

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel IX. Dispersion und Achromasie

Kapitel IX.

Dispersion und Achromasie.

§ 165. In unseren bisherigen Untersuchungen wurde das Licht als etwas in allen seinen Theilen Gleichartiges behandelt. Indessen ist das Sonnenlicht nicht homogen, sondern zusammengesetzt. Jeder einzelne Strahl des Sonnenlichts besteht aus einer unendlich grossen Anzahl homogener Elementarlichtstrahlen, welche von einander in Farbe und Brechungsvermögen verschieden sind. Diese Thatsache wurde zuerst von Newton festgestellt.

Bei seinen diesbezüglichen Versuchen verdunkelte Newton einen Raum und liess ein Sonnenlichtbündel durch eine kleine kreisförmige Oeffnung, welche in einem der Fensterläden angebracht war, in den dunklen Raum einfallen. Dieses Lichtbündel bildete einen kleinen weissen Fleck auf der gegenüberliegenden Wand. Er setzte nun ein dreiseitiges Glasprisma mit seiner brechenden Kante nach unten und rechtwinklig zur Strahlenrichtung dicht vor die Oeffnung im Fensterladen und richtete das Prisma so, dass die Strahlen dicht an der Kante durch dasselbe drangen. Der Lichtfleck an der Wand war nun nicht mehr kreisförmig und weiss, vielmehr erhielt Newton eine in die Länge gezogene, in lebhaften Farben glänzende Fläche. Seitlich war dieses farbige Bild oder Spektrum durch gerade, zur Prismenkante senkrechte Linien begrenzt, die Enden desselben dagegen erschienen als halbkreisförmige Bögen. Die Breite des Spektrums stimmte mit dem Durchmesser des ursprünglichen weissen Flecks überein, während seine Länge etwa fünfmal so gross war.

Diese Verlängerung des Bildes kann man sich nur erklären, wenn man die Strahlen des Sonnenlichtes als mit verschiedenartiger Brechbarkeit behaftet ansieht. Die Sonnenstrahlen sind bekanntlich nicht streng parallel. Wird aber das Prisma in seine Stellung kleinster Ablenkung gebracht, so bringt eine kleine Differenz im Einfallswinkel keine merkliche Differenz in der Ablenkung mit sich;

folglich wird die Neigung der austretenden Strahlen zu einander dieselbe wie diejenige der einfallenden Strahlen sein; wenn daher das Lichtbündel aus gleichartigen Strahlen bestände, so würde in Folge seines Durchtritts durch das Prisma auf der auffangenden Wand ein kreisförmiger Fleck von weissem Licht von derselben Grösse wie vorher, aber in einer der Ablenkung entsprechenden verschobenen Lage sichtbar werden.

Dieses Experiment beweist ferner, dass diejenigen Strahlen, welche in ihrer Brechbarkeit verschieden sind, auch in ihren Farben von einander abweichen; es ist nämlich das farbige Spektrum roth an seinem unteren oder den am geringsten gebrochenen Strahlen entsprechenden Ende, und von hier aus geht die Farbenskala in unmerklich feinen Abstufungen allmählich durch gelb, grün, blau, bis zum oberen oder der stärksten Brechung entsprechenden Ende, dem Violett, über. Newton unterschied sieben primäre Farben; dieses waren, nach steigender Brechbarkeit aufgereiht, folgende: roth, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett. Unter ihnen sind orange und gelb die am hellsten leuchtenden, es folgen dann roth und grün, während indigo und violett die lichtschwächsten Farben sind.

§ 166. Nach verschiedenen, auf die Gewinnung einer Erklärung für diese Erscheinungen gerichteten Versuchen gelangte Newton schliesslich zu dem folgenden *experimentum crucis*, das wir fast in seinen eigenen Worten wiedergeben wollen.

Er nahm zwei Bretter und stellte das eine dicht hinter dem Prisma am Fenster auf, so dass das Licht durch ein in das Brett geschnittenes kleines Loch hindurchtreten und auf das zweite Brett fallen konnte, welches in einer Entfernung von ungefähr zwölf Fuss von dem ersteren aufgestellt war und ebenfalls mit einer kleinen Oeffnung versehen war, welche einem beschränkten Theil des durch die Oeffnung im ersten Brett einfallenden Lichtes den Durchtritt gestattete. Er stellte hinter diesem zweiten Brett ebenfalls ein Prisma so auf, dass das durch die beiden Oeffnungen hindurchgehende Licht durch das zweite Prisma treten musste und einer zweiten Brechung unterworfen wurde, ehe es die auffangende Wand erreichte. Nachdem dies geschehen, drehte er das erste Prisma um seine Axe langsam hin und her und erreichte dadurch, dass die Theile des auf das zweite Brett projecirten Bildes der Reihe nach getrennt durch die Oeffnung in demselben traten, wodurch er ein Mittel gewann, die Stelle der auffangenden Wand, nach welcher die einzelnen Gattungen der von dem Spektrum ausgehenden Strahlen durch die Wirkung des zweiten Prismas projecirt wurden, zu beobachten. Er entdeckte hierbei, dass die dem violetten Ende des Spektrums entsprechenden

Lichtstrahlen erheblich stärker gebrochen wurden, als die von dem rothen Ende ausgehenden Strahlen. Hieraus schloss er, dass Sonnenlicht nicht homogen sei, dass es vielmehr aus Strahlen von verschiedener Farbe und verschiedener Brechbarkeit bestehe.

§ 167. In der soeben beschriebenen Form ausgeführt, hat das Experiment den Nachtheil, dass die farbigen, längs einer geraden Linie angeordneten Sonnenbilder eine beträchtliche Grösse haben; die farbigen Bilder überdecken daher einander theilweise und man erhält nicht mehr völlig getrennte Farben. Das Spektrum ist ein unreines. Wir wollen nun zeigen, auf welche Weise man ein reines Spektrum erhalten kann.

Die Sonne bewegt sich ständig relativ zur Erde und somit ändert sich beständig für einen Punkt der Erde die Richtung der Sonnenstrahlen. Diese Veränderlichkeit der Richtung lässt sich durch einen Heliostaten korrigiren; dies Instrument besteht aus einem Spiegel, welcher durch ein Uhrwerk derartig gedreht wird, dass das Licht in eine konstante Richtung reflektirt wird. Die so reflektirten Sonnenstrahlen lässt man nun auf eine konvexe Linse von kurzer Brennweite fallen, wodurch ein sehr kleines Bild der Sonne im Brennpunkte der Linse entsteht; dieses Bild kann man leicht so klein werden lassen, dass es als Punkt angesehen werden kann. Ein schmales Büschel lässt sich von den durch diesen Punkt hindurchtretenden Strahlen auswählen, indem man sie durch einen sehr engen, durch zwei äusserst sorgfältig bearbeitete Plättchen gebildeten Spalt fallen lässt. Bedient man sich einer mit ihren Erzeugenden zum Spalt parallel gerichteten cylindrischen Linse, so können die Strahlen auf dem Spalt seiner ganzen Länge nach concentrirt werden und man erhält ein sehr schmales, helles Strahlenbüschel. Dieses Lichtbüschel lässt man auf ein Prisma in der Nähe der zum Spalt parallel gestellten brechenden Kante einfallen. Das Prisma muss in seine Stellung kleinster Ablenkung für Strahlen mittlerer Brechbarkeit gebracht werden, und es wird dann annähernd in einer der minimalen Ablenkung für alle Strahlengattungen entsprechenden Lage sein. Man will hierdurch erreichen, dass die mittleren austretenden Strahlen von Punkten und nicht von Paaren von Brennlinien ausgehen.

