Theorie der Elektrizität

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität - mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik

Föppl, A.

1907

Vierter Abschnitt. Weiterer Ausbau der Theorie

Vierter Abschnitt.

Weiterer Ausbau der Theorie.

Erstes Kapitel.

Die Strömung der Energie im elektromagnetischen Felde.

§ 83. Materie und Äther.

Seit langer Zeit verband sich mit der Auffassung der Naturerscheinungen eine meistens freilich recht unklare Vorstellung von dem, was wir heute Energie nennen — zum mindesten seit der Zeit, in der man zu der Überzeugung von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile gelangt war. Diese Vorstellungen wurden gerichtet und zum großen Teile auch berichtigt durch jene großen Entdeckungen in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, besonders durch die Helmholtzsche Schrift über die „Erhaltung der Kraft“. Aber sie wurden dadurch noch nicht in feste, unveränderliche Formen gebracht.

Die kinetische und potentielle Energie der Materie war es, deren Eigenschaften man zuerst kennen lernte. Man versuchte daher, jede Energieform als an einen Stoff gebunden vorzustellen. Dieser Vorstellung entsprach die Hypothese eines stofflichen Äthers, die der älteren Form der Wellentheorie des Lichtes zugrunde liegt; diese schrieb dem Äther Elastizität und Trägheit zu; die Energie der Lichtwellen setzt sich dieser Theorie zufolge aus der kinetischen und der potentiellen Energie jenes fingierten Stoffes zusammen.

Die elektromagnetische Lichttheorie bedient sich zwar auch des Wortes „Äther". Aber sie versteht darunter keineswegs einen Stoff von der Art der gewöhnlichen Materie. Sie bedient sich (vgl. § 42) dieses Wortes nur, um ohne Weitschweifigkeiten von denjenigen Eigenschaften des Raumes reden zu können, die sich in den elektromagnetischen Erscheinungen kundgeben. Diese Eigenschaften finden ihren mathematischen Ausdruck in den Feldgleichungen; sie enthalten nicht nur die Gesamtheit der altbekannten Gesetze der Elektrostatik und Elektrodynamik; auch die Gesetze der Lichtfortpflanzung im Raume sind in ihnen enthalten. Um diese Vorgänge mit dem Energieprinzip in Einklang zu bringen, mußten zwei neue Energiearten, die elektrische und die magnetische Energie, eingeführt werden. Es zwingt indessen nichts dazu, einen stofflichen Träger dieser Energieformen anzunehmen.

Die Eigenschaften des „Äthers" sind in der Tat durchaus von denen der „Materie" verschieden. Die Elemente der Materie besitzen die Eigenschaft, chemische Verbindungen einzugehen. Die „Chemie des Äthers" hingegen, von der man wohl gesprochen hat, ist bisher nur ein Wort ohne Inhalt geblieben. Die Hauptsätze der Thermodynamik reichen allerdings weiter. Sie finden nicht nur auf die in den materiellen Körpern enthaltene Wärme Anwendung, sondern auch auf die Wärmestrahlen, welche wir als besondere Art elektromagnetischer Wellen betrachten. Indessen auch hier bemerken wir einen wesentlichen Unterschied zwischen „Materie" und „Äther": die Materie emittiert und absorbiert Licht und Wärme; die elektromagnetischen Wellen im Raume tragen das Licht und die Wärme vom emittierenden zum absorbierenden Körper. Die Annahme eines stofflichen Trägers der Wellen würde diesen Unterschied verwischen, ohne sonst aufklärend zu wirken.

In Wirklichkeit besteht die Welt aus der Materie und dem elektromagnetischen Felde im Raume. Wäre das elektromagnetische Feld nicht vorhanden, so würde uns das Auge die Anwesenheit der Materie nicht anzeigen. Denken wir uns die Materie beseitigt, so würden auch keine Lichtwellen in den Raum entsandt werden, es würde absolute Finsternis eintreten. Die von Vorurteilen freie Betrachtung wird die Naturvorgänge als Wechselwirkungen der Materie und des elektromagnetischen Feldes zu begreifen suchen.

Die einseitige materialistische Auffassung faßt die Wechselwirkung der Bestandteile der Materie als das Wesentliche auf. Sie betrachtet die Theorie des elektromagnetischen Feldes nur als Hilfsmittel, welches dazu dient, die Gesetze dieser Wechselwirkung zu formulieren und die zeitliche Fortpflanzung der Wirkung einzuführen. Die Materie ist ihr das einzig Wirkliche.

Mit demselben Rechte aber kann man die Sache von der entgegengesetzten Seite ansehen. Man kann das elektromagnetische Feld als das allein Wirkliche hinstellen und die Materie als elektromagnetisches Feld besonderer Art erklären, etwa als zusammengesetzt aus positiven und negativen Kraftlinienkernen. Auch diese elektromagnetische Auffassung ist gewiß einseitig, aber es ist nützlich, auch sie zu pflegen, um nicht in das entgegengesetzte, materialistische Extrem zu verfallen. Für die elektromagnetische Weltanschauung spricht jedenfalls der Umstand, daß unser Wissen vom elektromagnetischen Felde weit umfassender und weit klarer ist als unser Wissen von der Materie.

Wir wollen es vermeiden, uns der einen oder der anderen Auffassung unbedingt zu verschreiben. Wir sehen daher davon ab, von einem stofflichen Träger der elektromagnetischen Energie zu reden. Wir richten vielmehr unser Augenmerk auf die Bewegung der elektromagnetischen Energie selbst.

Das Energieprinzip legt es nahe, die Energie als eine Substanz zu betrachten. In einem abgeschlossenen elektromagnetischen Systeme bleibt die Menge der Energie konstant, ebenso wie die Menge der Materie in einem abgeschlossenen materiellen System. Von der Materie wissen wir ferner, daß sie sich nur kontinuierlich im Raume bewegen kann; ein sprungweiser Übergang von einem Punkte zum anderen, ohne Durchquerung des dazwischen liegenden Raumes, ist ausgeschlossen. Ein sprungweiser Übergang der Energie von einem Punkte zu einem anderen ist a priori nicht unmöglich. Die Fernwirkungstheorie der Schwerkraft z. B. sieht es als möglich an, daß ein Körper einem anderen entfernten ohne Vermittelung des Raumes eine Beschleunigung erteilt, d. h. kinetische Energie zuführt. Die Maxwellsche Nahewirkungstheorie des elektromagnetischen Feldes jedoch läßt einen solchen diskontinuierlichen Übergang der Energie nicht zu. Sie führt zu der Konsequenz, daß die Energie im elektromagnetischen Felde sich nur kontinuierlich von Ort zu Ort bewegen kann, und zwar mit einer endlichen Geschwindigkeit. Beispiele für solche Bewegungen haben wir in den letzten Paragraphen kennen gelernt.

Eine allgemeine Theorie der Energieströmung im elektromagnetischen Felde ist von Poynting entwickelt worden. Bevor wir zu ihrer Darlegung übergehen, wollen wir uns vergegenwärtigen, wie die Energie im Bereiche der gewöhnlichen Mechanik ponderabler Körper sich überträgt. Wir müssen natürlich dabei solche Beispiele wählen, wo der Mechanismus der Kraftübertragung wohlbekannt ist; Fernkräfte, bei denen der Mechanismus der Übertragung uns verborgen ist, ziehen wir nicht in Betracht.

§ 84. **Energieströme in der Mechanik.**

Wenn man sagt, daß eine Welle in der Transmissionsanlage einer Fabrik so und so viele Pferdestärken überträgt, läßt sich dies auch dahin ausdrücken, daß sie einen Energiestrom von entsprechender Größe ihrer Längsrichtung nach fortleitet. Bezeichnen wir das Torsionsmoment der Welle mit M, die Winkelgeschwindigkeit mit u, so wird der Energiestrom S, d. h. die in der Zeiteinheit von der Welle übertragene oder fortgeleitete Energie

$$S = Mu.$$

Hängt ferner ein Gewicht mg an einem Seile und ziehen wir das Gewicht damit in die Höhe, so geht von der Stelle, wo die eingeprägte Kraft wirkt (also etwa von der Winde aus), nach dem Gewichte hin ein Energiestrom vom Betrage

$$S = mgv,$$

wenn v die Geschwindigkeit der Bewegung bezeichnet. Allgemein läßt sich der Energiestrom, der von einem gespannten Seile fortgeleitet wird, in Vektorform schreiben

$$\mathfrak{S} = -mg\mathfrak{v}.$$

Der Energiestrom ist somit stets der Bewegung des Seiles entgegen gerichtet; mg ist ein Maß für die Spannung des Seiles.

Hier war von dem ganzen fortgeleiteten Energiestrome die Rede; man kann ihn aber auch auf die Flächenelemente beziehen und unter $\mathfrak{S}$ die Dichte dieses Stromes verstehen, d. h. die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Wellen- oder Seilquerschnittes tritt.

In einer Röhrenleitung, die unter hohem Drucke stehendes Wasser, das etwa zum Betriebe hydraulischer Hebewerke dienen soll, in horizontaler Richtung fortleitet, geht ein Energiestrom, der mit der Wasserbewegung gleich gerichtet ist und dessen Stromdichte

$$\mathfrak{S} = p\mathfrak{v}$$

ist, wenn p den Wasserdruck in Dynen pro Quadratzentimeter bedeutet.

Die Arme eines Zahnrades oder einer Riemenscheibe leiten einen Energiestrom in radialer Richtung zu oder von der Welle, auf der sie festgekeilt sind. Die Berührungsflächen zwischen den Zähnen von zwei Zahnrädern, die ineinander greifen, bilden die Eintritts- bzw. Austrittsstellen des Energiestromes; sie sind mit den Gleitstellen zu vergleichen, die beim Fortleiten eines elektrischen Stromes z. B. zwischen dem Kommutator einer Dynamomaschine und einer Stromabnehmerbürste vorkommen.

Ein Teil des Energiestromes in der vollständigen Maschinenanlage einer Fabrik wird unterwegs zur Überwindung der Reibung verbraucht. Der Energiestrom hat hier Senkstellen, in denen ein Teil der Energie verschwindet. Der Rest gelangt zu den Werkzeugen der sogenannten Arbeitsmaschinen, welche die zugeführte Energie wieder mit einem gewissen Reibungsverluste zur Arbeitsleistung ausnutzen.

Man könnte diese Beispiele leicht vermehren; das Gesagte beweist aber schon zur Genüge, daß die beschriebene Auffassung der Energieübertragung in der Tat von Nutzen ist und vielleicht mehr, als dies seither geschah, in der gewöhnlichen Mechanik gepflegt werden sollte. Diese Erkenntnis wird uns dahin führen, die Bedeutung der nachfolgenden Betrachtungen über den Energiestrom im elektromagnetischen Felde besser zu würdigen.

§ 85. Der Poyntingsche Vektor.

Wir knüpfen an die Gleichung (180d) des § 66 an, die unmittelbar aus den Feldgleichungen abgeleitet war, welche in ruhenden, nicht ferromagnetischen Körpern gelten:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi}\int df[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]_n + \int dv(\mathfrak{E}^e, \mathfrak{c}) - Q. \tag{226}$$

Dabei ist f die Oberfläche des Raumes v, der von beliebigen Leitern oder Isolatoren eingenommen ist. Das zweite Glied der rechten Seite stellt, wenn die erste der in § 66 gegebenen Deutungen zutrifft, die Arbeit dar, welche von den in diesen Körpern wirkenden eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ geleistet wird; das dritte Glied subtrahiert von dieser Arbeit die Joulesche Wärme Q. Haben wir es mit einem abgeschlossenen elektromagnetischen Systeme zu tun, so ist der Überschuß der geleisteten Arbeit über die entwickelte Wärme gleich der entstandenen elektromagnetischen Energie, wie es das Energieprinzip verlangt. Dies ist auch nach der zweiten, in § 66 erörterten Auffassung der Fall, nur daß an Stelle des Ausdruckes

(180g) für die Arbeit der eingeprägten Kräfte der Ausdruck (180h) tritt, und an Stelle des Ausdruckes (180a) für die elektrische Energie der Ausdruck (180i); nur in solchen Körpern, wo eingeprägte Kräfte und Verschiebungsströme gleichzeitig vorhanden sind, kommen die Unterschiede der beiden Auffassungen in Frage. Hier aber handelt es sich darum, wie für ein nicht abgeschlossenes, ruhendes elektromagnetisches System das Energiegesetz auszusprechen ist.

Ist auf der Fläche f, welche das betrachtete Gebiet des Feldes einschließt, elektromagnetische Erregung vorhanden, so tritt ein (positiver oder negativer) Energieverlust ein. Dieser Energieverlust wird der gesamten Energieströmung gleichzusetzen sein, welche pro Sekunde die geschlossene Fläche f von innen nach außen durchströmt. Setzen wir nun mit Poynting für den Energiestrom pro Sekunde und Flächeneinheit

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}], \tag{226a}$$

so führt die Integration über die geschlossene Fläche f stets zu dem richtigen Werte des gesamten, durch die Fläche tretenden Energieflusses. Es wird der Überschuß der Arbeit der eingeprägten Kräfte über die Energiezunahme des Bereiches v und über die in diesem Bereiche entwickelte Joulesche Wärme gleich dem gesamten, durch die Begrenzungsfläche f tretenden Energiestrom:

$$\frac{dA}{dt} - \frac{dW}{dt} - Q = \int df \mathfrak{S}_n. \tag{226b}$$

Die zweite der oben erwähnten Auffassungen läßt die Differenz von Arbeit der eingeprägten Kräfte und Energieänderung bestehen. Auch für sie ist (226b) eine Folge der Feldgleichungen.

Allerdings ist die durch den Poyntingschen Vektor (226a) gegebene Verteilung des Energiestromes nicht die einzig mögliche; man könnte vielmehr stets eine quellenfreie Strömung hinzufügen, da eine solche durch jede geschlossene Fläche den Gesamtstrom Null ergeben, daher in (226b) herausfallen würde.

Dennoch werden wir den Poyntingschen Ausdruck der Energieströmung allgemein akzeptieren; waren wir doch bereits in § 75 bei der Behandlung ebener, homogener elektromagnetischer Wellen in Isolatoren zu einem Ausdrucke gelangt (205g), der aus (226a) hervorgeht, wenn eingeprägte elektrische Kräfte fehlen. Wir hatten gezeigt, daß die Richtung dieses Vektors, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie gesprochen, dem Lichtstrahl entspricht und daß seine Komponente nach irgendeiner Richtung der Strahlung gleich ist, die pro Sekunde von der Flächeneinheit einer senkrecht zu dieser Richtung gestellten Fläche aufgefangen wird. Wir werden aus diesem Grunde den Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S}$ gelegentlich auch als „Strahlvektor" bezeichnen. Denken wir uns das Innere der Fläche f von Lichtwellen erfüllt und die Fläche selbst durch eine innen berußte Wand verwirklicht, die alle auffallende Strahlung absorbiert, so würde die Normalkomponente von $\mathfrak{S}$ die pro Sekunde in der Flächeneinheit der berußten (schwarzen) Fläche entwickelte Wärme darstellen. Hier gewinnt also der Poyntingsche Energiestrom eine unmittelbare physikalische Bedeutung. In einem beliebigen elektromagnetischen Felde trifft das nicht immer zu. Hier ergibt der Poyntingsche Vektor $\mathfrak{S}$ bisweilen Energieströme in geschlossenen Bahnen, die durch nichts ihre Existenz verraten. Ein Beispiel hierfür ist ein System, das aus einem isolierten geladenen Leiter und einem Magneten besteht. Im Luftraume ergibt hier (226a) einen dauernden Energiestrom senkrecht zu den elektrischen und zu den magnetischen Kraftlinien. Die Energie jedes einzelnen Volumelementes aber bleibt konstant, so daß Quell- oder Senkpunkte der Energieströmung nicht auftreten.

Jedenfalls gibt die Integration von $\mathfrak{S}_n$ über eine geschlossene Fläche immer die dem Inneren der Fläche entströmte Energie, oder die Gesamtstrahlung richtig an. Auch dürfte es keinen anderen Ausdruck des Energiestromes geben, der dasselbe für ein beliebiges elektromagnetisches Feld in ebenso einfacher Weise leistet. Denn die Nahewirkungstheorie muß von einem solchen Ausdrucke verlangen, daß er den Energiestrom nur von den elektrischen und magnetischen Vektoren abhängig macht, die an der betreffenden Stelle gerade herrschen. Wir werden den Poyntingschen Vektor daher allgemein als Maß des elektromagnetischen Energiestromes verwenden. Es wird nützlich sein, die Konsequenzen der Poyntingschen Theorie an konkreten Beispielen zu entwickeln.

§ 86. Der Energiestrom in der Umgebung eines elektrischen Stromes.

Daß ein elektrischer Strom Energie seiner Längsrichtung nach überträgt, ist gerade das, was wir von dem elektrischen Strome am genauesten und sichersten wissen. Fraglich ist nur, wie sich dieser Energiestrom im einzelnen verteilt, vor allem, ob die Fortleitung der Hauptsache nach in dem Metall oder in dem umgebenden Dielektrikum erfolgt. Früher galt es einfach als selbstverständlich, daß die Energie denselben Weg verfolge wie der elektrische Strom selbst, daß er also durch die Metallmasse hindurchgehe. Die Maxwellsche Theorie lehrt jedoch, daß der Sitz der elektromagnetischen Energie das umgebende Dielektrikum ist. Die Poyntingsche Theorie führt diese Vorstellung weiter aus, indem sie das Dielektrikum als Energieleiter betrachtet. Bei der Behandlung der elektrischen Drahtwellen (§ 79) fanden wir in der Tat, daß das elektromagnetische Feld in die Leitungsdrähte nicht eindringt, daß die Energie sich im Dielektrikum längs der Drähte fortpflanzt. Dabei hatten wir allerdings auf den Widerstand der Drähte keine Rücksicht genommen; würden wir ihn einführen, so würde sich ergeben, daß in den Leitungsdrähten Joulesche Wärme entwickelt wird, daß ein entsprechender Teil der Energie den Wellen entzogen wird, und daß hierdurch eine Dämpfung und eine geringfügige Verzögerung der Wellen bedingt wird. Hiervon abgesehen, hat man es mit einem nur im Dielektrikum sich abspielenden Vorgange zu tun.

Man hat den Energiestrom durchaus zu trennen von dem elektrischen Strome. Der elektrische Strom kann nur in den Kupferdrähten fließen, nur auf diesen können elektrische Ladungen sich ansammeln. Daher müssen die magnetischen Kraftlinien die Drähte umschlingen, die elektrischen Kraftlinien auf den Drähten entspringen und endigen. So bilden die Drähte hier den Kern des elektromagnetischen Feldes und leiten in diesem Sinne nicht nur die Elektrizität, sondern auch die Energie; sie geben nämlich dem Energiestrome die Richtung. Dennoch sind im allgemeinen nicht die Metalle, sondern die Dielektrika als Leiter des Energiestromes zu bezeichnen. Denn wir wissen, daß die elektrischen Wellen durch Metallplatten nicht hindurchdringen, daß sie aber in Isolatoren sich fortpflanzen können. Die Metalle sind demnach Nichtleiter des Energiestromes, aber Leiter der Elektrizität. Die Dielektrika sind Leiter des Energiestromes, aber Nichtleiter der Elektrizität. Ähnlich liegt die Sache ja auch bei den Energieströmen der Mechanik, von denen wir im vorigen Paragraphen sprachen. So geht der Energiestrom in einem Zahnrade oder in einer Riemenscheibe in radialer Richtung vor sich, während die Bewegung, die zu dem Energiestrome Veranlassung gibt, eine Rotation ist. Der „Massenstrom" der ponderablen Materie ist hier zu trennen von dem Energiestrome. Die Energie wird hier nicht immer von den Massen bei ihrer Bewegung einfach mitgeführt, sondern sie strömt unter Umständen in ganz anderen Bahnen wie die Massen. So fällt auch die Richtung des elektromagnetischen Energiestromes keineswegs immer mit der Richtung der Elektrizitätsbewegung zusammen.

Wir betrachten einen Stromring, in welchem von eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ ein stationärer Strom unterhalten wird. Die totale, für den Strom maßgebende elektrische Kraft ist hier nach Gleichung (161)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e.$$

Nach (226a) ist jedoch für den Energiestrom die elektrostatische Feldstärke maßgebend:

$$\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e.$$

Wir betrachten ein Stück unseres linearen Leiters und berechnen die Energie, die in den Leiter aus dem Dielektrikum eintritt. Die magnetischen Kraftlinien umschlingen den Leiter; das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung für alle Querschnitte gleich $\frac{4\pi J}{c}$. Für die ins Innere des Drahtes tretende Energie ist nur die zur Drahtachse parallele Komponente der elektrostatischen Feldstärke maßgebend, die gleich dem Potentialgefälle $-\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ längs des Drahtes ist. Die Energie, die nach dem Poyntingschen Satze in das Stück ds des Drahtes tritt, ist daher

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s} J\, ds;$$

die Integration längs der Leitlinie des Drahtes ergibt

$$J(\varphi_1 - \varphi_2)$$

für die in ein Drahtstück pro Sekunde eintretende Energie. Ist dieses Drahtstück thermisch und chemisch homogen, also von eingeprägten Kräften frei, so stellt nach (153)

$$J(\varphi_1 - \varphi_2)$$

die entwickelte Joulesche Wärme Q dar. Ist aber das Stück die Trennungsschicht zweier Leiter, d. h. der Sitz der eingeprägten Kontaktkraft, so wird nach (161b) die einströmende Energie

$$J(\varphi_1 - \varphi_2) = -JE_{12}.$$

Fließt also der Strom im Sinne der Kontaktkraft E_{12}, so strömt hier nicht Energie ein, sondern aus. Es strömt demnach überall dort, wo die den elektrischen Strom unterhaltenden elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben, Energie in das Feld hinein; längs des ganzen Drahtes strömt anderseits Energie aus dem Felde in den Draht ein, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden. Bei räumlich verteilten elektromotorischen Kräften überlagern sich diese beiden Energieströme. Die in den ganzen Leitungskreis in Summa eintretende Energie ist

$$J(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

denn das elektrostatische Potential ist einwertig, es verschwindet also $\varphi_1 - \varphi_2$, wenn Anfangs- und Endpunkt des Drahtstückes zusammenfallen. Die gesamte Arbeit der eingeprägten Kräfte wird in Joulesche Wärme verwandelt, wie es für den stationären Strom das Energieprinzip verlangt.

