universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel VIII. Gestalt und Eigenschaften enger Strahlenbüschel im Allgemeinen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel VIII.

Gestalt und Eigenschaften enger Strahlenbüschel im Allgemeinen.

Allgemeine Theorie der Brechung dünner Büschel.

§ 135. Das dünne Strahlenbüschel, welches den Gegenstand der folgenden Untersuchung bildet, denken wir uns derartig konstituirt, dass in demselben im Allgemeinen nur ein einziger Strahl durch einen gegebenen Punkt geht, dass ferner die dasselbe bildenden Strahlen von einem als festliegend gedachten Strahl, dem Hauptstrahl, nur um ein geringes entfernt sind und dass die Neigung sämmtlicher Strahlen zum Hauptstrahl kleine Grössen erster Ordnung darstellen. Die im Folgenden entwickelte Theorie rührt von E. E. Kummer her.

Nehmen wir den Hauptstrahl als Z-Axe eines räumlichen Koordinatensystems an, bezeichnen mit (α, β, γ) die Richtungskosinusse irgend eines dem Hauptstrahl unendlich benachbarten Strahls des Lichtbüschels, während $(x, y, 0)$ die Koordinaten des Punktes darstellen, in welchem dieser Strahl die XY-Ebene schneidet, so sind nach unserer Voraussetzung α und β kleine Grössen erster Ordnung und angenähert ist $\gamma = 1$. Da nun aber, wie hervorgehoben, nur ein einziger Strahl durch irgend einen bestimmten Punkt gehen kann, so sind die Koordinaten x, y als Funktionen der Richtungskosinusse α, β anzusehen und lassen sich nach dem Maclaurin'schen Theorem in eine Reihe nach α und β entwickeln. Vernachlässigen wir hierbei die Potenzen der kleinen Grössen α und β, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{dx}{d\alpha}\,\alpha + \frac{dx}{d\beta}\,\beta \\ y &= \frac{dy}{d\alpha}\,\alpha + \frac{dy}{d\beta}\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder (sagen wir)

$$\left.\begin{aligned} x &= e\alpha + f\beta \\ y &= f'\alpha + g\beta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo e, f, f' und g von der Beschaffenheit des Strahlenbüschels abhängige Konstanten sind.

§ 136. Im Allgemeinen schneiden sich unendlich benachbarte Strahlen nicht; es lässt sich aber immer ein Punkt auf dem Hauptstrahl bestimmen, welcher den geringsten Abstand von allen, den letzteren umgebenden unendlich benachbarten Strahlen hat. Wir werden alsbald sehen, *dass diese Punkte kleinsten Abstandes sämmtlich innerhalb eines (durch zwei bestimmte Punkte) begrenzten Theiles des Hauptstrahls liegen.* Ist nämlich z der Abstand desjenigen Punktes auf dem Hauptstrahl vom Ursprunge, in welchem dieser von dem durch seine Richtungskosinusse (α, β, γ) bestimmten unendlich benachbarten Strahl seinen geringsten Abstand hat, und stellen (λ, μ, ν) die Richtungskosinusse der Linie dieses kleinsten Abstandes zwischen den beiden Strahlen dar, so ist die Richtung der Linie (λ, μ, ν) senkrecht zu derjenigen des Hauptstrahls und des Strahls (α, β, γ) und somit

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$$

oder, da

$$\nu = 0,$$

ist

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Strahl (α, β, γ), somit auch durch den Punkt (x, y, z) und jene Strecke kürzesten Abstandes (λ, μ, ν), deren Punkte die Koordinaten ξ, η, ζ haben mögen, gelegt wird, ist:

$$(\xi - x)(\beta\nu - \gamma\mu) + (\eta - y)(\gamma\lambda - \alpha\nu) + (\zeta - z)(\alpha\mu - \lambda\beta) = 0$$

oder, da hier $z = 0$ und $\nu = 0$,

$$-(\xi - x)\mu\gamma + (\eta - y)\lambda\gamma + \zeta(\alpha\mu - \lambda\beta) = 0.$$

Diese Ebene schneidet den Hauptstrahl in dem gesuchten Fusspunkt des kürzesten Abstandes. Um seine Lage zu finden, hat man nur in der letzten Gleichung $\xi = 0$, $\eta = 0$ zu setzen und ζ in z übergehen zu lassen; man erhält dann, wenn man ausserdem für γ seinen Näherungswerth 1 setzt,

$$z(\alpha\mu - \lambda\beta) = \lambda y - \mu x.$$

Mit Hilfe der Gleichung (3) lassen sich hieraus λ und μ eliminiren und man erhält

$$z(\alpha^2+\beta^2) = -(\alpha x + \beta y),$$

oder nach (2)

$$= -\left\{ e\alpha^2 + (f+f')\alpha\beta + g\beta^2 \right\}.$$

Bezeichnet δ den Winkel, welchen eine parallel zum Strahl (α, β, γ) durch den Hauptstrahl gelegte Ebene mit der XZ-Ebene einschliesst, so hat man zunächst $\operatorname{tg}\delta = \frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}$ und, wenn man diese Beziehung in die letzte Gleichung einführt, und noch durch $\alpha^2 + \beta^2$ beiderseits dividirt,

$$z = -\left\{ e\cos^2\vartheta + (f+f')\sin\vartheta\cos\vartheta + g\sin^2\vartheta \right\}.$$

Diese Gleichung erhält eine einfachere Form, wenn man das mittlere Glied des Ausdrucks fortschafft. Zu diesem Zweck substituiren wir $\omega + \Phi$ für δ, wo ω einen vorläufig unbekannten Winkel darstellt. Wir erhalten dann für die letzte Gleichung:

$$\begin{aligned} z = &-\cos^2\Phi\left\{ e\cos^2\omega + (f+f')\sin\omega\cos\omega + g\sin^2\omega \right\} - \\ &-\sin^2\Phi\left\{ e\sin^2\omega - (f+f')\sin\omega\cos\omega + g\cos^2\omega \right\} - \\ &-\sin\Phi\cos\Phi\left\{ (f+f')\cos 2\omega - (e-g)\sin 2\omega \right\}. \end{aligned}$$

Wählt man nun ω so, dass

$$\left.\begin{aligned} (e-g) &= k\cos 2\omega \\ (f+f') &= k\sin 2\omega \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

mithin

$$k^2 = (e-g)^2 + (f+f')^2$$

wird, so verschwindet der Koefficient von $\sin\Phi\cos\Phi$, der Koefficient von $\cos^2\Phi$ wird

$$-\frac{1}{2}\left\{ e(1+\cos 2\omega) + (f+f')\sin 2\omega + g(1-\cos 2\omega) \right\},$$

oder

$$-\frac{1}{2}(e+g+k),$$

und als denjenigen von $\sin^2\Phi$ findet man

$$-\frac{1}{2}(e+g-k).$$

Führt man diese Koefficienten in Gleichung (4) ein, so erhält man:

$$z = r_1\cos^2\Phi + r_2\sin^2\Phi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wenn hierin

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{2}(e+g+k) \\ r_2 &= -\frac{1}{2}(e+g-k) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6a)$$

Es liegt somit der Punkt kürzesten Abstandes innerhalb bestimmter, durch die Gleichungen $z = r_1$ für $\Phi = 0$, und $z = r_2$ für $\Phi = \frac{\pi}{2}$ charakterisirter Grenzen. Man bezeichnet daher diese Punkte als die Grenzpunkte des Strahls, und die entsprechenden, zwei unendlich benachbarten Strahlen parallelen Ebenen, d. h. die beiden Ebenen, für welche $\Phi = 0$ und $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ist, heissen die Hauptebenen des Strahls.

§ 137. *In dem Strahlensystem sind nun zwei Strahlen vorhanden, für welche der erste Näherungswerth der kürzesten Abstände von dem Hauptstrahl verschwindet.* Die Länge des kürzesten Abstandes zwischen dem Strahl (α, β, γ) und dem Hauptstrahl ist $\lambda x + \mu y$. Dieser erste Näherungswerth verschwindet also nach (2), wenn

$$\lambda(e\alpha + f\beta) + \mu(f'\alpha + g\beta) = 0$$

oder

$$\frac{\lambda}{\mu}(e\alpha + f\beta) + f'\alpha + g\beta = 0$$

wird.

Eliminirt man das Verhältnis $\lambda : \mu$, indem man aus (3) hierin $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\beta}{\alpha} = -\operatorname{tg}\delta$ einsetzt, so erhält man

$$-e - f\operatorname{tg}\delta + f'\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} + g = 0,$$

oder

$$f'\cos^2\delta + (g-e)\sin\delta\cos\delta - f\sin^2\delta = 0,$$

oder

$$(g-e)\sin 2\delta + (f+f')\cos 2\delta = f - f'.$$

Substituiren wir hierin $\omega + \Phi$ für δ, so erhält diese Gleichung die Form:

$$\cos 2\Phi\left\{(f+f')\cos 2\omega + (g-e)\sin 2\omega\right\} +$$

$$+ \sin 2\Phi\left\{(g-e)\cos 2\omega - (f+f')\sin 2\omega\right\} = f - f'.$$

Hieraus ergiebt sich, da aus (5)

$$(g - e) \sin 2\omega = -(f + f') \cos 2\omega$$

und

$$(e - g) \cos 2\omega + (f + f') \sin 2\omega = k,$$

$$-k \sin 2\Phi = f - f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Setzt man hierin

$$\sin \varepsilon = \frac{f' - f}{k},$$

so ist

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Es lassen sich somit durch den Hauptstrahl zwei Ebenen legen, welche beide auch noch einen unendlich benachbarten Strahl enthalten. Diese Ebenen nennt man die Fokalebenen des Strahls und die Punkte, in welchen die unendlich benachbarten Strahlen den Hauptstrahl schneiden, bezeichnet man als die beiden Brennpunkte des Strahls. *Die beiden Fokalebenen liegen symmetrisch in Bezug auf die Hauptebenen des Strahls;* mit anderen Worten, die den Winkel zwischen den Hauptebenen halbirende Ebene halbirt auch den Winkel zwischen den Fokalebenen.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Abstände der Fokalebenen vom Ursprung, so ist nach (6)

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= r_1 \cos^2\Phi + r_2 \sin^2\Phi \\ \varrho_2 &= r_1 \sin^2\Phi + r_2 \cos^2\Phi \end{aligned}\right\},$$

worin nach (7)

$$\sin 2\Phi = \frac{f' - f}{k}$$

und

$$\varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hieraus geht hervor, *dass die Brennpunkte zu den Grenzpunkten eine symmetrische Lage einnehmen,* oder mit anderen Worten, der in der Mitte zwischen den Grenzpunkten liegende Punkt liegt auch in der Mitte zwischen den Brennpunkten. Aus der Charakteristik der Grenzpunkte folgt, dass die Brennpunkte zwischen den Grenzpunkten liegen müssen.

§ 138. Die Fokalabstände lassen sich bequemer nach einer anderen Methode bestimmen. Schneidet der durch $(x, y, 0)$ gehende Strahl die Ebene $z = \varrho$ im Punkte (ξ, η), so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \varrho\,\alpha = (e + \varrho)\,\alpha + f\beta \\ \eta &= y + \varrho\,\beta = f'\,\alpha + (g + \varrho)\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ist nun der Punkt $z = \varrho$ ein Brennpunkt, so ist $z = \varrho$ auch die Bedingung dafür, dass der unendlich benachbarte Strahl den Hauptstrahl schneidet, und es ist in diesem Falle $\xi = 0$ und $\eta = 0$. Hiernach specialisiren sich die Gleichungen (10) folgendermaassen:

$$\left.\begin{aligned} (e+\varrho)\,\alpha + f\beta &= 0 \\ f'\,\alpha + (g+\varrho)\,\beta &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Eliminirt man hierin das Verhältnis $\alpha : \beta$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$(e+\varrho)(g+\varrho) = ff' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

als Bestimmungsgleichung für die Fokalabstände.

