

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Geometrischen Optik

Heath, Robert Samuel

Berlin, 1894

Kapitel II. Reflexion und Refraktion der Lichtstrahlen

Kapitel II.

Reflexion und Refraktion der Lichtstrahlen.

§ 8. Beim Uebergange eines Lichtstrahles von einem Medium in ein anderes wird der Strahl im Allgemeinen in dreifacher Weise beeinflusst und giebt dadurch zu verschiedenen Erscheinungen Anlass:

1. Ein Theil wird in das erste Medium zurückgeworfen oder reflektirt und zwar stets in einer nach einem bestimmten Gesetze zu ermittelnden Richtung.

2. Ein zweiter Theil geht in das zweite Medium über, wobei der Strahl seine Richtung nach einem zweiten Gesetze ändert; dieser Theil der von einem in ein anderes Medium übergehenden Strahlen nennt man die gebrochenen Strahlen.

3. Ein dritter Theil wird durch die Trennungsfläche der beiden Medien zerstreut oder diffundirt; hierdurch wird die Trennungsfläche beleuchtet und wirkt selber wie eine nach allen Richtungen Lichtstrahlen aussendende Lichtquelle. Fällt ein Lichtstrahl auf einen vollkommen undurchsichtigen Körper, so kommt der zweite Theil in Wegfall; es wird also sämmtliches Licht entweder reflektirt oder diffus gemacht. Die reflektirte Lichtmenge hängt von der Beschaffenheit der reflektirenden Fläche ab; je glatter dieselbe und je vollkommener die auf ihr erzielte Politur ist, um so mehr Licht wird zurückgeworfen. Die Diffusion des Lichtes lässt sich mit Wahrscheinlichkeit auf die Unebenheit der Fläche zurückführen; das auffallende Licht wird von den einzelnen Theilchen der Oberfläche reflektirt, indem letztere ganz so wie unzählige unregelmässig über die Fläche vertheilte und nach allen denkbaren Richtungen geneigte Spiegelemente wirkt. Durch diese Zerstreung des Lichtes eben erklärt es sich, dass nicht leuchtende Körper sichtbar werden, sobald sie sich im Bereiche eines leuchtenden Körpers befinden.

§ 9. Die Ebene, welche den einfallenden Strahl und die Normale zur Trennungsfläche der beiden Medien einschliesst, heisst die

Einfallsebene; der von der Normalen und dem einfallenden Strahl eingeschlossene spitze Winkel heisst der Einfallswinkel und der zwischen der Normalen und dem reflektirten Strahl liegende spitze Winkel der Reflexionswinkel. Wenn die Richtung eines Lichtstrahles durch Reflexion oder Brechung verändert wird, so nennt man den Winkel, welchen die Verlängerung des einfallenden Strahles mit der Richtung des reflektirten oder gebrochenen Strahles bildet, die Ablenkung des Strahles.

Das Gesetz, nach welchem ein Strahl von einer Fläche reflektirt wird, lässt sich folgendermaassen ausdrücken:

Einfalls- und Reflexionswinkel liegen in derselben Ebene und sind einander gleich.

Es ist dies ein Erfahrungsgesetz, dessen Richtigkeit durch direkte Beobachtung leicht nachgewiesen werden kann. Am genauesten lässt sich das Reflexionsgesetz experimentell mit Hülfe eines astronomischen Transitionsinstrumentes und des künstlichen Horizontes, d. h. eines mit Quecksilber gefüllten Behälters, demonstrieren. Das Fernrohr wird zunächst auf den Stern, dessen Höhe gemessen werden soll, gerichtet und dann gegen den Quecksilberbehälter, welcher so aufgestellt wird, dass der Stern durch Reflexion an der Oberfläche des Quecksilbers gesehen werden kann. Es werden die zwei diesen beiden Einstellungen entsprechenden Ablesungen gemacht und man findet, dass die Differenz der beiden Ablesungen gleich der doppelten Höhe des Sternes ist. Da nun die Oberfläche des Quecksilbers vermöge der Wirkung der Schwere eine horizontale Ebene darstellt und, da die von einem Stern ausgehenden Strahlen als parallel anzusehen sind, so müssen nach dem Reflexionsgesetz der auf die Oberfläche des Quecksilbers einfallende und der von derselben reflektirte Strahl mit der Normalen zur Oberfläche des Quecksilbers gleiche Winkel einschliessen. Das Transitionsinstrument lässt äusserst genaue Messungen zu und bis zu dem Grade seiner Genauigkeit haben sich die Resultate der Messungen als mit dem Reflexionsgesetz streng übereinstimmend herausgestellt.

§ 10. Für den auf eine Ebene einfallenden Strahl lässt sich durch eine einfache geometrische Konstruktion die Richtung des zugehörigen Reflexionsstrahles finden. Ist in Fig. 4 P irgend ein Punkt in der Richtung des einfallenden Strahles P Q und fällt man von P aus ein Perpendikel PN auf die reflektirende Ebene und verlängert dieses bis P', so dass $PN = NP'$, so folgt ohne Weiteres, dass die Verlängerung von P' Q die Richtung des reflektirten Strahles ist.

Ist die reflektierende Fläche nicht eine Ebene, sondern eine beliebige krumme Fläche, so wird man immer das den in Frage kommenden Punkt umgebende Flächenelement als eine Ebene ansehen können, und es gilt dann die die gegebene Fläche im Punkte Q tangierende Ebene als die reflektierende Ebene.

§ 11. Um zu einem allgemeinen Ausdruck für das Reflexionsgesetz zu gelangen, wollen wir in dem Folgenden dasselbe analytisch behandeln.

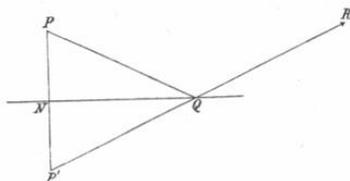


Fig. 4.

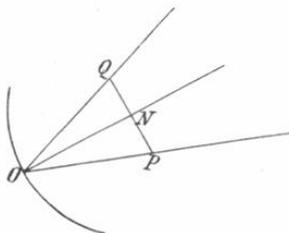


Fig. 5.

Es sei in Fig. 5 ON die Normale zur reflektierenden Fläche, das sogenannte Einfallslot, PO und OQ der einfallende resp. reflektirte Strahl und ϕ der Einfallswinkel. Nimmt man nun OQ und OP gleich der Längeneinheit an und verbindet P und Q, so wird nach dem Reflexionsgesetz die Verbindungslinie PQ durch das Einfallslot ON im Punkte N halbiert und ON steht senkrecht auf PQ, so dass

$$ON = \cos \phi.$$

Bezeichnet man mit l_x, l_y, l_z die Richtungskosinuse des Einfallslotes und mit i_x, i_y, i_z resp. r_x, r_y, r_z diejenigen des einfallenden resp. reflektirten Strahles, bezogen auf ein räumliches rechtwinkeliges Koordinatensystem, dessen Koordinatenursprung mit dem Fusspunkt O des Einfallslotes zusammenfällt, so sind auch, da OP und OQ die Längeneinheit darstellen, i_x, i_y, i_z die Koordinaten von P, r_x, r_y, r_z die Koordinaten von Q und $ON l_x, ON l_y, ON l_z$ diejenigen von N. Berücksichtigt man die Thatsache, dass N der Mittelpunkt der Linie PQ ist, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{i_x + r_x}{2} = ON \cdot l_x,$$

