Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel VII. Aberration centraler Strahlenbüschel

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel VII.

Aberration centraler Strahlenbüschel.

§ **115.** Wenn Lichtstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen, auf eine ebene, reflektirende Fläche treffen, so vereinigen sie sich bekanntlich sämmtlich nach der Reflexion in einem anderen Punkte, den wir schon früher als den dem Ausgangspunkte der Strahlen konjugirten Punkt bezeichneten. Trifft dagegen ein von einem Punkte ausgehendes Strahlenbüschel auf eine ebene, brechende Fläche oder auf eine sphärische reflektirende oder brechende Fläche, so sind es nur die axialen Strahlen des Strahlenbüschels, welche man nach der Reflexion oder Brechung als durch einen einzigen Punkt gehend ansehen kann; die übrigen reflektirten oder gebrochenen Strahlen sind die Tangenten an eine Brennfläche. Wir wollen annehmen, dass das einfallende Strahlenbüschel die reflektirende oder brechende Fläche innerhalb eines Kreises mit dem sehr kleinen Radius y schneide, und wir wollen diesen Kreis als die Apertur der Fläche bezeichnen.

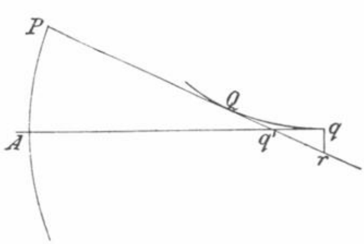

Fig. 90.

In Fig. 90 sei q der Vereinigungspunkt der axialen Strahlen, Pq' der äusserste Strahl des Büschels nach der Reflexion oder Brechung, q' dessen Schnittpunkt mit der Axe und t endlich der Schnittpunkt derselben mit einer senkrecht zur Axe durch q gelegten Ebene. Es stellt dann $q\,q'$ die sogenannte Longitudinalaberration des Strahles Pq', qt dessen Lateralaberration dar. Die Grössen dieser Aberrationen lassen sich annähernd durch die Apertur ausdrücken, vorausgesetzt, dass dieselbe klein ist.

Es genügt, wie wir sehen werden, wenn wir die Aberration für solche Strahlenbüschel bestimmen, welche von Punkten der Axe divergiren; denn divergirt ein Büschel von einem ausserhalb der Axe liegenden Punkte, so hat man sich nur zu vergegenwärtigen, dass das Bild auf einer Linie liegt, welche die Lichtquelle mit dem Mittelpunkt der reflektirenden oder brechenden Fläche verbindet; diese Linie kann dann als die Axe des Büschels angesehen werden und es lässt sich die Longitudinalaberration in Bezug auf diese neue Axe ohne Weiteres bestimmen. Die so gefundene Aberration hat man dann nur auf die ursprüngliche Axe zu projiciren, indem man deren Grösse mit dem Kosinus der Neigung der Hülfsaxe zur ursprünglichen Axe multiplicirt. Da diese Neigung nach unserer Voraussetzung nur eine sehr kleine ist, so wird man ihren Kosinus als Multiplikator der sehr kleinen Aberration gleich 1 setzen können, und danach ist die Longitudinalaberration, sofern wir uns auf unser Näherungsverfahren beschränken wollen, die nämliche für alle Punkte, welche in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen.

§ 116. *Bestimmung der Aberration eines centralen Strahlenbüschels durch Reflexion an einer sphärischen Fläche.*

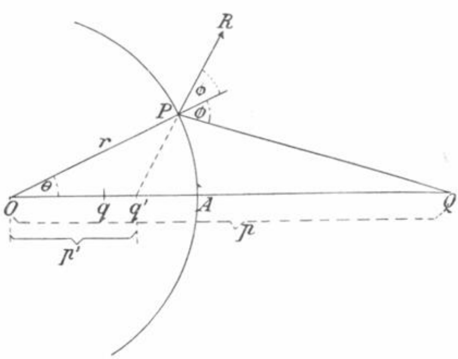

Fig. 91.

QPR sei in Fig. 91 der Weg des äussersten Strahls des Büschels und es sei q' der Punkt, in welchem die Rückwärtsverlängerung des Strahls PR die Axe trifft.

Ist ferner O der Mittelpunkt der reflektirenden Kugelfläche, QAO die Axe des Einfallsbüschels, $OQ = p$, $Oq' = p'$, $OA = r$, und bezeichnet man den Winkel POA mit θ und den Einfallswinkel des Strahles QP mit Φ, so ist

$$\frac{r}{p} = \frac{\sin(\Phi - \theta)}{\sin \Phi},$$

$$\frac{r}{p'} = \frac{\sin(\Phi + \theta)}{\sin \Phi};$$

und hieraus erhalten wir durch Addition die Beziehung:

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{p'} = \frac{\sin(\Phi - \theta) + \sin(\Phi + \theta)}{\sin \Phi} = 2\cos\theta,$$

oder

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2\cos\theta}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denken wir uns θ verschwindend klein und bezeichnen den entsprechenden Werth von p' mit p_0', so erhalten wir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0'} = \frac{2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und daher schliesslich aus (1) und (2)

$$\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}(1 - \cos\theta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In dieser Gleichung können höhere Potenzen von θ vernachlässigt werden; berücksichtigen wir ferner, dass p' annähernd gleich p_0' ist, so dass wir $p' p_0' = p'^2$ setzen können, so erhält Gleichung (3) die Form:

$$\frac{p' - p_0'}{p'^2} = \frac{\theta^2}{r};$$

und da angenähert $y = r \sin\theta = r\theta$, so erhalten wir schliesslich

$$qq' = \frac{y^2}{r^3} p'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist der Werth der Longitudinalaberration des äussersten Strahls. Wir bemerken, dass qq' dasselbe Vorzeichen hat wie r; dies bedeutet: *wenn wir vor einem Spiegel stehen und nach dessen Mittelpunkt hin blicken, so läuft die Brennlinie in allen Fällen in der Sehrichtung in einen Punkt aus.*

Fallen die Strahlen parallel zur Axe des Spiegels ein, so fällt q mit dem Brennpunkt des Spiegels zusammen, so dass Oq die Brennweite f darstellt; in diesem Falle hat die Longitudinalaberration die Grösse

$$qq' = -\frac{y^2}{8f}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ **117.** *Bestimmung der Aberration eines an einer ebenen Fläche gebrochenen centralen Strahlenbüschels.*

QPR (Fig. 92) stelle den äussersten Strahl des Büschels dar, so dass AP als der Radius der Apertur anzusehen ist. Der Strahl PR schneide in seiner Rückwärtsverlängerung die Axe in q' und ferner sei

$AQ = u$, $Aq' = u'$ und $AP = y$. Bezeichnet man mit i und i' Einfalls- resp. Brechungswinkel, so ist

$$\sin i = \frac{AP}{PQ},$$

$$\sin i' = \frac{AP}{Pq'},$$

und somit, da $\sin i = n \sin i'$,

$$Pq' = n PQ.$$

Führen wir in diese letztere Beziehung die Grössen u, u' und y ein, so erhalten wir

$$u'^2 + y^2 = n^2 (u^2 + y^2),$$

oder

$$Aq' = u' = \left\{ n^2 u^2 + (n^2 - 1) y^2 \right\}^{1/2}.$$

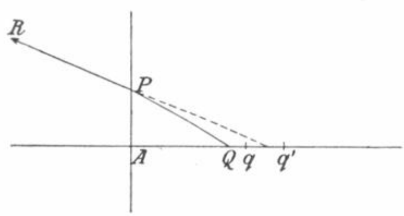

Fig. 92.

