Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel IV. Elemantare Theorie der Brechung durch Linsen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6537

Kapitel IV.

Elementare Theorie der Brechung durch Linsen.

§ 51. Unter einer Linse versteht man den Theil eines brechenden Mediums, welcher durch zwei Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe, Linsenaxe genannt, begrenzt ist. In den allermeisten praktischen Fällen sind diese Rotationsflächen sphärisch oder eben. Wenn sich die Begrenzungsflächen nicht schneiden, hat man sich die Linse als einen an seinen beiden Enden durch die eben definirten Flächen begrenzten Cylinder vorzustellen, dessen Axe mit derjenigen der Rotationsflächen zusammenfällt.

Den Abstand der Begrenzungsflächen, gemessen als Abschnitt auf der Axe, nennt man die Dicke der Linse. Die Dicke wird im Vergleich mit den Krümmungsradien der Begrenzungsflächen im Allgemeinen klein sein.

Man unterscheidet und benennt die Linsen nach ihrer Form. Eine von zwei konvexen Flächen begrenzte Linse nennt man eine Bikonvexlinse, eine von zwei konkaven Flächen begrenzte dagegen eine Bikonkavlinse. Eine Linse, deren eine Fläche konvex, die andere konkav ist, heisst eine konvex-konkave oder eine konkav-konvexe Linse, je nachdem das Licht zuerst auf die konvexe oder konkave Fläche fällt. Die Bezeichnungen plan-konvex, konvex-plan, plan-konkav und konkav-plan bedürfen hiernach keiner weiteren Erläuterung.

§ 52. Untersuchen wir zunächst die Brechung des Lichtes durch eine einzelne bikonvexe Linse, deren Krümmungsradien mit r und r' bezeichnet sein mögen. In der Folge werden wir uns der Kürze halber der folgenden aus (12, III) für den Uebergang aus Luft in ein anderes Medium sich ergebenden Bezeichnungen bedienen:

$$\frac{r}{n-1} = f; \quad \frac{r'}{n-1} = f' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und setzen nc für die Dicke der Linse, wobei n der Brechungsexponent des Linsenmaterials ist, denjenigen der Luft als Einheit vorausgesetzt.

Wie wir sehen werden, liegen auf der Axe zwei Punkte, deren Eigenschaften ein bequemes Mittel liefern, um die Lagen konjugirter Punkte sowie die Richtung zusammengehöriger Ein- und Austrittsstrahlen zu bestimmen. Es sind diese Punkte ein Paar konjugirter Punkte, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass jeder durch einen derselben gehende Eintrittsstrahl als zu letzterem parallel gerichteter Austrittsstrahl durch den anderen Punkt geht. Man bezeichnet solche Punkte als Knotenpunkte, und auch infolge einer weiteren ihnen zukommenden Eigenthümlichkeit, welche später behandelt werden soll, als die Hauptpunkte der Linse. Um nun die Lage und Eigenschaften jener Knotenpunkte zu bestimmen, ziehen wir in Fig. 39 zwei beliebige parallele Radien OQ und O′Q′ nach den beiden sphärischen Linsenflächen, verbinden Q mit Q′ und be-

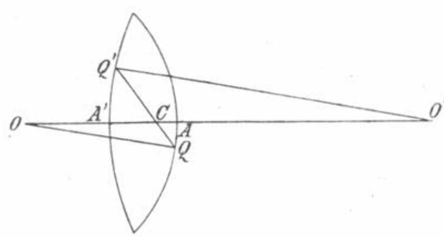

Fig. 39.

zeichnen den Schnittpunkt dieser letzteren Verbindungslinie und der Axe mit C. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OCQ und O′CQ′ ergiebt sich die Proportion:

$$OC : O'C = r : r';$$

es ist somit C ein festliegender Punkt. Jeder bei seinem Durchtritt durch die Linse durch C gehende Strahl tritt in einer zu seiner ursprünglichen Richtung parallelen Richtung aus der Linse hervor, indem die Tangentialebenen in Q und Q′ zu einander parallel sind und die Linse in diesem Falle genau wie eine plan-parallele Platte wirkt. Nehmen wir also an, N und N′ seien die dem Punkte C konjugirten Punkte in Bezug auf jede der beiden Linsenflächen, so wird ein von N ausgehender Lichtstrahl nach der ersten Brechung durch C gehen, und daher nach der zweiten Brechung durch N′ und parallel zu seiner ursprünglichen Richtung wieder aus der Linse hervortreten; mit anderen Worten: N und N′ sind die

Knotenpunkte der Linse. Den Punkt C nennt man den Mittelpunkt der Linse.

Es lässt sich nun leicht die Lage der Knotenpunkte bestimmen. Der Abstand zwischen den Krümmungsmittelpunkten der brechenden Kugelflächen von einander lässt sich, wie man ohne Weiteres aus der Figur ersieht, durch die Gleichung ausdrücken:

$$\mathrm{OO}' = r + r' - n c ,$$

wobei die Krümmungsradien von den Scheiteln aus in die Linse hinein als positiv gemessen werden. Ferner, da

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OC} + \mathrm{O'C} = r : r + r',$$

so ist

$$\mathrm{OC} = \frac{r}{r + r'} (r + r' - n c),$$

$$= r - \frac{n c r}{r + r'} ;$$

somit ist

und analog

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{AC} &= r - \mathrm{OC} = \frac{n c r}{r + r'} = \frac{n c f}{f + f'} \\ \mathrm{A'C} &= \frac{n c r'}{r + r'} = \frac{n c f'}{f + f'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Bezeichnet man mit h den Abstand zwischen N und A, mit h' denjenigen zwischen N′ und A′, und misst man beide Entfernungen von den Linsenflächen auswärts und giebt also diesen Abständen ein negatives oder positives Vorzeichen, je nachdem die Abmessung der Abstände durch die Linse hindurch oder auswärts erfolgt, so hat man, da N und C konjugirte Punkte sind, nach (11, III) die Relation:

$$\frac{1}{h} + \frac{n}{\mathrm{AC}} = \frac{n - 1}{r},$$

und hieraus nach Gleichung (1) und (2)

$$\frac{1}{h} = - \frac{f + f'}{c f} + \frac{1}{f}.$$

Hieraus folgt als Werth von h:

analog ist

$$\left.\begin{aligned} h &= - \frac{c f}{f + f' - c} ; \\ h' &= - \frac{c f'}{f + f' - c} . \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

§ 53. Einem gegebenen Objekt entsprechen zwei Bilder infolge der zweimaligen Brechung an den beiden Linsenflächen; wir wollen bei der folgenden Untersuchung der Abbildungsvorgänge uns einer symmetrischen Bezeichnungsweise für die Lagen der Bilder auf der Axe bedienen.

