225.** Um zu bestimmen, auf welche Weise ein Objekt durch ein beliebiges System von Linsen von dem Auge erblickt wird, hat man den Verlauf eines Strahlenbüschels von irgend einem Punkte des Objektes zu verfolgen; die verschiedenen Vereinigungspunkte dieses Strahlenbüschels bestimmen die Lagen der verschiedenen Bilder des Objektes. Das Gesichtsfeld, die wirksamen Aperturen der Linsen, der Gesichtswinkel, unter welchem das Objekt gesehen wird, und die beste Stellung des Auges lassen sich alle ermitteln, sobald man den Verlauf der Axen dieser verschiedenen Strahlenbüschel verfolgt. Diese Axen treten alle durch die Knotenpunkte des Objektivs[1]), d. h. der ersten Linse des Systems, und lassen sich daher als ein von dem zweiten Knotenpunkt dieser Linse ausgehendes Strahlenbüschel ansehen. Die äussersten Strahlen dieses Büschels bestimmen das Gesichtsfeld und die wirksamen Aperturen der an die erste Linse sich anreihenden Linsen.

Wir haben bereits die Lage des Vereinigungspunktes eines engen, von einem Punkt ausgehenden und durch eine beliebige Anzahl von Linsen verlaufenden Strahlenbüschels untersucht. In unserem optischen System sind die beiden äussersten Medien gleichartig und es fallen somit die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammen und die beiden Brennweiten sind einander gleich.

---

[1]) Anders nach der Abbe'schen Theorie des Strahlenganges. S. Czapski, Theorie d. opt. Instr. Kap. VII.

§ **226.** Unter der Vergrösserung eines Fernrohres versteht man das Verhältnis zwischen dem Winkel, unter welchem ein Objekt einem durch das Fernrohr blickenden Auge erscheint, und dem bei Betrachtung mit blossem Auge. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die lineare Ausdehnung eines Objektes und seines Bildes, nicht deren Flächengrössen mit einander verglichen werden. Um dies ausdrücklich hervorzuheben, spricht man von der linearen Vergrösserung eines Instrumentes.

Die Axen der äussersten, in die Objektivlinse tretenden Strahlenbüschel bestimmen den Winkel, unter welchem ein Objekt für ein in dem Mittelpunkt des Objektivs befindliches Auge sichtbar wird; in dem Falle eines Fernrohrs weicht dieser Winkel nur unerheblich von demjenigen ab, unter welchem das Objekt von einem thatsächlich durch das Fernrohr sehenden Auge erblickt wird, indem die Länge des Fernrohres gegenüber dem Objektabstand in der Regel vernachlässigt werden kann.

Unter Benutzung der bei der Untersuchung der allgemeinen Gauss'schen Theorie gewählten Bezeichnungen denken wir uns die Axe eines der äussersten Strahlenbüschel bestimmt durch die Grössen β und b für das eintretende Büschel, durch β_1 und b_1, β_2 und b_2 .... β' und b' für die successive Brechung durch die folgenden Trennungsflächen der verschiedenen Medien. Da nun die Axen aller einfallenden Strahlenbüschel durch den ersten Knotenpunkt des Objektivs hindurchgehen, so ist zunächst angenähert $b = 0$, indem der erste Knotenpunkt eine sehr geringe Entfernung von der Fläche des Objektivs hat. Führen wir diesen Werth von b in die Gleichung (15, V)

$$\beta' = \mathrm{k}\, b + l\, \beta$$

ein, so ist

$$\frac{\beta'}{\beta} = l; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

l stellt somit *das Abbildungsverhältnis des Instrumentes dar.*

§ **227.** Das im Instrument erscheinende Bild der Objektivfläche wird als Augenkreis bezeichnet. Jeder Strahl, welcher durch das Instrument tritt, gelangt innerhalb dieses Augenkreises zum Austritt und zwar in dem Bilde desjenigen Punktes, in welchem der Strahl die Objektivlinse trifft.

Richtet man das Instrument auf eine leuchtende Fläche oder gegen den Himmel, so erhält ein jeder Punkt des Augenkreises Licht von den Ausgangspunkten aller solcher Strahlen im Raume, welche durch das Instrument treten können, das heisst von allen Punkten im Raume, welche mit Hilfe des Instrumentes erblickt werden

können. Giebt man dem Auge eine solche Stellung, dass sein Mittelpunkt im oder dicht an dem Centrum des Augenkreises liegt, so wird das Auge daher das gesammte Gesichtsfeld des Instrumentes überblicken. Der Mittelpunkt des Augenkreises entspricht somit der besten Stellung des Auges; man bezeichnet ihn als Augenpunkt.

