

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Lehrbuch der Geometrischen Optik**

**Heath, Robert Samuel**

**Berlin, 1894**

Kapitel VI. Allgemeine Sätze, Brennlinien und Brennebenen

## Kapitel VI.

### Allgemeine Sätze, Brennlinsen und Brennebenen.

§ 86. Erfährt ein Strahl bei seinem Verlaufe von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B durch beliebige Medien eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Brechungen, so bedingt das Reflexions- sowohl als das Brechungsgesetz, dass  $\Sigma(n\rho)$  ein Grenzwert (in speciellem Falle ein Minimum) wird, wenn  $\rho$  die Weglänge des Strahles in einem Medium vom Brechungsexponenten  $n$  bedeutet. Erfolgt umgekehrt der Strahlengang derart, dass  $d\Sigma(n\rho) = 0$  wird, so ist auch damit gleichzeitig die Bedingung dafür gegeben, dass der Strahlengang nach den durch die Empirie aufgestellten Gesetzen für die Reflexion und Brechung verläuft. Den Ausdruck  $n\rho$  nennt man auch die optische Weglänge.

Wir geben zunächst einen elementaren (angenäherten) Beweis für die Richtigkeit dieses allgemeinen Satzes für eine einzelne Reflexion und eine einzelne Brechung und werden später diese Untersuchung auf eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Brechungen ausdehnen.

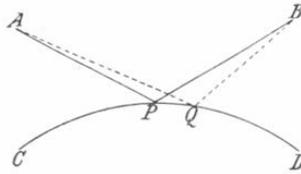


Fig. 62.

Es sei in Fig. 62 APB der Weg eines Lichtstrahles, welcher in einem homogenen Medium von einem Punkte A ausgehend nach einem Punkte B verläuft und hierbei eine Reflexion an der Fläche CD erleidet. Unsere Behauptung geht nun dahin, dass der Gesamtweg, welchen der von A ausgehende Strahl wählt, um von CD reflektirt nach B zu gelangen, ein Grenzwert ist, d. h.  $AP + PB$ ,

die Summe der Theile des wirklichen Strahlenverlaufes, von irgend einer anderen, einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes P um das Bogenelement PQ entsprechenden, Verbindungslinie AQB zwischen A und B garnicht oder nur um kleine Grössen zweiter Ordnung abweicht.

Es sei AQB der einer unendlich kleinen Verschiebung innerhalb der Ebene APB entsprechende Strahlengang. Die Differenz  $AQ - AP$  ist dann bis auf Grössen von mindestens der zweiten Ordnung der Kleinheit gleich der Projektion von PQ auf AP, und ebenso ist die Differenz  $PB - PQ$ , unter gleicher Voraussetzung, gleich der Projektion von PQ auf PB. Diese Projektionen sind aber einander gleich, da AP und PB gleiche Neigungswinkel mit PQ einschliessen. Es ist somit  $AQ + QB = (AP + PB)$ , woraus hervorgeht, dass für eine verschwindend kleine Verschiebung des Einfallspunktes aus der dem Reflexionsgesetz entsprechenden Lage die hierdurch verursachte Variation des optischen Weges, d. h. der Summe  $AP + PB$ , verschwindet. Die optische Weglänge stellt somit ein Maximum, Minimum oder keines von beiden dar. Bis auf Grössen zweiter Ordnung liegt also jedenfalls ein Grenzwert vor und in jedem speciellen Falle wird man zu bestimmen haben, ob dieser Grenzwert ein Maximum oder Minimum repräsentirt.

Zu einem analogen Schluss gelangen wir, wenn wir annehmen, dass der Strahl bei seinem Verlaufe von A nach B an der Fläche CD eine Brechung erleidet. Sind  $n$  und  $n'$  die Brechungsexponenten der beiden Medien, so stellt, wenn unsere Behauptung richtig ist, die optische Weglänge  $nAP + n'PB$  einen Grenzwert für den Strahlengang dar.

Es wird auch hier genügen, nur den Fall einer Betrachtung zu unterziehen, wo Q in der Ebene APB liegt.

Man ziehe in Fig. 63 das Einfallslot PN und bezeichne den Einfallswinkel mit  $i$  und  $i'$ . Es ist dann nach dem Brechungsgesetz  $n \sin i = n' \sin i'$ . Nehmen wir nun AQB als den einer verschwindend kleinen Verschiebung des Einfallspunktes entsprechenden Strahlengang von A nach B an und bilden die Differenz

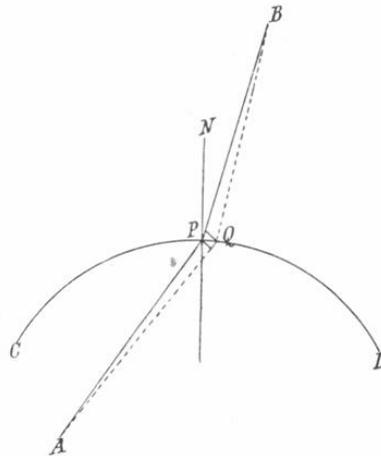


Fig. 63.

von  $AP$  und der Projektion von  $AQ$  auf  $AP$ , sowie diejenige von  $BP$  und der Projektion von  $BQ$  auf  $BP$ , so ist:

$$nAQ - nAP = nPQ \sin i,$$

$$n'BP - n'BQ = n'PQ \sin i'.$$

Somit wird die Aenderung in der gesammten optischen Weglänge bei einer verschwindend kleinen Verschiebung des Einfallspunktes

$$nAQ + n'BQ - (nAP + n'BP) = PQ(n \sin i - n' \sin i') = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass für eine verschwindend kleine Verschiebung des Eintrittspunktes längs der brechenden Fläche die durch diese Verschiebung verursachte Variation verschwindet, worin, wenn wir auch hier wie bei der Reflexion von einer streng analytischen Untersuchung absehen, die Bedingung dafür gegeben ist, dass die optische Weglänge, d. h.  $nAP + n'PB$ , einen Grenzwert für den Strahlengang darstellt.

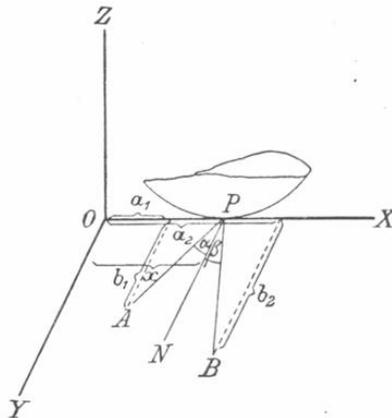


Fig. 64.

Der für die Reflexion bewiesene Satz ist nur als ein specieller Fall des letzten Satzes anzusehen. Man hat nämlich nur für jenen Fall  $n' = -n$  zu setzen, um ihn von dem letzteren, als dem allgemeineren, Satze abzuleiten.

Ehe wir die soeben besprochenen Fälle auf eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Brechungen ausdehnen, mag noch folgender analytischer Beweis für zwei Specialfälle, den der Reflexion an einer konvexen Fläche und den der Brechung an einer Ebene, eingefügt werden.

Es seien mit Bezugnahme auf Fig. 64 zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Raume durch ihre Koordinaten  $(a_1, b_1, 0)$  und  $(a_2, b_2, 0)$  und

eine konvexe Fläche  $z=f(x, y)$  gegeben. Ein Strahl gehe nun von A aus und werde bei P von der Fläche  $z=f(x, y)$  nach B reflektirt. Um zu zeigen, dass diese Lage des Punktes P der Fläche  $z=f(x, y)$  ein Minimum für die Weglänge AP + PB ergibt, beziehen wir die gegebenen Grössen auf ein Koordinatensystem, dessen XY-Ebene mit der Einfallsebene zusammenfällt, während die XZ-Ebene die Tangentialebene im Punkte P an die reflektirende Fläche darstellt und die X-Axe durch den Punkt P geht.

Die Abscisse des Punktes P sei mit  $x$  bezeichnet, es ist dann

$$f(x) = AP + PB = \sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}.$$

Als Bedingung dafür, dass  $f(x)$  möglicherweise ein Maximum oder Minimum wird, ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} = 0, \\ \frac{(x-a_1)^2 + b_1^2}{(x-a_1)^2} &= \frac{(x-a_2)^2 + b_2^2}{(x-a_2)^2}, \\ 1 + \frac{b_1^2}{(x-a_1)^2} &= 1 + \frac{b_2^2}{(x-a_2)^2}, \end{aligned}$$

und hieraus

$$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{x-a_2}{b_2}.$$

Diese Gleichung bedeutet aber nichts anderes, als dass

$$\text{tg APN} = \text{tg BPN},$$

oder

$$\sphericalangle \alpha = \beta$$

und als entsprechenden Werth von  $x$  haben wir:

$$x = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{b_1 - b_2}.$$

Um zu bestimmen, ob dieser Werth von  $x$  ein Maximum oder Minimum verursacht, bilden wir den zweiten Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2} - (x-a_1) \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}}}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2} - (x-a_2) \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}}}{(x-a_2)^2 + b_2^2}, \end{aligned}$$

$$= \frac{b_1^2}{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{b_2^2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}}$$

Hieraus erkennen wir ohne Weiteres, dass  $f''(x)$  einen positiven Werth hat; es ist also  $\alpha = \beta$  die Bedingung dafür, dass  $AP + PB$  ein Minimum ist; denn für eine Verschiebung des Punktes  $P$  in der Richtung der  $Y$ -Axe wird die Strecke  $AP + PB$  offenbar grösser.

Ganz analog lässt sich der Fall behandeln, wo der Strahl in seinem Verlaufe von  $A$  nach  $B$  durch eine Ebene gebrochen wird. Wieder seien zwei Punkte durch ihre Koordinaten  $(a_1, b_1, 0)$  und  $(a_2, b_2, 0)$  gegeben. Wir setzen voraus, dass der Strahl von  $A$  nach  $P$ , dem Punkte der brechenden Ebene, und von da nach  $B$  verläuft, dass durch die Ablenkung bei  $P$  dem Brechungsgesetz genügt wird, und behaupten, dass unter dieser Voraussetzung  $nAP + n'PB$  ein Minimum wird. Die  $XY$ -Axe bilde, wie im vorigen Falle, die Tangentialebene, also hier die brechende Ebene selbst

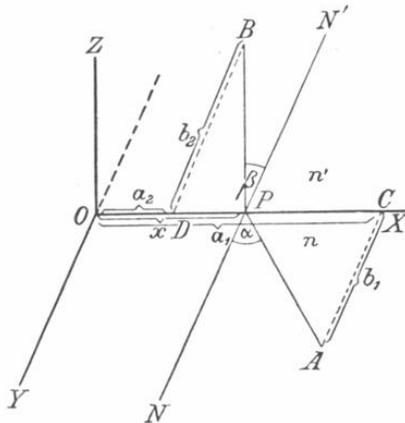


Fig. 65.

und der Einfallspunkt liege demnach in der  $X$ -Axe. Verfahren wir nun ganz ähnlich wie im vorigen Falle, so erhalten wir mit Bezugnahme auf Fig. 65 die folgende Entwicklung:

$$f(x) = nAP + n'PB = n\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2} + n'\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2};$$

$$f'(x) = n \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + n' \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} = 0,$$

$$n^2 \frac{(x-a_1)^2}{(x-a_1)^2 + b_1^2} = n'^2 \frac{(x-a_2)^2}{(x-a_2)^2 + b_2^2},$$

$$\frac{n^2}{1 + \frac{b_1^2}{(x-a_1)^2}} = \frac{n'^2}{1 + \frac{b_2^2}{(x-a_2)^2}},$$

das heisst,

$$\frac{n^2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{n'^2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta},$$

oder

$$n \sin \alpha = n' \sin \beta$$

ist die Bedingung dafür, dass  $f(x)$  möglicherweise ein Maximum oder Minimum wird.