x und x' bezeichnen den Abstand des Objektes und seines ersten Bildes vor beziehungsweise hinter der Fläche A; mit y und y' sei der Abstand des zweiten und ersten Bildes hinter resp. vor der zweiten brechenden Fläche bezeichnet. Nach der Formel (11, III) für die Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{n}{x'}&=\frac{n-1}{r} \\ \frac{1}{y}+\frac{n}{y'}&=\frac{n-1}{r'} \\ x'+y'&=nc \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Denkt man sich rechtwinklig zur Axe durch die Knotenpunkte Ebenen gelegt, so entspricht diesen Ebenen, wie wir sehen werden, das Abbildungsverhältniss 1, d. h. irgend ein in der ersten der beiden Ebenen liegendes Objekt erzeugt in der zweiten der genannten Ebenen ein ihm kongruentes Bild. Es lässt sich dieser Satz in der folgenden, etwas modificirten Form zum Ausdruck bringen: *Die Verbindungslinie der Schnittpunkte des einfallenden und austretenden Strahles mit der ersten resp. zweiten der erwähnten Ebenen ist parallel der Axe des Systems.* Diese beiden Ebenen heissen die Hauptebenen und die Punkte, in welchen dieselben die Axe schneiden (und welche in diesem Falle mit den Knotenpunkten identisch sind), bezeichnet man dementsprechend als Hauptpunkte.

Um für diesen Satz einen Beweis zu liefern, bezeichnen wir die linearen Dimensionen des Objektes und seines ersten und zweiten Bildes der Reihe nach mit β, β_1 und β'. Wir erhalten dann nach der Helmholtz'schen Formel (17, III) für unseren Fall nach gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{x}+\frac{n\beta_1}{x'}&=0 \\ \frac{\beta'}{y}+\frac{n\beta_1}{y'}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und hieraus durch Division

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{x\,y'}{y\,x'} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5\text{a})$$

An den Knotenpunkten ist aber nach (2) das Verhältniss $\frac{x'}{y'}$ gleichbedeutend mit $\frac{r}{r'}$.

Aus den Gleichungen (4) folgt aber dann:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{r}{r'} = \frac{\frac{n-1}{r'} - \frac{1}{y}}{\frac{n-1}{r} - \frac{1}{x}},$$

hieraus

$$n - 1 - \frac{r}{x} = n - 1 - \frac{r'}{y},$$

oder

$$\frac{r}{x} = \frac{r'}{y},$$

und hieraus

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{r'}.$$

Es ist somit

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y'}{x'} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{r'}{r} = 1,$$

daher nach (5a)

$$\frac{x\,y'}{y\,x'} = \frac{\beta}{\beta'} = 1,$$

oder

$$\beta = \beta'.$$

§ **54.** Eliminirt man x und y aus (4), so erhält man für c folgenden Werth:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{y}} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

oder

$$c = \frac{f\,x}{x - f} + \frac{f'\,y}{y - f'}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf die bequemere Form:

$$x\,y\,(f + f' - c) - f\,y\,(f' - c) - f'\,x\,(f - c) = c\,f\,f'. \quad \dots \quad (7)$$

Mittelst dieser Formel lassen sich die Fokalabstände bestimmen; es sind dies die Abstände derartig gelegener Punkte, dass die von ihnen divergirenden Strahlen nach der Brechung durch die Linse eine parallele Richtung erhalten; mit anderen Worten, sie bestimmen die Lage der beiden Punkte, welche den auf beiden Seiten der Linse in unendlichen Entfernungen liegenden Punkten konjugirt sind; man nennt diese Punkte die Brennpunkte der Linse. Nehmen wir y als unendlich gross an, so erhalten wir aus (7) als Werth des ersten Fokalabstandes:

und analog

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{f(f'-c)}{f+f'-c} \\ g' &= \frac{f'(f-c)}{f+f'-c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

als Gleichung für den zweiten Fokalabstand, wenn man x unendlich gross werden lässt.

Die Entfernung zwischen dem ersten Brennpunkt und dem ersten Hauptpunkt ist, wie sich aus (3) und (8) ergiebt, gleich derjenigen zwischen dem zweiten Brennpunkt und dem zweiten Hauptpunkt und wird als die Brennweite der Linse bezeichnet. Bezeichnen wir diese Brennweite mit Φ, so muss nach dem eben Gesagten die Relation bestehen:

$$\Phi = g - h = g' - h';$$

denn wenn man die Werthe von g und h resp. g' und h' aus (8) und (3) einsetzt, so erhält man in beiden Fällen

$$\Phi = \frac{ff'}{f+f'-c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

oder schliesslich

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{c}{ff'}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9\,\mathrm{a})$$

Führen wir nach der Division der Gleichung (7) durch $f+f'-c$ die Bezeichnungen g, g' und Φ ein, so gewinnt die Gleichung (7) die Form:

$$xy - gy - g'x = c\,\Phi,$$

oder

$$(x-g)(y-g') = c\,\Phi + g\,g' = c\,\Phi + \frac{f(f'-c)}{f+f'-c} \cdot \frac{f'(f-c)}{f+f'-c}$$

$$= \Phi \left\{ \frac{(f'-c)(f-c)}{f+f'-c)} + c \right\} = \Phi \frac{ff'}{f+f'-c}$$

und schliesslich nach (9)

$$(x-g)(y-g') = \Phi^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Bezeichnet man die Abstände eines Paares konjugirter Punkte vor resp. hinter den Brennpunkten mit u beziehungsweise mit v, so lässt sich das Abhängigkeitsverhältnis dieser Abstände durch die einfache Relation ausdrücken:

$$u\,v = \Phi^2. \qquad (11)$$

Bezeichnet man schliesslich die Abstände eines Paares konjugirter Punkte von den Hauptpunkten mit ε resp. ε' und verfährt bezüglich der Vorzeichen analog den bisher in diesem Kapitel behandelten Fällen, so hat man ohne Weiteres

$$u = \varepsilon - \Phi, \quad v = \varepsilon' - \Phi$$

und somit nach (11)

$$(\varepsilon - \Phi)(\varepsilon' - \Phi) = \Phi^2$$

oder

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{\Phi}. \qquad (12)$$

§ 55. Wir besitzen nunmehr die Mittel, durch geometrische Konstruktion die Lage des einem gegebenen Punkte P konjugirten Punktes P′ zu bestimmen. F und F′ (Fig. 40) seien die Brennpunkte, H und

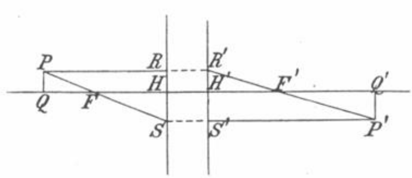

Fig. 40.