Solange die Apertur sehr klein ist, können alle höheren Potenzen von y vernachlässigt werden, und wir erhalten dann näherungsweise aus der Entwickelung der Binomialreihe:

$$u' = n u + \frac{1}{2} (n^2 - 1) \frac{y^2}{n u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nehmen wir aber $y = 0$ an, so geht Aq' in Aq über und wir erhalten als Werth von Aq:

$$Aq = n u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$q q' = {}^1/_2 (n^2 - 1) \frac{y^2}{n u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Formel stellt die Longitudinalaberration des äussersten an einer ebenen Fläche gebrochenen Strahls dar.

§ 118. *Bestimmung der Aberration eines an einer Kugelfläche gebrochenen centralen Strahlenbüschels.*

OPR (Fig. 93) sei wiederum der Weg eines beliebigen Strahls eines Büschels mit der Axe QAO und der gebrochene Strahl PR schneide die Axe in dem Punkte q. Ferner sei $\mathrm{OQ} = p$, $\mathrm{O}q = q$ und $\mathrm{AO} = r$.

Die Formel für die Aberration des äussersten Strahls lässt sich, wie wir bald erkennen werden, wesentlich vereinfachen, wenn wir die Grössen p, q, r durch ihre reciproken Werthe ersetzen; es seien diese der Reihe nach durch u, v, ρ ausgedrückt. Bezeichnen wir schliesslich den Winkel POA mit θ und den Einfalls- und Brechungswinkel wie bisher mit i und i', so ist

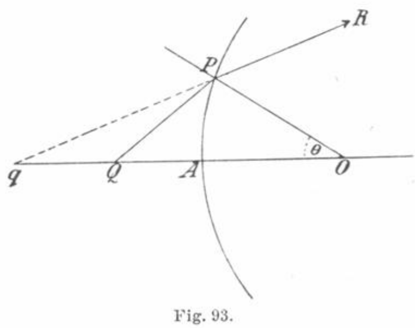

Fig. 93.

$$\frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{QP}}, \quad \frac{\sin i'}{\sin \theta} = \frac{q\mathrm{O}}{q\mathrm{P}};$$

und daher nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{QP}} = n \frac{q\mathrm{O}}{q\mathrm{P}}.$$

Führen wir in diese Relation die Grössen p, q, r ein und quadriren, so wird hieraus

$$\frac{p^2}{p^2 + r^2 - 2 p r \cos \theta} = n^2 \frac{q^2}{q^2 + r^2 - 2 r q \cos \theta},$$

oder, wenn wir die reciproken Werthe von p, q, r einführen,

$$v^2 + \varrho^2 - 2 v \varrho \cos \theta = n^2 (u^2 + \varrho^2 - 2 u \varrho \cos \theta), \quad . \; . \; . \quad (9)$$

eine Gleichung, aus welcher sich für jedes θ das Abhängigkeitsverhältnis von u und v bestimmen lässt.

§ **119.** Unter Umständen ist indessen der Werth von v unabhängig von θ; dies ist, wie man aus (9) erkennt, dann der Fall, wenn $v = n^2 u$, indem dann der Faktor von $\cos \theta$ verschwindet. Setzen wir diesen speciellen Werth von v in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir $n^4 u^2 + \rho^2 = n^2 u^2 + n^2 \rho^2$, und hieraus $n u = \rho$, d. h. $\frac{1}{r} = n \cdot \frac{1}{p}$ oder endlich $p = n r$. Die Bedeutung dieser Formel ist in dem folgenden Satze ausgesprochen: *Wenn ein Strahlenbüschel nach einem Punkte convergirt, dessen Abstand von dem Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche das n-fache des Radius ist, so gehen alle gebrochenen Strahlen genau durch einen anderen Punkt, unter welchem Winkel sie auch immer einfallen mögen.*

Wenn wir in Gleichung (9) $\theta = 0$ werden lassen, so erhalten wir

$$v_0 - \varrho = n(u - \varrho), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

eine Gleichung, welche auf die Form $\frac{n-1}{r} = \frac{n}{p} - \frac{1}{q_0}$ gebracht mit derjenigen für die Beziehung der Abscissen conjugirter Punkte für solche Strahlen, die nur wenig von der Axenrichtung abweichen, übereinstimmt (vergl. § 41).

Um einen genaueren Werth von v zu finden, denken wir uns die Apertur so klein, dass die höheren Potenzen unbeschadet der genügenden Genauigkeit vernachlässigt werden können. Die Gleichung (9) lässt sich dann in dieser Form schreiben:

$$(v-\varrho)^2 + v\varrho\theta^2 = n^2\left\{(u-\varrho)^2 + u\varrho\theta^2\right\},$$

oder wenn man aus beiden Seiten nach dem binomischen Lehrsatz die Quadratwurzel zieht,

$$(v-\varrho)\left\{1 + \frac{v\varrho\theta^2}{2(v-\varrho)^2}\right\} = n(u-\varrho)\left\{1 + \frac{u\varrho\theta^2}{2(u-\varrho)^2}\right\}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (10) können wir diese Gleichung wesentlich vereinfachen und wir erhalten dann:

$$v - v_0 = \frac{1}{2}\varrho\theta^2\left\{\frac{nu}{u-\varrho} - \frac{v}{v-\varrho}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Diese Formel können wir als die Fundamentalformel für die Bestimmung der sphärischen Aberration bei der Brechung an einer Kugelfläche ansehen.