In Fig. 101 sei Q die kleine Brennfläche oder der Spalt, in welchem die Strahlen concentrirt sind. Es werden dann nach der Brechung durch das Prisma A die rothen Strahlen von einem Punkt r , die violetten Strahlen von einem Punkt v ausgehen, wobei $Av = Ar = AQ$. Fängt man die Farben auf einem Schirm auf, so werden sie einander theilweise überdecken und wenngleich man sie durch Entfernung des

Schirmes von der Prismenkante mehr und mehr trennen kann, so werden sie hierbei immer lichtschwächer und undeutlicher. Man lässt daher das Lichtbündel durch eine achromatische Linse (deren Konstruktion später beschrieben werden wird) mit dem Mittelpunkt B treten, so dass nach der Brechung die rothen Strahlen in einem Punkte r' , die violetten in einem Punkte v' konvergiren, wobei $rB r'$ und $vB v'$ gerade Linien sind. Die Farben sind jetzt vollständig getrennt, aber das Spektrum $v' r'$ ist ein sehr kleines, so dass es, wenn es genaue Messungen gestatten soll, vergrößert werden muss. Man betrachtet daher das Spektrum durch eine andere Linse, ein Okular (welches ebenfalls für chromatische Dispersion korrigirt ist). Die beiden Linsen bilden ein gewöhnliches astronomisches Fernrohr. Wenn daher die von dem Prisma kommenden Strahlen von einem Fernrohr aufgenommen werden, indem man letzteres auf das Spektrum

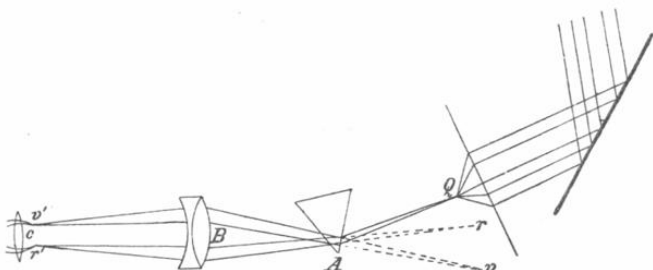


Fig. 101.

einstellt, so wird man ein reines Spektrum beobachten können. Will man das Spektrum auf einen Schirm projiciren, so muss das Okular entfernt werden. In diesem Falle schaltet man zweckmässig zwischen Q und A eine Linse ein, deren Brennpunkt mit Q zusammenfällt. Es werden dann die Strahlen, nachdem sie durch diese Linse getreten sind, parallel und die Punkte v und r befinden sich in unendlicher Entfernung; indem man nun den Schirm von A entfernt, kann man die Farben mehr oder weniger trennen, ohne ihre Intensität zu beeinträchtigen.

§ 168. Untersucht man ein reines Spektrum genau, so findet man, dass es nicht, wie Newton annahm, ein kontinuierliches Farbenband darstellt, dass es vielmehr in bestimmten Intervallen lichtlose Stellen aufweist, welche als dunkle, das Spektrum durchkreuzende Linien auftreten. Diese Linien sind stets unregelmässig über das Spektrum vertheilt, was auch immer die brechende Substanz sein mag. Mit dem brechenden Körper ändert sich auch die Lage der Linien; aber sowohl sie, wie die Farben treten immer in derselben

Aufeinanderfolge auf, so dass man jede Linie identificiren kann. Da diese Linien deutlich und scharf begrenzt erscheinen, so lassen sie sich vortheilhaft zur Bestimmung von Brechungsexponenten benutzen; die Brechungsexponenten für die Strahlen, welchen die Linien entsprechen, können in der That für eine jede Substanz mit der Genauigkeit astronomischer Messungen bestimmt werden. Die Lagen dieser Linien sind, wenigstens für etwa 700 derselben, sorgfältig von Fraunhofer und Anderen gemessen und zusammengestellt worden und man hat für eine sehr grosse Zahl von brechenden Substanzen die verschiedenen Strahlen entsprechenden Brechungsexponenten bestimmt. Mittelst Prismen gleicher Substanz, aber von verschiedenen brechenden Winkeln bestätigte Fraunhofer experimentell das Brechungsgesetz für die den verschiedenen charakteristischen Linien entsprechenden Strahlen mit äusserster Genauigkeit. Diese dunklen Linien bilden kein Characteristicum für das Licht im Allgemeinen, sondern nur für Sonnenlicht; beleuchtet man nämlich den Spalt durch eine Gasflamme, so erhält man ein vollständig kontinuierliches Spektrum.

Die Helligkeit des Sonnenspektrums ist keineswegs gleichmässig; es hat seine grösste Helligkeit in den gelben und benachbarten Farben, orange und hellgrün, und fällt von da nach beiden Seiten allmählich ab. Wir bemerken hier, obgleich dies strenggenommen nicht zur geometrischen Optik gehört, dass die in ein Spektrum zerlegten Sonnenstrahlen auch in ihren kalorischen und chemischen Wirkungen ein verschiedenes Verhalten zeigen. Die kalorische Wirkung wächst in dem Maasse, als wir von den violetten zu den rothen Strahlen übergehen, und nimmt auch noch zu, wenn bereits das rothe Ende des sichtbaren Spektrums überschritten ist. Ebenso wenn man die Wirkung der verschiedenen Strahlen auf lichtempfindliches Papier beobachtet, ist die Wirkung der rothen Strahlen eine sehr schwache, während die blauen und violetten Strahlen kräftig wirken, und es erstreckt sich diese photo-chemische Wirkung der Strahlen noch um ein Beträchtliches über das violette Ende des sichtbaren Spektrums hinaus.

§ 169. Es giebt drei verschiedene Arten von Spektren, welche von der Natur der benutzten Lichtquelle abhängig sind.

I. Das Sonnenspektrum ist, abgesehen von dem dasselbe durchziehenden System dunkler Linien, ein kontinuierliches. Die Spektren der Fixsterne weisen ebenfalls derartige dunkle Linien auf, welche für verschiedene Sterne verschieden sind.

II. Die von glühenden festen und flüssigen Substanzen herührenden Spektren sind kontinuierlich und enthalten Licht aller mög-

lichen Grade der Brechbarkeit von dem äussersten roth bis zu einer höheren, durch die Temperatur bedingten Grenze.

III. Flammen, in welchen keine festen Theilchen schwebend enthalten sind, sondern nur das Licht glühender Gase ausstrahlen, liefern diskontinuirliche Spektre, welche aus einer bestimmten Anzahl heller Linien oder Banden bestehen.

§ 170. Neuere Versuche haben gezeigt, dass das Fehlen von Strahlen in dem Sonnen- und ähnlichen Spektren auf Absorption beruht. Denn bekanntlich absorbiert jede Substanz, welche ausschliesslich Strahlen bestimmter Gattungen aussendet, nur Strahlen der von ihr ausgestrahlten Art; ist die Temperatur in beiden Fällen die nämliche, so sind ausgestrahltes und absorbiertes Licht quantitativ einander gleich. Werden die leuchtenden Dämpfe einer Substanz, welche nur Strahlen ganz bestimmter Brechbarkeit aussenden, zwischen das beobachtende Auge und eine intensive, ein kontinuierliches Spektrum liefernde Lichtquelle eingeschaltet, so absorbieren jene glühenden Dämpfe von dem einfallenden Licht gerade diejenigen Strahlen, welche sie selbst ausstrahlen, derart, dass das von dem Gase ausgestrahlte Licht an die Stelle des von ihm absorbierten Lichtes tritt. Es hängt von der relativen Helligkeit der beiden Lichtquellen ab, ob nun die von dem Gase ausgehenden Strahlen ein Plus oder Minus aufweisen. Sind die beiden Lichtquellen annähernd gleich an Helligkeit, so werden diese Strahlen stark überwiegend vorhanden sein und als helle, das Spektrum durchkreuzende Linien auftreten; denn es bilden diese Strahlen das gesammte Licht der einen, dagegen nur einen sehr geringen Bruchtheil des Lichtes der anderen Lichtquelle. Vermindert man aber die Helligkeit des eingeschalteten Dampfes, während man diejenige der das kontinuierliche Spektrum liefernden Quelle genügend verstärkt, so werden die von dem Dampfe ausgestrahlten Strahlen eine geringere Helligkeit haben, als die von ihm absorbierten und es erscheinen somit in Folge dieser Unterschiedlichkeit die entsprechenden Linien des Spektrums nicht mehr hell, sondern dunkel. Es lassen sich hiernach die dunklen Linien in dem Sonnenspektrum dadurch erklären, dass man annimmt, dass der Haupttheil des Sonnenlichtes von dem inneren Kern derselben kommt, welcher ein kontinuierliches Spektrum liefert, während eine denselben umgebende Gashölle solche Dämpfe enthält, welche bestimmte Strahlen absorbieren und so jene dunklen Absorptionslinien entstehen lassen.

Für Weiteres über den Gegenstand der Spektralanalyse müssen wir auf die darauf bezügliche Speciallitteratur verweisen.

§ 171. Fällt ein Sonnenstrahl auf ein Glasprisma, so wird er,

zogenen Brechungsexponenten oder, wie wir sagen könnten, durch seine Stellung in der Skala des Wassers definirt werden könnte.

Bezeichnet man mit x den Brechungsindex des Normalstrahles, bezogen auf diese Normalsubstanz und mit n den Brechungsexponenten desselben Strahls, bezogen auf irgend eine andere Substanz, so muss n eine Funktion von x sein, deren Form von der Art des Mediums abhängig ist. Wir haben somit

$$n = f(x),$$

und bezeichnen nun $x + \Delta x$ und $n + \Delta n$ die irgend einem anderen Strahl entsprechenden Brechungsexponenten, so ist

$$\begin{aligned} n + \Delta n &= f(x + \Delta x) \\ &= f(x) + A \Delta x + B (\Delta x)^2 + C (\Delta x)^3 + \dots, \end{aligned}$$

wo $A, B, C \dots$ von dem Wachsthum Δx unabhängige Funktionen von x darstellen.