Setzen wir in den zweiten Differentialquotienten

$$f''(x) = \frac{n b_1^2}{\{(x-a_1)^2 + b_1^2\} \sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{n' b_2^2}{\{(x-a_2)^2 + b_2^2\} \sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}},$$

die Wurzel der auf 0 reducirten ersten Derivirten ein, so erkennen wir ohne Weiteres, dass  $f''(x)$  einen positiven Werth hat. Es ist somit  $n \sin \alpha = n' \sin \beta$  die Bedingung dafür, dass  $nAP + n'PB$  ein Minimum darstellt. Für eine Verschiebung des Punktes P in der Richtung der Y-Axe ist dies evident.

Nehmen wir nun den Fall, es treten in dem Verlaufe des Strahles von A nach B eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Brechungen auf. Es sei mit  $q$  die Weglänge eines Strahles in irgend einem Medium mit dem Brechungsexponenten  $n$  bezeichnet. Nachdem nun bereits gezeigt worden ist, dass  $\sum nq$  einen Grenzwert darstellt für die Verschiebung der Einfallspunkte zwischen je zwei benachbarten Medien, so wird dieser Ausdruck nach dem Principe der Superposition kleiner Verschiebungen auch dann einen Grenzwert darstellen, wenn eine Reihe von gleichzeitigen Verschiebungen zugelassen wird. Die optische Weglänge  $\sum nq$  der zwei Punkte verbindenden Strahlen stellt also einen Grenzwert dar. Findet eine kontinuierliche Veränderung des Brechungsexponenten statt, so gilt dasselbe Gesetz, und der Strahl verläuft dann in der Weise, dass  $\int n ds$  ein Grenzwert oder  $\delta \int n ds = 0$  ist.

§ 87. Ein anderer, von Malus aufgestellter Satz ergibt sich ohne Weiteres aus dem Vorgehenden. Er lautet:

*Jedes System von normal zu einer Fläche einfallenden Strahlen behält auch nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen und Brechungen an beliebig gestalteten Flächen stets die Eigenschaft bei, dass die Strahlen desselben Normale zu einer Fläche sein können.*

Die allgemeine Theorie der Liniensysteme wird später behandelt werden; wir können aber schon an dieser Stelle anführen, dass ein doppelt unendliches System von Linien nicht auch im Allgemeinen ein System von Senkrechten darstellt.

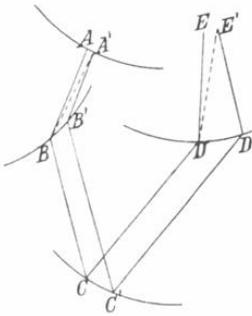


Fig. 66.

Es seien in Fig. 66  $ABCDE\dots$ ,  $A'B'C'D'E'$  die Richtungen einer Reihe von Strahlen, welche senkrecht zu einer durch A gehenden Fläche gerichtet sind und eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen erleiden. Von diesen Strahlen denke man sich derartig bis  $E E'$  Wegestrecken abgegrenzt, dass  $\sum n q$  für jede derselben den gleichen Werth hat; nach dem Malus'schen Satze sollen dann die Strahlen schliesslich alle Senkrechte zur Fläche  $E E'$  sein. Um dies zu beweisen, ziehen wir  $A'B$  und  $E'D$ . Nach unserer

Voraussetzung hat  $\sum n q$  sowohl für  $ABCDE$  als auch für  $A'B'C'D'E'$  denselben Werth. Da aber  $\sum n q$  für den Strahlengang  $A'B'C'D'E'$  ein Minimum darstellt, somit für eine unendlich kleine Verschiebung  $BB'$  die erste Variation verschwindet, so hat  $\sum n q$  für den Strahlengang  $A'BCDE'$  und  $A'B'C'D'E'$  und daher auch für  $ABCDE$  den gleichen Werth. Subtrahirt man von den beiden Strahlenwegen  $A'BCDE$  und  $A'BCDE'$  die beiden gemeinsamen Strecken, so hat man, wenn  $n$  und  $n'$  die Brechungsexponenten der beiden äussersten Medien sind, die Gleichung  $n A'B + n' E'D = n AB + n' DE$ . Da aber  $AB$  senkrecht zur Fläche  $AA'$  gerichtet ist, so muss für unendlich benachbarte Strahlen  $A'B = AB$ , daher auch  $DE = DE'$  sein; das ist aber nur dann der Fall, wenn  $EE'$  senkrecht zu  $DE$  ist. Dasselbe lässt sich für jeden anderen dem Punkte E benachbarten Punkt darlegen und es ist somit die Fläche  $EE'$  senkrecht zum Strahl  $DE$  und zu jedem anderen Strahl des Systems, wie sich auf ganz analoge Weise zeigen lässt.

§ 88. In dem Folgenden geben wir eine analytische Behandlung dieser Sätze.

Ein Lichtstrahl gehe durch mehrere Medien mit verschiedenen Brechungsexponenten hindurch. Sind  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  die Richtungskosinuse des einfallenden Strahles und  $(x_1, y_1, z_1)$  die Koordinaten eines Punktes auf demselben, so kann man  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  als bekannte Funktionen von  $(x_1, y_1, z_1)$  ansehen. Es treffe dieser Strahl die erste brechende Fläche in dem Punkte  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , und  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  seien die Richtungskosinuse des in das zweite Medium gebrochenen

Strahles. Es sind dann nach (12, II) die Richtungskosinusse der Strahlen unter einander verbunden durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2 &= (n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2) \lambda_1 \\ n_1 \beta_1 - n_2 \beta_2 &= (n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2) \mu_1 \\ n_1 \gamma_1 - n_2 \gamma_2 &= (n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2) \nu_1 \end{aligned} \right\}, \dots \dots (1)$$

worin  $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$  die Richtungskosinusse des Einfallslotthes zur ersten brechenden Fläche bedeuten.

Ferner ist:

$$\lambda_1 d\xi_1 + \mu_1 d\eta_1 + \nu_1 d\zeta_1 = 0 \dots \dots (2)$$

und daher, wenn man die Gleichungen (1) der Reihe nach mit  $d\xi_1$ ,  $d\eta_1$  und  $d\zeta_1$  multiplicirt und sie dann addirt,

$$(n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2) d\xi_1 + (n_1 \beta_1 - n_2 \beta_2) d\eta_1 + (n_1 \gamma_1 - n_2 \gamma_2) d\zeta_1 = 0 \dots (3)$$

Bezeichnet man mit  $r_1$  den Abstand zwischen  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  und mit  $r_1'$  den Abstand zwischen  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$ , so ist:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (\xi_1 - x_1)^2 + (\eta_1 - y_1)^2 + (\zeta_1 - z_1)^2 \\ r_1'^2 &= (x_2 - \xi_1)^2 + (y_2 - \eta_1)^2 + (z_2 - \zeta_1)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi_1 - x_1}{r_1} \\ \beta_1 &= \frac{\eta_1 - y_1}{r_1} \\ \gamma_1 &= \frac{\zeta_1 - z_1}{r_1} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{x_2 - \xi_1}{r_1'} \\ \beta_2 &= \frac{y_2 - \eta_1}{r_1'} \\ \gamma_2 &= \frac{z_2 - \zeta_1}{r_1'} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Aus der Differentiation der Gleichungen (4) und aus Gleichungen (5) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} dr_1 &= \alpha_1 (d\xi_1 - dx_1) + \beta_1 (d\eta_1 - dy_1) + \gamma_1 (d\zeta_1 - dz_1) \\ dr_1' &= \alpha_2 (dx_2 - d\xi_1) + \beta_2 (dy_2 - d\eta_1) + \gamma_2 (dz_2 - d\zeta_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Hieraus folgt unter Benützung von (3)

$$n_1 dr_1 + n_2 dr_1' = n_2 (\alpha_2 dx_2 + \beta_2 dy_2 + \gamma_2 dz_2) - n_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1).$$

Ist ferner  $r_2$  der Abstand des Punktes  $(x_2, y_2, z_2)$  von der nächstfolgenden Fläche und  $r_2'$  der Abstand zwischen dieser Fläche und einem Punkte  $(x_3, y_3, z_3)$  auf dem gebrochenen Strahl in dem nächsten Medium, so haben wir wieder:

$$n_2 dr_2 + n_3 dr_2' = n_3 (\alpha_3 dx_3 + \beta_3 dy_3 + \gamma_3 dz_3) - n_2 (\alpha_2 dx_2 + \beta_2 dy_2 + \gamma_2 dz_2),$$

u. s. f. Bezeichnet man daher mit  $q_1, q_2, q_3 \dots q_{m-1}, q'$  die gesammten optischen Weglängen in den verschiedenen Medien, d. h.  $q_1 = r_1, q_2 = r_1' + r_2, q_3 = r_2' + r_3 \dots$  etc., so ergibt sich durch Addition aller nach Analogie der beiden letzten Gleichungen gebildeten Beziehungen:

$$n_1 dq_1 + n_2 dq_2 + \dots + n' dq' = n' (\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') - \\ - n_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1) \dots \dots \dots (7)$$

Wenn  $n_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1)$  ein vollständiges Differential ist, so muss auch  $n' (\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz')$  ein solches darstellen; mit anderen Worten: *Strahlen, welche einmal innerhalb ihres Verlaufes als Normale zu einer brechenden Fläche auftreten, haben für den ganzen Strahlengang die Eigenschaft, Normale zu einer Fläche zu sein.*

Setzen wir

$$n_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1) = dV, \\ n' (\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') = dV',$$

so folgt hieraus und aus (7) durch Integration:

$$V' - V = \Sigma(nq).$$

Die zwischen je zwei Normalflächen eingeschlossene optische Weglänge ist somit für alle Strahlen des Systems die nämliche.

Ist die Lage des Ausgangs- und Endpunktes des Strahlenganges eine unveränderliche, so verschwinden  $dx_1, dy_1, dz_1$  und ebenso  $dx', dy', dz'$ , es wird nach (7)  $\Sigma(n dq) = 0$  und es stellt somit bis auf kleine Grössen 2. Ordnung  $\Sigma(nq)$ , oder die optische Weglänge, einen Grenzwert für den Strahlengang dar.

Die Funktion V bezeichnet man als die charakteristische Funktion des Systems.

§ 89. Von hier ausgehend können wir das allgemeine Gesetz des Strahlenganges für irgend ein heterogenes Medium bestimmen. Der Strahlengang wird immer ein solcher sein, dass  $\int n ds$  oder V ein Minimum wird. Die Strahlen werden sämtlich zur Fläche V = konstant lothrecht sein.

Kennen wir V als eine Funktion von  $x, y, z$  für alle durch ihre Koordinaten  $(x, y, z)$  bestimmten Punkte des Raumes, so kennen wir damit auch die Richtung des Strahles in irgend einem Punkte.

Denn

$$\frac{dV}{dx} = n\alpha, \quad \frac{dV}{dy} = n\beta, \quad \frac{dV}{dz} = n\gamma,$$

und daher

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = n^2,$$

wodurch  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmt sind.

§ 90. Ein Strahlensystem, welches sich rechtwinklig von einer Fläche schneiden lässt, wollen wir als ein orthotomisches System bezeichnen. Ein System von einem Punkte ausgehender Strahlen oder solcher Strahlen, welche durch irgend eine katoptrische oder dioptrische Anordnung zur Vereinigung in einem Punkte gebracht werden können, ist, wie ohne Weiteres einzusehen ist, stets orthotomisch; denn es wird eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt in dem Vereinigungspunkt der Strahlen liegt, sämmtliche Strahlen unter rechtem Winkel schneiden.

Wenn die Strahlen eines von einem Punkte ausgehenden Strahlensystems nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen und Brechungen wieder in einem anderen Punkte homocentrisch werden, so hat  $\mathcal{L}n\varrho$ , die optische Weglänge von einem Punkte zum anderen, denselben Werth für alle Strahlen. Um daher Strahlen, welche von einem Punkte S ausgehen, mit Hilfe einer einfachen Reflexion an einer krummen Fläche in einem zweiten Punkt H zu sammeln, wählen wir unsere Fläche derartig, dass  $SP + PH$  für alle Strahlenwege denselben Werth hat und finden somit, dass diese Fläche ein Rotationsellipsoid mit den Brennpunkten S und H sein muss (Fig. 67).