§ 120. Es ist im Allgemeinen bequemer, die Abstände von der brechenden Fläche und nicht von deren Mittelpunkt zu messen. Die Formel (11) lässt sich ohne Schwierigkeit unter Einführung dieser neuen Variablen umformen. Bezeichnen α und β die reciproken Werthe der Abstände AQ und Aq von der brechenden Fläche aus nach rechts gemessen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{u} \\ \text{und} \qquad \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Aus Gleichung (10) wird durch Einsetzung der Werthe von u und v aus (12) in dieselbe:

$$\alpha - \varrho = n(\beta - \varrho), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

aus Gleichung (11) durch dieselbe Operation:

$$d v = \frac{1}{2}\,\theta^2 \left\{ n\,\alpha - \beta \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Aus der Differentiation der Gleichung (12), $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{v}$, ergiebt sich aber

$$\frac{d\beta}{\beta^2} = -\frac{d v}{v^2}.$$

Somit ist

$$d v = -\frac{v^2}{\beta^2}\,d\beta,$$

oder, da nach (12)

$$v = \frac{\varrho\,\beta}{\beta - \varrho},$$

$$d v = -\frac{\varrho^2}{(\beta - \varrho)^2}\,d\beta.$$

Setzen wir hierin für $d v$ den in (14) gefundenen Werth ein und lösen die so entstandene Gleichung nach $d\beta$ auf, so ist

$$d\beta = \frac{1}{2\,\varrho^2}\cdot\theta^2\,(\beta - \varrho)^2\,(\beta - n\,\alpha),$$

oder, da der sehr kleine Winkel $\theta = \frac{y}{r} = y\,\varrho$ gesetzt werden kann,

$$d\beta = \frac{1}{2}\,(\beta - \varrho)^2\,(\beta - n\,\alpha)\,y^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Eliminirt man in dieser Gleichung β mit Hülfe von (13), so gelangt man zu dem schliesslichen Resultat:

$$d\beta = \frac{n-1}{2\,n^3}\,(\varrho - \alpha)^2\,[\varrho - (n+1)\,\alpha]\,y^2 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

als *Gleichung für die Aberration eines durch eine Kugelfläche gebrochenen Strahlenbüschels.*

§ **121.** *Aberration in Folge der Brechung centraler Strahlenbüschel durch Linsen.*

Bezeichnen α und β die reciproken Werthe der Abstände der Punkte, in welchen die Axe von dem einfallenden und gebrochenen Strahl geschnitten wird, von der ersten Linsenfläche aus gemessen, und bedeuten β', α' ähnliche Grössen in Bezug auf die zweite Linsenfläche, ist ferner τ der reciproke Werth der Linsendicke und bedeuten ϱ und ϱ' die reciproken Werthe der Krümmungsradien der Linsenflächen, so bestehen, unter der Voraussetzung, dass die Apertur eine sehr kleine ist, nach (13) unter diesen Grössen die folgenden Relationen:

und
$$\left.\begin{array}{c}\alpha-\varrho=n(\beta-\varrho)\,,\quad \alpha'-\varrho'=n(\beta'-\varrho')\,,\\ \dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\beta'}=\dfrac{1}{\tau}.\end{array}\right\}\quad . \ . \ (17)$$

Sind ferner y und y' die Radien der Aperturen der ersten resp. zweiten Fläche, so lässt sich α' als eine Funktion der beiden Variablen β' und y' ansehen und wir erhalten dann auf dem Wege partieller Differentiation:

$$d\,\alpha'=\left(\frac{\delta\,\alpha'}{\delta\,\beta'}\right)\delta\,\beta'+\left(\frac{\delta\,\alpha'}{\delta\,y'}\right)\delta\,y'. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (18)$$

Differentiiren wir aber die beiden letzten von den Gleichungen (17), so erhalten wir

$$\frac{d\,\alpha'}{d\,\beta'}=n\,,\qquad \frac{d\,\beta'}{\beta'^2}=\frac{d\,\beta}{\beta^2}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (19)$$

Wird die Veränderung von β, welche durch eine Veränderung der Apertur an der ersten Linsenfläche verursacht wird, mit $\varkappa\,y^2$ und unter der Annahme, dass β' unverändert bleibt, die durch eine Veränderung der Apertur der zweiten Linsenfläche verursachte Veränderung von α' mit $\varkappa'\,y'^2$ bezeichnet, so ist $d\,\beta=\varkappa\,y^2$ und daher nach den Gleichungen (19):

$$\left(\frac{d\,\alpha'}{d\,\beta'}\right)d\,\beta'=n\,\frac{\beta'^2}{\beta^2}\,\varkappa\,y^2;$$

und ferner

$$\left(\frac{d\,\alpha'}{d\,y'}\right)d\,y'=\varkappa'\,y'^2=\varkappa'\,\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cdot y^2\,,$$

letzteres indem, in Folge Aehnlichkeit der Dreiecke,

$$y':y=\frac{1}{\beta'}:\frac{1}{\beta}.$$

Führen wir diese Werthe in Gleichung (18) ein, so wird

$$d\,\alpha'=y^2\left[n\,\varkappa\,\frac{\beta'^2}{\beta^2}+\varkappa'\,\frac{\beta^2}{\beta'^2}\right]. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

Wir haben nun hierin die Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$, die sich aus den früheren Untersuchungen ergeben, einzusetzen. Aus $d\,\beta=\varkappa\,y^2$ und (15) ergiebt sich

$$d\,\beta=\varkappa\,y^2=\frac{1}{2}(\beta-\varrho)^2(\beta-n\,\alpha)\,y^2\,,$$

und eliminiren wir hierin ϱ mittelst der Gleichung (13), so ergiebt sich als Werth von $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{1}{2(n-1)^2} (\beta - \alpha)^2 (\beta - n\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Den Werth von $\varkappa'$ erhält man durch Substitution von β' und α' für α und β, sowie von $\frac{1}{n}$ für n in die letzte Gleichung und man erhält dann den Ausdruck

$$\varkappa' = -\frac{n}{2(n-1)^2} (\beta' - \alpha')^2 (\beta' - n\alpha').$$

Setzen wir die für $\varkappa$ und $\varkappa'$ gefundenen Werthe in (20) ein, so wird hieraus

$$d\alpha' = \frac{n y^2}{2(n-1)^2} \left[\frac{\beta'^2}{\beta^2} (\beta - \alpha)^2 (\beta - n\alpha) - \frac{\beta^2}{\beta'^2} (\beta' - \alpha')^2 (\beta' - n\alpha')\right] \quad (22)$$

und wir erhalten somit einen allgemeinen Ausdruck für $d\alpha'$, welcher für jede beliebige Linse gilt, von welcher Dicke sie auch sein möge. Die Grössen β und β' lassen sich nun auch durch α, ϱ, α' und ϱ' ersetzen und wir erhalten dann für $d\alpha'$ einen Ausdruck, welcher eine symmetrische Funktion von α, ϱ und α', ϱ' darstellt.