§ **139.** *Alle Strahlen eines engen Strahlenbüschels gehen,* wie wir im Folgenden zeigen werden, *durch zwei feste Linien, welche den Hauptstrahl in den Brennpunkten unter rechtem Winkel schneiden.* Diese Linien nennt man Brennlinien und zwar liegt die erste Brennlinie in der zweiten Fokalebene und die zweite Brennlinie in der ersten Fokalebene. Um dies darzulegen, haben wir den Schnittpunkt irgend eines Strahls mit der Ebene $z = \varrho_1$ zu bestimmen. Die Koordinaten eines solchen Schnittpunktes sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \varrho_1\,\alpha \\ \eta &= y + \varrho_1\,\beta \\ \zeta &= \varrho_1 \end{aligned}\right\}.$$

Legt man durch diesen Punkt und den Hauptstrahl eine Ebene, so zeigt es sich, dass die Lage einer solchen Ebene unabhängig ist von dem betreffenden Strahl. Es ist nämlich die Gleichung der Ebene nach Analogie von (10)

$$\xi\,(y + \varrho_1\,\beta) = \eta\,(x + \varrho_1\,\alpha),$$

oder

$$\eta\left\{(e+\varrho_1)\,\alpha + f\beta\right\} = \xi\left\{f'\,\alpha + (g+\varrho_1)\,\beta\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

und setzt man in die nach Analogie von (11) gebildete Gleichung

$$(e+\varrho_1)(g+\varrho_1) = ff'$$

$$\frac{e+\varrho_1}{f'} = \frac{f}{g+\varrho_1} = m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so erhält man, wenn man in (12) $e+\varrho_1$ durch mf' und $g+\varrho_1$ durch $\frac{f}{m}$ ersetzt:

$$\xi = m\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

als die Gleichung der den Hauptstrahl und den Schnittpunkt des betrachteten Strahls mit der Ebene $z = \varrho_1$ enthaltenden Ebene, und die Lage derselben ist, wie wir hieraus erkennen, unabhängig von α und β.

Hieraus ergiebt sich, dass alle Strahlen die Ebene $z = \varrho_1$ in Punkten schneiden, welche auf einer durch den Brennpunkt gehenden Linie liegen; wir wollen diese Linie als die erste Brennlinie bezeichnen. Auf analoge Weise lässt sich nachweisen, dass alle Strahlen eine ähnliche, durch den anderen Brennpunkt gehende zweite Brennlinie durchschneiden.

Es leuchtet ein, dass die erste Brennlinie in der zweiten Fokalebene liegt, indem diese zwei in dem zweiten Brennpunkt sich schneidende Strahlen enthält und jeder dieser Strahlen die Brennlinie schneidet. Umgekehrt liegt die zweite Brennlinie in der ersten Fokalebene.

§ 140. Wir gelangen nun zu der Theorie der Strahlendichtigkeit, welche analog ist der Gauss'schen Messung gekrümmter Raumkurvenflächen. Die Dichtigkeit der Strahlen für irgend einen zum Hauptstrahl rechtwinkligen Schnitt wollen wir folgendermaassen definiren. Wir nehmen zunächst an, der ebene Schnitt des Strahlenbüschels stelle eine kleine krummlinig begrenzte Ebene dar. Denkt man sich nun von dem Mittelpunkt einer Kugel vom Radius 1 parallel zu den äussersten Strahlen des Büschels Linien nach der Fläche der Kugel gezogen, so schneiden diese auf ihr ein durch eine geschlossene Kurve begrenztes Flächenelement ab. Das Verhältnis nun der Fläche dieses Kugelelementes zu der Fläche jenes ebenen Schnittes giebt uns ein Maass für die erwähnte Dichtigkeit der Strahlen.

Lassen wir das Strahlenbüschel durch die Ebene $z = \mathrm{R}$ geschnitten werden und schneidet der durch den Punkt $(x, y, 0)$ gehende Strahl diese Ebene in (ξ, η), so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \mathrm{R}\,\alpha \\ \eta &= y + \mathrm{R}\,\beta \end{aligned}\right\},$$

oder nach (2)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (e + \mathrm{R})\,\alpha + f\beta \\ \eta &= f'\,\alpha + (g + \mathrm{R})\,\beta \end{aligned}\right\},$$

und somit

$$\eta\,d\xi - \xi\,d\eta = (\beta\,d\alpha - \alpha\,d\beta)\left\{(e + \mathrm{R})(g + \mathrm{R}) - ff'\right\}.$$

Aus der Integration dieses Ausdrucks ergiebt sich:

$$\int (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta) = \int (\beta\, d\alpha - \alpha\, d\beta) \left\{ (e + \mathrm{R})(g + \mathrm{R}) - ff' \right\}.$$

$\int (\beta\, d\alpha - \alpha d\beta)$ nun stellt die Grösse der vorerwähnten kleinen krummlinigen Fläche auf der Kugel vom Radius 1 dar, während $\int (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta)$ den Inhalt des ebenen Schnittes des Strahlenbüschels bedeutet. Bezeichnet man somit die Dichtigkeit mit δ, so lässt sich die letzte Gleichung auch folgendermaassen schreiben

$$\frac{\int (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta)}{\int (\beta\, d\alpha - \alpha\, d\beta)} = \frac{1}{\delta} = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}(e + g) + eg - ff',$$

oder, da nach (6a) $e + g = -(\varrho_1 + \varrho_2)$ und nach (13) $ff' = eg - \varrho_1 \varrho_2$,

$$\frac{1}{\delta} = (\mathrm{R} - \varrho_1)(\mathrm{R} - \varrho_2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wo ρ_1 und ρ_2 die Fokalabstände darstellen.

§ 141. Für die praktischen Zwecke der Optik ist nun der wichtigste Fall derjenige, wo die Strahlen des Bündels eine Gruppe von Normalen zur Fläche darstellen. Untersuchen wir nun, in welcher Weise die zuletzt gewonnenen Resultate für diesen Fall zu specialisiren sind.

Die Bedingung, dass die Strahlen von einer Fläche unter rechtem Winkel geschnitten werden, ist, dass $\alpha\, dx + \beta\, dy$ ein totales Differential darstellt. Dieser Bedingung wird genügt, wenn

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}.$$

Differentiiren wir die Gleichungen (1) nach x und y, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dx}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} \\ 0 &= \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dy}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dx}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy} \\ 1 &= \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dy}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy} \end{aligned}\right\}.$$

Aus dem ersteren Gleichungspaar ergiebt sich

$$\frac{d\beta}{dx} \mathrm{J} = -\frac{dy}{d\alpha},$$

aus dem zweiten

$$\frac{d\alpha}{dy} J = -\frac{dx}{d\beta},$$

wo J das Jacobin'sche Differential $\frac{d(x, y)}{d(\alpha, \beta)}$ darstellt.

Die Bedingung, dass die Strahlen senkrecht zu einer Fläche stehen, ist somit

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{dy}{d\alpha},$$

oder, wenn wir hierfür die in den Gleichungen (1) und (2) enthaltenen Bezeichnungen einführen, $f = f'$.

Die Gleichung für die Azimuthe der Fokalschnitte wird somit nach (7) $\sin 2\Phi = 0$, woraus folgt, dass $\Phi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$. Es fallen somit in diesem Fall die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammen und die Fokalebenen schneiden einander unter rechtem Winkel. *Jeder Strahl einer Gruppe von Normalstrahlen geht daher durch zwei senkrecht zum Hauptstrahl gerichtete gerade Linien, welche in Ebenen liegen, die auch zu einander senkrecht sind.*

Die beiden Brennpunkte fallen zusammen, *wenn* $f = 0$ *und* $f' = 0$ und in diesem Falle *schneiden sich alle Linien des engen Strahlenbüschels in einem Punkt.*

§ **142.** Um uns eine Vorstellung von dem Charakter eines engen Strahlenbüschels zu bilden, wollen wir für einige einzelne Fälle die Gleichung für die Mantelfläche des Büschels aufstellen.

Wir nehmen an, das Strahlenbüschel schneide auf der orthogonalen Fläche eine kleine Ellipse ab, deren Axen in den Hauptebenen liegen. Die Richtung der Z-Axe verlegen wir, wie vorhin, wieder in diejenige des Hauptstrahls, der Punkt, wo dieser Strahl die orthogonale Fläche schneidet, sei der Nullpunkt, und die X Z- und Y Z-Ebene seien durch die erste und zweite Fokalebene dargestellt. Bezeichnet man dann die Fokalabstände mit v_1 und v_2, so lauten die Gleichungen der Begrenzungskurven des Strahlenbüschels:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} z &= v_1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} z &= v_2 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Jede Erzeugende der Mantelfläche muss diese Begrenzungskurven schneiden. Nimmt man somit als Gleichungen irgend einer Erzeugenden der Mantelfläche

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A}\,z + \mathrm{B} \\ y &= \mathrm{C}\,z + \mathrm{D} \end{aligned}\right\},$$

so müssen, da diese Linie die durch die Gleichungen (16), (17) und (18) bestimmten Kurven schneiden, A, B, C und D den folgenden Forderungen genügen:

$$\frac{\mathrm{B}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{D}^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}\,v_1 + \mathrm{B} &= 0 \\ \mathrm{C}\,v_2 + \mathrm{D} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19\,\mathrm{b})$$

Aus den beiden letzten Gleichungen lassen sich A und C durch B und D ausdrücken und man erhält dann als Gleichungen für die Erzeugende

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{B}\left(1 - \frac{z}{v_1}\right) \\ y &= \mathrm{D}\left(1 - \frac{z}{v_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Eliminiren wir nun hierin die beiden Konstanten B und D mit Hilfe der Gleichungen (20) und (19a), so ist

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z}{v_1}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z}{v_2}\right)^2} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

§ 143. Nimmt man für z verschiedene Werthe an, so lässt sich die Gestalt der Begrenzungskurven normaler Schnittflächen bestimmen. Diese werden im Allgemeinen die Form von Ellipsen haben; sie können aber auch als Kreise auftreten. Der letztere Fall liegt vor, wenn man z so wählt, dass der Gleichung

$$a^2\left(1 - \frac{z}{v_1}\right)^2 = b^2\left(1 - \frac{z}{v_2}\right)^2$$

genügt wird.

Man erhält somit immer zwei kreisförmige Schnitte des Lichtbüschels, von denen der eine stets zwischen den Brennlinien liegt.

Denn angenommen, v_2 sei grösser als v_1 und setzen wir nach der letzten Gleichung

$$a\left(\frac{z}{v_1}-1\right)=b\left(1-\frac{z}{v_2}\right)=r,$$

so erhalten wir damit einen kreisförmigen Schnitt, dessen Lage und Radius bestimmt sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{z}&=\frac{a}{v_1}+\frac{b}{v_2}\\ \frac{v_2-v_1}{r}&=\frac{v_1}{a}+\frac{v_2}{b}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Aus der ersteren Gleichung ergiebt sich ohne Weiteres, dass z zwischen v_1 und v_2 liegt.

Man bezeichnet diesen Kreis auch als den Kreis kleinster Verzerrung. Wir kommen hierauf weiter unten wieder zurück.

§ 144. Es weist indessen nicht jedes enge Strahlenbüschel eine derartige kreisförmige Schnittfläche auf; die im letzten Kapitel gepflogene Betrachtung gilt nur für symmetrisch verlaufende Strahlenbüschel. Ist z. B. die Schnittkurve des Strahlenbüschels mit der orthogonalen Kurve eine Ellipse, deren Axen nicht in der Fokalebene liegen, so haben wir als allgemeine Gleichung der Schnittkurve:

$$\left.\begin{aligned}a\,x^2+2\,h\,x\,y+b\,y^2&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\},$$

und folgern hieraus nach Analogie des vorigen Falles

$$\frac{a\,x^2}{\left(1-\frac{z}{v_1}\right)^2}+\frac{2\,h\,x\,y}{\left(1-\frac{z}{v_1}\right)\left(1-\frac{z}{v_2}\right)}+\frac{b\,y^2}{\left(1-\frac{z}{v_2}\right)^2}=1$$

als die Gleichung des Mantels des Strahlenbüschels. Welchen konstanten Werth wir auch immer z geben mögen, kann die Gleichung des Schnittes niemals auf die Form der Kreisgleichung gebracht werden.