H′ die Hauptpunkte der Linse. Gelingt es uns, den Gang nur zweier von P ausgehender Strahlen nach der Brechung durch die Linse darzustellen, so ergiebt sich aus dem Schnittpunkt dieser der gesuchte Punkt P′. Als den einen dieser Ausgangsstrahlen wählen wir den zur Axe parallelen Strahl PR, welcher die erste Hauptebene in dem Punkte R schneiden möge; es wird dann der zugehörige austretende Strahl durch R′ treten, wenn PR′ die geradlinige Verlängerung von PR bis zur zweiten Hauptebene darstellt. PR und QH sind aber zwei parallel einfallende Strahlen und müssen daher nach der Brechung in dem Punkte F′ homocentrisch werden; somit stellt R′F′ die Richtung des fraglichen Austrittsstrahles dar. Als zweiten Strahl nehmen wir den Strahl PF, welcher die erste Hauptebene in S schneiden mag; es wird dann der Austrittsstrahl parallel zur Axe sein und geht durch S′, die Projektion des Punktes S auf die zweite Hauptebene. Hierdurch ist die Lage des Punktes P′ ohne Weiteres bestimmt.

§ **56.** Bezeichnen β und β' die linearen Dimensionen des Objektes PQ und seines nach der oben angegebenen Methode konstruirten Bildes P′Q′ und sieht man diese Grössen als positiv an, wenn sie über der Axe, als negativ, wenn sie unter derselben liegen, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PQF und SHF, sowie der Dreiecke P′Q′F′ und R′H′F′ die Proportionen:

$$\mathrm{PQ : QF = SH : HF},$$

und

$$\mathrm{P'Q' : Q'F' = R'H' : H'F'}.$$

Da aber $\mathrm{PQ} = \beta$, $\mathrm{QF} = u$, $\mathrm{SH} = \mathrm{P'Q'} = -\beta'$, $\mathrm{Q'F'} = v$, $\mathrm{R'H'} = \mathrm{PQ} = \beta$ und $\mathrm{HF} = \mathrm{H'F'} = \Phi$, so lassen sich die letzteren Relationen auch in dieser Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= -\frac{u}{\Phi} \\ \text{und} \qquad \frac{\beta'}{\beta} &= -\frac{v}{\Phi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

§ **57.** Zwei Specialfälle seien hier besonders behandelt: Nehmen wir als ersten Fall an, die Dicke der Linse sei gegenüber den Krümmungsradien ihrer Flächen sehr klein; eine solche Linse bezeichnen wir als eine dünne Linse. In diesem Falle kann man die Scheitelpunkte als mit C zusammenfallend ansehen und ebenso decken sich, wie unmittelbar aus (3) hervorgeht, indem $c = 0$, die Knotenpunkte mit den Scheiteln A und A′. Wir haben in diesem Fall nach (4) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{n}{x'} &= \frac{n-1}{r} \\ \frac{1}{y} + \frac{n}{y'} &= \frac{n-1}{r'} \end{aligned}\right\}$$

und

$$x' + y' = 0.$$

Durch Addition verschwinden x' und y' und man erhält dann nach (1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'},$$

daher nach (9a)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(n-1)\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right\}=\frac{1}{\Phi} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Wie oben ausgeführt, erhalten wir auch hier zwei Brennpunkte, deren jeder sich in einem Abstande Φ von der Linse befindet. Bezeichnen u und v die Abstände eines Paares konjugirter Punkte von diesen Brennpunkten, so dass also

$$\left.\begin{aligned} u &= x-\Phi \\ v &= y-\Phi \end{aligned}\right\},$$

so ist nach (10), da in dem vorliegenden Falle $\Phi = g$,

$$u\,v=\Phi^2.$$

§ 58. Zweitens sei die Linse eine vollständige Kugel. In diesem Falle messen wir alle Abstände von dem Mittelpunkte der Kugel.

x und x' seien die Abstände des Objektes und seines ersten Bildes vor beziehungsweise hinter dem Mittelpunkt, y und y' die Abstände des letzten und ersten Bildes hinter beziehungsweise vor dem Mittelpunkt der Kugel. Wir erhalten in diesem Falle nach (10, III) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n}{x}+\frac{1}{x'} &= \frac{n-1}{r} \\ \frac{n}{y}+\frac{1}{y'} &= \frac{n-1}{r} \\ x'+y' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Hieraus

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2(n-1)}{n\,r}.$$

Nach (9) ist aber $\frac{1}{\Phi}=\frac{f+f'-c}{ff'}$, und da nach (1) $f=\frac{r}{n-1}=f'$ und $nc=2r$, also $c=\frac{2r}{n}$, so ist

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{\frac{2r}{n-1}-\frac{2r}{n}}{\left(\frac{r}{n-1}\right)^2}=\frac{2(n-1)}{n\,r};$$

mithin

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\Phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Setzt man in Fig. 41 $OF = OF' = \Phi$, so dass F und F' als die Brennpunkte anzusehen sind und bezeichnet PF und P'F', die Abstände zweier konjugirter Punkte P und P' von den zugehörigen

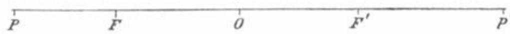

Fig. 41.

Brennpunkten F und F', mit u und v, so besteht auch hier die im letzten Paragraphen angegebene Relation:

$$uv = \Phi^2, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

indem wieder

$$u = x - \Phi$$

und

$$v = y - \Phi.$$

§ 59. Wir wollen an dieser Stelle an der Hand der im Vorhergehenden erhaltenen Formeln die Lagen der Kardinalpunkte für verschiedene Linsenformen bestimmen.

I. Bikonvexe Linsen (Fig. 42).

Es liegt hier der typische Fall vor, welchen wir unserer Untersuchung zu Grunde legten; wir haben die Radien r und r' hier beide als positiv anzusehen. Wir nehmen an, dass in diesem wie in allen folgenden Fällen das Licht von links nach rechts gehe und wollen dementsprechend die Reihenfolge der brechenden Flächen durch die Ziffern 1 und 2 unterscheiden.

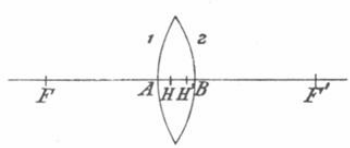

Fig. 42.

Die Abstände der Hauptpunkte gemessen von den brechenden Flächen durch den Linsenkörper hindurch sind nach (3) und (1) beziehungsweise

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{cf}{f + f' - c} = \frac{c\,\frac{r}{n-1}}{\frac{r}{n-1} + \frac{r'}{n-1} - c} = \frac{cr}{r + r' - (n-1)\,c} \\ &\text{und} \\ h' &= \frac{cr'}{r + r' - (n-1)\,c} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Der Abstand zwischen den Hauptpunkten von links nach rechts gemessen ist demnach $nc - h - h'$, d. h.

$$\mathrm{HH'} = a = \frac{(n-1)\,c\,(r + r' - nc)}{r + r' - (n-1)\,c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ebenso ergiebt sich für die Brennweite aus (9)

$$\Phi = \frac{ff'}{f + f' - c} = \frac{rr'}{(n-1)\left\{r + r' - (n-1)\,c\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Ist die Dicke der Linse kleiner als $r + r'$, d. h. $r + r' > nc$, so haben h, h', a und Φ alle einen positiven Werth und die in Betracht kommenden Punkte liegen in der durch Fig. 42 veranschaulichten Reihenfolge.