§ **122.** Solange als die Dicke der Linse als unwesentlich nicht in Betracht kommt, kann $\beta' = \beta$ gesetzt werden; in diesem Falle erhält Gleichung (22) die Form:

$$d\alpha' = \frac{n y^2}{2(n-1)^2} [(\beta - \alpha)^2 (\beta - n\alpha) - (\beta - \alpha')^2 (\beta - n\alpha')]. \quad (22\,a)$$

Multiplicirt man den Klammerausdruck aus, so entsteht daraus

$$(n+2)(\alpha' - \alpha)\beta^2 - (2n+1)(\alpha'^2 - \alpha^2)\beta + n(\alpha'^3 - \alpha^3);$$

wir erhalten also für $d\alpha'$

$$d\alpha' = \frac{n(\alpha' - \alpha)}{2(n-1)^2} y^2 [(n+2)\beta^2 -$$

$$-(2n+1)(\alpha + \alpha')\beta + n(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2)]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Dieser Ausdruck für die Aberration einer dünnen Linse lässt sich in eine mehr symmetrische Form bringen, wenn man β eliminirt. Aus den Gleichungen (17) unter Einsetzung von $\beta = \beta'$, d. h.

$$\alpha - \varrho = n(\beta - \varrho), \quad \alpha' - \varrho' = n(\beta - \varrho')$$

finden wir

und

$$\left.\begin{aligned}\beta - \alpha &= \frac{n-1}{n}(\varrho - \alpha),\\ \beta - n\alpha &= \frac{n-1}{n}[\varrho - (n+1)\alpha],\\ \beta - \alpha' &= \frac{n-1}{n}(\varrho' - \alpha'),\\ \beta - n\alpha' &= \frac{n-1}{n}[\varrho' - (n+1)\alpha'].\end{aligned}\right\}$$

Substituiren wir diese Werthe in (22a), so erhält jene Gleichung die Form:

$$d\alpha' = \frac{n-1}{2n^2}y^2\left[(\varrho-\alpha)^2\left\{\varrho - (n+1)\alpha\right\} - (\varrho' - \alpha')^2\left\{\varrho' - (n+1)\alpha'\right\}\right]. \quad (24)$$

Durch diese symmetrische Gleichung in Verbindung mit der aus (17) sich ergebenden Relation

$$\alpha' - \alpha = (n-1)(\varrho - \varrho') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ist die sphärische Aberration dünner Linsen vollständig bestimmt.

§ **123.** Wenn die einfallenden Strahlen parallel sind, so ist $\alpha = 0$ und $\alpha' = \Phi = (n-1)(\varrho - \varrho')$; $d\alpha'$ erhält in diesem Falle nach (24) den Werth

$$d\Phi = \frac{n-1}{2n^2}y^2\left[\varrho^3 + \left\{n(\varrho-\varrho') - \varrho\right\}^2\left\{n^2(\varrho - \varrho') - \varrho\right\}\right].$$

Führt man innerhalb der Klammer die Multiplikation aus, so wird

$$d\Phi = \frac{n-1}{2n^2}y^2\left[n(\varrho-\varrho')\left\{n^3(\varrho-\varrho')^2 - n(2n+1)(\varrho-\varrho')\varrho + (n+2)\varrho^2\right\}\right]$$

und daher schliesslich

$$d\Phi = \frac{n-1}{2n}(\varrho-\varrho')y^2\left\{(2-2n^2+n^3)\varrho^2 + (n+2n^2-2n^3)\varrho\varrho' + n^3\varrho'^2\right\}. \quad (26)$$

§ **124.** Die letzte Formel giebt uns ein Mittel, um die Vortheile, welche die einzelnen Linsenformen bezüglich der Grösse der Aberrationsfehler bieten, mit einander zu vergleichen. In einer plansphärischen Linse, welche ihre flache Seite dem einfallenden Lichte zugekehrt hat, ist $\varrho = 0$. In diesem Falle ist nach (26), wenn der Radius der Kugelfläche mit ϱ bezeichnet wird,

$$d\Phi = -\frac{1}{2}n^2(n-1)\varrho^3 y^2.$$

Es ist aber in diesem Falle nach § 123

$$\Phi = -(n-1)\,\varrho$$

und daher

$$d\,\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \Phi^3\,y^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

Für eine plan-sphärische Linse, welche ihre gewölbte Seite dem einfallenden Licht zugewendet hat, ist $\varrho' = 0$ und daher nach (26)

$$d\,\Phi = \frac{n-1}{2\,n}\,(n^3 - 2\,n^2 + 2)\,\varrho^3\,y^2;$$

und da aus (25) $\Phi = (n-1)\,\varrho$, so wird hieraus

$$d\,\Phi = \frac{n^3 - 2\,n^2 + 2}{2\,n\,(n-1)^2}\,\Phi^3\,y^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Für eine Bikonvexlinse mit gleichen Flächen ist $\varrho' = -\varrho$ und der Werth von $d\,\Phi$ wird in diesem Fall

$$d\,\Phi = \frac{n-1}{n}\,(4\,n^3 - 4\,n^2 - n + 2)\,\varrho^3\,y^2.$$

Oder, da in diesem Falle nach § 123 $\Phi = (n-1)\,2\,\varrho$,

$$d\,\Phi = \frac{4\,n^3 - 4\,n^2 - n + 2}{8\,n\,(n-1)^2}\,\Phi^3\,y^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$

Unter der Annahme, dass die Linse aus Crownglas hergestellt wird, wo $n = {}^3/_2$ (ungefähr), haben die Koefficienten von $\Phi^3\,y^2$ in den verschiedenen angeführten Fällen die Werthe ${}^9/_2$, ${}^7/_6$, ${}^5/_3$. Nun ist $\Phi = \frac{1}{f}$, so dass also $d\,\Phi = -\frac{d\,f}{f^2}$. Die Werthe der Aberrationen in den drei Fällen sind daher beziehungsweise $-\frac{{}^9/_2\,y^2}{f}$, $-\frac{{}^7/_6\,y^2}{f}$ und $-\frac{{}^5/_3\,y^2}{f}$.

Somit ist von den angeführten Typen die plan-sphärische Linse, welche ihre sphärische Seite dem einfallenden Licht zukehrt (Typus II), als der beste anzusehen, und die Aberration tritt am stärksten bei derselben Linse auf, wenn diese ihre plane Fläche dem einfallenden Licht zukehrt.

Wir fügen hier ein, dass bei einer dünnen Glaslinse, deren halber Durchmesser y und deren Brennweite f ist, die Dicke der Linse gleich $\frac{y^2}{f}$ ist. Denn aus den Eigenschaften zweier sich schneidender Kreise erhält man als deren Werth

$$t = r - \sqrt{r^2 - y^2} + r' - \sqrt{r'^2 - y^2}$$

oder als angenäherten Werth für die Dicke der Linse $\frac{y^2}{2r} - \frac{y^2}{2r'}$, wenn man die Wurzeln mittelst der Binomialreihe auflöst und hierbei höhere Potenzen vernachlässigt.

