

## **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

### **Theorie der Elektrizität**

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität - mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik

**Föppl, A.**

**1907**

Dritter Abschnitt. Das elektromagnetische Feld

Dritter Abschnitt.  
Das elektromagnetische Feld.

Erstes Kapitel.

Die magnetischen Vektoren.

§ 60. Die Analogie der elektrischen und der  
magnetischen Größen.

Schon die Vertreter der Fernwirkungstheorie bemerkten, daß die Elektrostatik und die Magnetostatik vielfach Analogien aufweisen und bisweilen eine durchaus übereinstimmende mathematische Behandlung gestatten. O. Heaviside, H. Hertz und E. Cohn haben sich bei ihrer Darstellung der Maxwell'schen Theorie gleichfalls von der Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen leiten lassen, sie haben den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes eine Form gegeben, welche diese an das Dualitätsgesetz der Geometrie erinnernde Beziehung deutlich hervortreten läßt. Dabei wird der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  die „magnetische Feldstärke“  $\mathfrak{H}$  gegenübergestellt, während die „magnetische Induktion“  $\mathfrak{B}$  der mit  $4\pi$  multiplizierten elektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  gegenübergestellt wird. Demgemäß entspricht der räumlichen Dichte der wahren Elektrizität

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$$

die Dichte

$$\rho_m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{B}$$

des „wahren Magnetismus“; der räumlichen Dichte der freien Elektrizität

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

entspricht die Dichte

$$\varrho'_m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}$$

des „freien Magnetismus“. Der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  entspricht die „magnetische Permeabilität“  $\mu$ , welche, durch die Gleichung  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$  definiert, das magnetische Verhalten des betreffenden isotropen Körpers kennzeichnet. Diese Analogie führt auch zu einem Ausdrucke für die Energie des magnetischen Feldes. Die im Volumelemente  $dv$  des elektrischen Feldes enthaltene Energie war

$$dU = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) dv.$$

Diesem Ausdrucke der elektrischen Energie würde der Ausdruck

$$dT = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) dv$$

für die im Volumelemente  $dv$  enthaltene magnetische Energie entsprechen. Die Integration über den unendlichen Raum ergibt

$$(162) \quad T = \int dv \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H} \mathfrak{B})$$

als Energie des magnetischen Feldes.

So nützlich es nun bisweilen ist, die soeben skizzierte Analogie zu verfolgen, so darf doch nicht verschwiegen werden, daß manche wesentliche Unterschiede zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen bestehen. Zunächst lehrt die Erfahrung, daß es nicht möglich ist, ein Quantum von positivem oder negativem wahren Magnetismus zu isolieren. In jedem Körper ist der gesamte Magnetismus gleich Null und ebenso in jedem Volumelemente eines Körpers. Wahrer Magnetismus kommt in der Natur überhaupt nicht vor. Das Feld des Vektors  $\mathfrak{B}$  ist demnach stets ein quellenfreies Feld, der magnetische Induktionsfluß durch eine jede geschlossene Fläche ist stets gleich Null.

Mit dem Fehlen des magnetischen Gegenstückes der wahren Elektrizität ist das Fehlen magnetischer Leiter eng verknüpft. Es wären dies, gemäß der elektrischen Analogie, solche Körper, in denen das Bestehen eines magnetischen Feldes von dauernder Wärmeentwicklung begleitet ist. Solche magnetischen Leiter gibt es in der Natur nicht. Es entfällt daher auch der Begriff der magnetischen Leitungsfähigkeit.

Die magnetische Permeabilität  $\mu$  entspricht insofern ihrem elektrischen Gegenstücke, der Dielektrizitätskonstanten, als sie ebenfalls einem und demselben Grenzwerte zustrebt, wenn man ein mit einem beliebigen Gase gefülltes Gefäß evakuiert. Den Grenzwert bezeichnet man als Permeabilität des leeren Raumes oder des „Äthers“. Die Nahewirkungstheorie sieht auch den leeren Raum als Sitz eines magnetischen Feldes, als Speicher magnetischer Energie an. Es liegt nahe, den leeren Raum gewissermaßen als Normalsubstanz zu wählen und den Zahlwert seiner Permeabilität gleich 1 zu setzen, ebenso wie wir die Dielektrizitätskonstante des Äthers gleich 1 setzten (§ 42).

