universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel V. Die Gauss´sche Theorie der Linsen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel V.

Die Gauss'sche Theorie der Linsen.

§ 73. Die Theorie der Brechung durch eine beliebige Anzahl sphärisch begrenzter centrirter Medien wurde zuerst von Gauss entwickelt; wir werden im Folgenden seine Methode einer Besprechung unterziehen.

Wir verlegen zunächst die X-Axe des Koordinatensystems in die Axe des brechenden Systems. Die Abscissen der Scheitel der brechenden Flächen seien mit a, a_1, a_2 ..... und deren Radien mit

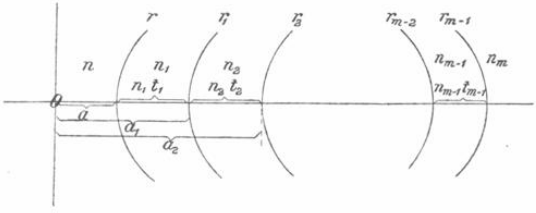

Fig. 55.

r, r_1, r_2 ..... bezeichnet (Fig. 55); n, n_1, n_2 ..... seien die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien und der Kürze halber bedienen wir uns der Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n - n_1}{r} = k_0 \\[2ex] \dfrac{n_1 - n_2}{r} = k_1 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[2ex] \dfrac{n_{m-1} - n_m}{r_{m-1}} = k_{m-1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und bezeichnen die Dicken der Medien, gemessen als Strecken auf der Axe, der Reihe nach mit $n_1 t_1$, $n_2 t_2$ ....., so dass

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - a = n_1 t_1 \\ a_2 - a_1 = n_2 t_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Irgend ein einfallender Strahl, welchen wir als einen sehr kleinen Winkel mit der Axe einschliessend voraussetzen wollen, sei bestimmt durch die linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{\beta}{n}(x - a) + b \\ z = \frac{\gamma}{n}(x - a) + c \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und nach der Brechung an der ersten Fläche seien die Gleichungen des Strahles

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{\beta_1}{n_1}(x - a) + b' \\ z = \frac{\gamma_1}{n_1}(x - a) + c' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

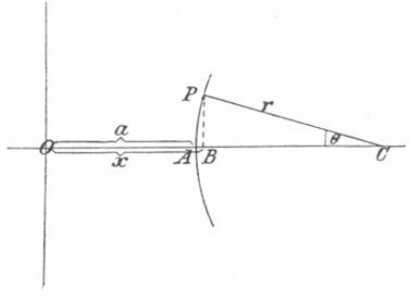

Fig. 56.

Bezeichnen wir in Fig. 56 mit x die Abscisse des Einfallspunktes P und mit θ den dem Bogen AP der Kugelfläche zugehörigen Centriwinkel, wobei ersterer von A, dem Scheitel der Kugelfläche, aus gemessen wird, so ist:

$$x = \mathrm{OC} - \mathrm{BC}$$

oder

$$x = a + r(1 - \cos\theta).$$

Da dieser Werth von x die Lage des Schnittpunktes des einfallenden und gebrochenen Strahles kennzeichnet, so ergeben die allgemeinen Gleichungen (3) und (4), wenn man darin für x den soeben gefundenen Werth einsetzt, die folgende Identität:

$$\left.\begin{aligned} b + \frac{\beta}{n} r (1 - \cos\theta) &= b' + \frac{\beta_1}{n_1} r (1 - \cos\theta) \\ c + \frac{\gamma}{n} r (1 - \cos\theta) &= c' + \frac{\gamma_1}{n_1} r (1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da aber β und β_1 (resp. γ und γ_1) und ebenso θ sehr kleine Grössen darstellen, so darf man in die für $\beta \cos\theta$ substituirte Maclaurin'sche Reihe $\beta - \frac{\beta\theta^2}{2!} + \frac{\beta\theta^4}{4!} - \ldots\ldots$ die sehr kleine Grösse dritter Ordnung $\theta^2\beta$ vernachlässigen und es wird dann $b' = b$ und

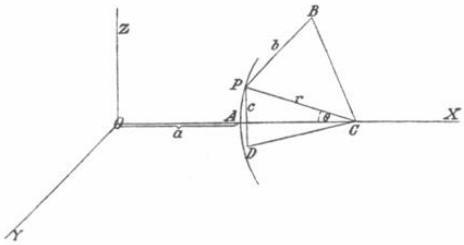

Fig. 57

ebenso $c' = c$. b und c sind somit Koordinaten des Einfallspunktes des Strahles in Bezug auf die erste Fläche. Die Richtungskosinusse des Einfallslothes sind demnach mit Rücksicht auf Fig. 57:

$$\cos\theta; \quad -\cos BPC = -\frac{b}{r}; \quad -\cos CPD = -\frac{c}{r}.$$

Für die Richtungskosinusse des Einfallsstrahles PQ ergeben sich unter Bezugnahme auf Fig. 58 die folgenden angenäherten Werthe:

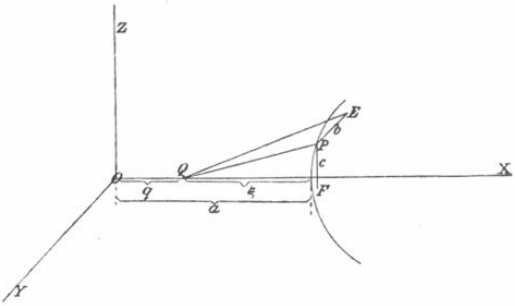

Fig. 58.

$\cos PQX = 1$; $\cos QPE = \frac{b}{\xi}$, worin $\xi = a - q$; q findet sich aus der Gleichung des Einfallsstrahles, wenn man hierin $y = 0$ setzt; in

diesem Falle wird $x = q = a - \frac{b}{\left(\frac{\beta}{n}\right)}$, folglich $\xi = \frac{b}{\left(\frac{\beta}{n}\right)}$, mithin $\cos \mathrm{QPE} = \frac{\beta}{n}$. Analog findet man $\cos \mathrm{QPF} = \frac{\gamma}{n}$ und für den austretenden Strahl die Richtungskosinusse 1, $\frac{\beta_1}{n_1}$, $\frac{\gamma_1}{n_1}$, immer aber nur unter der Voraussetzung, dass die Konvergenz der Strahlen eine sehr geringe ist.