In dem Grenzfall, wo einer der Radien unendlich gross wird, tritt die Linse als plan-konvexe Linse auf. Wenn z. B. r als unendlich gross angenommen wird, so ist $h' = 0$, so dass in diesem Falle einer der Hauptpunkte auf der sphärischen Fläche liegt.

II. Bikonkave Linse (Fig. 43).

Bei dieser sind r und r' beide negativ, so dass h, h' und a alle positiv sind, Φ dagegen ein negatives Vorzeichen hat. Die Reihenfolge der Kardinalpunkte ist durch Fig. 43 gekennzeichnet. Wenn

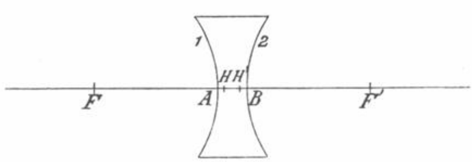

Fig. 43.

der Krümmungsradius einer der Flächen unendlich gross ist, so wird die Linse eine plan-konkave Linse und einer der Hauptpunkte liegt alsdann auf der gekrümmten Fläche.

III. Konvex-konkave Linse.

Betrachten wir den Fall, wo r positiv, r' negativ ist. Der umgekehrte Fall lässt sich dann aus diesem in der Weise ableiten, dass man sich den Strahlengang als in umgekehrter Richtung verlaufend vorstellt; die Lagen der Kardinalpunkte werden in beiden Fällen die nämlichen sein. Der bequemeren Uebersicht halber schreiben wir uns wiederum die Werthe für h, h', a und Φ mit entsprechend veränderten Vorzeichen von r hin. Es sind diese demnach

$$h = \frac{cr}{r - r' - (n-1)c},$$

$$h' = \frac{-cr'}{r - r' - (n-1)c},$$

$$a = \frac{(n-1)c(r - r' - nc)}{r - r' - (n-1)c},$$

$$\Phi = \frac{-rr'}{(n-1)\left\{r - r' - (n-1)c\right\}}.$$

Betrachten wir die verschiedenen Fälle einzeln für sich:

1. r sei kleiner als r' (Fig. 44). In diesem Falle ist h negativ, a ist positiv und ebenfalls Φ positiv. Die relative Lage der Krümmungsmittelpunkte und der Kardinalpunkte ist in Fig. 44 angedeutet. Eine solche Linse hat ihre grösste Dicke in der Mitte, während sie nach dem Rande zu dünner wird.

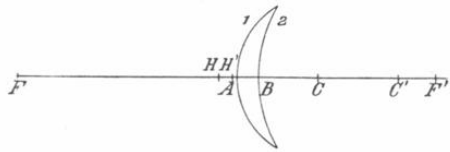

Fig. 44.

2. r sei grösser als r', aber der Krümmungsmittelpunkt der Fläche 1 liege hinter dem Krümmungsmittelpunkt der Fläche 2 (Fig. 45).

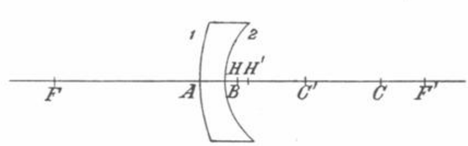

Fig. 45.

Hierdurch wird bedingt, dass $r > r' + nc$ oder $r - r' > nc$ und *a fortiori* $r - r' > (n-1)c$.

Der Werth von h wird positiv, a ebenfalls positiv, h und Φ dagegen negativ. Die relativen Lagen der Krümmungsmittelpunkte und der Kardinalpunkte für diesen Fall sind in Fig. 45 angedeutet. Diese Linse wird in der Mitte am dünnsten sein und nach dem Rande zu ihre grössere Dicke haben.

3. r sei grösser als r', aber der Krümmungsmittelpunkt der

Fläche 1 liege vor demjenigen der Fläche 2. In diesem Falle ist $r-r'<nc$, kann aber ebensowohl kleiner als grösser als $(n-1)c$ sein.

α) Nehmen wir den ersteren Fall an, dass also $r-r'<(n-1)c$ ist, so erhält h einen negativen, a einen positiven und ebenfalls Φ einen positiven Werth, und dieser Fall stimmt mit jenem unter (1) diskutirten überein.

β) Setzen wir den anderen Fall voraus, ist also $r-r'<nc$, aber $r-r'>(n-1)c$, so stellen sich Φ und a als negativ, h als positiv heraus. Die Kardinalpunkte sind in Fig. 46 ihrer Lage nach angegeben. Die unter 3. betrachtete Linse hat ihre grösste Dicke in der Mitte.

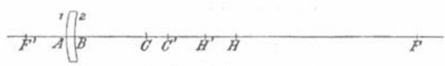

Fig. 46.

Fassen wir die Resultate der letzten Diskussionen der Gleichungen für h, h', a und Φ zusammen, so gelangen wir zu dem folgenden Schluss:

Diejenigen Linsen, welche positive Brennweiten haben, haben in der Mitte ihre grössten Dicken, während solche Linsen, welche in der Mitte ihre geringste Dicke haben, negative Brennweiten haben.

Diese Schlussfolgerungen sind indessen nicht ohne Weiteres umkehrbar; denn es giebt, wie wir sub 3 β) gesehen haben, eine Linsenform, bei welcher die grösste Dicke in der Mitte der Linse auftritt und die Linse dennoch eine negative Brennweite hat.

§ **60.** In derselben Weise, wie die Untersuchung einer einzelnen Linse in § 53 u. s. f. vorgenommen wurde, lässt sich auch der Fall eines Systems mehrerer Linsen behandeln.