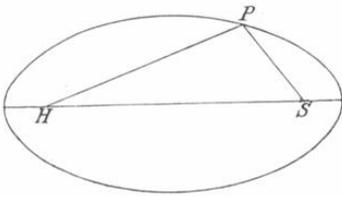


Fig. 67.

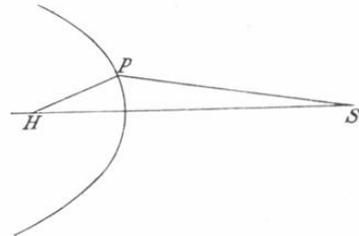


Fig. 68.

Sind die Strahlen parallel, so liegt der Punkt S in der Unendlichkeit, die Fläche ist somit ein Rotationsparaboloid, dessen Axe parallel zur gemeinsamen Strahlenrichtung gerichtet ist.

Bestimmen wir nun die Form einer brechenden Fläche, durch welche alle von einem Punkte S ausgehenden Strahlen in einem Punkte H vereinigt werden. Sind  $n$  und  $n'$  die Brechungsexponenten der Medien und ist in Fig. 68 P irgend ein Punkt der brechenden Fläche, so muss die Fläche der Gleichung

$$nSP + n'HP = c$$

genügen.

Diese Gleichung charakterisirt aber eine Rotationsfläche, deren Erzeugende ein Cartesianisches Oval mit den Brennpunkten S und H ist.

Als besonderen Fall nehmen wir an, dass die Strahlen parallel sind, so dass S in unendlicher Entfernung liegt. Man denke sich eine Ebene MX rechtwinklig durch die Strahlenrichtung gelegt (Fig. 69) und verlängere irgend einen Strahl bis zu seinem Schnittpunkt M mit jener Ebene. Es ist dann

$$nSP + n'HP = c.$$

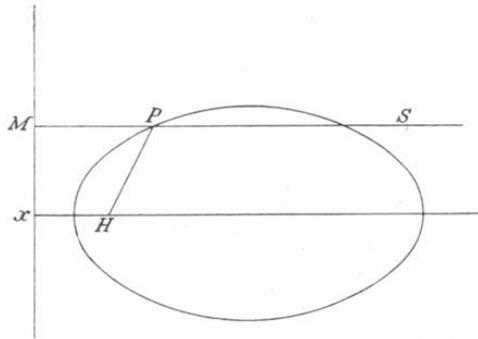


Fig. 69.

Es ist aber auch  $nSP + nPM$  konstant. Wählt man nun die Lage der Ebene MX so, dass diese konstante Grösse ebenfalls gleich  $c$  wird, so ist  $n'HP = nPM$ , d. h. die Fläche ist eine Rotationsfläche, deren Erzeugende ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkt H und der Direktrix MX ist und deren Rotationsaxe durch die grosse Axe des Kegelschnittes gebildet wird.

§ 91. Im Allgemeinen schneiden sich unendlich benachbarte Strahlen nicht. Fassen wir aber unendlich benachbarte Strahlen eines orthotomischen Systems, welche die rechtwinklig durch sie gelegte Fläche in Punkten einer Krümmungslinie treffen, ins Auge, so werden sich diese Strahlen schneiden und eine Kurve, die sogenannte Brennlinie, einhüllen.

Unendlich benachbarten Krümmungslinien desselben Systems entsprechen unendlich benachbarte Brennlinien und diese stellen in ihrer Gesamtheit eine Brennfläche dar, welche von jedem Strahl des Systems tangirt werden. Ebenso bestimmt die andere Gruppe von Krümmungslinien eine zweite Brennfläche. Jeder Strahl des Systems tangirt somit zwei Brennflächen.

Sind die Strahlen symmetrisch um eine Axe gruppirt, so ist die orthogonale Fläche eine Rotationsfläche. Die eine Gruppe von

Krümmungslinien bilden die Meridiankurven und die ihnen entsprechende Brennfläche entsteht geometrisch durch die Rotation der Evolute der Meridiankurve um die Symmetrieaxe. Die andere Gruppe von Krümmungslinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Diejenigen Strahlen, welche in Punkten einer dieser Kreislinien die orthogonale Fläche rechtwinklig durchschneiden, vereinigen sich in einem Punkte der Axe und bilden einen Rotationskegel. Es wird daher die zweite Brennfläche durch einen Theil der Symmetrieaxe dargestellt.

§ 92. Der Charakter eines begrenzten Strahlenbüschels ist in Figur 70 dargestellt;  $BAB'$  sei die orthogonale Fläche,  $F$  der Rückkehrpunkt der Brennlinie.

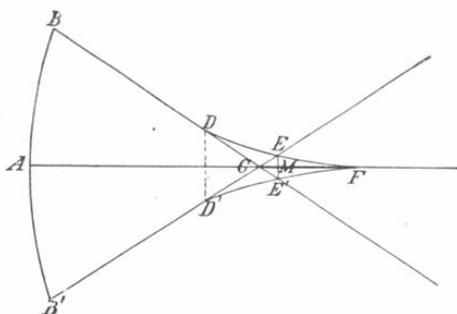


Fig. 70.

Wird das Strahlenbüschel von einem senkrecht zur Axe aufgestellten Schirm aufgefangen, so lässt sich die Form der Brennfläche feststellen, indem man, während man den Schirm von  $DD'$  nach  $F$  verschiebt, den hellen Lichtfleck auf dem Schirm beobachtet. In seiner Stellung bei  $DD'$  zeigt der Schirm einen kreisförmigen Lichtfleck, welcher von einem helleren Ring umgeben ist, und während man nun den Schirm von  $DD'$  nach  $F$  verschiebt, verengt sich allmählich dieser Ring. Sobald  $C$  erreicht ist, wird der andere Theil der Brennfläche sichtbar und ein heller Lichtpunkt zeigt sich in der Mitte des hellen Fleckes. Wenn die Stelle  $EE'$  erreicht ist, so hat der Lichtkreis seine geringste Ausdehnung; man nennt diesen Kreis den kleinsten Zerstreungskreis. Während der Verschiebung des Schirmes über diese Stelle hinaus erweitert sich die Peripherie des ganzen Lichtfleckes, während sich gleichzeitig der helle Ring verengt. Ueber  $F$  hinaus hören die Unterschiede in der Helligkeit des von dem Schirm aufgefangenen Lichtes auf.

§ 93. Trifft irgend ein Strahl  $BCE'$  die Axe in  $C$ , so bezeichnet man  $FC$  als die longitudinale Aberration dieses Strahles. In-

folge des symmetrischen Strahlenganges ist  $FC$  eine gerade Funktion der Neigung des Strahles zur  $Axe$  und, wenn das Strahlenbüschel ein enges ist, so können wir die longitudinale Aberration als dem Quadrat jener Neigung proportional ansehen. Bedeutet daher  $m$  die Tangente der Neigung des Strahles zur  $Axe$  und vernachlässigen wir die höheren Potenzen der kleinen Grösse  $m$ , so ist die longitudinale Aberration angenähert gegeben durch die Gleichung  $FC = cm^2$ . Nimmt man nun  $F$  als Koordinatenursprung und  $FA$  als die  $X$ - $Axe$  eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, so haben wir als Gleichung des Strahles:

$$y = m(x - cm^2). \quad (9)$$

Suchen wir die Umhüllungskurve zu dieser Linie auf, während wir  $m$  als einen variablen Parameter ansehen, so bildet diese die Brennlinie in der Nähe von  $F$ . Differentiiren wir (9) nach  $m$ , so ergibt sich

$$0 = x - 3cm^2,$$

und aus (9), wenn wir hierin  $m$  eliminiren:

$$27cy^2 = 4x^3. \quad (10)$$

als die Gleichung der Umhüllungskurve.

Die Brennlinie hat, wie uns diese Gleichung erkennen lässt, an ihrer Spitze die Gestalt einer semikubischen Parabel.

§ 94. Um die Grösse und Lage des kleinsten Zerstreungskreises zu finden, müssen wir den Schnittpunkt irgend eines Strahles mit dem äussersten Strahl bestimmen; lassen wir dann die Ordinate dieses Schnittpunktes ein Minimum werden, so finden wir damit die Lage und den Radius des gesuchten Kreises.

Der äusserste Kreis habe nach Analogie der Relation (9) die Gleichung:

$$y = kx - ck^2. \quad (11)$$

und irgend ein anderer Strahl, wie in (9), die Gleichung

$$y = mx - cm^2.$$

Eliminirt man mittelst dieser beiden Gleichungen  $x$ , so hat man

$$y(m - k) = cmk(m^2 - k^2),$$

hieraus

$$y = ck(m^2 + km),$$

oder

$$y = ck \left\{ \left( m + \frac{k}{2} \right)^2 - \frac{k^2}{4} \right\}.$$

Hieraus erkennen wir ohne Weiteres, dass  $y$  seinen kleinsten Werth erreicht, wenn  $m = -\frac{k}{2}$  wird, und als Radius des kleinsten Zerstreungskreises ergibt sich somit

$$y = -\frac{1}{4} ck^3 = -r. \quad \dots \dots \dots (12)$$

Als zugehöriger Werth von  $x$  ergibt sich aus (11)

$$x = \frac{3}{4} ck^2. \quad \dots \dots \dots (13)$$

Der Abstand des Mittelpunktes des kleinsten Aberrationskreises von dem Rückkehrpunkt der Brennkurve beträgt somit drei Viertel der Longitudinal-Aberration des äussersten Strahles.

Um die Lateral-Aberration des äussersten Strahles zu finden, haben wir nur in der Gleichung (11) für diesen Strahl  $x=0$  zu setzen und finden dann

$$y = -ck^3. \quad \dots \dots \dots (14)$$

*Der Radius des kleinsten Zerstreungskreises beträgt somit ein Viertel der Lateral-Aberration des äussersten Strahles.*

§ 95. Wenn nun ein Spiegel oder eine Linse, worin die Aberration nicht vollständig korrigirt worden ist, als Theil eines optischen Instrumentes auftritt, so werden, wie sich leicht aus der soeben gegebenen Untersuchung erkennen lässt, symmetrische Strahlenbüschel im Allgemeinen nicht in einem Punkte vereinigt, vielmehr stellt ein Schnitt eines solchen Strahlenbüschels eine kleine Kreisfläche dar. Soll ein möglichst scharfes Bild gewonnen werden, so muss dafür gesorgt werden, dass dieser Kreis möglichst klein wird; es muss mit anderen Worten der auffangende Schirm sich in der Ebene des kleinsten Aberrationskreises befinden. Das im mangelhaft korrigirten Instrument sichtbare Bild eines Objectes wird somit nicht deutlich sein; es besteht vielmehr aus einer Reihe kleiner, einander überdeckender kreisförmiger Lichtflecken. Dieser Uebelstand ist indessen nicht so gross, als man annehmen könnte; denn der kleinste Aberrationskreis ist nicht gleichmässig hell, sondern er hat seine grösste Helligkeit im Mittelpunkt und es nimmt diese nach dem Umfange zu sehr schnell ab; das Bild eines Punktes reducirt sich deshalb, schwaches einfallendes Licht vorausgesetzt, fast auf diesen Mittelpunkt selbst.

Um das Gesagte näher zu begründen, wollen wir einen einfachen Fall näherungsweise geometrisch untersuchen. Unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnungsweise wollen wir einen

Ausdruck für die Apertur des Strahlenbüschels an der orthogonalen Fläche finden. Ist  $\eta$  der Radius dieser Apertur und  $a$  die Abscisse des Scheitels dieser Fläche, so ist nach (11), wenn man hierin  $x = a$  und  $y = \eta$  setzt, angenähert

$$\eta = ka - ck^3,$$

und somit erhalten wir, da  $ck^3$  verschwindend klein im Vergleich zu  $ka$  ist, als Näherungswerth von  $\eta$

$$\eta = ka. \quad (15)$$

Der zugehörige Radius des kleinsten Aberrationskreises ist nach (12)

$$y = \frac{1}{4} ck^3. \quad (15a)$$

Betrachten wir nun die zwischen zwei Kreisen mit den Radien  $\eta$  und  $\eta + d\eta$  liegenden Strahlen. Die Fläche der durch diese Kreise abgegrenzten Zone ist  $2\pi\eta d\eta$ , diejenige der entsprechenden Zone auf dem auffangenden Schirm  $2\pi y dy$ . Vorausgesetzt nun, dass die von der orthogonalen Fläche ausgehende Lichtmenge proportional der Fläche der Zone auf jener Fläche ist, so wird die Helligkeit der kleinen Zone des kleinsten Aberrationskreises proportional sein dem Quotienten

$$\frac{2\pi\eta d\eta}{2\pi y dy} = \frac{\eta d\eta}{y dy},$$

d. h. nach (15) und (12)

$$\frac{a^2 k dk}{\frac{1}{4} ck^3 \cdot \frac{3}{4} ck^2 dk} \quad \text{oder} \quad \frac{16}{3} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{k^4}.$$

$y$  ist aber, wie wir gesehen haben,  $k^3$  proportional, und somit ist die Helligkeit des kleinsten Aberrationskreises umgekehrt proportional  $y^{4/3}$ ; sie nimmt also vom Mittelpunkt nach dem Umfange ab.