$$\frac{i_y + r_y}{2} = ON \cdot l_y,$$

$$\frac{i_z + r_z}{2} = ON \cdot l_z,$$

und hieraus durch Einsetzung des Werthes von ON:

$$\left. \begin{aligned} i_x + r_x &= 2 \cos \Phi l_x \\ i_y + r_y &= 2 \cos \Phi l_y \\ i_z + r_z &= 2 \cos \Phi l_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Setzt man nun in (1) für $\cos \Phi$ seinen Werth, ausgedrückt durch die Richtungskosinusse der ihn einschliessenden Geraden nach den beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Phi &= i_x l_x + i_y l_y + i_z l_z \\ \cos \Phi &= r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (2)$$

so erhält man lineare Gleichungen nach i_x, i_y, i_z und r_x, r_y, r_z . Kennen wir nun die Richtungskosinusse des Einfallslotthes und des Einfallstrahles, so ergeben sich aus diesen Gleichungen die Richtungskosinusse des reflektirten Strahles. Die Gleichungen (1) lassen sich durch nur zwei unabhängige Gleichungen ersetzen; denn multipliciren wir sie der Reihe nach mit l_x, l_y, l_z und addiren die Resultate, so erhalten wir eine Identität. Die aus den Gleichungen sich ergebenden Werthe für r_x, r_y, r_z genügen der Bedingung:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1 \dots \dots \dots (3)$$

§ 12. Wird ein Strahl von einer Ebene reflektirt, so schliessen der einfallende und reflektirte Strahl gleiche spitze Winkel ein mit irgend einer in der reflektirenden Ebene liegenden oder zu ihr parallel gerichteten Linie.

Es lässt sich dies leicht auf elementarem Wege nachweisen:

Es seien in Fig. 6 PO und OQ die Richtungen des einfallenden und reflektirten Strahles und MON sei die Schnittlinie der Einfallsebene mit der reflektirenden Ebene; ferner sei AOB eine durch O gehende zur gegebenen Linie parallele Gerade. Auf den Richtungen des einfallenden und reflektirten Strahles trage man die gleichen Strecken PO und OQ ab und lege durch die Punkte P und Q zwei zu MN senkrechte Ebenen, welche MN in M resp. N und die Linie AB

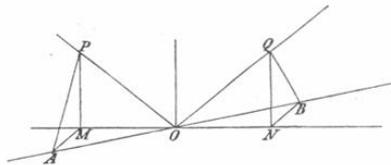


Fig. 6.

ebene mit der reflektirenden Ebene; ferner sei AOB eine durch O gehende zur gegebenen Linie parallele Gerade. Auf den Richtungen des einfallenden und reflektirten Strahles trage man die gleichen Strecken PO und OQ ab und lege durch die Punkte P und Q zwei zu MN senkrechte Ebenen, welche MN in M resp. N und die Linie AB

in A resp. B schneiden mögen. Da nun $OP = OQ$ und $\sphericalangle POM = \sphericalangle QON$, so folgt ohne Weiteres, dass $OM = ON$ und $PM = QN$, hieraus wieder, dass $AO = OB$, $MA = NB$, weiterhin, dass $AP = BQ$ und hieraus schliesslich, dass die Dreiecke AOP und BOQ kongruent sind, somit $\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOQ$.

Umgekehrt können zwei Linien PO und OQ , welche in einer zur reflektirenden Ebene senkrechten Ebene liegen und mit irgend einer in der ersteren Ebene liegenden Linie gleiche spitze Winkel einschliessen, als einfallender resp. reflektirter Strahl angesehen werden. Der Beweis würde dem vorhergehenden analog zu führen sein.

Bei der analytischen Behandlung dieser beiden letzten Sätze lassen wir das Einfallslot zur Z -Axe des räumlichen Koordinatensystems werden, während der Fusspunkt desselben wieder mit dem Nullpunkt zusammenfällt, so dass unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen $i_x = \cos 90^\circ = 0$ und $i_y = \cos 90^\circ = 0$ wird.

Aus der Formel (1), $i_x + r_x = 2 \cos \phi i_x$, wird nun

$$i_x + r_x = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Richtung der X -Axe und es geht aus ihr hervor, dass der einfallende Strahl mit irgend einer als X -Axe gewählten Linie, unter der Voraussetzung, dass die Z -Axe durch die Normale gebildet wird, Supplementwinkel einschliessen.

Um die Richtigkeit der Umkehrung des Satzes nachzuweisen, lassen wir die Einfallsebene mit der XZ -Ebene zusammenfallen und nennen die Richtungskosinuse der gegebenen Linie $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = 0)$. In diesem Falle ist $i_y = \cos 90^\circ = 0$ und ebenfalls $r_y = \cos 90^\circ = 0$, und da PO und OQ mit der Linie $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = 0)$ Supplementwinkel einschliessen, so ist

$$\lambda_x i_x + \underbrace{\lambda_y i_y}_{=0} + \lambda_x r_x + \underbrace{\lambda_y r_y}_{=0} = 0,$$

somit

$$\lambda_x (i_x + r_x) = 0$$

oder

$$i_x + r_x = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass PO und OQ sich genau so verhalten, wie einfallender und reflektirter Strahl.

Aus dem letzten Satz lässt sich folgender Schluss ziehen:

Wenn ein Lichtstrahl in beliebiger Weise an zwei ebenen Flächen nach einander reflektirt wird, so schliessen der eintretende und austretende Strahl gleiche Winkel mit der Schnittlinie der beiden Flächen ein.

§ 13. Wenn ein Lichtstrahl von einer Fläche reflektirt wird, so folgen auch die Projektionen des einfallenden und reflektirten Strahles auf irgend eine durch das Einfallslot gelegte Ebene dem Gesetze der Reflexion.

Trägt man nämlich auf der Richtung des einfallenden und reflektirten Strahles gleiche Strecken $OA = OB$ ab (Fig. 7) und stellt NO das Einfallslot dar, OP und OQ die Projektionen des einfallenden und reflektirten Strahles auf irgend eine beliebige, durch das Einfallslot gelegte Ebene, so folgt ohne Weiteres, dass $PN = NQ$ und daher OP und OQ mit dem Einfallslot NO gleiche Winkel einschliessen. Ferner folgt aus der Kongruenz der beiden Dreiecke AOP und BOQ , dass $\angle AOP = \angle BOQ$ ist; mit andern Worten: *Der einfallende und reflektirte Strahl schliessen gleiche Winkel mit irgend einer durch das Einfallslot gelegten Ebene ein.*

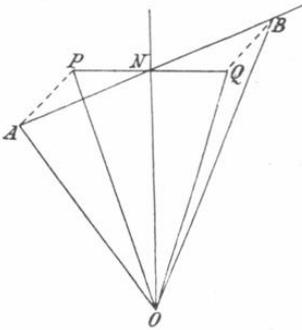


Fig. 7.

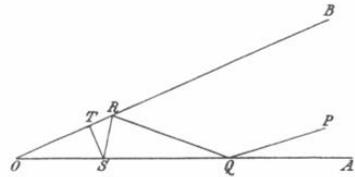


Fig. 8.

§ 14. Bestimmen wir nun die Richtung eines von zwei ebenen Spiegeln beliebig oft reflektirten Strahles und betrachten wir zunächst den Fall, wo sämtliche Strahlen in einer senkrecht zu den spiegelnden Flächen stehenden Ebene, also innerhalb eines Hauptschnittes, liegen.