Übrigens ist das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}^s$ durchweg wirbelfrei; es besitzt keinen Flächenwirbel an der Drahtoberfläche, d. h. seine tangentiellen Komponenten sind stetig. Auch $\mathfrak{H}$ ist in seinen tangentiellen Komponenten stetig, da von räumlich verteiltem elektrischem Strome die Rede ist. Folglich setzt sich die normale Komponente der Energieströmung stetig in das Drahtinnere hinein fort. Die tangentielle Komponente der Energieströmung aber kann einen Sprung machen. Im Drahtinnern geht der Energiestrom im wesentlichen in radialer Richtung vor sich. Im Dielektrikum hingegen, wo das von den freien Ladungen des Drahtes herrührende Feld $\mathfrak{E}^s$ nahezu radial gerichtet ist, kommt ein dem Drahte paralleler Energiestrom hinzu, der weitaus den vorhin betrachteten, zur Drahtoberfläche normalen Energiestrom überwiegt. Dieser Hauptstrom der Energie geht längs des Drahtes im Dielektrikum vor sich. Auf diesem Wege wird die Energie z. B. von der Kraftstation eines Elektrizitätswerkes aus den Abnehmern zugeführt. In einer geschlossenen Leitung indessen macht sich dieser Energiestrom längs des Drahtes nicht bemerkbar, wenigstens nicht bei stationärem Strome, wo er in geschlossenen Bahnen verläuft.

Der Energiestrom längs des Drahtes kommt zur Geltung bei nichtstationärem Strome, etwa bei den Schwingungen einer Kondensatorentladung (vgl. § 72). Hier kann die von dem Kondensator herrührende elektromotorische Kraft die eingeprägte Kraft der obigen Betrachtung ersetzen. Nimmt nun die elektrische Energie des Kondensators gerade ab, so tritt ein radialer

Energiestrom vom Kondensator aus in das Feld; derselbe wird sodann längs des Drahtes nach denjenigen Stellen des Feldes hingeführt, in denen die magnetische Energie gerade zunimmt. Ein Bruchteil strömt unterwegs in den Draht, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden. *Diese Darstellung der Energieübertragung, welche der Poyntingschen Auffassung entspricht, ist demnach eine sinngemäße Ergänzung der Annahmen über die Energieverteilung, welche der Nahewirkungstheorie eigentümlich sind.* Bei elektrischen Schwingungen bewährt sie sich; sie stellt ferner die Kontinuität mit dem in der Optik so nützlichen Begriffe des Strahles her.

In diesem Werke ist unter $\mathfrak{E}$ der Vektor verstanden, dem die elektrische Stromdichte $\mathfrak{i}$ proportional ist (Gl. 161). Für den Energiestrom ist, falls eingeprägte Kräfte wirken, nicht jener Vektor, sondern $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ maßgebend. Dieser Vektor hat die Eigenschaft, daß seine tangentiellen Komponenten sich an der Grenzfläche zweier Körper stetig verhalten; sonst würde nämlich eine flächenhafte Verteilung der Energie eintreten, die mit den Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie nicht vereinbar ist. H. Hertz dagegen bezeichnet in seinen Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik mit $\mathfrak{E}$ den für den Energiestrom maßgebenden Vektor; er muß dann die Beziehung zwischen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ überall dort korrigieren, wo eingeprägte Kräfte auftreten. Auf diesen Unterschied der Bezeichnungen mag, um Mißverständnissen vorzubeugen, hingewiesen werden.

Zweites Kapitel.

Die ferromagnetischen Körper.

§ 87. Die magnetische Hysteresis.

Wir haben bereits im Eingange des vorigen Abschnittes (§ 60) auf die Sonderstellung hingewiesen, welche die ferromagnetischen Körper einnehmen. In ihnen ist die magnetische

Permeabilität keine Materialkonstante, sondern sie ist ihrerseits von der Feldstärke abhängig. Die Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, welche eine wesentliche Voraussetzung der Feldgleichungen (179a, b) und des Ausdruckes (180b) der magnetischen Energie war, findet hier nicht mehr statt. Wir mußten daher im vorigen Abschnitte, bei der Entwickelung der aus jenen Feldgleichungen zu ziehenden Folgerungen, öfters die ferromagnetischen Körper ausschließen und ihre Behandlung diesem letzten Abschnitte vorbehalten.

Man könnte nun daran denken, die ferromagnetischen Körper in der Weise in die Maxwellsche Theorie einzuordnen, daß man an den Hauptgleichungen des § 65 festhielte, aber an Stelle der einfachen Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ eine kompliziertere Funktionsbeziehung setzte. *An den Hauptgleichungen (177a, 178, 178a) werden wir allerdings festhalten müssen.* Wir werden aber nicht annehmen dürfen, daß in ferromagnetischen Körpern noch der jeweilige Wert von $\mathfrak{B}$ überhaupt durch den jeweiligen Wert von $\mathfrak{H}$ bestimmt ist. Daß dem nicht so ist, zeigen die Vorgänge der *magnetischen Hysteresis.*

Bringt man ein Eisenstück in ein magnetisches Feld und läßt die Feldstärke allmählich wachsen, so wächst auch die magnetische Induktion und zwar anders, als es der einfachen Proportionalität entsprechen würde. Man kann das Anwachsen der Induktion mit der Feldstärke durch eine Kurve veranschaulichen, indem man den Betrag von $\mathfrak{H}$ als Abszisse, den Betrag von $\mathfrak{B}$ als Ordinate aufträgt. Läßt man aber jetzt die Feldstärke wiederum abnehmen, so wird keineswegs dieselbe Kurve in entgegengesetztem Sinne beschrieben, sondern die Induktion nimmt nach einer anderen Kurve ab; es entspricht einer und derselben Feldstärke jetzt eine andere, und zwar eine größere Induktion. Es gibt demnach gar keine allgemeingültige Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, der Wert von $\mathfrak{B}$ hängt nicht nur von dem momentanen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Eisenstückes ab. Die Magnetisierung folgt nicht momentan der Feldstärke, sondern es bleibt gewissermaßen ein Teil der früheren Magnetisierung zurück; diese Erscheinung bezeichnet man als magnetische Hysteresis. Läßt man nun die Feldstärke $\mathfrak{H}$ periodisch zu- und abnehmen, so wird die Veränderung von $\mathfrak{B}$ durch eine geschlossene Kurve, die sogenannte Hysteresisschleife, dargestellt. Dabei findet eine Wärmeentwickelung in dem Eisen statt.

Eine solche Wärmeentwickelung hatten wir bisher bei der Behandlung der Energievorgänge im magnetischen Felde nicht berücksichtigt. Wir erkannten indessen bereits im § 62, daß auch hinsichtlich des Energieausdruckes die ferromagnetischen Körper Anomalien aufweisen. Wir müssen jetzt die Behandlung der Energievorgänge von neuem aufnehmen.

Wir denken uns das Eisenstück in einem Raume befindlich, der durch eine geschlossene Fläche f begrenzt ist. Außerhalb dieser Fläche mögen sich ferromagnetische Körper nicht befinden; es mögen hier die Entwickelungen des vorigen Abschnittes ohne Einschränkung gelten. Dieselben ergeben, daß pro Sekunde in das Innere der geschlossenen Fläche f eine Energiemenge tritt, die sich aus dem Poyntingschen Energiestrome (§ 85) berechnet. Schließen wir der Einfachheit wegen eingeprägte elektrische Kräfte aus, so ist nach (226a)

$$-\int \mathfrak{S}_n df = -\frac{c}{4\pi}\int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n df \tag{227}$$

der gesamte, in der Zeiteinheit in das Innere von f tretende Energiestrom (n ist hier diejenige Normale, die nach dem Äußeren des Raumes weist, in welchem das Eisenstück sich befindet). Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Inneren dieses Raumes stetig verteilt sind; dann geht nach (102a) der Ausdruck (227) über in

$$\frac{c}{4\pi}\int dv\,\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\}.$$

Dies ist die Energie, die pro Sekunde dem Raume v zugeführt wird und die daher gleich sein muß der Summe aus der Zunahme der elektromagnetischen Energie

$$W = U + T$$

und der im Eisenstücke stattfindenden Wärmeentwickelung; diese letztere setzt sich zusammen aus der Jouleschen Wärme Q und der infolge der magnetischen Hysteresis stattfindenden Wärmeentwickelung, die wir mit Q_m bezeichnen wollen; wir erhalten daher

$$(228) \qquad \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \frac{c}{4\pi} \int dv \{ \mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E} \}.$$

Neben diesem allgemeinen Postulate der Maxwellschen Theorie legen wir die Hauptgleichungen (177a), (178) und (178a) der Behandlung der ferromagnetischen Körper zugrunde. Führt man nun

$$(228\text{a}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

und

$$(228\text{b}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

in (228) ein, so erhält man

$$(228\text{c}) \qquad \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \int dv \left\{ \mathfrak{E}\mathfrak{i} + \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\}.$$

Nun verhalten sich aber die ferromagnetischen Körper in elektrischer Hinsicht normal; es ist also

$$Q = \int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{i})$$

die Joulesche Wärme, und

$$\frac{dU}{dt} = \int dv \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \int dv \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi} = \frac{d}{dt} \int dv \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D})$$

die Zunahme der elektrischen Energie im Raume v.

Für die Summe aus der Zunahme der magnetischen Energie und aus der magnetischen Wärmeentwickelung ergibt sich

$$(229) \qquad \frac{dT}{dt} + Q_m = \frac{1}{4\pi} \int dv \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right).$$

Wir wenden diesen Ausdruck zuerst auf einen magnetischen Kreisprozeß an von der Periode τ. Die Werte der Feldstärke $\mathfrak{H}$, der Induktion $\mathfrak{B}$ und der magnetischen Energie T, die zur Zeit t bestanden, kehren zur Zeit $t + \tau$ wieder, nachdem die Hysteresisschleife durchlaufen ist. Die Integration über eine Periode ergibt daher

$$\int_t^{t+\tau} dt\, Q_m = \frac{1}{4\pi} \int dv \int_t^{t+\tau} dt \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right). \tag{229a}$$

Für die pro Volumeinheit stattfindende Wärmeentwickelung in einer Periode erhalten wir

$$\frac{1}{4\pi} \int_t^{t+\tau} dt \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}, \tag{229b}$$

wobei das Integral der rechten Seite über den durch die Hysteresisschleife angegebenen Weg zu erstrecken ist. Es gibt, wie zuerst E. Warburg gezeigt hat, in der Tat die Wärmeentwickelung an, welche bei dem magnetischen Kreisprozeß stattfindet; dieselbe ist gleich dem durch 4π dividierten Flächeninhalte der Hysteresisschleife. Führen wir wieder den durch (173) definierten Vektor $\mathfrak{M}$ der Magnetisierung ein, so wird

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H} + 4\pi\, d\mathfrak{M},$$

und da das über die geschlossene Kurve erstreckte Integral

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi} \int d\mathfrak{H}^2$$

verschwindet, so ist

$$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{M} \tag{229c}$$

ein mit (229b) gleichwertiger Ausdruck der Wärmeentwickelung bei dem magnetischen Kreisprozeß.

§ 88. **Der remanente Magnetismus.**

Bei der Integration über den Kreisprozeß fiel aus (229) die magnetische Energie heraus; wir können aus den obigen Betrachtungen einen allgemeingültigen Ausdruck für die magnetische Energie eines Eisenstückes nicht gewinnen. Wir können indessen aus (229) die Energieänderungen im Felde ferromagnetischer Körper berechnen, wenn wir uns auf solche Vorgänge beschränken, die ohne magnetische Wärmeentwickelung verlaufen. Zu diesen Vorgängen gehören die Wechselwirkungen permanenter Magnete, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen. Die „magnetische Remanenz" oder „magnetische Härte" kann als ein Grenzfall der Hysteresis aufgefaßt werden, insofern, als die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ überhaupt als von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ unabhängig und dem Stahlstücke anhaftend betrachtet wird. Zwar ist in diesem Sinne nur ein zur Sättigung magnetisierter Magnet vollkommen „magnetisch hart"; im allgemeinen wird neben der remanenten noch eine „temporäre", d. h. mit $\mathfrak{H}$ veränderliche Magnetisierung auftreten. Doch sind die ponderomotorischen Kräfte, welche Magnete aufeinander ausüben, hauptsächlich durch den remanenten Teil der Magnetisierung bestimmt; der temporäre Anteil der Magnetisierung liefert zu der Kraft, welche auf ein Stahlstück im magnetischen Felde wirkt, einen verhältnismäßig geringen Beitrag, dessen Berechnung übrigens ähnlich wie bei magnetisch weichen Körpern vorzunehmen wäre. Beschränken wir uns demgemäß zunächst auf den Fall konstanter Magnetisierung, so wird

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H},$$

und daher das betreffende Stück der Kurve, welche $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ darstellt, eine Gerade, die sowohl bei wachsendem und abnehmendem $\mathfrak{H}$ durchlaufen wird. Man hat es hier mit reversibeln, von Wärmeentwickelung freien Vorgängen zu tun; bei solchen stellt nach (229)

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} \tag{229d}$$

die auf die Volumeinheit berechnete Energieänderung dar.

Wir betrachten nun das magnetische Feld eines Systemes ruhender, permanenter Magnete. Ein elektrisches Feld und ein elektrischer Strom sollen nicht vorhanden sein, es ist daher, der ersten Hauptgleichung (177a) zufolge,

$$\text{curl}\, \mathfrak{H} = 0. \tag{230}$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist auch im Felde permanenter Magnete wirbelfrei; sie leitet sich aus einem skalaren Potentiale φ_m ab:

$$\mathfrak{H} = -\nabla \varphi_m. \tag{230a}$$

Wir halten ferner an der Grundannahme fest, daß die magnetische Induktion durchweg quellenfrei verteilt ist, d. h. daß wahrer Magnetismus nicht existiert. Wir legen demnach auch der Theorie des remanenten Magnetismus die Bedingung zugrunde

$$\text{div}\, \mathfrak{B} = 0. \tag{231}$$

Die Gleichungen (230) und (231), welche behaupten, daß $\mathfrak{H}$ wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber quellenfrei verteilt ist, haben wir bereits im vorigen Abschnitte der Theorie der magnetischen Felder in stromlosen Bereichen zugrunde gelegt (vgl. § 63). Wir können auch jetzt, wo magnetisch harte Körper im Felde sich befinden, eine entsprechende Darstellung des Feldes geben.

Wir berechnen das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ aus seinen Quellen, indem wir

$$\text{div}\, \mathfrak{H} = 4\pi \varrho'_m \tag{232}$$

setzen und unter ϱ'_m die „Dichte des freien Magnetismus" verstehen. Da nach (173)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M} \tag{232a}$$

ist, und da die Divergenz von $\mathfrak{B}$ durchweg Null ist, so wird

$$\text{div}\, \mathfrak{H} = -4\pi\, \text{div}\, \mathfrak{M}. \tag{232b}$$

Ist die remanente Magnetisierung eines Stahlstückes bekannt, so ist auch die Verteilung des freien Magnetismus durch

$$\varrho'_m = -\text{div}\, \mathfrak{M} \tag{232c}$$

gegeben (vgl. auch 173b.) In einem magnetisch harten Körper haftet also der freie Magnetismus an den Volumelementen. Von einer flächenhaften Verteilung des freien Magnetismus wollen wir hier absehen, indem wir uns $\mathfrak{H}$ als stetig verteilt denken.

Aus der gegebenen Verteilung des freien Magnetismus in den permanenten Magneten berechnet sich das skalare Potential

$$\varphi_m = \int \frac{dv\,\varrho'_m}{r}. \tag{232d}$$

Dadurch ist dann das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ außerhalb und innerhalb der Magnete bestimmt, falls diese in den leeren Raum eingebettet sind. Sind außerdem magnetisch weiche Körper im Felde, so ist auch der in ihrem Innern und an ihrer Oberfläche befindliche freie Magnetismus in Rechnung zu ziehen; dieser ist indessen nicht konstant, sondern er ändert sich mit der Lage der permanenten Magnete. Um eine solche Komplikation zn vermeiden, wollen wir weiterhin annehmen, daß die Magnete in den leeren Raum eingebettet sind. Außerhalb der Magnete stimmt dann $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ überein; innerhalb der Magnete ist $\mathfrak{B}$ nach (232a) zu berechnen, aus $\mathfrak{H}$ und der gegebenen remanenten Magnetisierung $\mathfrak{M}$.

Wir wiesen bereits im § 62 darauf hin, daß das magnetische Feld, welches von para- und diamagnetischen Körpern erregt wird, überhaupt keine selbständige Existenz besitzt. In einem durchweg stromlosen Raume, der nur von solchen Körpern erfüllt ist, kann ein magnetisches Feld nicht dauernd bestehen. Es müssen irgendwo im Raume elektrische Ströme oder permanente Magnete sich befinden; andernfalls ist ein konstantes magnetisches Feld nicht möglich. Die para- und diamagnetischen Körper modifizieren nur das Feld, aber sie erzeugen es nicht. Wir sahen, daß dieses Verhalten eng mit dem Energieausdruck (162) zusammenhing, und schlossen, daß für Körper, die remanenter Magnetisierung fähig sind, d. h. die selbständig, ohne Mitwirkung elektrischer Ströme, ein magnetisches Feld zu erzeugen vermögen, jener Energieausdruck aufzugeben ist. Ein allgemeingültiger Ausdruck für die Energie ferromagnetischer Körper ist uns auch jetzt nicht bekannt. Wohl aber sind wir oben zu einem Ausdrucke für die Änderung der Energiedichte im Innern eines magnetisch harten Körpers gelangt. Diese Änderung war nach Gleichung (229d)

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B}$$

oder, da $\mathfrak{M}$ konstant ist, nach (232a) gleich

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\,\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi}\,d\mathfrak{H}^2.$$

Außerhalb der Magnete, wo $\mu = 1$ ist, stellt dieser Ausdruck ebenfalls die Änderung der magnetischen Energiedichte dar.

Verstehen wir unter T_0 die Energie des ganzen Feldes in einer bestimmten Anfangslage der permanenten Magnete, wo das Feld $\mathfrak{H}_0$ herrscht, so bestimmt

$$(233) \qquad T - T_0 = \int\frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 - \int\frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}_0^{\,2}$$

die Feldenergie T bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete.

Denken wir uns nun die Magnete so langsam gegeneinander bewegt, daß die durch die Feldänderungen entstehenden elektrischen Kräfte und die dabei erregte elektrische Energie und Joulesche Wärme zu vernachlässigen sind, so ist die Abnahme der Feldenergie gleich der Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte bei der Bewegung leisten. Es spielt demnach für die Wechselwirkungen permanenter Magnete die Feldenergie T die Rolle einer potentiellen Energie. Da aber T nur durch eine additive Konstante von

$$(233\text{a}) \qquad U_m = \int\frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2$$

verschieden ist, so lassen sich die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, ableiten, indem man U_m als potentielle Energie des Feldes einführt. Die potentielle Energie erscheint dabei als verteilt über die Volumelemente des Feldes, sowohl über diejenigen, die außerhalb, als auch über die, welche innerhalb der Magnete sich befinden. Der erhaltene Energieausdruck entspricht demnach den Grundvorstellungen der Nahewirkungstheorie.

Es ist aber leicht, U_m auf eine Form zu bringen, welche den Vorstellungen der Fernwirkungstheorie über die Energieverteilung entspricht. Nach (230a) wird

$$U_m = -\int \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{H} \nabla \varphi_m),$$

was auf Grund der Formel (73) übergeht in

$$U_m = \int \frac{dv}{8\pi} \varphi_m \operatorname{div} \mathfrak{H} - \int \frac{df}{8\pi} \varphi_m \mathfrak{H}_n.$$

Das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral verschwindet, wenn die Fläche ins Unendliche rückt. Führt man endlich die durch (232) definierte Dichte ϱ'_m des freien Magnetismus ein, so wird

(233b) $$U_m = \frac{1}{2} \int dv \, \varphi_m \varrho'_m.$$

Hier erscheint nun die Energie als verteilt über die Volumelemente der Magnete, in denen der freie Magnetismus seinen Sitz hat. Berechnen wir endlich das skalare Potential φ_m aus (232d), so wird

(233c) $$U_m = \iint \frac{dv_1 \, dv_2 \, \varrho'_{m1} \varrho'_{m2}}{r_{12}}.$$

Das Integral ist über alle Kombinationen je zweier Volumelemente der Magnete zu nehmen, wobei jede Kombination nur einmal in Rechnung zu setzen ist. Dieser Ausdruck führt nun unmittelbar zum Coulombschen Gesetze. Denn die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei der Verschiebung zweier Magnete gegeneinander leisten, bestimmt sich aus der Abnahme der potentiellen Energie U_m bei der Verschiebung. Die gleiche Arbeit wird erhalten, wenn man für die Wechselwirkung je zweier Volumelemente der beiden Magnete die abstoßende Kraft

$$\frac{dv_1\,\varrho'_{m1}\cdot dv_2\,\varrho'_{m2}}{r_{12}^{\,2}}$$

in Ansatz bringt, dem Coulombschen Gesetze der Fernwirkungstheorie entsprechend. Aus der Äquivalenz der Arbeiten bei einer beliebigen Verrückung folgt aber auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit (§ 10) sofort die Äquivalenz der Kräfte.

Die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, bestimmen sich also durch das Coulombsche Gesetz. An den Quellpunkten des Feldes $\mathfrak{H}$, d. h. an den Punkten, in denen freier Magnetismus sich befindet, greifen die ponderomotorischen Kräfte an. Die Massen, an denen die Kräfte angreifen, sind überall identisch mit denen, die das Kraftfeld erzeugen. Damit sind wir nunmehr völlig bei der Darstellungsweise der Fernwirkungstheorie angelangt.