Diese letztere Untersuchung ist zwar nur näherungsweise richtig, sie genügt aber immerhin, um eine Erklärung dafür zu liefern, warum Bilder auch dann noch ihre Deutlichkeit behalten, wenn ein kleiner Aberrationsfehler vorhanden ist.

§ 96. Untersuchen wir jetzt für einige einfache Fälle die Gleichungen und Eigenschaften der Brennlinien für Strahlengruppen, welche von einem Punkte ausgehen und von einer Fläche reflektirt oder gebrochen werden!

Eine Gleichung der Brennlinie für die Reflexion von einem leuchtenden Punkte ausgehender Strahlen an einem Kreise entwickelte Lagrange in folgender Weise:

Ist C der leuchtende Punkt und AOB der durch C gehende Durchmesser des reflektirenden Kreises (Fig. 71), so wird irgend ein auf den Kreis in P auffallender Strahl CP in die Richtung PQ reflektirt, derart, dass CP und PQ mit dem Radius OP gleiche Winkel einschliessen. Bezeichnet man den Winkel AOP mit  $\alpha$ , setzt  $OC = c = \frac{1}{p}$  und  $OA = a = \frac{1}{k}$ , so lassen sich die Gleichungen des einfallenden und reflektirten Strahles in Polarkoordinaten folgendermaassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} = u = A \cos \theta + B \sin \theta & \text{ für CP,} \\ \frac{1}{r} = u = A \cos \theta' + B \sin \theta', & \\ \text{oder} & \\ \frac{1}{r} = u = A \cos (2\alpha - \theta) + B \sin (2\alpha - \theta) & \end{aligned} \right\} \text{ für PQ.}$$

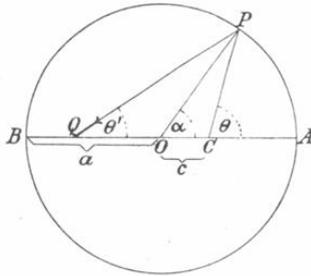


Fig. 71.

Denn schliessen zwei Leitstrahlen mit PO gleiche Winkel ein, so ist die Summe ihrer Polarwinkel  $\theta + \theta' = 2\alpha$  und es sind somit die durch die beiden letzten Gleichungen gegebenen zusammengehörigen Werthe von  $u$  einander gleich. Die Konstanten A und B bestimmen sich durch die Bedingung, dass der Einfallstrahl durch die Punkte C und P hindurchgeht. Setzt man daher beziehungsweise  $\theta = 0$  und  $\theta = \alpha$ , so ergibt sich aus der Gleichung für CP:

$$\frac{1}{c} = p = A,$$

$$\frac{1}{a} = k = A \cos \alpha + B \sin \alpha.$$

Setzen wir die hieraus sich ergebenden Werthe von A und B in die Gleichung des reflektirten Strahles ein, so erhalten wir

$$u \sin \alpha = k \sin (2\alpha - \theta) - p \sin (\alpha - \theta).$$

Setzen wir noch  $2\alpha - \theta = 2\phi$ , so dass  $\alpha = \phi + \frac{\theta}{2}$ , so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$u \sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) + p \sin\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right) = k \sin 2\phi;$$

$$\frac{(u+p) \cos \frac{\theta}{2} \sin \phi + (u-p) \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi}{2k \sin \phi \cos \phi} = 1;$$

$$\frac{(u+p) \cos \frac{\theta}{2}}{2k \cos \phi} + \frac{(u-p) \sin \frac{\theta}{2}}{2k \sin \phi} = 1,$$

oder, wenn man sich der beiden Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{(u+p) \cos \frac{\theta}{2}}{2k} \\ Q &= \frac{(u-p) \sin \frac{\theta}{2}}{2k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16a)$$

bedient, so ist schliesslich

$$\frac{P}{\cos \phi} + \frac{Q}{\sin \phi} = 1. \dots \dots \dots (16)$$

Der willkürliche Parameter  $\alpha$  erscheint in dieser Gleichung nur als in  $\phi$  enthalten. Um daher die Einhüllende des reflektirten Strahles zu finden, differentiiren wir (16) nach  $\phi$  und setzen den ersten Differentialquotienten gleich 0, woraus sich ergibt

$$\frac{P \sin \phi}{\cos^2 \phi} - \frac{Q \cos \phi}{\sin^2 \phi} = 0,$$

und hieraus

$$\frac{P}{\cos^3 \phi} = \frac{Q}{\sin^3 \phi} = \lambda.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von P und Q, nämlich  $P = \lambda \cos^3 \phi$  und  $Q = \lambda \sin^3 \phi$ , in (16) ein, so wird  $\lambda = 1$  und man hat somit

$$\frac{P}{\cos^3 \phi} = \frac{Q}{\sin^3 \phi} = 1.$$

Eliminirt man  $\phi$ , indem man die aus dieser Relation sich ergebenden Werthe  $\cos \phi = P^{1/3}$  und  $\sin \phi = Q^{1/3}$  in (16) einsetzt, so erhält man die Beziehung

$$P^{2/3} + Q^{2/3} = 1. \dots \dots \dots (17)$$

In Parallelkoordinaten ausgedrückt, heisst das nach (16a)

$$\left\{ (u+p) \cos \frac{\theta}{2} \right\}^{2/3} + \left\{ (u-p) \sin \frac{\theta}{2} \right\}^{2/3} = (2k)^{2/3}.$$

Um die irrationale Gleichung (17) auf eine rationale Form zu bringen, erheben wir beide Seiten der Gleichung in die dritte Potenz; sie erhält dann die Form

$$P^2 + Q^2 + 3 P^{2/3} Q^{2/3} (P^{2/3} + Q^{2/3}) = 1,$$

oder

$$1 - P^2 - Q^2 = 3 P^{2/3} Q^{2/3}.$$

Erheben wir diese Gleichung abermals in die dritte Potenz, so erhalten wir schliesslich

$$(1 - P^2 - Q^2)^3 = 27 P^2 Q^2. \dots \dots \dots (18)$$

Nach einer einfachen Transformation lässt sich diese Gleichung auch durch Parallelkoordinaten ausdrücken. Es ist nämlich nach (16a), da

$$\frac{1}{p} = c,$$

und

$$\frac{1}{r} = u,$$

und

$$a = \frac{1}{k}$$

ist,

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{a}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{c} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ Q &= \frac{a}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right) \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

und somit

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{rc} \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \right\}, \\ &= \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{rc} \cos \theta \right\}, \\ &= \frac{a^2}{4 c^2 r^2} \left\{ c^2 + r^2 + 2 c (r \cos \theta) \right\}, \end{aligned}$$

oder

$$P^2 + Q^2 = \frac{a^2}{4 c^2 r^2} \left\{ r^2 + c^2 + 2 c x \right\}. \dots \dots \dots (20)$$

Ferner folgt aus (19) durch Multiplikation der Werthe von P und Q

$$PQ = \frac{a^2}{8r^2c^2}(c^2 - r^2) \sin \theta$$

oder

$$PQ = \frac{a^2}{8r^2c^2}(c^2 - r^2)y. \dots \dots \dots (21)$$

Wir erhalten somit nach (18), (20) und (21) als Gleichung der Brennlinie

$$\left\{ (4c^2 - a^2)r^2 - 2a^2cx - a^2c^2 \right\}^3 = 27a^4c^2(c^2 - r^2)^2y^2$$

oder

$$\left\{ (4c^2 - a^2)(x^2 + y^2) - 2a^2cx - a^2c^2 \right\}^3 = 27a^4c^2y^2(x^2 + y^2 - c^2)^2. \quad (22)$$

§ 97. Setzen wir in die Gleichung für die Brennlinie (18)  $\theta = 0$  und somit nach (16a)  $Q = 0$  und  $P = \frac{u+p}{2k}$ , so wird jene

$$(1 - P^2)^3 = 0,$$

und hieraus ergibt sich  $P = 1$  oder

$$u + p = \pm 2k \dots \dots \dots (23)$$

und es stellt jeder dieser Punkte einen dreifachen Punkt dar. Durch  $a$  und  $c$  ausgedrückt, erhält man hieraus, wenn man für  $u$ ,  $p$  und  $k$  ihre betreffenden Werthe  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{c}$  und  $\frac{1}{a}$  einsetzt, als Werthe für die Abstände dieser Punkte von dem Mittelpunkte des Kreises

$$r = \frac{ac}{2c - a} \quad \text{und} \quad r = -\frac{ac}{2c - a}. \dots \dots \dots (24)$$

Diese Ausdrücke bestimmen die Lage der Kuspidalpunkte der Katakaustik.

Wollen wir indessen die Schnittpunkte der Katakaustik mit dem Kreise, für welchen die Relation  $u = p$  gilt, bestimmen, so erhalten wir, da nach (16a) für diesen Fall  $Q = 0$  und  $P = \frac{p}{k} \cos \frac{\theta}{2}$ , als Gleichung der Katakaustik nach (18):

$$(1 - P^2)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad P = 1$$

und hieraus

oder

$$\left. \begin{aligned} p \cos \frac{\theta}{2} &= \pm k \\ a \cos \frac{\theta}{2} &= \pm c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Jeder der hierdurch bestimmten Punkte ist ein dreifacher Punkt, der reflektirte Strahl tangirt daher den Kreis  $r=c$  und der zugehörige Einfallstrahl steht senkrecht zu OC. Diese dreifachen Punkte sind Kuspidalpunkte und die durch die Spitze gelegte Tangente zur Kurve steht senkrecht zum Radiusvektor; sie werden imaginär, sobald  $c$  grösser als  $a$  wird, d. h. wenn der leuchtende Punkt sich ausserhalb des kreisförmigen Reflektors befindet.

§ 98. Um die Richtungen der Asymptoten zu bestimmen, lassen wir in der Gleichung der Kurve  $u=0$  werden. Die Werthe von P und Q sind dann nach (16a)

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} P &= \frac{p}{2k} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{2c} \cos \frac{\theta}{2} \\ Q &= -\frac{p}{2k} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{a}{2c} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

und aus der Gleichung (18) für die Katakaustik ergibt sich dann unter Einsetzung dieser Werthe von P und Q die folgende Gleichung:

$$\left(1 - \frac{a^2}{4c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{a^2}{4c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^3 = 27 \frac{a^4}{16c^4} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2$$

oder

$$\left(1 - \frac{a^2}{4c^2}\right)^3 = 27 \frac{a^4}{64c^4} \sin^2 \theta,$$

und endlich

$$27 a^4 c^2 \sin^2 \theta = (4c^2 - a^2)^3 \dots \dots \dots (27)$$

Diese Gleichung charakterisirt die Richtung der Asymptoten und zeigt, dass sie imaginär werden, wenn  $c$  kleiner als  $\frac{a}{2}$  ist.

