

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel III. Reflexion und Brechung centraler Strahlenbündel

Kapitel III.

Reflexion und Brechung centraler Strahlenbüschel.

§ 30. Bisher haben wir nur die Reflexion und Brechung eines einzelnen Strahles betrachtet; wir werden nun zu untersuchen haben, welchen Einfluss die Reflexion und Brechung auf ein Strahlenbüschel ausübt.

Reflexion eines Strahlenbüschels an einer Ebene.

QR (Fig. 19) sei ein beliebiger von einem festen Punkt Q ausgehender Strahl und RS die Richtung des zugehörigen reflektirten Strahles. Man ziehe QM senkrecht zur Spiegelebene und verlängere

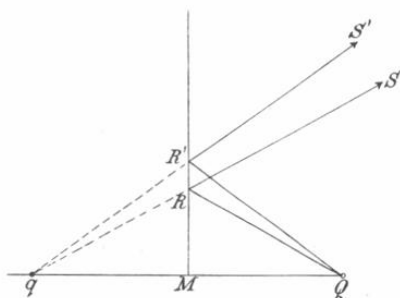


Fig. 19.

RS rückwärts, so dass es die Linie MQ in q schneidet. Diese Konstruktion wird unter allen Umständen möglich sein, da die Linien QM, QR und RS, d. h. die Richtungen des einfallenden und reflektirten Strahles sowie des Einfallslotes, in einer Ebene liegen. Nach dem Reflexionsgesetz ist dann der Winkel $qRM = QRM$, und somit sind die Dreiecke QRM und qRM einander kongruent, so dass also $qM = QM$. Die Lage bleibt, wie man leicht erkennt, dieselbe für jeden von Q ausgehenden Strahl, so dass das Strahlenbüschel nach der Reflexion von q auszugehen scheint. Mit anderen Worten: Die Vereinigungspunkte des einfallenden und reflektirten Strahlenbüschels

liegen auf derselben Senkrechten zur Spiegelebene, auf entgegengesetzten Seiten derselben und in gleichen Abständen von ihr.

§ 31. *Reflexion eines zwischen zwei ebenen Spiegeln befindlichen Punktes* (Fig. 20). Durch den zwischen zwei parallelen Spiegelebenen befindlichen leuchtenden Punkt Q denke man sich eine zu denselben senkrechte Gerade AQB von unbegrenzter Länge gelegt. Nimmt man dann $Aq' = AQ$, so ist q' der Vereinigungspunkt aller von Q ausgehenden, durch den ersten Spiegel reflektirten Strahlen. Diese reflektirten Strahlen, welche von q' auszugehen scheinen, fallen auf den zweiten Spiegel. Nehmen wir daher $Bq'' = Bq'$ an, so ist q'' der Vereinigungspunkt aller zum zweiten Male reflektirten Strahlen, und so fort.

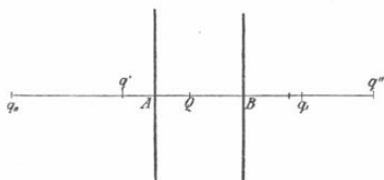


Fig. 20.

Ferner haben die von Q ausgehenden, auf den zweiten Spiegel fallenden Strahlen den Vereinigungspunkt q_1 , wobei wieder $Bq_1 = BQ$; die von diesem Vereinigungspunkt ausgehenden und auf den ersten Spiegel fallenden Strahlen haben den Vereinigungspunkt q_{11} , wobei $Aq_{11} = Aq_1$, u. s. f. Man erhält somit eine unendliche Anzahl von Vereinigungspunkten, welche sämmtlich auf der Geraden AB liegen und nach jeder Reflexion in immer weiteren Entfernungen von den Spiegeln liegen. Die Abstände Qq' , Qq'' ... können leicht berechnet werden. Denn macht man $QA = a$, $QB = b$ und $AB = a + b = c$, so findet man:

$$Qq' = 2AQ = 2a,$$

$$Qq'' = BQ + Bq' = Qq' + 2BQ = 2a + 2b = 2c,$$

$$Qq''' = AQ + Aq'' = Qq'' + 2AQ = 2c + 2a,$$

$$Qq'''' = BQ + Bq''' = Qq''' + 2BQ = 2a + 2b + 2c = 4c \dots \text{u. s. f.}$$

Analog ergibt sich:

$$Qq_1 = 2b; \quad Qq_{11} = 2c; \quad Qq_{111} = 2c + 2b; \quad Qq_{1111} = 4c \dots \text{u. s. f.}$$

§ 32. *Reflexion eines zwischen zwei ebenen, zu einander geneigten Spiegeln befindlichen leuchtenden Punktes; Lage und Anzahl der Vereinigungspunkte der reflektirten Strahlen* (Fig. 21). OA und OB seien die Schnittlinien zweier Spiegel mit einer durch den leuchtenden Punkt Q rechtwinklig

zu ihnen gelegten Ebene. Man fälle von Q aus ein Loth auf den Spiegel OA und verlängere dasselbe, so dass Qq' durch den Spiegel halbiert wird. Es ist dann q' der Vereinigungspunkt der Strahlen nach der ersten Reflexion durch OA . Fällt man nun ferner ein Loth von q' auf OB und verlängert es bis q'' , so dass $q'q''$ von der Spiegellage OB halbiert wird, so ist q'' der Vereinigungspunkt der Strahlen nach der zweiten Reflexion u. s. f. In ganz derselben Weise erhalten wir eine zweite Reihe von Vereinigungspunkten $q, q'', q''', \dots$, wenn wir die auf OB fallenden Strahlen verfolgen.