Ferner ist nach (14, IV) für eine dünne Crownglaslinse vom Brechungsexponenten $n = 1{,}5$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

und daher die Dicke einer solchen Glaslinse angenähert $\frac{y^2}{f}$.

Wir fügen dies ein, um die Bedeutung der oben gewonnenen Formeln zu veranschaulichen.

§ **125.** Wir wollen nun die Form einer Linse festzustellen suchen, welche ein von einem gegebenen Punkte ausgehendes Strahlenbüschel in einem anderen gegebenen Punkt vereinigt unter gleichzeitiger Erfüllung der Bedingung, *dass die hierbei auftretende Aberration ein Minimum darstelle.*

Hier sind α und α' gegeben und β ist die Variable, deren Werth ein Minimum für $d\alpha'$ verursachen soll. Wir müssen demnach β so wählen, dass in (23) der Ausdruck

$$(n+2)\beta^2 - (2n+1)(\alpha + \alpha')\beta + n(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2)$$

ein Minimum wird.

Setzt man den ersten Differentialquotienten gleich 0 und löst nach β auf, so ist

$$\beta = \frac{(2n+1)(\alpha + \alpha')}{2(n+2)}$$

der Bedingungswerth für die Entstehung eines Minimums.

Dies in den obigen Ausdruck eingesetzt, giebt

$$\frac{1}{n+2}\left\{(n^2 + 2n)(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2) - \left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right)(\alpha + \alpha')^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n+2}\left\{\left(n - \frac{1}{4}\right)(\alpha' - \alpha)^2 - (n-1)^2\alpha\alpha'\right\}.$$

Das Minimum der Aberration findet also statt, wenn

$$d\alpha' = \frac{n(\alpha' - \alpha)}{2(n+2)}\, y^2 \left\{\frac{n - \frac{1}{4}}{(n-1)^2}(\alpha' - \alpha)^2 - \alpha\alpha'\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Um die dieser Forderung entsprechende Form der Linse zu finden, haben wir nur den soeben für β ermittelten Werth, welcher ein Minimum für $d\alpha'$ verursacht, in die unmittelbar aus (17) sich ergebenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(n-1)\,\varrho &= n\,\beta-\alpha\\ (n-1)\,\varrho' &= n\,\beta-\alpha'\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

einzusetzen und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\varrho &= p\,\alpha'+q\,\alpha\\ \varrho' &= p\,\alpha\;+q\,\alpha'\end{aligned}\right\},\\ &p=\frac{2\,n^2+n}{2\,(n-1)\,(n+2)}\,, \qquad q=\frac{2\,n^2-n-4}{2\,(n-1)\,(n+2)}\end{aligned}\right| \quad . \; . \quad (29)$$

worin

als *die reciproken Werthe der Krümmungsradien einer Linse, welche ein von einem Punkte ausgehendes Strahlenbüschel derartig in einem anderen Punkte vereinigt, dass die hierbei auftretende Aberration ein Minimum wird.*

§ **126.** Die Gestalt einer solchen Linse hängt ab von der Lage des Punktes, von welchem das Licht ausgeht, sowie desjenigen Punktes, in welchem sich die Strahlen vereinigen.

Wenn die einfallenden Strahlen parallel sind, so ist $\alpha=0$, $\alpha'=\Phi$, wobei Φ den reciproken Werth der Brennweite bedeutet, und als kleinsten Werth von $d\alpha'$ haben wir dann nach (27)

$$d\Phi=\frac{n\left(n-\frac{1}{4}\right)}{2\,(n+2)\,(n-1)^2}\,\Phi^3\,y^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Für eine Crownglaslinse hat n etwa den Werth $^3\!/_2$ und es wird, wenn man diesen Näherungswerth einführt, $d\Phi=\frac{15}{14}\,\Phi^3\,y^2$. Die Grösse der Aberration ist also in diesem Fall $-\frac{15}{14}\,\frac{y^2}{f}$. Die Form dieser Linse bestimmt sich nach (29) durch die Gleichungen $\varrho=p\,\Phi$, $\varrho'=q\,\Phi$. *Es ist* also *das Verhältnis der Linsenkrümmungen unabhängig von der Vergrösserung*; vielmehr hat man

$$\frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{q}{p}=\frac{2\,n^2-n-4}{2\,n^2+n}\;.$$

Für $n={}^3\!/_2$ wird dieses Verhältnis

$$\frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{1}{6}\;.$$

Die beiden Linsenflächen sind in diesem Fall in entgegengesetztem Sinne *gekrümmt. Die Linse ist also entweder bikonvex oder bikonkav und der Krümmungsradius der hinteren Fläche beträgt $\frac{1}{6}$ desjenigen der vorderen Fläche.*

Ist der Brechungsexponent derart, dass er der Gleichung $2n^2 - n - 4 = 0$ genügt, d. h. ist $n = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{33}) \sim 1{,}686$, was ungefähr der Werth von n für stark brechende Glasarten ist, so wird $q = 0$, somit auch $\varrho' = 0$ und die Linse erhält dann eine plane hintere Fläche. Bei einer Glaslinse mit entgegengesetzt gekrümmten Flächen vom mittleren Brechungsexponenten $n = 1{,}5$ beträgt die Aberration für parallele Strahlen, wie wir bereits fanden, $-\frac{15}{14}\frac{y^2}{f}$, während bei einer plan-konvexen Linse aus gleichem Material, deren gekrümmte Fläche dem einfallenden Licht zugekehrt ist, die Aberration $-\frac{7}{6}\frac{y^2}{f}$ ist. Die plan-konvexe Linse ist daher fast ebenso gut als die bikonvexe oder bikonkave Linse, sie ist indessen weit leichter herzustellen und erfreut sich daher einer viel allgemeineren Verwendung.

Wenn plan-konvexe Linsen in Objektiven für Mikroskope verwendet werden, so gehen die Strahlen von einem der Linsenoberfläche sehr nahegerückten Punkte aus und treten fast zu einander parallel wieder hervor, so dass die flache Seite diejenige ist, welche dem Objekt zugekehrt sein muss.