Wir wollen nun die Länge des von dem Ursprunge aus auf sie errichteten Lothes bestimmen. Differentiiren wir die Gleichung (17), d. h. also die Gleichung

$$\left\{ \frac{(u+p) \cos \frac{\theta}{2}}{2k} \right\}^{2/3} + \left\{ \frac{(u-p) \sin \frac{\theta}{2}}{2k} \right\}^{2/3} = 1,$$

setzen dann  $u=0$  und dividieren durch gemeinsame Faktoren, so erhalten wir

$$\frac{1}{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{1/3}} \left\{ \frac{du}{d\theta} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{p}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right\} - \\ - \frac{1}{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{1/3}} \left\{ \frac{du}{d\theta} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{p}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right\} = 0.$$

Hieraus entsteht durch Reduktion:

$$\frac{du}{d\theta} \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} \left\{ \cos^{2/3} \frac{\theta}{2} - \sin^{2/3} \frac{\theta}{2} \right\} + \\ + \frac{p}{2} \left\{ \cos^{4/3} \frac{\theta}{2} - \sin^{4/3} \frac{\theta}{2} \right\} = 0$$

oder

$$\frac{du}{d\theta} \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^{1/3} = - \frac{p}{2} \left( \cos^{2/3} \frac{\theta}{2} + \sin^{2/3} \frac{\theta}{2} \right), \\ = - \frac{1}{2c} \left( \cos^{2/3} \frac{\theta}{2} + \sin^{2/3} \frac{\theta}{2} \right), \\ = - \frac{1}{2c} \left( \frac{2c}{a} \right)^{2/3} \left\{ \left( \frac{a}{2c} \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2/3} + \left( \frac{a}{2c} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\},$$

oder nach (26)

$$= - \frac{1}{2c} \left( \frac{2c}{a} \right)^{2/3} \left\{ P^{2/3} + Q^{2/3} \right\},$$

und nach (17)

$$= - \frac{1}{2c} \left( \frac{2c}{a} \right)^{2/3}.$$

Somit ist

$$\frac{du}{d\theta} (\sin \theta)^{1/3} = - \frac{1}{c} \left( \frac{c}{a} \right)^{2/3},$$

und hieraus folgt aus (27)

$$\frac{du}{d\theta} \sqrt{\frac{4c^2 - a^2}{3}} = -1.$$

Bezeichnen wir die Länge des Lothes von dem Mittelpunkte auf die Asymptote mit  $\chi$ , so haben wir demnach

$$z = \sqrt{\frac{4c^2 - a^2}{3}} \dots \dots \dots (28)$$

Diese Asymptoten werden imaginär, sobald  $c$  kleiner als  $\frac{a}{2}$  wird, und sie fallen mit der X-Axe zusammen, wenn  $c = \frac{a}{2}$  wird.

§ 99. Wir gehen nun über zur Bestimmung der Schnittpunkte der Katakaustik und des reflektirenden Kreises. Dieser Untersuchung legen wir zweckmässigerweise das Cartesianische Koordinatensystem zu Grunde. Substituieren wir in der Gleichung (22) für die Katakaustik  $a^2$  für  $x^2 + y^2$ , so erhält dieselbe die Form:

$$(3a^2c^2 - a^4 - 2a^2cx)^3 = 27a^4c^2(a^2 - c^2)^2(a^2 - x^2)$$

oder nach gehöriger Erweiterung und Division durch  $a^4$ ,

$$8a^2c^3x^3 - c^2x^2(15a^4 - 18a^2c^2 - 27c^4) + 6cx(3c^2 - a^2)^2 + a^8 + 18a^6c^2 - 27a^4c^4 = 0$$

oder schliesslich

$$(cx - a^2)^2 \{8a^2cx + a^4 + 18a^2c^2 - 27c^4\} = 0. \dots \dots (29)$$

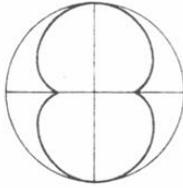
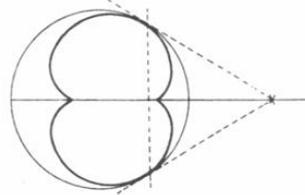
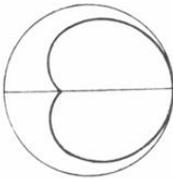
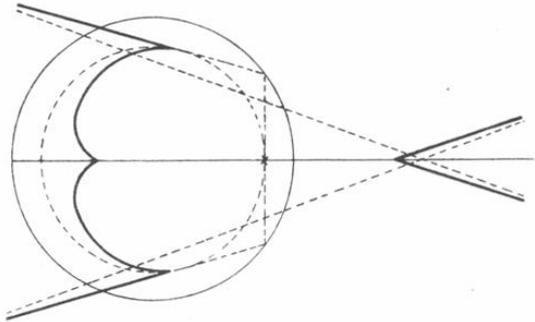
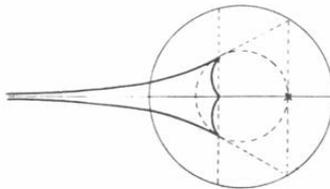
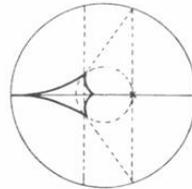
Die Katakaustik berührt somit den reflektirenden Kreis in Punkten, welche durch die Gleichung  $cx = a^2$  bestimmt sind; es sind dies die Berührungspunkte der durch den ausserhalb des reflektirenden Kreises liegenden leuchtenden Punkt an den reflektirenden Kreis gelegten Tangenten. Diese Berührungspunkte werden imaginär, wenn der leuchtende Punkt innerhalb des reflektirenden Kreises liegt. Der andere Schnittpunkt ist bestimmt durch die aus (29) sich ergebende Gleichung

$$x = \frac{27c^4 - 18a^2c^2 - a^4}{8a^2c}.$$

Dieser Werth von  $x$  ist numerisch kleiner oder grösser als  $a$ , je nachdem  $c$  grösser oder kleiner als  $a$  ist, d. h. je nachdem der leuchtende Punkt ausserhalb oder innerhalb des reflektirenden Kreises liegt.

In den folgenden Figuren ist die den verschiedenen Lagen des leuchtenden Punktes entsprechende Form der Brennkurven dargestellt. In Fig. 72 ist für das einfallende Strahlenbüschel paralleler Strahlengang vorausgesetzt; die anderen Figuren zeigen, in welcher

Weise sich die Gestalt der Katakaustik während einer allmählichen Annäherung des leuchtenden Punktes an den Mittelpunkt des Kreises ändert.

Fig. 72.  $c = \infty$ .Fig. 73.  $c > a$ .Fig. 74.  $c = a$ .Fig. 75.  $c < a < \frac{a}{2}$ .Fig. 76.  $c = \frac{a}{2}$ .Fig. 77.  $c = \frac{a}{3}$ .

§ 100. Die Katakaustik für den Kreis lässt sich in zwei Fällen auch auf elementar-geometrischem Wege bestimmen; erstens nämlich, wenn die Einfallstrahlen parallel sind; zweitens wenn sie von einem Punkte des Kreisumfanges ausgehen.

Wenn die Einfallsstrahlen parallel sind, ist die Katakaustik eine durch Rollen eines Kreises auf einem anderen vom doppelten Radius des ersteren erzeugte Epicycloide.

Zieht man nämlich, wie in Fig. 78 dargestellt, vom Mittelpunkte C des reflektirenden Kreises den Radius CA parallel zur Richtung des einfallenden Strahles, so ist die Katakaustik in Bezug auf CA symmetrisch. Ist SP irgend ein einfallender Strahl, welcher im Punkte P vom Kreise in die Richtung PQ reflektirt wird, und verbindet man C mit P, so muss nach dem Reflexionsgesetz PC den Winkel SPQ halbiren. Um C als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit einem Radius, welcher halb so gross ist wie der Radius des gegebenen Kreises; es wird dieser dann die Radien CA und CP in B resp. R halbiren. Ueber PR als Durchmesser beschreibe man einen zweiten Kreis, welcher den reflektirten Strahl in Q schneiden möge; man verbinde Q mit R. Da SP parallel CB ist, so ist der Winkel SPC gleich dem Winkel PCB und mithin auch Winkel QPR gleich dem Winkel PCB. Der Peripheriewinkel QPR steht auf dem Kreisbogen QR und der Centriwinkel RCB auf dem Kreisbogen BR; da aber der zweite Kreis einen doppelt so grossen Radius hat, wie der erste, so ist der Bogen QR gleich dem Bogen RB, und lässt man den Kreis PQR auf dem Kreise RB sich abrollen, so müssen schliesslich die Punkte Q und B zusammenfallen. In dem Augenblick nun, wo Q anfängt, sich zu bewegen, kann man den Berührungspunkt der beiden Kreise als momentan festliegend ansehen, so dass die Bewegung von Q in einer zu QR senkrechten Richtung erfolgt; es stellt somit der reflektirte Strahl PQ eine Tangente an die von Q durchlaufene Bahn dar. Diese Betrachtung gilt aber für jede Lage des Punktes P. Der geometrische Ort von Q ist also eine Epicycloide und diese ist daher die gesuchte Katakaustik.

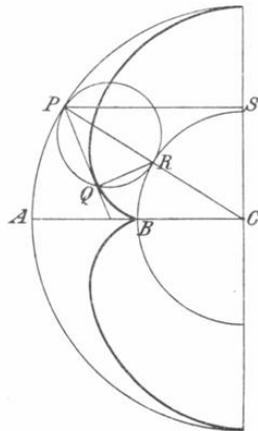


Fig. 78.

§ 101. Gehen die Einfallsstrahlen von einem Punkte des Umfanges des reflektirenden Kreises aus, so stellt die Katakaustik eine Kardioide dar, oder in anderen Worten, die Katakaustik hat die Form einer Epicycloide, deren Rollkreis ebenso gross ist wie der unbewegliche Kreis.

Ist in Fig. 79 O der Ausgangspunkt des Einfallsstrahles und OCA der Durchmesser des reflektirenden Kreises, so ist die Katakaustik in Bezug auf OCA symmetrisch. Ist OP irgend ein Einfallsstrahl,

welcher von  $P$  aus durch den Kreis in die Richtung  $PQ$  reflektirt wird, und verbindet man  $C$  mit  $P$ , so ist nach dem Reflexionsgesetz  $CP$  die Halbierungslinie des Winkels  $OPQ$ . Um  $C$  als Mittelpunkt und mit einem Radius, welcher ein Drittel des Radius des gegebenen reflektirenden Kreises beträgt, beschreibe man einen Kreis, welcher  $CA$  und  $CP$  in  $B$  resp.  $R$  schneiden möge; über  $PR$  als Durchmesser beschreibe man einen zweiten Kreis, welcher den reflektirenden Kreis in  $Q$  schneide, und verbinde  $Q$  mit  $R$ . Die Radien der beiden kleineren Kreise sind nach der Konstruktion einander gleich. Da nun das Dreieck  $CPO$  ein gleichschenkliges ist, so ist der Aussenwinkel  $PCB$  doppelt so gross wie der Winkel  $CPO$ , also auch doppelt so gross wie der Winkel  $QPR$ . Es stehen somit auf den Bogen  $RB$  und  $QR$  gleichgrosse Centriwinkel gleichgrosser Kreise und es müssen

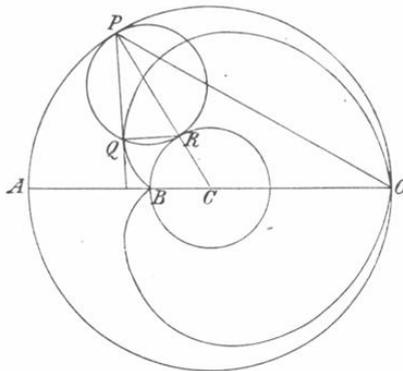


Fig. 79.

daher diese Bögen einander gleich sein. Lässt man nun den Kreis  $PQR$  auf dem Kreis  $RB$  sich abrollen, so müssen die Punkte  $Q$  und  $B$  zur Deckung gelangen. In dem Augenblicke nun, wo der Kreis  $PQR$  zu rollen beginnt, hat man den Berührungspunkt  $R$  als momentan feststehend anzusehen und  $Q$  erfährt daher eine Verschiebung in der zu  $QR$  senkrechten Richtung  $PQ$ . Hieraus folgt, dass der reflektirte Strahl die von dem Punkte  $Q$  beschriebene Kurve berührt. Dies gilt aber für jede beliebige Lage von  $P$ . Der geometrische Ort von  $Q$  ist also eine Kardioiden und es stellt diese somit die gesuchte Katacaustik dar.