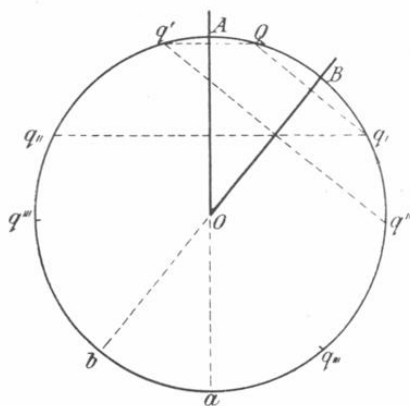


Fig. 21.

Aus der Konstruktion folgt ohne Weiteres, dass $Oq' = OQ$ und ebenso dass $Oq'' = Oq' = OQ$ ist. Der geometrische Ort aller Vereinigungspunkte ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OQ . Um die Lagen der Vereinigungspunkte zu bestimmen, bezeichnen wir den Bogen QA mit φ , QB mit φ' und AOB mit α .

Es ist dann Bogen

$$Qq' = 2QA = 2\varphi,$$

$$Qq'' = BQ + Bq' = Qq' + 2BQ = 2\varphi + 2\varphi' = 2\alpha,$$

$$Qq''' = QA + Aq'' = 2QA + Qq'' = 2\alpha + 2\varphi \text{ u. s. f.}$$

Analog ist:

$$Qq, = 2\varphi', \quad Qq'', = 2\alpha, \quad Qq''', = 2\alpha + 2\varphi' \text{ u. s. f.}$$

Allgemein sind die Abstände in der ersten Reihe:

$$Qq^{(2n)} = 2n\alpha, \quad Qq^{(2n+1)} = 2n\alpha + 2\varphi,$$

und in der zweiten Reihe:

$$Qq_{(2n)} = 2n\alpha, \quad Qq_{(2n+1)} = 2n\alpha + 2\varphi'.$$

Die Anzahl der Spiegelbilder ist eine beschränkte; denn sobald irgend eines der Bilder auf das zwischen den Verlängerungen der Spiegelschnitte liegende Bogenstück fällt, so liegt es hinter beiden Spiegeln und daher findet in diesem Falle keine Reflexion mehr statt. Ist das mit $q^{(2n)}$ bezeichnete Bild das erste, welches auf den Bogen ab fällt, so muss, da dieses eines derjenigen Bilder ist, welche hinter dem zweiten Spiegel liegen, der Bogen $Qq^{(2n)}$ grösser als QBa sein, d. h. $2n\alpha > \pi - \varphi$, oder,

$$2n > \frac{\pi - \varphi}{\alpha}.$$

Liegt das erste auf den Bogen ab fallende Bild hinter dem ersten Spiegel und bezeichnet man es mit $q^{(2n+1)}$, so muss $Qq^{(2n+1)}$ grösser als QAb sein; d. h. $2n\alpha + 2\varphi > \pi - \varphi'$, oder $2n\alpha + \varphi + \varphi' > \pi - \varphi$, oder schliesslich $2n + 1 > \frac{\pi - \varphi}{\alpha}$.

Dieser Ausdruck stimmt mit dem für den anderen Spiegel erhaltenen überein, indem $2n$ die Anzahl der Bilder in dem ersten, $2n + 1$ in dem zweiten Fall bezeichnet. Die Gesamtanzahl der in der ersten Reihe möglichen Bilder ist somit gegeben durch die dem Werthe $\frac{\pi - \varphi}{\alpha}$ zunächst liegende ganze Zahl; und ebenso ergibt sich als die Anzahl der in der zweiten Reihe möglichen Bilder die dem Werthe $\frac{\pi - \varphi'}{\alpha}$ zunächst liegende ganze Zahl.

Sind α und π kommensurabel, ist also $\frac{\pi}{\alpha}$ eine ganze Zahl, so beträgt die Anzahl der in jeder Reihe erzeugten Bilder $\frac{\pi}{\alpha}$, da $\frac{\varphi}{\alpha}$ und $\frac{\varphi'}{\alpha}$ echte Brüche sind, so dass also die Gesamtanzahl der Bilder $\frac{2\pi}{\alpha}$ beträgt. In diesem Falle aber fallen zwei der Bilder der verschiedenen Reihen zusammen. Denn ist $\frac{\pi}{\alpha}$ eine gerade Zahl, etwa $2n$, so ist

$$Qq^{(2n)} + Qq_{(2n)} = 2n\alpha + 2n\alpha = 2\pi,$$

und es fallen daher die Bilder $q^{(2n)}$ und $q_{(2n)}$ zusammen. Wenn

dagegen $\frac{\pi}{\alpha}$ eine ungerade Zahl ist, etwa $2n+1$, so ist

$$Qq^{(2n+1)} + Qq_{(2n+1)} = 4n\alpha + 2(q + q') = (4n+2)\alpha = 2\pi,$$

und es fallen somit die Bilder $q^{(2n+1)}$ und $q_{(2n+1)}$ zusammen.

Wenn wir daher den leuchtenden Punkt in die Anzahl der Bilder einrechnen, so ist die Gesamtanzahl der Vereinigungspunkte $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Auf den in diesem Paragraphen enthaltenen Ausführungen beruht die Einrichtung des Kaleidoskops.

§ 33. Von dem Fall eines einzelnen Strahlenbüschels ausgehend, gelangen wir nun zur Abbildung irgend eines Objektes durch Reflexion an einem ebenen Spiegel.