AO und OB deuten in Fig. 8 die Lage der beiden reflektirenden Spiegel an, $PQRST \dots$ den Gang des successive bei $Q, R, S, T \dots$ reflektirten Strahles. Der Winkel zwischen den beiden Spiegeln sei mit ε bezeichnet und $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ seien die spitzen Winkel, welche die Strahlen der Reihe nach mit den reflektirenden Flächen einschliessen, so dass also θ_1 sich auf die beiden gleichen Winkel bei Q, θ_2 auf jene bei R u. s. f. bezieht. Man findet dann ohne Weiteres:

$$\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon,$$

$$\theta_3 = \theta_2 + \varepsilon,$$

$$\theta_4 = \theta_3 + \varepsilon \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch in dieser Form schreiben:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \varepsilon, \\ \theta_3 - \theta_2 &= \varepsilon, \\ \theta_4 - \theta_3 &= \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_{m+1} - \theta_m &= \varepsilon, \end{aligned}$$

und man erhält daher durch Addition:

$$\theta_{m+1} - \theta_1 = m\varepsilon \dots\dots\dots (6)$$

Wenn m eine gerade Zahl ist, so beziehen sich θ_{m+1} und θ_1 auf von demselben Spiegel reflektirte Strahlen und es stellt daher $\theta_{m+1} - \theta_1$ die Grösse des Winkels zwischen der Richtung des einfallenden und zuletzt reflektirten Strahles dar; daher ist die gesammte Abweichung ein m -faches der Neigung der beiden Spiegel zu einander. Die Abweichung bleibt also bei ein und demselben Spiegelpaar unverändert, welches auch immer der Einfallswinkel sein mag. Hieraus folgt: *Jedes Strahlenpaar schliesst nach der Reflexion denselben Winkel ein, unter welchem die Strahlen vor dem Einfall zu einander geneigt waren.*

Wenn der Strahl zweimal reflektirt wird, einmal an jedem Spiegel, so beträgt der Ablenkungswinkel das Doppelte der Neigung der beiden Spiegel zu einander. Hierauf beruht die Einrichtung des Hadley'schen Spiegelsextanten.

Bei jeder Reflexion wächst der Werth des Winkels θ um ε . Wenn θ grösser als $\frac{\pi}{2}$ wird, so beginnt der Strahl zurückzukehren, im Allgemeinen auf einem anderen Wege, als er eintrat; nur dann wenn der Winkel θ so gewählt wird, dass der nach einer Reihe von Reflexionen auftretende Einfallswinkel genau $\frac{\pi}{2}$ wird, wird der betreffende Einfallsstrahl in sich selbst zurückgeworfen und kehrt somit infolge der weiteren Reflexionen auf demselben Wege, auf welchem er eintrat, zurück. Sobald θ grösser wird als π , hören die Reflexionen auf, denn der Strahl wird entweder parallel zu einem der Spiegel gerichtet oder trifft diesen nur in seiner Rückwärtsverlängerung.

Wenn der einfallende Strahl nicht in einer zur Schnittlinie der beiden Spiegel senkrechten Ebene, dem Hauptschnitt, liegt, so gilt das eben Ausgeführte für die Projektion des Strahlenganges auf eine solche senkrechte Ebene. Wenn wir ferner berücksichtigen, dass die Neigung der Strahlen zu dieser Ebene genau in derselben Weise sich ändert, als ob sie selber die reflektirende Ebene wäre,

wie dies in § 13 ausgeführt wurde, so lässt sich die schliessliche Richtung des austretenden Strahles vollständig bestimmen. Nach einer beliebigen geraden Anzahl von Reflexionen schliesst der Strahl mit der Hauptebene denselben Winkel ein wie zu Anfang, und nach einer ungeraden Anzahl von Reflexionen entsteht der gleiche Winkel auf der anderen Seite der Ebene.

§ 15. Tritt ein Lichtstrahl von einem Medium in ein anderes über, so nennt man den Lichtstrahl in dem ersten Medium den einfallenden, denjenigen in dem zweiten Medium den gebrochenen Strahl, und die spitzen Winkel, welche beide mit dem Einfallslot einschliessen, beziehungsweise Einfalls- und Brechungswinkel.

Einfalls- und Brechungswinkel liegen immer in derselben Ebene und das Verhältnis ihrer Sinusse ist konstant.

Dieses ist das sogenannte Brechungsgesetz. Wie wir später sehen werden, giebt es sehr sichere Mittel, um die Richtigkeit des Satzes experimentell nachzuweisen.

Das konstante Sinusverhältnis hängt von der Beschaffenheit der beiden Medien und der Art des transmittirten Lichtes ab und wird als der dem Uebergange des Lichtes von dem ersten in das zweite Medium entsprechende Brechungsexponent bezeichnet.

Tritt ein Lichtstrahl aus dem Vakuum in ein gegebenes Medium über, so nennt man jenes konstante Sinusverhältnis den absoluten Brechungsexponenten dieses Mediums.

Bezeichnet man mit i den Einfallswinkel, mit i' den Brechungswinkel beim Uebergange eines Strahles von einem Medium in ein anderes, so lässt sich das Brechungsgesetz folgendermaassen ausdrücken:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n, \dots \dots \dots (7)$$

wo n den Brechungsexponenten für den Uebergang von einem Medium in das andere bedeutet.

§ 16. Ein empirisches Gesetz lehrt, dass der Gang eines Lichtstrahles umkehrbar ist; mit anderen Worten, wenn ein Strahl auf dem Wege des ursprünglich gebrochenen Strahles aus dem zweiten in das erste Medium übergeht, so beschreibt er nach der Brechung in das erste Medium einen Weg, welcher sich vollständig mit demjenigen des ursprünglich einfallenden Strahles deckt.

Bezeichnen wir die beiden Media mit A und B, den dem Uebergange des Lichtstrahles von A nach B entsprechenden Brechungsindex mit n_{ab} , denjenigen für den Uebergang von B nach A mit n_{ba} , so erhalten wir unter Beibehaltung der oben gewählten Bezeichnungen:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n_{ab}, \quad \frac{\sin i'}{\sin i} = n_{ba} \dots \dots \dots (8)$$

oder, wenn wir i und i' eliminiren,

$$n_{ab} \cdot n_{ba} = 1 \dots \dots \dots (9)$$

§ 17. Weiter lehrt die Beobachtung, dass, wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Medien, welche von parallelen Ebenen begrenzt sind, hindurchgeht und das erste und letzte Medium gleicher Art sind, die Richtungen des Strahles im ersten und letzten Medium parallel sind. Bezeichnet also in Fig. 9 A das erste, B, C... die folgenden Medien, i den Einfallswinkel für den Uebergang von A

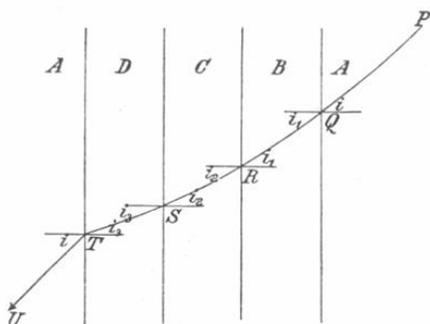


Fig. 9.

nach B, i_1 den zugehörigen Brechungswinkel, so ist i_1 auch der Einfallswinkel in Bezug auf C, i_2 der zugehörige Brechungswinkel und auch der Einfallswinkel in Bezug auf D u. s. f. Der schliessliche Brechungswinkel für das dem ersten gleichartige letzte Medium ist nun erfahrungsgemäss gleich dem Einfallswinkel i .