§ 102. Es giebt zwei Fälle, in welchen wir unschwer die Katacaustik für einen an einem Kreise beliebig oft reflektirten Strahl bestimmen können; es sind dies die beiden Fälle, wo die Strahlen parallel einfallen oder von einem Punkt des Kreisumfanges divergiren.

Angenommen  $G_0G_1$  (Fig. 80) sei der Weg des erstmals von einem Punkt des Kreisumfanges nach einem anderen Punkt des-

selben reflektirten Strahles, und es schliesse diese Richtung mit der positiven Richtung der X-Axe einen Winkel  $\psi_0$  ein, und Winkel  $G_0OX$  sei mit  $\theta_0$  bezeichnet.  $\theta$  und  $\psi$  seien die entsprechenden zuzusammengehörigen Winkel für die  $m$ te Reflexion. Als Gleichung dieses  $m$ ten Strahles haben wir dann, wenn  $c$  der Radius des Kreises ist,

$$y = Rx + q,$$

$$= x \operatorname{tg} \psi + (c \sin \theta - c \cos \theta \operatorname{tg} \psi)$$

oder

$$y - c \sin \theta = \operatorname{tg} \psi (x - c \cos \theta)$$

und hieraus

$$y \cos \psi - x \sin \psi + c \sin (\psi - \theta) = 0.$$

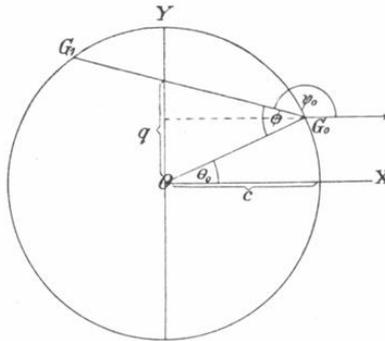


Fig. 80.

Bezeichnet man ferner den Winkel  $OG_0G_1$  mit  $\Phi$ , so ist

$$\theta = \theta_0 + m(\pi - 2\Phi) = \theta_0 + m\pi - 2m\Phi,$$

und

$$\psi = \psi_0 + m(2\pi - 2\Phi) = \psi_0 + 2m\pi - 2m\Phi.$$

Hiernach wird die Gleichung für den  $m$ ten reflektirten Strahl

$$x \sin (\psi_0 - 2m\Phi) - y \cos (\psi_0 - 2m\Phi) = c \sin (\psi_0 - \theta_0 + m\pi) =$$

$$= (-1)^m c \sin (\psi_0 - \theta_0). \dots \dots \dots (30)$$

Fallen die Strahlen parallel zur X-Axe ein, so setzen wir in der letzten Gleichung  $\theta_0 = \Phi$  und  $\psi_0 = \pi$  und diese erhält dann die Form:

$$x \sin 2m\Phi + y \cos 2m\Phi = (-1)^m c \sin \Phi. \dots \dots (31)$$

Um die Einhüllende dieser Linien zu bestimmen, differentiren wir die Gleichung in Bezug auf den Parameter  $\Phi$  und erhalten hierbei die Gleichung:

$$x \cos 2m\Phi - y \sin 2m\Phi = (-1)^m \frac{1}{2m} c \cos \Phi. \quad (31a)$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung des Strahles kennzeichnet die Gestalt der Katakauistik.

Lösen wir die Gleichung nach  $x$  und  $y$  auf, so ist jeder Punkt der Kurve bestimmt durch die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= (-1)^m \frac{c}{4m} \left\{ (2m+1) \cos(2m-1)\Phi - (2m-1) \cos(2m+1)\Phi \right\} \\ y &= (-1)^m \frac{c}{4m} \left\{ -(2m+1) \sin(2m-1)\Phi + (2m-1) \sin(2m+1)\Phi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (31b)$$

Die Gleichung aber einer Epicykloide, für welche der feste Kreis den Radius  $a$ , der rollende den Radius  $b$  hat, ist

$$\left. \begin{aligned} x &= (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b} \theta \\ y &= (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b} \theta \end{aligned} \right\} \quad (31c)$$

Beide Gleichungspaare (31b) und (31c) lassen sich auf dieselbe Form bringen, wenn man  $-(2m-1)\Phi$  an Stelle von  $\theta$  setzt. Um ferner die Identität der Gleichungspaare zu vervollständigen, müssen wir haben

$$a + b = c \frac{2m+1}{4m},$$

$$b = c \frac{2m-1}{4m},$$

somit

$$a = c \frac{1}{2m}.$$

Die Katakauistik ist somit eine Epicykloide.

Ist  $m$  eine gerade Zahl, so liegt der Rückkehrpunkt auf der X-Axe und zwar auf der positiven Seite des Ursprunges. Ist  $m$  dagegen eine ungerade Zahl, so hat man die Vorzeichen von  $x$  und  $y$  zu vertauschen; die Epicykloidenspitze zeigt dann nach der entgegengesetzten Richtung und zwar liegt nun der Rückkehrpunkt auf der negativen Seite des Koordinatenursprunges.

§ 103. Nehmen wir ferner an, die Strahlen divergieren von dem Punkte A des Kreisumfanges, so ist  $\theta_0 = 0$  und  $\psi_0 = \pi - \Phi$ , und die Gleichung des reflektirten Strahles wird dann nach (30)

$$x \sin(2m+1)\Phi + y \cos(2m+1)\Phi = (-1)^m c \sin \Phi.$$

Die Einhüllende dieser Linie bestimmen wir wieder durch Differentiation der Gleichung nach dem variablen Parameter  $\Phi$ . Wir erhalten dann als Gleichung der Einhüllenden:

$$x \cos (2 m + 1) \Phi - y \sin (2 m + 1) \Phi = (-1)^m \frac{1}{2 m + 1} c \cos \Phi;$$

und aus beiden Gleichungen ergeben sich für die Koordinaten der Kurvenpunkte folgende Werthe:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(-1)^m c}{2 m + 1} \left\{ (m + 1) \cos 2 m \Phi - m \cos (2 m + 2) \Phi \right\} \\ y &= \frac{(-1)^m c}{2 m + 1} \left\{ -(m + 1) \sin 2 m \Phi + m \sin (2 m + 2) \Phi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Diese Gleichungen charakterisiren wiederum eine Epicykloide, deren fester und rollender Kreis beziehungsweise die Radien haben

$$a = \frac{c}{2 m + 1}, \quad b = \frac{m}{2 m + 1} c.$$

Ist  $m$  eine gerade Zahl, so liegt der Rückkehrpunkt auf der positiven Seite des Koordinatenursprunges, ist  $m$  dagegen eine ungerade Zahl, so liegt er auf der negativen Seite des Ursprunges.

In dem Falle, wo  $m = 1$  ist, werden die Werthe von  $a$  und  $b$  einander gleich und die Epicykloide wird zur Kardioide.

§ 104. Im Allgemeinen sind, wie wir gesehen haben, die reflektirten und gebrochenen Strahlen die Normalen einer Kurvenschaar, welche man auch als sekundäre Brennlinien bezeichnet. Zu einer jeden dieser Kurven stehen die reflektirten und gebrochenen Strahlen lothrecht; es ist somit die Brennlinie die Evolute der Kurvenschaar. Die sekundäre Brennlinie lässt sich in der Regel leichter bestimmen als die Brennlinie selber; so ist z. B. die sekundäre Brennlinie für Strahlen, welche an einer geraden Linie gebrochen werden, eine Ellipse, und für an einem Kreise gebrochene Strahlen ein Cartesianisches Oval.

Die sekundären Brennlinien für Strahlen, welche von einem Punkte ausgehen und von einer Kurve reflektirt oder gebrochen werden, lassen sich sehr bequem graphisch bestimmen.

Ist PT in Fig. 81 die Tangente in irgend einem Punkte einer Kurve und S der leuchtende Punkt, so ziehe man ST senkrecht zur Tangente und mache die Verlängerung dieser Senkrechten TR = ST. Man verbinde ferner S mit P und R mit P und verlängere RP nach Q hin. SP und PQ stellen dann beziehungsweise den bei P einfallen-

den und reflektirten Strahl dar. Da ferner  $SP=PR$ , so ist der geometrische Ort von R die durch die Gleichung

$$e + e' = 0$$

bestimmte orthotomische Fläche.

Der geometrische Ort des Punktes R ist eine der Fusspunktlinie der reflektirenden Kurve ähnliche Kurve von doppelter linearer Ausdehnung. Die Evolute dieser Kurve ist die gesuchte Brennlinie.

In dem Falle eines Kreises lässt sich die Gleichung des geometrischen Ortes von R in der Form  $r = 2(a - c \cos \theta)$  ausdrücken, wo  $a$  der Radius des Kreises und  $c$  der Abstand des leuchtenden Punktes von dem Mittelpunkte des Kreises ist; für einen reflektirenden Kreis ist somit die Brennlinie die Evolute einer „Limaçon“ (Fig. 82).

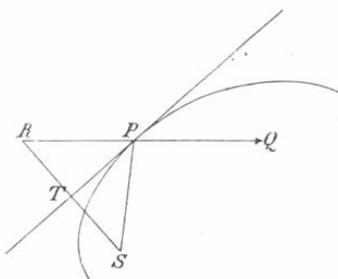


Fig. 81.

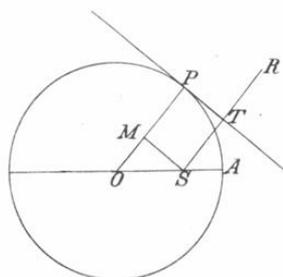


Fig. 82.

§ 105. Um auf ähnliche Weise die Brennlinie für die Brechung an einer Kurve graphisch zu bestimmen, liefert uns die durch die Gleichung

$$n \rho + n' \rho' = 0$$

bestimmte orthotomische Kurve ein bequemes Mittel.

Diese Kurve lässt sich in einfacher Weise folgendermaassen konstruiren (Fig. 83):

Um irgend einen Punkt der brechenden Kurve als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis vom Radius  $\rho'$ , so dass  $n' \rho' = n \rho$  und  $\rho = SP$ ; es ist dann die Einhüllende dieser Kreise für verschiedene Lagen des Punktes P die gesuchte orthotomische Kurve.

Wir werden im Folgenden einige geometrische Untersuchungen der durch Brechung an einer Linie und am Kreise hervorgerufenen Brennlinien ausführen.

§ 106. Bestimmung der Brennlinie für die Brechung an einer geraden Linie für Strahlen, welche von einem Punkte ausgehen.

In Fig. 84 sei S der leuchtende Punkt. Man ziehe SC senkrecht zur brechenden Linie und verlängere diese Senkrechte bis H, derart, dass  $SC = CH$  ist. SQ sei ein beliebiger Einfallstrahl, QR der zugehörige gebrochene Strahl. Um das Dreieck SHQ beschreibe man einen Kreis, welcher QR in P schneiden möge; PQ halbirt dann den Winkel SPH, da Bogen  $SQ = QH$  ist.  $i$  sei der Einfallswinkel,  $i'$  der Brechungswinkel bei Q; es ist dann  $\angle POS = i'$  und  $i = \angle HSQ = \angle HPQ = \angle SPQ$ . Mithin

$$SO : SP = \sin i : \sin i',$$

und daher

$$nSO = n'SP.$$

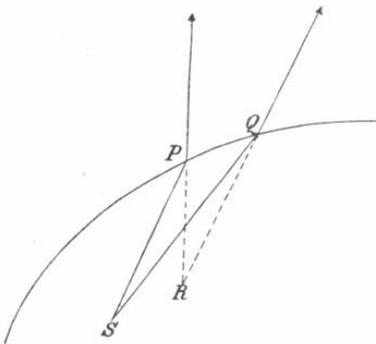


Fig. 83.

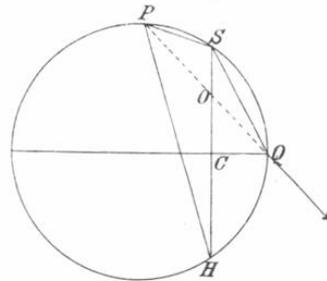


Fig. 84.