Wenn nun auch diese Darstellung mathematisch zulässig ist, so ist sie doch wenig geeignet, in die Natur der Magnetisierung eine Einsicht zu gewähren. Haben wir den freien Magnetismus doch nur als Rechnungsgröße, nicht als Substanz angesehen. Nun können wir die gegebene Darstellung etwas abändern. Wir können uns die Magnete entfernt denken und das Feld $\mathfrak{H}$ jetzt im leeren Raume konstruieren. Im leeren Raume ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch und der freie Magnetismus geht in den wahren Magnetismus über. Es würde demnach das Feld $\mathfrak{H}$ auf den im leeren Raume verteilt gedachten wahren Magnetismus Kräfte ausüben, die ganz den Kräften entsprechen würden, mit denen das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ auf die wahre Elektrizität wirkt. Die Zusammensetzung dieser Kräfte führt wiederum zu den Kräften und Drehkräften, die an dem betreffenden permanenten Magneten wirklich angreifen.

In die Maxwellsche Theorie paßt indessen auch diese Darstellung nicht. Denn diese Theorie schließt im Gegensatze zur Fernwirkungstheorie wahren Magnetismus überhaupt aus; jenes fingierte Feld im leeren Raume, durch das wir das wirkliche Feld abbildeten, ist nach der konsequent durchgeführten Maxwellschen Theorie überhaupt undenkbar. Hier besteht ein wesentlicher Gegensatz zwischen den Anschauungen der Nahewirkung und denen der Fernwirkung. Dieser Gegensatz wurde von Maxwell und Hertz nicht so scharf hervorgehoben, die auf magnetischem Gebiete noch vielfach mit den älteren Anschauungen operierten; erst die weitere Fortbildung der Maxwellschen Theorie ließ jenen Gegensatz deutlich hervortreten. Wir wollen der in diesem Paragraphen entwickelten Darstellung des Feldes permanenter Magnete jetzt eine zweite an die Seite stellen, welche der quellenfreien Natur der magnetischen Induktion von vornherein gerecht wird.

§ 89. Äquivalenz von Magneten und elektrischen Strömen.

Wir knüpfen an die Entwickelungen des § 64 an. Wir lernten dort eine Darstellung des magnetischen Feldes kennen, welche nicht sowohl das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ durch seine Quellen, als vielmehr das quellenfreie Feld $\mathfrak{B}$ durch seine Wirbel bestimmt. Wir führten eine dem Wirbel von $\mathfrak{B}$ proportionale Größe $\mathfrak{i}'$ ein, die räumliche Dichte des „freien elektrischen Stromes", die durch die Gleichung (175) definiert war:

$$\text{(234)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c}.$$

Sind die Wirbel von $\mathfrak{B}$ flächenhaft verteilt, so tritt noch ein freier flächenhafter Strom $\mathfrak{j}'$ hinzu (vgl. 175a). Doch wollen wir es vorziehen, die Wirbel zunächst als räumlich verteilt anzusehen, auch an der Begrenzung der Magnete; wir behalten uns vor, später den Grenzübergang vom räumlichen zum Flächenwirbel zu machen.

Setzt man nun für das Vektorpotential

$$\text{(234a)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}'}{r}$$

und leitet aus ihm die magnetische Induktion ab, vermöge

$$\text{(234b)} \qquad \mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

so wird der Bedingung (231) des Verschwindens der Divergenz von $\mathfrak{B}$ überall Genüge geleistet.

Es handelt sich nur noch darum, den Vektor $\mathfrak{i}'$ zu ermitteln. Da ein wahrer Strom im Felde nicht vorhanden ist, so ist $\mathfrak{H}$ wirbelfrei (230). Es folgt daher aus (232a) und (234):

$$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl} \mathfrak{M}. \tag{234c}$$

Die Dichte des freien Stromes ist dem Wirbel der Magnetisierung proportional. Da die Magnetisierung eines magnetisch harten Körpers unveränderlich sein soll, so haftet der freie Strom an den Volumelementen der permanenten Magnete. Werden die Magnete gegeneinander bewegt, so ändert sich die Verteilung und die Intensität der freien Ströme in ihrem Innern nicht.

Durch (234a, b, c) ist nunmehr das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ sowohl außerhalb wie innerhalb der Magnete bestimmt. Das Feld $\mathfrak{H}$ ist außerhalb der Magnete, im leeren Raume, mit dem Felde $\mathfrak{B}$ identisch; im Innern der Magnete hingegen ist $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{B}$ und der gegebenen Magnetisierung $\mathfrak{M}$ auf Grund von (232a) zu berechnen.

Die Darstellung des Feldes permanenter Magnete als Wirbelfeld ist zuerst von Ampère befürwortet worden. Ampère knüpfte dabei an die Äquivalenz eines Kreisstromes und einer magnetischen Schale an. Wir wollen nicht versäumen, diese Äquivalenz aus der soeben gegebenen allgemeinen Darstellung abzuleiten.

Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Zylinder aus magnetisch hartem Material, dessen Begrenzungsebenen einen gegen ihre eigenen Abmessungen sehr kleinen Abstand h besitzen, und dessen Erzeugenden senkrecht zu diesen Ebenen stehen. Der Zylinder soll, parallel den erzeugenden Geraden, homogen magnetisiert sein. Dieses Gebilde, insbesondere den Grenzfall verschwindend kleiner Höhe h des Zylinders, bezeichnet man als ebene magnetische Schale.

Es sind nun die Wirbel von $\mathfrak{M}$ zu bestimmen; der räumliche Wirbel ist durchweg Null, da innerhalb der Schale $\mathfrak{M}$ konstant ist und außerhalb $\mathfrak{M}$ gleichfalls konstant, nämlich gleich Null ist. Auf den zueinander parallelen Begrenzungsebenen des Zylinders befindet sich kein Flächenwirbel, da $\mathfrak{M}$ hier senkrecht gerichtet ist. Eine Unstetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{M}$ liegt nur an der Mantelfläche des Zylinders vor. Die Dichte des hier befindlichen Flächenwirbels ist gleich dem konstanten Betrage von $\mathfrak{M}$ innerhalb des Zylinders; der Umlaufssinn ist durch die Richtung von $\mathfrak{M}$ im Zylinder bestimmt. Wir verstehen unter $d\mathfrak{s}$ die Elemente der Mittellinie der Mantelfläche des Zylinders; der Durchlaufungssinn soll dem Umkreisungssinne der Wirbel durch eine Rechtsschraube zugeordnet sein. Der freie Strom ist dann parallel zu $d\mathfrak{s}$; seine Flächendichte ist gemäß (234c) gleich der Dichte des Flächenwirbels von $\mathfrak{M}$, multipliziert mit der universellen Konstanten c. Senkrecht zu einer jeden der Zylindererzeugenden fließt also im ganzen der freie Strom:

$$J' = c\,|\mathfrak{M}|\,h. \tag{235}$$

Geht man nun zum Grenzfalle eines verschwindend kleinen h über, indem man gleichzeitig die Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ wachsen läßt, derart, daß das Produkt der beiden Größen einem endlichen Grenzwert zustrebt, so wird der flächenhaft verteilte Strom zur Stromlinie. Das Vektorpotential der magnetischen Schale wird dann

$$\mathfrak{A} = \frac{J'}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{235a}$$

Es stimmt durchweg überein mit dem Vektorpotential, welches ein Strom von der gleichen Stromstärke, der längs der Randkurve der magnetischen Schale fließt, im leeren Raume erzeugen würde (vgl. 168a).

Wir haben uns bisher auf eine ebene Schale beschränkt. Wir können aber ohne Schwierigkeit das Ergebnis auf eine Schale von gekrümmter Mittelfläche ausdehnen, deren Krümmungsradius groß gegen die Schalendicke ist. Wir zerlegen die Schale in Flächenstücke, die als eben zu betrachten sind, und wenden auf jedes dieser Flächenstücke die obige Betrachtung an. Längs der Umfangslinie eines solchen Flächenstückes ist dann der freie Strom J' anzunehmen, der durch (235) angegeben ist. Ist nun das Produkt aus der Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ der Volumelemente und der Schalendicke h längs der Schale konstant, so hat J' für alle Umfangslinien den gleichen Wert. In dem Ausdrucke (235a) des Vektorpotentiales heben sich alsdann die Beiträge derjenigen Kurvenstücke, welche zwei Flächenstücke begrenzen, und die daher zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind, heraus, und es bleibt nur das Integral längs der Randkurve der ganzen Schale übrig. Das Vektorpotential ist auch jetzt dasjenige eines die Umfangslinie der Schale umkreisenden Stromes. Durch das Vektorpotential ist aber das Feld $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt. Es stimmt also im ganzen Raume das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ und daher außerhalb der Schale auch das Feld des Vektors $\mathfrak{H}$, das von der magnetischen Schale erregt wird, mit dem Felde eines längs der Randkurve fließenden Stromes überein.

Stellen wir anderseits das Feld $\mathfrak{H}$ in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise durch seine Quellen dar, so ergibt es sich als herrührend von einer magnetischen Doppelschicht vom Momente $|\mathfrak{M}|h$ pro Flächeneinheit. Das Feld $\mathfrak{H}$ der Doppelschicht wird im Innern der Schale gleichzeitig mit der Magnetisierung $\mathfrak{M}$, die entgegengesetzt zu $\mathfrak{H}$ weist, beim Grenzübergang zu verschwindend kleinem h unendlich, wenn anders das Produkt $|\mathfrak{M}|h$ endlich bleiben soll. Außerhalb der Schale aber stimmt, wie oben gezeigt wurde, das Feld $\mathfrak{H}$ der Doppelschicht überein mit dem Felde einer die Schale umrandenden Stromlinie von der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke

$$\frac{J'}{c} = |\mathfrak{M}|h.$$

Damit sind wir zu der bereits in § 31 dargelegten Äquivalenz von Wirbelfaden und Doppelschicht zurückgelangt.

Das Stromsystem, das wir im Innern der magnetisch harten Körper angenommen haben, ist selbstverständlich kein wirkliches Stromsystem. Wahren Leitungsstrom haben wir vielmehr ausgeschlossen, indem wir curl $\mathfrak{H}$ gleich Null gesetzt haben. Demgemäß gibt das fingierte Stromsystem zu keiner Jouleschen Wärmeentwickelung Veranlassung, ein Durchschneiden der Stromfäden zu keiner Elektrizitätsanhäufung. Jenes System „freier elektrischer Ströme" ist nichts als das Wirbelfeld des quellenfreien Vektors $\mathfrak{B}$; es dient zunächst nur zur mathematischen Darstellung dieses Feldes.

Wir können nun aber wiederum die gegebene Darstellung in ähnlicher Weise abändern wie im vorigen Paragraphen. Wir können uns die Magnete entfernt und das Feld $\mathfrak{B}$ jetzt im leeren Raume konstruiert denken. Im leeren Raume ist $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch, wir können hier den Wirbel von $\mathfrak{B}$ als wirklichen Strom deuten. Durch diese Deutung wird die Weiterbildung der Theorie des Magnetismus angebahnt, indem eine Erklärung durch Annahme verborgener Elektrizitätsbewegungen nahegelegt wird. Man hat diese Erklärung zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Weise zu geben versucht, früher durch Ampèresche Molekularströme, neuerdings durch rotierende Elektronen. Die Molekulartheorien oder Elektronentheorien des Magnetismus haben zu zeigen, daß durch Mittelwertsbildung über die Felder der im Raume angenommenen Stromsysteme wirklich das Feld $\mathfrak{B}$ entsteht. Sie haben ferner von dem Zusammenhange des Vektors $\mathfrak{H}$ mit dem beobachtbaren elektrischen Strome Rechenschaft zu geben. Ein Eingehen auf diese Theorien liegt indessen außerhalb des Rahmens dieses Bandes.

Die Ausführung des gegebenen Bildes, welche das Feld der Magnete im Äther konstruiert und die Wirbel von $\mathfrak{B}$ auf verborgene Elektrizitätsbewegungen zurückführt, erklärt die quellenfreie Natur von $\mathfrak{B}$ ohne weiteres. Sie verdient daher den Vorzug vor der entsprechenden Ausführung des im vorigen Paragraphen gegebenen Bildes, welche im Äther Quellen von $\mathfrak{B}$ annehmen mußte. Die konsequent durchgeführte Maxwellsche Theorie, welche wahren Magnetismus überhaupt ausschließt, muß jedenfalls dieses zweite Bild für naturgetreuer halten, als jenes erste. Es entsteht nun die Aufgabe, zu zeigen daß dieses zweite Bild die ponderomotorischen Kräfte zwischen permanenten Magneten richtig wiedergibt.

Wir gehen auf den Ausdruck (229d) für die Änderung der magnetischen Energiedichte im Innern der permanent magnetisierten Körper zurück; außerhalb der Magnete, im leeren Raume, wo $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch ist, gilt der gleiche Ausdruck, so daß

$$dT = \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} \tag{236}$$

die Energieänderung des ganzen Feldes angibt. Nun ist

$$\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} = d(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}\,d\mathfrak{H},$$

daher die Energieänderung bei einer Verschiebung der starren Magnete gegeneinander

$$dT = \frac{1}{4\pi}d\int dv\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}. \tag{236a}$$

Nun war aber bereits im ersten Abschnitte der Satz bewiesen worden (§ 30): das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. Dieser Satz ist hier anwendbar, da $\mathfrak{H}$ durchweg wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber durchweg quellenfrei ist. Er ergibt

$$\int dv\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = 0,$$

und daher

$$dT = -\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}. \tag{236b}$$

Ferner ist im Innern der permanent magnetisierten Körper nach (232a), da $\mathfrak{M}$ konstant angenommen wird,

$$d\mathfrak{H} = d\mathfrak{B};$$

dasselbe gilt im umgebenden Raume. Wir können daher für die Energieänderung schreiben

$$dT = -d\int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{B}^2. \tag{236c}$$

Verstehen wir nun unter T_0 die Energie bei einer bestimmten Anfangslage der Magnete, wo die magnetische Induktion $\mathfrak{B}_0$ sein mag, so bestimmt

$$(237) \qquad T - T_0 = -\int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}_0^2$$

die Feldenergie bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete. Dieser Energieausdruck tritt dem Ausdrucke (233) des vorigen Paragraphen gleichwertig gegenüber. Wie jener dem ersten Bilde entsprach, so entspricht dieser dem zweiten Bilde.

Wir setzen

$$(237\text{a}) \qquad T_m = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2.$$

Dieses ist die magnetische Energie des Feldes, das entsteht, wenn wir die freie Strömung $\mathfrak{i}'$ durch eine wahre Strömung im leeren Raume ersetzt denken. Die ponderomotorischen Kräfte, welche elektrische Ströme aufeinander ausüben, sind nun im § 70 allgemein aus einem elektrodynamischen Potentiale abgeleitet worden, welches der negativen magnetischen Energie gleich ist. Die elektrodynamischen Kräfte streben die Stromkreise so zu stellen, daß die magnetische Energie bei konstant gehaltenen Stromstärken möglichst groß wird. Denken wir uns nun die freie Strömung $\mathfrak{i}'$, die ja bei einer Bewegung der Magnete unveränderlich an ihren Volumelementen haftet, durch eine wahre Strömung ersetzt, so haben wir die Arbeit der zwischen den Strömen wirksamen Kräfte der Zunahme von T_m bei konstant gehaltener Stromdichte gleich zu setzen. Die konsequente Verfolgung der in diesem Paragraphen gegebenen Darstellung führt also dazu, die Arbeit der zwischen den Magneten wirksamen Kräfte der Zunahme von T_m gleich zu setzen. Die Zunahme der magnetischen Energie T_m (237a) des fingierten Feldes im leeren Raume ist jedoch gleich der Abnahme der wirklichen Energie, nach Gleichung (237). Wir gelangen also auch vom Standpunkte dieses zweiten Bildes aus, wie von dem des ersten Bildes dazu, aus der wirklichen Feldenergie der permanenten Magnete, wie aus einer potentiellen Energie, die zwischen ihnen wirkenden ponderomotorischen Kräfte abzuleiten. Ein Widerspruch zwischen den beiden Bildern besteht hinsichtlich der ponderomotorischen Kräfte nicht, sondern die beiden Ausdrücke für die potentielle Energie ergeben dieselben ponderomotorischen Kräfte.

Die Kräfte und Kräftepaare, welche zwischen zwei magnetischen Schalen wirken, sind den Kräften und Kräftepaaren gleich, welche die beiden äquivalenten linearen, längs der Randkurve fließenden Ströme aufeinander ausüben. Jede Schale sucht sich so zu stellen, daß möglichst viele der von der anderen Schale entsandten Kraftlinien sie in positivem Sinne durchsetzen; als positiv ist dabei diejenige Richtung bezeichnet, die sich der Richtung des fingierten Stromes durch die Ampèresche Regel zuordnet; dies ist die Magnetisierungsrichtung der Schale. Das elektrodynamische Potential der beiden fingierten Ströme ist dem negativ genommenen Teile der magnetischen Energie gleich, der dem Produkte der beiden Stromstärken $J_1' J_2'$ proportional ist. Nach § 70, Gleichung (186e), ist dieses Potential

$$-\frac{J_1' J_2'}{c^2} \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} . \tag{237b}$$

Dieser Ausdruck spielt für die Wechselwirkung der beiden Schalen die Rolle der potentiellen Energie.

Für beliebige Verteilung der Magnetisierung hat man die Wechselwirkung der Magnete auf Grund des allgemeineren Energieausdruckes (184d) zu berechnen, d. h. aus einem Potentiale der Wechselwirkung

$$-T_m = -\frac{1}{c^2} \int\int \frac{dv_1 \, dv_2 \, \mathbf{i}_1' \, \mathbf{i}_2'}{r_{12}} , \tag{237c}$$

wobei die Integration über alle Kombinationen je zweier magnetisierter Volumelemente zu erstrecken ist und $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$ sich gemäß (234c) aus der Magnetisierung berechnen; man kann auch schreiben

$$(237\text{c}) \qquad -T_m = -\int\int \frac{dv_1\, dv_2}{r_{12}} (\operatorname{curl} \mathfrak{M}_1,\ \operatorname{curl} \mathfrak{M}_2).$$

Dieser Ausdruck bildet das Gegenstück des Ausdruckes (233c) des ersten Bildes, der nach (232c) übergeht in

$$U_m = \int\int \frac{dv_1\, dv_2}{r_{12}} \operatorname{div} \mathfrak{M}_1 \operatorname{div} \mathfrak{M}_2.$$

Beide Ausdrücke sind der Fernwirkungsanschauung angepaßt; der Ausdruck für U_m zeigt Fernkräfte zwischen den Quellpunkten, der Ausdruck für T_m Fernkräfte zwischen den Wirbelelementen der permanenten Magnetisierung an. Beide Ausdrücke lassen erkennen, daß für die Wechselwirkungen zweier permanenter Magnete das Gesetz der Gleichheit von actio und reactio gilt. Denn es hängt die Arbeit der wechselseitigen Kräfte bei der Verrückung immer nur von der Änderung der relativen Lage der magnetisierten Volumelemente ab. Verschieben sich zwei Magnete, ohne ihre relative Lage zu ändern, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten Null. Es wirkt also im ganzen keine resultierende Kraft und kein Kräftepaar, d. h. die Kräfte und Kräftepaare, welche die beiden Magnete aufeinander ausüben, kompensieren sich und sind daher entgegengesetzt gleich.

§ 90. Die ponderomotorischen Kräfte zwischen permanenten Magneten und elektrischen Strömen.

Wir denken uns im Felde eine Anzahl permanenter Magnete und außerdem, räumlich von jenen getrennt, eine Anzahl elektrischer Ströme. Die Stromleiter sollen wie starre Körper beweglich sein. Außerhalb der Magnete soll die Permeabilität μ durchweg gleich 1 sein, so daß außer der permanenten Magnetisierung der magnetisch harten Körper eine veränderliche Magnetisierung magnetisch weicher Körper nicht in Frage kommt. Die Wechselwirkungen der Magnete unter sich und der Ströme unter sich kennen wir jetzt. Welche

Kräfte übt nun aber ein Strom auf einen Magneten, und ein Magnet auf einen Strom aus?

Was zunächst die Wirkung auf einen Magneten (M_2) anbelangt, so können wir den Strom (J_1) ersetzen durch den äquivalenten Magneten (M_1). Denn dieser erzeugt ja überall die gleiche magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ wie der Strom; die Wirkung auf (M_2) ist aber durch $\mathfrak{B}$ bestimmt, indem jeder Stromfaden des fingierten Stromsystemes (J_2'), das (M_2) ersetzt, möglichst viele Induktionslinien zu umschlingen sucht. Die Potentialfunktion der Wirkung, die J_1 auf M_2 ausübt, wird erhalten, indem man in (237c) an Stelle der Dichte $\mathfrak{i}_1'$ des in (M_1) zu fingierenden Stromes die Dichte $\mathfrak{i}_1$ des in (J_1) wirklich fließenden setzt; sie ist

$$-\frac{1}{c^2}\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2'}{r_{12}}.$$

Anderseits können wir bezüglich der Gegenwirkung auf den Strom (J_1) den Magneten (M_2) durch das äquivalente Stromsystem (J_2') ersetzen, welches überall dasselbe $\mathfrak{B}$ erzeugt. Denn durch das Feld $\mathfrak{B}$ sind die Kräfte bestimmt, die auf (J_1) wirken. Wir erhalten demnach das Potential der Wirkung, die M_2 auf J_1 ausübt, indem wir in dem Ausdrucke des elektrodynamischen Potentials zweier Stromsysteme J_1 und J_2 an Stelle von J_2 das System J_2' setzen, welches dem Magneten M_2 äquivalent ist. Dieses Potential ist

$$-\frac{1}{c^2}\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2'}{r_{12}}.$$

Aus der Änderung, welche das Potential der Wechselwirkung bei einer virtuellen Verrückung erfährt, berechnen sich die Kräfte; demnach folgt erstens: Auf einen Magneten übt ein Strom die gleichen Kräfte aus wie der äquivalente Magnet. Zweitens: Auf einen Strom übt ein Magnet die gleichen Kräfte aus wie der äquivalente Strom. Drittens endlich folgt aus der Identität der Potentialausdrücke für die Wirkung des Stromes auf den Magneten einerseits, die Wirkung des Magneten auf den Strom anderseits: Die Kräfte und Drehkräfte, welche ein Strom und ein Magnet aufeinander ausüben, erfüllen das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung. Es kann daher ein aus einem Magnete und einem fest verbundenen Strome bestehendes System sich nicht selbst eine Beschleunigung erteilen.