Es ist daher

$$\Delta n = A \Delta x + B (\Delta x)^2 + C (\Delta x)^3 + \dots,$$

und hierfür können wir, da x und n konstante Grössen sind, schreiben:

$$\frac{\Delta n}{n-1} = a \frac{\Delta x}{x-1} + b \left(\frac{\Delta x}{x-1} \right)^2 + c \left(\frac{\Delta x}{x-1} \right)^3 + \dots, \quad (2)$$

worin $a, b, c \dots$ von der Art des Mediums abhängige Konstanten darstellen.

Um die Werthe der Konstanten $a, b, c \dots$ für jedes der verschiedenen Medien zu bestimmen, müssen wir mehrere zusammengehörige Werthe der Grössen $\frac{\Delta n}{n-1}$ und $\frac{\Delta x}{x-1}$ kennen. Fraunhofer's Beobachtungen über die Brechungsexponenten für Strahlen, welche den verschiedenen Absorptionslinien des Spektrums entsprechen, liefern alle erforderlichen Daten. Da der Bruch $\frac{\Delta x}{x-1}$ immer klein ist, und ebenfalls die Konstanten $a, b, c \dots$ sich als nicht sehr gross ergeben, so können wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, alle Summanden des letzten Ausdruckes ausser den beiden ersten vernachlässigen. Der erste Summand ist der weitaus wichtigste und wir ersehen daraus, dass das Verhältniss der Dispersionen fast konstant und gleich a ist, so dass man a als die Dispersion der Substanz für alle Strahlen, bezogen auf die Normal-einheiten, ansehen kann. Dieses Verhältniss ist indessen nicht streng konstant und man bezeichnet diese Thatsache als die Disproportionalität der Dispersion. Stellt man zwei Prismen her, eins aus

der als Vergleichsnorm gewählt und das andere aus der zu untersuchenden Substanz, und untersucht man das von jedem derselben herrührende Spektrum, so treten die Linien und farbigen Strahlen in beiden in derselben Ordnung der Aufeinanderfolge auf; da aber die relative Dispersion für gleichwerthige Strahlen nicht auch für verschiedene Substanzen einen proportionalen Gang aufweisen, so werden auch die Spektren in geometrischem Sinne von einander abweichen müssen. Werden die beiden Prismen neben einander angeordnet in der Weise, dass man zwei über einander liegende gleich lange, mit ihren äussersten Strahlen sich deckende Spektren erhält, so werden die zwischenliegenden Strahlen nicht genau in ihrer Lage übereinstimmen.

§ 173. Wir gehen nun über zur Bestimmung der von der Brechung durch ein Prisma herrührenden Dispersion eines Sonnenlichtstrahls.

Um diese Untersuchung sowohl möglichst allgemein als auch symmetrisch zu gestalten, wollen wir annehmen, es werde das Licht zerstreut, bevor es in das Prisma gelangt. Es bedeuten i und i' Einfallswinkel an der ersten, i_1' und i_1 dieselben Winkel an der zweiten Prismenfläche für den Normalstrahl mit dem Brechungsindex n . Ist α wieder der brechende Winkel des Prismas, so sind diese Grössen nach (15 und 16, II) unter einander verbunden durch die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \sin i &= n \sin i' \\ \sin i_1 &= n \sin i_1' \\ i' + i_1' &= \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Bedeutet

$$i + \partial i, \quad i' + \partial i', \quad i_1 + \partial i_1 \quad \text{und} \quad i_1' + \partial i_1'$$

die entsprechenden Winkel für irgend einen anderen Strahl, dessen Brechungsindex $n + \partial n$ ist, so erhalten wir durch Differentiation der obigen Relationen zwischen den Grössen i, i', i_1, i_1' und n die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \cos i \partial i &= \partial n \sin i' + n \cos i' \partial i' \\ \cos i_1 \partial i_1 &= \partial n \sin i_1' + n \cos i_1' \partial i_1' \\ \partial i' + \partial i_1' &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich $\partial i'$ und $\partial i_1'$ eliminiren, indem man die erste Gleichung mit $\cos i_1'$, die zweite mit $\cos i'$ multiplicirt und beide dann addirt; auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos i \cos i_1' \partial i + \cos i_1 \cos i' \partial i_1 &= \partial n \{ \sin i' \cos i_1' + \sin i_1' \cos i' \} \\ &= \partial n \sin (i' + i_1'),\end{aligned}$$

und daher

$$\cos i \cos i_1' \partial i + \cos i_1 \cos i' \partial i_1 = \partial n \sin \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung charakterisirt die Relation zwischen den Dispersionen der einfallenden und austretenden Strahlen.

Wo der einfallende Strahl überhaupt keine Dispersion erleidet, lässt man ∂i verschwinden und die Gleichung für die Dispersion erhält dann die Form

$$\partial i_1 = \frac{\partial n \sin \alpha}{\cos i_1 \cos i'} \cdot . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In Worten heisst das:

Die Dispersion ist umgekehrt proportional dem Produkte der Kosinusse der Brechungswinkel an den beiden Prismenflächen.

§ 174. Fällt der Strahl senkrecht auf die erste Fläche, so ist $i' = 0$, also $i_1' = \alpha$ und somit $\sin i_1 = n \sin \alpha$, so dass dann nach (4) ∂i_1 den Werth hat

$$\partial i_1 = \frac{\partial n}{n} \operatorname{tg} i_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Bedingung dafür, dass für den Normalstrahl ein Minimum der Ablenkung stattfindet, ist, dass $i' = i_1' = \frac{\alpha}{2}$, somit dass

$$\sin \alpha = 2 \sin i_1' \cos i' = \frac{2}{n} \sin i_1 \cos i',$$

oder, nach Einsetzung dieses Werthes von $\sin \alpha$ in (4),

$$\partial i_1 = \frac{2 \partial n}{n} \operatorname{tg} i_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Newton nahm an, dass der Stellung kleinster Ablenkung auch diejenige kleinster Dispersion entspräche; die Formeln (5) und (6) zeigen indessen, dass diese Annahme unrichtig war. Um die durch die kleinste Dispersion bedingte Stellung des Prismas zu finden, müssen wir den Nenner des Ausdrucks (4), d. h. $\cos i_1 \cos i'$, ein Maximum werden lassen. Setzen wir den ersten Differentialquotienten dieses Ausdrucks gleich 0, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} i_1 \partial i_1 + \operatorname{tg} i' \partial i' = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichung

$$\partial i' = -\partial i_1',$$

so wird daraus

$$\operatorname{tg} i_1 \partial i_1 = \operatorname{tg} i' \partial i'_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Winkel i_1 und i'_1 sind aber durch die Relation $\sin i_1 = n \sin i'_1$ unter einander verbunden und differentiirt man beide Seiten dieser Relation, nachdem man sie logarithmirt hat, so erhält man

$$\frac{\partial i_1}{\operatorname{tg} i_1} = \frac{\partial i'_1}{\operatorname{tg} i'_1}$$

Durch Division dieser Gleichung mit (7) fallen ∂i_1 und $\partial i'_1$ fort und man erhält die Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 i_1 = \operatorname{tg} i' \operatorname{tg} i'_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welche in Verbindung mit den beiden anderen Bedingungen $\sin i_1 = n \sin i'_1$ und $i' + i'_1 = \alpha$ die der kleinsten Dispersion entsprechende Stellung des Prismas vollständig bestimmt.

Die Elimination von i_1 und i' lässt sich auf folgende Weise erreichen:

Zwischen i_1 und i'_1 besteht die Relation

$$\sin i_1 = n \sin i'_1,$$

oder, wenn man die Sinusse durch die Tangenten ersetzt,

$$\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_1} = \frac{n^2 \operatorname{tg}^2 i'_1}{1 + \operatorname{tg}^2 i'_1},$$

und wenn man hierin für $\operatorname{tg}^2 i_1$ seinen Werth aus (8) einsetzt, so ergeben sich folgende Relationen:

$$n^2 \operatorname{tg} i'_1 = \frac{\operatorname{tg} i' (1 + \operatorname{tg}^2 i'_1)}{1 + \operatorname{tg} i' \cdot \operatorname{tg} i'_1};$$

hieraus

$$n^2 \operatorname{tg} i'_1 = \frac{\operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i'_1 (1 + \operatorname{tg} i' \operatorname{tg} i'_1) - \operatorname{tg} i'_1}{1 + \operatorname{tg} i' \operatorname{tg} i'_1},$$

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg} i'_1 = \frac{\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i'_1}{1 + \operatorname{tg} i' \operatorname{tg} i'_1},$$

$$= \operatorname{tg} (i' - i'_1),$$

oder endlich, da $i' + i'_1 = \alpha$,

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg} i'_1 = \operatorname{tg} (\alpha - 2 i'_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Es ist dies eine kubische Gleichung nach $\operatorname{tg} i'_1$, aus welcher sich i'_1 bestimmen lässt.