Wir haben demnach unter den vorausgesetzten Näherungsbedingungen kurz wiederholt die folgenden Richtungskosinusse:

für das Einfallsloth: $\cos\theta$, $-\frac{b}{r}$, $-\frac{c}{r}$;

für den Einfallsstrahl: 1, $\frac{\beta}{n}$, $\frac{\gamma}{n}$;

für den gebrochenen Strahl: 1, $\frac{\beta_1}{n_1}$, $\frac{\gamma_1}{n_1}$.

Drücken wir die Beziehung zwischen den Richtungskosinussen nach Analogie der Formeln (12, II) aus, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \beta - \beta_1 &= -\frac{b}{r}(n\cos i - n_1 \cos i') \\ \text{und} \qquad & \\ \gamma - \gamma_1 &= -\frac{c}{r}(n\cos i - n_1 \cos i') \end{aligned}\right\}$$

oder, wenn wir uns mit dem oben definirten Grade der Annäherung begnügen, wo dann $\cos i = \cos i' = 1$ wird,

$$\left.\begin{aligned} \beta - \beta_1 &= -\frac{n - n_1}{r} \cdot b \\ \text{und} \qquad & \\ \gamma - \gamma_1 &= -\frac{n - n_1}{r} \cdot c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Werthe von β_1 und γ_1 lassen sich hiernach und nach (1) folgendermaassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \beta + k_0 b \\ \gamma_1 &= \gamma + k_0 c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und damit sind die Gleichungen des Strahles vor und nach der ersten Brechung vollständig bestimmt.

Sind a_1, b_1, c_1 die Koordinaten des Punktes, in welchem der gebrochene Strahl die zweite Fläche trifft, so dass sich die Gleichungen

dieses gebrochenen Strahles nach Analogie der Gleichungen (3) und (4) folgendermaassen ausdrücken lassen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta_1}{n_1}(x - a_1) + b_1 \\ z &= \frac{\gamma_1}{n_1}(x - a_1) + c_1 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

so gelangen wir durch Vergleichung dieser Gleichungen mit den unter (4) gegebenen Formeln der gleichbedeutenden Gleichungen zu den Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} b' - \frac{\beta_1}{n_1} a &= b_1 - \frac{\beta_1}{n_1} a_1 \\ \text{und} \qquad & \\ c' - \frac{\gamma_1}{n_1} a &= c_1 - \frac{\gamma_1}{n_1} a_1 \end{aligned}\right\}$$

oder, wenn wir uns erinnern, dass $b' = b$, $c' = c$,

$$\left.\begin{aligned} b - \frac{\beta_1}{n_1} a &= b_1 - \frac{\beta_1}{n_1} a_1 \\ \text{und} \qquad & \\ c - \frac{\gamma_1}{n_1} a &= c_1 - \frac{\gamma_1}{n_1} a_1 \end{aligned}\right\}$$

und daher nach (2):

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= b + \beta_1 t_1 \\ c_1 &= c + \gamma_1 t_1 \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Führen wir diese Untersuchung in dem angedeuteten Sinne weiter, so werden die sich hierbei ergebenden Gleichungen immer auf die Form der Gleichungen (7) und (9) gebracht werden können, so dass also

$$\left.\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 + k_1 b_1 \\ \gamma_2 &= \gamma_1 + k_1 c_1 \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \beta_2 t_2 \\ c_2 &= c_1 + \gamma_2 t_2 \end{aligned}\right\}$$

u. s. f.

Alle diese Grössen β_1, $\beta_2 \ldots\ldots$, b_1, $b_2 \ldots\ldots$ lassen sich der Reihe nach als Funktionen der ersten beiden Grössen β und b darstellen und es ist dann nach (7)

$$\text{nach (9)}\quad \left.\begin{aligned} \beta_1 &= k_0 b + \beta, \\ b_1 &= (k_0 t_1 + 1) b + t_1 \beta \\ \beta_2 &= \{k_1 (k_0 t_1 + 1) + k_0\} b + (k_1 t_1 + 1) \beta \\ b_2 &= \{k_1 (k_0 t_1 t_2 + t_2) + k_0 (t_1 + t_2) + 1\} b + \{t_1 (k_1 t_2 + 1) + t_2\} \beta \end{aligned}\right\} \cdot \quad (10)$$

Bezeichnen $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ ..... der Reihe nach die Näherungswerthe des Kettenbruches

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots + \cfrac{1}{k_{m-1}}}}}},$$

so dass also

$$\frac{k_0}{1} = \frac{p_1}{q_1},$$

$$k_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{k_0 t_1 + 1}{t_1} = \frac{p_2}{q_2},$$

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1}} = \frac{k_1 (k_0 t_1 + 1) + k_0}{k_1 t_1 + 1} = \frac{p_3}{q_3},$$

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{t_2}}} = \frac{k_1 (k_0 t_1 t_2 + t_2) + k_0 (t_1 + t_2) + 1}{t_1 (k_1 t_2 + 1) + t_2} = \frac{p_4}{q_4},$$

so erkennt man ohne Weiteres, dass die Gleichungen der Gruppe (10) sich durch die folgenden ersetzen lassen:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= p_1 b + q_1 \beta \\ b_1 &= p_2 b + q_2 \beta \\ \beta_2 &= p_3 b + q_3 \beta \\ b_2 &= p_4 b + q_4 \beta \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_{m-1} &= p_{2m-2} b + q_{2m-2} \beta \\ \beta_m &= p_{2m-1} b + q_{2m-1} \beta. \end{aligned}$$