In optischen Instrumenten sind indessen die orthogonalen Flächen stets Rotationsflächen, deren Axen mit der optischen Axe des Instrumentes zusammenfallen, und die erste Fokalebene eines kleinen Theils eines symmetrisch verlaufenden Strahlenbüschels ist ein Meridianschnitt, so dass das enge Strahlenbüschel die nöthige Symmetrie erhält und in Folge dessen einen kreisförmigen Querschnitt besitzt.

§ 145. Wie wir gesehen haben, werden im Allgemeinen nicht die sämmtlichen Strahlen eines aus einem optischen System austretenden Strahlenbüschels in einem Punkte homocentrisch; vielmehr haben wir früher gesehen, dass alle Strahlen durch zwei Brennlinien gehen. Untersuchen wir nun weiter die Eigenschaften und die Lage des von einem solchen Strahlenbüschel herrührenden Bildes eines Objektes! Wir nehmen zu diesem Zwecke an, es werde einer der engen Strahlenbüschel von einem Schirm aufgefangen. Fällt die Schirmebene mit der ersten Brennlinie zusammen, so ergiebt der Schnitt des Strahlenbüschels eine kleine Linie, etwa eine horizontale Linie. Wird eine Anzahl solcher von verschiedenen Punkten eines Objektes ausgehenden Strahlenbüschel von dem Schirm aufgefangen, so entspricht jedem Strahlenbüschel eine kurze Horizontallinie auf dem Schirm, und es wird in Folge dessen die Breite des Bildes gegenüber der Länge desselben stark übertrieben erscheinen. Bringt man dagegen den Schirm in die andere Brennlinie des Strahlenbüschels, so wird jeder Punkt des Objektes auf der Bildfläche als kleine Vertikallinie abgebildet, und jetzt wird es die Länge des Bildes sein, welche gegenüber der Breite desselben stark übertrieben erscheint. Die so erhaltenen Bilder sind beide mangelhaft, indem in beiden Fällen das Bild verzerrt erscheint. Das beste Bild erhält man, wenn der Schirm sich in der Ebene des Kreises kleinster Verzerrung befindet; in diesem Falle entsteht nämlich, entsprechend jedem Punkte des Objektes, ein kleiner kreisförmiger Lichtfleck auf dem Schirm und, ist der Kreis kleinster Verzerrung sehr klein, so wird hierdurch der Werth des Bildes nicht wesentlich beeinträchtigt. Das Bild stellt sich somit dar als das Aggregat der einander überdeckenden Kreise kleinster Verzerrung. Die Grösse des Kreises kleinster Verzerrung kann als Maass für die Undeutlichkeit des Bildes dienen.

§ 146. Der Charakter eines engen Strahlenbüschels lässt sich, allerdings in einer weniger befriedigenden Weise, auch mit elementargeometrischen Mitteln untersuchen. Wenn das Strahlensystem um eine Linie als Axe symmetrisch gruppirt ist, so ist, wie wir gesehen haben, die orthogonale Fläche eine Rotationsfläche. Wir wollen im Folgenden ein enges Strahlenbüschel, dessen Strahlen die orthogonale Fläche in einem kleinen Flächenelement schneiden, untersuchen und nehmen hierbei an, die Schnittkurve des Strahlenbüschels mit der orthogonalen Fläche habe die Form einer kleinen Ellipse mit den Axen 2a und 2b und dem Mittelpunkt C.

MCN, PRS.... (Fig. 95) seien die Krümmungslinien des Systems von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Es werden

dann solche Strahlen, welche von allen Punkten der Linie M C N ausgehen, die Axe in einem Punkt q_2 schneiden, und da die Fläche sehr klein ist, so kann man M C N als gerade Linie ansehen, und somit liegen alle durch M C N gehenden Strahlen in der Ebene q_2 M N und schneiden sich in q_2. Ebenso liegen alle Strahlen, welche die orthogonale Fläche in der Linie P R S schneiden, in einer Ebene q P S und schneiden die Axe im Punkte q. $m\ q_1\ n$ sei die Schnittlinie beider Ebenen. Wenn die Linie P R S bis zum Zusammenfallen mit M C N verschoben wird, so gelangt die Schnittlinie $m\ q_1\ n$ in eine bestimmte Grenzstellung; und da die auf der orthogonalen Fläche abgeschnittene Fläche sehr klein ist, so gehen alle Ebenen wie P q S sehr angenähert durch diese Grenzlage der Linie $m\ q_1\ n$.

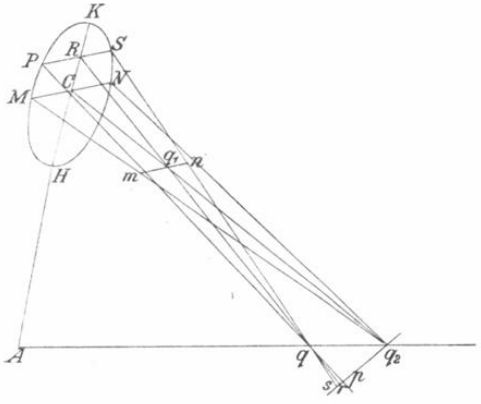


Fig. 95.

Wir bezeichnen diese Linie als die erste Brennlinie und der Punkt q_1, in welchem sie von dem Hauptstrahl geschnitten wird, heisst der erste Brennpunkt. Es gehen somit alle Strahlen des Strahlenbüschels sehr angenähert durch die erste Brennlinie und können als thatsächlich durch dieselbe gehend behandelt werden.

§ **147.** Ferner schneiden alle Strahlen des Strahlenbüschels die Axe und man könnte somit die Axe als die zweite Brennlinie ansehen; dies ist indessen nicht zweckmässig, da diese Linie zum Hauptstrahl des Strahlenbüschels nicht senkrecht gerichtet ist. Der Schnitt des Strahlenbüschels mit einer durch q_2 gelegten, zum Hauptstrahl senkrecht stehenden Ebene weicht kaum von einer geraden Linie ab; streng genommen hat dieser Schnitt die Form einer Kurve mit zwei Schleifen, in Gestalt einer langgezogenen, schmalen „8“ ähnlich. Denn da alle von M C N ausgehenden Strahlen durch q_2 gehen, so verschwindet die Breite der Schnittfläche bei q_2. Die von

der Linie PRS ausgehenden Strahlen aber schneiden sich in q und werden folglich bereits wieder auseinandergegangen sein, ehe sie die Ebene des Schnittes treffen, woraus sich eine Schnittfläche von der grösseren Breite prs ergiebt; und ebenso, gehen wir von einer Krümmungslinie unterhalb MCN aus, so schneiden sich die von dieser ausgehenden Strahlen in einem über q_2 hinausliegenden Punkt der Axe und werden daher noch nicht zur Vereinigung gelangt sein, wenn sie die Schnittebene erreichen. Es ergiebt sich hieraus, dass die Figur sowohl oberhalb als auch unterhalb sich ausbuchtet; wir werden aber durch die folgende Untersuchung zeigen, dass die Breite der Schnittfläche eine kleine Grösse der zweiten Ordnung ist und dass man somit die Breite vernachlässigen und daher den Schnitt als eine gerade Linie ansehen kann.

Die Breite des Schnittes ergiebt sich mit Rücksicht auf die Figur aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke. Ist θ die Neigung des Hauptstrahles zur Axe, so ist

$$\frac{p\,r}{\mathrm{PR}} = \frac{q\,r}{q\,\mathrm{R}} = \frac{q_2\,r\,\mathrm{cotg}\,\theta}{q\,\mathrm{R}},$$

indem der Winkel $q r q_2$ sehr angenähert ein rechter Winkel ist.

Ferner ist

$$\frac{q_2\,r}{\mathrm{C\,R}} = \frac{q_1\,q_2}{\mathrm{C}\,q_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_1},$$

wo v_1 und v_2 mit den Abständen $\mathrm{C}q_1$ und $\mathrm{C}q_2$ identisch sind. Setzt man daher hieraus den Werth von $q_2 r$ in die erste dieser Gleichungen ein, so erhält man

$$p\,r = \frac{\mathrm{PR}\,.\,\mathrm{CR}}{q\,\mathrm{R}} \cdot \frac{v_2 - v_1}{v_1}\,\mathrm{cotg}\,\theta\,.$$

b und a sind die grössten Werthe von PR und CR und qR ist angenähert gleich v_2, so dass pr dem Grade nach mit $\frac{a\,b\,(v_2 - v_1)}{v_1\,v_2}$ identisch ist. a und b sind aber im Vergleich mit v_1 und v_2 sehr klein und es ist daher die Breite pr immer eine kleine Grösse zweiter Ordnung.

Man nennt diese Linie die zweite Brennlinie und den Punkt q_2 den zweiten Brennpunkt. Die durch C und die Axe gelegte Ebene heisst die erste Fokalebene und die zu dieser senkrecht gerichtete und durch den Hauptstrahl gelegte Ebene nennt man die zweite Fokalebene. Somit enthält die erste Fokalebene die zweite Brennlinie, während die erste Brennlinie immer in der zweiten Fokalebene liegt.

§ 148. Wählen wir einen Schnitt zwischen den beiden Brennlinien derart, dass die Breite des Schnittes in der ersten Fokalebene gleich ist derjenigen in der zweiten Fokalebene, und setzen wir voraus, dass dieser Schnitt kreisförmig ist, so lässt sich die Lage und Grösse des Kreises kleinster Verzerrung auf elementar-geometrischem Wege finden.

In Fig. 96 sei $m\,h\,n\,k$ ein zum Hauptstrahl senkrechter Schnitt und $h\,o\,k$ und $m\,o\,n$ seien die Breitendimensionen dieses Schnittes innerhalb der ersten resp. zweiten Fokalebene.

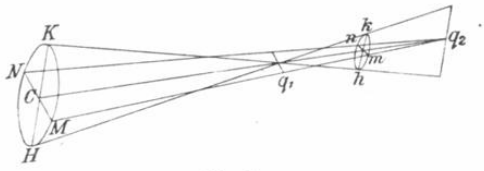


Fig. 96.

Setzt man jede dieser gleich $2r$ und $z = \mathrm{C}o$, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{H\,K}\,q_1$ und $h\,k\,q_1$ einerseits und $\mathrm{M\,N}\,q_2$ und $m\,n\,q_2$ andererseits:

$$\left.\begin{aligned} h\,k : \mathrm{H\,K} &= o\,q_1 : \mathrm{C}\,q_1 \\ m\,n : \mathrm{M\,N} &= o\,q_2 : \mathrm{C}\,q_2 \end{aligned}\right\},$$

und

d. h.

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{a} &= \frac{z - v_1}{v_1} \\ \frac{r}{b} &= \frac{v_2 - z}{v_2} \end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Lage und den Radius des Kreises kleinster Verzerrung, und man erhält aus ihnen dieselben Resultate wie oben (s. Gl. 22), nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{z} &= \frac{a}{v_1} + \frac{b}{v_2} \\ \frac{v_2 - v_1}{r} &= \frac{v_1}{a} + \frac{v_2}{b} \end{aligned}\right\}.$$

Ist der Schnitt, welchen das Strahlenbüschel mit der orthogonalen Fläche bildet, kreisförmig, so ist $a = b$ und man erhält dann für diesen Specialfall die Gleichung

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und es stellt somit z das harmonische Mittel zwischen v_1 und v_2 dar.

§ 149. Wir wollen nun auf elementar-geometrischem Wege die Lage des ersten und zweiten Brennpunktes eines von einem Punkte ausgehenden, an einer ebenen oder sphärischen Fläche reflektirten oder gebrochenen engen Strahlenbüschels bestimmen.