Befindet sich ein Objekt einem ebenen Spiegel gegenüber, so gehen von jedem Punkte des Objektes Strahlen aus; wenn nun die von irgend einem Punkte ausgehenden Strahlen an dem Spiegel reflektirt werden, so werden sie von einem auf der entgegengesetzten Seite befindlichen Vereinigungspunkte auszugehen scheinen, so zwar, dass die beiden zusammengehörigen Vereinigungspunkte auf derselben Senkrechten zur Spiegelebene und in gleichen Abständen von letzterer liegen. Jedem Punkte des Objektes entspricht ein solcher Vereinigungspunkt und das Aggregat dieser Vereinigungspunkte nennt man das Bild des Objektes. Dieses Bild deckt sich nun vollkommen mit dem abgebildeten Objekte, da die sämtlichen zusammengehörigen Objekt- und Bildpunkte zum Spiegel symmetrische Lagen einnehmen. Dagegen wird, da die Bildfläche und die abgebildete Objektfläche einander zugekehrt sind, der Begriff von rechts und links im Spiegelbilde eine Umkehrung erfahren. Befindet sich das Auge in einer solchen Stellung, dass es reflektirte Strahlen empfängt, so werden letztere denselben Eindruck hervorrufen, als ob sie von einem hinter dem Spiegel liegenden, an Stelle des Bildpunktes befindlichen wirklichen Objektpunkte ausgingen. Um den Strahlengang, vermöge dessen das Auge das Spiegelbild eines Objektes erblickt, zu konstruiren, zieht man ein Linienbüschel von der Pupille aus bis zur Spiegelebene in der Richtung des dem betreffenden Objektpunkte zugehörigen Bildpunktes und verbindet dann die Schnittpunkte jenes Linienbüschels und der Spiegelebene mit dem Objektpunkte.

§ 34. Bei der nun folgenden Untersuchung von Strahlenbüscheln werden wir von der Voraussetzung ausgehen, dass die Strahlen nur eine geringe Divergenz besitzen oder, mit anderen

$$\frac{AQ}{n} = \frac{Aq}{n'},$$

oder, wie wir der bequemerem Uebersicht wegen schreiben wollen,

$$\frac{a}{n} = \frac{a'}{n'}, \quad (2)$$

worin a und a' die Abstände AQ und Aq bedeuten. Unter der dieser Annäherungsformel zu Grunde liegenden Voraussetzung hat q eine unveränderliche Lage, so dass die Rückwärtsverlängerungen aller gebrochenen Strahlen sich in demselben Punkte q der Axe AQ schneiden. Der Punkt q ist also der Vereinigungspunkt des gebrochenen Strahlenbüschels. Man kann alsdann auch q den Bildpunkt von Q nennen. Ferner bezeichnet man auch Q und q auf einander bezogen als konjugirte oder einander zugeordnete Punkte.

Wir werden somit zu dem folgenden Schluss geführt:

Ein Punkt und sein Bild liegen auf derselben Normalen zur brechenden Fläche und auf derselben Seite derselben; ändert sich die Entfernung des Punktes von dieser Fläche, so ändert sich auch der Abstand des Bildpunktes in gleichem Verhältniss, und Objektpunkt und Bildpunkt verschieben sich in gleicher Richtung.

§ 35. Aus dem über ein einzelnes Strahlenbüschel Gesagten lässt sich nun ohne Schwierigkeit erkennen, wie und wo das Auge ein Objekt erblickt, welches sich in einem Medium befindet, dessen Brechungsindex von dem der Luft verschieden ist, z. B. einen Gegenstand unter Wasser. Jeder Punkt des Objektes unter Wasser sendet Lichtstrahlen aus. Beim Uebergang der Strahlen aus dem Wasser in die Luft erhalten die Strahlen eine solche Richtung, dass sie von einem dem gegebenen Punkte konjugirten Punkte auszugehen scheinen. Nimmt man den Brechungsindex von Wasser zu Luft als $\frac{4}{3}$ an, so liegt der dem gegebenen Punkte konjugirte Vereinigungspunkt der Strahlen auf derselben Normalen zur brechenden Fläche, aber in einem scheinbaren Abstände, welcher $\frac{3}{4}$ der wahren Tiefe entspricht. Jedem Punkte des Objektes ist ein solcher Bildpunkt zugeordnet und das Aggregat dieser Vereinigungspunkte stellt das Bild des Objektes dar. Ein in Luft befindliches Auge empfängt denselben Eindruck, als ob die Strahlen von einem die Lage des Bildes des Objektes einnehmenden Objekte ausgingen. Die Strahlen, vermittelt deren das Auge irgend einen Objektpunkt durch eine brechende Fläche erblickt, lassen sich leicht konstruktiv darstellen: Man zieht nämlich von der Pupille des Auges aus

Strahlen nach dem entsprechenden Bildpunkt und zwar bis zur brechenden Fläche, und verbindet dann die Schnittpunkte sämtlicher Strahlen und der brechenden Fläche mit dem Objektpunkt.

Die der verschiedenartigen Gestaltung des Objectes entsprechenden verschiedenen Bilder lassen sich nach dem soeben Gesagten geometrisch konstruieren. Man sieht ohne Weiteres ein, dass das Bild einer Ebene wieder eine Ebene wird, wobei beide Ebenen sich unter verschiedenen Neigungswinkeln in einer in der brechenden Ebene liegenden Geraden schneiden; einer Kugel entspricht ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe senkrecht zur brechenden Fläche steht.