Uebertragen wir die oben bei den Formeln (8) angewandte Bezeichnungsweise auch auf diesen Fall, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin i}{\sin i_1} &= n_{ab}, \\ \frac{\sin i_1}{\sin i_2} &= n_{bc}, \\ \frac{\sin i_2}{\sin i_3} &= n_{cd}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\sin i_m}{\sin i} &= n_{ka}. \end{aligned}$$

Aus der Multiplikation dieser sämtlichen Gleichungen mit einander ergibt sich:

$$1 = n_{ab} \cdot n_{bc} \cdot n_{cd} \cdot \dots \cdot n_{ka} \cdot \dots \cdot \dots \quad (10)$$

Sind nun drei Medien vorhanden, so lautet diese Beziehung:

$$n_{ab} \cdot n_{bc} \cdot n_{ca} = 1,$$

oder

$$n_{ab} \cdot n_{bc} = \frac{1}{n_{ca}},$$

oder

$$n_{ac} = n_{ab} \cdot n_{bc}.$$

Setzen wir z. B. die drei Medien Luft, Glas und Wasser voraus und kennen wir deren Brechungsexponenten für den Uebergang von Luft in Glas und ebenso von Luft in Wasser, welche wir beziehungsweise mit n_{lg} und n_{lw} bezeichnen wollen, so lässt sich aus der letzten Gleichung der Brechungsexponent für den Uebergang von Glas nach Wasser bestimmen. Man hat nur in die Gleichung

$$n_{gw} = n_{gl} \cdot n_{lw}$$

die Werthe

$$n_{gl} = \frac{2}{3}$$

und

$$n_{lw} = \frac{4}{3}$$

einzusetzen und erhält dann

$$n_{gw} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9},$$

d. h. der Brechungsexponent für den Uebergang von Glas in Wasser ist $\frac{8}{9}$. Bezeichnet man ferner die absoluten Brechungsexponenten der Medien A und B mit n und n' und deutet der Index v an, dass der Uebergang aus dem Vakuum erfolgt, so ist $n_{ab} = n_{av} \cdot n_{vb}$. Nun ist aber n_{av} der reciproke Werth von n_{va} ; also auch derjenige von n , somit

$$n_{ab} = \frac{1}{n} \cdot n'$$

oder

$$n_{ab} = \frac{n'}{n};$$

d. h. der relative Brechungsexponent zwischen zwei Medien ist gleich dem Quotienten, welcher entsteht durch Division des absoluten Brechungsexponenten des zweiten durch denjenigen des ersten Mediums.

Wir erhalten hierdurch ein Mittel, das Brechungsgesetz in mehr symmetrischer Form unter Zugrundelegung der Begriffe der absoluten Brechungsexponenten n und n' zweier Media zum Ausdruck zu bringen und gelangen somit, wenn wir die für Einfallswinkel und Brechungswinkel gewählten Bezeichnungen beibehalten, zu der Relation:

$$n \sin i = n' \sin i'. \quad (11)$$

§ 18. Angenommen $n' > n$, d. h. B sei ein stärker brechendes Medium als A, so lautet bei gegebenem Winkel i die Gleichung zur Bestimmung von i' :

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i.$$

Dieser Werth ist immer kleiner als die Einheit, was auch immer der Werth von i sein mag, so dass für irgend einen Werth von i immer der zugehörige Werth von i' gefunden werden kann. Wenn daher ein Lichtstrahl aus irgend einem Medium in ein stärker brechendes Medium übergeht, so liefert die Anwendung des Brechungsgesetzes in allen Fällen einen Richtungswert für den gebrochenen Strahl.

Geht dagegen der Strahl aus einem dichteren Medium B in ein dünneres A über, und nehmen wir an, dass der Winkel i' gegeben sei, so dass

$$\sin i = \frac{n'}{n} \sin i' = \frac{\sin i'}{\left(\frac{n}{n'}\right)},$$

so kann der Fall eintreten, dass $\sin i' > \frac{n}{n'}$, und es wird dann der zugehörige Werth von $\sin i$ grösser als 1, so dass das Brechungsgesetz dann nicht mehr im Stande ist, einen Werth für die Richtung des gebrochenen Strahles zu ergeben. Den Winkel $\arcsin \frac{n}{n'}$, d. h. den grössten, unter welchem ein Lichtstrahl aus einem stärker in ein schwächer brechendes Medium übergehen und noch gebrochen werden kann, nennt man den Grenzwinkel.

Tritt ein Lichtstrahl unter einem grösseren Winkel als dem Grenzwinkel aus einem stärker brechenden in ein schwächer brechendes Medium über, so wird sämtliches Licht an der Trennungsfläche der beiden Medien reflektirt; der gebrochene Theil existirt nicht. Diese Erscheinung nennt man totale Reflexion.

§ 19. Ebenso wie bei der Behandlung der Reflexionsgesetze, so lassen sich auch hier allgemeine Formeln aufstellen zur Bestimmung der Richtungskosinusse des gebrochenen Strahles bei gegebenem Richtungskosinus des einfallenden Strahles und des Einfallslotes.

Es stelle in Fig. 10 MQN die Normale zur brechenden Fläche dar, PQR den Gang des Lichtstrahles. Auf den Richtungen des einfallenden

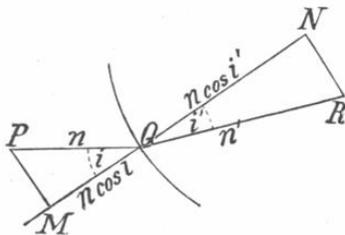


Fig. 10.

den und gebrochenen Strahles trage man die Strecken PQ und QR ab, so zwar, dass $\frac{PQ}{QR} = \frac{n}{n'}$ (unter n und n' wieder die Brechungsexponenten der beiden Medien verstanden) und ziehe PM und RN senkrecht zum Einfallslot. Da nun

$$n \sin i = n' \sin i',$$

so muss auch $PM = RN$ sein.

Ferner ist die Projektion von PQ auf irgend eine Gerade gleich der Projektion der gebrochenen Linie PMQ und ebenso die Projektion der Linie QR auf diese Gerade gleich der Projektion der gebrochenen Linie QNR. Die Projektionen aber der Theile PM und RN auf jene Gerade sind einander gleich, da diese Theile einander gleich und parallel sind. Somit muss die Differenz der Projektionen von PQ und MQ ebenso gross sein als die Differenz der Projektionen von QR und QN.