Es seien in Fig. 47 H und H' die Hauptpunkte und f die Brennweite der ersten Linse; ferner seien mit K und K' die Hauptpunkte und

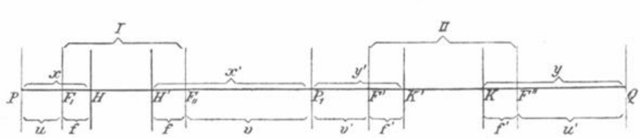

Fig. 47.

mit f' die Brennweite der zweiten Linse bezeichnet. P sei ein leuchtender Punkt, P_1 der ihm infolge der Brechung durch die erste Linse konjugirte Punkt, Q der infolge der Brechung durch die zweite Linse dem letzteren konjugirte Bildpunkt. Bezeichnet man ferner mit x und x' die Abstände der Punkte P und P_1 von den Hauptpunkten H und H' beziehungsweise, wobei diese Abstände wie bisher bezüglich ihrer Vorzeichen gemessen sein sollen, und bezeichnet man endlich mit y und y' die Abstände der Punkte Q und P_1 von den Hauptpunkten K resp. K', so ist, wenn man für H'K' die Bezeichnung c wählt, $x' + y' = c$. Ferner ist, da nach (11) $uv = f^2$, $(x-f)(x'-f) = f^2$; und hieraus

und analog
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{f} \\[2ex] \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y'} = \dfrac{1}{f'} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Eliminirt man x' und y', so erhält man die Gleichung:

$$c = \frac{1}{\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{x}} + \frac{1}{\dfrac{1}{f'} - \dfrac{1}{y}},$$

woraus nach gehöriger Umformung entsteht:

$$xy(f+f'-c) - fy(f'-c) - f'x(f-c) - cff' = 0. \quad . \quad . \quad (21)$$

Um die Lagen der Brennpunkte zu bestimmen, lassen wir einmal x und dann y unendlich gross werden; lassen wir y unendlich gross werden, so erhalten wir als Ausdruck für den ersten Fokalabstand, bezogen auf den ersten Hauptpunkt der ersten Linse, wenn wir $x = g$ setzen,

und analog
$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{f(f'-c)}{f+f'-c} \\[2ex] g' = \dfrac{f'(f-c)}{f+f'-c} \end{array}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

wenn $y = g'$ den zweiten Fokalabstand, bezogen auf den zweiten Hauptpunkt der zweiten Linse, bezeichnet.

Bedeuten β, β_1 und β' der Reihe nach die linearen Dimensionen des Objektes P und seiner successiven Bilder P_1 und Q, so ist gemäss der Definition der Hauptpunkte

und
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\beta}{x} = -\dfrac{\beta_1}{x'} \\[2ex] \dfrac{\beta'}{y} = -\dfrac{\beta_1}{y'} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Die Hauptpunkte entsprechen, wie bereits angeführt und in § 53 bewiesen wurde, dem Abbildungsverhältnis 1, und um die Lage der Hauptpunkte des Systems zu bestimmen, haben wir demnach nur $\beta = \beta'$ zu setzen; unter dieser Voraussetzung müssen auch die zugehörigen Abscissen der Bedingung genügen $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, wie sich ohne Weiteres aus (23) ergiebt, und aus (20) folgt, dass diese beiden Quotienten gleichbedeutend mit $\frac{f}{f'}$ sind. Es ist also $\frac{x'}{y'} = \frac{f}{f'}$, und daher auch $\frac{x'+y'}{x'} = \frac{f+f'}{f}$. Berücksichtigen wir endlich, dass $x'+y'=c$, so erhalten wir als schliessliche Werthe von x' und y':

und analog
$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{cf}{f+f'} \\ y' &= \frac{cf'}{f+f'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Bezeichnen h und h' die Werthe von x und y, welche diesen soeben charakterisirten Werthen von x' und y' entsprechen, so haben wir nach (20) und (24):

$$\frac{1}{h} + \frac{f+f'}{cf} = \frac{1}{f},$$

hieraus

und analog
$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{cf}{f+f'-c} \\ h' &= -\frac{cf'}{f+f'-c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

als *die Abscissen der Hauptpunkte des Systems, bezogen auf den ersten Hauptpunkt der ersten resp. zweiten Hauptpunkt der zweiten Linse.*

Bedeutet Φ die Brennweite des Systems, so ist

$$\Phi = g - h = g' - h',$$

und somit

$$\Phi = \frac{ff'}{f+f'-c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Die Lage sämmtlicher Kardinalpunkte des Systems ist hiermit bestimmt und es ist damit das Problem vollständig gelöst.

Die Lage der Hauptpunkte H und H' und die Brennweite f können nun ebensowohl auf irgend ein Linsensystem wie auf eine einzelne Linse bezogen werden, und dieselbe Bemerkung gilt für die Hauptpunkte K und K' und die Brennweite f'. Diese Untersuchung eines Systems zweier Linsen giebt uns somit ein Mittel, zwei beliebige Systeme von Linsen zu verbinden.

§ 61. Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Abscissen und Dimensionen eines Objektes und seines Bildes nach der *Brechung an einer beliebigen Anzahl von centrirten brechenden Kugelflächen* zu bestimmen. Als besonderer Fall lässt sich hieraus die Brechung durch eine beliebige Anzahl centrirter Linsen beliebiger Dicke ableiten.

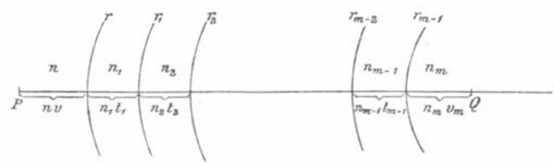

Fig. 48.

Wir wollen annehmen, es seien m brechende Flächen vorhanden und bezeichnen die absoluten Brechungsexponenten der verschiedenen Medien mit $n, n_1, n_2 \ldots . n_m$, die m Radien der brechenden Flächen mit $r, r_1, r_2 \ldots r_{m-1}$ und setzen der Kürze halber

$$\frac{n - n_1}{r} = k_0,$$

$$\frac{n_1 - n_2}{r_1} = k_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n_{m-1} - n_m}{r_{m-1}} = k_{m-1}.$$

Ferner seien die Dicken der Medien auf der Axe gemessen der Reihe nach mit $n_1 t_1, n_2 t_2, \ldots . n_{m-1} t_{m-1}$ bezeichnet. Endlich bezeichnen wir den Abstand des Objektes von der ersten Fläche mit $n v$, den Abstand des ersten Bildes, ebenfalls von der ersten Fläche gemessen, mit $n_1 v_1$, den Abstand des zweiten Bildes, gemessen von der zweiten Fläche, mit $n_2 v_2$ u. s. f. und schliesslich den Abstand des letzten Bildes von der letzten Fläche mit $n_m v_m$, wobei wir in der Richtung des einfallenden Lichtes gemessene Abstände als positiv ansehen, und verfolgen wir nun von dem letzten Bilde ausgehend die Abbildungsvorgänge rückwärts, um das Abhängigkeitsverhältnis dieser Grössen zu bestimmen, so erkennen wir unter Bezugnahme auf Fig. 48 als die Abstände der beiden letzten Bilder von der letzten Fläche ohne Weiteres

$$n_m v_m \text{ und } -(n_{m-1} t_{m-1} - n_{m-1} v_{m-1}) = n_{m-1}(v_{m-1} - t_{m-1}),$$

und da dies die Abstände konjugirter Punkte in Bezug auf die letzte brechende Fläche sind, so ist nach (11, III):

$$\frac{n_m}{n_m v_m} - \frac{n_{m-1}}{n_{m-1}(v_{m-1} - t_{m-1})} = \frac{n_m - n_{m-1}}{r_{m-1}}$$

oder

$$\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_{m-1} - t_{m-1}} = -k_{m-1}.$$