§ 175. So lange der brechende Winkel des Prismas kleiner als der Grenzwinkel für das betreffende Glas ist, existirt immer ein solches Minimum der Dispersion. Denn fällt der einfallende Strahl fast parallel zu den brechenden Flächen ein, und nehmen wir an, der Einfallswinkel liege auf der von der brechenden Kante abgekehrten Seite des Prismas, so ist nahezu $i = \frac{\pi}{2}$ und daher, wenn man den Grenzwinkel mit γ bezeichnet, $i' = \gamma$. Dies ist der grösste mögliche Werth von i' und es hat dann gleichzeitig i_1' seinen kleinsten Werth. Ist aber $\alpha < \gamma$, so ist i_1' und ebenso i_1 negativ und letzterer hat dann seinen grössten numerischen Werth. In diesem Falle ist daher $\cos i_1 \cos i'$ ein Minimum und daher nach (4) die Dispersion ein Maximum.

In dem Maasse, wie der Einfallswinkel abnimmt, wächst $\cos i'$ beständig, bis $i' = 0$ und damit $\cos i' = 1$ wird; von hier ab nimmt i' einen negativen Werth an und $\cos i_1'$ nimmt seinerseits von 1 bis $\cos(\gamma - \alpha)$ ab. Ferner wächst $\cos i_1$ zuerst bis zur Einheit, wo $i_1 = 0$ ist; hierauf wird i_1 positiv und nimmt bis $\frac{\pi}{2}$ zu, so dass $\cos i_1$ von 1 bis 0 abnimmt. Es wird somit anfänglich die Dispersion kleiner, sie erreicht darauf ihr Minimum und nimmt darauf unbegrenzt zu.

Da die Dispersion durch die Anordnung der Prismenstellung in Bezug auf den einfallenden Strahl bis ins Unendliche vergrössert werden kann, so gelangen wir zu dem Schluss:

Die durch ein Prisma mit ganz beliebig grossem brechenden Winkel erzeugte Dispersion lässt sich durch die Dispersion eines anderen Prismas gleichen Materials mit beliebig kleinem brechenden Winkel aufheben.

§ 176. *Bestimmung der Dispersion, welche zwei mit ihren brechenden Kanten parallel gestellte Prismen erzeugen.*

Es sei α' der brechende Winkel des zweiten Prismas und n' der dem Normalstrahl entsprechende Brechungsexponent für die Substanz, aus welcher dieses Prisma besteht; i_2, i_2', i_3, i_3' seien die den Winkeln i, i', i_1, i_1' bei dem ersten Prisma entsprechenden Winkel für das zweite Prisma. Es bestehen dann zwischen den Winkeln die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin i', & \sin i_1 &= n \sin i_1', & \sin i_2 &= n' \sin i_2', \\ \sin i_3 &= n' \sin i_3', & i' + i_1' &= \alpha, & i_2' + i_3' &= \alpha'. \end{aligned}$$

Ferner, bedeutet $\mathfrak{D}$ die Neigung zweier benachbarter Prismenflächen zu einander, so ist

$$i_1 + i_2 = \mathfrak{D}.$$

Multiplizieren wir die erste Gruppe der Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, p_{(m)}, p_{(m)} p_{(m-1)}, p_{(m)} p_{(m-1)} p_{(m-2)}, \dots p_{(m)} p_{(m-1)} \dots p_{(2)},$$

und addiren die dadurch entstehenden Gleichungen, so verschwinden gemäss den Gleichungen der zweiten Gruppe alle Winkel bis auf $\partial i_{1(m)}$ und $\partial i_{(1)}$, so dass demnach

$$\begin{aligned} \partial i_{1(m)} + p_{(m)} p_{(m-1)} \dots p_{(2)} p_{(1)} \partial i_{(1)} &= \partial n_{(m)} q_{(m)} + \partial n_{(m-1)} q_{(m-1)} p_{(m)} \\ &+ \partial n_{(m-2)} q_{(m-2)} p_{(m)} p_{(m-1)} \\ &+ \dots + \partial n_{(1)} q_{(1)} p_{(m)} p_{(m-1)} \\ &\dots p_{(2)} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

Diese Gleichung charakterisirt das Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Dispersionswinkeln des Strahlenbündels beim Eintritt und Austritt.

§ 178. Wenn der brechende Winkel der Prismen nur klein ist und der Strahl fast senkrecht durch jedes derselben hindurchgeht, so erhält der Ausdruck für die Grösse der Dispersion eine sehr einfache Form. Sind nämlich $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ die brechenden Winkel der Prismen und $n, n', n'' \dots$ die dem Normalstrahl entsprechenden Brechungsexponenten für die verschiedenen Substanzen, aus denen die Prismen hergestellt sind, so ist die durch das erste Prisma hervorgerufene Ablenkung nach (20, II)

$$D = (n - 1) \alpha,$$

und ähnliche Ausdrücke gelten für alle folgenden Ablenkungen. Bezeichnen wir die gesammte Ablenkung mit D_0 , so erhalten wir durch Addition der einzelnen Ablenkungen

$$D_0 = (n - 1) \alpha + (n' - 1) \alpha' + (n'' - 1) \alpha'' + \dots$$

und somit ist für irgend einen Strahl anderer Brechbarkeit die Dispersion gegeben durch die Gleichung

$$\partial D_0 = \partial n \alpha + \partial n' \alpha' + \partial n'' \alpha'' + \dots$$

Stellen $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu'}, \frac{1}{\nu''} \dots$ die relativen Dispersionen der verschiedenen Substanzen für diesen Strahl dar, so ist nach (1)

$$\partial D_0 = \frac{1}{\nu} (n - 1) \alpha + \frac{1}{\nu'} (n' - 1) \alpha' + \dots + \dots \dots (12)$$

der Werth der gesammten Dispersion.

§ 179. Lässt man einen Lichtstrahl durch zwei Prismen nach einander treten, so ist es immer möglich, ihre brechenden Winkel so zu wählen, dass die von dem ersten herrührende Dispersion annähernd durch die des zweiten aufgehoben wird, und es ist somit ein Mittel gegeben, den austretenden Strahl farblos erscheinen zu lassen.

Newton hielt dieses Resultat für unmöglich, ohne auch gleichzeitig eine gegenseitige Aufhebung der Ablenkungen der beiden Prismen, somit ein Verschwinden der gesammten Ablenkung des Strahlenbüschels, herbeiführen zu müssen. Er scheint auf diese irrthümliche Annahme durch einen zufälligen Umstand bei einem Experiment geführt zu sein, bei welchem er die brechende Wirkung eines Glasprismas dadurch aufhob, dass er es mit einem Wasserprisma umgab. Er hatte dem Wasser Bleizucker zugesetzt, um sein Brechungsvermögen zu erhöhen und hatte ihm damit auch ein größeres Zerstreungsvermögen verliehen, und hierbei allerdings trat die Achromasie des austretenden Strahls erst ein, wenn durch die gehörige Einstellung des brechenden Winkels des Wasserprismas der austretende Strahl dem eintretenden parallel gemacht worden war. Hieraus schloss nun Newton, dass die Dispersion aller Substanzen der Ablenkung des mittleren Strahls proportional sei, dass daher die Dispersion niemals aufgehoben werden könne, so lange überhaupt noch Brechung der Strahlen stattfindet. Aus diesem Grunde gab er es auch auf, auf eine Verbesserung dioptrischer Fernrohre zu sinnen, und er widmete nun seine Aufmerksamkeit der Ausbildung der Spiegelteleskope.

Newton's Irrthum entdeckte zuerst der Engländer Hall, welcher das erste achromatische Fernrohr herstellte. Diese Entdeckung verfiel indessen wieder in Vergessenheit, bis das Experiment von Dollond, einem Londoner Optiker, wieder aufgenommen wurde. Diesem gelang es, die Dispersion aufzuheben, ohne die Brechung zu beeinträchtigen, und damit die Unrichtigkeit der Newton'schen Schlussfolgerung darzulegen.