Da nicht nur für die Wechselwirkung von Magneten untereinander und von Strömen untereinander das dritte Newtonsche Axiom gilt, sondern auch für die Wechselwirkung von Magneten und Strömen, so können wir schließen: von einem Magneten oder einem Strome werden auf einen Magneten die gleichen Kräfte ausgeübt wie auf den äquivalenten Strom. In der Tat, es üben, wie bewiesen, Magnet (M_1) und äquivalenter Strom (J_1) auf einen Magneten (M_2) die gleichen Wirkungen aus. Diesen Wirkungen entgegengesetzt gleich sind die Gegenwirkungen, die auf den Magneten (M_1) bzw. den äquivalenten Strom (J_1) von dem Magneten (M_2) ausgeübt werden. Die Kräfte und Drehkräfte, die (M_2) auf (M_1) und auf den äquivalenten Strom (J_1) ausübt, sind daher untereinander gleich. Dasselbe gilt von den Kräften und Drehkräften, die ein Strom (J_2) auf (M_1) und den äquivalenten Strom (J_1) ausübt. Wir können also allgemein den Satz aufstellen: die Kräfte, die an einem Magneten und einem äquivalenten Strome in einem beliebigen magnetischen Felde im Äther angreifen, sind einander im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent. Wir sind demnach imstande, in jeder Hinsicht von den ponderomotorischen Kräften, welche permanente Magnete ausüben, und welche an ihnen angreifen, Rechenschaft zu geben, indem wir das System freier Strömungen, welches der remanenten Magnetisierung entspricht, durch wahre elektrische Ströme im Äther ersetzt denken.

§ 91. Eingeprägte magnetische Kräfte.

Wir dürfen uns nicht verhehlen, daß die Theorie des Ferromagnetismus noch große Schwierigkeiten bietet. Eine vollkommene Theorie müßte es gestatten, die Funktionsbeziehung, welche zwischen Induktion $\mathfrak{B}$ und der Feldstärke $\mathfrak{H}$ bzw. der Vorgeschichte des Feldes besteht, allgemein abzuleiten. Von einer solchen Theorie sind wir noch weit entfernt.

Von O. Heaviside ist eine Darstellung der Theorie der magnetischen Härte gegeben worden, welche auf der Annahme eingeprägter magnetischer Kräfte beruht. Ähnlich, wie man die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$, welche in Leitern einen Strom erregt, in zwei Teilvektoren zerlegt, nämlich die im stationären Felde wirbelfreie Kraft $\mathfrak{E}^s$ und die eingeprägte elektrische Kraft $\mathfrak{E}^e$, so setzt Heaviside:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^s + \mathfrak{H}^e. \tag{238}$$

Dabei soll die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ quellenfrei sein:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

In permanenten Magneten, die nicht von elektrischen Strömen durchflossen werden, soll die „magnetostatische Kraft“ $\mathfrak{H}^s$ wirbelfrei sein:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H}^s = 0.$$

Bei dieser Formulierung ist es das Auftreten der „eingeprägten magnetischen Kraft“ $\mathfrak{H}^e$, welches die magnetisch harten Körper kennzeichnet. Das Problem der permanenten Magnetisierung würde dann darauf zurückgeführt sein, die Verteilung und die Eigenschaften dieses Vektors zu ermitteln.

Diese Darstellungsweise ist neuerdings von R. Gans befürwortet worden; er glaubt durch die Annahme, daß sowohl μ wie $\mathfrak{H}^e$ nahezu konstant sind, das Verhalten permanenter Magnete so weit beschreiben zu können, als die Hysteresis nicht in Frage kommt. Auf Grund dieser Annahme würden die Feldgleichungen für ferromagnetische Körper die Form annehmen:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \{\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e\} - \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}, \tag{238a}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\}, \tag{238b}$$

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0. \tag{238c}$$

Die Vektoren

$$\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \quad \mathfrak{H}^s = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e$$

sind es, deren Tangentialkomponenten sich an der Grenzfläche zweier Körper — von vollkommenen Leitern abgesehen — stetig verhalten. Sie bestimmen den Poyntingschen Strahlvektor (vgl. 226a)

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}^s \mathfrak{H}^s] = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e], \tag{238d}$$

so daß die Stetigkeit des normalen Energiestromes, durch die Trennungsfläche zweier Körper hindurch, gesichert ist.

Wir stellen, ähnlich wie in § 87, aber jetzt unter Berücksichtigung der Arbeit der eingeprägten elektrischen Kräfte, die Energiegleichung auf:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} - \frac{dA}{dt} + Q + Q_m = -\int df\, \mathfrak{S}_n,$$

und setzen rechts unter Anwendung des Gaußschen Satzes und der Formel (102a):

$$-\int df\, \mathfrak{S}_n = -\int dv \operatorname{div} \mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\int dv \left\{ \mathfrak{E}^s \operatorname{curl} \mathfrak{H}^s - \mathfrak{H}^s \operatorname{curl} \mathfrak{E}^s \right\}$$

In dem letzten Ausdruck führen wir, an Stelle von

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E}^s \text{ und } \operatorname{curl} \mathfrak{H}^s,$$

die durch die Feldgleichungen (238a, b) gegebenen Werte ein und trennen dann die von den elektrischen Vektoren abhängigen Größen von denjenigen, welche durch die magnetischen Vektoren bestimmt sind; so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\frac{dU}{dt} - \frac{dA}{dt} + Q = \int dv \left(\mathfrak{E}^s, \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma\, \mathfrak{E} \right),$$

$$\frac{dT}{dt} + Q_m = \int dv \left(\mathfrak{H}^s, \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4\pi} \int dv\, \mathfrak{H}^s \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{238e}$$

Über die erste, elektrische Energiebeziehung hatten wir uns bereits in § 66 verbreitet, insbesondere über den durch die eingeprägten elektrischen Kräfte vermittelten chemischen oder thermischen Energieumsatz. Die eingeprägten magnetischen Kräfte bedingen keinen derartigen Energieumsatz — abgesehen von der durch Q_m ausgedrückten Hysteresiswärme — so daß ein als Arbeitsleistung dieser Kräfte zu deutendes Glied in (238e) nicht einzuführen war. Wird diese, als Verallgemeinerung von (229) anzusprechende Gleichung auf reversible, d. h. von magnetischer Wärmeentwickelung Q_m freie Vorgänge angewandt, so bestimmt

$$dT = \frac{1}{4\pi}\int dv\, \mathfrak{H}^s\, d\mathfrak{B} \tag{238f}$$

die Änderung der magnetischen Energie.

Sind nun wirklich für jedes Volumelement μ und $\mathfrak{H}^e$ während des betreffenden Vorganges unveränderliche Größen, so folgt aus (238) für die Energieänderung der Volumeinheit

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}^s\, d\mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^s\, d\mathfrak{H}^s = d\left\{\frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}_s^2\right\}.$$

Diese Formel gilt auch außerhalb der permanenten Magnete, wo $\mathfrak{H}^e$ gleich Null zu setzen ist.

Für die Energiedifferenz des etwa aus zwei permanenten Magneten bestehenden Systemes in zwei verschiedenen Lagen folgt demnach

$$T - T_0 = \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}_s^2 - \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}_{s0}^2. \tag{238g}$$

Da der wirbelfreie Vektor $\mathfrak{H}^s$ es ist, der hier die magnetische Energie bestimmt, so entspricht dieser Energieausdruck dem ersten Bilde (§ 88); er ist eine Verallgemeinerung des Ausdruckes (233). Man kann hier die potentielle Energie der Wechselwirkung von Magneten auf die Formen bringen

$$U_m = \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}_s^2 = -\int dv\, \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^s\,\nabla\varphi_m = \frac{1}{2}\int dv\, \varphi_m\, \varrho_m,$$

wo gesetzt ist:

$$4\pi\varrho_m = \operatorname{div}\mu\,\mathfrak{H}^s = -\operatorname{div}\mu\,\mathfrak{H}^e.$$

Dem zweiten Bilde (§ 89) dagegen entspricht der Energieausdruck, der aus der Gleichung

$$d\,T = -\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{H}^s$$

abzuleiten ist. Dieser Wert der Energieänderung erweist sich als identisch mit (238f), wenn man beachtet, daß das Volumintegral des skalaren Produktes aus dem quellenfreien Vektor $\mathfrak{B}$ und dem wirbelfreien Vektor $\mathfrak{H}^s$ gleich Null ist:

$$\int dv\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}^s = 0.$$

Mit Rücksicht auf (238) folgt nun für die Energieänderung der Volumeinheit

$$-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}^s = -\frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{B}\,d\mathfrak{B} = -d\left\{\frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{B}^2\right\},$$

und es wird die Energiedifferenz zweier Konfigurationen des magnetischen Systemes

$$T - T_0 = -\int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 + \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}_0^2; \tag{238h}$$

diese Formel ist als Verallgemeinerung von (237) zu bezeichnen. Entsprechend wie im § 89, fassen wir diesen Ausdruck für die potentielle Energie der Wechselwirkung permanenter Magnete als elektrodynamisches Potential eines fingierten Stromsystemes auf, von der magnetischen Energie:

$$T_m = \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 = \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \frac{1}{2c}\int dv\,(\mathfrak{i}\mathfrak{A}).$$

Dabei ist die fingierte Stromdichte bestimmt durch

$$\frac{4\pi\mathfrak{i}}{c} = \operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{B}}{\mu}\right\} = \operatorname{curl}\mathfrak{H}^e.$$

Wird $\mu = 1$ gesetzt, d. h. der Grenzfall eines zur Sättigung magnetisierten Stahlstückes ins Auge gefaßt, so geht die soeben skizzierte Auffassung in die oben, in den §§ 88—90, dargelegte über; dabei wird $\mathfrak{H}^s$ mit der dort mit $\mathfrak{H}$ bezeichneten, wirbelfreien Feldstärke identisch, während $\mathfrak{H}^e$ mit dem dort als konstant angenommenen Vektor $4\pi\,\mathfrak{M}$ zusammenfällt (vgl. 232a, 238).

Aber auch die in diesem Paragraphen gegebene Formulierung der Feldgleichungen für ferromagnetische Körper kann nicht allgemeingültig sein. Denn indem man $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ durch die Beziehung (238) verknüpft — sei es, daß man μ konstant oder als Funktion von $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H}^s$ betrachtet — schließt man die Erscheinungen der Hysteresis aus, die doch für das Zustandekommen des permanenten Magnetismus so wesentlich sind.

Drittes Kapitel.

Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 92. Induktion durch Bewegung zweier Stromringe.

Im vorigen Abschnitte haben wir ausschließlich das elektromagnetische Feld in ruhenden Körpern behandelt. Eine Bewegung der Körper haben wir nicht in Betracht gezogen. Wir gehen nunmehr dazu über, die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern zu erörtern, wenigstens so weit, als sie sich in die Maxwell-Hertzsche Theorie einordnen lassen.

Wir knüpfen zunächst an die im § 69 behandelte Aufgabe an, die Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme zu ermitteln. Wir fanden für den Induktionsfluß durch eine vom ersten Ringe umschlungene Fläche:

$$\frac{1}{c} L_{11} J_1 + \frac{1}{c} L_{12} J_2,$$

und für den vom zweiten Ringe umschlungenen Induktionsfluß:

$$\frac{1}{c} L_{12} J_1 + \frac{1}{c} L_{22} J_2.$$

Wir leiteten aus dem Faradayschen Induktionsgesetze die induzierten elektromotorischen Kräfte ab; dabei beschränkten wir die Betrachtung auf diejenigen elektromotorischen Kräfte, die in ruhenden, starren Stromringen durch Änderungen der Stromstärken induziert werden. Änderungen der relativen Lage und der Form der Stromringe zogen wir nicht in Betracht.

Das Faradaysche Induktionsgesetz gilt nun aber auch für bewegte Stromkreise. Es setzt allgemein die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme der Zahl der umschlungenen Induktionslinien proportional. Auf Grund dieses durch die Erfahrung bestätigten Gesetzes erhalten wir für die induzierten elektromotorischen Kräfte die Ausdrücke

$$E_1^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2), \tag{239}$$

$$E_2^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2). \tag{239a}$$

Es entstehen somit induzierte elektromotorische Kräfte nicht nur durch Änderungen der Stromstärken J_1, J_2, sondern auch durch Änderungen der Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion. Durch Bewegung starrer Stromleiter wird allerdings nur L_{12} geändert; hat man es aber etwa mit biegsamen stromführenden Bändern zu tun, so hat man auch die Veränderlichkeit der Selbstinduktionskoeffizienten zu beachten.

Nun muß in jedem der beiden Stromkreise die Summe der induzierten und der um das Produkt aus Stromstärke und Widerstand verminderten eingeprägten elektromotorischen Kraft gleich Null sein. Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$E_1^e = J_1 R_1 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2), \tag{239b}$$

$$E_2^e = J_2 R_2 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2). \tag{239c}$$

Dies sind dieselben Gleichungen, die wir in § 70 durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen auf unser als Bizykel betrachtetes System gewonnen haben (186d). Die dort entwickelte Auffassung, welche die Stromstärken als zyklische Geschwindigkeiten, die durch c geteilten Induktionsflüsse als zyklische Momente deutet, ergibt auch für die Induktion durch Bewegung mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate. Natürlich gilt dies nur für quasistationäre Strömung. Außerdem aber ist der Gültigkeitsbereich der Gleichungen auf hinreichend langsame Bewegung der Stromringe zu beschränken. Das geht aus dem mechanischen Bilde des § 70 hervor, welches die Lage und die Form der Stromringe durch gewisse Parameter bestimmt und von diesen Parametern voraussetzt, daß sie sich mit der Zeit langsam ändern. Wir werden hier als langsam eine Bewegung zu bezeichnen haben, deren Geschwindigkeit klein gegen die Geschwindigkeit c ist, mit der die elektromagnetischen Störungen sich fortpflanzen.

Für solche langsame Bewegungen ist nun die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte leicht anzugeben. Wir haben im § 70 gesehen, daß diese Kräfte für ruhende Leiter sich berechnen aus der Zunahme der magnetischen Energie, indem die negative magnetische Energie die Rolle des elektrodynamischen Potentiales spielt. Es ist aber wohl zu beachten, daß diejenige Zunahme der magnetischen Energie in Rechnung zu setzen ist, die stattfindet, wenn die Stromstärken konstant gehalten werden. Es ist die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte bei einer virtuellen Verrückung oder Formänderung der linearen Leiter

$$\delta A = \delta T = \frac{1}{2c^2} J_1^{\,2} \delta L_{11} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} + \frac{1}{2c^2} J_2^{\,2} \delta L_{22}.$$

Bei hinreichend langsamer Bewegung, d. h. solange die Geschwindigkeit der Bewegung nicht merklich das magnetische Feld und die Feldenergie beeinflußt, werden die elektrodynamischen Kräfte die gleichen sein, die in der jeweils eingenommenen Lage auf den ruhenden Leiter wirken würden. Die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer solchen Bewegung leisten, wird dann

$$\text{(239d)} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2c^2} J_1^{\,2} \frac{dL_{11}}{dt} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2c^2} J_2^{\,2} \frac{dL_{22}}{dt}.$$

Werden die Stromstärken wirklich konstant gehalten, so ist diese Arbeitsleistung der Zunahme der Feldenergie gleich. Ändern sich aber bei der wirklichen Bewegung die Stromstärken, so gilt für die Zunahme der durch (185) bestimmten Feldenergie der allgemeinere Ausdruck:

$$
(239\,\mathrm{e})\left\{\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{c^2}\Big\{J_1 L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{2}J_1^2\frac{dL_{11}}{dt} + J_1 L_{12}\frac{dJ_2}{dt} + J_2 L_{12}\frac{dJ_1}{dt} \\ &\quad + J_1 J_2\frac{dL_{12}}{dt} + J_2 L_{22}\frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2}J_2^2\frac{dL_{22}}{dt}\Big\}.\end{aligned}\right.
$$

Die Summe aus der pro Sekunde von den elektrodynamischen Kräften geleisteten Arbeit (239d) und aus der Zunahme der Energie (239e) ist

$$
\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\Big\{J_1\frac{d(L_{11}J_1)}{dt} + J_1\frac{d(L_{12}J_2)}{dt} + J_2\frac{d(L_{12}J_1)}{dt} + J_2\frac{d(L_{22}J_2)}{dt}\Big\}.
$$

Nach (239, 239a) wird dieses

$$
(239\,\mathrm{f})\qquad \frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = -J_1 E_1^i - J_2 E_2^i.
$$

Die Summe aus Arbeit der elektrodynamischen Kräfte und der Zunahme der Feldenergie ist also gleich der negativen Arbeit der induzierten elektromotorischen Kräfte. Wir können statt der letzteren Kräfte die Differenzen der eingeprägten Kräfte und der Produkte aus Stromstärke und Widerstand setzen (vgl. 239b, c). Dann wird

$$
(239\,\mathrm{g})\qquad \frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_1 E_1^e + J_2 E_2^e - J_1^2 R_1 - J_1^2 R_2.
$$

Die von den eingeprägten elektromotorischen Kräften chemischen oder thermischen Ursprungs geleistete Arbeit liefert, soweit sie nicht als Joulesche Wärme in dem Leiter verzehrt wird, diejenige Energie, welche erforderlich ist, um gleichzeitig die mechanische Arbeit (239d) zu leisten und die magnetische Energie um den Betrag (239e) zu vermehren. Damit ist der Nachweis geführt, daß das Energieprinzip von den angenommenen elektromotorischen und ponderomotorischen Kräften erfüllt ist. Das kann nicht wundernehmen, da ja diese Kräfte aus den Lagrangeschen Gleichungen sich ableiten ließen, und die Energiegleichung für alle diejenigen Systeme gilt, welche den Lagrangeschen Gleichungen genügen.

Wir denken uns beispielsweise zwei starre Stromkreise in parallelen Ebenen einander gegenübergestellt und in gleichem

Sinne von Strömen durchflossen. Bei einer Annäherung der Stromringe leisten die anziehenden elektrodynamischen Kräfte Arbeit, und gleichzeitig nimmt die magnetische Feldenergie zu. Die infolge der Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte wirken in einem der Richtung des betreffenden Stromes entgegengesetzten Sinne. Um die Stromstärken konstant zu halten, müßten somit die eingeprägten elektromotorischen Kräfte verstärkt werden; dieselben würden dann eine entsprechende Arbeit über das zur Lieferung der Jouleschen Wärme erforderliche Maß hinaus leisten. Diese Arbeit würde zum Teil in ponderomotorische Arbeit, zum Teil in magnetische Energie verwandelt werden. In Wirklichkeit sind indessen die eingeprägten Kräfte konstant, nicht die Stromstärken. Die Stromstärken werden also durch die induzierte elektromotorische Kraft zeitweise geschwächt, wodurch der Vorgang sich kompliziert.

Wir sehen, daß die durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte und die ponderomotorischen Kräfte in enger Beziehung zueinander stehen. Dieser durch das Energieprinzip vermittelte Zusammenhang besteht selbstverständlich auch in allgemeineren Fällen. Die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper können, wenn sie bezüglich der durch Bewegung erregten Felder sich unterscheiden, nicht umhin, auch für die ponderomotorischen Kräfte verschiedene Annahmen zu machen. Wir kommen auf diesen Punkt weiter unten zurück. Von den in diesem Paragraphen dargelegten Wechselwirkungen zweier bewegter Stromringe, die in dem angegebenen Gültigkeitsbereiche von der Erfahrung durchweg bestätigt werden, müssen alle Theorien Rechenschaft geben, auch wenn sie sonst voneinander abweichen mögen.

§ 93. **Die Magnetinduktion.**

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Falles über, wo durch einen linearen Leiter ein permanenter Magnet Induktionslinien hindurchsendet. Auch hier setzt das Faradaysche Induktionsgesetz die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses proportional. Wir wollen, um den Vergleich zwischen den Entwickelungen dieses Paragraphen und denen des vorigen zu erleichtern, als Magneten eine magnetische Schale wählen; ihr magnetisches Moment nehmen wir, entsprechend der Auffassung der §§ 88 bis 90, als konstant an. Wir bezeichnen mit J_1' die Stromstärke des längs der Umfangslinie zu fingierenden Stromes, welcher der Schale äquivalent ist (vgl. § 89). Der gesamte Induktionsfluß durch eine vom Strome J_2 umrandete Fläche hindurch ist dann

$$\frac{1}{c} L_{12} J_1' + \frac{1}{c} L_{22} J_2;$$

aus dem Induktionsgesetz folgt daher als *induzierte elektromotorische Kraft im Stromringe*

$$E_2^i = -\frac{1}{c^2} J_1' \frac{d L_{12}}{d t} - \frac{1}{c_2} \frac{d}{d t}(L_{22} J_2). \tag{240}$$

In der Tat, die fingierte Stromstärke J_1' des den Magneten ersetzenden Stromes ist konstant, weil durch die permanente Magnetisierung bestimmt. Eine Induktion kann daher nur durch Lagenänderung des Magneten oder des Stromes eintreten. Dazu tritt dann die im zweiten Gliede enthaltene Selbstinduktion, herrührend von Stromschwankungen im Stromringe selber oder von Formänderung desselben.