Wird ein enges Strahlenbüschel, welches auf eine Ebene schief auffällt, von dieser reflektirt, so gehen, wie wir wissen, die reflektirten Strahlen sämmtlich durch einen Punkt, so dass also in diesem Falle die beiden Brennpunkte zusammenfallen. In diesem Falle ist also auch kein Kreis geringster Verzerrung vorhanden; das Bild des Punktes ist wieder ein Punkt und die Definition ist somit eine vollkommene.

Als zweiten Fall nehmen wir an, das Strahlenbüschel werde von einer ebenen Fläche gebrochen.

QP sei in Fig. 97 der Hauptstrahl des Strahlenbüschels, q_2P dessen Richtung nach der Brechung. Einfalls- und Brechungswinkel dieses

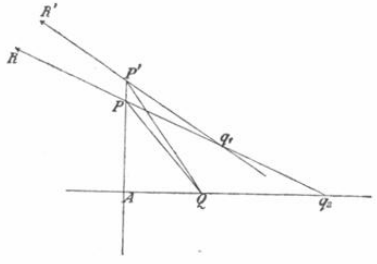


Fig. 97.

Strahles seien mit i bezw. i' bezeichnet. QP′ sei ein dem Hauptstrahl unendlich benachbarter, in der ersten Fokalebene verlaufender Strahl und wir nehmen an, es schneide dieser Strahl nach der Brechung den Strahl q_2P in q_1. In dem Grenzfalle, wo P′ mit P zusammenfällt, wird q_1 der erste Brennpunkt. Zieht man nun QA senkrecht zur brechenden Ebene und wird diese Linie von dem gebrochenen Strahl in seiner Rückwärtsverlängerung im Punkte q_2 geschnitten, so stellt q_2 den zweiten Brennpunkt dar. Nimmt man nun QP $= u$, q_1P $= v_1$ und q_2P $= v_2$, so erhält man folgende Relationen:

Zunächst ist bekanntlich

$$n \sin i = n' \sin i',$$

und hieraus

$$n \cos i \, di = n' \cos i' \, di' .$$

Bezeichnet man PP′ mit x, so ist, da di ein unendlich kleines Wachsthum des Winkels i, also den Winkel PQP′ darstellt,

$$di = \frac{x \sin \mathrm{PP'Q}}{u} \quad \text{oder} \quad di = \frac{x \cos i}{u}$$

und analog

$$di' = \frac{x \cos i'}{v_1} \Bigg\} .$$

Setzen wir diese Werthe von di und di' in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir, wenn wir ausserdem beiderseitig durch x dividiren,

$$\frac{n \cos^2 i}{u} = \frac{n' \cos^2 i'}{v_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Ferner ist

$$\sin i = \frac{\mathrm{AP}}{u} ,$$

$$\sin i' = \frac{\mathrm{AP}}{v_2} ,$$

und hieraus, da $n \sin i = n' \sin i'$,

$$\frac{n}{u} = \frac{n'}{v_2} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wodurch die Werthe von v_1 und v_2 bestimmt sind.

§ 150. Endlich werde das Strahlenbüschel an einer Kugelfläche vom Radius r gebrochen.

QP sei in Fig. 98 der Hauptstrahl und $q_2 q_1$P seine Richtung nach der Brechung. Ist QP′ ein in der ersten Fokalebene verlaufender, dem Hauptstrahl unendlich benachbarter Strahl und schneidet der zugehörige gebrochene Strahl den Hauptstrahl in q_1, so wird im Grenzfalle, wo QP und QP′ zusammenfallen, q_1 zum ersten Brennpunkt, und wenn Pq_1 die Axe in q_2 schneidet, so ist q_2 der zweite Brennpunkt. O sei der Mittelpunkt der Kugelfläche und, wie oben, setzen wir QP $= u$, q_1P $= v_1$, q_2P $= v_2$. Die Winkel, welche der Einfallsstrahl QP, der gebrochene Strahl q_2P und der Radius OP mit der Axe einschliessen, seien der Reihe nach mit χ, χ', θ bezeichnet. Sind dann i und i' der Einfalls- und Brechungswinkel, so ist $i = \theta - \chi$, $i' = \theta - \chi'$.

Nach dem Brechungsgesetz ist

$$n \sin i = n' \sin i'$$

und hieraus

$$n \cos i \, d i = n' \cos i' \, d i'.$$

Ersetzen wir di und di' durch ihre Differentialwerthe nach χ, χ', θ, so erhalten wir aus der letzten Relation die Gleichung:

$$n \cos i \, d\chi - n' \cos i' \, d\chi' = (n \cos i - n' \cos i') \, d\theta.$$

Bezeichnen wir nun den Bogen PP' mit x, so erhalten wir die Relationen $d\chi = \frac{x \cos i}{u}$, $d\chi' = \frac{x \cos i'}{v_1}$ und $d\theta = \frac{x}{r}$ und substituiren wir diese Werthe in die letzte Gleichung, so ergiebt sich hieraus nach der Division mit x:

$$\frac{n \cos^2 i}{u} - \frac{n' \cos^2 i'}{v_1} = \frac{n \cos i - n' \cos i'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

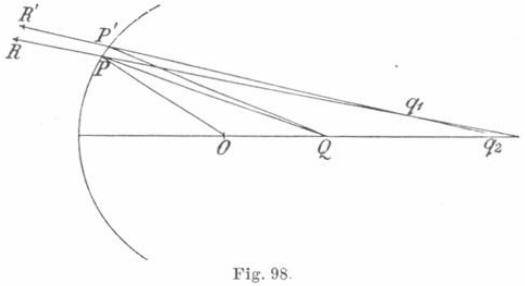


Fig. 98.

Diese Gleichung bestimmt den Werth von v_1. Ferner ist

$$\Delta \, q_2 \, P \, O - \Delta \, Q \, P \, O = \Delta \, q_2 \, P \, Q;$$

drücken wir die Grössen dieser Flächen durch u, v_2 und r aus, so wird

$$v_2 \, r \sin i' - u \, r \sin i = u \, v_2 \sin (i' - i).$$

Nach dem Brechungsgesetz ist aber $n \sin i = n' \sin i'$ und führt man diese Relation in die letzte Gleichung ein, indem man dieselbe mit $n \, n'$ multiplicirt, so erhält sie die Form:

$$n \, v_2 \, r - n' \, u \, r = u \, v_2 \left\{ n \cos i - n' \cos i' \right\},$$

oder

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{v_2} = \frac{n \cos i - n' \cos i'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

und es ist damit auch der Werth von v_2 bestimmt.

§ 151. Den Fall der Reflexion an einer sphärischen Fläche könnten wir in genau derselben Weise behandeln, wie das eben für

die Brechung geschah, oder aber wir leiten die Formeln für die Reflexion aus jenen für die Brechung ab, indem wir $n' = -n$ und $i' = i$ setzen. Wir erhalten sodann aus (26) und (27)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} &= \frac{2}{r\cos i} \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v_2} &= \frac{2\cos i}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Allgemeine Theorie der Brechung dünner Strahlenbüschel.

§ 152. Es wurde bereits nachgewiesen, dass alle Strahlen eines engen Strahlenbüschels, welches sich von einer Fläche unter rechtem Winkel schneiden lässt, durch zwei Linien gehen, der Art, dass die durch diese Linien und den Hauptstrahl gelegten Ebenen rechte Winkel einschliessen. Lässt man die Axe des Strahlenbüschels mit der Z-Axe, die Brennebenen mit der XZ- und YZ-Ebene zusammenfallen (Fig. 99), so dass alle Strahlen des Büschels durch eine Linie $x = 0$, $z = a$ als die eine Brennlinie und $y = 0$, $z = b$ als die andere Brennlinie gehen; schneidet ferner irgend einer der Strahlen die Ebene XY in einem Punkt (x, y), so hat dieser Strahl die Gleichung

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma} = r,$$

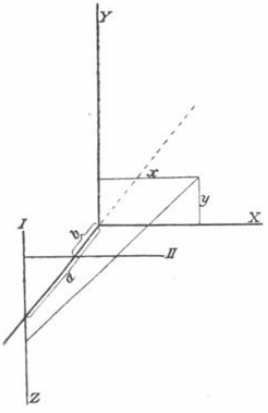


Fig. 99.

wo r den Abstand des Schnittpunktes (x, y) von dem Punkt (ξ, η, ζ) bedeutet und es ist daher, da der Strahl die erste Brennlinie schneidet, also für $\xi = 0$ und $\zeta = a$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha r + x &= 0 \\ \gamma r &= a \end{aligned}\right\}$$

und daher

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{x}{a}.$$

Analog ist für den Schnitt mit der zweiten Brennlinie, d. h. für $\eta = 0$ und $\xi = b$

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{y}{b},$$

und daher

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = \gamma\left(dz - \frac{x\, dx}{a} - \frac{y\, dy}{b}\right).$$

Es ist aber bei dem unserer Entwickelung zu Grunde gelegten Grade der Genauigkeit $\gamma = 1$, und wir erhalten, wenn V, wie in § 88, die charakteristische Funktion darstellt, nach 8, VI die Gleichungen

$$d\,\mathrm{V} = n\,(\alpha\,d\,x + \beta\,d\,y + \gamma\,d\,z)$$

$$= n\left(d\,z - \frac{x\,d\,x}{a} - \frac{y\,d\,y}{b}\right)$$

und daher

$$\mathrm{V} = \mathrm{K} + n\left(z - \frac{x^2}{2\,a} - \frac{y^2}{2\,b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Die charakteristische Funktion für ein beliebig gerichtetes enges Büschel lässt sich aus diesem letzteren Ausdruck durch Transformation der Axen bestimmen. Zunächst seien die X- und Y-Axe um die Z-Axe in der Richtung von X nach Y um einen Winkel θ gedreht; als Gleichung für die charakteristische Funktion erhält man dann

$$\mathrm{V} = \mathrm{K} + n\left(z - \frac{x^2}{2\,\mathrm{A}} - \frac{y^2}{2\,\mathrm{B}} - \frac{x\,y}{\mathrm{C}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{A}} &= \frac{\cos^2\theta}{a} + \frac{\sin^2\theta}{b} \\ \frac{1}{\mathrm{B}} &= \frac{\sin^2\theta}{a} + \frac{\cos^2\theta}{b} \\ \frac{1}{\mathrm{C}} &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30\,\mathrm{a})$$

Umgekehrt lassen sich, wenn die charakteristische Funktion in der Form der Gleichung (30) gegeben ist, die Werthe von θ, a und b aus diesen Gleichungen bestimmen; mit anderen Worten, die Richtungen der Fokalebenen und der beiden Fokalabstände lassen sich durch A, B und C ausdrücken.

Hierauf denke man sich die Axen um die Y-Axe um einen Winkel i in der Richtung von X nach Z gedreht; es lässt sich dann die Gleichung ableiten:

$$\mathrm{V} = \mathrm{K} + n\left[z\cos i - x\sin i - \frac{(x\cos i + z\sin i)^2}{2\,\mathrm{A}} - \right.$$

$$\left. - \frac{y^2}{2\,\mathrm{B}} - \frac{y\,(x\cos i + z\sin i)}{\mathrm{C}}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und es stellt diese Gleichung einen allgemeinen Ausdruck für die charakteristische Funktion eines engen Strahlenbüschels dar.