Bezieht man die Permeabilitäten der Körper auf diese Einheit, so tritt wiederum eine Lücke der elektrisch-magnetischen Analogie zutage. Neben den paramagnetischen Körpern, deren Permeabilität größer als 1 ist, die mithin den dielektrischen Körpern entsprechen, gibt es andere, deren Permeabilität etwas geringer als 1 ist, die diamagnetischen Körper. Ferner ist das Verhalten der ferromagnetischen Metalle bemerkenswert, deren Permeabilität nicht nur sehr groß ist — bei weichem Schmiedeeisen unter Umständen einige tausendmal so groß, als für das Vakuum —, sondern für ein und dasselbe Material sich in sehr weiten Grenzen zu ändern vermag. Die ferromagnetischen Körper zeigen außerdem bei geeigneter Behandlungsweise die eigentümliche Erscheinung des permanenten Magnetismus, welche der Theorie noch heute bedeutende Schwierigkeiten bietet, obwohl sie zuerst zur Entdeckung der magnetischen Felder geführt hat.

Setzt demnach die unmittelbare Erfahrung der Verfolgung der elektrisch-magnetischen Analogie gewisse Grenzen, so hat

die Weiterbildung der Maxwellschen Theorie im letzten Jahrzehnt Wege eingeschlagen, die dazu geführt haben, die Beziehung der elektrischen und magnetischen Größen von einem anderen Standpunkte aus zu betrachten.

Wie wir sahen, wirkt das elektrische Feld  $\mathcal{E}$  auf einen ruhenden, elektrisch geladenen Probekörper. Die elektrische Verschiebung  $\mathcal{D}$  hat ihre Quelle in der ruhenden Elektrizität. Der elektrische Strom hingegen erregt ein magnetisches Feld  $\mathcal{H}$ , und die Erregung eines solchen ist mit Induktionswirkungen in elektrischen Stromkreisen verknüpft, Wirkungen, für die der Vektor  $\mathcal{B}$  der magnetischen Induktion maßgebend ist. Auf diese wohlverstandenen Beziehungen zu den elektrischen Strömen wollen wir die Theorie der magnetischen Felder gründen. Die noch sehr unvollkommene Theorie des permanenten Magnetismus tritt dabei in den Hintergrund und wird erst im vierten Abschnitte behandelt werden.

Die Voranstellung der magnetischen Felder elektrischer Ströme entspricht einem Gedanken, der von Ampère zuerst ausgesprochen ist und der von der Elektronentheorie jetzt wieder aufgenommen wird, nämlich alle magnetischen Felder als durch Elektrizitätsbewegungen erregt anzusehen. Es scheint zweckmäßig, der Einführung in die Maxwellsche Theorie eine Fassung zu geben, in die sich diese Vorstellungen ungezwungen einfügen lassen.

### § 61. Die magnetische Induktion.

Zur Untersuchung eines magnetischen Feldes bedienen wir uns einer Probespule; wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß dieselbe nur aus einer einzigen Drahtwindung besteht, daß die Leitlinie des Drahtes eine geschlossene ebene Kurve ist und daß die Abmessungen des umschlossenen Flächenstückes  $f$  groß gegen den Radius des Drahtquerschnittes sind. Wir denken uns die Spule an einem Orte befindlich, an dem anfangs kein magnetisches Feld vorhanden war. Nun erregen wir ein solches Feld, etwa durch Heranbringen eines Magneten

oder eines elektrischen Stromes, oder auch durch Schließen eines Stromes in einer benachbarten Leitung. Dann beginnt in der Probespule ein Strom  $J$  zu fließen. Ohne uns nun um den zeitlichen Verlauf dieses Stromes zu kümmern, warten wir, bis  $J=0$  geworden ist; alsdann bestimmen wir, etwa mit Hilfe eines Voltameters, die Elektrizitätsmenge  $e$ , welche im ganzen infolge der Erregung des weiterhin konstant zu haltenden Magnetfeldes die Spule durchflossen hat.

