universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Theorie der Elektrizität

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität - mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik

Föppl, A.

1907

Formelzusammenstellung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6404

Formelzusammenstellung.

I. Allgemeine Regeln der Vektorenrechnung.

Alle Vektoren sind durch Frakturbuchstaben kenntlich gemacht, wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{v}$ usf.; die Beträge sind mit $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$, die Komponenten nach den Koordinatenachsen mit $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ bezeichnet. Das skalare Produkt wird $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, oder, wenn eine Abtrennung von anderen Vektoren erwünscht ist, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ gegeschrieben; $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ dagegen stellt das Vektorprodukt vor.

1. Vektoralgebra.

$$(\alpha)\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 22, S. 16)}$$

$$(\beta)\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad \left(\begin{matrix}\text{Gl. 25, S. 19}\\ \text{u. Gl. 28, S. 20}\end{matrix}\right)$$

$$(\gamma)\quad \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix} \quad . \quad \text{(Gl. 31, S. 22)}$$

$$(\delta)\quad \big[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 32, S. 23)}$$

$$(\varepsilon)\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\cdot[\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}) \quad . \quad \text{(Gl. 33, S. 23)}$$

2. Vektoranalysis.

$$(\zeta)\quad \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 68a, S. 52)}$$

$$(\eta)\quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 70, S. 55)}$$

$$(\vartheta)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{A} = [\nabla, \mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 91, S. 84)}$$

$$(\iota)\quad \operatorname{div}\varphi\mathfrak{A} = \varphi \operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla\varphi \quad \ldots \quad \text{(Gl. 72, S. 60)}$$

$$(\varkappa)\quad \operatorname{curl}\varphi\mathfrak{A} = \varphi \operatorname{curl}\mathfrak{A} + [\nabla\varphi, \mathfrak{A}] \quad \ldots \quad \text{(Gl. 112, S. 113)}$$

$$(\lambda)\quad \operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 102, S. 96)}$$

$$(\mu)\quad \operatorname{curl}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 114, S. 115)}$$

$$(\nu)\quad \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A}] \quad \ldots \quad \text{(Gl. 115, S. 115)}$$

$$(\xi)\quad \operatorname{div}\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 73a, b, S. 60)}$$

$$(o)\quad \operatorname{curl}\nabla\varphi = 0 \quad \ldots \quad \text{(Gl. 91a, S. 84)}$$

$$(\pi)\quad \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0 \quad \ldots \quad \text{(Gl. 94, S. 91)}$$

$$(\varrho)\quad \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \operatorname{curl}^2\mathfrak{A} = \nabla\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 95, S. 92)}$$

Satz von Gauß:

$$(\sigma)\quad \int dv \operatorname{div}\mathfrak{A} = \int df\, \mathfrak{A}_n \quad \ldots \quad \text{(Gl. 71, S. 57)}$$

Satz von Green:

$$(\tau)\quad \int dy\,\{\psi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi, \nabla\psi)\} = \int df\, \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 75, S. 61)}$$

$$(\upsilon)\quad \int dv\,\{\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}\} = \int df\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_n \quad \text{(Gl. 102a, S. 96)}$$

folgt aus λ und σ.

Satz von Stokes:

$$(\varphi)\quad \int df \operatorname{curl}_n\mathfrak{A} = \int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 92b, S. 89)}$$

Skalares Potential.

$$(\chi)\quad \varphi = \int \frac{dv\,\varrho}{r} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 83, S. 70)}$$

dient zur Berechnung des wirbelfreien Feldes

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi,$$

wenn

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 4\pi\varrho$$

gegeben ist.

Vektorpotential.

$$(\psi) \quad \int\frac{dv\,\mathfrak{c}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 100, S. 94)}$$

dient zur Berechnung des quellenfreien Feldes

$$\mathfrak{v} = \operatorname{curl}\mathfrak{A},$$

wenn

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}$$

gegeben ist, und genügt der Gleichung (98)

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0,$$

wenn $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$ gilt.