Wir haben indessen gesehen, dass verschiedenfarbige Strahlen nicht durch verschiedene Substanzen in demselben Verhältniss zerstreut werden, oder in anderen Worten, dass die von Prismen aus verschiedenem Material herrührenden Spektra nicht geometrisch ähnlich sind. Wenn daher die Prismen so angeordnet werden, dass sie zwei Strahlengattungen (z. B. die äussersten rothen und die äussersten violetten Strahlen) in dem Austrittsstrahl vereinigen, so wird immer noch eine, wenn auch verminderte, Dispersion der übrigen Strahlen vorhanden sein. Es wird somit das Lichtbüschel, anstatt

ganz farblos auszutreten, ein zweites, aber erheblich kleineres Spektrum bilden; man nennt dieses Spektrum das sekundäre Spektrum. Ferner ermöglicht die Anwendung dreier Prismen von verschiedenem Material die Vereinigung dreier Strahlen des austretenden Büschels (z. B. der rothen, grünen und violetten Strahlen); aber es werden immer noch, infolge der Disproportionalität der Dispersion, die übrigen Strahlen nicht ganz vereinigt, und hieraus ergibt sich ein noch kleineres Spektrum, das sogenannte tertiäre Spektrum; diese Betrachtung liesse sich bis ins Unendliche fortsetzen. In der Theorie ist daher vollkommene Achromasie ohne die Anwendung einer sehr grossen Anzahl verschiedener Medien unmöglich; bei der praktischen Ausführung nehmen diese successiven Spektren an Lichtstärke äusserst schnell ab und werden alsbald praktisch wirkungslos, und zwar in dem Maasse, dass es in den meisten Fällen überflüssig erscheint, mehr als zwei Strahlen zu vereinigen. Als die zu vereinigenden Strahlen wird man in dem letzteren Falle nicht die äussersten rothen und violetten Strahlen wählen, da diese ohnehin sehr lichtschwach sind; sondern es ist zweckmässiger, diejenigen beiden Strahlen zu vereinigen, deren Helligkeit und Farbendifferenz am grössten ist, z. B. einen Strahl aus dem gelb-orangen mit einem solchen aus dem grün-blauen Theil des Spektrums.

Der erste erfolgreiche Versuch, das sekundäre Spektrum zu beseitigen, wurde von Blair angestellt; einen Bericht seiner Arbeit enthalten die Phil. Trans. Edinb., 1791. Er fand in dem Spektrum der Salzsäure eine Kontraktion des stärker brechbaren Theils des Spektrums (grün bis violett) und eine Expansion des weniger brechbaren Theils gegenüber dem Spektrum der meisten metallischen Lösungen, und durch Mischung von Antimon- und Quecksilberchlorid in geeignetem Verhältniss mit Salzsäure oder mit Salmiak erhielt er eine Flüssigkeit, welche bei einer von der des Crown-glases abweichenden absoluten Dispersion ein Spektrum ergab, welches demjenigen des Crown-glases geometrisch ähnlich war. Kombinierte man daher zwei Linsen oder Prismen aus einer solchen Flüssigkeit und Crownglas derart, dass in dem austretenden Strahlenbüschel zwei verschiedenfarbige Strahlen vereinigt wurden, so war auch das austretende Lichtbüschel vollständig farblos. Blair's Objekte wurden seiner Zeit als etwas sehr Werthvolles angesehen, aber wegen der Unbequemlichkeit, welche die Anwendung flüssiger Linsen im Gefolge haben, kamen sie niemals in Gebrauch.

Was Blair mit flüssigen Linsen gelang, erreichte Prof. Abbe in Jena durch seine Entdeckung neuer Glasarten. Im Jahre 1881 unternahm Prof. Abbe, unterstützt durch Dr. Schott und Dr. Carl

Zeiss eine Untersuchung der optischen Eigenschaften aller Glasarten, d. h. aller bekannten Substanzen, welche sich verglasen lassen und zu einer amorphen, durchsichtigen Masse erstarren. Diese Arbeit wurde fortgesetzt bis Ende 1883 und richtete sich auf die Lösung zweier praktischer Aufgaben. Die erste derselben bestand in der Herstellung solcher Flint- und Crownglaspaare, bei welchen der Gang der Dispersion in den verschiedenen Regionen des Spektrums für jedes Paar ein möglichst proportionaler sei. Die zweite Aufgabe hatte als Ziel die Gewinnung einer grösseren Mannigfaltigkeit an Abstufungen in dem Charakter optischer Gläser, in Bezug auf die wichtigsten optischen Konstanten, den Brechungsexponenten und die mittlere Dispersion, um hierdurch dem rechnenden Optiker einen grösseren Spielraum für seine Rechnungen zu gewähren. Die erstere Aufgabe ist in befriedigender Weise gelöst worden, mit dem Ergebnis nämlich, dass die Benutzung der neuen Gläser die Herstellung achromatischer Linsen weitaus vollkommenerer Art gestattet, als dies vorher jemals möglich war; auch die zweite Aufgabe ist mit Erfolg verwirklicht worden und es stehen dem Optiker bereits eine ganze Reihe neuer Gläser mit abgestuften Eigenschaften zur Verfügung. Als ein besonderer Fortschritt muss wohl auch der Umstand anerkannt werden — und es wird sich derselbe noch immer mehr als ein wesentlicher Fortschritt geltend machen, wenn erst die ausführende Optik auf die zu seiner vollen Verwerthung unumgänglich erforderliche theoretische und rechnerische Stufe der Entwicklung gebracht sein wird —, dass das Abbe-Schott'sche Schmelzverfahren dem Optiker Gläser liefert, in welchen bei gleichem Brechungsindex die Dispersion, bei gleicher Dispersion der Brechungsindex einen erheblichen Spielraum für die Auswahl gewährt, während bekanntlich bei den bis dahin allein angewandten Silikatgläsern, der Einartigkeit ihrer chemischen Zusammensetzung entsprechend, eine Zunahme des Brechungsexponenten auch eine entsprechende Zunahme der Dispersion im Gefolge hatte, abgesehen von ganz minimalen Abweichungen, welche keine praktische Bedeutung haben.

§ 180. Wir werden nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen ein durch ein Prismenpaar fallender Sonnenlichtstrahl als farbloser Strahl wieder austritt.

Zu diesem Ende untersuchen wir zunächst die Bedingung, unter welcher zwei der hellsten Strahlen sich beim Austritt aus dem Prismensystem vereinigen lassen, und wir werden hierbei annehmen, dass das sekundäre Spektrum so klein ist, dass es vernachlässigt werden kann. Man wähle einen der Strahlen als Norm und drücke, wie bisher, den Brechungsindex des anderen Strahls aus durch eine,

eine kleine Abweichung vom mittleren Strahl charakterisirende Bezeichnung. Wir haben dann, da die einfallenden und austretenden Strahlen chromatisch vereinigt sind, $\partial i = 0$ und $\partial i_3 = 0$.

Die Gleichungen (10) erhalten somit die Form:

$$\left. \begin{aligned} \cos i_1 \cos i' \partial i_1 &= \partial n \sin \alpha \\ \cos i_2 \cos i_3' \partial i_2 &= \partial n' \sin \alpha' \\ \partial i_1 + \partial i_2 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Eliminiren wir in diesen Gleichungen ∂i_1 und ∂i_2 , indem wir deren aus denselben sich ergebenden Werthe addiren, so finden wir

$$\partial n \sin \alpha \cos i_2 \cos i_3' + \partial n' \sin \alpha' \cos i_1 \cos i' = 0. \quad (13)$$

Die Winkel i_1 , i' , i_2 und i_3' , welche in dieser Gleichung vorkommen, sind unter einander verbunden durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \sin i_1 &= n \sin i_1' = n \sin (\alpha - i'), \\ \sin i_2 &= n' \sin i_2' = n' \sin (\alpha' - i_3'), \end{aligned}$$

so dass, wenn n und n' gegeben sind, vier unabhängige Winkel in der Bedingungsgleichung vorkommen, nämlich α , α' , i_1 und i_2 . Wenn daher Form und Stellung des ersten Prismas gegeben sind, so dass bei ihm das Licht unter einem bekannten Einfallswinkel einfällt, so sind damit die Winkel α und i_1 gegeben und nur die Winkel α' und i_2 bleiben unbestimmt. Der Bedingungsgleichung kann daher auf zweierlei Weise genügt werden: Entweder man wählt für das zweite Prisma eine bestimmte Stellung und verändert entsprechend der durch die Forderung der Achromasie bedingten Gleichung die Grösse des brechenden Winkels, oder man nimmt den brechenden Winkel als unveränderlich an und bestimmt die der Gleichung (13) genügende Stellung des Prismas. Bestehen beide Prismen aus gleichem Material, so dass dann $\partial n = \partial n'$, so lässt sich dennoch der Austrittsstrahl nach der einen sowohl als nach der anderen Methode achromatisiren.