Was nun die ponderomotorischen Kräfte anbelangt, so sind diese ohne weiteres anzugeben. Wissen wir doch aus den Entwickelungen des § 90, daß die magnetische Schale hinsichtlich der ausgeübten ponderomotorischen Kräfte sowohl wie hinsichtlich derjenigen Kräfte, die sie erleidet, dem linearen Strome J_1' im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent ist. Wir erhalten demnach die Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte bei einer langsamen Bewegung des Stromes bzw. des starren Magneten leisten, indem wir in (239d) an Stelle von J_1 jetzt J_1' setzen. Dabei ist zu beachten, daß L_{11}, die Größe, welche dem Selbstinduktionskoeffizienten des äquivalenten Stromes entsprechen würde, für den Magneten als starren Körper konstant ist. Es ist demnach

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{c^2} J_2 \left(J_1' \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2} J_2 \frac{dL_{22}}{dt} \right) \tag{240a}$$

die Arbeitsleistung der ponderomotorischen Kräfte, die zwischen dem Magneten und dem Strome wirksam sind.

Wir müssen nun, um das Energieprinzip auch für die Magnetinduktion als gültig nachzuweisen, die Feldenergie des Systemes bestimmen, das von dem Strome und dem Magnete gebildet wird. Wir haben zwar die Energie eines nur aus elektrischen Strömen oder nur aus Magneten bestehenden Systemes berechnet. Aber gerade die hier vorliegende Aufgabe haben wir bisher noch nicht gelöst.

Wir knüpfen, um ihre Lösung zu ermitteln, am besten an die Entwickelungen des § 88 an. Wir fanden dort für die Änderung der Energiedichte im Innern eines magnetisch harten Körpers

$$\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} d\mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi} d\mathfrak{H}^2.$$

Derselbe Ausdruck gilt in dem umgebenden Raume und auch in dem Stromleiter, wenn die Permeabilität daselbst gleich 1 ist. Wir wollen dies annehmen. Dann gilt auch hier die Gleichung (233), welche die Feldenergie T bis auf eine Konstante bestimmt; wir setzen

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + \text{const.} \tag{240b}$$

Das Feld $\mathfrak{H}$ ist im Magneten wirbelfrei (Gl. 230), im Stromleiter ist es quellenfrei, da $\mu = 1$ und $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ist. Im übrigen Teile des Feldes ist es sowohl quellenfrei wie wirbelfrei. Wir können es daher in der im § 30 dargelegten Weise in ein wirbelfreies Feld $\mathfrak{H}'$ und ein quellenfreies Feld $\mathfrak{H}''$ zerlegen; $\mathfrak{H}'$ ist das vom Magneten allein, $\mathfrak{H}''$ das vom Strome allein erregte Feld; durch Superposition dieser beiden Felder entsteht das wirkliche Feld; aus den Entwickelungen des § 30 geht nun hervor, daß allgemein

$$\int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}'^2 + \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}''^2$$

gilt. Es folgt daher

$$T = T' + T'', \tag{240c}$$

wo T' die konstante Energie des Magneten allein, bei Abwesenheit des Stromes, ist, während

$$T'' = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}''^2 = \frac{1}{2c^2} L_{22} J_2^2$$

die Feldenergie des Stromes im leeren Raume ist. Es superponieren sich demnach die Energien des permanenten Magneten und des Stromes. Bleibt der Stromring nach Form und Stromstärke ungeändert, so ist die Feldenergie von der Lage des Magneten und des Stromes unabhängig.

Wir wollen jetzt prüfen, ob diese Konsequenz der Theorie permanenter Magnete mit dem Energieprinzip in Übereinstimmung ist. Wir erhalten für die zeitliche Änderung der Feldenergie, da ja die Energie des Magneten konstant ist:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\left\{L_{22} J_2 \frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt}\right\}. \tag{240d}$$

Addiert man hierzu die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte (240a), so erhält man

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2} J_2 \left\{J_1' \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{d}{dt}(L_{22} J_2)\right\}. \tag{240e}$$

Berücksichtigt man den Ausdruck (240) für die induzierte elektromotorische Kraft der Magnetinduktion, so folgt:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = -J_2 E_2{}^i; \tag{240f}$$

die Summe aus Arbeit der ponderomotorischen Kräfte und Zunahme der magnetischen Feldenergie ist demnach gleich der negativen Arbeit der im Stromringe induzierten Kraft. Dieses Resultat entspricht dem im vorigen Paragraphen für zwei

Stromringe erhaltenen. Da die negative induzierte elektromotorische Kraft

$$-E_2^i = E_2^e - J_2 R_2$$

ist, so können wir (240f) auch schreiben:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_2 E_2^e - J_2^2 R_2. \tag{240g}$$

Die Arbeit der eingeprägten elektromotorischen Kräfte im Stromringe wird demnach, soweit sie nicht als Joulesche Wärme verzehrt wird, in mechanische Arbeit (240a) umgewandelt, bzw. zur Steigerung der magnetischen Feldenergie verwandt. Ein von der relativen Lage des Magneten und des Stromes abhängiger Energieanteil ist dabei nicht angenommen worden. Dennoch genügen die vorausgesetzten elektromotorischen Kräfte der Magnetinduktion dem Energieprinzip.

Den Entwickelungen dieses Paragraphen liegt, ebenso wie denen des vorigen, die Annahme zugrunde, daß die Bewegungen des Stromes bzw. des Magneten hinreichend langsam erfolgen. Anderenfalls wäre es nicht erlaubt, die Feldenergie der Energie des in der betreffenden Konfiguration ruhend verharrenden Systemes gleichzusetzen, und die ponderomotorischen Kräfte einfach mit denjenigen zu identifizieren, welche Magnet und Strom, wenn unbeweglich, aufeinander ausüben würden. Indem wir die Annahme langsamer Bewegung zugrunde legten, haben wir stillschweigend das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung eingeführt, das ja für ruhende Ströme und Magnete allgemein bewiesen worden ist (§ 90). Auch haben wir die ponderomotorischen, und ebenso die durch das Energieprinzip mit ihnen verknüpften elektromotorischen Kräfte nur von der relativen Lage der Körper abhängig gemacht. Bei allen in den Gültigkeitsbereich der beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels fallenden Vorgängen gilt mithin das sogenannte Relativitätsprinzip: es hängen die Vorgänge nur von der relativen Bewegung der materiellen Körper ab, eine hinzugefügte gleichförmige Translation oder Rotation des ganzen Systemes ändert weder die ponderomotorischen noch die elektromotorischen Kräfte, welche in dem System wirksam sind.

§ 94. Die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper.

Wir haben bisher das Induktionsgesetz nur auf bewegte lineare Leiter angewandt. Nun führt das Induktionsgesetz, auf ruhende Flächenelemente angewandt, zur zweiten Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie (vgl. § 65). Indem wir das Induktionsgesetz auf bewegte Flächen bzw. Kurven übertragen, und sodann zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen, gelangen wir dazu, die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper aufzustellen.

Wir denken uns in einem beliebig bewegten Körpersystem zur Zeit t eine Fläche f. Die materiellen Punkte dieser Fläche werden zur Zeit $t + dt$ infolge der Bewegung in andere Lagen gelangt sein, die von diesen materiellen Punkten gebildete Fläche f wird dabei gewisse Deformationen erfahren haben. Wir bestimmen den Induktionsfluß durch f einmal zur Zeit t, sodann zur Zeit $t + dt$. Das verallgemeinerte Induktionsgesetz besagt nun: Die zeitliche Abnahme des Induktionsflusses, geteilt durch c, ist auch für die bewegte Fläche gleich dem Linienintegrale der induzierten elektromotorischen Kraft, erstreckt über die Randkurve der Fläche:

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i \, d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int df \, \mathfrak{B}_n. \tag{241}$$

Für die zeitliche Änderung des Flächenintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Fläche, hatten wir bereits in § 34 allgemeine Formeln abgeleitet. Die Gleichung (122) jenes Paragraphen ergibt

$$\frac{d}{dt} \int df \, \mathfrak{B}_n = \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{B} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{B} \right\}_n,$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Punkte der Fläche bezeichnet; sie gilt für eine ganz beliebige, stetige Bewegung des Körpers und ist keineswegs etwa auf starre Körper beschränkt. Formen wir nun die linke Seite von (241) mit Hilfe des Stokesschen Satzes um und berücksichtigen, ebenso wie bei den entsprechenden Entwickelungen des § 65, daß die resultierende Feldstärke $\mathfrak{E}$ sich additiv zusammensetzt aus der eingeprägten elektrischen Kraft $\mathfrak{E}^e$, der wirbelfreien Feldstärke $\mathfrak{E}^s$ und der induzierten Kraft $\mathfrak{E}^i$, so erhalten wir

$$(241\text{a})\quad \int df \operatorname{curl}_n \{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}_n$$

und, durch Übergang zu Flächenelementen

$$(241\text{b})\quad \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}.$$

Diese Formulierung der zweiten Hauptgleichung für einen bewegten Körper entspricht der von Heinrich Hertz entworfenen Theorie, die in seiner Abhandlung „Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper“ enthalten ist (Ges. Werke II, S. 256). Hertz operiert dort mit der Annahme von wahrem Magnetismus. Wir wollen, der hier vertretenen Auffassung getreu, solchen ausschließen und daher $\operatorname{div}\mathfrak{B}$ durchweg gleich Null setzen. Dann lautet die zweite Hauptgleichung:

$$(242)\quad \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}.$$

Das erste Glied der rechten Seite zeigt die Änderung des Vektors $\mathfrak{B}$ an, die auch in dem ruhenden Körper stattfinden würde, während das zweite Glied von der infolge der Bewegung hinzukommenden Änderung des Induktionsflusses herrührt.

Wir wollen, um die Bedeutung dieses zweiten Gliedes zu erkennen, den Fall ins Auge fassen, daß ein Körper sich in einem konstanten, etwa von einem ruhenden Magneten oder von einem ruhenden, stationären elektrischen Strome erzeugten magnetischen Felde bewegt. Dann wird

$$(242\text{a})\quad \operatorname{curl}\mathfrak{E}^i = \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}].$$

Das Linienintegral der durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kraft ist daher

$$(242\text{b}) \qquad E^i = \int \mathfrak{E}^i d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{s},$$

für eine beliebige, aus materiellen Punkten des Körpers gebildete Kurve $\mathfrak{s}$. Auf Grund der Rechnungsregel (31) können wir die rechte Seite auf die Form bringen:

$$(242\text{c}) \qquad E^i = -\frac{1}{c}\int \mathfrak{B}[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}].$$

Das äußere Produkt $[\mathfrak{v} d\mathfrak{s}]$ stellt das Parallelogramm dar, welches von dem Linienelemente $d\mathfrak{s}$ des Körpers bei seiner Bewegung beschrieben wird; mithin gibt das innere Produkt aus $\mathfrak{B}$ und jenem Vektor die Zahl der von dem Linienelemente $d\mathfrak{s}$ bei seiner Bewegung in der Zeiteinheit durchschnittenen Induktionslinien an, d. h. den Induktionsfluß durch jenes Parallelogramm; denkt man sich den Umfang des Parallelogramms in dem durch die Reihenfolge der Vektoren $\mathfrak{v}$, $d\mathfrak{s}$ im Vektorprodukte festgelegten Sinne von einem elektrischen Strome durchflossen, so ordnet der Induktionsfluß $\mathfrak{B}[\mathfrak{v} d\mathfrak{s}]$ sich diesem Umlaufssinn als positiv zu. Die von einem Stromfaden $\mathfrak{s}$ umrandete Fläche, deren Elemente mit einem Umlaufssinne zu versehen sind, erhält durch die Bewegung eines jeden Elementes des Stromfadens den Zuwachs $[\mathfrak{v} d\mathfrak{s}]$. Der dabei stattfindende Zuwachs des Induktionsflusses beträgt im ganzen

$$\int \mathfrak{B}[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}],$$

so daß der Ausdruck (242c) für das längs des Fadens genommene Integral der induzierten elektromotorischen Kraft denselben Wert ergibt wie die Ausgangsgleichung (241).

Aus (242a) geht hervor, daß die Wirbel der durch Bewegung induzierten Kraft $\mathfrak{E}^i$ mit den Wirbeln des Vektors

$$-\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

übereinstimmen. Dadurch ist der Vektor $\mathfrak{E}^i$ selbst noch nicht eindeutig bestimmt, da er neben den Wirbeln auch Quellen besitzen kann. Jedenfalls aber ist die geometrische Differenz der Vektoren

$$\mathfrak{E}^i \text{ und } \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

wirbelfrei, so daß

$$\mathfrak{E}^i = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}] - \nabla\Phi \tag{242d}$$

zu setzen ist.

Der hier noch unbestimmt gelassene, als negativer Gradient des Skalars Φ sich darstellende Bestandteil kommt indessen nicht in Betracht, wenn es sich nur um die Bestimmung des Linienintegrals der induzierten Kraft handelt. Da meist das Entstehen induzierter elektrischer Kräfte bei Bewegung im Magnetfelde durch Messung des in einer geschlossenen Leitung hervorgerufenen Stromes festgestellt wird, so kommt es meist nur auf die Kenntnis jenes Linienintegrals an. Dieses ist durch die Wirbel von $\mathfrak{E}^i$ bestimmt, die mit den Wirbeln von $\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ identisch sind.

Wir haben bisher die Geschwindigkeit der Punkte des Körpers im Magnetfeld als stetig verteilt angenommen. Wir gehen jetzt zu dem Grenzfalle über, wo die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ räumliche Unstetigkeiten aufweist. Wir betrachten zwei Körper, die längs ihrer Trennungsfläche aneinander vorbeigleiten. An einer solchen *Gleitfläche* wird im allgemeinen ein Flächenwirbel des Vektors $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ auftreten. Der allgemeine Ausdruck des Flächenwirbels (104) ergibt hier

$$\left[\mathfrak{n},\ [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_1 - [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_2\right],$$

wo der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in diejenige Normale n der Gleitfläche fällt, die von der durch (2) gekennzeichneten Seite nach der durch (1) angezeigten weist.

Nach der Regel (32) ist

$$\left[\mathfrak{n}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right] = \mathfrak{v}(\mathfrak{n}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{n}\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{v}_n.$$

Da nun $\mathfrak{B}_n$ stetig die Trennungsfläche durchsetzt — wahrer Magnetismus ist ja ausgeschlossen worden — und Unstetigkeiten von $\mathfrak{v}_n$ ebenfalls nicht angenommen werden, so ist die Differenz der auf den beiden Seiten der Gleitfläche geltenden Werte

$$\mathfrak{B}_n(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2) - \mathfrak{v}_n(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2). \tag{242e}$$

Dies ist also der allgemeine Ausdruck des Flächenwirbels von $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$. Führen wir ein kartesisches Achsenkreuz ein, dessen x-Achse in dem betreffenden Punkte der Fläche in die Normalenrichtung n fällt, so sind die Komponenten des Flächenwirbels parallel der y-Achse und der z-Achse:

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_x(\mathfrak{v}_{1y} - \mathfrak{v}_{2y}) - \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}_{1y} - \mathfrak{B}_{2y}), \\ \mathfrak{B}_x(\mathfrak{v}_{1z} - \mathfrak{v}_{2z}) - \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}_{1z} - \mathfrak{B}_{2z}). \end{cases} \tag{242f}$$

Die Komponente parallel der x-Achse ist selbstverständlich Null.

Besitzen die Oberflächen der beiden Körper, die aneinander entlang gleiten, nicht neben der tangentiellen Geschwindigkeit der Gleitbewegung eine gemeinsame normale Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_n$, so vereinfacht sich Gleichung (242e) noch. Es ist dann der Flächenwirbel von $\mathfrak{E}^i$, der durch Division durch c erhalten wird:

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{E}_1^i - \mathfrak{E}_2^i] = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\,\mathfrak{B}_n, \tag{243}$$

oder, in kartesischer Schreibweise

$$\begin{cases} -(\mathfrak{E}_{1z}^i - \mathfrak{E}_{2z}^i) = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_{1y} - \mathfrak{v}_{2y})\,\mathfrak{B}_n, \\ +(\mathfrak{E}_{1y}^i - \mathfrak{E}_{2y}^i) = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_{1z} - \mathfrak{v}_{2z})\,\mathfrak{B}_n. \end{cases} \tag{243a}$$

Die durch Bewegung induzierte elektromotorische Kraft hat an Gleitflächen einen Flächenwirbel, der dem Produkte aus dem Geschwindigkeitssprung und der normalen Komponente von $\mathfrak{B}$, geteilt durch c, gleich ist (falls $\mathfrak{v}_n = 0$ ist).

Wir haben die zweite Hauptgleichung bisher nur auf den Fall angewandt, daß der Magnet bzw. der elektrische Strom, welche das magnetische Feld erzeugen, in Ruhe sind; in Körpern, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen, treten dann die angegebenen induzierten elektrischen Kräfte auf. Wie liegt nun die Sache, wenn der Magnet bzw. der Strom, von denen das Feld erregt wird, ihrerseits in Bewegung begriffen sind? Wir haben bereits in den beiden letzten Paragraphen gesehen, daß man von den Erfahrungen über Induktion durch Bewegung Rechenschaft geben kann, wenn man annimmt, daß der Magnet bzw. der Strom bei ihrer Bewegung das Feld einfach mitführen; freilich ist zu betonen, daß diese Erfahrungen sich auf „langsame Bewegungen" beschränken, d. h. auf Bewegungen, deren Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. In einem Körper, der relativ zum Magneten ruht, tritt eine induzierte elektrische Kraft nicht auf; es behält der Vektor $\mathfrak{B}$ auch bei der Bewegung an jedem Punkte des Körpers seinen Wert. Induzierte Kräfte treten nur dann auf, wenn der Körper relativ zum Magneten sich bewegt. Der Wirbel der induzierten elektrischen Kraft wird auch jetzt durch (242a) gegeben, wobei $\mathfrak{v}$, die Geschwindigkeit der materiellen Punkte des bewegten Körpers, jetzt auf ein mit dem Magneten starr verbundenes Bezugssystem zu beziehen ist. Es kommt demnach nur die Relativgeschwindigkeit der materiellen Körper für die Induktionserscheinungen in Betracht. In einem Systeme, das als Ganzes genommen in translatorischer oder rotatorischer Bewegung begriffen ist, verlaufen die Induktionsvorgänge wie in einem ruhenden Systeme.

Daß diese Auffassung in einem gewissen Gebiete den Erfahrungen entspricht, erkennt man schon daraus, daß unsere Erfahrungen eigentlich in einem bewegten Systeme, nämlich an der Erdoberfläche, gewonnen sind. Dennoch ließ sich die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen entwickeln, ohne von der Erdbewegung zu reden. Aus den elektromagnetischen Wechselwirkungen von Körpern, die sich mit der Erde bewegen, ist demgemäß ein Anhaltspunkt für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Erdbewegung nicht zu gewinnen. Hieraus folgt, daß für Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Geschwindigkeit der Bewegung der Erde um die Sonne, d. h. für

$$\frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \beta = 10^{-4},$$

das Relativitätsprinzip auch für die elektromagnetischen Erscheinungen noch gilt; solche Bewegungen sind noch als „langsame Bewegungen“ in dem hier gebrauchten Sinne zu betrachten.

Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper legt überhaupt allgemein das Prinzip der Relativität zugrunde, d. h. sie macht die elektromagnetischen Wechselwirkungen durchweg nur von der relativen Bewegung der aufeinander wirkenden Körper abhängig. Wie wir weiter unten sehen werden, lassen sich keineswegs alle Tatsachen mit der Hertzschen Elektrodynamik vereinbaren. Bei den hier betrachteten Induktionserscheinungen aber bewährt sie sich; wir wollen ihre Konsequenzen daher noch an einem konkreten Falle genauer erörtern, nämlich an den Vorgängen der unipolaren Induktion.

§ 95. Unipolare Induktion.

Als unipolare Induktion bezeichnet man das Auftreten induzierter elektrischer Kräfte infolge der Rotation eines zylindrischen permanenten Magneten um seine Achse. Mit dem elektrisch leitenden Körper des Magneten ist eine ruhende Drahtschlinge elektrisch verbunden; das eine Ende derselben gleitet auf der zylindrischen Mantelfläche, das andere befindet sich auf der Polfläche des Magneten, und zwar meistens in der Rotationsachse. Der Magnet mag etwa symmetrisch zur Rotationsachse magnetisiert sein derart, daß die Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ in die Meridianebene fallen.

In dem Leitungskreise, der durch den Magneten und die Drahtschlinge gebildet wird, tritt nun infolge der Bewegung des Magneten eine induzierte elektromotorische Kraft auf, die bei fortdauernder Bewegung einen stationären Strom erzeugt. Die induzierte Kraft macht sich natürlich nur dann bemerkbar, wenn die Drahtschlinge nicht mit dem Magneten rotiert.

Würde sie mit ihm rotieren, also relativ zum Magneten ruhen, so würde ein Strom nicht entstehen. Dem Prinzipe der Relativität gemäß ist es für das Zustandekommen des Stromes gleichgültig, ob die Drahtschlinge ruht und der Magnet rotiert, oder ob der Magnet ruht und die Drahtschlinge in der entgegengesetzten Richtung rotiert. Es genügt daher, den ersten Fall genauer zu verfolgen.

Ist $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Magneten, u ihr Betrag, r der Abstand von der Rotationsachse, so ist

$$|\mathfrak{v}| = ur$$

die Geschwindigkeit, mit der die Punkte des Magneten in Kreisen um die Rotationsachse sich bewegen. Der Vektor $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ liegt in der Meridianebene; seine Komponente senkrecht zur Rotationsachse ist

$$|\mathfrak{v}|\,\mathfrak{B}_z = ur\,\mathfrak{B}_z,$$

wenn $\mathfrak{B}_z$ die Komponente von $\mathfrak{B}$ parallel der Drehachse ist; in der Achse selbst verschwindet jener Vektor.