Wir denken uns den Gesamtwiderstand  $R$  der Spule gegeben, ebenso den Flächeninhalt  $f$  des umschlossenen ebenen Flächenstückes. Wir ordnen ferner dem Sinne, in dem die Elektrizität die Spule durchströmt hat, mit Hilfe einer Rechtschraube eine zu  $f$  senkrechte Richtung  $n$  zu.

Die Gleichung

$$(163) \quad -\mathfrak{B}_n = c \cdot \frac{Re}{f},$$

in der  $c$  einen von den Maßeinheiten abhängigen universellen Faktor bedeutet, bestimmt die nach der Richtung  $n$  genommene Komponente eines Vektors  $\mathfrak{B}$ . Diesen Vektor bezeichnen wir als die „magnetische Induktion“ des erregten stationären Magnetfeldes. Diese Beziehung gilt selbstverständlich streng nur für homogene Felder; für inhomogene Felder ergibt die rechte Seite von (163) nur einen über die Fläche  $f$  genommenen Mittelwert von  $\mathfrak{B}_n$ ; wir müssen demnach, um jene Beziehung aufrecht zu erhalten, die Einschränkung hinzufügen: es sind die Abmessungen der Spulenfläche  $f$  so klein zu wählen, daß das magnetische Feld auf ihr als merklich homogen anzusehen ist.

Eine ähnliche Einschränkung bezüglich der Abmessungen des Probekörpers mußten wir in Kauf nehmen, als wir die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{G}$  mit Hilfe einer elektrisch geladenen Probekugel definierten. Eine Einsicht in die Gesetze der ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes, die jener Definition zugrunde lagen, ergab sich erst im Laufe der weiteren Betrachtungen. Ebenso müssen wir hier die genauere Erörterung der Gesetze der induzierten Ströme, auf denen die Gleichung (163) beruht, einem späteren Kapitel vorbehalten.

Wir können die obige Folgerung des Faradayschen Induktionsgesetzes als Definition des Vektors  $\mathfrak{B}$  auffassen. Wir wollen jetzt die Betrachtung auf beliebige geschlossene lineare Leiter ausdehnen. Die Elektrizitätsmenge, welche einen solchen Leiter beim Erregen des Magnetfeldes durchströmt, wird nach dem Induktionsgesetze durch die Gleichung gegeben

$$(164) \quad - \int \mathfrak{B}_n df = cRe.$$

Gemäß der zugrunde gelegten Definition des Vektors  $\mathfrak{B}$  sagt diese Gleichung folgendes aus: Man nehme irgendeine von dem linearen Leiter begrenzte Fläche, zerlege diese in kleine Flächenstücke  $df$ , auf denen das magnetische Feld als merklich homogen zu betrachten ist, denke sich diese Flächenstücke von Probespulen von gegebenem Widerstande begrenzt und summiere nach Festlegung eines bestimmten Umlaufsinnes die Produkte aus dem Widerstande der betreffenden Probespule und der bei Erregung des Feldes hindurchströmenden Elektrizitätsmenge. Die Summe dieser Produkte ist dem Produkte aus Widerstand und hindurchgeflossener Elektrizitätsmenge für den ursprünglichen linearen Leiter gleich.

Nun ist die rechte Seite der Gleichung (164) von der Fläche  $f$  unabhängig. Betrachten wir verschiedene Flächen, die alle von der Leitlinie eines und desselben Drahtes umschlossen sind, so muß das Integral der magnetischen Induktion für alle diese Flächen das gleiche sein. Wir wollen das Feld des Vektors  $\mathfrak{B}$  durch Kurven darstellen, sogenannte „Induktionslinien“; die Tangente dieser Kurven soll an jedem Punkte des Feldes die Richtung von  $\mathfrak{B}$  anzeigen, während die Zahl der durch ein gegebenes Flächenstück hindurchtretenden Kurven dem Induktionsflusse durch das Flächenstück proportional ist. Alsdann muß die Zahl der Induktionslinien, die zwei Flächen derselben Randkurve in einem gegebenen Sinne durchsetzen, stets die gleiche sein. Die Zahl der Induktionslinien, die aus einer geschlossenen Fläche heraustritt, ist also stets gleich Null. Der Induktionsfluß durch eine geschlossene Fläche ist