Bezeichnet man mit l_x, l_y, l_z die Richtungskosinusse des Einfallslotes, mit i_x, i_y, i_z und r_x, r_y, r_z beziehungsweise die Richtungskosinusse des einfallenden und gebrochenen Strahles und berücksichtigt, dass PQ, QR, MQ und QN beziehungsweise proportional sind $n, n', n \cos i$ und $n' \cos i'$, so ergeben sich folgende Gleichungen für die Werthe der Differenz der Projektionen von PQ und QR einerseits und MQ und QN andererseits auf die Axe des Koordinatensystems:

$$\left. \begin{aligned} n i_x - n' r_x &= (n \cos i - n' \cos i') l_x \\ n i_y - n' r_y &= (n \cos i - n' \cos i') l_y \\ n i_z - n' r_z &= (n \cos i - n' \cos i') l_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Substituiren wir in diesen Gleichungen die Werthe von $\cos i$ und $\cos i'$, nämlich

$$\begin{aligned} \cos i &= i_x l_x + i_y l_y + i_z l_z, \\ \cos i' &= r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z, \end{aligned}$$

so erhalten wir lineare Gleichungen nach i_x, i_y, i_z und r_x, r_y, r_z . Diese Gleichungen lassen sich indessen durch nur zwei unabhängige Gleichungen ersetzen; denn multipliciren wir die drei Gleichungen der Reihe nach mit l_x, l_y, l_z und addiren sie, so erhalten wir eine Identität. Die aus den Gleichungen sich ergebenden Werthe für r_x, r_y, r_z genügen der Bedingung:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1.$$

Setzen wir $n' = -n$, so wird $i = -i'$, d. h. aus der Refraktion wird eine Reflexion. Setzen wir diese Werthe in die allgemeinen Gleichungen für die Richtung des gebrochenen Strahles, so stimmen die hierdurch erhaltenen Gleichungen mit den entsprechenden für die Reflexion gefundenen Gleichungen überein. Alle folgenden Sätze über Refraktionserscheinungen können durch Anwendung der Substitution $n' = -n$ auch auf die Reflexionserscheinungen übertragen werden.

§ 20. Wir führen zwei weitere bemerkenswerthe Sätze über die Brechung eines Strahles an, welche sich aus Formel (11) ableiten lassen. Wir ziehen aber die folgenden einfacheren Beweise vor. Die Sätze lauten:

I. Die Winkel, welche der einfallende und gebrochene Strahl mit irgend einer durch die Normale zur brechenden Fläche gelegten Ebene einschliessen, folgen dem Brechungsgesetz.

II. Die Projektionen des einfallenden und gebrochenen Strahles auf irgend eine durch die Normale gelegte Ebene sind einem dem Brechungsgesetz analogen Gesetz unterworfen, wobei aber als Brechungsexponent ein anderer von der Neigung des einfallenden Strahles zu jener Ebene abhängiger Brechungsexponent gilt.

Trägt man nämlich, wie in Fig. 11 dargestellt, auf der Richtung zweier beliebiger gebrochener Strahlen die im Längenverhältniss von n zu n' , den Brechungsexponenten der beiden Medien, zu einander stehenden Strecken AO und OB ab und zieht AM und BN von A und B senkrecht zum Einfallslot, so sind AM und BN einander gleich und parallel.

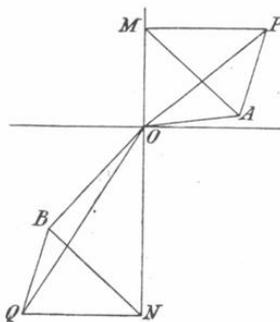


Fig. 11.

Es seien ferner PO und OQ die Projektionen von AO und OB auf irgend eine durch die Normale gelegte Ebene, wobei P und Q die Projektionen der beiden Punkte A resp. B sein sollen. Es sind dann die Dreiecke APM und BQN kongruent.

Bezeichnet man mit η , η' die spitzen Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Strahl mit dieser Ebene einschliessen, mit Φ , Φ' die spitzen Winkel zwischen den Projektionen dieser Strahlen auf die Ebene und dem Einfallslot, so ist $AP = n \sin \eta$, $BQ = n' \sin \eta'$ und daher, da $AP = BQ$,

$$n \sin \eta = n' \sin \eta', \quad \dots \dots \dots (13)$$

was die Richtigkeit des ersten Satzes beweist. Ferner ist

$$OP = n \cos \eta, \quad OQ = n' \cos \eta',$$

oder

$$OP = \frac{MP}{\sin \Phi} = n \cos \eta; \quad OQ = \frac{NQ}{\sin \Phi'} = n' \cos \eta',$$

oder, da $MP = QN$,

$$n \cos \eta \sin \Phi = n' \cos \eta' \sin \Phi', \quad \dots \dots \dots (14)$$

was den zweiten Satz beweist. Man beachte, dass der Brechungs-exponent für den projicirten Strahl stets grösser als für den gebrochenen Strahl ist.

§ 21. Bei jeder Brechung entspricht dem grösseren Einfallswinkel immer die grössere Ablenkung. Denn sind i , i' der Einfalls- resp. Brechungswinkel, so ist

$$\sin i = n \sin i'$$

und daher

$$\frac{\sin i - \sin i'}{\sin i + \sin i'} = \frac{n - 1}{n + 1},$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i + i')} = \frac{n - 1}{n + 1},$$

oder endlich

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i') = \frac{n - 1}{n + 1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(i + i').$$

$i - i'$ stellt aber die Ablenkung dar. Einem Wachstum von i , und somit auch von i' , entspricht daher ein Wachstum von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i + i')$, da $\frac{1}{2}(i + i') < \frac{\pi}{2}$. Es nimmt also die Ablenkung mit wachsendem Einfallswinkel zu.

Tritt der Strahl in ein dünneres Medium über, so haben wir nur den Strahlengang umzukehren. Da nun der Brechungswinkel mit dem Einfallswinkel wächst, so bildet dieser Fall keine Ausnahme von dem eben bewiesenen Satze.

Dieser Satz lässt sich auch nachweisen durch Logarithmirung und Differentiation der Gleichung $\sin i = n \sin i'$, woraus sich ergibt:

$$\frac{di}{\operatorname{tg} i} = \frac{di'}{\operatorname{tg} i'},$$

und hieraus folgt, dass $di > di'$, d. h. $d(i - i')$ immer einen positiven Werth haben muss. Mit anderen Worten: *Die Ablenkung wächst mit dem Einfalls- und Brechungswinkel.*

Durch Differentiation der Gleichung

$$\sin i = n \sin i'$$

erhält man ferner:

$$\cos i \, di = n \cos i' \, di'$$

oder

$$\frac{di}{di'} = n \frac{\cos i'}{\cos i},$$

und daher

$$\left(\frac{di}{di'}\right)^2 = n^2 \frac{1 - \sin^2 i'}{\cos^2 i} = \frac{n^2 - \sin^2 i}{\cos^2 i},$$

oder

$$\left(\frac{di}{di'}\right)^2 = \frac{n^2 - 1 + \cos^2 i}{\cos^2 i} = 1 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2 i}.$$

Hieraus können wir den Schluss ziehen, dass $\frac{di}{di'}$ mit dem Einfallswinkel wächst, und zwar: *Lässt man den Brechungswinkel stetig zunehmen, so wächst die Ablenkung in steigendem Maasse.*

§ 22. Die beiden letzten Sätze lassen sich geometrisch beweisen:

In Fig. 12 sei C der Mittelpunkt irgend eines Kreises mit dem Radius r , O sei ein solcher Punkt ausserhalb des Kreises, dass $OC = nr$. Man ziehe nun irgend eine Linie OPQ durch O, welche den Kreis in P und Q schneiden möge, und verbinde C mit P und Q. Bezeichnet man dann den Winkel CPQ mit i und den Winkel COP mit i' , so ist

$$\sin i : \sin i' = CO : CP = n : 1,$$

oder

$$\sin i = n \sin i'.$$

Die Winkel i und i' stehen also in demselben Verhältniss zu einander, wie Einfalls- und Brechungswinkel eines Lichtstrahles.

Die Ablenkung ist dargestellt durch den Winkel PCO , den wir mit Δ bezeichnen wollen. Lässt man die Linie OPQ aus der Lage OAB in die Lage der Kreistangente OT übergehen, so wächst dabei der Winkel i von O bis $\frac{\pi}{2}$ und während dieses Wachstums von i wächst auch die Ablenkung Δ . Hiermit ist auch nachgewiesen, dass die Ablenkung mit dem Einfallswinkel wächst. Der Brechungswinkel wächst von O bis zum Werthe COT ; dieser Winkel stellt also den Grenzwinkel dar.