Wir bezeichnen mit A und B die Endpunkte der Drahtschlinge. A mag sich auf der Mantelfläche, B auf dem Durchschnittspunkte der Polfläche des Magneten mit der Rotationsachse befinden. Fällt man von A das Lot auf die Achse, das diese im Punkte C trifft, so ist $ABCA$ ein geschlossener Weg. Für diesen geschlossenen Weg, der zum Teil (AB) in dem Drahte, zum Teil (BC, CA) im Magneten verläuft, berechnen wir das Linienintegral der induzierten elektrischen Kraft aus der Gleichung (242b) des vorigen Paragraphen; dasselbe ist:

$$E^i = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\,d\mathfrak{s} = \frac{1}{c}\int [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\,d\mathfrak{s}.$$

Die Beiträge, welche die Drahtschlinge und die Magnetachse zu dem Integrale liefern, sind Null, weil auf beiden $\mathfrak{v}$ gleich Null ist. Es liefert nur die zur Achse senkrechte Strecke CA einen Beitrag; ist a die Länge dieser Strecke, so wird

$$E^i = \frac{u}{c}\int_0^a \mathfrak{B}_z r\,dr.$$

Verstehen wir anderseits unter f_a die von CA bei einer Umdrehung beschriebene Kreisfläche, so ist die gesamte Induktion durch f_a

$$\int_0^a 2\pi r\,dr\,\mathfrak{B}_z = \int \mathfrak{B}_z\,df_a.$$

Es wird demnach das Linienintegral der induzierten elektromotorischen Kraft für einen Weg, der auf dem Umfange der Kreisfläche f_a aus dem Magneten in den Draht eintritt:

$$E^i = \frac{u}{2\pi c}\int \mathfrak{B}_z\,df_a. \tag{244}$$

Denselben Wert des Integrales hätten wir erhalten, wenn wir den Integrationsweg im Magneten anders gewählt hätten; dann wäre nur das Integral der normalen magnetischen Induktion für eine andere Fläche mit der gleichen Randkurve zu berechnen gewesen, und dieses hat wegen der Quellenfreiheit von $\mathfrak{B}$ den gleichen Wert. Die Stromstärke des entstehenden Stromes ist nun bestimmt durch E^i in Verbindung mit den Widerständen des Stromkreises, der von dem Drahte und dem Magneten gebildet wird.

Rotiert anderseits der Draht um den ruhenden Magneten, so gilt für die induzierte Integralkraft immer noch der Ausdruck (244); dabei ist dann unter u die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten, bezogen auf ein in dem Drahte festes System, zu verstehen, d. h. die negativ genommene Drehgeschwindigkeit des Drahtes. In jedem Falle bestimmt die Formel (242b) eindeutig die induzierte elektromotorische Integralkraft.

Auf die Frage nach den Wirbeln von $\mathfrak{E}^i$ gibt die Formel (241) eine bestimmte Antwort; ihre Anwendung auf den hier behandelten Fall ergibt, daß weder im Magneten noch in dem umgebenden, die Drahtschlinge umfassenden Bereiche solche Wirbel auftreten. Denkt man sich nämlich im Innern des rotierenden Magneten eine geschlossene Kurve $\mathfrak{s}$, so umschlingt sie, wenn sie mit dem Magneten rotiert, stets den gleichen

Induktionsfluß; das Induktionsgesetz (241) ergibt daher für das Linienintegral von $\mathfrak{E}^i$ längs dieser Kurve den Wert Null, woraus nach dem Stokesschen Satze das Verschwinden von curl $\mathfrak{E}^i$ im Innern des Magneten folgt. Für die Randkurve einer ganz im Luftraume verlaufenden Fläche andererseits ergibt die entsprechende Betrachtung, daß das Linienintegral von $\mathfrak{E}^i$ verschwindet, wenn die Kurve sich nicht bewegt. Auch in der als ruhend angenommenen Luft also befindet sich kein Wirbel von $\mathfrak{E}^i$. Nur an der Grenzfläche der beiden Bereiche, wo eine Gleitfläche liegt, ist ein Flächenwirbel von $\mathfrak{E}^i$ anzunehmen, wie es die Formel (243) des vorigen Paragraphen anzeigt. Die Zusammensetzung dieser, längs der Meridiankurve s der Gleitfläche verteilten Flächenwirbel ergibt

$$\text{(244a)} \qquad \frac{u}{c}\int_0^r r\,ds\,\mathfrak{B}_n = \frac{u}{2\pi c}\int df\,\mathfrak{B}_n,$$

wo f die bei einer Umdrehung des betreffenden Stückes der Meridiankurve beschriebene Fläche ist. Wegen der quellenfreien Verteilung von $\mathfrak{B}$ stimmt dieses Integral mit E^i (Gl. 244) überein, wie es sein muß.

Welchen Beitrag zu dem Linienintegrale E^i die einzelnen Elemente des Integrationsweges liefern, die teils dem Magneten, teils der Drahtschlinge angehören, darauf kommt es kaum an; diese Frage ist mit der nach dem „Sitz der induzierten elektromotorischen Kraft“ identisch. Rotiert die Drahtschlinge um den ruhenden Magneten, so wird man als Sitz der elektromotorischen Kraft den Draht, der bei seiner Bewegung die magnetischen Induktionslinien schneidet, anzusehen haben. Rotiert hingegen der Magnet, so ist die Frage schwieriger zu beantworten. Man hat die Frage meistens so gestellt: Rotieren die magnetischen Induktionslinien mit dem Magneten, oder verharren sie außerhalb des Magneten in Ruhe, wenn der Magnet um seine Achse rotiert? Im ersteren Falle wird man den Sitz der induzierten Kraft im Drahte, im letzteren Falle im Magneten zu suchen haben, wenn man diese Kraft aus der Zahl der durchschnittenen Induktionslinien berechnet.

Diese Formulierung der Frage ist indessen kaum als glücklich zu bezeichnen. Denn die Induktionslinien sind doch nur ein Hilfsmittel zur geometrischen Veranschaulichung des Feldes; in einem gegebenen Augenblicke kann man den Verlauf der Induktionslinien verfolgen und aus ihrer Zahl den Induktionsfluß bestimmen, der von einer gegebenen Kurve umschlungen wird. Verändert sich nun das Feld, so entsteht eine neue Verteilung der Induktionslinien und des Induktionsflusses; es ist aber nicht möglich, einer bestimmten Induktionslinie des ersten Feldes eine bestimmte Induktionslinie des zweiten eindeutig zuzuordnen; diese Zuordnung ist auf alle Fälle bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Die Induktionslinien besitzen keine individuelle Existenz, sie können neu entstehen und wieder verschwinden. Der Begriff der „Bewegung der Induktionslinien" schwebt daher in der Luft; er ist zur präzisen Fassung der hier vorliegenden Probleme wenig geeignet.

Zur Veranschaulichung der Induktionserscheinungen mag man sich immerhin der Darstellung durch Induktionslinien bedienen. Man kann hier nach Belieben annehmen, daß sie ruhen oder mit dem Magneten rotieren; man erhält auf jeden Fall den richtigen Wert des Linienintegrales der induzierten Kraft, auf den es allein ankommt.

Berechtigter ist die Frage nach dem elektrischen Felde, welches den mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Magneten umgibt, wenn man die Drahtschlinge beseitigt. Dieses wird aber nicht durch $\mathfrak{E}^i$, sondern durch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^i + \mathfrak{E}^s$$

bestimmt, wo $\mathfrak{E}^s$ ein durchweg wirbelfreier Vektor ist. Diese resultierende elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ wird in jedem gegebenen Falle sich eindeutig berechnen lassen. Da jetzt der Stromkreis nicht wie vorhin durch die Drahtschlinge geschlossen ist, so fließt in dem rotierenden Magneten kein stationärer Strom. Es muß folglich im Innern des Magneten $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Nun ist aber für einen geschlossenen Weg

$$\int \mathfrak{E}^s d\mathfrak{s} = 0,$$

daher

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{E}^i d\mathfrak{s} = E^i.$$

Außerhalb des Magneten aber besteht ein zeitlich konstantes, wirbelfreies elektrisches Feld, dessen Quellen sich an der Oberfläche des Magneten befinden. Erstreckt sich das Linienintegral längs des vorhin betrachteten geschlossenen Weges, so liefert das im Luftraume verlaufende Stück des Weges den Beitrag

$$\int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \varphi_A - \varphi_B,$$

der im Magneten verlaufende Teil des Weges aber trägt nichts bei, weil hier $\mathfrak{E}$ verschwindet. Es ist demnach (vgl. 244)

$$\varphi_A - \varphi_B = E^i = \frac{u}{2\pi c} \int \mathfrak{B}_z\, df_a. \tag{244b}$$

Hierdurch ist das Potential des Feldes $\mathfrak{E}$ auf der Oberfläche des Magneten bis auf eine additive Konstante bestimmt; da es im Luftraume der Laplaceschen Gleichung zu genügen hat, so ist es nach den Lehren der Potentialtheorie bis auf eine additive Konstante eindeutig zu berechnen; folglich bestimmt sich das Feld und die Elektrizitätsverteilung an der Oberfläche des Magneten in eindeutiger Weise, wenn E^i bekannt ist. Bei gegebener Induktion $\mathfrak{B}$ im rotierenden Magneten kann man so das äußere elektrische Feld und die Ladungsverteilung aus den gegebenen Ansätzen ableiten, ohne die Frage nach dem Sitze der elektromotorischen Kraft zu berühren.

§ 96. Ponderomotorische Kraft an einem Stromelemente.

Mit den induzierten elektrischen Kräften eng verknüpft sind die ponderomotorischen Kräfte, die an einem Stromkreise angreifen. Wir kennen bereits die Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte im ganzen an einem linearen Strome leisten. Wir wollen jetzt von der Kraft sprechen, die an einem Stromelemente in einem gegebenen magnetischen Felde wirkt; wir knüpfen dabei unmittelbar an die Erfahrung an.

Ein einzelnes Stromelement für sich ist zwar nicht denkbar, es muß notwendig zu einem geschlossenen Stromkreise gehören; wir können es aber mechanisch von dem übrigen Stromkreise so sondern, daß die an ihm angreifende Kraft der Messung unmittelbar zugänglich wird. Wir haben zu diesem Zwecke das Stromelement mit dem Reste des Stromkreises durch Gleitstellen zu verbinden, so daß es sich unabhängig bewegen kann und doch von dem Strome durchflossen wird. Verwirklicht wird diese Anordnung in dem bekannten Ampèreschen Fundamentalversuch.

Das Ergebnis der auf diesem Wege gewonnenen Erfahrung läßt sich folgendermaßen formulieren. Die an dem Stromelemente $d\mathfrak{s}$ in einem magnetischen Felde angreifende Kraft $\mathfrak{K}$ ist

$$\mathfrak{K} = \frac{J}{c}\,[d\mathfrak{s}\mathfrak{B}]. \tag{245}$$

Die Kraft steht demnach immer senkrecht zu $d\mathfrak{s}$. Die zu $d\mathfrak{s}$ parallele Komponente von $\mathfrak{B}$ kommt für die Kraft nicht in Betracht, nur die zu $d\mathfrak{s}$ normale. Zerlegt man $\mathfrak{B}$ in einen zu $d\mathfrak{s}$ parallelen und einen senkrechten Vektor, so folgen $d\mathfrak{s}$, dieser zweite Vektor, und $\mathfrak{K}$ aufeinander, wie die Achsen eines Rechtssystemes. Daß die Dimensionen der beiden Seiten von (245) übereinstimmen, ist mit Hilfe der Dimensionstabelle des § 67 leicht zu prüfen. Aus den Dimensionen der beiden ersten Spalten, in denen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ nicht die gleiche Dimension haben, erkennt man, daß in der Tat nicht $\mathfrak{H}$, sondern der für die magnetische Induktion maßgebende Vektor $\mathfrak{B}$ es ist, der die ponderomotorische Kraft bestimmt; die Einführung von $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{B}$ würde nämlich eine falsche Dimension der rechten Seite ergeben. Dies ist darum von Interesse, weil die Beobachtungen der überwiegenden Mehrzahl noch im Luftraume angestellt sind und eine Entscheidung darüber, ob $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{H}$ zu setzen ist, daher nicht ohne weiteres gestatten.

Die virtuelle Arbeit, welche die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ bei einer durch $\delta\mathfrak{r}$ angezeigten Verrückung des Stromelementes leistet, ist

$$\mathfrak{K}\delta\mathfrak{r} = \frac{J}{c}\delta\mathfrak{r}[d\mathfrak{s}\mathfrak{B}].$$

Nach der Rechnungsregel (31) wird dies

$$\mathfrak{K}\delta\mathfrak{r} = \frac{J}{c}\mathfrak{B}[\delta\mathfrak{r}d\mathfrak{s}]. \tag{245a}$$

Dabei stellt das äußere Produkt von $\delta\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{s}$ das Parallelogramm dar, welches das Stromelement bei der virtuellen Verrückung beschreibt. Die skalare Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ ergibt den Induktionsfluß durch das Parallelogramm. Die Verhältnisse entsprechen ganz den bei der Diskussion von (242c) erörterten. Die Arbeit, welche die Kräfte bei einer virtuellen Verrückung des ganzen Stromkreises leisten, ist gleich

$$\delta A = \frac{J}{c}\int\mathfrak{B}[\delta\mathfrak{r}d\mathfrak{s}], \tag{245b}$$

d. h. gleich der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke $\frac{J}{c}$, multipliziert mit der Zunahme, welche der vom Stromkreise umschlungene Induktionsfluß infolge der virtuellen Verrückung erfährt, bei konstant gehaltener Stromstärke des Elementes und konstant gehaltener magnetischer Induktion $\mathfrak{B}$ des Feldes. Damit sind wir zu den Beziehungen zurückgelangt, die wir in § 70 zuerst in Anlehnung an die Lagrangeschen Gleichungen dargelegt haben und die auch den §§ 92 und 93 zugrunde lagen. Die Stromleiter suchen sich immer so zu stellen bzw. zu deformieren, daß der Induktionsfluß, den sie umschlingen, möglichst groß wird.

Vom linearen Leiter zu Volumelementen übergehend, setzen wir

$$Jd\mathfrak{s} = \mathfrak{i}dv$$

und demgemäß für die Kraft, die auf das durchströmte Volumelement im magnetischen Kreise wirkt,

$$\mathfrak{K} = dv \frac{1}{c} [\mathfrak{i}\mathfrak{B}]. \tag{245c}$$

Haben wir es statt des Leitungsstromes mit einem Konvektionsstrome zu tun, indem die Ladung e mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch das magnetische Feld bewegt wird, so ist $Jd\mathfrak{s}$ durch $e\mathfrak{v}$ zu ersetzen. Die Kraft $\mathfrak{K}$ wird daher

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{c} [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]. \tag{246}$$

Diese Kraft weist stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des elektrischen Teilchens und leistet daher bei der Bewegung desselben keine Arbeit; unter $\mathfrak{v}$ ist hier zunächst die Relativgeschwindigkeit, bezogen auf den das Feld erzeugenden Magneten, zu verstehen.

Ist neben dem magnetischen Felde noch ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ vorhanden, so wirkt auf das ruhende Elektrizitätsteilchen die Kraft $e\mathfrak{E}$. Bei einer Bewegung tritt noch die Kraft (246) hinzu, so daß im ganzen

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{F} \tag{246a}$$

ist, wo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

die auf die Einheit der Ladung berechnete Kraft bezeichnet.

Dieser Ansatz hat sich bei den Beobachtungen an Kathodenstrahlen, die man als Konvektionsströme bewegter Elektronen anzusehen hat, durchaus bewährt.

Der Definition des Vektors $\mathfrak{B}$, die wir im § 61 gaben, können wir jetzt eine andere Definition an die Seite stellen, die sich auf die Gleichung (245) stützt. Wir denken uns ein bewegliches Stromelement in einen Punkt des Feldes gebracht und die ponderomotorische Kraft für verschiedene Richtungen des Elementes beobachtet. Eine bestimmte Gerade hat die Eigenschaft, daß das Stromelement, mit seiner Achse in die Gerade eingestellt, keine Kraft erfährt; in diese Gerade fällt die Richtung von $\mathfrak{B}$. Der Betrag und Sinn von $\mathfrak{B}$ bestimmt sich dann aus der Kraft auf ein senkrecht zu jener Geraden gestelltes Stromelement. Das Stromelement leistet als Probekörper bei der Untersuchung des Feldes $\mathfrak{B}$ ähnliche Dienste wie ein elektrisch geladenes ruhendes Holundermarkkügelchen bei der Untersuchung des Feldes $\mathfrak{E}$. Dabei sind dem Probekörper des magnetischen Feldes ähnliche Beschränkungen aufzuerlegen wie demjenigen des elektrischen Feldes; es müssen nämlich seine Abmessungen klein sein gegen solche Strecken, in denen merkliche Inhomogenitäten des Feldes auftreten.

In dieser Hinsicht ist ein Kathodenstrahlteilchen, das aus konvektiv bewegten Elektronen besteht, als idealer Probekörper zu betrachten. Es kann, der Gleichung (246a) entsprechend, sowohl als Probekörper zur Untersuchung des elektrischen wie des magnetischen Feldes verwandt werden. Ferner sind seine Abmessungen so gering — den Radius des Elektrons hat man von der Größenordnung 10^{-13} cm anzunehmen —, daß auch recht inhomogene Felder, z. B. die Felder der Lichtwellen, in solchen Bereichen noch als homogen zu betrachten sind. Endlich kann das Kathodenstrahlbündel infolge der geringen Trägheit der Elektronen auch sehr raschen Schwankungen des Feldes momentan folgen; es eignet sich daher zur Untersuchung schneller Wechselfelder, in denen materielle Probekörper dem schnellen Wechseln des Feldes nicht zu folgen vermögen. In der Tat hat man Kathodenstrahlen zur Messung solcher Felder verwandt.

Die Gleichung (246a) läßt endlich noch erkennen, daß der Vektor $\mathfrak{B}$ es ist, der als magnetisches Gegenstück dem Vektor $\mathfrak{E}$ gegenübertritt. Während $\mathfrak{E}$ die Wirkung des elektrischen Feldes auf die ruhende Elektrizität bestimmt, bestimmt $\mathfrak{B}$ die Wirkung des magnetischen Feldes auf die bewegte Elektrizität. Anderseits tritt der von der ruhenden wahren Elektrizität entspringenden elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ das den wahren Strom umschlingende magnetische Feld $\mathfrak{H}$ gegenüber. Diese Analogie ist von der Hertz-Heavisideschen verschieden; wir deuteten bereits im § 60 auf sie hin.

§ 97. Die Maxwellschen Spannungen.

Wir denken uns den Raum von einem Medium konstanter Dielektrizitätskonstante und Permeabilität erfüllt. In dem Raume mag ruhende Elektrizität mit der Dichte ϱ verteilt sein, und es mögen stationäre elektrische Ströme daselbst fließen, von der Stromdichte $\mathfrak{i}$. Wir grenzen durch eine Fläche f einen Teil des Raumes ab und berechnen die resultierende ponderomotorische Kraft, welche infolge des bestehenden Feldes auf den von f begrenzten Raum wirkt. Diese Kraft $\mathfrak{K}$ besteht aus zwei Teilen

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^e + \mathfrak{K}^m. \tag{247}$$

Der erste Teil, die ponderomotorische Kraft des elektrischen Feldes, ist

$$\mathfrak{K}^e = \int dv \varrho \mathfrak{E}, \tag{247a}$$

der zweite, die ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes, ist

$$\mathfrak{K}^m = \int dv \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}, \mathfrak{B}\right]. \tag{247b}$$

Wir wollen jeden der beiden Teile gesondert behandeln; wir werden sehen, daß sich die Volumintegrale in Flächenintegrale verwandeln lassen.

Es ist allgemein

$$\mathfrak{E}_x 4\pi\varrho = \varepsilon \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varepsilon \mathfrak{E}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right),$$

ferner

$$[\varepsilon \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]_x = \varepsilon \mathfrak{E}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) - \varepsilon \mathfrak{E}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right),$$

daher

$$4\pi\varrho \mathfrak{E}_x - [\varepsilon \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]_x =$$

$$\varepsilon \left\{\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z)\right\}.$$

Wir integrieren jetzt über den Bereich v, der von der geschlossenen Fläche f begrenzt wird. Es wird

$$\int dv\{4\pi\varrho\mathfrak{E}_x - [\varepsilon\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{E}]_x\} =$$

$$\int dv\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z)\right\}.$$

Deuten wir für den Augenblick die Größen

$$\frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \quad \varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y, \quad \varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z,$$

als Komponenten eines Vektors, so steht rechts das Volumintegral der Divergenz eines Vektors; dasselbe geht vermöge des Gaußschen Satzes über in das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral der Normalkomponente; diese Normalkomponente würde sein

$$\frac{1}{2}\{(2\varepsilon\mathfrak{E}_x^2 - \varepsilon\mathfrak{E}^2)\cos nx + 2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\cos ny + 2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z\cos nz\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_n - \varepsilon\mathfrak{E}^2\cos(nx)\}.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{T}^e$ den Vektor

$$\mathfrak{T}^e = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{E}\cdot 2\varepsilon\mathfrak{E}_n - \mathfrak{n}\cdot\varepsilon\mathfrak{E}^2\} \tag{248}$$

($\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen von f), so wird

$$\int dv\{4\pi\varrho\mathfrak{E}_x - [\varepsilon\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{E}]_x\} = 4\pi\int df\,\mathfrak{T}_x^e. \tag{248a}$$

Da nun gemäß der zweiten Hauptgleichung (178) bei fehlenden eingeprägten Kräften

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

ist, so wird

$$\int dv\,\varrho\mathfrak{E}_x + \int dv\,\frac{1}{c}\left[\mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right]_x = \int df\,\mathfrak{T}_x^e.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Komponenten. Wir fassen sie zu der Vektorgleichung zusammen

$$\int dv\,\varrho\mathfrak{E} + \int dv\,\frac{1}{c}\left[\mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right] = \int df\,\mathfrak{T}^e. \tag{248b}$$

Es wurde im Eingange dieses Paragraphen angenommen, daß die Ströme, welche das Feld $\mathfrak{B}$ erzeugen, stationär sind, so daß $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ gleich Null ist. Die linke Seite von (248b) wird dann identisch mit der Kraft $\mathfrak{K}^e$, welche auf die im Bereiche v enthaltene ruhende Elektrizität wirkt. Es wird

$$\mathfrak{K}^e = \int df\, \mathfrak{T}^e. \tag{248c}$$

Es läßt sich demnach die resultierende Kraft des elektrischen Feldes auf das Innere der Fläche f ersetzen durch ein über die Fläche selbst verteiltes Kräftesystem, wie wir auch die Fläche f legen mögen.