Diese Gleichung lässt sich nun auch in dieser Form schreiben:

$$v_{m-1} = t_{m-1} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{v_m}}.$$

In ganz analoger Weise lässt sich zeigen, dass

$$v_{m-2} = t_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{v_{m-1}}},$$

und daher

$$v_{m-2} = t_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{t_{m-1} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{v_m}}}}.$$

Setzen wir diese Untersuchung rückwärts weiter fort, so gelangen wir schliesslich zu dem Ausdruck:

$$v_1 = t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{v_m}}}}}.$$

Da aber die Abstände $n v$ und $n_1 v_1$ als Abscissen konjugirter Punkte in Bezug auf die erste Fläche durch die Relation

$$\frac{n}{n v} - \frac{n_1}{n_1 v_1} = \frac{n - n_1}{r}$$

verbunden sind, so ist

$$\frac{1}{v} = k_0 + \frac{1}{v_1}$$

und daher

$$\frac{1}{v} = k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{v_m}}}}}}.$$

§ **62.** Sind $\frac{g}{h}$ und $\frac{k}{l}$ die beiden letzten Näherungswerthe des Kettenbruches

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \ldots \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{v_m}}}},$$

so dass gemäss der Eigenthümlichkeit eines solchen Kettenbruches, dessen sämmtlichen Theilzähler gleich 1 sind, $gl - hk = 1$, so ergiebt sich der Werth von v aus der Gleichung:

$$\frac{1}{v} = \frac{v_m k + g}{v_m l + h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Der besseren Uebersicht halber bezeichnen wir den Abstand des Objektes und seines letzten Bildes von der ersten resp. letzten Fläche mit ξ und ξ', so dass $\xi = nv$ und $\xi' = n'v_m$, wo n' an Stelle von n_m für den Brechungsexponenten des letzten Mediums treten möge. Die Relation zwischen ξ und ξ' ist dann nach (27), wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite mit n' multiplicirt,

$$\frac{n}{\xi} = \frac{\xi' k + n' g}{\xi' l + n' h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

oder

$$k \xi \xi' + n' g \xi - n l \xi' - n n' h = 0 \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

§ **63.** Die Brennebenen des Systems sind die den in unendlicher Entfernung befindlichen Ebenen konjugirten Ebenen.

Um die Lage der ersten Brennebene zu bestimmen, müssen wir ξ' unendlich gross werden lassen; es werden dann die Strahlen im letzten Medium parallel sein müssen. Der dieser Bedingung entsprechende Werth von ξ ist nach (29), wenn man diese Gleichung durch ξ' dividirt, und analog ist

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{n\,l}{k} = \gamma_1\\ \xi' &= -\frac{n'\,g}{k} = \gamma_2\end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

indem $\xi = \infty$ die Bedingung für den Parallelismus der Strahlen im ersten Medium liefert.

Das Abhängigkeitsverhältnis von ξ und ξ' kann nach (29) nun folgendermaassen geschrieben werden:

$$\xi\,\xi' + \frac{n'\,g\,\xi}{k} - \frac{n\,l\,\xi'}{k} - \frac{n\,n'\,h}{k} = 0,$$

oder nach (30)

$$\xi\,\xi' - \gamma_2\,\xi - \gamma_1\,\xi' = \frac{n\,n'\,h}{k},$$

oder

$$(\xi - \gamma_1)\,(\xi' - \gamma_2) = \frac{n\,n'\,h}{k} - \frac{n\,n'\,l\,g}{k^2}$$

$$= -\frac{n\,n'}{k^2}\left\{g\,l - h\,k\right\},$$

d. h., da für den vorliegenden Kettenbruch $g\,l - h\,k = 1$ ist,

$$(\xi - \gamma_1)\,(\xi' - \gamma_2) = -\frac{n\,n'}{k^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Bedeuten u und u' die Abstände zweier konjugirter Ebenen von den Brennebenen, wobei die bisherigen Annahmen bezüglich der Vorzeichen beibehalten werden sollen, so ist $u = \gamma_1 - \xi$ und $u' = \xi' - \gamma_2$. Setzt man ferner $f = -\frac{n}{k}$ und $f' = -\frac{n'}{k}$, so nimmt die Beziehung zwischen den Abscissen konjugirter Punkte die Form an:

$$u\,u' = f\,f'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

§ **64.** α, α_1, α_2 .... seien der Reihe nach die Konvergenzwinkel eines durch verschiedene Medien verlaufenden Strahles; b, b_1, b_2 .... bedeuten der Reihe nach die entsprechenden Axenabstände der Punkte, in welchen der Strahl die sphärische Fläche trifft, die sogenannten Einfallshöhen; ferner benützen wir die Substitutionen:

$$n \operatorname{tg} \alpha = \beta\,; \quad n_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \beta_1 \ldots.$$

In Fig. 49 stelle QAA_1 die Axe des Systems dar, QP den einfallenden Strahl, Q_1PP_1 die Richtung des erstmals gebrochenen

Strahles in seiner Rückwärtsverlängerung bis zum Schnittpunkt Q_1 mit der Axe. Es ist dann

$$AQ = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b\,n}{\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich die Relation

$$\frac{n}{AQ} = \frac{\beta}{b}.$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$\frac{n_1}{AQ} = \frac{\beta_1}{b}.$$

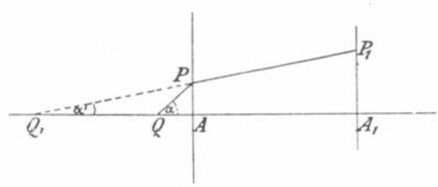

Fig. 49.

Nach (11, III) aber ist

$$\frac{n}{AQ} - \frac{n_1}{AQ_1} = \frac{n_1 - n}{r} = -\frac{n - n_1}{r},$$

oder

$$\frac{\beta}{b} - \frac{\beta_1}{b} = -k_0$$

und hieraus

$$\beta_1 = \beta + k_0\, b.$$

Aus Fig. 49 ist ferner ohne Weiteres ersichtlich, dass

$$b_1 = b + n_1\, t_1 \operatorname{tg} \alpha_1;$$

das heisst

$$b_1 = b + t_1\, \beta_1.$$

In ganz analoger Weise lässt sich zeigen, wenn man die Relation zwischen den Abständen $A_1 Q_1$ und $A_1 Q_2$ bestimmt, dass

$$\beta_2 = \beta_1 + k_1\, b_1,$$

$$b_2 = b_1 + t_2\, \beta_2 \quad \text{u. s. f.}$$

§ **65.** Aus diesen Gleichungen lassen sich die Grössen β_1, b_1, β_2, b_2 ... sämmtlich als Funktionen von b und β ausdrücken; es erhalten jene Grössen hierbei folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= k_0\, b + \beta,\\ b_1 &= (k_0\, t_1 + 1)\, b + t_1\, \beta,\\ \beta_2 &= \left\{k_1 (k_0 t_1 + 1) + k_0\right\} b + (k_1\, t_1 + 1)\, \beta \text{ u. s. f.}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Die Faktoren von b und β in diesen Gleichungen erkennt man ohne Weiteres als die Zähler beziehungsweise Nenner der auf einander folgenden Näherungswerthe des Kettenbruches