Diese Darstellung des Abbildungsvorganges ist nur in beschränktem Sinne richtig; denn von den von irgend einem Punkte ausgehenden Strahlen sind es nur die annähernd centralen, welche von dem Bilde ausgehend ins Auge gelangen. Das Object muss daher als klein und fast direkt unter dem Auge befindlich vorausgesetzt werden, damit sämtliche Strahlen in einer zur brechenden Fläche fast senkrechten Richtung austreten können. Die genauere Untersuchung dieser Erscheinung können wir indessen erst später folgen lassen.

§ 36. Untersuchen wir jetzt die *Reflexion und Refraktion eines engen centralen Strahlenbüschels an einer sphärischen Fläche*.

Allgemein wird dieser Fall sich nicht planimetrisch behandeln lassen; es ist indessen zweckmässig, der Untersuchung im Raum die planimetrische Untersuchung zu Grunde zu legen. Wir wollen zunächst ein von einem leuchtenden Punkte der Axe der sphärischen Fläche ausgehendes Strahlenbüschel betrachten. Das ganze System wird dann zur Axe symmetrisch sein, und wir brauchen nur die in einer durch die Axe gelegten Ebene liegenden Strahlen einer Betrachtung zu unterwerfen und uns darauf das ebene System um die Axe rotirend zu denken. Wir werden finden, dass nach der Reflexion oder Brechung das Strahlenbüschel unter gewissen Voraussetzungen nach einem ebenfalls auf der Axe liegenden Vereinigungspunkt konvergirt. Befindet sich der leuchtende Punkt nicht in der Axe der sphärischen Fläche, so verbindet man denselben mit dem Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche; die Verbindungslinie bildet die Normale zur Fläche und kann alsdann selber als eine Axe angesehen werden, und wir gelangen so wieder zu dem Problem, von welchem wir ausgingen.

§ 37. *Reflexion enger centraler Lichtbüschel an einer Kugelfläche*. Wir behandeln, wie gesagt, diesen Fall zunächst planimetrisch (Fig. 23).

Q sei der Ausgangspunkt des einfallenden Strahlenbüschels,

dessen Axe durch QA dargestellt wird, O sei der Mittelpunkt, A der Scheitel der reflektirenden Kugelfläche. Bezeichnen wir nun noch den Punkt, in welchem der einfallende Strahl QR nach seiner

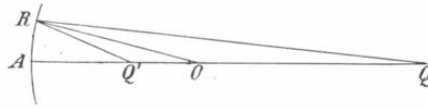


Fig. 23.

Reflexion bei R die Axe schneidet, mit Q' und setzen $AQ = x$, $AQ' = x'$ und den Krümmungsradius gleich r , so ist, da nach dem Reflexionsgesetz das Einfallslot den Winkel QRQ' halbt,

$$\frac{RQ}{RQ'} = \frac{QO}{Q'O}.$$

Setzen wir nun das Strahlenbüschel als ein sehr enges voraus, so dass wir die Potenzen der sehr kleinen Abweichungen von der Axe vernachlässigen können, so können wir

$$RQ = AQ \quad \text{und} \quad RQ' = AQ'$$

setzen und erhalten sodann die obige Gleichung in dieser Näherungsform:

$$\frac{x}{x'} = \frac{x - r}{r - x'},$$

oder

$$x(r - x') = x'(x - r),$$

wofür wir schreiben können:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{r} \dots \dots \dots (3)$$

Begnügen wir uns also mit dem oben angedeuteten Grade der Genauigkeit, so können wir sagen: Alle durch Q gehenden Strahlen schneiden sich nach der Reflexion in Q' und umgekehrt. Die Punkte Q, Q' heissen konjugirte Punkte und jeder von ihnen kann als das Bild des anderen angesehen werden.

§ 38. Die oben abgeleiteten Formeln für das Abhängigkeitsverhältniss der Abstände konjugirter Punkte von der reflektirenden Fläche schliessen alle Fälle ein, welche vorkommen können. Wenn z. B. die reflektirende Fläche konvex ist, so hat man nur das Vorzeichen von r in Formel (3) zu verändern. Alle von A aus nach rechts gemessenen Abstände sind als positiv, die nach links gemessenen als negativ anzusehen.

Gerade, welche sich in L schneiden mögen, und von Q aus irgend eine Gerade, welche AL und OL in B resp. C schneidet, so trifft eine durch M , den Schnittpunkt von AC und BO , gelegte Gerade LM die Gerade AOQ in dem gesuchten Punkt Q' . Die Gleichung $(x-f)(x'-f)=f^2$ ist dann dargestellt durch die Relation $FQ \cdot FQ' = FO^2 = FA^2$, so dass F der Mittelpunkt und A und Q die Doppelpunkte der Involution mit den Fundamentalpunkten Q und Q' sind.

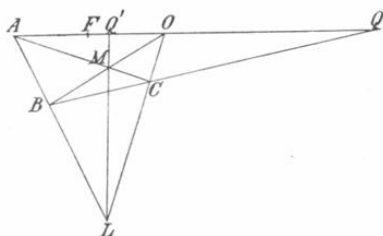


Fig. 24.

Wird nun das System um seine Axe QOA rotirt, so ist damit der Verlauf aller von Q ausgehenden Strahlen bestimmt.