§ 153. *Bestimmung der Relationen zwischen den Konstanten* A, B, C, θ, i, A', B', C', θ', Φ' *für den einfallenden und gebrochenen Strahl.*

Man nehme das Einfallsloth als Z-Axe und die Einfallsebene als XZ-Ebene, so dass, wenn i der Einfallswinkel des Hauptstrahls ist, die charakteristische Funktion für das einfallende Strahlenbüschel die Form der Gleichung (31) haben wird. Die Form der charakteristischen Funktion für den gebrochenen Strahl ist dieselbe wie diejenige für den Austrittsstrahl, nur treten die Grössen A', B', C', θ', i' an Stelle von A, B, C, θ, i. Ist die Gleichung eines den Einfallspunkt umgebenden Flächenelementes

$$z = \frac{x^2}{2\,\mathrm{P}} + \frac{y^2}{2\,\mathrm{Q}} + \frac{x\,y}{\mathrm{R}} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und berücksichtigt man, dass die charakteristische Funktion innerhalb dieser Fläche kontinuirlich ist, somit $\mathrm{V} = \mathrm{V}'$, so erhält man, wenn man in die Gleichung

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}' = 0$$

den Werth von z aus der Gleichung für die Fläche einführt und die höheren Potenzen von x und y vernachlässigt,

$$\mathrm{K} - \mathrm{K}' + \left(\frac{x^2}{2\,\mathrm{P}} + \frac{y^2}{2\,\mathrm{Q}} + \frac{x\,y}{\mathrm{R}}\right)(n\cos i - n'\cos i') - x\,(n\sin i - n'\sin i') -$$

$$- n\left(\frac{x^2\cos^2 i}{2\,\mathrm{A}} + \frac{y^2}{2\,\mathrm{B}} + \frac{x\,y\cos i}{\mathrm{C}}\right) +$$

$$+ n'\left(\frac{x^2\cos^2 i'}{2\,\mathrm{A}'} + \frac{y^2}{2\,\mathrm{B}'} + \frac{x\,y\cos i'}{\mathrm{C}'}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Diese Gleichung behält für alle Werthe von x und y ihre Gültigkeit. Setzt man die einzelnen Koefficienten der Reihe nach gleich 0, so findet man

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}',$$

$$n\sin i = n'\sin i', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\cos^2 i}{\mathrm{A}} - \frac{n'\cos^2 i'}{\mathrm{A}'} &= \frac{n\cos i - n'\cos i'}{\mathrm{P}} \\ \frac{n}{\mathrm{B}} - \frac{n'}{\mathrm{B}'} &= \frac{n\cos i - n'\cos i'}{\mathrm{Q}} \\ \frac{n\cos i}{\mathrm{C}} - \frac{n'\cos i'}{\mathrm{C}'} &= \frac{n\cos i - n'\cos i'}{\mathrm{R}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

In der Gleichung (33) erkennen wir das bekannte Brechungsgesetz wieder und es ist hiermit i' bestimmt; aus den Gleichungen

(34) lassen sich dann die Werthe der Konstanten A', B', C' bestimmen und aus diesen wieder können alle übrigen dem Strahlenbüschel zukommenden Grössen berechnet werden.

§ **154.** In der letzten Untersuchung wurden Einfalls- und Brechungsebene des Hauptstrahls in die XZ-Ebene verlegt. Stellt diese Ebene gleichzeitig eine Hauptkrümmungsebene der brechenden Ebene dar, so ist $\frac{1}{R}=0$. In diesem Falle müssen, wenn die Brennlinien des einfallenden Strahls beziehungsweise in der Einfallsebene liegen oder zu dieser senkrecht gerichtet sind, auch die Brennlinien des Austrittsstrahls beziehungsweise in dieser Ebene liegen oder senkrecht zu ihr gerichtet sein. Denn, wenn $\frac{1}{C}=0$ und $\frac{1}{R}=0$, so muss nach (34) auch $\frac{1}{C'}=0$ sein. Ist die brechende Fläche eine Ebene oder eine Kugelfläche, so ist die Einfallsebene stets eine Hauptkrümmungsebene, und wenn die brechende Fläche durch eine Rotationsfläche gebildet wird, so stellt die Einfallsebene in dem Falle eine Hauptkrümmungsebene dar, wenn der Hauptstrahl die Axe schneidet. In diesen Fällen müssen daher, wenn die Brennlinien des Einfallsbüschels beziehungsweise in der Einfallsebene liegen oder senkrecht zu dieser gerichtet sind, auch die Brennlinien des Austrittsbüschels in dieser selben Ebene liegen oder zu derselben senkrecht gerichtet sein. Hierbei ist es gleichgiltig, ob das Einfallsbüschel von einem Punkt divergirt oder nach einem Punkte convergirt.

§ **155.** Ist die brechende Fläche eine Kugelfläche, so ist $\frac{1}{R}=0$ und $P=Q=r$, wo r der Radius der Kugel ist. Die Verbindungsgleichungen (34) zwischen den Konstanten des einfallenden und gebrochenen Strahlenbüschels erhalten in diesem Fall die Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\cos^2 i}{A}-\frac{n'\cos^2 i'}{A'}&=\frac{n\cos i-n'\cos i'}{r}\\ \frac{n}{B}-\frac{n'}{B'}&=\frac{n\cos i-n'\cos i'}{r}\\ \frac{n\cos i}{C}-\frac{n'\cos i'}{C'}&=0 \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(35)$$

Liegen die Brennlinien des eintretenden Strahlenbüschels in resp. senkrecht zu der Meridianebene, so ist $\frac{1}{C}=0$, und somit auch $\frac{1}{C'}=0$, so dass die Brennlinien des Austrittsbüschels ebenfalls in

oder senkrecht zu der Meridianebene liegen. Dasselbe gilt von einem Strahlenbüschel, dessen Strahlen von einem Punkt divergiren; denn in diesem Falle ist $a = b$, so dass nach (30a) $\frac{1}{C} = 0$ und $A = B$. Wenn wir, wie oben, den Abstand des leuchtenden Punktes von der brechenden Fläche mit u, die Abstände der Brennlinien mit v, v' bezeichnen, so erhalten die Gleichungen (34) die Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\cos^2 i}{u} - \frac{n'\cos^2 i'}{v} &= \frac{n\cos i - n'\cos i'}{r} \\ \frac{n}{u} - \frac{n'}{v'} &= \frac{n\cos i - n'\cos i'}{r} \end{aligned}\right\},$$

woraus sich die Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (26) und (27) ergiebt.

§ 156. *Bestimmung der Brennlinien eines engen Strahlenbüschels nach der Brechung durch ein Prisma.*

Wir setzen zunächst voraus, die Axe des Strahlenbüschels liege in einer zu beiden Prismenflächen senkrechten Ebene und nehmen an, das Strahlenbüschel trete in so geringem Abstande von der brechenden Kante durch das Prisma, dass der in das Prisma fallende Theil des Strahlenweges als verschwindend klein vernachlässigt werden kann. i und i' seien der Einfalls- und Brechungswinkel des Hauptstrahles in Bezug auf die erste Prismenfläche, i_1' und i_1 dieselben Winkel in Bezug auf die zweite Prismenfläche. Die Einfallsebene ist, der gemachten Voraussetzung entsprechend, für beide Brechungen dieselbe. Die charakteristische Funktion für das einfallende Strahlenbüschel, dessen Hauptstrahl in der Richtung der Z-Axe liegen soll, habe die Form

$$V = K + \left(z - \frac{x^2}{2A} - \frac{y^2}{2B} - \frac{xy}{c}\right),$$

und es sei V_1 die entsprechende Funktion für das Strahlenbüschel nach der ersten Brechung, so dass

$$V_1 = K + n\left(z - \frac{x^2}{2A_1} - \frac{y^2}{2B_1} - \frac{xy}{C_1}\right),$$

und nach der zweiten Brechung habe die Funktion die Form

$$V' = K + \left(z - \frac{x^2}{2A'} - \frac{y^2}{2B'} - \frac{xy}{C'}\right),$$

wobei die positive Richtung der Z-Axe in jedem Falle derjenigen des transmittirten Lichtes entgegengesetzt ist. Es bestehen dann

nach der ersten Brechung zwischen A, B, C und A_1, B_1, C_1 nach (35) die Verbindungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2 i}{A} &= \frac{n\cos^2 i'}{A_1} \\ \frac{1}{B} &= \frac{n}{B_1} \\ \frac{\cos i}{C} &= \frac{n\cos i'}{C_1} \end{aligned}\right\},$$

und zwischen A_1, B_1, C_1 und A', B', C' nach der zweiten Brechung

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\cos^2 i_1'}{A_1} &= \frac{\cos^2 i_1}{A'} \\ \frac{n}{B_1} &= \frac{1}{B'} \\ \frac{n\cos i_1'}{C_1} &= \frac{\cos i_1}{C'} \end{aligned}\right\}.$$

Eliminirt man A_1, B_1, C_1 aus diesen Gruppen von Gleichungen, so erhält man die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A}\,\frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} &= \frac{1}{A'}\,\frac{\cos^2 i_1}{\cos^2 i_1'} \\ \frac{1}{B} &= \frac{1}{B'} \\ \frac{1}{C}\,\frac{\cos i}{\cos i'} &= \frac{1}{C'}\,\frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Durch diese Gleichungen ist das Strahlenbüschel seiner Lage und Form nach vollständig bestimmt.

Wenn $\frac{1}{C} = 0$ ist, so ist auch $\frac{1}{C'} = 0$, d. h. wenn die Brennlinien des Einfallsbüschels parallel resp. senkrecht zur Prismenkante gerichtet sind, so müssen auch die Brennlinien für das austretende Büschel parallel resp. senkrecht zur Prismenkante gerichtet sein. Divergirt das Einfallsbüschel von einem Punkte aus, so dass $\frac{1}{C} = 0$ und $A = B$, so wird im Allgemeinen das austretende Bündel nicht von einem Punkte divergiren, sondern vielmehr von einem Paar von Brennlinien, welche beziehungsweise parallel und senkrecht zur Prismenkante gerichtet sind. Wenn aber der Hauptstrahl derartig durch das Prisma tritt, dass er hierbei das Minimum seiner Ab-

lenkung erfährt, so wird bekanntlich $i = i_1$ und $i' = i_1'$, somit auch nach (36) $A = A'$ und daher auch $A' = B'$. In diesem Falle wird das Austrittsbüschel von einem Punkte divergiren. Die Abstände der beiden Brennpunkte von der Prismenkante sind beziehungsweise A und A', beide in der Richtung des Strahlenganges gemessen; es liegen somit die Brennpunkte in gleichem Abstande von dem brechenden Winkel des Prismas.

§ 157. Untersuchen wir jetzt die Brechung eines engen Strahlenbüschels durch eine dünne Linse, deren brechende Flächen beide cylindrisch sind und eine derartige Lage zu einander einnehmen, dass die Erzeugenden der beiden Cylinder unter einem Winkel 2α zu einander geneigt sind.