§ **127.** *Die Aberration bei irgend einer dünnen Linse* lässt sich unter Beibehaltung der Bezeichnungen des letzten Paragraphen in einer einfachen Form ausdrücken. Die Forderung, dass die Aberration einer Linse ihren kleinsten Werth erhält, bedingt, wie wir in § 125 fanden, die Relation:

$$\beta = \frac{2n+1}{2(n+2)}(\alpha + \alpha').$$

Nehmen wir daher an, es sei ganz allgemein für j e d e beliebige Linse

$$\beta = \frac{2n+1}{2(n+2)}(\alpha + \alpha') + \frac{n-1}{n+2}\varepsilon, \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

setzen wir diesen Werth von β in Gleichung (23) ein und führen in die daraus sich ergebende Gleichung die Substitutionen

$$\frac{n}{n+2} = m, \qquad \frac{n - \frac{1}{4}}{(n-1)^2} = \mu \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

ein, so wird nach entsprechender Reduktion

$$d\alpha' = \frac{1}{2} m (\alpha' - \alpha) y^2 \left\{ \mu (\alpha' - \alpha)^2 - \alpha\alpha' + \varepsilon^2 \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Die Linsenkrümmungen lassen sich durch α, α' und ε ausdrücken, wenn man in die Gleichungen (28)

$$\beta = \frac{(2n+1)}{2(n+2)} (\alpha + \alpha') + \frac{n-1}{n+2} \varepsilon$$

einsetzt und in dem sich hieraus ergebenden Ausdruck die Substitutionen mit p und q aus (29) und m aus (32) vornimmt. Man gewinnt dann für die Krümmungsradien die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= p\alpha' + q\alpha + m\varepsilon \\ \varrho' &= p\alpha + q\alpha' + m\varepsilon \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

§ **128.** Wird die Forderung an uns gestellt, eine aplanatische Linse herzustellen, d. h. eine solche, bei welcher die Aberration verschwindet, so ergiebt sich aus (33), indem wir $d\alpha' = 0$ setzen, hierfür die Bedingungsgleichung:

$$\varepsilon^2 = \alpha\alpha' - \mu(\alpha' - \alpha)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Die erste Bedingung besteht also darin, dass α und α' gleiches Vorzeichen haben; und ferner müssen beide Grössen in einem solchen Verhältnis zu einander stehen, dass $\alpha\alpha' > n(\alpha' - \alpha)^2$ ist.

Diese Bedingungen lassen sich für parallelen Strahlengang niemals verwirklichen; denn in diesem Falle ist $\alpha = 0$, $\alpha' = \Phi$ und der Werth von ε^2 würde sich sodann aus der Gleichung

$$\varepsilon^2 = -n\Phi^2$$

bestimmen müssen und es ergäbe sich somit für ε ein imaginärer Werth.

§ **129.** *Aberration eines durch eine beliebige Anzahl centrirter Kugelflächen gebrochenen centralen Strahlenbüschels.*

Es seien n, n', n'' ... der Reihe nach die Brechungsexponenten der Medien; α und β seien die reciproken Werthe der Abstände des Objektpunktes bezw. seines ersten Bildes von dem Scheitel der ersten Kugelfläche; ρ sei der reciproke Werth des Krümmungsradius der letzteren und es bedeuten die mit Indices versehenen Buchstaben die nämlichen Grössen in Bezug auf die übrigen brechenden Kugelflächen, wobei sämmtliche Abstände von links nach rechts als positiv gemessen werden. Aus der Fundamentalgleichung (11, III.) ergeben sich dann ohne Weiteres die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} n(\alpha-\varrho) &= n'(\beta-\varrho), \\ n'(\alpha'-\varrho') &= n''(\beta'-\varrho'), \\ n''(\alpha''-\varrho'') &= n'''(\beta''-\varrho''), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Bezeichnen wir die reciproken Werthe der Dicken der zwischen den Flächen liegenden Medien mit τ, τ' ..., so müssen ferner die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha'} &= \frac{1}{\tau}, \\ \frac{1}{\beta'}-\frac{1}{\alpha''} &= \frac{1}{\tau'}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Sind die Radien der Aperturen der verschiedenen Flächen, durch welche das Strahlenbüschel geht, mit y, y', y'' ... bezeichnet, so hat man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$y:y'=\frac{1}{\beta}:\frac{1}{\alpha'}, \quad y':y''=\frac{1}{\beta'}:\frac{1}{\alpha''} \quad \ldots \text{ etc.}$$

d. i.

$$\left.\begin{aligned} \beta\, y &= \alpha'\, y' \\ \beta'\, y' &= \alpha''\, y'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Wir werden zunächst unsere Aufmerksamkeit auf nur drei brechende Kugelflächen beschränken. In diesem Falle würde es sich darum handeln, die Veränderung von β'' in Folge Aenderung der Aperturen der successiven Kugelflächen zu bestimmen. Zu diesem Zweck sehen wir β'' als eine Funktion von α'' und der Apertur y'' an. Die der Apertur y'' entsprechende Veränderung von β'' hat die Grösse $\varkappa''\, y''^2$. Somit erhalten wir durch partielle Differentiation:

$$d\beta''=\varkappa''\, y''^2+\left(\frac{\partial \beta''}{\partial \alpha''}\right)\delta \alpha''.$$

Die Apertur y'' lässt sich nach (38) auch durch die erste Apertur y ausdrücken und wir erhalten dann:

$$\varkappa''\, y''^2=\varkappa''\left(\frac{\beta'}{\alpha''}\right)^2 y'^2=\varkappa''\left(\frac{\beta\,\beta'}{\alpha'\,\alpha''}\right)^2 y^2.$$

Aus der Differentiation der Gleichungen (36) und (37) ergiebt sich

$$\frac{\partial \beta''}{\partial \alpha''}=\frac{n''}{n'''}, \quad \frac{\delta \alpha''}{\alpha''^2}=\frac{\delta \beta'}{\beta'^2}.$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck für $d\beta''$ ein, so wird

$$d\beta'' = \varkappa'' \left(\frac{\beta\beta'}{\alpha'\alpha''}\right)^2 y^2 + \frac{n''}{n'''}\left(\frac{\alpha''}{\beta'}\right)^2 d\beta'.$$

Ganz analog erhält man als Veränderung von β'

$$d\beta' = \varkappa' y'^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}\right)\delta\alpha',$$

$$= \varkappa' \left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2 y^2 + \frac{n'}{n''}\left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)^2 d\beta;$$

und endlich

$$d\beta = \varkappa y^2.$$

Setzen wir nun die Werthe von $d\beta$ und $d\beta'$ in den letzten Ausdruck für $d\beta''$ ein, so wird dieser

$$n''' d\beta'' = y^2 \left[n'\varkappa\left(\frac{\alpha'\alpha''}{\beta\beta'}\right)^2 + n''\varkappa'\left(\frac{\beta\alpha''}{\alpha'\beta'}\right)^2 + n'''\varkappa''\left(\frac{\beta\beta'}{\alpha'\alpha''}\right)^2\right].$$

Bestimmt man nun auf eine der in § 121 vorgenommenen Entwickelung der Formel (21) ganz analoge Weise den Werth von $\varkappa$, indem man anstatt von den Gleichungen (17) von den Gleichungen (36) ausgeht, so hat $\varkappa$ den Werth:

$$\varkappa = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{n'}{n}-1\right)^2}(\beta-\alpha)^2\left(\beta-\frac{n'\alpha}{n}\right),$$

und es ist daher

$$n'\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{n\,n'}{n'-n}\right)^2(\beta-\alpha)^2\left(\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{n}\right),$$

und ganz ähnliche Ausdrücke findet man für $n''\varkappa'$ und $n'''\varkappa''$.