§ 39. Man denke sich nun die Axe $QOQ'A$ um den Punkt O als Drehpunkt in allen nur möglichen Ebenen einen kleinen Winkel beschreibend. Da hierbei die Axe unverändert senkrecht zur rotirenden Fläche bleibt, so bleiben auch Q und Q' konjugirte Punkte. Alle festen Punkte der um O rotirenden Geraden beschreiben Kugelflächelemente, welchen O als gemeinsamer Mittelpunkt zukommt. Bei dem Grade der Genauigkeit, auf welchen wir uns beschränken, können die Flächelemente als zur Axe AO senkrechte Ebenen angesehen werden. Einem kleinen in Q befindlichen Objekt entsprechend, erhalten wir ein ebenes Bild bei Q' ; Bild und Objekt sind ähnlich und liegen so zu einander, dass die einander zugeordneten Punkte immer auf einer Geraden liegen, welche durch den Mittelpunkt des Spiegels geht. Der Brennpunkt F beschreibt ebenfalls ein kleines Flächelement. Die durch dieses Flächelement gelegte Ebene nennt man die Brennebene. Die Vereinigungspunkte sämtlicher aus parallelen Strahlen bestehenden Büschel, welche nur eine geringe Neigung zur Axe des Spiegels aufweisen, liegen in dieser Brennebene.

§ 40. Stellen β und β' die linearen Dimensionen des Objectes und seines Bildes dar, so erhält man, da einander zugeordnete Punkte auf derselben, durch den Kugelmittelpunkt gehenden Geraden liegen, die Relation:

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin i}{\sin \psi} &= \frac{OQ}{QP} \\ \frac{\sin i'}{\sin \psi} &= \frac{OQ'}{Q'P} \end{aligned} \right\};$$

und hieraus nach Gleichung (1)

$$n \frac{OQ}{QP} = n' \frac{OQ'}{Q'P}.$$

Vernachlässigen wir unter der Voraussetzung, dass die Neigung der in Betracht gezogenen Strahlen zur Axe eine sehr kleine ist, die quadratischen Functionen von ψ , so können wir $QA = QP$ und $Q'A = Q'P$ setzen, so dass wir, so lange uns dieser Grad der Genauigkeit genügt, alle in der Ebene der Axe verlaufenden, von Q ausgehenden Strahlen als nach der Brechung in dem Punkte Q' homocentrisch werdend betrachten können, und wir erhalten für die Lagen des Objekt- und Bildpunktes die folgenden Relationen:

$$n \frac{OQ}{QA} = n' \frac{OQ'}{Q'A} \dots \dots \dots (8)$$

Es ist dieses Verhältniss zwischen den Punkten Q und Q' ein umkehrbares, und man nennt diese Punkte conjugirte Punkte.

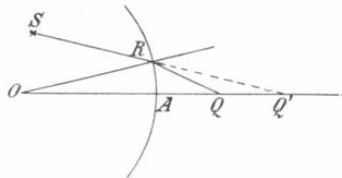


Fig. 26.

Setzt man nun $AQ = x$, $AQ' = x'$ und $AO = r$, wobei r , x und x' bei einer Messung von links nach rechts als positiv angenommen sein sollen, so ist mit Bezug auf Fig. 26

$$OQ = x - r \quad \text{und} \quad OQ' = x' - r,$$

und es kann die Relation (8) in dieser Form geschrieben werden:

$$n \frac{x - r}{x} = n' \frac{x' - r}{x'},$$

und daher

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{r} \dots \dots \dots (9)$$

$$x = \frac{n r}{n' - n}.$$

Umgekehrt, wenn die Strahlen im ersten Medium parallel zur Axe sind, so werden sie im zweiten Medium im Punkte Q' zusammenlaufen. Wir charakterisiren diesen Fall durch die Gleichung

$$x' = \frac{n' r}{n' - n}.$$

Wenn x und x' diese speciellen Werthe annehmen, seien sie mit f und f' bezeichnet und wir haben dann die Relationen

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} f &= \frac{n r}{n' - n} \\ f' &= \frac{n' r}{n' - n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Die durch diese Gleichungen bestimmten Punkte nennt man die Brennpunkte der brechenden Fläche und f und f' die Brennweiten derselben. Die Formel (11) lässt sich auch folgendermaassen umschreiben:

$$\frac{\frac{n r}{n' - n}}{x} + \frac{\frac{n' r}{n' - n}}{x'} = 1,$$

oder hierfür nach (12)

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \quad \dots \dots \dots (13)$$

Der Gang der Strahlen ist stets umkehrbar, so dass die Gleichung (13) sich auch auf die Fälle erstreckt, wo die Strahlen eine konkave Kugelfläche treffen.

Die Brennweiten sind, wie man ohne Weiteres aus (12) erkennt, entweder *beide positiv oder beide negativ*, so dass also das Produkt $f f'$ immer positiv ist. Beide sind positiv, wenn das durch die konvexe Fläche begrenzte Medium stärker brechend ist als das andere, d. h. wenn $n' > n$, beide dagegen negativ, wenn das durch die konvexe Fläche begrenzte Medium weniger stark brechend ist als das andere Medium, d. h. wenn $n' < n$ ist.

§ 43. Die Abbildungsvorgänge lassen sich in sehr einfacher und bequemer Weise durch das Verhältniss zwischen den Abständen eines Paares konjugirter Punkte von den zugehörigen Brennpunkten charakterisiren.

Es sei in Fig. 28 A der Scheitel der sphärischen Fläche, welche die beiden Medien trennt, F und F' seien die Brennpunkte dieser Fläche, Q der Ausgangspunkt der Strahlen im ersten Medium, Q' der diesem Punkte zugeordnete Vereinigungspunkt im zweiten Medium.

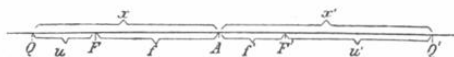


Fig. 28.