Die Radien der beiden Cylinderflächen seien a und b und in dem vorliegenden Falle seien diese Radien und alle Abstände nach der der Richtung des einfallenden Strahlenbüschels entgegengesetzten Richtung gemessen. Die Linsenaxe werde durch die Z-Axe dargestellt, und man denke sich die Linse so gelegt, dass der spitze Winkel zwischen den Erzeugenden der beiden Cylinderflächen von der YZ-Ebene halbirt wird. Das ursprüngliche Strahlenbüschel sei charakterisirt nach Analogie der Gleichungen (30a) durch die Konstanten A, B und C, nach der ersten Brechung durch A_1, B_1, C_1, nach der zweiten Brechung durch A', B', C'. Die Werthe von P, Q, R sind dann für die erste Fläche

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\cos^2\alpha}{a} \\ Q &= \frac{\sin^2\alpha}{a} \\ R &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

und für die zweite Fläche

$$\left.\begin{aligned} P' &= \frac{\cos^2\alpha}{b} \\ Q' &= \frac{\sin^2\alpha}{b} \\ R' &= -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Ferner sind Einfalls- und Brechungswinkel sehr klein, so dass man mit genügender Genauigkeit $\cos i = 1$ und $\cos i' = 1$ setzen

kann, und die Verbindungsgleichungen zwischen den einzelnen Konstanten lauten dann nach (34):

$$\left.\begin{aligned} \frac{n}{A_1} - \frac{1}{A} &= \frac{(n-1)\cos^2\alpha}{a} \\ \frac{n}{B_1} - \frac{1}{B} &= \frac{(n-1)\sin^2\alpha}{a} \\ \frac{n}{C_1} - \frac{1}{C} &= \frac{(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A'} - \frac{n}{A_1} &= \frac{(1-n)\cos^2\alpha}{b} \\ \frac{1}{B'} - \frac{n}{B_1} &= \frac{(1-n)\sin^2\alpha}{b} \\ \frac{1}{C'} - \frac{n}{C_1} &= -\frac{(1-n)\sin\alpha\cos\alpha}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Eliminiren wir aus den beiden letzten Gruppen von Gleichungen A_1, B_1, C_1 durch Addition der entsprechenden Gleichungen, so erhalten wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A'} - \frac{1}{A} &= (n-1)\cos^2\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ \frac{1}{B'} - \frac{1}{B} &= (n-1)\sin^2\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ \frac{1}{C'} - \frac{1}{C} &= (n-1)\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Bezeichnet man mit u und v die Abstände der beiden Brennlinien von der Linse, mit θ den Winkel zwischen der YZ-Ebene und der im Abstande u liegenden Brennlinie von der Y-Axe nach der X-Axe zu gemessen, so ist nach (30a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A'} &= \frac{\cos^2\theta}{u} + \frac{\sin^2\theta}{v} \\ \frac{1}{B'} &= \frac{\sin^2\theta}{u} + \frac{\cos^2\theta}{v} \\ \frac{1}{C'} &= \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

und divergirt das Strahlenbüschel von einem im Abstande x von der Linse liegenden Punkte, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{A}} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\mathrm{B}} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\mathrm{C}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Subtrahirt man daher die ersten und zweiten Gleichungen der Gruppen (41) und (42) und berücksichtigt, dass nach (43) $\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{B}}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \cos 2\theta &= (n-1) \cos 2\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ \text{und} \\ \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \sin 2\theta &= (n-1) \sin 2\alpha \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (44)$$

aus der dritten Gleichung dieser Gruppen.

Eine Linie dieser Art vereinigt ein von einem Punkt ausgehendes Strahlenbüschel nicht in einem Punkt; man bezeichnet sie als astigmatisch und der Werth von $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ kann daher als Astigmatismus angesehen werden.

Um den Werth dieser Grösse zu bestimmen, haben wir nur die beiden Gleichungen (44) zu quadriren und die so entstehenden Quadrate zu addiren; es wird dann

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = (n-1) \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{a\,b} \cos 4\alpha} \quad \ldots \quad (45)$$

Ist die zweite Fläche eben, so ist $\frac{1}{b} = 0$ und in diesem Falle wird

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{n-1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Eine Linse der letzteren Art ist von Prof. Stokes als eine astigmatische Linse bezeichnet worden und die durch den Mittelpunkt der Linse in der Richtung der Erzeugenden der cylindrischen Fläche gelegte Linie als die astigmatische Axe der Linse.

§ 158. *Bestimmung der Brennlinien eines engen, in schiefer Richtung durch den Mittelpunkt einer dünnen Linse einfallenden und von dieser gebrochenen Strahlenbüschels.*

Der Mittelstrahl des Strahlenbüschels geht durch den Mittel-

punkt der Linse und wird daher parallel zu seiner ursprünglichen Richtung zum Austritt gelangen. Verlegt man die Richtung des Einfallsstrahls in die Z-Axe und repräsentirt die X Z-Ebene die Einfallsebene, so lassen sich die charakteristischen Funktionen für den einfallenden, einmal und zweimal gebrochenen Strahl der Reihe nach durch folgende Gleichungen darstellen:

$$V = K + \left\{ z - \frac{x^2}{2A} - \frac{y^2}{2B} - \frac{z^2}{C} \right\},$$

$$V_1 = K + n \left\{ z - \frac{x^2}{A_1} - \frac{y^2}{2B_1} - \frac{z^2}{C_1} \right\},$$

$$V' = K + \left\{ z - \frac{x^2}{2A'} - \frac{y^2}{2B'} - \frac{z^2}{C'} \right\},$$

wenn n der Brechungsexponent der Linse ist und die Abstände auf der Z-Axe in dem der Richtung des transmittirten Lichtes entgegengesetzten Sinne gemessen werden. Ist ferner i der Einfalls- und Austrittswinkel des Hauptstrahls, i' der Brechungswinkel innerhalb der Linse, und berücksichtigt man, dass die Einfallsebene für beide Brechungen dieselbe ist, so gilt für die erste Brechung nach (35)

$$\frac{\cos^2 i}{A} - \frac{n \cos^2 i'}{A_1} = \frac{\cos i - n \cos i'}{r},$$

$$\frac{1}{B} - \frac{n}{B_1} = \frac{\cos i - n \cos i'}{r},$$

$$\frac{\cos i}{C} - \frac{n \cos i'}{C_1} = 0,$$

und für die zweite Brechung

$$\frac{n \cos^2 i'}{A_1} - \frac{\cos^2 i}{A'} = \frac{n \cos i' - \cos i}{r'},$$

$$\frac{n}{B_1} - \frac{1}{B'} = \frac{n \cos i' - \cos i}{r'},$$

$$\frac{n \cos i'}{C_1} - \frac{\cos i}{C'} = 0,$$

unter r und r' die Krümmungsradien der sphärischen Flächen verstanden.

Eliminirt man in den letzten Gleichungen A_1, B_1 und C_1, so erhält man die folgenden Relationen zwischen den Konstanten des einfallenden und austretenden Strahls:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 i\left\{\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}\right\} &= (n\cos i'-\cos i)\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right\} \\ \frac{1}{B'}-\frac{1}{B} &= (n\cos i'-\cos i)\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right\} \\ \frac{1}{C'} &= \frac{1}{C} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (47)$$

§ **159.** Geht das einfallende Strahlenbüschel von einem im Abstande u von der Linse befindlichen Punkt aus, so ist $\frac{1}{C}=0$ und $A=B=u$. Es ist dann auch $\frac{1}{C'}=0$, so dass die Brennlinien des austretenden Büschels beziehungsweise in und rechtwinklig zu der Einfallsebene liegen. Sind v und v' die Abstände der Brennlinien von der Linsenfläche, so ist nach (47)

$$\cos^2 i\left\{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right\}=\frac{1}{v'}-\frac{1}{u}=(n\cos i'-\cos i)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right). \quad (48)$$

Für den Fall, dass i und i' sehr kleine Werthe annehmen, können wir $\cos i=1-\frac{1}{2}i^2$, $\cos i'=1-\frac{1}{2}i'^2$ und nach dem Brechungsgesetz $i=n\,i'$ setzen und es wird dann

$$\cos i'=1-\frac{i^2}{2\,n^2}.$$

Setzen wir für $\cos i$ und $\cos i'$ ihre Werthe nach i ein, so erhalten wir

$$n\cos i'-\cos i=(n-1)\left\{1+\frac{i^2}{2\,n}\right\}.$$

Bezeichnen wir daher die Brennweite der Linse mit f, so dass nach (14, IV)

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right),$$

so folgt aus (48)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v}-\frac{1}{u} &= \frac{1}{f}\left\{1+i^2\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)\right\} \\ \frac{1}{v'}-\frac{1}{u} &= \frac{1}{f}\left\{1+\frac{i^2}{2\,n}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49)$$

§ **160.** Einer von den Mängeln, welcher dem Bild eines durch eine Linse betrachteten Objektes anhaftet, besteht darin, dass das

Bild eines ebenen Objektes gekrümmt erscheint. Wir wollen im Folgenden die Krümmung eines Bildes in der Nähe der Axe bestimmen; mit anderen Worten, wir wollen die Krümmungen der durch eine beliebige durch die Axe gelegte Ebene entstehenden Schnittflächen des Objektes und seines Bildes vergleichen. Diese Krümmung des Bildes hängt zum Theil von der Schiefe der von den ausseraxialen Punkten des Objektes ausgehenden Strahlenbüschel ab.

u sei der Abstand des betrachteten Objektpunktes von dem Mittelpunkt der Linse und i die Neigung des Hauptstrahls des Büschels. Es werden im Allgemeinen zwei im Abstande v und v' vom Mittelpunkte der Linse liegende Brennlinien vorhanden sein, und es ist dann nach (49)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v} - \frac{1}{u} &= \frac{1}{f}\left\{1 + i^2\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right\} \\ \frac{1}{v'} - \frac{1}{u} &= \frac{1}{f}\left\{1 + \frac{i^2}{2n}\right\} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (50)$$

oder

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}(1 + k\,i^2)$$

wenn man die Lage beider Brennpunkte durch eine gemeinsame Gleichung kennzeichnen will. P und p seien in Fig. 100 einander

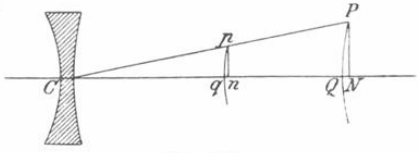


Fig. 100.

entsprechende Punkte der Abschnitte PQ und pq des Objektes und seines Bildes, Q und q die Punkte, in welchen diese Abschnitte von der Axe geschnitten werden. Man ziehe die Ordinaten PN und pn senkrecht zur Axe. Für die Punkte q und Q ist die Strahlenschiefe $i = 0$ und daher nach (50)

$$\frac{1}{Cq} - \frac{1}{CQ} = \frac{1}{f},$$

und für die übrigen korrespondirenden Punkte besteht die Beziehung:

$$\frac{1}{Cp} - \frac{1}{CP} = \frac{1}{f}(1 + k\,i^2).$$

Multiplicirt man die erstere Gleichung mit $\cos i$ und subtrahirt die letztere, so erhält man:

$$\frac{q\,n}{C\,p\,.\,C\,q} - \frac{Q\,N}{C\,P\,.\,C\,Q} = \frac{1}{f}\left\{1 - \frac{i^2}{2} - 1 - k\,i^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{f}\left\{\frac{1}{2} + k\right\} i^2.$$

$C\,p\,.\,C\,q$ hat aber den Grenzwerth $C\,p^2$ und es wird, wenn dieser erreicht ist,

$$C\,p\,.\,C\,q\,i^2 = \left\{C\,p\,.\,i\right\}^2 = \overline{p\,n}^2$$

und analog

$$C\,P\,.\,C\,Q\,i^2 = \left\{C\,P\,.\,i\right\}^2 = \overline{P\,N}^2,$$

und wir erhalten aus der letzten Gleichung:

$$\frac{q\,n}{\overline{p\,n}^2} - \frac{Q\,N}{\overline{P\,N}^2} = -\frac{2\,k+1}{2\,f}.$$

Bezeichnen wir mit ϱ und ϱ' die Krümmungsradien des Objektes und seines Bildes, so ist nach Newton's Theorie der Krümmungen im Grenzfalle $\frac{1}{2\,\varrho'} = \frac{q\,n}{\overline{p\,n}^2}$, $\frac{1}{2\,\varrho} = \frac{Q\,N}{\overline{P\,N}^2}$, und wir haben somit als Verbindungsgleichung zwischen den Krümmungen des Objektes und seines Bildes

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = -\frac{(2\,k+1)}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Die Krümmung des Bildes ist unabhängig von der Lage des Objektes; denn wie wir aus der letzten Gleichung ersehen, ist das Verhältnis zwischen den Krümmungen des Objektes und seines Bildes unabhängig von den Abständen u und v.

Ist das Objekt eben, so dass die Krümmung des Objektabschnittes verschwindet, so ist $\varrho = 0$ und somit

$$\frac{1}{\varrho'} = -\frac{(2\,k+1)}{f}.$$

Der Krümmungsradius hat also das entgegengesetzte Vorzeichen wie f.

Der Werth von k hängt, wie die Gleichungen (50) zeigen, von der Lage des Brennpunktes, in welchen das Bild fallen soll, ab; für einen ersten Brennpunkt ist $k = 1 + \frac{1}{2\,n}$, für einen zweiten Brenn-

punkt ist $k = \frac{1}{2u}$ und für den Kreis kleinster Verzerrung stellt der Werth von k das Mittel zwischen beiden dar.