Für das letzte Gleichungspaar wollen wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} b' &= g\,b + h\,\beta \\ \beta' &= k\,b + l\,\beta \end{aligned}\right\}.$$

Gemäss der Eigenthümlichkeit eines Kettenbruches mit dem Theilzähler 1 ist $g\,l - h\,k = 1$. Durch einen ganz analogen Gang der Untersuchung gelangen wir zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} c' &= g\,c + h\,\gamma \\ \gamma' &= k\,c + l\,\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Lösen wir diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Relation $g\,l - h\,k = 1$ nach b und β, resp. c und γ auf, so ist:

$$\left.\begin{aligned} b &= l\,b' - h\,\beta' \\ \beta &= -k\,b' + g\,\beta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und

$$\left.\begin{aligned} c &= l\,c' - h\,\gamma' \\ \gamma &= -k\,c' + g\,\gamma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Wir haben also, um die erhaltenen Resultate kurz zusammenzufassen, als Gleichungen des einfallenden Strahles:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta}{n}(x - a) + b \\ z &= \frac{\gamma}{n}(x - a) + c \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

als diejenigen des Austrittsstrahles

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta'}{n'}(x - a') + b' \\ z &= \frac{\gamma'}{n'}(x - a') + c' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} b' &= g\,b + h\,\beta \\ \beta' &= k\,b + l\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und

$$\left.\begin{aligned} c' &= g\,c + h\,\gamma \\ \gamma' &= k\,c + l\,\gamma \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

In der weiteren Behandlung der Theorie wird es genügen, wenn wir uns auf die Verfolgung einer der Gleichungen des einfallenden Strahles beschränken; denn es werden in allen Fällen die aus dieser Gleichung sich ergebenden Schlussfolgerungen auch für

die andere Gleichung gelten. Ebenso werden wir zur Untersuchung des Austrittsstrahles von nur einer der gegebenen Gleichungen ausgehen.

§ **74.** *Es existiren zwei zur Axe senkrechte Ebenen, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass die Punkte, in welchen der Einfallsstrahl die erste und der diesem zugehörige Austrittsstrahl die zweite trifft, derartig gelegen sind, dass die sie verbindende Gerade zur Axe parallel gerichtet ist.* Diese Ebenen erleichtern ungemein die Bestimmung des einem gegebenen Einfallsstrahl entsprechenden Austrittsstrahles. Wir werden nun zunächst das Vorhandensein solcher Ebenen nachzuweisen, sowie deren Lagen zu bestimmen haben.

Die Gleichung des Austrittsstrahles (14) lässt sich nach Einsetzung der in (15) gegebenen Werthe von b' und β' folgendermaassen schreiben:

$$y = \frac{k\,b + l\,\beta}{n'}(x - a') + g\,b + h\,\beta\,,$$

$$y = \frac{\beta}{n'}\left\{ l\,(x - a') + n'\,h \right\} + b\left\{ \frac{k\,(x - a')}{n'} + g \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Um nun den Punkt zu bestimmen, in welchem der Austrittsstrahl die Ebene, deren Abscisse $x = x'$ sein möge, trifft, haben wir nur in dieser letzten Gleichung x' für x zu setzen. Ferner ist die Gleichung des zugehörigen Einfallsstrahles

$$y = \frac{\beta}{n}(x - a) + b.$$

Es lassen sich stets Werthe von x und x' bestimmen, bei welchen bei jedem beliebigen Werthe von β und b, d. h. für alle Strahlen, jene Werthe von y identisch werden. Setzt man die Koefficienten von β einerseits und b andererseits einander gleich, so ergeben sich als die nöthigen Bedingungen für diese Identität der Werthe von y die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l\,(x' - a') + n'\,h}{n'} &= \frac{x - a}{n} \\ k\,(x' - a') + n'\,g &= n' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus der letzteren Gleichung ergiebt sich ohne Weiteres der Werth von x':

$$x' = a' + \frac{n'}{k}(1 - g) = p_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19\,\mathrm{b})$$

Aus den Gleichungen (18) folgt ferner:

$$\frac{x-a}{n} = \frac{l}{k}(1-g) + h\,;$$

hieraus unter Berücksichtigung der Relation $g\,l - h\,k = 1$

$$\frac{x-a}{n} = \frac{l-1}{k}$$

und hieraus schliesslich

$$x = a - \frac{n}{k}(1-l) = p_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19\text{a})$$

Die durch diese Abscissen charakterisirten Ebenen heissen die Hauptebenen und die Punkte, in welchen sie von der Axe geschnitten werden, die Hauptpunkte. Sie besitzen die Eigenthümlichkeit, dass der Einfalls- und Austrittsstrahl je eine der beiden Ebenen in Punkten schneiden, deren jeder als die Projektion des anderen auf diese Ebene anzusehen ist.

§ **75.** *Wenn die Einfallsstrahlen einander parallel sind, so kommen die Austrittsstrahlen in einem Punkte zur Vereinigung, und für sämmtliche verschiedenen Gruppen paralleler Strahlen liegen die Vereinigungspunkte in einer zur Axe senkrechten Ebene. Umgekehrt müssen, wenn die Austrittsstrahlen einander parallel gerichtet sind, die Einfallsstrahlen von einem Punkte einer festen, zur Axe senkrechten Ebene ausgehen.* Solche Ebenen bezeichnet man als Brennebenen und die Punkte, in welchen sie von den Axen geschnitten werden, als die Brennpunkte. Um die Lage der den parallel einfallenden Strahlen entsprechenden Brennebenen zu bestimmen, nehmen wir an, dass β konstant, b dagegen ein variabler Parameter ist. Als Gleichung des Austrittsstrahles hatten wir nach (17) gefunden:

$$y = \frac{\beta}{n'}\left\{l(x-a') + n'h\right\} + b\left\{\frac{k(x-a')}{n'} + g\right\}$$

und da b variabel ist, ist es klar, dass die Bedingung dafür, dass der Strahl immer durch einen festen Punkt hindurchgeht, gegeben ist durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k(x-a')}{n'} + g = 0\,, \\ \text{und} \qquad & \\ &y = \frac{\beta}{n'}\left\{l(x-a') + n'h\right\} \end{aligned}\right\}.$$