stets gleich Null. Das Feld des Vektors  $\mathfrak{B}$  ist somit überall quellenfrei; es gilt

$$(165) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Wir haben bereits hier in ungezwungener Weise das Fehlen des wahren Magnetismus in die Theorie eingeführt. Wir gingen dabei von einem unmagnetischen Zustande des betreffenden Körpers aus und dachten uns ein stationäres Magnetfeld erregt. Hat man es mit einem Felde im Innern permanenter Magnete zu tun, so kann die Anwendbarkeit der Betrachtungen auf den ersten Blick fraglich erscheinen, da hier anscheinend kein unmagnetischer Anfangszustand vorliegt. Immerhin ist die Annahme plausibel, daß ein solcher Zustand einmal existiert hat. Denkt man sich im Innern des ferromagnetischen Metalles einen engen Kanal gebohrt, in den die Probspule bzw. der lineare Leiter gebracht wird, und die Elektrizitätsmengen gemessen, die von dem Zeitpunkte des unmagnetischen Zustandes an bis zu dem gegenwärtigen Zeitpunkte der permanenten Magnetisierung hindurchgeströmt sind, so gelangt man auch hier zur Definition des Vektors  $\mathfrak{B}$  und zur Erkenntnis seines quellenfreien Charakters. Auch im Innern permanenter Magnete werden wir daher wahren Magnetismus nicht annehmen.

Wie wir durch Untersuchung des elektrostatischen Feldes mit Hilfe des Probekörpers zunächst das Feld des Vektors  $\mathfrak{C}$  konstruierten, so führt uns die Probspule zunächst auf den Vektor  $\mathfrak{B}$ . Insofern entspricht der Vektor  $\mathfrak{B}$  der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{C}$ . Während aber der Vektor  $\mathfrak{C}$  im elektrostatischen Felde wirbelfrei war, ist  $\mathfrak{B}$  — und zwar allgemein — quellenfrei. Wie  $\mathfrak{C}$  als wirbelfreier Vektor vom elektrostatischen Potentiale, so leitet sich  $\mathfrak{B}$  als quellenfreier Vektor von einem Vektorpotentiale  $\mathfrak{A}$  ab:

$$(165a) \quad \mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Hiernach darf man bei stationären Feldern von einer Analogie zwischen den Vektoren  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{B}$  reden

in demselben Sinne, in dem wir im ersten Abschnitte dieses Bandes von einer Analogie des wirbelfreien und des quellenfreien Vektorfeldes sprachen.

### § 62. Die magnetische Feldstärke.

Wir haben im ersten Abschnitte dieses Buches gezeigt, daß ein den unendlichen Raum quellenfrei erfüllendes Feld durch seine Wirbel bestimmt ist (vgl. § 28). Es liegt daher nahe, nach den Wirbeln des Vektors  $\mathfrak{B}$  zu fragen, ebenso wie im zweiten Abschnitte dieses Buches die Frage nach den Quellen des Feldes  $\mathfrak{G}$  auftrat. Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Divergenz von  $\mathfrak{G}$  und der wahren Elektrizität lag nur für das Feld im leeren Raume vor; waren dielektrische Körper im Felde, so bestimmte sich die Divergenz von  $\mathfrak{D}$ , nicht diejenige von  $\mathfrak{G}$ , durch die Dichte der wahren Elektrizität. Untersuchen wir nun die Umgebung eines stromführenden Drahtes in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise mit einer Probespule, so finden wir nur im leeren Raume einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen dem Felde  $\mathfrak{B}$  und dem elektrischen Leitungsstrome; es ist der Vektor  $\mathfrak{B}$  in dem stromlosen Gebiete wirbelfrei; seine Wirbel haben ausschließlich in den stromdurchflossenen Leitern ihren Sitz und sind der Stromdichte proportional. Sind aber paramagnetische oder diamagnetische Körper im Felde, so fällt dieser einfache Zusammenhang fort. Es empfiehlt sich dann, einen zweiten magnetischen Vektor  $\mathfrak{H}$  einzuführen, den wir „magnetische Feldstärke“ oder auch „magnetische Kraft“ nennen wollen; dessen Wirbel soll stets in dem elektrischen Strome seinen Sitz haben.