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots}}}} \qquad \ldots + \frac{1}{k_{m-1}},$$

indem

$$k_0 = \frac{k_0}{1},$$

$$k_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{k_0\, t_1 + 1}{t_1},$$

$$k_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_1}} = \frac{k_0\, k_1\, t_1 + k_0 + k_1}{t_1\, k_1 + 1} = \frac{k_1\,(k_0\, t_1 + 1) + k_0}{t_1\, k_1 + 1} \quad \text{u. s. f.}$$

Bezeichnet man diese Näherungswerthe der Kürze halber mit $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$ . . ., so dass also

$$\begin{aligned} p_1 &= k_0,\\ q_1 &= 1,\\ p_2 &= k_0\, t_1 + 1,\\ q_2 &= t_1,\\ p_3 &= k_1\,(k_0\, t_1 + 1) + k_0,\\ q_3 &= t_1\, k_1 + 1 \;\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so lassen sich die Gleichungen (33) folgendermaassen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= p_1\, b + q_1\, \beta \\ b_1 &= p_2\, b + q_2\, \beta \\ \beta_2 &= p_3\, b + q_3\, \beta \\ b_2 &= p_4\, b + q_4\, \beta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m-1} &= p_{2m-2}\, b + q_{2m-2}\, \beta \\ \beta_m &= p_{2m-1}\, b + q_{2m-1}\, \beta\end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

wo m die Anzahl der vorhandenen brechenden Flächen bedeutet.

Bezeichnen wir die beiden letzten Näherungswerthe mit $\frac{g}{h}$ und $\frac{k}{l}$ und beachten, dass gemäss der Eigenthümlichkeit eines Kettenbruches, dessen Theilzähler sämmtlich $= 1$ sind, $g\, l - h\, k = 1$ ist, und führen wir endlich für die Endwerthe b_{m-1}, β_m und n_m bezw. die Bezeichnungen b', β' und n' ein, so erhalten die beiden letzten Gleichungen der Gruppe (34) die Form:

$$\left.\begin{aligned} b' &= g\, b + h\, \beta \\ \beta' &= k\, b + l\, \beta \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Lösen wir diese Gleichungen nach b und β auf, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Relation $g\, l - h\, k = 1$,

$$\left.\begin{aligned} b &= l\, b' - h\, \beta' \\ \beta &= -\, k\, b' + g\, \beta' \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

§ 66. Suchen wir nun einen Ausdruck für das Abbildungsverhältnis eines Punktes und seines Endbildes.

Bezeichnen η, η_1, η_2 ... die linearen Dimensionen eines Objektes und seiner Bilder der Reihe nach, so ist nach der Helmholtz'schen Formel (18, III)

$$n\, \eta\, \mathrm{tg}\, \alpha = n_1\, \eta_1\, \mathrm{tg}\, \alpha_1 = n_2\, \eta_2\, \mathrm{tg}\, \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

das heisst

$$\eta\, \beta = \eta_1\, \beta_1 = \eta_2\, \beta_2 = \ldots .\, \eta'\, \beta', \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

worin η' die lineare Grösse des letzten Bildes bedeutet. Nach (35) wurde bereits als Werth von β' gefunden $\beta' = k\, b + l\, \beta$. Aus Fig. 49 aber geht ohne Weiteres hervor, dass $b = -\, \xi\, \mathrm{tg}\, \alpha = -\, \frac{\xi\, \beta}{n}$, und es ist daher

$$\beta' = -k\frac{\xi\beta}{n} + l\beta,$$

oder

$$\beta' = \frac{k\beta}{n}\left\{\frac{nl}{k} - \xi\right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Nach (30) aber ist

$$\frac{nl}{k} - \xi = \gamma_1 - \xi,$$

und führen wir, wie in § 63, für diese Differenz die Bezeichnung u ein und setzen $f = -\frac{n}{k}$, so nimmt die Gleichung (39) die folgende Form an:

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{u}{f}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Das Abbildungsverhältnis charakterisirt sich nach (38) demnach durch die Relation

$$\frac{\eta}{\eta'} = -\frac{u}{f}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Hieraus leitet sich unter Bezugnahme auf (32) die Gleichung ab:

$$\frac{\eta'}{\eta} = -\frac{u'}{f'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

§ 67. Machen wir $u = -f$ und daher nach (32) $u' = -f'$, so ergiebt sich aus den letzten beiden Gleichungen $\eta = \eta'$; hieraus geht hervor, dass die den Abscissen $u = -f$ und $u' = -f'$ entsprechenden Ebenen dem Abbildungsverhältnis 1 entsprechen; mit anderen Worten, jeder beliebige durch das System tretende Strahl schneidet diese beiden Ebenen in zwei Punkten, welche derart gelegen sind, dass ihre Verbindungslinie parallel zur Axe gerichtet ist. Man nennt sie die Hauptebenen und die Punkte, in welchen sie von der Axe geschnitten werden, die Hauptpunkte des Systems.

H und H′ seien die Hauptpunkte, Q und Q′ irgend ein Paar konjugirter Punkte; ferner sei $QH = x$ und $Q'H' = x'$, wobei die

Fig. 50.

Messung der Abstände als in dem bisher üblichen Sinne vorgenommen vorausgesetzt wird (Fig. 50).

Die Gleichung (32): $uu' = ff'$ ist dann gleichbedeutend mit $(x - f)(x' - f') = ff'$, woraus wir die Beziehung ableiten:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

Die Abstände f und f' nennt man die Brennweiten des Systems.

§ **68.** Wir können jetzt die Lage des Vereinigungspunktes, welcher einem gegebenen Punkte konjugirt ist, sowie die Richtung des einem gegebenen Eintrittsstrahl zugeordneten Austrittsstrahles graphisch bestimmen.