Sind $q+1$ brechende Flächen vorhanden, so gestaltet sich die entsprechende Formel folgendermaassen:

$$n^{(q+1)} d\beta^{(q)} = y^2 \left[n'\varkappa\left(\frac{\alpha'\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q)}}{\beta\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-1)}}\right)^2 + \right.$$

$$+ n''\varkappa'\left(\frac{\beta\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q)}}{\alpha'\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-1)}}\right) + n'''\varkappa''\left(\frac{\beta\beta'\alpha'''\ldots\alpha^{(q)}}{\alpha'\alpha''\beta''\ldots\beta^{(q-1)}}\right)^2 + \ldots$$

$$\left.\ldots + n^{(q+1)}\varkappa^{(q)}\left(\frac{\beta\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-1)}}{\alpha'\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q)}}\right)^2\right]. \quad \ldots \quad (39)$$

§ 130. In derselben Weise lässt sich auch ein System dünner Linsen untersuchen. Sind α und β beziehungsweise die reciproken

Werthe der Entfernungen des Objektpunktes und seines ersten Bildes von der ersten Linse, bezeichnet Φ den reciproken Werth der Brennweite der Linse und gelten ähnliche Bezeichnungen für die folgenden Linsen, so haben wir nach (14, IV) die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \beta - \alpha &= \Phi \\ \beta' - \alpha' &= \Phi' \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha'} &= \frac{1}{\tau} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

wo $\frac{1}{\tau}$ der Abstand zwischen der ersten und zweiten Linse ist; für die übrigen Linsenpaare erhalten wir analoge Gleichungen. Für q Linsen lässt sich dann auf ganz analoge Weise, wie es in § 129 geschah, die folgende Endformel entwickeln:

$$d\beta^{(q-1)} = y^2 \left[\left(\frac{\alpha'\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q-1)}}{\beta\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-2)}}\right)^2 \varkappa + \left(\frac{\beta\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q-1)}}{\alpha'\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-2)}}\right) \varkappa' + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\frac{\beta\beta'\beta''\ldots\beta^{(q-2)}}{\alpha'\alpha''\alpha'''\ldots\alpha^{(q-1)}}\right)^2 \varkappa^{(q-1)}\right]. \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Die Werthe von $\varkappa, \varkappa' \ldots$ waren bereits im Vorhergehenden bestimmt worden. Nach (33) erhält man, da $d\beta = \varkappa y^2$, wenn man in jener Gleichung α' durch β und $d\alpha'$ durch $d\beta$ ersetzt,

$$\varkappa = \frac{1}{2} m (\beta - \alpha) [\mu (\beta - \alpha)^2 - \alpha\beta + \varepsilon^2], \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

und ähnliche Werthe ergeben sich für $\varkappa', \varkappa'' \ldots$. Die Krümmungsradien der Linsen sind nach (34) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= p\beta + q\alpha + m\varepsilon \\ \varrho' &= p\alpha + q\beta + m\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

und analoge Gleichungen für die übrigen Krümmungsradien.

B e r ü h r e n s i c h d i e L i n s e n, so wird $\alpha' = \beta$, $\alpha'' = \beta'$ u. s. f., so dass die Koefficienten von $\varkappa, \varkappa' \ldots$ der Gleichung (41) sämmtlich gleich 1 werden und es erhält dann diese Gleichung die Form:

$$d\beta^{(q-1)} = y^2 \{\varkappa + \varkappa' + \ldots \varkappa^{(q-1)}\}. \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Um daher ein System sich berührender Linsen a p l a n a t i s c h zu machen, müssen wir

$$\varkappa + \varkappa' + \ldots\ldots \varkappa^{(q-1)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

werden lassen, so dass die unbekannten Grössen ε, ε' .... an nur eine Bedingung gebunden sind. Die Linsen können daher so gewählt werden, dass sie noch $(q-1)$ weiteren Bedingungen genügen.

§ 131. Wir wollen den Fall zweier sich berührender Linsen näher untersuchen. Die Bedingung für den Aplanatismus ist nach (45) in diesem Falle

$$\varkappa + \varkappa' = 0 \qquad (45a)$$

Setzen wir hierin aus (42) die Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$ ein und nehmen nach (40) die Substitution $\beta - \alpha = \Phi$, $\beta' - \alpha' = \Phi'$ vor, so erhalten wir nach (42) als *Bedingungsgleichung für den Aplanatismus* zweier sich berührender unendlich dünner Linsen:

$$m\,\Phi\,(\varepsilon^2 - \alpha\beta + \mu\,\Phi^2) + m'\,\Phi'\,(\varepsilon^2 - \alpha'\beta' + \mu'\,\Phi'^2) = 0 \qquad (46)$$

Wir haben also hier zwei willkürliche Grössen ε und ε' und nur eine Gleichung zu ihrer Bestimmung. Wir dürfen somit noch eine weitere Bedingung einführen.

In der Praxis ist es hier sehr üblich, diese darin bestehen zu lassen, dass man den einander zugekehrten Linsenflächen gleiche Krümmungsradien giebt, so zwar, dass die eine konvex, die andere konkav wird und man die beiden Linsen zusammenkitten kann. Diese Bedingung ist ausgedrückt durch $\varrho' = \varrho''$, wenn wir die bisherige Bezeichnungsweise beibehalten. Für $\varrho' = \varrho''$ können wir nach (43) schreiben

$$p\,\alpha + q\,\beta + m\,\varepsilon = p'\,\beta' + q'\,\alpha' + m'\,\varepsilon' \qquad (47)$$

und durch diese Gleichung in Verbindung mit (46) sind ε und ε' vollständig bestimmt und somit auch die Krümmungen sämmtlicher Linsenflächen.

§ 132. Der Annehmlichkeit dieser Rechnungsmethode stehen indessen praktische Bedenken gegenüber. Eine nach dieser Methode hergestellte verkittete Linse ist der Gefahr der Verzerrung ausgesetzt, indem die beiden Gläser bei einer Temperaturänderung sich ungleichartig ausdehnen oder zusammenziehen. Man hat daher als zweite Bedingung $d(\varkappa + \varkappa') = 0$ vorgeschlagen, damit die Linse nicht nur für einen bestimmten Werth von α aplanatisch sei, sondern auch dann noch, wenn α eine kleine Veränderung erleidet.