Wir wollen diese flächenhaft verteilte Kraft genauer diskutieren. Wir betrachten zuerst ein Flächenelement, das senkrecht zur Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ gestellt ist. Nach (248) liefert dieses Flächenelement zur resultierenden Kraft einen Anteil, der parallel der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ ist

$$\frac{\mathfrak{n}}{8\pi}\, \varepsilon \mathfrak{E}^2 df = \mathfrak{n}\, \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) df.$$

Nun war $\mathfrak{n}$ jedesmal die von Innen her nach der Fläche weisende Normale. Das Kräftesystem, welches längs der Fläche verteilt anzunehmen ist, entspricht demnach hier einem auf das Innere ausgeübten Zuge, dessen Betrag gleich der Energiedichte ist.

Wir legen zweitens ein Flächenelement parallel zur Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$; dieses liefert nach (248) zur resultierenden Kraft den Anteil:

$$-\frac{\mathfrak{n}}{8\pi}\, \varepsilon \mathfrak{E}^2 df = -\,\mathfrak{n}\, \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) df.$$

Auch diese Kraft ist, pro Flächeneinheit berechnet, ihrem Betrage nach der elektrischen Energiedichte gleich, ihre Richtung ist indessen der Normalen $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt; diese Kraft ist daher eine Druckkraft.

Das flächenhaft verteilte Kräftesystem, zu dem wir gelangt sind, entspricht demnach einer Zug-

spannung längs der elektrischen Kraftlinien und einer Druckspannung senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien. Der Betrag beider ist der elektrischen Energiedichte gleich.

Einen Längszug und Querdruck der Kraftlinien nahm bereits Faraday an; er deutete so vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes. Maxwell zeigte, daß dieses Spannungssystem zu den wohlbekannten Kräften führt, welche elektrisch geladene Körper aufeinander ausüben. Die Resultante der ponderomotorischen Kräfte, welche von den außerhalb der Fläche f befindlichen Körpern auf die innerhalb derselben gelegenen im elektrostatischen Felde ausgeübt werden, läßt sich vollständig durch das längs der Oberfläche verteilte Kräftesystem $\mathfrak{T}^e$ (Gl. 248) ersetzen. Anderseits ersetzt dasselbe bei umgekehrtem Normalensinn die Rückwirkung, welche das Innere von f auf das Äußere ausübt. Denn das über die Fläche f erstreckte Integral von $\mathfrak{T}^e$, zusammen mit dem über eine unendlich entfernte und keinen Beitrag liefernde Fläche, stellt die resultierende Kraft auf die außerhalb der Fläche f gelegenen Körper dar. Da nun nach (248) in einem stetig verteilten Felde mit der Richtung von $\mathfrak{n}$ das Vorzeichen von $\mathfrak{T}^e$ sich umkehrt, ohne daß sein Betrag sich ändert, so folgt: *Die Kräfte, welche die durch eine Fläche f voneinander getrennten Teile des elektrostatischen Feldes aufeinander ausüben, erfüllen das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung, wenn anders sie sich durch das Maxwellsche Spannungssystem ersetzen lassen.*

Daß dieses nicht nur bezüglich der resultierenden Kraft, sondern auch bezüglich der Drehkraft gilt, zeigt die folgende Betrachtung. Wir denken uns den Bereich v in kleine Zellen geteilt. Die Kraft auf jede einzelne dieser Zellen ersetzen wir durch das über ihre Begrenzung verteilte Kräftesystem $\mathfrak{T}^e$. Dann ist nicht nur die resultierende Kraft, sondern auch die resultierende Drehkraft der auf die Zellen wirkenden Elementarkräfte der aus den Kräften $\mathfrak{T}^e$ resultierenden Kraft bzw. Drehkraft äquivalent. Bei der Zusammensetzung der über die Oberflächen der Zellen verteilten Kräfte $\mathfrak{T}^e$ heben sich nun die Beiträge der Trennungsflächen aneinanderstoßender Zellen heraus und es bleibt nur diejenige Kraft und Drehkraft übrig, welche aus den über die Oberfläche des ganzen Bereiches v verteilten Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ resultiert. Die Kraft und die Drehkraft, welche der Bereich v infolge des elektrostatischen Feldes erfährt, ist demnach den Resultierenden des über die Grenzfläche f verteilten Kräftesystemes $\mathfrak{T}^e$ im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent. Ebendasselbe Kräftesystem, aber mit umgekehrtem Sinne der Normalen $\mathfrak{n}$, bestimmt die resultierende Kraft und Drehkraft, welche auf das Äußere der Fläche f wirkt. Da $\mathfrak{T}^e$ mit $\mathfrak{n}$ das Vorzeichen wechselt, so folgt, daß die Wechselwirkungen der innerhalb und außerhalb f gelegenen Körper das Gesetz von actio und reactio nicht nur hinsichtlich der Kräfte, sondern auch der Drehkräfte erfüllen.

Wir gehen jetzt zum magnetischen Felde über, dessen Wirkung auf elektrische Ströme durch (247b) gegeben ist; auch dieses Volumintegral läßt sich in ein Oberflächenintegral umwandeln. Um dies zu zeigen, betrachten wir den vektoriellen Ausdruck

$$\int dv \{4\pi\varrho_m \mathfrak{H} - [\mu\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H}]\}.$$

Seine Komponenten können wir in ganz derselben Weise umformen, wie oben die Komponenten des entsprechenden Ausdruckes in $\mathfrak{E}$; denn die Umformungen, die oben vorgenommen wurden, sind in derselben Weise mit einem jeden Vektor vorzunehmen, unabhängig von seiner physikalischen Bedeutung. Setzen wir demgemäß

$$\mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{H}\cdot 2\mu\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\cdot\mu\mathfrak{H}^2\}, \tag{249}$$

so gilt unter den eingangs angegebenen Voraussetzungen die (248a) entsprechende Gleichung

$$\int dv\,\{4\pi\varrho_m\mathfrak{H}_x - [\mu\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H}]_x\} = 4\pi\int df\,\mathfrak{T}^m_x. \tag{249a}$$

Nun ist aber hier, da wahrer Magnetismus nicht angenommen wird:

$$4\pi\varrho_m = \operatorname{div}\mathfrak{B} = \mu\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Ferner ergibt die erste Hauptgleichung

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{c}.$$

Es folgt daher

$$\int dv\left[\frac{\mathfrak{c}}{c}, \mathfrak{B}\right] = \int df\,\mathfrak{T}^m \tag{249b}$$

für ein beliebiges elektromagnetisches Feld.

In dem hier zu betrachtenden Felde stationärer elektrischer Ströme wird die Dichte $\mathfrak{c}$ des wahren Stromes derjenigen des Leitungsstromes $\mathfrak{i}$ gleich und demnach die linke Seite von (249b) mit der Kraft $\mathfrak{K}^m$ (Gl. 247b) identisch:

$$\mathfrak{K}^m = \int df\,\mathfrak{T}^m. \tag{249c}$$

Im magnetischen Felde stationärer elektrischer Ströme sind hiernach Spannungen anzunehmen, welche den im elektrischen Felde anzunehmenden vollkommen entsprechen. Es findet ein Längszug parallel und ein Querdruck senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien statt; der Betrag dieser Spannungen ist der magnetischen Energiedichte

$$\frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$$

gleich.

Das System der Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$, das durch (249) bestimmt ist, ersetzt vollständig, sowohl bezüglich der resultierenden Kraft als auch bezüglich der resultierenden Drehkraft, das System $\mathfrak{K}^m$ der auf das Innere der Fläche f infolge des magnetischen Feldes ausgeübten Kräfte, wenigstens in dem hier behandelten Falle einer durchweg konstanten Permeabilität. Daraus, daß die wechselseitigen Wirkungen zweier Systeme elektrischer Ströme, von denen das eine innerhalb, das andere außerhalb der Fläche f liegt, sich durch das System von Flächenkräften $\mathfrak{T}^m$ ersetzen lassen, welches dem Gesetze der

Wirkung und Gegenwirkung stets Genüge leistet, folgt ohne weiteres, daß das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung allgemein für die Wechselwirkung ruhender Ströme gilt, sowohl hinsichtlich der resultierenden Kräfte wie hinsichtlich der Drehkräfte.

Von den Kräften, die auf permanente Magnete wirken, haben wir bisher nicht gesprochen. Es ist indessen leicht einzusehen, daß die Kräfte, die auf solche im magnetischen Felde wirken, gleichfalls durch die über ihre Oberfläche verteilten Maxwellschen Spannungen (249) darzustellen sind. Wir können den Nachweis auf zwei verschiedenen Wegen führen, die bzw. der im § 88 und im § 89 entwickelten Darstellung des Feldes permanenter Magnete entsprechen. In der ersteren Darstellung wurde die Kraft auf die Volumeinheit des magnetisierten Körpers durch

$$\mathfrak{H}\,\varrho_m' = \mathfrak{H}\,\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{H}$$

gegeben. Die resultierende Kraft entspricht hier ganz der Kraft (247a), die das elektrische Feld auf elektrische Ladungen im Äther ausübt; sie läßt sich daher durch das System von Flächenkräften $\mathfrak{T}^m$, welches ganz den elektrischen Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ entspricht, ersetzen. Das Bild des § 89 führt zu demselben Resultate; denn es ersetzt den permanenten Magneten durch ein äquivalentes Stromsystem und ergibt, daß der permanente Magnet Kräfte erfährt, welche den auf das Stromsystem wirkenden im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent sind. Die Kräfte, welche auf einen starren Magneten im leeren Raume wirken, lassen sich daher ebenso wie die Kräfte auf das äquivalente Stromsystem durch das System der Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$ ersetzen.

Es wurde hier angenommen, daß das Feld von einem Medium konstanter Permeabilität und Dielektrizitätskonstante erfüllt ist. In inhomogenen Körpern sind die Maxwellschen Spannungen durch Zusatzglieder zu korrigieren, welche von dem Gradienten von ε und μ abhängen. Aber auch an sich homogene, komprimierbare Körper, z. B. Gase, erfahren im Felde Dichte-änderungen; die in solchen Körpern anzunehmenden Spannungen werden nicht vollständig durch die angenommenen Werte von $\mathfrak{T}^e$ und $\mathfrak{T}^m$ wiedergegeben. Doch würde ein Eingehen auf die strengere, die elastischen Eigenschaften der Körper berücksichtigende Theorie der elektrischen und magnetischen Drucke hier zu weit führen.

§ 98. Das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung.

Wir haben bisher die Betrachtung der ponderomotorischen Kräfte auf ruhende Körper beschränkt, die sich in einem zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Felde befinden. Hier läßt sich die Kraft und die Drehkraft durch Überlagerung der elektrischen und magnetischen Flächenkräfte berechnen, woraus dann allgemein folgt, daß die Kräfte und Drehkräfte, welche zwei Körper durch die Trennungsfläche hindurch aufeinander ausüben, dem dritten Axiome Newtons Genüge leisten. Was findet nun aber statt, wenn die Körper sich bewegen und wenn das elektromagnetische Feld sich verändert? Auf langsame Veränderungen des Feldes (quasistationäre Ströme) und langsame Bewegung der Körper haben wir in dem ersten Paragraphen dieses Kapitels die für ruhende Körper und konstantes Feld gültigen Gesetze der ponderomotorischen Kräfte ohne weiteres übertragen. Diese Kräfte werden sich daher ohne merklichen Fehler aus den Maxwellschen Spannungen ableiten lassen und daher dem Prinzip von actio und reactio Genüge leisten. Für die langsamen Bewegungen der Körper in langsam veränderlichen Feldern gelten demnach allgemein die Schwerpunkts- und die Flächensätze.

Die Maxwell-Hertzsche Theorie geht noch weiter; sie nimmt an, daß die Maxwellschen Spannungen noch in beliebig rasch veränderlichen elektromagnetischen Feldern die ponderomotorischen Wirkungen übertragen. Damit dies allgemein stattfindet, muß die linke Seite von (248b) den allgemeinen Ausdruck der ponderomotorischen Kraft des elektrischen Feldes, die linke Seite von (249b) den allgemeinen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes bilden. Es wirkt hiernach im magnetischen Felde auf die Volumeinheit eines ruhenden Körpers die Kraft

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{c}\mathfrak{B}], \tag{250}$$

wo

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

sich aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt. Es tritt mithin die neue Kraft auf:

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \mathfrak{B}\right], \tag{250a}$$

die im magnetischen Felde auf einen Verschiebungsstrom wirken soll. Die Maxwell-Hertzsche Theorie nimmt in der Tat an, daß auf den Verschiebungsstrom, welcher den Leitungsstrom zu einer quellenfreien Strömung ergänzt, derartige elektrodynamische Kräfte im magnetischen Felde wirken; dieselben würden natürlich nur in rasch veränderlichen Feldern in Betracht kommen. Auf Grund dieser Annahme ersetzt (249b) allgemein die ponderomotorischen Kräfte des magnetischen Feldes durch die Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$. Damit anderseits die Kräfte des elektrischen Feldes sich allgemein aus den Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ ableiten lassen, muß gemäß (248b) angenommen werden, daß eine entsprechende „magnetodynamische Kraft" im elektrischen Felde auf den „magnetischen Strom" wirkt, nämlich pro Volumeinheit die Kraft:

$$\frac{1}{c}\left[\mathfrak{D}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right]. \tag{250b}$$

Auch diese von der Maxwell-Hertzschen Theorie angenommene Kraft kann nur bei sehr raschen Veränderungen des Feldes merklich werden.

Die Kräfte (250a, b) zusammen ergeben für die Volumeinheit eines ungeladenen Isolators die Kraft

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{250c}$$

Die Maxwellschen Spannungen üben auf die Volumeinheit des ungeladenen ruhenden Isolators eine resultierende ponderomotorische Kraft aus, sobald der Strahlvektor an der betreffenden Stelle des Feldes sich zeitlich ändert. Obwohl der Betrag dieser Kraft außerordentlich gering ist, so ist diese Folgerung der Maxwell-Hertzschen Theorie doch von prinzipieller Bedeutung. Diese „ponderomotorische Kraft“ würde nämlich auch auf die Volumelemente des leeren Raumes wirken, in dem doch ponderable Materie, welche durch sie bewegt werden könnte, sich nicht befindet. Man wird hier dazu geführt, dem Äther selbst eine Trägheit zuzuschreiben und die Bewegungen zu untersuchen, welche er unter der Einwirkung der Kraft (250c) ausführt. Diese Spekulationen über Ätherbewegung haben indessen nicht irgendwelche Resultate von physikalischem Interesse gezeitigt.

Die von den Maxwellschen Spannungen übertragenen Kräfte erfüllen zwar formell das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung; wenn aber, wie wir gesehen haben, bei Strahlungsvorgängen eine Kraft auf den Äther zur Aufrechterhaltung dieses Gesetzes eingeführt werden muß, so heißt das: Für die Materie allein gilt das Gesetz von actio und reactio nicht. Die gesamte Bewegungsgröße der ponderablen Materie in einem abgeschlossenen Systeme ist nicht konstant. Man hat vielmehr, wenn man die Sache vom Standpunkte der Maxwell-Hertzschen Theorie aus betrachtet, eine Rückwirkung des Äthers auf die Materie in Betracht zu ziehen, deren Resultierende nach (250c) ist

$$-\int \frac{dv}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{250d}$$

Wenn bei einem Strahlungsvorgange diese Resultierende nicht gleich Null ist, so wird die Bewegungsgröße der wägbaren Materie im Verlaufe des Strahlungsvorganges sich ändern. Man muß somit dem Äther eine träge Masse zuschreiben, wenn man den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße nicht aufgeben will.

Daß das dritte Axiom Newtons bei der Übertragung auf die elektromagnetischen Vorgänge seinen Sinn wesentlich ändert, ist schon durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkungen bedingt. Fassen wir beispielsweise den Fall ins Auge, daß eine elektromagnetische Welle von einem Hertzschen Hohlspiegeloszillator ausgesandt wird; da der Wert des Ausdruckes (250d) hier von Null verschieden ist, so wird die Welle dem Oszillator einen, wenn auch geringen, Rückstoß erteilen; diese Wirkung bleibt zunächst ohne Kompensation. Und auch wenn die Welle später von anderen Körpern absorbiert ist und das Zeitintegral von (250d) dann gleich Null geworden ist, so ist doch eine gewisse Zeit zwischen der Wirkung und der Gegenwirkung verstrichen; während dieser Zeit ist der Impuls der wägbaren Körper durch den Strahlungsvorgang geändert worden.

Die von H. A. Lorentz entwickelte Theorie der Elektrodynamik nimmt, im Gegensatz zur Hertzschen, Kräfte, die auf den Äther wirken, überhaupt nicht an. Sie läßt die elektromagnetischen Kräfte nur auf die elektrisch geladene Materie wirken. Die Maxwellschen Spannungen werden hier nicht als allgemeingültige Darstellung der elektromagnetischen Kräfte betrachtet, so daß die Kräfte (250a, b) in Fortfall kommen. Nur in solchen Fällen, wo der Ausdruck (250d) verschwindet, sieht auch die Lorentzsche Theorie das Maxwellsche Spannungssystem als Äquivalent der ponderomotorischen Kräfte des Feldes an. Mit den Maxwellschen Spannungen gibt diese Theorie, auf welche wir übrigens im zweiten Bande dieses Werkes ausführlich zurückkommen, natürlich auch das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung auf.

§ 99. Die erste Hauptgleichung für bewegte Körper.

Wie wir in § 94 die zweite Hauptgleichung (178) auf bewegte Körper übertrugen, so wollen wir jetzt die erste Hauptgleichung (177) auf bewegte Körper ausdehnen, wobei wir uns zunächst an die Hertzsche Elektrodynamik bewegter

Körper anschließen. Wir gehen mit Hertz von der Grundannahme aus, daß auch in einem bewegten Systeme das Linienintegral der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ längs einer mit der Materie bewegten Kurve dem wahren Strome proportional ist, welcher eine von der Kurve umrandete, mit der Materie bewegte Fläche durchfließt:

$$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathfrak{c}_n\, df. \tag{251}$$

Der wahre Strom $\mathfrak{c}$ setzt sich in einem ruhenden Körper aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen. Dasselbe soll auch für den Strom durch eine bewegte Fläche gelten. Der wahre Strom durch die bewegte Fläche wird gleichzusetzen sein der Summe aus dem Leitungsstrome und der zeitlichen Änderung der elektrischen Verschiebung durch die bewegte Fläche:

$$\int \mathfrak{c}_n\, df = \int \mathfrak{i}_n\, df + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D}_n\, df. \tag{251a}$$

Die zeitliche Änderung des Flächenintegrales von $\mathfrak{D}_n$ berechnet sich nun, ganz wie in § 94 die zeitliche Änderung des Flächenintegrales von $\mathfrak{B}_n$, für die bewegte Fläche nach der Regel (122); es gilt

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{D}_n\, df = \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} \right\}_n. \tag{251b}$$

Formen wir die linke Seite von (251) mit Hilfe des Stokesschen Satzes um und die rechte Seite auf Grund der beiden letzten Gleichungen (251 a, b), so folgt:

$$\int df \operatorname{curl}_n \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \int \mathfrak{i}_n\, df + \frac{4\pi}{c} \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} \right\}_n$$

und durch Übergang zu Flächenelementen:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D}\mathfrak{v}] \right\}. \tag{252}$$

Dies ist, nach der Theorie von H. Hertz, die erste Hauptgleichung für einen bewegten Körper.

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind die Dichten des Leitungsstromes und des Verschiebungsstromes durch ein ruhend gedachtes Flächenelement des Körpers. Für ein ruhendes Körpersystem bestimmen diese beiden Anteile des wahren Stromes allein den Wirbel des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$. Findet aber eine Bewegung der Körper statt, so treten noch zwei weitere Glieder hinzu. Das Glied $\varrho\mathfrak{v}$ stellt dabei die Dichte des Konvektionsstromes dar; wir bemerkten bereits in § 55, daß der Konvektionsstrom der bewegten Elektrizität den Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zu einer quellenfreien Strömung ergänzt; wir finden jetzt diese Bemerkung bestätigt, denn bei Bildung der Divergenz von (252) verschwindet die linke Seite und ebenso das letzte Glied der rechten Seite; die drei ersten Glieder der rechten Seite ergeben also in der Tat zusammen ein wirbelfreies Feld.

Der Konvektionsstrom soll nun, der erweiterten ersten Hauptgleichung zufolge, dasselbe magnetische Feld erregen wie der äquivalente Leitungsstrom. Diese Forderung der Theorie ist von H. A. Rowland experimentell geprüft und bestätigt worden; mehrere Beobachter haben die Versuche Rowlands wiederholt und verfeinert. Besonders bemerkenswert sind die Untersuchungen von A. Eichenwald (Ann. d. Phys. Bd. 11, S. 1, 1903). Bei diesen wird die eine Belegung eines geladenen Kondensators, bestehend aus einer mit einer ringförmigen Stanniolbelegung versehenen Mikanitscheibe, in Rotation versetzt. Hier hat man es mit einem reinen Konvektionsstrome zu tun, Leitungsstrom und Verschiebungsstrom sind bei symmetrischer Anordnung ausgeschlossen. Die Angaben des Magnetometers waren, innerhalb der Fehlergrenze der Versuche (5 Proz. zirka), die gleichen, als wenn die Scheibe ruhte und durch die Stanniolbelegung dieselbe Elektrizitätsmenge durch einen Leitungsstrom hindurchgeführt wurde. Dadurch ist erstens gezeigt, daß bei der Rotation des geladenen Stanniolrings die Elektrizität konvektiv mitgeführt wird, und zweitens, daß dabei ein magnetisches Feld erzeugt wird, welches quantitativ der ersten Hauptgleichung (252) entspricht.