Die Gleichung für den Abstand der Brennebene ist somit:

$$x = a' - \frac{n'g}{k} = g_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\text{b})$$

Um die Gleichung für den Abstand der anderen Brennebene zu finden, müssen wir die Austrittsstrahlen als parallel verlaufend annehmen und haben dann β' als konstant, b' dagegen als variabel anzusehen. Drücken wir die Gleichung des Einfallsstrahles (13) in derselben Weise, wie es bei Bildung der Gleichung (17) geschah, in Funktionen von β' und b' aus, wobei wir uns der Gleichung (11) bedienen, so erhalten wir die Gleichung

$$y = \frac{\beta'}{n}\left\{g(x-a) - n\,h\right\} - b'\left\{\frac{k(x-a)}{n} - l\right\},$$

und als Bedingung dafür, dass die Strahlen von einem Punkte ausgehen,

$$\frac{k(x-a)}{n} - l = 0,$$

und

$$y = \frac{\beta'}{n}\left\{g(x-a) - n\,h\right\}$$

und schliesslich als Abstand der ersten Brennebene

$$x = a + \frac{n\,l}{k} = g_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20\text{a})$$

Den Abstand der ersten Brennebene vor der ersten Hauptebene nennt man die erste Brennweite, den Abstand der zweiten Brennebene hinter der zweiten Hauptebene nennt man die zweite

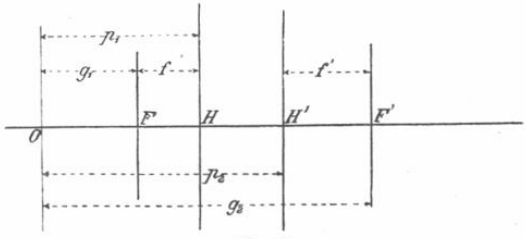

Fig. 59.

Brennweite. Wir wollen diese beiden Brennweiten durch die Buchstaben f und f' unterscheiden. Ihre Werthe ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen für die Abscissen der Brennebenen und Hauptebenen. Es ist dann nach (19a) und (20a), resp. (19b) und (20b), wie in Fig. 59 dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} p_1 - g_1 &= -\frac{n}{k} = f \\ g_2 - p_2 &= -\frac{n'}{k} = f' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

§ **76.** Es befinden sich auf der Axe zwei weitere Punkte, welche für die Untersuchung der einfallenden und gebrochenen Strahlen verwerthbare Eigenthümlichkeiten aufweisen. Sie besitzen nämlich die Eigenschaft, dass einem durch den einen derselben gehenden Einfallsstrahl ein diesem parallel gerichteter, durch den anderen Punkt verlaufender Austrittsstrahl zugeordnet ist. Diese Punkte wurden von Listing entdeckt und von ihm Knotenpunkte genannt.

Um die Lage dieser Knotenpunkte zu bestimmen, haben wir zunächst festzustellen, in welchen Fällen der Austrittsstrahl dem einfallenden Strahl parallel ist.

Die Bedingung hierfür ist nach (3) und (4)

$$\frac{\beta}{n} = \frac{\beta'}{n'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung β' durch seinen in Gleichung (15) gegebenen Werth, so ist

$$k\,b + l\,\beta = \frac{n'}{n}\,\beta,$$

und hieraus

$$b = \frac{\beta}{n}\left\{\frac{n'}{k} - \frac{n\,l}{k}\right\}.$$

Substituiren wir diesen Werth in (3), die Gleichung des einfallenden Strahles, so nimmt diese die Form an:

$$y = \frac{\beta}{n}\left\{x - a + \frac{n'}{k} - \frac{n\,l}{k}\right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass, was auch immer die Richtung des einfallenden Strahles sein mag, derselbe durch einen bestimmten Punkt der Axe geht, und wir erhalten, wenn wir $y = 0$ setzen, als Abscisse dieses Punktes:

$$x = a - \frac{n'}{k} + \frac{n\,l}{k} = \mathfrak{k}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23\,\mathrm{a})$$

Der Entwicklung der letzten Formel für den Eintrittsstrahl folgend erhalten wir für den Austrittsstrahl der Reihe nach folgende Gleichungen:

Aus (22)

$$\beta = \frac{n}{n'}\,\beta',$$

aus (11)

$$\beta = -\,k\,b' + g\,\beta' = \frac{n}{n'}\,\beta',$$

hieraus

$$b' = \frac{\beta'}{n'}\left\{\frac{g\,n'}{k} - \frac{n}{k}\right\},$$

und aus (14)

$$y = \frac{\beta'}{n'}\left\{x - a' - \frac{n}{k} + \frac{n'\,g}{k}\right\};$$

und es geht daher der Austrittsstrahl durch einen Punkt der Axe, dessen Abscisse bestimmt ist durch die Gleichung

$$x = a' + \frac{n}{k} - \frac{n'\,g}{k} = \mathfrak{k}_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\,\mathrm{b})$$

Die Lage der Knotenpunkte ist somit durch deren Abscissen bestimmt. Aus ihren Werthen und den Gleichungen (21) und (20) folgt ohne Weiteres

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{k}_1 - g_1 &= f' \\ g_2 - \mathfrak{k}_2 &= f \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Knotenpunkte liegen somit innerhalb der Brennpunkte und zwar in Abständen von denselben, welche beziehungsweise f und f' gleich sind. In dem praktisch besonders wichtigen Falle, in welchem die äussersten Medien gleichartig sind, d. h. wo $n = n'$ ist, ist nach (21) $f = f'$ und es fallen somit alsdann die Knotenpunkte und Hauptpunkte zusammen. Andere Methoden, um die Lagen dieser Kardinalpunkte zu bestimmen, werden später gegeben werden.