Denken wir uns einen geschlossenen linearen Leiter von einem konstanten Strome  $J$  durchflossen, so ist der Vektor  $\mathfrak{H}$  folgendermaßen zu definieren. Für jede den Leiter einmal umschlingende Kurve  $\mathfrak{s}$  soll das Linienintegral von  $\mathfrak{H}$  der Stromstärke  $J$  proportional sein:

$$(166) \quad \int_P^P \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{4\pi J}{c},$$

für jede den Stromleiter nicht umschlingende Kurve aber soll das Linienintegral gleich Null sein. — Die in (166) auftretende universelle Konstante  $c$  ist mit der in (163) eingeführten identisch; sie hängt in einer später genauer zu erörternden Weise von den Einheiten ab, in denen  $J$  und  $\mathfrak{H}$  gemessen werden. Der Umlaufssinn längs  $\mathfrak{s}$  soll der Strömungsrichtung der Elektrizität sich zuordnen, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer Rechtsschraube.

Der diesen Bedingungen genügende Vektor  $\mathfrak{H}$  ist nun — das besagt das zugrunde zu legende Erfahrungsgesetz — dem Vektor  $\mathfrak{B}$  der magnetischen Induktion proportional. Es gilt

$$(167) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

für isotrope Körper.

Die hier auftretende Materialkonstante  $\mu$  soll, wie erwähnt, für den Äther gleich 1 gesetzt werden.

Verbinden wir mit diesen Aussagen den Ansatz (162) für die magnetische Energie, so haben wir das magnetische Feld eines linearen, von einem stationären Strome durchflossenen Leiters erschöpfend charakterisiert. Schließen wir ferromagnetische Körper aus, in denen  $\mu$  nicht konstant ist, so sind die Gleichungen (165), (166), (167) alle linear, es superponieren sich demnach die Felder verschiedener Stromleiter.

Der für die Energie des magnetischen Feldes zugrunde gelegte Ansatz (162) machte es notwendig, in die Beziehung zwischen  $J$  und  $\mathfrak{H}$  (166) dieselbe von den Maßeinheiten abhängige Konstante  $c$  aufzunehmen, die in der Definitionsgleichung (163) des Vektors  $\mathfrak{B}$  auftrat. Denn die Energie des magnetischen Feldes eines Stromleiters muß offenbar unabhängig von der Wahl der Einheit sein, in der die Stromstärken gemessen werden, wenn anders diese Wahl mit dem absoluten C.-G.-S.-System verträglich ist. Soll das skalare Produkt von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  von der Wahl der Maßeinheiten unabhängig sein, so muß der Faktor  $c$  bei der Multiplikation sich herausheben, da  $ReJ$  von der Dimension einer Energie, mithin seinerseits von der Wahl des Maßsystems unabhängig ist.

Wir denken uns den ganzen Raum von einem Medium konstanter magnetischer Permeabilität erfüllt. Für diesen speziellen Fall können wir das magnetische Feld eines linearen Leiters ohne weiteres bestimmen. In diesem Falle folgt nämlich aus (165) und (167)

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

es ist also nicht nur  $\mathfrak{B}$ , sondern auch  $\mathfrak{H}$  durchweg quellenfrei verteilt. Wir haben es daher mit dem quellenfreien Felde einer einzigen Wirbellinie zu tun, deren Eigenschaften uns durch die Entwicklungen des § 31 bekannt sind. Dem Momente  $4\pi\tau$  der Wirbellinie entspricht hier der Ausdruck  $4\pi\frac{J}{c}$ , so daß die Gleichung (110) ergibt

$$(168) \quad \mathfrak{H} = \frac{J}{c} \int \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s} \mathfrak{r}].$$

Dies ist das magnetische Feld einer geschlossenen Stromlinie.