Ferner sei $QF = u$ und $Q'F' = u'$ gesetzt und man sehe u als positiv an, wenn Q vor F, u' dagegen als positiv, wenn Q' hinter F' liegt. Das in Gleichung (13) enthaltene Abhängigkeitsverhältnis zwischen x und x' kann auch in dieser Form ausgedrückt werden:

$$(x - f)(x' - f') = ff'.$$

Setzen wir nun für $x - f$ und $x' - f'$ ihre oben gewählten Bezeichnungen, so erhalten wir die folgende sehr einfache und bequeme Relation:

$$uu' = ff'. \quad (14)$$

§ 44. Die Diskussion der Gleichung (14) verschafft uns eine Vorstellung von den relativen Lagen konjugirter Punkte. Da nämlich f und f' immer gleiche Vorzeichen haben, so müssen auch nothwendigerweise u und u' gleiche Vorzeichen haben. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden. Als ersten Fall setzen wir denjenigen voraus, wo das durch die konvexe sphärische Fläche begrenzte Medium, d. h. also dasjenige Medium, in welchem der Krümmungsmittelpunkt liegt, das stärker brechende Medium ist, so dass in diesem Falle nach dem in § 42 Gesagten beide Brennweiten f und f' positiv sind (Fig. 29).



Fig. 29.

Befindet sich Q in unendlichem Abstände links von A, so fällt der Q zugeordnete Punkt Q' mit dem Brennpunkt F' zusammen. Q und Q' erfahren immer eine Verschiebung in gleichem Sinne, da einer Vergrößerung von u immer eine Verminderung von u' entspricht und umgekehrt, indem ja das Produkt uu' ein konstantes ist, so dass also, während Q aus einer unendlichen Ferne der brechenden Fläche genähert wird, Q' über F' hinaus zurücktritt, bis Q den Brennpunkt F erreicht, wo dann Q' in einem unendlichen Abstände auf der rechten Seite von A liegt. Lässt man Q über F hinaus treten, so wird u negativ und hat anfänglich einen sehr kleinen

Werth, so dass u' ebenfalls negativ ist, dagegen einen anfänglichen sehr grossen Werth hat; Q' liegt hierbei demnach im Grenzfalle auf der linken Seite von A in unendlich grosser Entfernung und folgt der Verschiebung des Punktes Q in gleichem Sinne. Befindet sich Q in A , so fällt es mit Q' zusammen. Lässt man nun Q über A hinaus gehen, so folgt Q' dieser Verschiebung, aber in einem langsameren Maasse als Q , und gelangt Q schliesslich in eine unendlich grosse Entfernung auf der rechten Seite von A , so fällt Q' mit F zusammen.

So lange als Q im ersten Medium liegt, bilden die Strahlen im letzteren ein von Q divergirendes Strahlenbüschel; sobald aber Q über A hinaus in das zweite Medium hinübertritt, bilden die Strahlen in dem ersten Medium ein Strahlenbüschel, welches in seiner Rückwärtsverlängerung nach Q' konvergiren würde; da aber die Strahlen von der brechenden Fläche abgeschnitten werden, so werden sie niemals wirklich in Q zusammenlaufen. In diesem Falle nennt man Q einen virtuellen Vereinigungspunkt. Das soeben Gesagte gilt auch für den Punkt Q' ; derselbe stellt nur dann einen reellen Vereinigungspunkt dar, wenn er in dem zweiten Medium, einen virtuellen Vereinigungspunkt dagegen, sobald er links von A im ersten Medium liegt. Als zweiten Fall wollen wir annehmen, dass f und f' beide negativ sind, dass also F auf der rechten Seite von A im zweiten Medium, F' links von A im ersten Medium liegt (Fig. 30).



Fig. 30.

Denken wir uns Q von rechts her aus der Unendlichkeit kontinuierlich nach links in eine unendlich grosse Entfernung sich verschiebend, so lässt sich die jeweilige Lage des Punktes Q' mit genau denselben Worten kennzeichnen, wie bei dem oben betrachteten Falle. Q' wird nur dann reell sein, wenn es links von A liegt, in allen anderen Fällen ist Q' ein virtueller Vereinigungspunkt.

Die Aenderung des Vorzeichens, wie solche aus der Gleichung (13)

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1$$

hervorgeht, lässt sich auch durch eine graphische Konstruktion verfolgen (Fig. 31).

K sei ein Punkt mit den Koordinaten (f, f') . Es lässt sich der durch die letztgenannte Gleichung bedingte Werth von x und x'

durch die Strecken OP und OQ darstellen, welche irgend eine durch K gelegte Gerade auf den Axen abschneidet. Es gilt nämlich für jede Lage der Geraden durch K die Proportion:

$$\frac{f}{x} = \frac{x' - f'}{x'},$$

das heisst

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1.$$

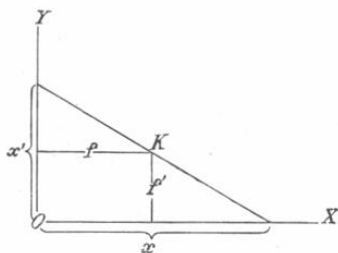


Fig. 31.

Lassen wir nun die Gerade um den gegebenen Punkt K sich drehen, so erhalten wir damit ein bequemes Mittel, um graphisch unsere Gleichung in Bezug auf die Veränderung der Vorzeichen und der Grösse der Variablen x und x' zu diskutieren.

§ 45. Ein der Formel (13) ähnlicher Ausdruck zur Bestimmung der Lage eines Paares konjugirter Punkte lässt sich durch Zugrundelegung irgend eines festen Punktpaares als Koordinatenursprünge finden.