Ferner war zu beweisen, dass, wenn i oder i' stetig zunehmen, die Ablenkung in einem schneller wachsenden Verhältniss zunimmt.

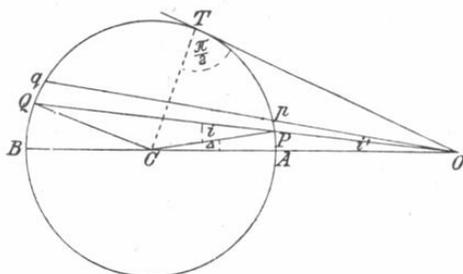


Fig. 12.

Ist Opq eine andere, von OPQ um ein Geringes entfernte Sehne des Kreises, so ist die Veränderung des Winkels dargestellt durch den zum Bogenstück Pp gehörigen Centriwinkel. Da nun Winkel $PCQ = \pi - 2i$, so ist ein Wachsthum von i dargestellt durch den Bogen $\frac{1}{2}(Qq + Pp)$ und daher die Zunahme von i' , d. h. $i - \Delta$, durch den Bogen $\frac{1}{2}(Qq + Pp) - Pp = \frac{1}{2}(Qq - Pp)$. Nehmen wir an, i , i' und Δ seien um x , x' und δ gewachsen, so besteht das Verhältniss:

$$\frac{x}{\delta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Qq}{Pp} + 1 \right\}$$

oder, wenn man QqO und PpO als ähnliche Dreiecke ansieht,

$$\frac{x}{\delta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Oq}{OP} + 1 \right\},$$

daher schliesslich bei unendlich kleiner Verschiebung von OQ

$$\frac{x}{\delta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{OQ}{OP} + 1 \right\},$$

und analog

$$\frac{x'}{d} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{OQ}{OP} - 1 \right\}.$$

Während aber P sich von A nach T bewegt, nähert sich OQ immer mehr der Grösse von OP; d. h. es wird $\frac{x}{d}$ resp. $\frac{x'}{d}$ immer kleiner.

Die in diesem Paragraphen angegebene Konstruktion rührt von Prof. P. G. Tait her.

§ 23. Jedes durch zwei sich schneidende Ebenen begrenzte Medium wird ein Prisma genannt. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen zu einander heisst der brechende Winkel des Prismas. Vor der Hand werden wir nur den Gang derjenigen Lichtstrahlen verfolgen, welche in einer zu beiden Prismenflächen und somit auch zur Kante des Prismas senkrechten Ebene, dem sogenannten Hauptschnitt, verlaufen.

Tritt ein Lichtstrahl durch ein Prisma, welches stärker brechend ist als das dasselbe umgebende Medium, so erfolgt in allen Fällen die Ablenkung von dem brechenden Winkel nach dem dickeren Theile des Prismas zu.

PQRS stelle den Gang eines in einem Hauptschnitt durch ein Prisma gehenden Strahles dar. Q und R seien die Fusspunkte der Einfallslothe, welche sich in L schneiden mögen. Es treten nun drei Fälle auf, je nachdem das Dreieck OQR ein spitzwinkliges oder rechtwinkliges oder stumpfwinkliges ist.

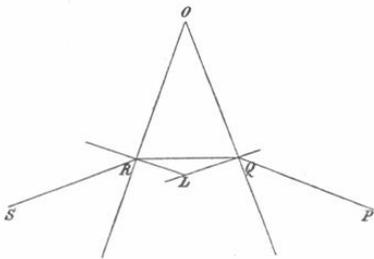


Fig. 13.

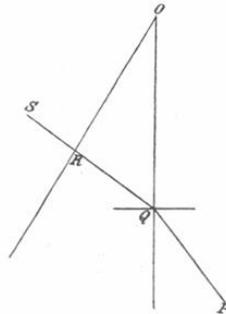


Fig. 14.

In dem erstgenannten Falle (Fig. 13) liegen die Strahlen PQ und RS auf der von dem Scheitel O abgekehrten Seite und daher erfolgen die Ablenkungen sowohl beim Eintritt als auch beim Austritt des Strahles in einer von der Prismenkante abgekehrten Richtung.

In dem zweiten Falle (Fig. 14) ist einer der Winkel des Dreiecks OQR ein rechter; wo dieser seinen Scheitelpunkt hat, findet also beim Eintritt gar keine Ablenkung statt, während bei dem anderen Eintrittspunkt die Ablenkung nach der vom Scheitel O abgekehrten Seite erfolgt.

Im letzten Falle (Fig. 15), wo einer der Winkel, ORQ , ein stumpfer, der andere also ein spitzer ist, liegt der Strahl SR auf der dem Scheitel O zugekehrten Seite des Einfallslotes, so dass die zugehörige Ablenkung nach dem Scheitel zu liegt, während bei O die Ablenkung vom Scheitel fort gerichtet ist. Der Brechungswinkel bei Q ist immer grösser als derjenige bei R , indem der erstere ein Aussenwinkel des Dreiecks QRL , der letztere ein Innenwinkel ist. Es ist daher die Ablenkung bei Q grösser als bei R , so dass die resultirende Ablenkung nach der von O abgekehrten Richtung erfolgt.

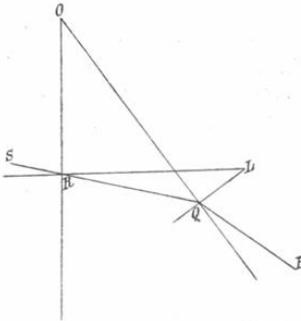


Fig. 15.

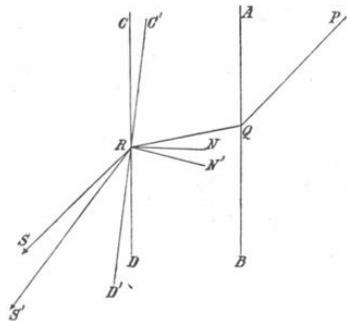


Fig. 16.

Hat das Prisma ein geringeres Brechungsvermögen als das daselbe umgebende Medium, so gilt für die angeführten Brechungsercheinungen das Umgekehrte.

§ 24. Der eben ausgeführte Satz kann auch durch den Vergleich der Wirkung eines Prismas mit derjenigen einer Platte bewiesen werden.

Dringt ein Lichtstrahl in eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Platte, so ist der austretende Strahl dem eintretenden parallel. Ist $PQRS$ (Fig. 16) der Weg eines Strahles durch eine von den zwei Ebenen AB und CD begrenzte Platte, RN das Einfallslot zur zweiten Ebene und denkt man sich nun diese zweite Ebene um R nach AB hin gedreht, so dass hierdurch ein Prisma entsteht, dessen Kante senkrecht zur Einfallsebene des Strahles ist, und RN' die Lage der Normalen zur zweiten Ebene, RS' der neue austretende

Strahl wird, so hat diese Drehung, wie die Figur zeigt, eine Zunahme des Einfallswinkels zur Folge; es ist also die Ablenkung an der zweiten Ebene vergrößert. Wie oben tritt daher auch hier eine Ablenkung nach dem dickeren Theile des Prismas auf.

In analoger Weise stellt sich eine Verminderung der Ablenkung an der zweiten Ebene ein bei einer Drehung derselben in dem entgegengesetzten Sinne und wir gelangen zu dem nämlichen Resultate.