Zeitliche Änderung eines Vektors, beurteilt von einem starr rotierenden Bezugssystem aus (Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$)

$$(\omega) \quad \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 51, S. 37)}$$

Zeitliche Änderung des Linienintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Kurve ($\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit)

$$(a) \quad \frac{d}{dt}\int_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int_1^2 d\mathfrak{s}\left\{\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v}\operatorname{curl}\mathfrak{A}]\right\}$$

(Gl. 121, S. 121)

Zeitliche Änderung des Flächenintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Fläche

$$(b) \quad \frac{d}{dt}\int\mathfrak{B}_n\,df = \int df\left\{\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}_n$$

(Gl. 122, S. 123)

II. Elektrisches Feld.

$\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke, $\mathfrak{D}$ elektrische Verschiebung, ε Dielektrizitätskonstante, ϱ, ω Raumdichte und Flächendichte der wahren Elektrizität e; ϱ', ω' Raumdichte und

Flächendichte der freien Elektrizität e', U elektrische Energie, $\mathfrak{i}$ Dichte des Leitungsstromes, $\mathfrak{c}$ Dichte des wahren Stromes, σ Leitfähigkeit, Q Joulesche Wärme.

(c) $\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$ (Kraft auf Probekörper) . (Gl. 124, S. 127)

(d) $\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}$ . . . . . (Gl. 136, S. 147)

(e) $\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}, \quad \omega = -(\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2})$ (Gl. 137, 137a, S. 148)

(n_1, n_2 Normalen, die nach der Trennungsfläche hinweisen.)

(f) $4\pi\varrho' = \operatorname{div} \mathfrak{E}, \quad 4\pi\omega' = -(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2})$ (Gl. 137c, d, S. 149)

(g) $U = \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{D})$ . . . . . (Gl. 146, S. 169)

(h) $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ (Ohmsches Gesetz) . . . . (Gl. 152a, S. 188)

(i) $Q = \int dv (\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv \sigma \mathfrak{E}^2$ . . . . (Gl. 154a, S. 189)

(k) $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ . . . . . (Gl. 157, S. 192)

III. Elektromagnetisches Feld.

$\mathfrak{H}$ magnetische Feldstärke, $\mathfrak{B}$ magnetische Induktion, $\mathfrak{M}$ Magnetisierung, μ Permeabilität, T magnetische Energie, $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$ Raum- und Flächendichte des freien Stromes.

(l) $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ . . . . . (Gl. 165, S. 223)

(m) $\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ . . . . . (Gl. 165a, S. 223)

Erste Hauptgleichung: 1) wenn nur Leitungsströme vorkommen

(n) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}$ . . . . . (Gl. 169, S. 227)

2) wenn Verschiebungsströme hinzukommen:

(o) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{c} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right\}$ . . . (Gl. 177, 177a, S. 243)

Zweite Hauptgleichung:

(p) $\operatorname{curl} \{ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e \} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ . . . . . (Gl. 178, S. 245)

(q) $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ . . . . . (Gl. 167, S. 225)

(r) $\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}\} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}$ . . . . (Gl. 173, S. 233)

(s) $\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c}$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi \mathfrak{j}'}{c}$ (Gl. 175, 175a, S. 238)

(t) $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right]$ . . (Gl. 176c, S. 241)

(u) $\mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mu\,\mathfrak{i}}{r} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{dv}{r}[\nabla\mu, \mathfrak{H}]$ . . . (Gl. 175f, S. 239)

Feldgleichungen und Energieausdruck für ruhende, isotrope, nicht ferromagnetische Körper:

(v) $$\left.\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E} & \text{(Gl. 179,)} \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) & \text{(Gl. 179a,)} \\ \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0 & \text{(Gl. 179b)} \end{cases}\right\} \text{S. 251.}$$

(w) $W = \frac{1}{8\pi}\int dv\,(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)$ . . . . (Gl. 180, S. 253)

Quasistationäre Ströme:

L Induktionskoeffizienten, K Kapazität, R Widerstand, J Stromstärke, τ Schwingungsdauer.