Wie wir bereits hervorhoben, bilden die Axen der verschiedenen, auf die Objektivlinse auffallenden Strahlenbüschel ein von dem zweiten Knotenpunkte der Objektivlinse ausgehendes Strahlenbüschel. Der schliessliche Vereinigungspunkt dieses Strahlenbüschels nach seinem Durchtritt durch das Instrument liegt dicht an dem Mittelpunkt des Augenkreises; bei dieser Disposition gelangt in das Auge die grösstmögliche Anzahl von Axen der von dem Objekt ausgehenden Strahlenbüschel.

Um die Grösse und Lage des Augenkreises zu bestimmen, haben wir in (29, V) $\xi = a$ zu setzen und wir erhalten dann

$$\xi' = a' - \frac{n' h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Für diesen Punkt ergiebt sich ferner aus (27, V) die Beziehung

$$\frac{n' \eta'}{n \eta} = \frac{n' g - n' \frac{k h}{l}}{n},$$

d. h. da $g l - h k = 1$ ist,

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

l aber repräsentirt, wie wir wissen, die dem Fernrohr zukommende Vergrösserung. *Die durch das Instrument erzielte Vergrösserung ist somit gleich dem Verhältnis des Radius der Objektivlinse zu demjenigen ihres im Fernrohre erscheinenden Bildes.*

Wir erhalten hierdurch eine praktische Methode zur Bestimmung der Vergrösserung eines Teleskops. Wir richten das Teleskop auf eine beleuchtete Fläche und messen den Durchmesser des Augenkreises mittelst eines Mikrometers, d. h. einer durch eine Lupe abzulesenden Skala. Der Durchmesser der Objektivlinse lässt sich ebenfalls leicht messen und das Verhältnis des letzteren zum ersteren bestimmt die durch das Teleskop erlangte Vergrösserung.

§ 228. Das Gesichtsfeld ist durch die Axen der äussersten, in das Objektiv gelangenden Strahlenbüschel bestimmt. Die wirksamen Aperturen der verschiedenen brechenden Flächen ergeben sich aus den entsprechenden Werthen von b. Bedeutet β die Neigung der äussersten Axen der einfallenden Strahlenbüschel, so sind, da b

verschwindet, die wirksamen Aperturen durch die folgenden, aus den Gleichungen des § 73 sich ergebenden Formeln bestimmt:

$$\beta_1 = \beta, \qquad b_1 = \beta_1 t_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + k_1 b_1, \qquad b_2 = b_1 + \beta_2 t_2,$$
$$\beta_3 = \beta_2 + k_2 b_2, \qquad b_3 = b_2 + \beta_3 t_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta' = \beta_{m-1} + k_{m-1} b_{m-1}, \qquad b' = b_{m-2} + \beta_{m-1} t_{m-1}.$$

Diese Gleichungen bestimmen $b_1, b_2, \ldots . b'$.

Aus der Addition der ersteren Gruppe von Gleichungen ergiebt sich

$$\beta' - \beta = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots . + k_{m-1} b_{m-1},$$

wofür wir nach der zweiten der Gleichungen 15, V schreiben können:

$$(l-1)\beta = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots . + k_{m-1} b_{m-1} \ldots . \quad (24)$$

In Worten ausgedrückt heisst das: *Das Gesichtsfeld nimmt mit der Anzahl der konvexen Linsen kontinuirlich zu;* denn für beide Flächen einer konvexen Linse ist k positiv.

Wird die Apertur irgend einer der Linsen der Kombination verringert, so werden damit auch die Werthe sämmtlicher übrigen Aperturen sowie die Grösse des Gesichtsfeldes in gleichem Verhältnis kleiner. Es ist also zwecklos, die Apertur irgend einer Linse der Kombination grösser zu nehmen als deren wirksame Apertur.