Fig. 32.

G, G' (Fig. 32) bezeichne ein solches gegebenes Paar konjugirter Punkte, deren Abstände von den Brennpunkten beziehungsweise g, g' sein mögen. Es ist dann nach (14)

$$gg' = ff'.$$

Die Entfernungen der Punkte Q und Q' von G und G' seien beziehungsweise mit v und v' bezeichnet, so zwar, dass auch hier für das Vorzeichen die bisher zu Grunde gelegten konventionellen

Annahmen gelten mögen. Unter Beibehaltung der früheren Bedeutung von u und u' erhalten wir dann die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u &= v - g \\ u' &= v' - g' \end{aligned} \right\},$$

und die Relation zwischen den Abscissen konjugirter Punkte wird dann

$$(v - g)(v' - g') = ff' = gg',$$

welche auch in dieser Form geschrieben werden kann:

$$\frac{g}{v} + \frac{g'}{v'} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

§ 46. Gehen wir nun zur Betrachtung solcher Punkte über, welche ausserhalb der Axe der brechenden Kugelfläche liegen.

Man denke sich die Linie OA um O als Drehpunkt innerhalb eines sehr kleinen Winkels oscillirend, so dass also die Punkte Q, Q', F, F' und A gleiche Bogenwinkel beschreiben. Die Linie OA wird auch hier in ihrer neuen Lage senkrecht zur brechenden Fläche bleiben und Q und Q' erleiden daher bezüglich ihrer Lagen als konjugirte Punkte keinerlei Veränderung. Lässt man in dieser Weise die Linie OA alle nur möglichen Lagen annehmen, so dass sie einen Kegel mit kleinem Oeffnungswinkel beschreibt, so beschreiben auch die Punkte Q, Q', F und F' kleine Kugelflächenelemente. Vernachlässigen wir, wie früher, die Quadrate kleiner Grössen, so können diese Kugelflächenelemente als zur Axe senkrechte Ebenen angesehen werden. Die durch Q und Q' gelegten, zur Axe senkrechten Ebenen wollen wir als konjugirte oder einander zugeordnete Ebenen bezeichnen. *Von einem Punkte einer dieser Ebenen ausgehende Strahlen werden nach der Brechung an einer Kugelfläche in einem Punkte einer dieser Ebene konjugirten Ebene homocentrisch.*

Einem kleinen in einer zur Axe senkrechten Ebene liegenden Objekt entspricht ein dem letzteren ähnliches Bild in der jener Ebene konjugirten Ebene, und sämtliche Verbindungslinien einander konjugirter Objekt- und Bildpunkte gehen durch den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche.

Die durch F und F' gelegten, zur Axe senkrechten Ebenen nennt man die Brennebenen. Alle von irgend einem Punkte der Brennebenen ausgehenden Strahlen werden nach der Brechung in dem zweiten Medium parallel und umgekehrt wird jedes in dem ersten Medium parallel verlaufende Strahlensystem in einem Punkte der Brennebene des zweiten Mediums homocentrisch. Wir haben bis jetzt das in Betracht gezogene, den Scheitel A umgebende

sphärische Flächenelement als angenähert eben angesehen und werden auch den ferneren Untersuchungen diese Voraussetzung zu Grunde legen. Wir nennen eine solche durch A gelegte Ebene die Hauptebene der brechenden Fläche.

§ 47. Wir können nun einige einfache geometrische Konstruktionen geben für die Bestimmung der Lage des einem gegebenen Punkte konjugirten Punktes, sowie der Richtung des austretenden Strahles, wenn der Eintrittsstrahl gegeben ist.

Es sei in Fig. 33 P der gegebene Punkt und es soll der ihm konjugirte Punkt gefunden werden. Gelingt es uns, den Verlauf nur

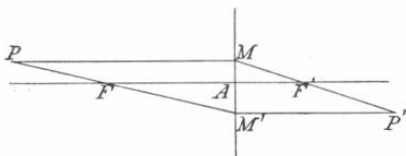


Fig. 33.

zweier beliebiger von P ausgehender Strahlen aufzufinden, so ist der Schnittpunkt der gebrochenen Strahlen der gesuchte Punkt. Als den einen dieser Strahlen wählen wir den zur Axe der brechenden Fläche parallelen Strahl PM, welcher die Hauptebene in M schneiden möge. MF' ist der zugeordnete Austrittsstrahl. Als zweiten Strahl nehmen wir den durch den Brennpunkt F gehenden, welcher die Hauptebene in dem Punkte M' treffen möge und von da aus nach der Brechung parallel zur Axe verläuft. Zieht man daher M'P' parallel zur Axe, so ist der Schnittpunkt P' von MP' und M'P' der gesuchte Punkt.

An Stelle eines dieser beiden Strahlen hätten wir auch einen durch den Krümmungsmittelpunkt O gehenden Strahl PO wählen können; wir erhalten dann einen Strahl, welcher ohne Ablenkung in das zweite Medium übertritt.

Eine zweite Konstruktionsweise, welche sich darauf gründet, dass parallel einfallende Strahlen im zweiten Medium in der Brennebene homocentrisch werden, erhält man auf folgende in Fig. 34 dargestellte Weise.