Da aber der Winkel bei P halbirt ist, so besteht die Proportion

$$HO : HP = SO : SP,$$

mithin ist

$$nHO = n'HP.$$

Da aber

$$nSO = n'SP,$$

so ergibt sich aus der Addition beider Relationen

$$nSH = n'(SP + HP).$$

Der geometrische Ort von P ist somit eine Ellipse mit den Brennpunkten S und H; PQ ist eine Normale zur Ellipse und daher die Ellipse eine orthotomische Kurve. Die Evolute dieser Ellipse ist die gesuchte Brennlinie.

Ist das zweite Medium stärker brechend als das erstere, so erscheint, wie sich durch eine analoge Untersuchung nachweisen lässt, die Brennlinie als die Evolute einer Hyperbel mit den Brennpunkten S und H.

§ 107. *Bestimmung der Brennpunktlinie für die Brechung am Kreise für Strahlen, welche von einem Punkte ausgehen.* O sei in Fig. 85 der Mittelpunkt des brechenden Kreises, S der lichteussende Punkt, SQ ein einfallender, QR der zugehörige gebrochene Strahl. Man beschreibe durch S einen Kreis, welcher den Radius OQ in Q tangiert, und welcher OS in H, den gebrochenen Strahl QR in P schneidet. Es ist dann  $OH \cdot OS = OQ^2$  und somit H ein festliegender Punkt. Ferner folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OQS und OHQ, dass  $QS : HQ = OS : OQ$ , und somit  $\frac{QS}{HQ}$  ein konstantes Verhältnis darstellt.  $i$  sei der Einfallswinkel,  $i'$  der Brechungswinkel. Verlängert man OQ nach T hin, so ist  $i = \angle SQT = \angle QPS$ ; und analog ist  $i' = \angle PQT = \angle QHP = \angle \pi - QSP$ .

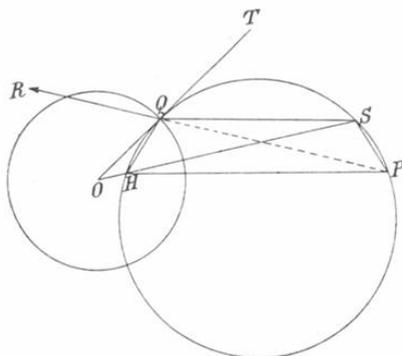


Fig. 85.

In dem Dreiecke QSP ist

$$\frac{QS}{QP} = \frac{\sin QPS}{\sin QSP} = \frac{\sin i}{\sin i'},$$

welches ein konstantes Verhältnis darstellt; und somit ist auch  $\frac{QH}{QP}$  ein konstantes Verhältnis, da nach Obigem  $\frac{QS}{QH}$  konstant ist.

Nun ist nach einem bekannten Satze

$$QH \cdot SP + QS \cdot PH = SH \cdot QP,$$

und setzt man daher  $SP = \rho$ ,  $PH = \rho'$ , so ist

$$\frac{QH}{QP} \rho + \frac{QS}{QP} \rho' = SH,$$

oder, wenn man  $\frac{QH}{QP} = m$ ,  $\frac{QS}{QP} = m'$  und  $SH = c$  setzt,

$$m \rho + m' \rho' = c.$$

Der geometrische Ort von P ist somit ein Cartesianisches Oval mit den Brennpunkten S und H. Da ferner PQ den Winkel zwischen den Leitstrahlen in zwei Theile theilt, deren Sinus in dem Verhältnis der Sehnen QS und QH stehen, d. h. in dem Verhältnis  $m' : m$ , so ist PQ eine Normale zur Kurve. Die Diakastik ist somit die Evolute eines Cartesianischen Ovals mit den Brennpunkten S und H.

§ 108. Diese Konstruktion wird in dem Falle unmöglich, wenn die Strahlen parallel sind. Die Gleichung der Brennlinie lässt sich indessen in diesem Falle nach einer anderen Methode analytisch bestimmen.  $i$  und  $i'$  seien Einfallswinkel für irgend

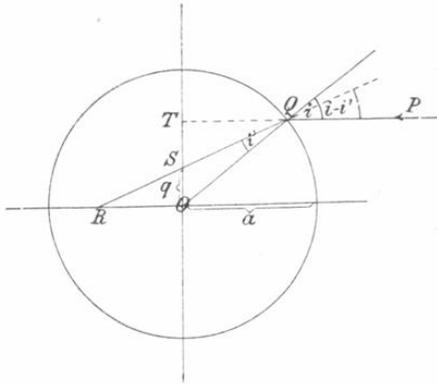


Fig. 86.

einen zur X-Axe parallel einfallenden Strahl, so dass  $\sin i' = k \sin i$ , wenn  $k = \frac{n}{n'}$ . Nehmen wir dann den Mittelpunkt des Kreises als Koordinatenursprung an, so finden wir als Gleichung des gebrochenen Strahles unter Bezugnahme auf Fig. 86:

$$y = (\operatorname{tg} \alpha) x + q,$$

oder

$$y = \operatorname{tg} (i - i') x + \text{TO} - \text{TS},$$

oder

$$y = \operatorname{tg} (i - i') x + a \sin i - a \cos i \operatorname{tg} (i - i');$$

und hieraus

$$y = a \sin i + \operatorname{tg} (i - i') (x - a \cos i),$$

oder

$$y \cos (i - i') - x \sin (i - i') = a \sin i'.$$

Drücken wir  $i$  als elliptische Funktion aus und setzen demnach  $i = \operatorname{am} u$ , so wird

$$\sin i' = k \operatorname{sn} u, \quad \cos i' = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u.$$

Somit erhalten wir als Gleichung des gebrochenen Strahles:

$$y(\operatorname{cnu} \operatorname{dn} u + k \operatorname{sn}^2 u) - x(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cnu}) \operatorname{sn} u = a k \operatorname{sn} u.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit  $k \operatorname{cnu} + \operatorname{dn} u$ , so erhält man ohne Weiteres

$$y(\operatorname{cnu} + k \operatorname{dn} u) - x k'^2 \operatorname{sn} u = a k \operatorname{sn} u (k \operatorname{cnu} + \operatorname{dn} u)$$

oder, wenn man durch  $\operatorname{sn} u$  dividirt,

$$y \left( \frac{\operatorname{cnu} + k \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \right) - x k'^2 = a k (k \operatorname{cnu} + \operatorname{dn} u).$$

Um die Einhüllende dieser Kurve zu finden, differentiiren wir nach  $u$  und erhalten dann

$$-y \frac{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cnu}}{\operatorname{sn} u} = -a k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{dn} u + k \operatorname{cnu}),$$

woraus sich ergibt

$$y = a k^2 \operatorname{sn}^3 u.$$

Substituiren wir diesen Werth von  $y$  in die Gleichung des gebrochenen Strahles, so ist

$$\begin{aligned} -k'^2 x &= a k (k \operatorname{cnu} + \operatorname{dn} u) - a k^2 \operatorname{sn}^2 u (\operatorname{cnu} + k \operatorname{dn} u) \\ &= a (k^2 \operatorname{cn}^3 u + k \operatorname{dn}^3 u). \end{aligned}$$

Wir können nun leicht  $u$  mit Hilfe dieser Gleichungen eliminiren und erhalten als Gleichung der Brennnlinie

$$-k'^2 x = a k^2 \left\{ 1 - \left( \frac{y}{a k^2} \right)^{2/3} \right\}^{3/2} + a k \left\{ 1 - \left( \frac{k y}{a} \right)^{2/3} \right\}^{3/2},$$

oder, wenn wir für  $k$  und  $k'$  ihre Werthe einsetzen:

$$(n^2 - n'^2) x = (n^{4/3} a^{2/3} - n'^{4/3} y^{2/3})^{3/2} + n (n^{2/3} a^{2/3} - n'^{2/3} y^{2/3})^{3/2}. \quad (33)$$

Diese Gleichung rührt von St. Laurent, der angegebene Gang der Entwicklung von Glaisher her.

Vertauschen wir in (33)  $n$  und  $n'$  und schreiben  $\frac{n a}{n'}$  für  $a$ , so erhält die Gleichung die Form:

$$(n'^2 - n^2) x = n (n'^{2/3} a^{2/3} - n^{2/3} y^{2/3})^{3/2} + (n^{4/3} a^{2/3} - n'^{4/3} y^{2/3})^{3/2},$$

und es charakterisirt diese Gleichung dieselbe Kurve, wie die durch Gleichung (33) dargestellte; denn bringen wir die Gleichung auf eine rationale Form, so verschwindet die Anomalie bezügl. der Vorzeichen.

Die Diakaustik für parallel auf einen Kreis vom Radius  $a$  und einem Brechungsexponenten  $\frac{n'}{n}$  einfallende Strahlen ist identisch mit derjenigen für einen ihm concentrischen Kreis mit dem Radius  $\frac{a n}{n'}$  und dem Brechungsexponenten  $\frac{n}{n'}$ .

Weiteres über diesen Gegenstand findet sich in Prof. Cayley's „Memoirs on Caustics“, Phil. Trans. 1856.

§ 109. Bestimmung der Katakaustik für eine Ellipse, in deren Mittelpunkt sich der leuchtende Punkt befindet.

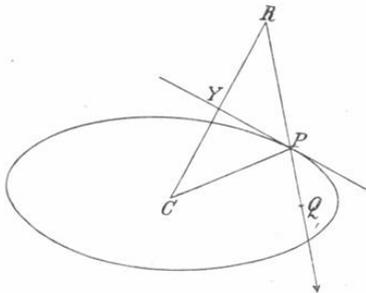


Fig. 87.

Bezeichnen wir in Fig. 87 mit RPQ die Richtung des reflektirten Strahles, mit Q den Punkt, in welchem er die Katakaustik tangirt, mit R den zugeordneten Punkt auf der sekundären Brennlinie, so ist RQ der Krümmungsradius der letzteren, d. h.  $RQ = 2\rho$ , wenn  $\rho$  der Krümmungsradius des geometrischen Ortes von Y, dem Fusspunkt des Lothes von C auf die Tangente, ist. Bedeutet nun  $\sigma$  die Länge des in Y auf die Tangente an den geometrischen Ort von Y errichteten Lothes und  $r$  den Krümmungsradius der Ellipse, so ist  $\sigma r = p^2$ , oder, wenn man differentiirt,

$$\frac{d\sigma}{dp} r + \sigma \frac{dr}{dp} = 2p.$$

Es ist aber

$$q = \frac{p dp}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{r dr}{dp} = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Somit ist

$$\frac{r}{q} + \frac{p^2}{r} \cdot \frac{a^2 b^2}{p^3 p r} = 2,$$

oder

$$\frac{a^2 b^2}{p^2 r^2} = 2 - \frac{r}{q} = \frac{2q - r}{q}.$$

Sind  $(u, v)$  die Koordinaten von R, so findet man, wenn man den Excentricitätswinkel für P mit  $\Phi$  bezeichnet, als deren Werthe

$$u = \frac{2ab^2 \cos \Phi}{a^2 \sin^2 \Phi + b^2 \cos^2 \Phi},$$

$$v = \frac{2ba^2 \sin \Phi}{a^2 \sin^2 \Phi + b^2 \cos^2 \Phi}.$$

Sind ferner  $(x, y)$  die Koordinaten von Q, so ist

$$\frac{x-u}{x-a \cos \Phi} = \frac{y-v}{y-b \sin \Phi} = \frac{QR}{QP} = \frac{2\rho}{2\rho-r},$$

somit

$$\frac{x-u}{x-a \cos \Phi} = \frac{2\rho^2 r^2}{a^2 b^2} = \frac{2r^2}{a^2 + b^2 - r^2},$$

indem gemäss der Eigenschaft der Ellipse

$$p^2 (a^2 + b^2 - r^2) = a^2 b^2.$$

Durch entsprechende Umformung erhalten wir die Beziehungen:

$$x(a^2 + b^2 - 3r^2) = u(a^2 + b^2 - r^2) - 2r^2 a \cos \Phi.$$

Nun ist

$$u(a^2 + b^2 - r^2) = u(a^2 \sin^2 \Phi + b^2 \cos^2 \Phi) = 2ab^2 \cos \Phi,$$

und somit

$$x(a^2 + b^2 - 3r^2) = 2a \cos \Phi (b^2 - r^2) = -2a \cos^3 \Phi (a^2 - b^2).$$

Auf analoge Weise findet man

$$y(a^2 + b^2 - 3r^2) = 2a \sin \Phi (a^2 - r^2) = 2b \sin^3 \Phi (a^2 - b^2).$$

Hieraus ergibt sich durch Division

$$\operatorname{tg} \Phi = -\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^{1/3}}{\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}}.$$

Eliminirt man ferner aus jenen beiden Gleichungen  $\Phi$  durch Addition, so erhält man

$$\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \right\} (a^2 + b^2 - 3r^2)^{2/3} = \left\{ 2(a^2 - b^2) \right\}^{2/3},$$

und hieraus

$$\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \right\}^{3/2} (a^2 + b^2 - 3r^2) = 2(a^2 - b^2).$$

Es ist aber

$$r^2 = a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi = \frac{a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + b^2 \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}}{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}}.$$

Man erhält somit schliesslich

$$\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} \right\}^{1/2} \left[ (a^2 + b^2) \left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} \right\} - 3 \left\{ a^2 \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + b^2 \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} \right\} \right] = 2(a^2 - b^2),$$

d. h.

$$\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} \right\}^{1/2} \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} \left( \frac{b^2}{2} - a^2 \right) + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} \left( \frac{a^2}{2} - b^2 \right) \right] = a^2 - b^2$$

als Gleichung der gesuchten Diakaustik für die Ellipse.