§ 25. In Fig. 17 sei PQRS der Gang eines Strahles durch ein Prisma, dessen Kante in O liegt und dessen brechender Winkel

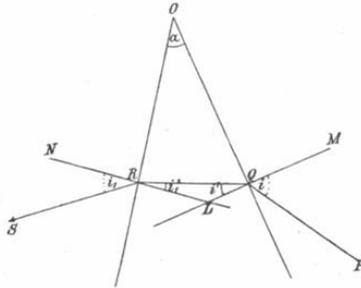


Fig. 17.

mit α bezeichnet sein mag. NR und MQ seien die Einfallslothe in R resp. Q zu den Prismenflächen. Ferner bezeichne

- i den Einfallswinkel bei Q,
- i' den Brechungswinkel bei Q,
- i_1' den Eintrittswinkel bei R,
- i_1 den Austrittswinkel bei R.

Wir wollen i und i_1 als positiv ansehen, wenn sie von dem Einfallsloth aus nach dem dickeren Theile des Prismas gemessen werden, so dass also i' und i_1' ebenfalls als positiv anzusehen sind, wenn sie von dem Einfallsloth nach dem Scheitel O gemessen werden. In der Figur sind i, i', i_1, i_1' demnach alle positiv. Nach dem Brechungsgesetz haben wir

$$\left. \begin{aligned} \sin i &= n \sin i' \\ \sin i_1 &= n \sin i_1' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Da ferner

$$\angle ORQ + i_1' + OQR + i' = \pi$$

und ebenfalls

$$\angle ORQ + OQR + \alpha = \pi,$$

so ist

$$i' + i_1' = \alpha \dots \dots \dots (16)$$

Diese Relation besteht auch dann, wenn das Dreieck OQR ein stumpfwinkliges ist; in diesem Falle ist indessen einer der Winkel i' oder i_1' negativ.

Bezeichnet γ den Werth des Grenzwinkels der Brechung, so können i' und i_1' niemals grösser als γ sein. Wenn daher der brechende Winkel des Prismas grösser als 2γ ist, so kann kein Strahl durch das Prisma hindurch treten. Ist $\alpha > \gamma$, so müssen i' und i_1' stets beide positiv sein.

Δ sei die gesammte, durch das Prisma hervorgebrachte Ablenkung. Bei der ersten Brechung wird der Strahl um $i - i'$ abgelenkt und bei der zweiten beträgt die Ablenkung $i_1 - i_1'$.

Somit ist

$$\Delta = i - i' + i_1 - i_1'$$

oder

$$\Delta = i + i_1 - \alpha \dots \dots \dots (17)$$

Durch die Gleichungen (15), (16) und (17) ist der Strahlengang durch ein Prisma innerhalb eines Hauptschnittes vollständig charakterisirt.

§ 26. *Die Ablenkung wird ein Minimum, wenn der Strahl symmetrisch durch das Prisma tritt.*

Untersuchen wir die Richtigkeit des Satzes. Wird für diesen symmetrischen Strahlengang der Werth des Winkels i mit i_0 bezeichnet und lässt man nun diesen Winkel i_0 allmählich anwachsen, so hat ein bestimmtes Wachstum des Winkels i' eine gleichgrosse Verminderung des Winkels i_1' zur Folge, indem ja $i' + i_1'$ die konstante Summe α darstellt. Während also bei wachsendem Winkel i der Winkel i' immer grösser wird als i_1' , wächst (vgl. § 21) die Ablenkung an der ersten Fläche in einem schnelleren Grade, als die Ablenkung an der anderen Fläche abnimmt; es wird somit die gesammte Ablenkung grösser.

Zu demselben Schluss gelangt man, wenn sogar i_1' negativ wird (wenn es überhaupt negativ wird, ehe i den Werth $\frac{\pi}{2}$ erreicht). Während also i von dem Werthe i_0 aus wächst, nimmt die Ablenkung stetig zu.

Lässt man nun i von i_0 aus abnehmen, so wächst i_1 von i_0 aus und wir haben nur den umgekehrten Weg zu verfolgen, um zu demselben Schluss zu gelangen.

Wenn daher der Lichtstrahl symmetrisch durch das Prisma tritt, so liegt das einzig mögliche Minimum der Ablenkung vor.

Dieser Satz kann auch durch die Formeln des vorigen Paragraphen bewiesen werden. Nach Gleichung (15) haben wir:

$$\left. \begin{aligned} \sin i &= n \sin i' \\ \sin i_1 &= n \sin i_1' \end{aligned} \right\}$$

Aus der Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\sin i + \sin i_1 = n(\sin i' + \sin i_1'),$$

oder

$$2 \sin \frac{i+i_1}{2} \cos \frac{i-i_1}{2} = 2n \sin \frac{i'+i_1'}{2} \cos \frac{i'-i_1'}{2},$$

das heisst

$$\sin \frac{\Delta + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{i'-i_1'}{2}}{\cos \frac{i-i_1}{2}}.$$

Angenommen, i und i_1 seien ungleich, etwa $i > i_1$, so ist die Ablenkung $i - i'$ grösser als die Ablenkung $i_1 - i_1'$, somit $i - i_1$ grösser als $i' - i_1'$ und daher auch

$$\cos \frac{i'-i_1'}{2} > \cos \frac{i-i_1}{2}.$$

Ebenso ist $\cos \frac{i'-i_1'}{2} > \cos \frac{i-i_1}{2}$, wenn $i_1 > i$, daher in allen Fällen, wo i und i_1 ungleich sind, $\sin \frac{\Delta + \alpha}{2} > n \sin \frac{\alpha}{2}$. Wenn aber $i = i_1$, ist

$$\sin \frac{\Delta + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}. \quad \dots \dots \dots (18)$$

Daher ist Δ ein einziges Minimum, wenn $i = i_1$, d. h. wenn der Strahlengang ein symmetrischer ist.

Es lässt sich der direkte Beweis unter mehreren anderen auch so führen, dass man $i + i_1$ als Funktion von i' ausdrückt und den ersten Differentialquotient dieser Funktion = 0 setzt. Der Gang der Rechnung ist folgender:

Die Ablenkung ist nach Gleichung (17) $\Delta = i + i_1 - \alpha$ und es ist die Bedingung zu finden, unter welcher Δ ein Minimum wird.

Nach Gleichung (15) ist:

$$\left. \begin{aligned} \sin i &= n \sin i' \\ \sin i_1 &= n \sin i_1' \end{aligned} \right\}$$

somit

$$i = \arcsin(n \sin i')$$

$$i_1 = \arcsin(n \sin i_1')$$

oder

$$i_1 = \arcsin [n \sin (\alpha - i')],$$

daher

$$A = i + i_1 - \alpha = \arcsin [n \sin i'] + \arcsin [n \sin (\alpha - i')] - \alpha.$$

Differenziert man und setzt den ersten Differentialquotienten = 0, so ergibt sich:

$$\frac{dA}{di'} = n \left\{ \frac{\cos i'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'}} - \frac{\cos (\alpha - i')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')}} \right\} = 0.$$

Hieraus:

$$\frac{\cos i'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'}} = \frac{\cos (\alpha - i')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')}} ,$$

oder

$$\frac{1 - \sin^2 i'}{1 - n^2 \sin^2 i'} = \frac{1 - \sin^2 (\alpha - i')}{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')}$$

oder

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 i' - n^2 \sin^2 (\alpha - i') + n^2 \sin^2 i' \sin^2 (\alpha - i') \\ = 1 - \sin^2 (\alpha - i') - n^2 \sin^2 i' + n^2 \sin^2 i' \sin^2 (\alpha - i') \end{aligned}$$

oder

$$(n^2 - 1) \sin^2 i' = (n^2 - 1) \sin^2 (\alpha - i'),$$

und hieraus

$$i' = \alpha - i',$$

oder endlich

$$i' = \frac{\alpha}{2}.$$

Um zu bestimmen, ob $i' = \frac{\alpha}{2}$ die Bedingung für ein Maximum oder Minimum liefert, bilden wir die zweite Derivirte.