Außer dem Konvektionsstrome zeigt (252) nun noch einen zweiten, durch Bewegung im elektrischen Felde entstehenden Strom an, der ebenfalls ein magnetisches Feld erregt. Durch Bewegung eines Dielektrikums im elektrischen Felde soll ein magnetisches Feld hervorgerufen werden, entsprechend wie durch Bewegung eines Körpers im magnetischen Felde ein elektrisches Feld hervorgerufen wird (vgl. § 94). Die Wirbel dieses Feldes fallen — bei Ausschluß der drei anderen Stromanteile — mit dem des Vektors $\frac{4\pi}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$ zusammen.

Daß Bewegung eines Dielektrikums im elektrischen Felde in der Tat magnetische Kräfte erzeugt, ist von W. C. *Röntgen* gezeigt worden. Er ließ Glas- oder Ebonitscheiben zwischen zwei ruhenden, geladenen Metallscheiben rotieren und beobachtete eine Ablenkung der Magnetnadel. Jene vierte Stromart, deren Dichte nach der Hertzschen Theorie gleich

$$\mathrm{curl}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{v}] \tag{252a}$$

ist, wird demgemäß bisweilen als „*Röntgenstrom*" bezeichnet. *Der Röntgenstrom ist stets quellenfrei verteilt.* Wir wollen seine Verteilung für die von Röntgen verwandte Anordnung berechnen. Bei dieser ist außerhalb des Dielektrikums $\mathfrak{v}$ gleich Null, innerhalb sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{v}$ konstant; daher ist weder innerhalb noch außerhalb des Dielektrikums ein räumlich verteilter Röntgenstrom vorhanden, sondern nur an den Begrenzungsebenen der dielektrischen Scheibe (gegen Luft) ein Flächenstrom. Die Dichte dieses Flächenstromes ist allgemein gleich dem Flächenwirbel des Vektors $[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$, der nach (104) durch

$$\left[\mathfrak{n},\, [\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_1 - [\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_2\right] \tag{252b}$$

gegeben wird.

Die von (2) nach (1) gehende Normale $\mathfrak{n}$ mag, an der der positiv geladenen Metallscheibe gegenüberliegenden Seite der Platte, mit der Richtung von $\mathfrak{D}$ übereinstimmen, so daß hier der Index (2) die Luft, (1) das Dielektrikum kennzeichnet. Da $\mathfrak{v}$ senkrecht auf $\mathfrak{n}$ steht, so ergibt die Regel (32):

$$\left[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_1\right] = \mathfrak{D}(\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1) - \mathfrak{v}_1(\mathfrak{n}\mathfrak{D}) = -\,\mathfrak{v}_1\,|\,\mathfrak{D}\,|.$$

Der auf den Luftraum (oder leeren Raum) bezügliche, durch den Index (2) gekennzeichnete Term fällt heraus, da hier $\mathfrak{v} = 0$ ist. Der Betrag von $|\,\mathfrak{D}\,|$ aber, der gleich der zur Trennungsfläche normalen Komponente von $\mathfrak{D}$ ist, durchsetzt stetig die Trennungsfläche; er ist gleich der Flächendichte ω der auf der gegenüberliegenden Metallscheibe verteilten Ladung. Der Röntgenstrom würde also nach der Hertzschen Theorie einem Konvektionsstrom äquivalent sein, bei dem die Ladung $(-\,\omega)$ von den Oberflächenelementen der dielektrischen Scheibe bei ihrer Rotation mitgeführt wird. Lassen wir die geladenen Metallscheiben zusammen mit einer festen, den Raum zwischen den Platten ausfüllenden Scheibe rotieren, so wäre zu erwarten, daß Konvektionsstrom und Röntgenstrom sich aufheben und kein magnetisches Feld erregen.

Diese Konsequenzen der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper sind durch die quantitativen Untersuchungen, die A. Eichenwald (Ann. d. Phys. 11, S. 421, 1903) über den Röntgenstrom angestellt hat, nicht bestätigt worden. Er fand, daß die Metallplatten und das Dielektrikum, zusammen rotierend, ein magnetisches Feld erregen, welches von dem Material des Dielektrikums unabhängig ist und nur von der Potentialdifferenz der Belegungen abhängt. Wir können dieses Resultat deuten, wenn wir annehmen, daß bei diesem Versuche die Summe aus Konvektionsstrom und Röntgenstrom der Dichte der freien Elektrizität auf der Metallplatte

$$\omega' = \frac{1}{4\pi}\,|\,\mathfrak{E}\,|$$

proportional ist, daß sich mithin das magnetische Feld so berechnet, als ob es nicht von der wahren, sondern von der freien, konvektiv mitgeführten Ladung erregt würde. Die Flächendichte des Röntgenstromes würde dann an der Fläche, in der Metall und Dielektrikum aneinander grenzen, gleich

$$-\,(\omega - \omega')\,\mathfrak{v} = -\left(|\,\mathfrak{D}\,| - \frac{1}{4\pi}\,|\,\mathfrak{E}\,|\right)\mathfrak{v}$$

zu setzen sein, statt gleich

$$-|\mathfrak{D}|\mathfrak{v},$$

wie es die Hertzsche Theorie verlangt.

Die Lorentzsche Elektronentheorie gibt hiervon Rechenschaft. Diese Theorie zerlegt die elektrische Verschiebung bzw. den Verschiebungsstrom in zwei Teile:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} + \mathfrak{P} \quad \text{(vgl. § 55).}$$

Der erste Teil ist durch das Feld im Raume bestimmt, und nur der zweite Teil $\mathfrak{P}$ haftet an der Materie. In dieser Theorie nimmt die erste Hauptgleichung eine etwas andere Form an, wie wir im zweiten Bande dieses Werkes ausführlicher darlegen werden.

Der Röntgenstrom wird hier nicht durch die gesamte elektrische Verschiebung, sondern durch den an dem bewegten Dielektrikum haftenden Teil der elektrischen Verschiebung bedingt. Seine Dichte wird gleich

$$\text{(252c)} \qquad \operatorname{curl}\,[\mathfrak{P}\mathfrak{v}].$$

Die bei dem Versuche Röntgens im Luftraume in einem senkrechten elektrischen Felde rotierende dielektrische Platte führt demnach an ihren Begrenzungsebenen einen Röntgenstrom mit, dessen Flächendichte durch

$$-\mathfrak{v}\,|\mathfrak{P}|_1$$

bestimmt wird, wo der Index (1) sich auf das Dielektrikum bezieht. Da $|\mathfrak{D}|$ stetig die Trennungsfläche gegen die Luft durchsetzt, so ist

$$|\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{D}_1| - \frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}_1| = |\mathfrak{D}_2| - \frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}_1| = \frac{1}{4\pi}\left\{|\mathfrak{E}_2| - |\mathfrak{E}_1|\right\},$$

es wird also der Röntgenstrom, den die Oberfläche der Platte mit sich führt, gleich

$$+\mathfrak{v}\,\frac{1}{4\pi}\left\{|\mathfrak{E}_1| - |\mathfrak{E}_2|\right\} = \mathfrak{v}\,\omega',$$

wo ω' die Flächendichte der freien Elektrizität ist. Nach der Lorentzschen Elektronentheorie ist der Röntgenstrom an der Oberfläche einer im Luftraume in einem senkrechten elektrischen Felde rotierenden Platte der mitgeführten freien Ladung äquivalent. Auch dieses hat A. Eichenwald quantitativ bestätigt, indem er die entgegengesetzten Flächenströme an den beiden Begrenzungsebenen der rotierenden Platte durch Leitungsströme derselben Verteilung in den Stanniolbelegungen einer ruhenden Mikanitscheibe ersetzte. Er teilte die Belegungen durch feine Risse in einzelne Ringe, derart, daß die Ringe, hintereinander geschaltet, von dem Leitungsstrome

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{v}\omega'$$

durchflossen wurden, und fand die magnetische Wirkung identisch mit derjenigen der im elektrischen Felde rotierenden Platte.

Die Erregung eines magnetischen Feldes durch Rotation eines dielektrisch polarisierten Körpers entspricht der Erregung eines elektrischen Feldes durch Rotation eines magnetisierten Körpers, die wir in § 95 behandelt und als unipolare Induktion bezeichnet haben; die Analogie wäre vollkommen, wenn kein permanenter Magnet, sondern ein im magnetischen Felde rotierender, magnetisch weicher Körper es wäre, der das elektrische Feld erregt. In der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper geschieht, wie wir sahen, die auf den erweiterten Hauptgleichungen fußende Ableitung beider Erscheinungen ganz parallel gehend; der Wirbel $-\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$ ist mit dem Wirbel des durch Bewegung im magnetischen Felde erregten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$, der Wirbel von $\frac{4\pi}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$ mit dem Wirbel des durch Bewegung im elektrischen Felde erregten magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ identisch. Dies entspricht der Hertz-Heavisideschen Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $4\pi\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ anderseits. In der Lorentzschen Theorie läßt sich diese Analogie nicht vollkommen durchführen. Denn es wird dort bei Erregung des magnetischen Feldes durch Bewegung im elektrischen Felde $\mathfrak{P}$ an Stelle von $\mathfrak{D}$ gesetzt, d. h. die erste Hauptgleichung erhält eine andere Formulierung als in der Hertzschen Theorie. Die zweite Hauptgleichung allerdings, die ja nichts anderes war als das erweiterte Faradaysche Induktionsgesetz, bleibt auch in der Lorentzschen Elektrodynamik bewegter Körper unverändert bestehen; es tritt hier nicht etwa der Vektor $\mathfrak{M}$ an Stelle von $\mathfrak{B}$. Worauf diese Abweichung beruht, das kann an dieser Stelle nicht erschöpfend dargelegt werden; wir werden im zweiten Bande ausführlicher auf diesen Punkt zurückkommen. Wir wollen uns hier damit begnügen, zu bemerken, daß die zweite Hauptgleichung auch in der Elektronentheorie sich ergibt, und zwar durch Mittelwertsbildung über die Felder der in der Materie sich bewegenden Elektronen. Die Entwickelungen der §§ 92—95 dieses Abschnittes, die ja von der Erfahrung durchweg bestätigt werden, bleiben auch in der Elektronentheorie gültig.

§ 100. Relative und absolute Bewegung.

Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper spricht nur von der gesamten elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in dem bewegten Körper; sie unterläßt es, die elektrische Verschiebung in zwei Teile zu sondern, die bzw. durch den Äther und durch die Materie bestimmt sind. Man kann die Grundvorstellung der Hertzschen Theorie auch so ausdrücken: Es wird angenommen, daß der Äther sich mit der Materie mitbewegt. Diese Vorstellung bringt Schwierigkeiten mit sich, wenn man es mit stark verdünnten Gasen zu tun hat; auch hier muß angenommen werden, daß, wie verdünnt auch das Gas sein mag, es doch bei seiner den Gesetzen der Mechanik gemäß erfolgenden Bewegung den Äther mitführt; das kommt schließlich auf dasselbe heraus, als ob man dem Äther selbst ähnliche Eigenschaften zuschreibt wie materiellen

Körpern und im luftleeren Raume von Bewegungen eines mit träger Masse behafteten Äthers redet. Wir erwähnten bereits in § 98, daß die Hertzsche Theorie in der Tat derartige Spekulationen nahelegt, indem sie aus den Maxwellschen Spannungen resultierende Kräfte im Innern des luftleeren Raumes ergibt. Dabei kann dann der mechanische Satz von der Konstanz der Bewegungsgröße eines abgeschlossenen Systemes aufrecht erhalten werden, indem die bewegten Äthermassen einen — bei den elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne meist sehr kleinen — Teil der Bewegungsgröße aufnehmen. Gleichzeitig wird der Hertzschen Theorie das mechanische Relativitätsprinzip zugrunde gelegt; es werden die elektromagnetischen Wechselwirkungen der Körper nur von ihrer relativen Bewegung abhängig gemacht. Diese Auffassung kann sich darauf berufen, daß für die elektromagnetischen Wechselwirkungen von Körpern, die sich mit der Erde bewegen, der Satz der Relativbewegung tatsächlich gilt, wie schon aus dem Umstande zu ersehen ist, daß diese Wechselwirkungen bisher keinen Anhaltspunkt für die Bestimmung der absoluten Bewegung der Erde ergeben haben. Die Hertzsche Theorie ordnet die Elektrodynamik im wesentlichen in den Gedankenkreis der alten Mechanik ein, nur daß sie an Stelle der dort zugelassenen Fernwirkungen stets Nahewirkungen im Äther setzt; die Axiome der Newtonschen Mechanik, insbesondere das Prinzip der Geichheit von Wirkung und Gegenwirkung, und das Relativitätsprinzip, werden auch bei Mitwirkung elektromagnetischer Kräfte als gültig angesehen.

Bei genauerer Betrachtung stellt es sich allerdings heraus, daß die Axiome der Mechanik bei ihrer Ausdehnung auf die elektromagnetischen Vorgänge einigermaßen ihren Sinn ändern. Hinsichtlich des Prinzips von actio und reactio und der aus ihm folgenden Impuls-Sätze wurde dies bereits oben, im § 98, dargelegt. Ähnlich liegt die Sache bei dem Prinzip der Relativität. Für quasistationäre Strömung und langsame Bewegung, wo Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie in ihren schließlichen Konsequenzen ja übereinstimmen, bleibt, wie das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung, so auch das Relativitätsprinzip gültig. Die wechselseitigen Kräfte der ponderablen Körper für sich halten einander das Gleichgewicht, und nur von der relativen Bewegung der Körper hängen die elektromagnetischen Vorgänge ab. Für schnelle Bewegungen und rasch veränderliche Felder hingegen, wo die Hertzsche Theorie dazu führt, im luftleeren Raume von Kräften im Äther und von Bewegungen des Äthers zu reden, werden die elektromagnetischen Vorgänge nach dieser Theorie von der relativen Bewegung der Materie und des im luftleeren Raume befindlichen Äthers abhängen müssen. Der weiter abliegende und von den betrachteten Feldern noch nicht erreichte Äther wird als ruhend anzunehmen sein. Von der Relativbewegung gegen diesen ruhenden Äther, und nicht allein von der Relativbewegung der materiellen Körper gegeneinander, werden die elektromagnetischen Vorgänge in einem bewegten Systeme abhängen. Diese Auffassung ist kaum mehr entfernt von der Behauptung, daß es absolute Bewegungen gibt und daß die elektromagnetischen Kräfte von der absoluten Bewegung der Körper bzw. der Elektrizität abhängen.

Auch vom Standpunkte der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper ausgehend, werden wir also dazu geführt, das Axiom der Relativität wesentlich zu erweitern und von einer absoluten Bewegung der Körper zu reden. Eine jede elektromagnetische Theorie, welches auch sonst ihre Grundhypothesen sein mögen, kann nicht umhin, dies zu tun. Denn schon die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper ergeben, daß im leeren Raume sich die ebenen elektromagnetischen Wellen nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen; sie postulieren die Existenz eines Bezugssystemes, in welchem diese Isotropie der Lichtfortpflanzung wirklich statthat. Dieses Bezugsystem bzw. Körper, die eine in ihm feste Lage haben, werden als ruhend, auf dieses System bezogene Bewegungen werden als

„absolute Bewegungen“ bezeichnet werden dürfen. Es ist jedoch bisher nicht gelungen, dieses ruhende Bezugssystem festzulegen. Die Aberration des Fixsternlichtes infolge der Erdbewegung zeigt, daß das Bezugssystem die Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne jedenfalls nicht mitmacht; ob es sich an der Bewegung des Sonnensystemes beteiligt, oder besser gesagt, welches die absolute Bewegung des Sonnensystemes ist, darüber ist nichts bekannt. Man kann daher das ruhende Bezugssystem, welches die elektromagnetischen Gleichungen zugrunde legen, zunächst identifizieren mit dem Bezugssystem der Mechanik, welches durch die Kopernikanischen Vorstellungen über die Bewegungen im Sonnensysteme definiert ist. Wie aus der Theorie des Foucaultschen Pendelversuches bekannt ist, muß die Mechanik annehmen, daß die Newtonschen Axiome in bezug auf dieses System, nicht aber in bezug auf ein mit der Erde rotierendes System, strenge Gültigkeit besitzen. Bezüglich der Translationsbewegung bedarf die gewöhnliche Mechanik einer ähnlichen Annahme nicht; denn die Hinzufügung einer gemeinsamen Translation von konstanter Größe und Richtung ändert nach ihren Lehren die relativen Bewegungen der Körper des Systemes nicht. Die Theorie des elektromagnetischen Feldes verfährt konsequenter; sie spricht von absoluter Rotation sowohl wie von absoluter Translation in dem soeben angedeuteten Sinne. Sind allerdings die Bewegungen der Körper und die hinzugefügte gemeinsame Translation langsam, d. h. sind ihre Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so wird die Hinzufügung der gleichförmigen Translation auch bei Mitwirkung elektromagnetischer Kräfte die relativen Bewegungen der Körper nicht merklich ändern. Das Relativitätsprinzip, im Sinne der gewöhnlichen Mechanik verstanden, bleibt hiernach wenigstens in dem Geschwindigkeitsbereiche, dem die beobachtbaren Bewegungen der ponderablen Körper angehören, näherungsweise gültig.

Versucht man die Maxwellsche Theorie konsequent auf den von ponderabler Materie leeren Raum anzuwenden, so wird man dazu geführt, die mechanischen Prinzipe von der Wirkung und Gegenwirkung und von der Relativität in einer Weise zu erweitern, welche der Aufhebung dieser Prinzipe gleichkommt. Diese Sätze, im ursprünglichen Sinne der alten Mechanik verstanden, sind eben mit den Tatsachen nicht zu vereinbaren. Es mag daher zweckmäßiger erscheinen, sich durch die Rücksicht auf die alte Mechanik überhaupt nicht mehr beeinflussen zu lassen, sondern die Axiome der Elektrodynamik so zu formulieren, wie es für die systematische Darstellung der elektrischen und optischen Erscheinungen am geeignetsten erscheint.

Die Lorentzsche Theorie geht in dieser Weise vor. Indem sie eine hypothetische Bewegung des Äthers und hypothetische Kräfte im Innern des Äthers überhaupt nicht einführt, bricht sie von vornherein mit dem Axiome von Wirkung und Gegenwirkung. Der Äther soll überall ruhen, auch im Innern der bewegten Materie; er bestimmt das universelle Bezugssystem, auf welches die „absoluten" Bewegungen der Elektronen und der ponderablen Körper zu beziehen sind. Wir haben den Übergang zu den Lorentzschen Vorstellungen vorbereitet, indem wir bereits in der Theorie der elektrischen und magnetischen Felder in ruhenden Systemen das Wort „Äther" nur als Abkürzung für den Inbegriff der elektromagnetischen und optischen Vorgänge in dem von ponderablen Körpern leeren Raume einführten. Diese Auffassung, welche dem Raume als solchem physikalische Eigenschaften beilegt, deckt sich nicht mit dem bei geometrischen Betrachtungen herkömmlicherweise angewandten Raumbegriff. Jener geometrische Raumbegriff ist indessen, wie bereits erwähnt wurde, nur als eine Abstraktion aus der Erfahrung anzusehen. Mit jenem geometrischen Raumbegriffe hat man bekanntlich Verallgemeinerungen vorgenommen, indem man mehrdimensionale und nichteuklidische Geometrien entwickelte. Ob die physikalische Raumvorstellung, welche die elektromagnetischen Eigenschaften des Raumes berücksichtigt, ähnlicher Verallgemeinerungen fähig ist, muß als fraglich bezeichnet werden. Solange diese Frage unaufgeklärt ist, wird man gut tun, bei physikalischen Untersuchungen von nichteuklidischen Räumen abzusehen.

Daß der Äther sich nicht mit der bewegten Materie mitbewegt, d. h. daß die elektromagnetischen Vorgänge in einem translatorisch bewegten Körper nicht dieselben sind, als wenn der Körper ruhte, wird durch einen bekannten Versuch von Fizeau bewiesen. Die Geschwindigkeit der Lichtwellen in einer strömenden Flüssigkeit findet sich nicht gleich der Geschwindigkeit des Lichtes in der ruhenden Flüssigkeit, vermehrt um die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung, sondern kleiner. Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper gibt von dieser Tatsache keine Rechenschaft; ihr zufolge müßte die Relativgeschwindigkeit des Lichtes gegen die strömende Materie von der Geschwindigkeit der Strömung unabhängig sein; der Fizeausche Versuch widerlegt direkt experimentell die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper in ihrer Anwendung auf die Lichtwellen. Wir werden im zweiten Teile dieses Werkes zeigen, daß die Lorentzsche Theorie diesen Versuch ungezwungen erklärt.

Daß die Annahme eines überall mit der Materie bewegten Äthers sich nicht allgemein durchführen läßt, war Hertz wohlbekannt. Er beanspruchte mit seinen Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper nur die elektromagnetischen Erscheinungen in engerem Sinne zu umfassen. Wir haben gesehen, daß dieselben in der Tat bei den Induktionserscheinungen in bewegten Leitern sich bewähren, daß sie sich aber nicht quantitativ mit den Untersuchungen Eichenwalds über den Röntgenstrom vereinbaren lassen (vgl. § 99). Die Hertzschen Grundgleichungen umfassen mithin keineswegs alle heute bekannten elektromagnetischen Vorgänge in engerem Sinne.

Wir werden daher im zweiten Bande dieses Werkes bei der Behandlung der elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern die Anschauungen der Elektronentheorie zugrunde legen. Die Erörterungen dieses Paragraphen zeigen, welche Bedeutung diese aussichtsvollste Weiterbildung der Maxwellschen Theorie bzw. die Tatsachen, auf welche sie sich stützt, über das Gebiet der Elektrizitätslehre hinaus besitzen. Die Umwandlung der Grundbegriffe der Geometrie und Mechanik, welche die Elektronentheorie anstrebt, ist von der größten Tragweite für die gesamte Naturwissenschaft.