Bringt man beide Prismen in ihre Lage kleinster Ablenkung in Bezug auf den mittleren Strahl, so gestaltet sich die Bedingungsgleichung für die Achromatisirung der Prismen wesentlich einfacher. In diesem Falle ist bekanntlich

$$i' = i_1' = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad i_2' = i_3' = \frac{\alpha'}{2},$$

und die Bedingungsgleichung (13) erhält die Form.

$$\partial n \sin \alpha \cos i_2 \cos \frac{\alpha'}{2} + \partial n' \sin \alpha' \cos i_1 \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Dividiren wir nun jede Seite durch $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha'}{2}$ und beachten, dass

$$\sin i = n \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \sin i_2 = n' \sin \frac{\alpha'}{2}, \quad (14)$$

so erhält die Bedingungsgleichung die einfache Form:

$$n' \partial n \operatorname{tg} i + n \partial n' \operatorname{tg} i_2 = 0, \quad (15)$$

wo i und i_2 ihrerseits durch die Gleichungen (14) bestimmt sind.

§ 181. Sind m Prismen vorhanden, so lassen sich nach Analogie der eben dargelegten Untersuchungen die Bedingungen für die Achromatisirung auffinden. Sollen zwei Strahlen vereinigt werden, von denen der eine als mittlerer Strahl gewählt ist, während der andere ein Strahl ist, für welchen der Brechungsexponent der verschiedenen Medien von demjenigen für den mittleren Strahl um ein Geringes abweicht, so haben wir nur in Gleichung (11) $\partial i_1 = 0$ und $\partial i_{(m)} = 0$ werden zu lassen, und wir erhalten hierdurch als Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial n_{(m)} q_{(m)} + \partial n_{(m-1)} q_{(m-1)} p_{(m)} + \partial n_{(m-2)} q_{(m-2)} p_{(m)} p_{(m-1)} + \dots \\ \dots \partial n_{(1)} q_{(1)} p_{(m)} p_{(m-1)} \dots p_{(2)} = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Wenn ein Strahl fast senkrecht durch ein System von Prismen von sehr kleinem brechenden Winkel tritt, so erhält die Gleichung (16) die einfache Form:

$$\partial n_{(1)} \alpha_{(1)} + \partial n_{(2)} \alpha_{(2)} + \dots \partial n_{(m)} \alpha_{(m)} = 0. (17)$$

Bei einer gegebenen Anzahl von m Prismen lässt sich eine Anordnung auffinden, welche es ermöglicht, m Strahlen des Spektrums zu vereinigen. Denn angenommen, die Substanzen und brechenden Winkel aller Prismen seien vorgeschrieben, und ferner sei die Stellung des ersten Prismas gegeben, so dass das Licht auf dasselbe unter einem gegebenen Einfallswinkel einfällt, so bleiben uns noch die Winkel zwischen den benachbarten Seiten auf einander folgender Prismen als Variablen zur Verfügung. Diese $m-1$ veränderbaren Winkel liefern uns ein Mittel, um die $(m-1)$ Gleichungen zu befriedigen, welche die Bedingungen enthalten, dass $m-1$ Strahlen des Spektrums in der Richtung des mittleren Strahls austreten. Stellt man sämtliche Prismen aus gleichem Material her, so ist

$$\partial n_{(m)} = \partial n_{(m-1)} = \dots = \partial n_{(1)},$$

und wenn daher die Kombination für nur ein Paar farbiger Strahlen achromatisch ist, so werden alle Farben vereinigt werden. In diesem

Falle lässt sich vollkommene Achromasie erreichen durch nur eine Relation zwischen den Winkeln, welche uns als Variable zur Verfügung stehen.

Achromasie der Linsen.

§ 182. Durch eine zweckmässige Verbindung von Linsen lässt sich die Dispersion verschiedenfarbiger Strahlengattungen nahezu aufheben; ebenso wie in dem Falle des Strahlenganges durch zwei Prismen, so lässt sich die durch eine Linse hervorgerufene Dispersion angenähert durch die von einer zweiten Linse herrührende kompensieren, so dass das austretende Strahlenbüschel farblos erscheint.

Wir werden zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die approximative Untersuchung solcher Linsen beschränken, in welchen die Dicke der Linse vernachlässigt werden kann, die Hauptpunkte somit als in einem Punkte, dem Linsenmittelpunkt, zusammenfallend angesehen werden dürfen. Es wird nämlich die strenge Durchführung der Untersuchung der Dispersion bei Linsen darum so sehr complicirt, weil die Hauptpunkte der Linsen, von denen aus bekanntlich gewöhnlich alle Abstände gemessen werden, selbst eine variable Lage einnehmen, je nach dem Brechungsexponenten für denjenigen einzelnen Strahl, welchen wir unserer Untersuchung zu Grunde legen.

In allen Fällen wollen wir n als den Brechungsexponenten des mittleren Strahls, und $n + \partial n$ als den Brechungsexponenten irgend eines anderen Strahls annehmen. Die Brennweiten der Linsen wollen wir als eine Funktion des dem mittleren Strahl entsprechenden Brechungsexponenten ansehen.

Wir untersuchen zunächst die Veränderung, welche die Brennweite einer Linse erleidet, entsprechend dem Uebergange von dem mittleren zu irgend einem anderen Strahl. Die Grösse der Brennweite einer Bikonvexlinse mit den Krümmungsradien r und s ist nach (14, IV) durch die Gleichung

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)$$

gegeben, wo n der Brechungsexponent der Linsenmasse in Bezug auf den mittleren Strahl ist. Lässt man n um ein Geringes zunehmen, so dass es $n + \partial n$ wird, so folgt aus der letzten Gleichung durch Differentiation:

$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{1}{f} \right) &= \partial n \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{\partial n}{n - 1} \cdot \frac{1}{f}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, wenn wir das Zerstreuungsvermögen des Mediums mit $\frac{1}{\nu}$ bezeichnen, als die Veränderung der Brennweite nach (1)

$$\partial \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{1}{\nu f} \cdot \dots \dots \dots (18)$$

§ 183. Wenn ein Bild durch eine Linse oder ein System von Linsen entsteht, welches nicht achromatisirt ist, so wird es, das Licht als nicht monochromatisch vorausgesetzt, in zweifacher Hinsicht durch die Dispersion beeinflusst. Erstens, die verschiedenen farbigen Bilder reihen sich auf verschiedenen Punkten der Axe des Systems hinter einander auf, und zweitens die verschiedenen farbigen Bilder haben verschiedene Dimensionen. In gewissen Fällen lassen sich diese Mängel beide beseitigen, in anderen lässt sich nur dem einen derselben begegnen, und um zu entscheiden, welche von den beiden Korrekturen vorgenommen werden muss, hat man den besonderen Zweck, dem das System dienen soll, in's Auge zu fassen, und dementsprechend den in dem besonderen Fall schwerstwiegenden Fehler zu korrigiren.

Bei Fernrohrobjektiven kommen zwei Linsen in Anwendung und sind so dicht neben einander angeordnet, dass sie als nur eine Linse wirken. Es liegt dann ein Punkt und sein Bild immer auf derselben durch den Linsenmittelpunkt gelegten Linie, so dass, wenn die Linse derart korrigirt wird, dass die verschiedenfarbigen Bilder alle in derselben zur Axe senkrechten Ebene liegen, sie auch alle dieselbe Grösse haben werden. Es genügt daher, nur die erstere Korrektur vorzunehmen, indem die zweite sich hieraus von selbst ergibt.

Diese Objektive setzt man gewöhnlich zusammen aus einer äusseren Bikonvexlinse von Crown Glas und einer mit ihr verkitteten Bikonkavlinse von Flintglas, das eine grössere Dispersion hat als das Crown Glas. Man erkennt an diesem Beispiel unschwer das Princip der chromatischen Korrektur. Durch die Bikonvexlinse entstehen die farbigen Bilder in verschiedenen Abständen längs der Axe, so zwar, dass das violette Bild das der Linse zunächst liegende, das rothe Bild das am weitesten abliegende ist. Die Wirkung der konkaven Linse auf diese Bilder besteht nur darin, dass sie sie von der Linse entfernt, und die Wirkung auf das violette Bild ist hierbei eine stärkere als die auf das rothe Bild ausgeübte. Durch eine richtige Wahl und Kombination der Linsen lässt sich das resultirende violette Bild zur Deckung mit dem resultirenden rothen Bild bringen, oder es lassen sich irgend zwei andere Farben in dem letzten Bilde

vereinigen. Wären beide Linsen aus demselben Glas herzustellen, während gleichzeitig an sie die Forderung gestellt wird, dass die durch die eine hervorgerufene Dispersion durch die der anderen wieder aufgehoben werde, so müssten die Linsen derartig dimensioniert werden, dass mit der Aufhebung der Dispersion auch eine gegenseitige Aufhebung der den einzelnen Linsen zukommenden Ablenkungen verbunden sein würde, und eine solche Kombination würde überhaupt nicht als Linse wirken. Wir haben aber gesehen, dass für verschiedene Glasarten die Dispersion nicht der Ablenkung proportional ist, dass vielmehr Flintglas ein stärkeres Zerstreungsvermögen besitzt als Crown Glas, so dass es möglich ist, die Farbenzerstreuung zu kompensieren, ohne damit auch die Ablenkung aufzuheben.