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu ermitteln, setzen wir die Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$ aus (42) in die Gleichung

$$\frac{d\varkappa}{d\alpha} + \frac{d\varkappa'}{d\alpha'} = 0$$

ein.

Berücksichtigt man ferner, dass $d\alpha = d\beta = d\alpha' = d\beta'$, so erhält man durch Differentiation von Gleichung (46) die Bedingungsgleichung

$$m\,\Phi\left\{2\,\varepsilon\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,\alpha}-(\alpha+\beta)\right\}+m'\,\Phi'\left\{2\,\varepsilon'\,\frac{d\,\varepsilon'}{d\,\alpha'}-(\alpha'+\beta')\right\}=0.$$

Differentiirt man nun die als Funktionen von α, β, ε und α', β', ε' ausgedrückten Werthe von ϱ und ϱ' aus (43), so ist

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,\alpha}+p+q&=0\\ m'\,\frac{d\,\varepsilon'}{d\,\alpha'}+p'+q'&=0\end{aligned}\right\}.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von $m\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,\alpha}$ und $m'\,\frac{d\,\varepsilon'}{d\,\alpha'}$ in die letzte Gleichung ein und schreibt nach (29) der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} 2\,(p+q)&=4\,\frac{n+1}{n+2}=l\\ 2\,(p'+q')&=4\,\frac{n'+1}{n'+2}=l'\end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{48}$$

so wird unsere Bedingungsgleichung für den Aplanatismus

$$\Phi\left\{l\,\varepsilon+m\,(\alpha+\beta)\right\}+\Phi'\left\{l'\,\varepsilon'+m'\,(\alpha'+\beta')\right\}=0.\quad\ldots \tag{49}$$

Die Grössen ε und ε' sind somit vollständig bestimmt und aus ihnen lassen sich die Krümmungsradien der verschiedenen Linsenflächen berechnen.

§ 133. Wenn die *einfallenden Strahlen parallel* sind, ist für den im letzten Paragraphen behandelten Fall

$$\alpha=0,\quad \beta=\alpha'=\Phi,\quad \beta'=\Phi+\Phi'$$

und es lautet dann nach (46) die *Bedingungsgleichung für den Aplanatismus*:

$$m\,\Phi\left\{\varepsilon^2+\mu\,\Phi^2\right\}+m'\,\Phi\left\{\varepsilon'^2-\Phi\,(\Phi+\Phi')+\mu'\,\Phi'^2\right\}=0$$

oder nach (49) (50)

$$\Phi\left\{l\,\varepsilon+m\,\Phi\right\}+\Phi'\left\{l'\,\varepsilon'+m'\,(2\,\Phi+\Phi')\right\}=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich ε und ε' bestimmen, und nach Einsetzung der gefundenen Werthe in die Gleichungen

$$\varrho = p\,\Phi + m\,\varepsilon\,, \quad \varrho'' = q'\,\Phi + p'\,(\Phi + \Phi') + m'\,\varepsilon',$$

$$\varrho' = q\,\Phi + m\,\varepsilon\,, \quad \varrho''' = p'\,\Phi + q'\,(\Phi + \Phi') + m'\,\varepsilon',$$

welche sich aus (43) ergeben, ist die gekittete Linse vollständig bestimmt und wird nicht nur für parallel einfallende Strahlen aplanatisch, sondern auch für solche, welche von einem in endlichem und beträchtlichem Abstande liegenden Punkte divergiren.

Wir bemerken hier, dass die angegebenen Gleichungen zur Bestimmung der Linsenkrümmungen nicht die Brennweiten der beiden Einzellinsen in irgend ein gegenseitiges Abhängigkeitsverhältnis bringen, dass ihnen also immer genügt werden kann, was auch immer die Werthe von Φ und Φ' sein mögen.

§ **134.** Die Grösse, welche wir in dem Vorhergehenden zu bestimmen suchten, war die von der Apertur hervorgerufene Veränderung des reciproken Werthes des Abstandes des Schnittpunktes des austretenden Strahls mit der Axe. Bezeichnen wir diese Grösse mit $-\mathrm{K}\,y^2$, wo y die halbe Apertur der ersten Linse ist, und ist $a' = \frac{1}{x'}$, so haben wir

$$d\left(\frac{1}{x'}\right) = -\mathrm{K}\,y^2,$$

und daher

$$d\,x' = \mathrm{K} \cdot x'^2\,y^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Diese Grösse $d\,x'$ stellt die Longitudinalaberration dar und ihr Werth wird bekannt, wenn wir für K an der Hand der vorhergehenden Paragraphen dessen Werth einsetzen.

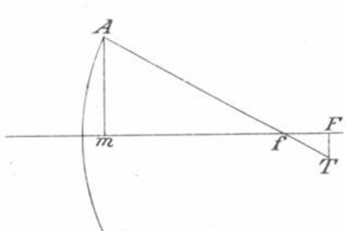

Fig. 94.

Ist Af (Fig. 94) der äusserste Strahl, welcher die Axe in f und das im geometrischen Fokus F zur Axe errichtete Loth in T schneidet, so ist Ff die Longitudinalaberration $d\,x'$ und F T stellt die Lateralaberration dar. Zieht man Am senkrecht zur Axe, so dass Am die Apertur der letzten Linse darstellt, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$\mathrm{F\,T} : \mathrm{F}f = \mathrm{A}\,m : m\,f,$$

oder angenähert

$$\mathrm{F\,T} = \frac{y'\,d\,x'}{x'}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

wenn y' die halbe Apertur der letzten Linse darstellt.

Bedeuten ferner α und β die reciproken Werthe der Abstände des Objektpunktes und seines ersten Bildes von der ersten Linse, α' und β' die entsprechenden Grössen für die zweite Linse u. s. f., so ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{\beta\,\beta'\,\beta''\ldots}{\alpha\,\alpha'\,\alpha''\ldots},$$

oder sagen wir

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{M}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

Substituiren wir demnach in (52) die Werthe von $d\,x'$ und y' aus (51) und (53), so erhalten wir als Werth der Lateralaberration

$$\mathrm{F\,T} = \mathrm{M\,K}\,x'\,y^3. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

Grösse und Lage des kleinsten Aberrationskreises wurden schon früher bestimmt; es wurde dort dargethan, dass der Radius dieses Kreises ein Viertel der Lateralaberration des äussersten Strahls beträgt und dass der Abstand seines Mittelpunktes vom geometrischen Vereinigungspunkt dreiviertel der Longitudinalaberration des äussersten Strahls beträgt.