§ **77.** Geht ein System von Einfallsstrahlen von einem Punkte aus, so müssen auch die diesen entsprechenden Austrittsstrahlen in einem Punkte homocentrisch werden. Solche Punkte heissen konjugirte Punkte; oder man sagt auch, der eine ist das Bild des anderen.

Wie wir in dem vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, sind die Gleichungen für die eintretenden und austretenden Strahlen lediglich von den Grössen β, b, γ und c abhängig. Die Bedingung dafür, dass der Einfallsstrahl durch einen Punkt (ξ, η, ζ) geht, lässt sich nach (3) durch die Gleichung

$$n\,\eta = \beta\,(\xi - a) + n\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und durch eine ähnliche Relation zwischen ξ und ζ ausdrücken. Die Bedingungen ferner, dass der austretende Strahl durch den Punkt $(\xi'\ \eta'\ \zeta')$ hindurchtritt, sind nach (17) durch die Gleichung

$$n'\,\eta' = \beta\left\{l\,(\xi' - a') + n'\,h\right\} + b\left\{k\,(\xi' - a') + n'\,g\right\} \quad . \quad . \quad (26)$$

und eine ähnliche Relation zwischen ξ' und ζ' gegeben. Es lassen sich nun für (ξ', η', ζ') immer solche Werthe finden, dass die zweiten

Bedingungsgleichungen mit den ersten identisch werden. Dies bedingt die Relationen:

$$\frac{n'\eta'}{n\eta} = \frac{n'\zeta'}{n\zeta} = \frac{l(\xi' - a') + n'h}{\xi - a} = \frac{k(\xi' - a') + n'g}{n} \quad . \quad (27)$$

Sobald diese Bedingungen erfüllt sind, nehmen die Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') eine solche Lage zu einander ein, dass alle Strahlen, welche bei ihrem Eintritt in das System durch den einen Punkt gehen, nach dem Austritt aus dem System durch den anderen Punkt verlaufen. Mit anderen Worten, die beiden Punkte sind einander konjugirt.

Aus der Gleichung

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

welche unmittelbar aus den letzten Gleichungen folgt, können wir den Schluss ziehen, dass *ein Objektpunkt und dessen zugehöriger Bildpunkt in einer durch die Axe gelegten Ebene liegen.*

§ **78.** Die Beziehung zwischen den Abscissen konjugirter Punkte lässt sich nach (27) darstellen durch die Gleichung:

$$k(\xi - a)(\xi' - a') + n'g(\xi - a) - nl(\xi' - a') - nn'h = 0. \quad . \quad (29)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Lage der Brennpunkte ableiten und die Bezugnahme auf diese gestattet eine wesentliche Vereinfachung der Beziehungsgleichungen. Um nun die Brennpunkte zu bestimmen, sehen wir zuerst die einfallenden und dann die austretenden Strahlen als parallel verlaufend an; zu diesem Zwecke lassen wir nach einander ξ und ξ' unendlich gross werden. Die Abscissen der zugeordneten Bildpunkte werden dann nach der letzten Gleichung, nachdem man diese durch ξ resp. ξ' dividirt hat, sein müssen:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a' - \frac{n'g}{k} = g_2 \\ \xi &= a + \frac{nl}{k} = g_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die Relation zwischen ξ und ξ', wie dieselbe in der Gleichung (29) enthalten ist, lässt sich nach (30) auch folgendermaassen darstellen:

$$(\xi - a)(\xi' - a') - (g_2 - a')(\xi - a) - (g_1 - a)(\xi' - a') = \frac{nn'h}{k},$$

und hieraus entsteht durch entsprechende Umformung:

$$\left\{(\xi - a) - (g_1 - a)\right\}\left\{(\xi' - a') - (g_2 - a')\right\} = (g_1 - a)(g_2 - a') + \frac{n\,n'\,h}{k},$$

$$= -\frac{n\,l}{k} \cdot \frac{n'\,g}{k} + \frac{n\,n'\,h}{k},$$

$$= n\,n'\left(\frac{h}{k} - \frac{g\,l}{k^2}\right),$$

$$= n\,n'\,\frac{h\,k - g\,l}{k^2} = -\frac{n\,n'}{k^2},$$

oder schliesslich nach (21):

$$(\xi - g_1)(\xi' - g_2) = -f\,f'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

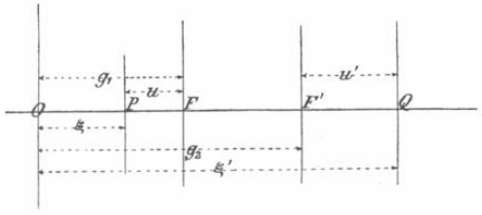

Fig. 60.

Bezeichnen wir die Abstände der konjugirten Punkte vor bezw. hinter der Brennebene des Systems mit u und u' (Fig. 60), so ist

$$u = g_1 - \xi, \quad u' = \xi' - g_2$$

und daher

$$u\,u' = f\,f'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

§ **79.** Kehren wir nun zu den anderen Koordinaten der konjugirten Punkte zurück, so finden wir nach (27)

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{k(\xi' - a') + n'\,g}{n'},$$

$$= \frac{\xi' - a' + \frac{n'\,g}{k}}{\frac{n'}{k}},$$

$$= -\frac{\xi' - g_2}{f'} \text{ nach (30) und (21),}$$

das heisst

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{u'}{f'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Nach (32) folgt dann hieraus

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\zeta}{\zeta'} = -\frac{u}{f}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, dass, wenn $u = -f$, und daher $u' = -f'$, dann auch $\eta = \eta'$ und $\zeta = \zeta'$ sein muss. Nach unserer früheren Definition kennzeichnen daher die Gleichungen $u = -f$ und $u' = -f'$ die Lage der Hauptebenen.