Wir können den Ausdruck interpretieren als Summe der Beiträge, die von den einzelnen Stromelementen  $Jd\mathfrak{s}$  in dem in der Entfernung  $\mathfrak{r}$  befindlichen Aufpunkte erregt werden und die sich aus dem Biot-Savartschen Elementargesetze bestimmen. Aber hier, wie auch in § 31, ist zu bemerken, daß die Zerlegung einigermaßen willkürlich ist; die Stromelemente sind einzeln nicht existenzfähig; wir haben es vielmehr mit einem geschlossenen, von einem stationären Strome durchflossenen Leitungsdrahte zu tun und haben nach der Maxwell'schen Theorie dessen Feld als Ganzes zu betrachten.

Was nun das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  anbelangt, so empfiehlt es sich, mit Maxwell dieses Vektorpotential der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$  zuzuordnen gemäß Gleichung (165a). In dem jetzt in Rede stehenden Falle einer überall gleichen Permeabilität ist zwar auch  $\mathfrak{H}$  quellenfrei und daher als Curl eines Vektorpotentials darzustellen, aber auf den allgemeinen Fall eines von Körpern verschiedener Permeabilität erfüllten Raumes

würde sich eine solche Beziehung nicht ausdehnen lassen. Wir setzen daher

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

und erhalten durch Vergleichung mit (109)

$$(168a) \quad \mathfrak{A} = \mu \frac{J}{c} \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}$$

als Vektorpotential der Stromlinie.

Für das magnetische Feld elektrischer Ströme gibt uns die Erfahrung zunächst nur Integralgesetze. Wir gelangen auch hier, wie beim Ohmschen Gesetze, zu den für die weitere theoretische Formulierung zweckmäßigeren Differentialgesetzen, indem wir zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen.

Die Gleichung (166) ergibt

$$\int ds \mathfrak{G}_s = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{i}_n df,$$

wo  $f$  eine beliebige, von der Kurve  $\mathfrak{s}$  umrandete Fläche ist und  $\mathbf{i}_n$  die Dichte der das Element  $df$  dieser Fläche senkrecht durchfließenden Strömung.

Ziehen wir nun die Kurve  $\mathfrak{s}$  mehr und mehr zusammen, so ergibt nach § 27 die linke Seite den Curl von  $\mathfrak{G}$ ; es wird

$$(169) \quad \operatorname{curl} \mathfrak{G} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}.$$

Dieses differentielle Verknüpfungsgesetz von Leitungsstrom und magnetischem Felde wollen wir als erste Hauptgleichung des Elektromagnetismus bezeichnen.

Beschränken wir uns wiederum auf den Fall einer durchweg konstanten Permeabilität, so können wir das magnetische Feld eines vollständigen Stromsystemes in ganz entsprechender Weise ableiten, wie wir im § 28 des ersten Abschnittes das quellenfreie Vektorfeld bei gegebener Wirbelverteilung bestimmten. Wir haben

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

und diese Gleichung zusammen mit (169) entspricht durchaus den Gleichungen (96) des § 28. Wir haben nur dort an Stelle von  $\mathfrak{r} \frac{\mathfrak{i}}{c}$  zu schreiben und ferner, da

$$\mathfrak{H} = \text{curl} \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

gesetzt werden soll,  $\frac{\mathfrak{A}}{\mu}$  an Stelle von  $\mathfrak{A}$ . Dann ergibt Gleichung (100)

$$(170) \quad \mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{d\mathfrak{v} \mathfrak{i}}{r};$$

aus diesem Vektorpotential leiten sich  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  folgendermaßen ab:

$$(170a) \quad \mathfrak{B} = \text{curl} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}.$$

Hierdurch ist die vorgelegte Aufgabe gelöst. Es folgt übrigens aus den Entwicklungen des § 28, daß  $\text{div} \mathfrak{A}$  verschwindet, wenn die Integration über das ganze von Elektrizität durchströmte Gebiet erstreckt wird.