§ **229.** Zuweilen kommt es vor, dass der Augenpunkt innerhalb des Fernrohres liegt, d. h. vor der nach aussen gerichteten Fläche der Augenlinse. Dieser Fall wird dann eintreten, wenn $\frac{h}{l}$ positiv ist, denn dann wird nach (22) $\xi' - a'$ negativ. Das Auge kann hier nicht mit dem Augenpunkt zusammenfallen, sondern man muss sich damit begnügen, dasselbe möglichst nahe an den Augenpunkt zu rücken; es nimmt daher seine Stellung unmittelbar vor der Augenlinse. Bei der Bestimmung des Gesichtsfeldes muss dann an Stelle des Radius der äusseren Fläche der Augenlinse der Radius der Pupillenöffnung in Rechnung gezogen werden. Es darf auch nicht die Objektivlinse als die gemeinsame Eintrittsfläche der das Bild auf der Retina erzeugenden Strahlenbüschel angesehen werden, da ein gewisser Theil der Lichtbüschel abgeblendet wird. Vielmehr hat man das durch das Instrument erzeugte Bild der Augenpupille als die gemeinsame Basis sämmtlicher einfallender Strahlenbüschel anzusehen. Dieses Bild hat man die Eintrittspupille genannt. Die Axen sämmtlicher eintretenden Strahlenbüschel, welche das Bild er-

zeugen, treten durch den Mittelpunkt der Eintrittspupille und das Gesichtsfeld ist durch den von diesem Punkt ausgehenden und die Objektivlinse füllenden Strahlenkegel begrenzt.

Helligkeit der Bilder.

§ **230.** Stellen β und β' die linearen Dimensionen eines Objektes und seines durch Brechung an einer sphärischen Fläche, welche zwei Medien vom Brechungsexponenten n und n' trennt, entstehenden Bildes dar und sind α und α' die Konvergenzwinkel zweier einander zugeordneter Strahlen in den beiden Medien, so ist nach (18, III)

$$n \beta \operatorname{tg} \alpha = n' \beta' \operatorname{tg} \alpha'.$$

Mit anderen Worten, der Werth von $n \beta \operatorname{tg} \alpha$ erleidet in Folge der Brechung keine Veränderung. Die letztere Gleichung gilt demnach für eine jede beliebige Anzahl von Brechungen, d. h. es ist

$$n \beta \operatorname{tg} \alpha = n' \beta' \operatorname{tg} \alpha',$$

wenn n', β' und α' sich auf das letzte einer beliebigen Anzahl von Medien beziehen.

Da α und α' kleine Grössen bedeuten, können wir, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, für die letztere Gleichung schreiben

$$n \alpha \beta = n' \alpha' \beta' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Stellen nun $d\mathrm{S}$ und $d\mathrm{S}'$ Flächenelemente des Objektes und seines Bildes, welche wir als senkrecht zur Axe stehend voraussetzen, dar, so dass

$$d\mathrm{S} : d\mathrm{S}' = \beta^2 : \beta'^2,$$

bezeichnen wir ferner mit $d\omega$ den kleinen, von dem von $d\mathrm{S}$ ausgehenden Strahlenbüschel eingeschlossenen körperlichen Winkel und mit $d\omega'$ den entsprechenden Winkel für das austretende Strahlenbüschel, mit I schliesslich die Helligkeit des Objektes, mit I' diejenige seines Bildes, so stellt

$$\mathrm{L} = \mathrm{I}\, d\mathrm{S}\, d\omega$$

die von dem Objektelement ausgehende Lichtmenge dar,

$$\mathrm{L}' = \mathrm{I}'\, d\mathrm{S}'\, d\omega'$$

diejenige, welche aus dem System hervortritt.

Unter der Voraussetzung, dass durch die Medien des Systems kein Licht absorbirt wird, ist $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, somit

$$\mathrm{I}\, d\mathrm{S}\, d\omega = \mathrm{I}'\, d\mathrm{S}'\, d\omega'.$$

Nach Obigem aber ist

$$d\,S : d\,S' = \beta^2 : \beta'^2;$$

ferner

$$d\,\omega : d\,\omega' = \alpha^2 : \alpha'^2;$$

daher

$$I\,\alpha^2\,\beta^2 = I'\,\alpha'^2\,\beta'^2.$$

Nach (25) erhalten wir hieraus die Gleichung:

$$I : n^2 = I' : n'^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Sind erstes und letztes Medium gleichartig, was bei optischen Instrumenten fast immer der Fall ist, so ist

$$I = I', \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26a)$$

d. h. *die Helligkeit eines durch Brechung von Strahlen geringer Konvergenz in einem beliebigen optischen System hervorgerufenen Bildes ist gleich derjenigen des Objektes.*

§ **231.** Dieses Gesetz behält aber auch dann seine Gültigkeit, wenn wir es mit einem weitwinkligen aplanatischen System zu thun haben, wenn also die oben geforderte Beschränkung, dass die Strahlen nur geringe Konvergenz besitzen, wegfällt.