Es seien in Fig. 51 F und F′ die Brennpunkte, H und H′ die Hauptpunkte des Systems. P sei ein gegebener Punkt und es ist der ihm konjugirte Punkt graphisch zu bestimmen. Können wir den Verlauf nur zweier von P ausgehender Strahlen graphisch bestimmen, so ist damit der Punkt P′ bestimmt. Zunächst denke man sich einen Strahl durch F gelegt und es schneide dieser die erste Hauptebene

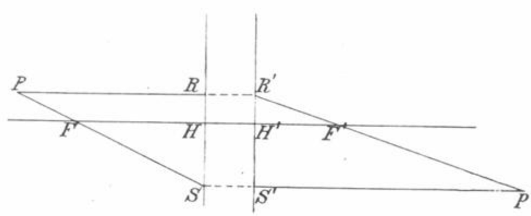

Fig. 51.

in S. Man ziehe alsdann SS′ parallel zur Axe und bezeichne mit S′ den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der zweiten Hauptebene. Da nun die Strahlen FH und FS von demselben Punkte einer Brennebene divergiren, so werden beide Strahlen schliesslich parallel austreten; ziehen wir daher S′P′ parallel zur Axe, so muss diese Linie den dem Strahl PF zugeordneten Austrittsstrahl repräsentiren und wird somit durch den gesuchten Punkt gehen. Zieht man alsdann als zweiten Strahl PR parallel zur Axe, bezeichnet dessen Schnittpunkt mit der ersten Hauptebene mit R und zieht RR′ parallel zur Axe bis zum Punkte R′ der zweiten Hauptebene, so ist R′F′ der entsprechende Austrittsstrahl. Verlängert man nun R′F′ bis zum Schnitte mit S′P′ in P′, so ist P′ der gesuchte Punkt.

§ **69.** Der Austrittsstrahl kann auch auf folgende Weise bestimmt werden:

Es sei in Fig. 52 QPR der Einfallsstrahl, welcher die erste Brennebene in P und die erste Hauptebene in R schneiden möge. Man ziehe RR′ parallel zur Axe bis zum Schnitt mit der zweiten Hauptebene in R′. Der Austrittsstrahl geht dann durch R′. Ferner ziehe man von F aus einen dem erstbetrachteten parallelen Strahl, welcher die erste Hauptebene in S treffen möge. Man ziehe SS'T parallel zur Axe, so dass S' der Schnittpunkt dieser Geraden mit der zweiten Hauptebene, T derjenige mit der zweiten Brennebene ist; S'T ist

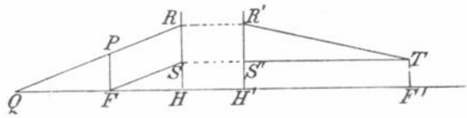

Fig. 52.

dann der dem Strahl FS zugeordnete Austrittsstrahl. PR und FS sind aber parallel und müssen daher nach der Brechung in einem Punkte der durch F' gelegten Brennebene homocentrisch werden. Es ist somit R'T der gesuchte Austrittsstrahl.

§ **70.** Zu einer besonders eleganten Konstruktion gelangen wir, wenn wir von den sogenannten Knotenpunkten ausgehen. Es sind dies zwei Punkte, deren Abscissen die Werthe $u = -f'$ und $u' = -f$ haben. Bezeichnen wir sie mit N und N', so sind N und N' nach (32) einander konjugirt. Sie *besitzen die* fernere *Eigenthümlichkeit, dass ein durch* N *hindurchgehender Einfallsstrahl parallel zur Einfallsrichtung durch* N' *heraustritt.*

Es lässt sich dies darlegen, indem man nach Fig. 53 den Austrittsstrahl, welcher dem durch N gehenden Eintrittsstrahl zugeordnet

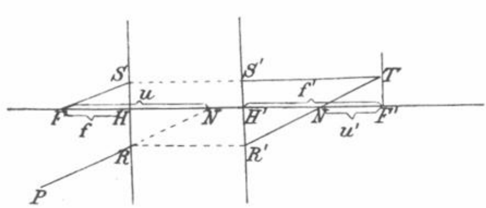

Fig. 53.

ist, konstruirt. Man konstruirt die Punkte R' und T zunächst in derselben Weise, wie dies in § 69 geschah; es wird dann der Austrittsstrahl durch die Verbindungslinie R'T dargestellt. Wenn aber N' der zweite Knotenpunkt ist nach der Bedingung, dass $u' = -f$, so ist F'N' = FH und somit sind die Dreiecke TN'F' und SFH einander kongruent. Ferner ist H'N' = HN und es ergiebt sich daraus die Kongruenz der Dreiecke R'N'H' und RNH. Somit liegen, da FS und PR einander parallel sind, die Linien N'T und N'R' in derselben geraden Linie. Es ist hiermit bewiesen, dass der dem Strahl PN zugeordnete Austrittsstrahl durch N' hindurchgeht und zur Richtung des Einfallsstrahles parallel gerichtet ist.

Sind das erste und letzte Medium gleichartig, so ist $f=f'$, und es fallen dann die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

§ **71.** Es sei in Fig. 54 PQ irgend ein durch P gehender Eintrittsstrahl und N und N′ seien die Knotenpunkte. PQ möge die erste Brennebene in Q schneiden. Man ziehe N′Q′ parallel PQ bis zum Schnitte mit der zweiten Brennebene in Q′ und ziehe Q′P′ parallel QN, verbinde dann P und N und ziehe N′P′ parallel zu NP bis zum Schnitte mit dem Strahl Q′P′ im Punkte P′; es ist dann P′ dem Punkte P konjugirt. Denn zieht man RN parallel zu PQ und N′R′ parallel zu Q′P′, so müssen die einander parallelen Strahlen PQ und RN nach der Brechung in der zweiten Brennebene zur Vereinigung kommen. N′Q′ entspricht aber dem Strahl RN und der Austritts-

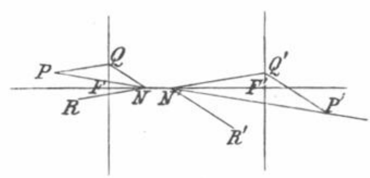

Fig. 54.

strahl geht daher durch Q′. Ferner stellen PQ und QN zwei von einem Punkte der ersten Brennebene ausgehende Strahlen dar und werden somit parallel zu einander zum Austritt gelangen müssen. QN wird parallel zu seiner ursprünglichen Richtung heraustreten und somit ist der Austrittsstrahl Q′P′ parallel dem Strahl QN. Der Strahl PN endlich verläuft von N′ aus in einer zu seiner ursprünglichen Lage parallelen Richtung und somit ist P′ dem Punkte P konjugirt.

§ **72.** In allen Fällen, wo es sich um Brechung durch Linsen in Luft handelt, sind Anfangs- und Endmedium gleicher Art, somit $n=n'$, $f=f'=-\frac{n}{k}$ und die Relation zwischen den Abscissen konjugirter Punkte wird

$$u u' = f^2. \qquad (44)$$

Die Knotenpunkte decken sich in diesem Falle mit den Hauptpunkten, und es ergeben sich sämmtliche Konstruktionen in sehr einfacher Weise aus der Lage von vier Ebenen und der Schnittpunkte derselben mit der Axe, nämlich der beiden Brennebenen und der beiden Brennpunkte, der beiden Hauptebenen und der beiden Hauptpunkte.