§ 110. *Bestimmung der Bogenlänge einer Brennlinie.* Es lässt sich stets die Bogenlänge einer Brennlinie irgend eines orthotomischen Strahlensystems für eine Ebene bestimmen; denn die Brennlinie ist nichts weiter als die Evolute der orthogonalen Kurven. Nehmen wir an, es werde eine Gruppe von Strahlen, welche von einem Punkt ausgehen oder normal zu einer gegebenen Fläche gerichtet

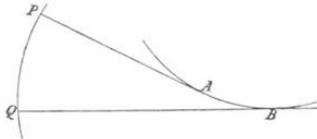


Fig. 88.

sind, einer beliebigen Anzahl von Reflexionen oder Brechungen unterworfen! Für einen jeden Strahl der Gruppe bilden wir die Funktion  $\Sigma n \rho$  und setzen  $V = \Sigma n \rho$ . Ferner sei der Brechungsexponent des letzten Mediums mit  $n$  bezeichnet und  $V = V_0$  stelle die Gleichung einer orthogonalen Kurve in diesem Medium, sagen wir der Kurve PQ, dar. AB (Fig. 88) sei ein beliebiges Kurvenstück der Brennlinie, welche von den Strahlen PA und QB in den Punkten A und B tangiert wird. Es ist dann gemäss der Eigenschaft der Evoluten  $AB = QB - PA$ . Ferner ist

$$V_A = V_0 + n PA,$$

$$V_B = V_0 + n QB;$$

und hieraus ergibt sich durch Subtraktion

$$V_B - V_A = n \widehat{AB}.$$

§ 111. Wir können nun mit Hilfe der Brennlinien uns eine etwas klarere Vorstellung darüber verschaffen, in welcher Art und

Weise und in welcher scheinbaren Lage ein ausserhalb des Wassers befindliches Auge ein unter der Wasseroberfläche befindliches Objekt erblickt.

Angenommen z. B., das Wasser sei durch eine horizontal liegende, nicht sehr tiefe Bodenfläche begrenzt; auf dem Boden befinde sich ein Objektpunkt  $P$  (Fig. 89). Man errichte in  $P$  das Loth  $PM$  und untersuche den Strahlengang für die Ebene  $EPM$ . Man konstruiere nun innerhalb dieser Ebene die Brennlinie, welche von gebrochenen, ursprünglich von  $P$  divergirenden Strahlen berührt wird. Ziehen wir nun die beiden äussersten in das Auge gelangenden Tangenten an die Brennlinie, so begrenzen diese den die Luft

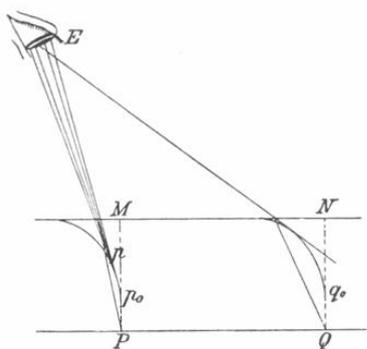


Fig. 89.

durchschneidenden Theil des Strahlenbüschels; verbinden wir die Schnittpunkte dieser Tangenten und der Wasseroberfläche mit  $P$ , so werden diese Verbindungslinien das durch das Wasser verlaufende Strahlenbüschel begrenzen. Die beiden Tangenten zur Brennlinie schneiden sich nahezu in dem beiden fast gemeinschaftlichen Berührungspunkt  $p$ . Ein ausserhalb des Wassers befindliches Auge erblickt daher den Punkt  $P$  in  $p$ .

### Beleuchtungskurven.

§ 112. Fallen Lichtstrahlen auf eine Reihe dicht neben einander liegender reflektirender Kurven oder Kurvenflächen, derart dass das reflektirte Licht ins Auge des Beobachters gelangt, so wird dieser eine oder mehrere jene Kurven oder Rinnen durchkreuzende Kurven von besonderer Helligkeit bemerken. Diese Beobachtung kann man tagtäglich machen, wenn glänzende Stangen, z. B. die Speichen eines Velocipedrades in hellem Sonnenlicht sich drehen. Untersuchen wir nun, wie diese hellen Kurven entstehen

und in welcher Weise ihre Gestalt von derjenigen der reflektirenden Kurve abhängt.

Jeder Punkt einer reflektirenden Kurve diffundirt einen Theil des auf dieselbe auffallenden Lichtes und wird dadurch auch für ein nicht in der Richtung reflektirter Strahlen befindliches Auge sichtbar; es werden aber in das Auge gleichzeitig auch solche Strahlen gelangen, welche von einem oder mehreren Punkten jener Kurve direkt nach dem Reflexionsgesetz in die Richtung, in welcher sich das Auge befindet, reflektirt werden. Von einem solchen Punkt der Kurve wird mehr Licht in das Auge gelangen als von den anderen Punkten derselben, und es wird somit jener Punkt heller leuchtend erscheinen als der übrige Theil der Kurve. Der geometrische Ort dieser hellen Punkte bildet eine helle Kurve und es fragt sich nun, wie bestimmt sich die Gestalt derselben.

Zu diesem Zweck sei das System reflektirender Kurven dargestellt durch die Gleichung  $\Phi(x, y) = a$ , wo  $a$  ein willkürlicher Parameter ist, und das einfallende Licht gehe von einem leuchtenden Punkt Q aus. E sei ferner der Punkt, in welchem sich das Auge des Beobachters befindet, und P irgend ein Punkt auf einer der reflektirenden Kurven. Man lege in der Ebene der reflektirenden Kurve im Punkt P eine Tangente an die reflektirende Kurve. Denkt man sich nun an Stelle der Kurve eine sehr kleine Rinne oder ein dünnes Stäbchen, so wird man durch jene Tangente unendlich viele Tangentialebenen an die Rinne oder das Stäbchen legen können. Lässt sich nun eine dieser Ebenen so legen, dass sie einen von Q ausgehenden Lichtstrahl in die Richtung PE reflektirt, so wird P ein heller Punkt sein. Damit dieser Fall eintritt, müssen die Bedingungen dafür erfüllt sein, dass ein im Punkt P auf die reflektirende Rinne errichtetes Loth in der Ebene QPE liegt und den Winkel QPE halbirt. Ist diese Bedingung erfüllt, so schliessen die Strahlen QP und PE gleiche Winkel mit der Tangente in P ein; umgekehrt ist nach Analogie des in § 12 behandelten Falles, wenn diese Bedingung erfüllt ist, auch den beiden anderen damit genügt.

Es seien  $(x, y, 0)$  die Koordinaten des Punktes P,  $(f, g, h)$  diejenigen des Punktes Q und  $(a, b, c)$  diejenigen des Punktes E. Sind dann  $l, m, 0$  die Richtungskosinuse der Tangente in P, so ist

$$l\Phi_x + m\Phi_y = 0 \dots \dots \dots (34)$$

und die Bedingung, dass die Linien QP und EP gleiche Winkel mit der Tangente in P auf entgegengesetzten Seiten derselben einschliessen, lässt sich durch die Gleichung ausdrücken:

$$\frac{(f-x)l + (g-y)m}{V(f-x)^2 + (g-y)^2 + h^2} + \frac{(a-x)l + (b-y)m}{V(a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2} = 0.$$

Das Verhältniss  $\frac{l}{m}$  lässt sich mit Hilfe von (34) eliminiren und wir erhalten alsdann

$$\frac{(f-x)\Phi_y - (g-y)\Phi_x}{V(f-x)^2 + (g-y)^2 + h^2} + \frac{(a-x)\Phi_y - (b-y)\Phi_x}{V(a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2} = 0. \quad (35)$$

als Gleichung der gesuchten hellen Kurve.

§ 113. Dieselben Gleichungen lassen sich auf kürzerem Wege entwickeln, wenn man von dem Satz ausgeht, dass die optische Weglänge zwischen zwei Punkten ein Minimum darstellt.

Denn ist P der helle Punkt, so muss die optische Weglänge QP + PE ein Minimum sein, während gleichzeitig die Bedingung gestellt wird, dass P stets auf der Kurve  $\Phi(x, y) = \alpha$  liegt.

Sind  $(x, y, 0)$ ,  $(f, g, h)$  und  $(a, b, c)$  der Reihe nach die Koordinaten von P, Q und E, so ist

$$QP + PE = V(x-f)^2 + (y-g)^2 + h^2 + V(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2.$$

Damit dieser Ausdruck ein Minimum darstellt, während gleichzeitig der Bedingung bezüglich der Lage des Punktes P genügt wird, setzen wir den ersten Differentialquotienten jeder Gleichung gleich 0. Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\Phi_x dx + \Phi_y dy = 0,$$

$$\frac{(x-f)dx + (y-g)dy}{V(x-f)^2 + (y-g)^2 + h^2} + \frac{(x-a)dx + (y-b)dy}{V(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2} = 0.$$

Eliminiren wir hierin das Verhältniss  $\frac{dx}{dy}$ , so erhalten wir wieder als Gleichung der hellen Kurve:

$$\frac{(x-f)\Phi_y - (y-g)\Phi_x}{V(x-f)^2 + (y-g)^2 + h^2} + \frac{(x-a)\Phi_y - (y-b)\Phi_x}{V(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2} = 0.$$

§ 114. Beispielsweise wollen wir die Resultate dieser letzten Untersuchung auf die Bestimmung der hellen Kurven, welche man auf den blanken Speichen eines im Sonnenlicht rotirenden Velocipedrades oft zu beobachten Gelegenheit hat, anwenden.

Man denke sich die Radaxe in die Z-Axe des Koordinatensystems verlegt und nehme an, die Sonnenstrahlen fallen in einer durch die Richtungskosinuse  $(l, m, n)$  bestimmten Richtung auf jene Radspeichen, während die Lage des Auges durch die Koordinaten

$(a, b, c)$  bestimmt sei. Sieht man nun ferner die Radspeichen als alle in einer Ebene liegend an, so hat man als Gleichung der reflektirenden Kurven  $y = x \operatorname{tg} \theta$ , und daher, wenn man die Thatsache berücksichtigt, dass einfallende und reflektirte Strahlen gleiche Winkel mit der durch die Richtungskosinuse  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$  bestimmten Linie einschliessen,

$$l \cos \theta + m \sin \theta + \frac{(a-x) \cos \theta + (b-y) \sin \theta}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2}} = 0.$$

Eliminirt man hierin  $\theta$ , so erhält man

$$(lx + my)^2 \left\{ (a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2 \right\} = \left\{ (a-x)x + (b-y)y \right\}^2$$

als die Gleichung der hellen Kurve.