Denn bestände seine Gültigkeit nicht, so wäre damit die Möglichkeit gegeben, ein optisches Instrument zu konstruiren, das ein durch dasselbe betrachtetes Objekt heller erscheinen liesse als das mit blossem Auge gesehene. Das aber steht im direkten Widerspruch mit den Resultaten aller mit den verschiedensten brechenden Körpern vorgenommenen Versuche. Wäre eine solche Möglichkeit für Licht vorhanden, so bestände sie auch für Wärmestrahlen, deren Emissions- und Brechungsgesetze mit denjenigen des Lichtes sich decken; wir stiessen somit auf einen Widerspruch des Gesetzes der Ausstrahlungsgleichung zwischen Körpern gleicher Temperatur. Hieraus schliessen wir, dass die obige Gleichung für die Helligkeit

$$I : n^2 = I' : n'^2$$

für alle aplanatischen Systeme gilt.

§ **232.** Wir dürfen nunmehr das Abhängigkeitsgesetz für die Konvergenzwinkel des eintretenden und austretenden Strahlenbüschels auch auf weitwinklige Systeme übertragen.

Untersuchen wir wieder, wie oben, die von einem Element $d\,S$ der senkrecht zur Axe gerichteten hellen Fläche ausgesandte Lichtmenge. Die Ausstrahlungsintensität für irgend eine Richtung ist bekanntlich dem Kosinus des Neigungswinkels dieser Richtung zur

Axe proportional. Somit ist die gesammte, innerhalb eines Kegels vom halben Oeffnungswinkel α ausgestrahlte Lichtmenge

$$L = I\, d\, S \int_0^{\alpha} \cos\theta \,.\, 2\pi \sin\theta\, d\theta\,,$$

oder

$$L = \pi I\, d\, S \sin^2 \alpha.$$

Für das entsprechende austretende Strahlenbüschel haben wir die Formel

$$L' = \pi I'\, d\, S' \sin^2 \alpha'.$$

Setzen wir beide Ausdrücke einander gleich, so wird

$$I\, d\, S \sin^2 \alpha = I'\, d\, S' \sin^2 \alpha'.$$

Es ist aber

$$I : n^2 = I' : n'^2,$$

und ferner

$$d\, S : \beta^2 = d\, S' : \beta'^2.$$

Somit erhalten wir schliesslich die Gleichung:

$$n\, \beta \sin \alpha = n'\, \beta' \sin \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Diese Gleichung drückt für weitwinklige aplanatische Systeme das Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Konvergenzwinkeln des ein- und austretenden Strahlenbüschels aus, während Gleichung (25) dasselbe Verhältnis für Strahlen geringer Konvergenz charakterisirt. Sind die Konvergenzwinkel sehr klein, so können wir unbeschadet der Genauigkeit α oder tg α für sin α schreiben.

Dieser Satz wurde 1874 zuerst von Helmholtz und unabhängig von ihm von Abbe aufgestellt.

§ **233.** Bei Instrumenten, welche starke Vergrösserungen liefern, tritt oft der Fall ein, dass das austretende Strahlenbüschel die Pupille des Auges nicht vollständig ausfüllt. In diesem Falle wird das Bild auf der Retina eine geringere Helligkeit besitzen, als wenn die Pupille von den Strahlen vollständig erfüllt ist.

Bedeutet nämlich I_0 die Helligkeit des Bildes bei vollständig mit Lichtstrahlen ausgefüllter Pupille, λ die Entfernung des Bildes vom Auge, so ist $\pi \lambda^2 \sin^2 \alpha'$ die Grösse eines in der Ebene der Pupille durch das Strahlenbüschel gelegten Schnittes. Ist ferner p der Radius der Pupillenöffnung, so ist

$$I : I_0 = \pi \lambda^2 \sin^2 \alpha' : \pi p^2,$$

woraus sich ergiebt

$$I = I_0 \left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 \frac{n^2}{n'^2} \cdot \frac{\beta^2}{\beta'^2} \sin^2 \alpha.$$

Das letzte Medium zwischen dem Auge und dem Instrument ist Luft, so dass $n' = 1$. Bezeichnet man ausserdem das Abbildungsverhältnis $\frac{\beta'}{\beta}$ mit N, so ist

$$I = I_0 \frac{\lambda^2}{p^2} \cdot \frac{n^2 \sin^2 \alpha}{N^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Diese Gleichung werden wir bei der Behandlung optischer Instrumente anzuwenden Gelegenheit haben.