Bezeichnet man, wie in Fig. 61, die Abstände irgend eines Paares konjugirter Punkte beziehungsweise vor und hinter den Hauptebenen mit x und x', so ist $u = x - f$, $u' = x' - f'$ und aus der Multiplikation beider Relationen ergiebt sich nach (32)

$$(x - f)(x' - f') = u u' = f f' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

oder, wie man hierfür schreiben kann,

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

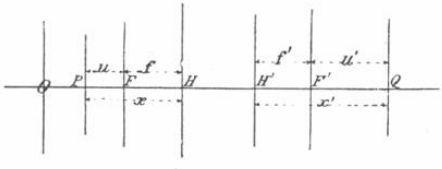

Fig. 61.

Bezüglich der Anwendung der gefundenen Resultate auf die graphische Bestimmung einander zugeordneter einfallender und austretender Strahlen, sowie der Lagen konjugirter Punkte verweisen wir auf die §§ 68—71.

§ **80.** Es lässt sich stets eine einzelne Fläche oder eine dünne Linse finden, welche, mit ihrem Scheitel in den ersten Hauptpunkt des Systems verlegt, den einfallenden Strahlen genau dieselben resultirenden Richtungen ertheilt, wie dieses durch das ganze System erfolgt, so dass, wenn wir uns den Abstand der beiden Hauptebenen als nicht vorhanden denken, die dadurch erhaltene einzelne brechende Fläche oder Linse ohne Dicke dieselbe vollständige Gruppe von Austrittsstrahlen liefert, wie das ganze System brechender Flächen. Eine solche Fläche oder Linse bezeichnet man als dem ganzen System brechender Flächen äquivalent. Das System wird hierbei einer einzelnen brechenden Fläche äquivalent sein, wenn das erste und letzte Medium verschiedener Art sind, dagegen ist es einer dünnen Linse äquivalent, wenn erstes und letztes Medium gleichartig sind.

Um diese Sätze zu beweisen, suchen wir die Gleichungen der Strahlen auf in Bezug auf die Hauptpunkte als Koordinatenursprünge. Die Gleichung (3) des einfallenden Strahles lässt sich durch Ein-

setzung des Werthes von a aus (19a), nämlich $a = p_1 + \frac{n}{k}(1-l)$, auch auf die folgende Form bringen:

$$y = \frac{\beta}{n}\left\{x - p_1 + \frac{n}{k}(l-1)\right\} + b,$$

oder

$$y = \frac{\beta}{n}(x - p_1) + \frac{\beta}{k}(l-1) + b,$$

oder

$$y = \frac{\beta}{n}(x - p_1) + \frac{l\beta + kb - \beta}{k};$$

und schliesslich nach (15):

$$y = \frac{\beta}{n}(x - p_1) + \frac{\beta' - \beta}{k} \quad \ldots\ldots \quad (37\text{a})$$

und der zugehörige Austrittsstrahl erhält die Gleichung:

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - p_2) + \frac{\beta' - \beta}{k} \quad \ldots\ldots \quad (37\text{b})$$

Der dem Schnittpunkt der Strahlen mit der Hauptebene entsprechende Werth von y ist hiernach, da für diesen Fall $x = p_1$ resp. $x = p_2$,

$$y = \frac{\beta' - \beta}{k} = b_0,$$

woraus

$$\beta' = \beta + k\,b_0. \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Eben diese Gleichung würden wir aber erhalten haben, wenn wir der Untersuchung eine Brechung an einer einfachen sphärischen Fläche zu Grunde gelegt hätten. Ein vergleichender Blick auf die früheren Gleichungen überzeugt uns von dieser Thatsache. Sind n und n' die Brechungsexponenten der Medien und r der Radius der brechenden Fläche, so hat k den Werth:

$$k = \frac{n - n'}{r},$$

und daher

$$r = \frac{n - n'}{k}.$$

Dieser Werth von r wird vom Scheitel aus in der Richtung des einfallenden Lichtes gemessen. Das System ist daher äquivalent einer einzelnen brechenden Kugelfläche, deren Radius $\frac{n - n'}{k}$ ist und deren Scheitel mit dem ersten Hauptpunkt des Systems zusammenfällt.

§ 81. Wenn das erste und letzte Medium gleicher Art sind, so hat man sich den Fall einer dünnen, mit ihrem Scheitel in den Hauptpunkt gelegten Linse vorzustellen. Die der Brechung durch eine dünne Linse entsprechenden Gleichungen lauten:

$$\beta_1 = \beta + k_0 b_0 \quad [\text{vgl. } (7)],$$
$$b_1 = b_0,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + k_1 b_1,$$

und somit

$$\beta' = \beta_2 = \beta + (k_0 + k_1) b_0.$$

Diese Gleichung entspricht nach (38) der verlangten, durch das System hervorgerufenen Brechung, vorausgesetzt, dass

$$k = k_0 + k_1.$$

Ist nun n' der Brechungsexponent der Linse, r und r' die Radien ihrer beiden Flächen in der Richtung des Lichteinfalls als positiv gemessen, so ist nach (1)

$$k_0 + k_1 = \frac{n - n'}{r} + \frac{n' - n}{r'},$$

oder

$$k_0 + k_1 = k = (n - n')\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Ist Φ die Brennweite der dünnen Linse im Sinne der bisher gegebenen Definition, bezogen auf den ersten Brechungsexponenten des ersten Mediums, so ist nach § 57 unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\frac{1}{\Phi} = \left(\frac{n'}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Hieraus in Verbindung mit (39) folgt:

$$k = -\frac{n}{\Phi},$$

oder endlich

$$\Phi = -\frac{n}{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Brennweite der äquivalenten Linse ist daher $-\frac{n}{k}$. Sie wird eine Sammellinse sein, wenn $-\frac{n}{k}$ einen positiven, und eine Zerstreuungslinse, wenn $-\frac{n}{k}$ einen negativen Werth hat.