Für den geometrischen Brennpunkt ist $k = 0$ und daher

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{f}.$$

§ 161. Mittelst der charakteristischen Funktion lässt sich die Theorie eines jeden um eine Axe symmetrisch angeordneten optischen Instrumentes entwickeln.

Zu diesem Zwecke nehme man auf der Axe zwei feste Punkte O und O', im ersten und letzten Medium als Koordinatenursprünge an, während die Axe des Instrumentes zur Z-Axe wird, und zwar lasse man die positive Richtung der von O ausgehenden Z-Axe derjenigen des einfallenden Lichtes entgegengesetzt sein, dagegen die positive Richtung der von O' ausgehenden Axe mit derjenigen des austretenden Lichtes übereinstimmen. Betrachtet man nun die charakteristische Funktion für den zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (x', y', z') liegenden Theil irgend eines Strahls im ersten und letzten Medium, und schneidet der durch diese Punkte gehende Strahl die durch O resp. O' gelegten XY-Ebenen in den Punkten (ξ, η) resp. (ξ', η'), so lässt sich, wenn V_0 den Werth der charakteristischen Funktion zwischen O und O' darstellt, der Werth der charakteristischen Funktion innerhalb der Punkte (ξ, η) und (ξ', η') nach dem Taylor'schen Theorem folgendermaassen entwickeln:

$$\begin{aligned} V = V_0 &+ \xi \frac{dV}{d\xi} + \eta \frac{dV}{d\eta} + \xi' \frac{dV}{d\xi'} + \eta' \frac{dV}{d\eta'} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{d^2V}{d\xi^2} \\ &+ \xi\eta \frac{d^2V}{d\xi\, d\eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{d^2V}{d\eta^2} + \xi\xi' \frac{d^2V}{d\xi\, d\xi'} + \xi\eta' \frac{d^2V}{d\xi\, d\eta'} \\ &+ \xi'\eta \frac{d^2V}{d\xi'\, d\eta} + \eta\eta' \frac{d^2V}{d\eta\, d\eta'} + \frac{1}{2} \xi'^2 \frac{d^2V}{d\xi'^2} + \xi'\eta' \frac{d^2V}{d\xi'\, d\eta'} + \frac{1}{2} \eta'^2 \frac{d^2V}{d'\eta'^2} \cdots\cdots \\ &+ \text{Glieder mit höheren Potenzen von } \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta'. \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass bei der Entwicklung dieser Reihe in sämmtlichen Koefficienten ξ und η nach der Differentiation gleich 0 gemacht worden sind, so dass die Koefficienten Konstanten darstellen, so kann man den Werth von V auch in dieser Form schreiben:

$$\begin{aligned} V = V_0 &+ f\xi + g\eta + f'\xi' + g'\eta' + \frac{1}{2} a\xi^2 + c\xi\eta + \frac{1}{2} b\eta^2 + p\xi\xi' + q\xi\eta' + \\ &+ r\xi'\eta + s\eta\eta' + \frac{1}{2} a'\xi'^2 + c'\xi'\eta' + \frac{1}{2} b'\eta'^2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit U die charakteristische Funktion für den Strahl innerhalb der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'), so ergiebt sich aus der Definition dieser Funktion

$$U = V + n\left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right\}^{1/2} + n'\left\{(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2+z'^2\right\}^{1/2}$$

oder

$$\begin{aligned} U = V_0 &+ n\left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right\}^{1/2} \\ &+ n'\left\{(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2+z'^2\right\}^{1/2} \\ &+ f\xi + g\eta + f'\xi' + g'\eta' \\ &+ \frac{1}{2}a\xi^2 + c\xi\eta + \frac{1}{2}b\eta^2 \\ &+ p\xi\xi' + q\xi\eta' + r\xi'\eta + s\eta\eta' \\ &+ \frac{1}{2}a'\xi'^2 + c'\xi'\eta' + \frac{1}{2}b'\eta'^2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Da aber die Funktion in Bezug auf die Z-Axe symmetrisch ist, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$f=0,\quad g=0,\quad f'=0,\quad g'=0;\quad c=0,\quad c'=0;\quad q=0,\quad r=0;$$
$$a=b,\quad a'=b',\quad p=s.$$

Die charakteristische Funktion erhält daher, wenn man diese Bedingungen einführt und die Wurzeln in der Gleichung für U nach dem binomischen Satz entwickelt, die folgende vereinfachte Form:

$$\left.\begin{aligned} U = V_0 &+ nz + n'z' + \frac{n}{2z}\left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right\} \\ &+ \frac{n'}{2z'}\left\{(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2\right\} + \frac{1}{2}a(\xi^2+\eta^2) \\ &+ \frac{1}{2}a'(\xi'^2+\eta'^2) + p(\xi\xi'+\eta\eta') + \cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \quad . \quad (52)$$

Die charakteristische Funktion bleibt für kleine Veränderungen von ξ, η, ξ', η' unverändert; vernachlässigt man daher die höheren Potenzen kleiner Grössen, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left(a+\frac{n}{z}\right)\xi + p\,\xi' &= n\,\frac{x}{z}\\
\left(a+\frac{n}{z}\right)\eta + p\,\eta' &= n\,\frac{y}{z}\\
p\,\xi + \left(a'+\frac{n'}{z'}\right)\xi' &= n'\,\frac{x'}{z'}\\
p\,\eta + \left(a'+\frac{n'}{z'}\right)\eta' &= n'\,\frac{y'}{z'}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Löst man die erste und dritte dieser Gleichungen nach ξ und ξ' auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\xi &= \frac{n\,x}{z}\left(a'+\frac{n'}{z'}\right) - \frac{n'\,x'}{z'}\,p\\
\mathrm{D}\,\xi' &= \frac{n'x'}{z'}\left(a+\frac{n}{z}\right) - \frac{n\,x}{z}\,p
\end{aligned}\right\},$$

worin

$$\mathrm{D} = \left(a+\frac{n}{z}\right)\left(a'+\frac{n'}{z'}\right) - p^2, \quad \ldots\ldots \quad (54a)$$

und analoge Formeln erhält man für η und η', wenn man die zweite und dritte Gleichung nach y und y' auflöst.

Es ist somit

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{D}\,(x-\xi) &= \left\{a\left(a'+\frac{n'}{z'}\right) - p^2\right\}x + \frac{n'\,x'\,p}{z'}\\
\mathrm{D}\,(x'-\xi') &= \left\{a'\left(a+\frac{n}{z}\right) - p^2\right\}x' + \frac{n\,x\,p}{z}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

Die charakteristische Funktion U lässt sich aber nach entsprechender Umformung der Gleichung (52) auch folgendermaassen schreiben:

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}_0 + n\,z + n'\,z' + \frac{n}{2\,z}\,(x^2 - 2\,x\,\xi) + \frac{n'}{2\,z'}\,(x'^2 - 2\,x'\,\xi')$$

$$+\frac{1}{2}\,\xi\left\{\left(a+\frac{n}{z}\right)\xi + p\,\xi'\right\} + \frac{1}{2}\,\xi'\left\{p\,\xi + \left(a'+\frac{n'}{z'}\right)\xi'\right\} \cdots\cdots$$

$+$ ähnliche Glieder nach y und η; oder nach (53)

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}_0 + n\,z + n'\,z' + \frac{n\,x}{2\,z}\,(x-\xi) + \frac{n'\,x'}{2\,z'}\,(x'-\xi')$$

$+$ ähnliche Glieder nach y und η.

Setzen wir hierin für $x - \xi$ und $x' - \xi'$ deren aus (54) sich ergebende Werthe nach x und x', so wird

$$U = V_0 + n z + n' z' + \frac{1}{2D}\left[\frac{n}{z}\left\{a\left(a' + \frac{n'}{z'}\right) - p^2\right\}x^2 + 2\frac{n n'}{z z'} p x x' + \right.$$
$$\left. + \frac{n'}{z'}\left\{a'\left(a + \frac{n}{z}\right) - p^2\right\}x'^2\right]$$
$$+ \text{ähnliches Glied nach } y + \eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Führen wir in diese Gleichung die folgenden Substitutionen ein:

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{n a'}{p^2 - a a'}, & g' &= \frac{n' a}{p^2 - a a'} \\ f &= -\frac{n p}{p^2 - a a'}, & f' &= -\frac{n' p}{p^2 - a a'} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56a)$$

was wir, da die Symbole f, f', g, g' in keiner anderweitigen Bedeutung mehr in der Untersuchung vorkommen, anstandslos thun können; multipliciren wir dann in dem Ausdruck für U Zähler und Nenner des Bruches mit $z z'$ und dividiren beide durch $a a' - p^2$, so ergiebt sich als Werth von U:

$$\left.\begin{aligned} U = V_0 + n z + n' z' + \frac{1}{2}\frac{n (z' - g') x^2 + n' (z - g) x'^2 + (f n' + f' n) x x'}{(z - g)(z' - g') - f f'} \\ + \frac{1}{2}\frac{n (z' - g') y^2 + n' (z - g) y'^2 + (f n' + f' n) y y'}{(z - g)(z' - g') - f f'} \end{aligned}\right\}. \quad (56)$$

§ **162.** Bezeichnet man mit (i_x, i_y, i_z) die Richtungskosinusse des durch (x, y, z) gehenden Einfallsstrahls, so ergiebt sich aus der Natur der charakteristischen Funktion die Proportion:

$$i_x : i_y : i_z = \frac{d V}{d x} : \frac{d V}{d y} : \frac{d V}{d z}.$$

Setzen wir der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned} z - g &= u \\ z' - g' &= u' \end{aligned}\right\},$$

so folgt, da nach (56a) $f n' = f' n$, aus der Differentiation der Gleichung (56) nach x, y, z

$$\frac{d V}{d x} = \frac{n (u' x + f' x')}{u u' - f f'}, \quad \frac{d V}{d y} = \frac{n (u' y + f' y')}{u u' - f f'}, \quad \frac{d V}{d z} = n.$$

Aus der Proportion zwischen i_x, i_y, i_z ergeben sich somit die Gleichungen

$$\frac{i_x}{u'x+f'x'}=\frac{i_y}{u'y+f'y'}=\frac{i_z}{uu'-ff'} \quad \ldots \quad (57)$$

Auf ganz analoge Weise erhält man für den austretenden Strahl, wenn dessen Richtungskosinusse mit r_x, r_y, r_z bezeichnet werden,

$$\frac{r_x}{ux'-fx}=\frac{r_y}{uy'-fy}=\frac{r_z}{uu'-ff'} \quad \ldots \quad (58)$$

Denkt man sich nun den einen der beiden Punkte, etwa (x, y, z) als festliegend, während die Richtung des durch ihn gehenden Strahls sich ändert, so ist durch die Gleichungen (57) der Punkt bestimmt, in welchem ein beliebiger Strahl die Ebene $z=z'$ schneidet.

Wählt man aber x', y', z' so, dass die Nenner der Quotienten verschwinden, d. h. so, dass

$$\left.\begin{aligned} u'x&=-f'x'\\ u'y&=-f'y'\\ uu'&=ff' \end{aligned}\right\},$$

wird, so wird jeder Werth des Verhältnisses $i_x : i_y : i_z$ den Gleichungen (57) genügen; mit anderen Worten, es wird, was auch die Richtung des durch (x, y, z) gehenden Einfallsstrahls sein mag, derselbe durch den durch die Gleichungen bestimmten Punkt (x', y', z') hindurchgehen. Aus den Gleichungen für das Verhältnis $r_x : r_y : r_z$ erkennt man unschwer, dass diese Relation eine umkehrbare ist. Es sind somit (x, y, z) und (x', y', z') konjugirte Punkte. Ihre Koordinaten sind also durch folgende Gleichungen verbunden:

$$\left.\begin{aligned} uu'&=ff'\\ \frac{x}{x'}&=\frac{y}{y'}=-\frac{u}{f}\\ \frac{x'}{x}&=\frac{y'}{y}=-\frac{u'}{f'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (59)$$

Diese Gleichungen bestimmen die Lage und charakteristischen Eigenschaften der Kardinalpunkte des Systems, welche wir bereits in dem Kapitel über die Gauss'sche Theorie centrirter Linsensysteme behandelt haben. Lassen wir also $u=\infty$ werden, so wird dadurch $u'=0$, und umgekehrt, so dass Strahlen, welche im ersten Medium parallel sind, alle im zweiten Medium durch einen Punkt in der Ebene $u'=0$ hindurchgehen; mit anderen Worten, $u'=0$ ist

die Gleichung der zweiten Brennebene. Analog ist $u = 0$ die Gleichung der ersten Brennebene.