§ 184. Untersuchen wir jetzt die Bedingung, unter welcher eine Verbindung zweier aus verschiedenen Glasarten hergestellten und dicht neben einander angeordneten Linsen für zwei Farben achromatisirt werden können.

Wir nehmen an, dass die eine dieser Farben derjenigen eines mittleren Strahls entspricht und bezeichnen die Brennweiten der beiden Linsen mit f und f' . Es werden zwei Bilder entstehen, wovon das erste das von der ersten Linse herrührende Bild des Objektes, das zweite das durch die zweite Linse erzeugte Bild des ersten Bildes ist. Sind x und x' die Abstände, um welche das Objekt und sein erstes Bild vor bzw. hinter dem Mittelpunkt der ersten Linse liegen, y, y' die Abstände, um welche das erste und zweite Bild vor bzw. hinter dem Mittelpunkt der zweiten Linse liegen, so ist nach (20, IV)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} &= \frac{1}{f'} \end{aligned} \right\}.$$

Vernachlässigen wir die Linsendicken und die Abstände zwischen den Linsen, so ist $y' = -x'$ und daher

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \dots \dots \dots (19)$$

Die Bedingung für die Achromatisirung des Systems liegt in der Identität von y für zwei verschiedene Farben und ist daher, da x von der Farbe unabhängig ist, gegeben durch die Gleichung

$$\partial \left(\frac{1}{f} \right) + \partial \left(\frac{1}{f'} \right) = 0$$

oder nach (18)

$$\frac{1}{\nu f} + \frac{1}{\nu' f'} = 0. (20)$$

Diese Gleichung enthält die Bedingung für die Achromasie der Kombination, sofern man die Linsendicken und die Abstände der Linsen von einander vernachlässigen kann.

Es ist diese Bedingungsgleichung unabhängig von x und y , so dass sie als *Bedingung für die Achromasie für eine jede Stellung des Objektes* gilt. Es ist auch für die Achromatisirung gleichgültig, in welcher Aufeinanderfolge die Linsen verbunden werden.

Bei der Konstruktion mikroskopischer Objektive werden achromatische Paare dieser Art sehr allgemein verwendet; es besteht hierbei jedes aus einer plan-konkaven Linse aus Flintglas, welche mit einer Bikonvexlinse von Crown Glas verkittet ist, wobei die plane Linsenfläche dem einfallenden Licht zugekehrt wird.

§ 185. Hat man die Kombination zweier in Kontakt angeordneter Linsen für die Dispersion überkorrigirt, d. h. befindet sich das durch das Linsenpaar hervorgerufene violette Bild in einem grösseren Abstände von demselben als das rothe Bild, so lässt sich der Fehler dadurch kompensiren, dass man zwischen den verkitteten Linsen einen dem begangenen Fehler entsprechenden geringen Zwischenraum schafft. Dieser Zwischenraum zwischen den beiden Linsen darf indessen nur ein sehr geringer sein, oder es wird eine Korrektion der farbigen Bilder in Bezug auf deren Abstände eine Differenz in dem Abbildungsverhältnis zur Folge haben.

Es gelten hier dieselben Gleichungen wie die in § 184 angeführten, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} &= \frac{1}{f'} \end{aligned} \right\}; (21)$$

und ausserdem besteht die Gleichung

$$x' + y' = a, (22)$$

wo a jenen kleinen Zwischenraum zwischen den beiden Linsen bedeutet. Nehmen wir nun an, die farbigen Bilder entstanden in einem gleichen Abstände von der Linse, so ist $\partial x = 0$ und $\partial y = 0$ und daher nach (18):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial x'}{(x')^2} &= \frac{1}{\nu' f'} \\ -\frac{\partial y'}{(y')^2} &= \frac{1}{\nu' f'} \end{aligned} \right\},$$

oder, da nach (22) $\partial x' + \partial y' = 0$

$$(x')^2 \frac{1}{\nu' f'} + (y')^2 \frac{1}{\nu' f'} = 0.$$

Setzt man hierin für y' seinen Werth $a - x'$ und vernachlässigt die Quadrate des Quotienten $\frac{a}{x'}$, so erhält man für diese Gleichung die Näherungsform

$$\frac{2a}{\nu' f'} = x' \left(\frac{1}{\nu' f'} + \frac{1}{\nu' f'} \right),$$

oder, wenn man hierin nach (21) x' durch seinen Werth nach x und f ersetzt,

$$\frac{2a}{\nu' f'} \left\{ \frac{1}{f} - \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{\nu' f} + \frac{1}{\nu' f'} \cdot \dots \dots \dots (23)$$

Hiernach ist der Abstand nicht unabhängig von dem Objekt-
abstand; tritt aber das Linsenpaar als Objektiv eines Fernrohrs auf,
so ist der Objekt-
abstand x sehr gross im Vergleich mit den Brenn-
weiten. Vernachlässigt man daher den reciproken Werth von x , so
erhält man als Bedingungsgleichung für die Achromatisirung solcher
Linsenglieder, welche in einem geringen Abstände von einander an-
geordnet sind:

$$\frac{2a}{\nu' f f'} = \frac{1}{\nu' f} + \frac{1}{\nu' f'},$$

oder, da nach (20) $\frac{1}{\nu' f'}$ fast denselben Werth hat wie $-\frac{1}{\nu' f}$,

$$-\frac{2a}{\nu' f^2} = \frac{1}{\nu' f} + \frac{1}{\nu' f'} \dots \dots \dots (24)$$

Dies zeigt, dass, wenn die Korrektion möglich sein soll, $\frac{1}{\nu' f} + \frac{1}{\nu' f'}$
einen negativen Werth haben müssen.

Wenn aber in der ursprünglichen, durch Gleichung (19) charak-
terisirten Linsenkombination ∂y die Aenderung von y darstellt, welche
eine Aenderung ∂n in dem Brechungsexponenten verursacht, so ist

$$-\frac{\partial y}{y^2} = \frac{1}{\nu' f} + \frac{1}{\nu' f'};$$

es muss daher ∂y positiv sein. Die violetten Strahlen vereinigen sich zu einem Bilde, welches in einem grösseren Abstände von der Linse liegt, als das den rothen Strahlen entsprechende; d. h. die ursprüngliche Linse war überkorrigirt.

§ 186. Verbindet man drei dünne, aus Medien von verschiedenem Dispersionsvermögen hergestellte Linsen zu einer einzigen, so lässt sich das System in einem noch höheren Grade der Annäherung achromatisiren; es lassen sich nämlich die drei verschiedenen Farbengattungen entsprechenden Bilder vereinigen. Ganz allgemein gesagt, wenn m Linsen zu einem Linsensystem verbunden werden, dessen Dicke vernachlässigt werden kann, so lässt sich das System achromatisiren für die Strahlen, deren Brechungsexponenten n und $n + \partial n$ sind, vorausgesetzt, dass

$$\sum \left(\frac{1}{vf} \right) = 0.$$

Dies lässt sich nach Analogie des Vorhergehenden darlegen. Der Bedingungsgleichung lässt sich für $m-1$ Gruppen von Werthen von ∂n genügen und somit lässt sich die Achromatisirung auf die m Linien des Spektrums entsprechenden Bilder ausdehnen.