§ 82. Es giebt einen Fall, in welchem die Bezugnahme auf die betrachteten Hilfspunkte nicht zulässig ist, und da dieser Fall

in der Praxis häufig vorkommt, wird es nöthig sein, ihn einer Betrachtung zu unterwerfen. Es handelt sich um den Fall, wenn k verschwindet; es liegen dann nämlich sämmtliche Hilfspunkte in der Unendlichkeit. Wird $k=0$, so haben wir nach § 73:

$$gl=1,$$
$$\beta'=l\beta,$$
$$b'=gb+h\beta.$$

Sind nun die Gleichungen des einfallenden Strahles wie in (3)

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{\beta}{n}(x-a)+b \\ z&=\frac{\gamma}{n}(x-a)+c \end{aligned}\right\},$$

so werden diejenigen des zugeordneten Austrittsstrahles in dem vorliegenden Falle nach (4)

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{l\beta}{n'}(x-a')+gb+h\beta \\ z&=\frac{l\gamma}{n'}(x-a')+gc+h\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Setzen wir hierin $\alpha=a'-\frac{n'h}{l}$ ein, so können die beiden letzten Gleichungen in folgender Form geschrieben werden:

$$\left[y=\frac{l\beta}{n'}\left(x-\alpha-\frac{n'h}{l}\right)+gb+h\beta\right]$$

oder

$$y=\frac{l\beta}{n'}(x-\alpha)+gb$$

und analog

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{l\beta}{n'}(x-\alpha)+gb \\ z&=\frac{l\gamma}{n'}(x-\alpha)+gc \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Gehen wir wieder, wie es oben geschah, über zur Bestimmung des Bildes eines Punktes (ξ, η, ζ), so erhalten wir als Relation zwischen (ξ, η, ζ) und den Koordinaten des Bildpunktes (ξ', η', ζ') ohne Weiteres aus (27) die Gleichungen:

$$\frac{n'\eta'}{n\eta}=\frac{n'\zeta'}{n\zeta}=\frac{l\left(\xi'-\alpha-\frac{n'h}{l}\right)+n'h}{\xi-a}=\frac{l(\xi'-\alpha)}{\xi-a}=\frac{n'}{n}g. \quad (42)$$

Durch Division mit $\frac{n'}{n}$ erhält man hieraus die Gleichungen:

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = g,$$

oder, da $gl = 1$,

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = g = \frac{1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

und aus (42)

$$n\,l\,(\xi' - \alpha) = n'\,g\,(\xi - a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Hieraus folgt, dass *das Verhältnis der linearen Dimensionen des Bildes zu denjenigen des Objektes den konstanten Werth* $\frac{g}{1}$ *oder* $\frac{1}{l}$ *hat, was auch immer die Lage des Objektes sein mag.*

Der soeben betrachtete Fall liegt dann vor, wenn z. B. ein weitsichtiges Auge durch ein Fernrohr sehr entfernt liegende Objekte betrachtet. Aus den Formeln ergiebt sich, dass ein ursprünglich paralleles Strahlenbüschel auch beim Austritt seine Parallelität beibehält. In dem Falle eines Fernrohres haben wir $n = n'$, und somit verhält sich nach dem Gesagten die Tangente des Konvergenzwinkels des Einfallsstrahles zur Tangente des Konvergenzwinkels des Austrittsstrahles wie $1 : l$. Hieraus ist gemäss der früher gegebenen Definition l oder $\frac{1}{g}$ die Vergrösserung des Fernrohres. Ist l positiv, so ist das Bild ein aufrechtes, dagegen ein umgekehrtes, wenn l negativ ist.

Einfache Theorie äquivalenter Linsen.

§ 83. Eine Linse wird als einem System von einer beliebigen Anzahl centrirter Linsen äquivalent bezeichnet, wenn sie, in eine bestimmte Lage gebracht, dieselbe Ablenkung der unter kleinem Winkel zur Axe des Systems geneigten Strahlen bewirkt, wie diese durch die Linsen des Systems erfolgt.

Wir nehmen zunächst an, dass die Einfallsstrahlen zur Axe des Systems parallel gerichtet sind, in welchem Falle die Lage der äquivalenten Linse ohne Belang ist.

Die Ablenkung, welche eine dünne Linse bewirkt, lässt sich nun dadurch bestimmen, dass man die Linse als ein dünnes Prisma, welches durch die an dem Einfalls- und Austrittspunkt an die Kugelflächen gelegten Tangentialebenen gebildet wird, ansieht. Die Ablenkung wird daher unabhängig sein von dem Einfallswinkel, sofern man es mit kleinen Einfallswinkeln zu thun hat. Um die Grösse der Ablenkung zu finden, nehmen wir an, der Einfallsstrahl verlaufe parallel zur Axe, und es muss in diesem Fall der Austrittsstrahl durch den Brennpunkt der Linse gehen. Ist y der Abstand des

Einfallspunktes von der Axe, also die Einfallshöhe, und f die Brennweite der Linse, so ist offenbar die Ablenkung

$$\delta = -\frac{y}{f}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

wenn man die Linse als Sammellinse ansieht. Dieser Ausdruck für die durch die Linse hervorgerufene Ablenkung gilt somit für jeden Einfallsstrahl.

Angenommen nun, es seien n dünne Linsen mit den Brennweiten $f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$ in den Abständen $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{m-1}$ auf der Axe angeordnet. Der Kürze halber sei $k = -\frac{1}{f}$ und es mögen analoge Abkürzungen für alle übrigen, durch die verschiedenen Indices unterschiedenen Grössen gelten. Die Einfallshöhen irgend eines zur Axe ursprünglich parallelen Strahles seien der Reihe nach mit $y_1, y_2 \ldots y_m$ bezeichnet und es mögen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ die entsprechenden Gesammtablenkungen des Strahles nach seiner successiven Brechung durch die Linsen bedeuten. Dann ist nach (45), wenn man die Einfallshöhen $y_2, y_3 \ldots$ durch die Ablenkungen ausdrückt:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_1 = -\frac{y_1}{f_1} = k_1 y_1 \\
y_2 = a_1 \delta_1 + y_1 \\
\delta_2 = \delta_1 + \frac{-y_2}{f_2} = k_2 y_2 + \delta_1 \\
y_3 = a_2 \delta_2 + y_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_m = k_m y_m + \delta_{m-1}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man unschwer $y_1, \delta_1, y_2, \delta_2, y_3, \delta_3 \ldots$ als die Theilzähler der successiven Näherungswerthe, δ_m schliesslich als den Theilzähler des letzten Näherungswerthes des Kettenbruches:

$$\cfrac{y_1}{1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots \cdot \cdot \cdot