PQ sei irgend ein von P ausgehender Strahl, welcher die erste Brennebene in Q schneiden möge; der dem Punkte Q konjugirte Punkt und die Lage des austretenden Strahles lassen sich nun durch folgende Konstruktion auffinden:

Man ziehe durch den Krümmungsmittelpunkt den Strahl PO; derselbe tritt geradlinig in das zweite Medium über und der dem gegebenen Punkt P konjugirte Punkt liegt also jedenfalls auf der Geraden PO. Zieht man jetzt durch O parallel dem Eintrittsstrahl PQ

die Gerade ROQ' , welche die zweite Brennebene in Q' treffen möge, verbindet dann O mit Q und zieht von Q' aus $Q'P'$ parallel zu OQ , so stellt dieses $Q'P'$ den dem Eintrittsstrahl PQ zugeordneten Austrittsstrahl dar und es schneidet letzterer die Verlängerung von PO in dem gesuchten, dem gegebenen Punkt P konjugirten Punkte P' . Denn da gemäss der Konstruktion RO und PQ vor der Brechung

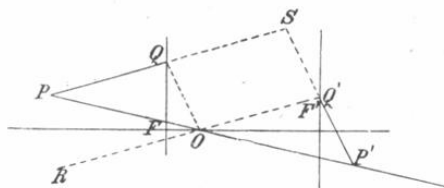


Fig. 34.

parallel sind, so werden sie nach derselben in der zweiten Brennebene homocentrisch; somit geht der Strahl PQ nach seiner Brechung durch Q' . Ebenso stellen PQ und QO zwei von einem Punkte einer Brennebene ausgehende Strahlen dar; sie müssen also nach der Brechung im zweiten Medium parallel verlaufen, und zwar, da QO durch den Krümmungsmittelpunkt geht und keine Ablenkung erleidet, parallel zu QO ; und hieraus ergibt sich, dass $Q'P'$ der gesuchte Austrittsstrahl, P' der gesuchte, dem Punkte P konjugirte Punkt ist.

§ 48. Die Lage des Austrittsstrahles kann ferner noch auf folgende Weise bestimmt werden:

Der Eintrittsstrahl schneide die Hauptebene in M (Fig. 35). Man ziehe parallel dem Einfallsstrahl PM den Strahl FN , welcher die

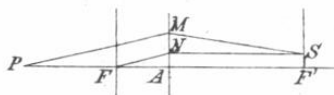


Fig. 35.

Hauptebene in N treffen mag; es wird dann die Fortsetzung dieses von dem Brennpunkt ausgehenden Strahles FN im zweiten Medium die zur Axe parallele Richtung NS erhalten und die zweite Brennebene in S schneiden. Da aber PM und FN vor der Brechung parallel sind, so müssen sich beide in der zweiten Brennebene schneiden, und zwar in dem Punkte S und MS ist daher der gesuchte Austrittsstrahl.

Diese Konstruktionsmethoden werden wir später verallge-

meinern, um dadurch ein Mittel zu gewinnen, die Lage des einem gegebenen Punkte konjugirten Punktes, sowie diejenige des Austrittsstrahles nach einer Reihe von Brechungen durch ein System centrirter Kugelflächen zu bestimmen.

§ 49. Bezeichnen in Fig. 36 β resp. β' die linearen Dimensionen des Objectes resp. seines Bildes und sieht man β resp. β' als positiv oder negativ an, je nachdem sie über oder unter der Axe liegen,

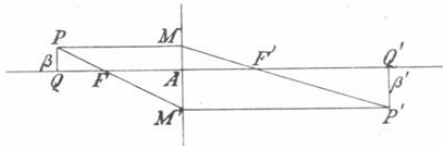


Fig. 36.

so folgt aus der Figur, welche sich auf die anfangs des § 47 besprochene Konstruktion gründet, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PQF und $M'AF$, sowie der Dreiecke $P'Q'F'$ und MAF' , dass

$$PQ : QF = AM' : AF,$$

und

$$P'Q' : Q'F' = AM : AF';$$

d. h. wenn wir die früheren Bezeichnungen einführen,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{u} &= -\frac{\beta'}{f} \\ -\frac{\beta'}{u'} &= \frac{\beta}{f'} \end{aligned} \right\},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= -\frac{u}{f} \\ \frac{\beta'}{\beta} &= -\frac{u'}{f'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

§ 50. Nach Helmholtz lässt sich das Abbildungsverhältniss als Funktion der Konvergenzwinkel der Strahlen vor und nach der Brechung, also als eine von den Abständen der konjugirten Punkte von den brechenden Flächen, sowie von deren Brennweiten, unabhängige Relation ausdrücken.

Stellen in Fig. 37 PQ und $P'Q'$ Objekt und Bild dar, welche einander ähnlich sind und in eine solche Lage zu einander gebracht sind, dass $\beta : \beta' = OQ : OQ'$, wo O der Krümmungsmittelpunkt ist, so ist nach (8)

$$n \frac{OQ}{QA} = n' \frac{Q'O}{Q'A},$$

und daher, wenn wir QA durch x , $Q'A$ durch x' ersetzen,

$$\frac{n\beta}{x} = \frac{n'\beta'}{x'}, \quad (17)$$

ein Ausdruck, welcher sich sehr zweckmässig verwenden lässt.

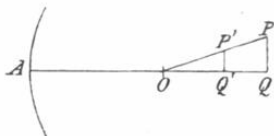


Fig. 37.



Fig. 38.

Wenn aber der Konvergenzwinkel irgend eines durch Q gelegten Strahles mit α , der Konvergenzwinkel des zugeordneten durch Q' gehenden Strahles mit α' bezeichnet wird (Fig. 38), so ist

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{x} : \frac{1}{x'},$$

und daher erhält man nach (17) die bekannte Helmholtz'sche Formel

$$n\beta \operatorname{tg} \alpha = n'\beta' \operatorname{tg} \alpha', \quad (18)$$