Wir erhalten dann:

$$f_{(i')}'' = n \left\{ \frac{-\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'} \cdot \sin i' - \cos i' \frac{-n^2 \sin i' \cos i'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'}}}{1 - n^2 \sin^2 i'} - \frac{\sin (\alpha - i') \sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')} - \cos (\alpha - i') \frac{n^2 \sin (\alpha - i') \cos (\alpha - i')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')}}}{1 - n^2 \sin^2 (\alpha - i')} \right\}.$$

Hierfür erhalten wir unter gleichzeitiger Einsetzung des Bedingungs-
werthes $i' = \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\alpha}{2}\right)'' &= n \frac{-\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}+n^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \\
 &\quad - \frac{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}+n^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}, \\
 &= n \frac{2n^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}, \\
 &= 2n\sin\frac{\alpha}{2} \frac{n^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \frac{n^2-1}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Da nun n stets grösser als 1 und $n\sin\frac{\alpha}{2}=n\sin i'$ auch in seinem grösstmöglichen, durch den Grenzwinkel gegebenen Werth kleiner als 1 ist, so ist die zweite Derivirte positiv.

Es ist daher $i'=\frac{\alpha}{2}$ die Bedingung dafür, dass Δ ein Minimum wird.

Ist aber $i'=\frac{\alpha}{2}$, so muss auch $i_1'=\frac{\alpha}{2}$ sein, da nach (16) $i'+i_1'=\alpha$, d. h. es muss der Strahlengang ein symmetrischer sein.

§ 27. Wenn der brechende Winkel des Prismas klein ist, so kann auch die Ablenkung nur klein sein. Da nun nach (16) und (17)

$$i_1' = \alpha - i'$$

und

$$i_1 = \alpha + \Delta - i,$$

so ist

$$\sin(\alpha + \Delta - i) = \sin i_1 = n \sin i_1' = n \sin(\alpha - i'),$$

oder, da α und Δ klein sind,

$$(\alpha + \Delta) \cos i - \sin i = n \alpha \cos i' - n \sin i',$$

oder

$$\Delta \cos i = \alpha \{ n \cos i' - \cos i \};$$

daher

$$\Delta = \alpha \left\{ \frac{n \cos i'}{\cos i} - 1 \right\}. \quad \dots \dots \dots (19)$$

Tritt der Strahl fast senkrecht zu den brechenden Flächen durch das Prisma, so werden i und i_1 beide klein, so dass man die höheren Potenzen vernachlässigen kann, und die Ablenkung hat dann den Näherungswerth

$$\Delta = (n - 1) \alpha \quad \dots \dots \dots (20)$$

und es ist, wie man sieht, dieser Annäherungswerth unabhängig von dem Einfallswinkel.

§ 28. Wir wollen nun den Fall betrachten, wo der Strahl nicht in einer zur Schnittlinie der brechenden Flächen senkrechten Ebene, also nicht in einem Hauptschnitt liegt.

Es gelte für die Projektion des Strahlenganges auf diesen Hauptschnitt die auf den vorigen Fall angewandte Bezeichnungsweise. Bedeuten ausserdem η , η' die Neigungen des einfallenden und gebrochenen Strahles zum Hauptschnitt bei der ersten Ablenkung, ξ , ξ' die Neigungen des gebrochenen und einfallenden Strahles zu dieser Ebene bei der zweiten Ablenkung, so ist nach (13)

$$\left. \begin{aligned} \sin \eta &= n \sin \eta' \\ \sin \xi &= n \sin \xi' \end{aligned} \right\}$$

Da nun aber ξ' und η' die Neigung ein und desselben Strahles zur selben Ebene bezeichnen, so ist $\xi' = \eta'$ und somit nach der letzten Gleichung $\xi = \eta$. Hieraus ist ersichtlich, dass der einfallende und austretende Strahl dieselbe Neigung zum Hauptschnitt, somit auch zur brechenden Kante des Prismas haben.

Ferner bestehen für die Brechung nach (14) die folgenden Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \cos \eta &= n \sin i' \cos \eta' \\ \sin i_1 \cos \eta &= n \sin i_1' \cos \eta' \\ i' + i_1' &= \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

und

Aus diesen drei Gleichungen lässt sich der Strahlengang durch ein brechendes Prisma in jedem einzelnen Fall ableiten.

§ 29. Wir gehen nun über zur Bestimmung der durch das Prisma hervorgerufenen Ablenkung, wieder unter der Voraussetzung, dass der einfallende Strahl in einer zum Hauptschnitt beliebige ge-

neigten Ebene liegt. Bezeichnet Δ_0 die Ablenkung der auf einen Hauptschnitt projicirten Strahlen, so haben wir

$$\Delta_0 = i + i_1 - \alpha.$$

Es sei in Fig. 18 OAB der Hauptschnitt, OA und OB die Projektionen des einfallenden und austretenden Strahles, OP und OQ diese Strahlen selbst und man nehme an, dass die Endpunkte dieser Linien auf einer um O als Mittelpunkt beschriebenen Kugel liegen. Der Bogen AB stellt dann Δ_0 und der Bogen PQ die wirkliche Ablenkung dar. Die Bögen AP und BQ sind aber jeder gleich η , so dass PQ die Linie AB in N halbtirt. Wir erhalten dann aus dem rechtwinkligen Dreieck PAN die Gleichung

$$\cos \frac{\Delta}{2} = \cos \frac{\Delta_0}{2} \cdot \cos \eta$$

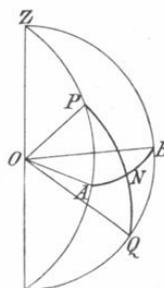


Fig. 18.

als Bestimmungswerth der gesammten Ablenkung.

Aus dieser Gleichung lässt sich der Schluss ziehen, dass Δ immer grösser als Δ_0 ist. Die Bedingung für den kleinsten Werth von Δ_0 lässt sich analog dem in § 26 behandelten Fall auffinden. Die Ablenkung wird nämlich ein Minimum, sobald $i = i_1$ wird; für diesen Fall erhalten wir dann für die Ablenkung nach (18) und (21) die Gleichung:

$$\sin \frac{\Delta_0 + \alpha}{2} \cos \eta = n \sin \frac{\alpha}{2} \cos \eta'. \quad \dots \dots (22)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\eta = 0$, so gelangen wir zu demselben, die minimale Ablenkung kennzeichnenden Werth, den wir oben für den im Hauptschnitt verlaufenden Strahl fanden; es ist dieser Werth kleiner als Δ_0 , da $\cos \eta' > \cos \eta$. Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Die durch ein Prisma hervorgerufene Ablenkung ist ein Minimum, wenn der Lichtstrahl in einem Hauptschnitt verläuft und wenn der Einfalls- und Austrittswinkel einander gleich sind.