§ 187. Wenn zwei Linsen, welche zusammen ein System bilden sollen, durch einen Zwischenraum getrennt sind, so ist es unmöglich, beide Arten der Korrekturen für die Dispersion gleichzeitig zu erreichen. Denn bedeuten in Fig. 102 x und x' die Abstände des Objektes und seines ersten Bildes beziehungsweise vor und hinter der

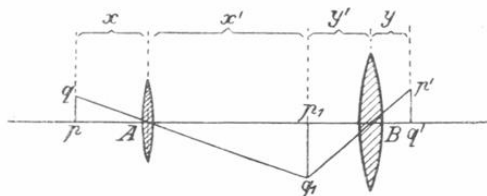


Fig. 102.

ersten Linse, y' und y diejenigen des ersten und zweiten Bildes, beziehungsweise vor und hinter der zweiten Linse und stellen β , β_1 und β' die linearen Dimensionen des Objektes und seiner successiven Bilder dar, so bestehen nach (23, IV) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{\beta_1} &= -\frac{x}{x'} \\ \frac{\beta_1}{\beta'} &= -\frac{y'}{y} \end{aligned} \right\},$$

und daher

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{x y'}{x' y}.$$

Wenn die den Brechungsexponenten n und $n + \partial n$ entsprechenden Bilder in gleichem Abstände entstehen und auch die gleiche Grösse haben sollen, so muss

$$\left. \begin{aligned} \partial x &= 0 \\ \partial y &= 0 \end{aligned} \right\},$$

ebenso

$$\partial \left(\frac{x y'}{x' y} \right) = 0;$$

und daher

$$\partial \left(\frac{y'}{x'} \right) = 0$$

sein. Es ist aber, wenn mit a der Abstand zwischen den beiden Linsen bezeichnet wird, $x' + y' = a$, so dass $\partial y'$ und $\partial x'$ beide verschwinden müssen. In anderen Worten, es muss jede Linse für sich achromatisch sein. Dies lässt sich aber nur dadurch erreichen, dass man jede Linse des Systems für sich als ein verkittetes, achromatisirtes Linsenpaar ausführt.

§ 188. Oft wird es indessen nothwendig, ein System von zwei durch einen Zwischenraum getrennten Linsen auf Dispersionsfehler so weit als möglich zu korrigiren und man hat sich dann zu fragen, welche der zweierlei Arten von Korrekturen man vorzunehmen hat und welche man unterlassen kann.

In diesem Falle ist es üblich, die Verhältnisse so zu wählen, dass die farbigen Bilder dieselbe Grösse haben; denn bekanntlich vermag das Auge besser die Grösse eines Objektes, als seine Entfernung abzuschätzen.

Bedienen wir uns der bisherigen Bezeichnungsweise, so ist

$$\partial \left(\frac{\beta}{\beta'} \right) = 0$$

die Bedingung für eine gleiche Bildgrösse.

Wir haben aber gesehen, dass

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{x y'}{y x'},$$

oder, da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'},$$

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{x}{x'} \left\{ \frac{y'}{f'} - 1 \right\}.$$

Ferner ist $x' + y' = a$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{x}{x'} \left(\frac{a - x'}{f'} - 1 \right) \\ &= \frac{x}{x'} \left(\frac{a}{f'} - 1 \right) - \frac{x}{f'}, \\ &= \left(\frac{x}{f} - 1 \right) \left(\frac{a}{f'} - 1 \right) - \frac{x}{f'}, \end{aligned}$$

oder endlich

$$\frac{\beta}{\beta'} = 1 - \frac{x}{f} - \frac{x + a}{f'} + \frac{ax}{ff'}.$$

Setzen wir das Differential dieses Ausdruckes der obigen Bedingungsgleichung entsprechend gleich 0, so erhalten wir nach (18)

$$\frac{x}{f} \frac{1}{\nu} + \frac{(x+a)}{f'} \frac{1}{\nu'} = \frac{ax}{ff'} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'} \right) \dots \dots \dots (26)$$

Dieser Ausdruck stellt daher die Bedingung für die partielle Achromatisirung der beiden Linsen dar. Im Allgemeinen ist sie nicht unabhängig von dem Objektabstande.

§ 189. Ziehen wir die Konvergenz der Strahlen in Bezug auf die optische Axe an Stelle des Abbildungsverhältnisses in unsere, auf die Feststellung der Bedingungen für die Achromasie gerichtete Untersuchung hinein, so lässt sich auch auf diese Weise die Bedingung dafür aufstellen, dass zwei farbige, von dem Objekt ausgehende Strahlen parallel zu einander zum Austritt gelangen.

Sind nämlich α und α' die Konvergenzwinkel für den ersten und letzten Strahl und schneiden diese die Axe in den durch die Abscissen x und y bestimmten Punkten, so ergibt sich sofort aus einer Figur oder aus der Helmholtz'schen Formel für das Abbildungsverhältnis und (5a, IV), dass

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{xy'}{x'y}, \dots \dots \dots (27)$$

so dass, wenn der Bedingung $\partial \left(\frac{\beta}{\beta'} \right) = 0$ oder der in (26) enthaltenen genügt ist, damit auch die, dass $\partial \alpha' = 0$, erfüllt wird; das aber bedeutet, die Strahlen treten aus der achromatischen Linse als parallele Strahlen wieder heraus.

§ 190. Ihre nützlichste Anwendung findet diese Bedingungsgleichung bei der Achromatisierung von Okularen. Die Strahlen fallen von dem durch das Objektiv erzeugten Bilde ausgehend excentrisch auf das Okular. Die durch die Linsen des Okulars erzeugten Bilder entstehen in derselben Weise, als ob die Strahlen von einem wirklichen Objekt ausgingen, abgesehen davon, dass die von irgend einem Punkte des Bildes kommenden Strahlen nicht die ganze Linse füllen.

Der Mittelpunkt des Objektivs ist gewöhnlich sehr weit entfernt von dem Okular im Vergleich mit den Brennweiten der Linsen des Okulars. Dividiren wir daher die Bedingungsgleichung (26) durch x und lassen $x = \infty$ werden, so wird aus (26)

$$\frac{1}{v'f} + \frac{1}{v'f'} = -\frac{a\left(\frac{1}{v'} + \frac{1}{v'}\right)}{ff'},$$

oder

$$a = \frac{\frac{1}{v'}f' + \frac{1}{v'}f}{\frac{1}{v'} + \frac{1}{v'}}. \quad \dots \dots \dots (28)$$

Es erscheint als besonders vortheilhaft, die Linsen aus derselben Glasart herzustellen, indem dann, wenn man zwei farbige Bilder zur Deckung bringt, alle farbigen Bilder vereinigt werden. Die Bedingung für die Achromatisierung wird dann nach (28)

$$a = \frac{f + f'}{2}, \quad \dots \dots \dots (29)$$

oder in Worten ausgedrückt, *der Abstand zwischen den aus derselben Glasart hergestellten Linsen muss gleich der halben Summe ihrer Brennweiten sein.*

§ 191. Die Bedingungen für die Achromatisierung irgend eines Systems centrirter dicker sowohl als dünner Linsen lassen sich leicht aus der Gauss'schen Theorie ableiten.

Denn es lassen sich nach §§ 78 und 79 die Relationen zwischen den Koordinaten eines Punktes und seines Bildes in den Formen ausdrücken:

$$k(\xi - a)(\xi' - a') + n'g(\xi - a) - nl(\xi' - a') - nn'h = 0$$

und

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\xi}{\xi'} = \frac{k(\xi' - a') + n'g}{n'}.$$

Nehmen wir nun den Punkt (ξ, η, ξ) als fest an, so müssten

bei vollkommener Achromasie die Koordinaten des konjugirten Punktes unabhängig von dem besonderen, der Rechnung zu Grunde gelegten Strahl sein; und dies gilt für alle Werthe von ξ , η , ζ . Diese Bedingungen lassen sich für zwei Strahlen dadurch erfüllen, dass man

$$\partial \left(\frac{n' g}{k} \right) = 0, \quad \partial \left(\frac{n l}{k} \right) = 0, \quad \partial \left(\frac{n n' h}{k} \right) = 0, \quad \partial \left(\frac{k}{n'} \right) = 0, \quad \partial g = 0$$

macht.

Diese Relationen sind gleichbedeutend mit

$$\partial g = 0, \quad \partial (n h) = 0, \quad \partial \left(\frac{k}{n'} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \partial \left(\frac{n}{n'} l \right) = 0.$$

Die Grössen g , h , k , l sind aber unter einander verbunden durch die Gleichung

$$g l - h k = 1,$$

woraus man durch Multiplikation mit $\frac{n}{n'}$ erhält:

$$g \left(\frac{n l}{n'} \right) - n h \left(\frac{k}{n'} \right) = \frac{n}{n'},$$

woraus sich ohne Weiteres die Bedingung ergibt:

$$\partial \left(\frac{n}{n'} \right) = 0.$$

Dieser Bedingung lässt sich aber nur genügen, wenn man das erste und letzte Medium gleichartig sein lässt; in den meisten optischen Instrumenten liegt dieser Fall thatsächlich vor. Die angeführten Bedingungen lassen sich dann auf drei der vier folgenden zurückführen:

$$\partial g = 0, \quad \partial (n h) = 0, \quad \partial \left(\frac{k}{n} \right) = 0, \quad \partial l = 0.$$

Vergleicht man hiermit die Werthe der Koordinaten der Cardinalpunkte des Systems, so erkennt man ohne Weiteres, dass die angeführten Bedingungen damit gleichbedeutend sind, dass man die Hauptpunkte und Brennweiten des Systems für die beiden Farben gleichwerthig macht.