Koeffizient der gegenseitigen Induktion:

(x) $L_{12} = \mu \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r}$ . . . . . (Gl. 183b, S. 267)

Magnetische Energie zweier Stromringe:

(y) $T = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right\}$ (Gl. 185, S. 272)

(z) $\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LK}$ (Thomsonsche Formel) (Gl. 192d, S. 291)

Elektromagnetische Wellen:

w Geschwindigkeit, λ Wellenlänge, n Brechungsindex, $\varkappa$ Extinktionskoeffizient. K, L beziehen sich hier auf die Längeneinheit der Leitung.

(a) $n^2 = \varepsilon$ . . . . . (Gl. 205d, S. 317)

(Maxwellsche Relation, für $\mu = 1$ gültig)

(b) $n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\}$ . . . . (Gl. 207f, S. 324)

(c) $\varkappa^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right\}$ . . . . (Gl. 207g, S. 324)

Für lange Wellen in Metallen wird:

(d) $n = \varkappa = \sqrt{\sigma\tau}$ (wenn $\mu = 1$) . . . (Gl. 210a, S. 331)

und der Reflexionskoeffizient:

(e) $r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}$ . . . . . (Gl. 210b, S. 331)

Geschwindigkeit längs guter, zylindrischer Leiter:

(f) $w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{LK}}$ . . . . . (Gl. 216e, f, S. 349)

IV. Weiterer Ausbau der Theorie.

(g) $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]$ . . . . . (Gl. 226a, S. 371)

Poyntingscher Energiestrom oder Strahlvektor.

Feldenergie permanenter Magnete:

(h) $T = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + T_0 - \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}_0^2$ . . (Gl. 233, S. 385)

(i) $T = -\int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{B}^2 + T_0 + \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{B}_0^2$ . . (Gl. 237, S. 394)

Zwei bewegte Stromringe mit eingeprägten Kräften:

(k) $\left\{\begin{aligned} E_1^e &= J_1 R_1 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2) \\ E_2^e &= J_2 R_2 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2) \end{aligned}\right\}$ (Gl. 239, b, c, S. 404)

Zweite Hauptgleichung für bewegte Körper:

(l) $\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}$ (Gl. 242, S. 413)

Induzierte elektromotorische Kraft der unipolaren Induktion:

(m) $E^i = \frac{u}{2\pi c} \int \mathfrak{B}_z \, df_a$ . . . . . (Gl. 244, S. 420)

Ponderomotorische Kraft auf Volumelement mit Leitungsstrom:

(n) $\mathfrak{K} = dv \frac{1}{c} [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ . . . . . (Gl. 245c, S. 426)

Kraft auf bewegte Ladung im elektromagnetischen Felde:

(o) $\mathfrak{K} = e\mathfrak{F} = e \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v}\mathfrak{B}] \right\}$ . . . . (Gl. 246a, S. 426)

Maxwellsche Spannungen: $\mathfrak{T}^e$, $\mathfrak{T}^m$ Flächenkraft der elektrischen und magnetischen Spannungen.

(p) $\mathfrak{T}^e = \frac{1}{8\pi} \{ \mathfrak{E} \cdot 2\varepsilon \mathfrak{E}_n - \mathfrak{n} \cdot \varepsilon \mathfrak{E}^2 \}$ . . . (Gl. 248, S. 429)

(q) $\mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi} \{ \mathfrak{H} \cdot 2\mu \mathfrak{H}_n - \mathfrak{n} \cdot \mu \mathfrak{H}^2 \}$ . . . (Gl. 249, S. 432)

Gesamter elektrischer Strom für einen bewegten Körper, nach der Theorie von H. Hertz:

(r) $\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$ . . . . (Gl. 252, S. 439)