Ist F_m die Brennweite der einem System von m Linsen äquivalenten Linse, so ist $\delta_m = -\frac{y_1}{F_m}$, oder, wenn man K_m für $-\frac{1}{F_m}$ setzt, $\delta_m = y_1 K_m$. Es stellt dann $K_m = \frac{\delta_m}{y_1}$ den Theilzähler des letzten Näherungswerthes des Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{k_2+\cdots\cdots\cdot\cdot\cdot

Diese Ergebnisse lassen sich auch direkt aus den gegebenen Gleichungen ableiten.

§ 84. Es lässt sich nun eine Formel auffinden, welche zwei auf einanderfolgende Glieder der Reihe K_1, $K_2 \ldots . K_m$ mit einander verbindet und welche uns ein bequemes Mittel an die Hand giebt, ihre Werthe zu bestimmen. Denn nach (46) haben wir:

$$\delta_m = k_m y_m + \delta_{m-1},$$

$$y_m = a_{m-1} \delta_{m-1} + y_{m-1},$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen y_m, so erhält man

$$\delta_m = (1 + a_{m-1} k_m) \delta_{m-1} + k_m y_{m-1},$$

oder nach (45)

$$\delta_m = (1 + a_{m-1} k_m) \delta_{m-1} + k_m \frac{d \delta_{m-1}}{d k_{m-1}}.$$

Substituirt man hierin $K y = \delta$ für alle Indices von K und δ, also $K_m y$ für δ_m, $K_{m-1} y$ für δ_{m-1}, so erhalten wir die letzte Gleichung in der Form:

$$K_m = (1 + a_{m-1} k_m) K_{m-1} + k_m \frac{d K_{m-1}}{d k_{m-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

wodurch K_m bestimmt ist, sobald man K_{m-1} kennt. Z. B. wäre nach (49) und (47) für vier Linsen, also für $m = 4$:

$$K_4 = (1 + a_3 k_4) \left\{ k_1 + k_2 + k_3 + a_2 k_3 (k_1 + k_2) + a_1 k_1 (k_2 + k_3) + a_1 a_2 k_1 k_2 k_3 \right\} + \\ + k_4 \left\{ 1 + a_2 (k_1 + k_2) + a_1 k_1 + a_1 a_2 k_1 k_2 \right\},$$

oder

$$K_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + a_1 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4) + a_2 (k_1 k_3 + k_2 k_3 + k_1 k_4 + \\ + k_2 k_4) + a_3 (k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_3 k_4) + a_2 a_3 (k_1 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_4) + a_3 a_1 (k_1 k_2 k_4 + \\ + k_1 k_3 k_4) + a_1 a_2 (k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4) + a_1 a_2 a_3 k_1 k_2 k_3 k_4,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} = - K_4 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} - \frac{a_1}{f_1} \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right) - \\ - a_2 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) \left(\frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right) - \frac{a_3}{f_4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) + \\ + \frac{a_2 a_3}{f_3 f_4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) + \frac{a_3 a_1}{f_4 f_1} \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) + \\ + \frac{a_1 a_2}{f_1 f_2} \left(\frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right) - \frac{a_1 a_2 a_3}{f_1 f_2 f_3 f_4}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Dieser Ausdruck charakterisirt eine Linse, welche vier gegebenen, in Abständen a_1, a_2, a_3 von einander angeordneten Linsen äquivalent ist.

§ **85.** Besteht das einfallende Strahlenbüschel aus beliebig geneigten Strahlen, so ist die Lage der äquivalenten Linsen nicht mehr, wie bei einem aus parallelen Strahlen bestehenden Lichtbündel, gleichgültig und muss daher bestimmt werden. Bezeichnen wir den Konvergenzwinkel des einfallenden Strahles mit δ und bedienen uns derselben Bezeichnungen wie bisher, so bleiben sämmtliche unter (46) gegebenen Gleichungen unverändert mit Ausnahme der ersten derselben, indem diese die Form

$$\delta_1 = k_1 y_1 + \delta = y_1 \left(k_1 + \frac{\delta}{y_1} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

annimmt, und es wird daher der schliessliche Werth von δ_m unverändert bleiben, wenn man für k_1 seinen neuen Werth $k_1 + \frac{\delta}{y_1}$ einführt. Bezeichnet man den reciproken Werth der Brennweite der äquivalenten Linse mit K, so wird, da K eine Funktion erster Ordnung von k_1 ist, der neue Werth von K sein:

$$\left.\begin{aligned} K' &= K + \frac{\delta}{y_1} \cdot \frac{d\,K}{d\,k_1}, \\ \text{so dass} \qquad K'\,y_1 &= \delta_m = K\,y_1 + \delta \frac{d\,K}{d\,k_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Bedeutet x den Abstand der äquivalenten Linse hinter der ersten Linse des Systems, so trifft der Einfallsstrahl die Linse in einem Abstande $y_1 + x\,\delta$ von der Axe und der Konvergenzwinkel der durch dieselbe gebrochenen Strahlen wird demnach sein:

$$\begin{aligned} \delta' &= K\,(y_1 + x\,\delta) + \delta \\ &= K\,y_1 + \delta\,(1 + K\,x). \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth demjenigen von δ_m in (52) gleich, so ist

$$1 + K\,x = \frac{d\,K}{d\,k_1},$$

und hieraus

$$x = \frac{1}{K} \left(\frac{d\,K}{d\,k_1} - 1 \right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Dieser Ausdruck bestimmt die Lage der Linse, welche dem gegebenen System von Linsen äquivalent ist.