Lassen wir ferner $u = -f$ und somit $u' = -f'$ werden, so wird nach (59)

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \end{aligned}\right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass jeder Strahl die Ebenen $u = -f$ und $u' = -f'$ in solchen Punkten schneidet, deren Verbindungslinie parallel zur Axe des Systems gerichtet ist. Diese Ebenen sind daher die Ebenen, welchen das Abbildungsverhältnis 1 entspricht, also die Hauptebenen.

Von diesen Kardinalpunkten ausgehend, können wir die Lage der Knotenpunkte bestimmen und ferner lassen sich auch hier die sämmtlichen in früheren Kapiteln behandelten Konstruktionsmethoden zur Bestimmung der Lage des einem gegebenen Punkte konjugirten Vereinigungspunktes, sowie der Richtung des einem gegebenen Einfallsstrahl zugeordneten Austrittsstrahls anwenden.

§ **163.** Jene Konstruktionsmethoden lassen sich aber in dem Falle nicht anwenden, wo $p^2 = a\,a'$ wird; denn dann werden die Werthe der Koordinaten der Kardinalpunkte und der Brennweiten unendlich gross. Die Gleichung (55) für die charakteristische Funktion reducirt sich in diesem Falle auf die Form:

$$U = V_0 + n\,z + n'\,z' + \frac{1}{2\,D} \cdot \frac{n\,n'}{z\,z'} \left[a\,x^2 + 2\,p\,x\,x' + a\,x'^2\right],$$

oder, wenn man hierin den Werth von D aus (54a) einführt,

$$U = V_0 + n\,z + n'\,z' + \frac{1}{2} \frac{a\,x^2 + 2\,p\,x\,x' + a'\,x'^2}{\frac{a\,z}{n} + \frac{a'\,z'}{n'} + 1}$$

$$+ \text{ ähnliches Glied nach } y \text{ und } y'.$$

Differentiirt man die Gleichung der charakteristischen Funktion in dieser Form nach x, y und z, so erhält man für die Richtungskosinusse des einfallenden und austretenden Strahls die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_x}{a\,x+p\,x'} &= \frac{i_y}{a\,y+p\,y'} = \frac{i_z}{n\left(\frac{a\,z}{n}+\frac{a'\,z'}{n'}+1\right)} \\ \text{und} \\ \frac{r_x}{p\,x+a'\,x'} &= \frac{r_y}{p\,y+a'\,y'} = \frac{r_z}{n'\left(\frac{a\,z}{n}+\frac{a'\,z'}{n'}+1\right)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Durch einen ganz ähnlichen Schluss, wie bei der Behandlung des allgemeinen Falles, gelangt man zu folgenden Verbindungsgleichungen zwischen einem Paar konjugirter Punkte:

$$\left.\begin{aligned} a\,x+p\,x' &= 0 \\ a\,y+p\,y' &= 0 \\ \frac{a\,z}{n}+\frac{a'\,z'}{n'}+1 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Aus den beiden ersten dieser letzten Gleichungen gewinnen wir dann die einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{x'} &= \frac{y}{y'} = -\frac{p}{a} \\ \frac{x'}{x} &= \frac{y'}{y} = -\frac{p}{a'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Es ist also in diesem Falle die *lineare Vergrösserung für alle möglichen Lagen des Objektes konstant*, und zwar ist

$$\frac{x}{x'} = -\frac{p}{a'} = -\mathrm{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Ferner ist, wie ohne Weiteres aus (60) folgt,

$$\frac{n\,i_x}{a\,x+p\,x'} = \frac{n'\,r_x}{p\,x+a'\,x'},$$

wofür wir, da $p^2 = a\,a'$ ist, setzen können

$$\frac{n\,i_x}{a} = \frac{n'\,r_x}{p}.$$

Eine ähnliche Verbindungsgleichung lässt sich zwischen i_y und r_y aufstellen und als Verbindungsgleichung zwischen den Richtungskosinussen des einfallenden und austretenden Strahls gewinnen wir dann die Relation:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_x}{i_x} = \frac{r_y}{i_y} &= \frac{n}{n'} \cdot \frac{p}{a} \\ &= \frac{n\,\mathrm{N}}{n'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Der Ausdruck $\frac{n\,\mathrm{N}}{n'}$ symbolisirt die Winkelvergrösserung; die Gleichung besagt also, dass für $p^2 = a\,a'$ oder für parallel einfallende Strahlen die Winkelvergrösserung konstant ist. Strahlen, welche im ersten Medium parallel sind, sind es auch im letzten. Als Beispiel für diesen Fall haben wir ein für ein normales Auge auf einen Stern eingestelltes Fernrohr.

§ 164. *Bestimmung der charakteristischen Funktion für ein enges Strahlenbüschel nach seinem Durchtritt durch irgend ein heterogenes Medium.*

Wir wollen annehmen, die beiden äussersten Medien, deren Brechungsexponenten n und n' sein mögen, seien homogen. O sei ein unbeweglicher Punkt auf dem Hauptstrahl im ersten Medium und O′ ein ebensolcher Punkt auf demselben Strahl im letzten Medium. Wir verlegen die Koordinatenursprünge nach O und O′ und lassen die Richtungen des Hauptstrahls in den beiden Medien in die Z-Axe fallen. Im ersten Medium soll die der Richtung des einfallenden Lichtes entgegengesetzte Richtung der Z-Axe, im letzten Medium dagegen die mit der Richtung des Lichtes übereinstimmende Richtung der Z-Axe als positiv angesehen werden. Ein beliebiger Strahl treffe die durch O gelegte X Y-Ebene im Punkt (x, y) und die durch O′ gelegte X Y-Ebene in (x', y'). Stellt U den Werth der charakteristischen Funktion für die Grenzen von (x, y) bis (x', y') und U_0 für die Grenzen von O bis O′ dar, so lässt sich U nach dem Taylor'schen Theorem folgendermaassen entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{U} = \mathrm{U}_0 &+ x\frac{d\,\mathrm{U}}{d\,x} + y\frac{d\,\mathrm{U}}{d\,y} + x'\frac{d\,\mathrm{U}}{d\,x'} + y'\frac{d\,\mathrm{U}}{d\,y'} + \frac{1}{2}x^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x^2} \\ &+ x\,y\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x\,d\,y} + \frac{1}{2}y^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,y^2} + x\,x'\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x\,d\,x'} + x\,y'\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x\,d\,y'} \\ &+ x'\,y\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x\,d\,y} + y\,y'\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,y\,d\,y'} + \frac{1}{2}x'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x'^2} + x'y'\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,x'\,d\,y'} + \frac{1}{2}y'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\,y'^2} \\ &+ \text{Glieder mit höheren Potenzen von } x,\ y,\ x',\ y'. \end{aligned}$$

Hierfür lässt sich schreiben:

$$U = U_0 + f x + g y + f' x' + g' y' + \frac{1}{2} a x^2 + c x y + \frac{1}{2} b y^2$$
$$+ p x x' + q x y' + r x' y + s y y' + \frac{1}{2} a' x^2 + c' x' y' + \frac{1}{2} b' y'^2 + \ldots,$$

worin die Konstanten von der Natur des Mediums abhängige Funktionen sind und als bekannt vorausgesetzt werden.

Ist

$$V = K + n\left(z - \frac{x^2}{2A} - \frac{y^2}{2B} - \frac{xy}{C}\right)$$

die charakteristische Funktion des einfallenden Strahls,

$$V' = K' + n'\left(z' - \frac{x'^2}{2A'} - \frac{y'^2}{2B'} - \frac{x'y'}{C'}\right)$$

diejenige für den austretenden Strahl, so erhalten wir unter gehöriger Beachtung der Richtung der Z-Axe die Gleichung

$$U = V + V';$$

d. h.

$$K + K' = U_0 + f x + g y + f' x' + g' y' + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \gamma x y$$
$$+ \frac{1}{2} \beta y^2 + p x x' + q x y' + r x' y + s y y'$$
$$+ \frac{1}{2} \alpha' x'^2 + \gamma' x' y' + \frac{1}{2} \beta' y'^2 + \ldots,$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a + \frac{n}{A} \\ \beta &= b + \frac{n}{B} \\ \gamma &= c + \frac{n}{C} \end{aligned}\right\},$$

und α', β', γ' analoge Werthe im zweiten Medium bedeuten.

Dem Begriffe der charakteristischen Funktion entsprechend, behält diese Gleichung auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn man die Punkte (x, y) und (x', y') kleine Verschiebungen erfahren lässt. Durch Differentiation ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \gamma y + p x' + q y' + f &= 0 \\ \gamma x + \beta y + r x' + s y' + g &= 0 \\ p x + r y + \alpha' x' + \gamma' y' + f' &= 0 \\ q x + s y + \gamma' x + \beta' y' + g' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Da aber x, y, x' und y' sämmtlich verschwinden, so wird auch

$$f=0, \quad g=0, \quad f'=0 \quad \text{und} \quad g'=0.$$

Lösen wir die beiden ersten dieser Gleichungen nach x und y auf und setzen $\delta = \alpha\beta - \gamma^2$, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} x\,\delta &= (r\gamma - p\beta)\,x' + (s\gamma - q\beta)\,y' \\ y\,\delta &= (p\gamma - r\alpha)\,x' + (q\gamma - s\alpha)\,y' \end{aligned}\right\}.$$

Aus der Substitution dieser Werthe in die beiden ersten Gleichungen jener Gruppe ergiebt sich:

$$x'(\alpha'\delta + p\,r\,\gamma - p^2\beta + r\,p\,\gamma - r^2\alpha) + y'(\gamma'\delta + p\,s\,\gamma - p\,q\,\beta + q\,r\,\gamma - r\,s\,\alpha) = 0;$$

$$x'(\gamma'\delta + q\,r\,\gamma - p\,q\,\beta + s\,p\,\gamma - s\,r\,\alpha) + y'(\beta'\delta + q\,s\,\gamma - q^2\beta + q\,s\,\gamma - s^2\alpha) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Strahl, d. h. für jeden Werth von x' und y' und somit ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'\delta &= p^2\beta - 2\,p\,r\,\gamma + r^2\alpha \\ \gamma'\delta &= p\,q\,\beta - (p\,s + q\,r)\,\gamma + r\,s\,\alpha \\ \beta'\delta &= q^2\beta - 2\,q\,s\,\gamma + s^2\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Durch diese Gleichungen sind die Koefficienten α', β', γ' bestimmt; sie dienen ihrerseits zur Bestimmung von A', B' und C', sowie der übrigen für das Austrittsbüschel in Betracht kommenden Grössen.

Die Koordinaten (x, y) und (x', y') sind durch eine lineare Transformation unter einander verbunden. Wird daher das enge Büschel durch die dem Ursprung O zukommende X Y-Ebene in einer Ellipse geschnitten, so wird auch der Schnitt des Büschels durch die dem Ursprung O' entsprechende X Y-Ebene eine Ellipse sein. Hieraus folgt, dass, wenn in irgend einem Punkt des Büschels der Normalschnitt elliptisch ist, dann auch sämmtliche Normalschnitte des Büschels Ellipsen darstellen.