Ganz ähnlich, wie wir im § 28 die Energie des quellenfreien Vektorfeldes durch ein über die Wirbel erstrecktes Integral darstellten, so können wir die magnetische Energie (162) eines beliebigen elektrischen Stromsystemes durch ein über das stromerfüllte Gebiet erstrecktes Integral ausdrücken. Nach (162) und (165a) ist die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{H} \text{curl} \mathfrak{A}).$$

Die Rechnungsregel (102) ergibt

$$\mathfrak{H} \text{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \text{curl} \mathfrak{H} - \text{div} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}],$$

daher

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{A} \text{curl} \mathfrak{H}) - \frac{1}{8\pi} \int dv \text{div} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}].$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes bringt das letzte Glied auf die Form

$$- \frac{1}{8\pi} \int df [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_n;$$

läßt man die Begrenzungsfläche des Feldes in das Unendliche rücken, so verschwindet dieses Integral für ein jedes im Endlichen liegende Stromsystem und es wird nach (169)

$$(170b) \quad T = \frac{1}{2c} \int dv (\mathbf{i}\mathfrak{A}).$$

Diese Umformung des Energieausdruckes (162) ist von der Annahme durchweg konstanter Permeabilität unabhängig. Sie beruht nur auf der ersten Hauptgleichung (169) und der durch (165) ausgedrückten Eigenschaft des Vektors  $\mathfrak{B}$ , überall quellenfrei zu sein, einer Eigenschaft, die wir auch dem Felde im Innern permanenter Magnete zuschrieben. Lassen wir nun die elektrischen Ströme verschwinden, so verschwindet auch die rechte Seite des umgeformten Energieausdruckes (170b). Hiernach wäre die Energie eines permanenten Magneten gleich Null, wenn kein elektrischer Strom ihn durchfließt. Dieses Ergebnis ist mit der Erfahrung nicht verträglich. Wir können die Überlegung auch direkt an den Satz des § 30 anknüpfen: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. In der Tat, nehmen wir allgemein

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

an und setzen für das Innere eines nicht von elektrischen Strömen durchflossenen Magneten nach (169)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0,$$

so folgt aus jenem Satze, daß die nach der Formel (162) berechnete Energie des Magneten gleich Null ist. Da wir nun den Vektor  $\mathfrak{H}$  geradezu dadurch definierten, daß seine Wirbel nur in wahren elektrischen Strömen ihren Sitz haben, so bleibt uns nichts anderes übrig, als für ferromagnetische Körper den Energieansatz (162) aufzugeben. Das wird in der Tat bei der Behandlung dieser Körper im vierten Abschnitte dieses Bandes geschehen.

Der ursprüngliche Ansatz (162) für die magnetische Energie betrachtet, den Vorstellungen der Nahewirkungstheorie gemäß,

das ganze Feld als Sitz der Energie. Es ist sehr bemerkenswert, daß der umgeformte Ausdruck (170b), der für stationäre elektrische Ströme denselben Energiebetrag ergibt, eine der Fernwirkungstheorie entsprechende Deutung zuläßt, indem die Energie als über die Stromfäden verteilt erscheint. Für die magnetische Energie stationärer Ströme ergeben in der Tat Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie den gleichen Wert. Die Vorzüge des Maxwell'schen Energieausdruckes treten erst bei rasch veränderlichen Feldern hervor.

### § 63. Der freie Magnetismus und das skalare Potential eines magnetisierten Körpers.

Ein gegebenes System elektrischer Ströme mag im leeren Raume ein magnetisches Feld erregen, dessen magnetische Feldstärke mit  $\mathfrak{H}_0$ , dessen magnetische Induktion mit  $\mathfrak{B}_0$  bezeichnet werde. Nach (170), (170a) hat man

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \text{curl } \mathfrak{A}_0$$

und

$$(171) \quad \mathfrak{A}_0 = \frac{1}{c} \int dv \frac{\mathbf{i}}{r},$$

daher

$$(171a) \quad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{c} \int \frac{dv}{r^3} [\mathbf{i}r],$$

wo  $\mathbf{r}$  den von dem durchströmten Volumelemente nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor bezeichnet.

Wir denken uns in dem Felde ein stromloses Gebiet abgegrenzt und in dieses jetzt Körper gebracht, deren magnetische Permeabilität  $\mu$  von 1 verschieden ist. Es kann  $\mu$  von Punkt zu Punkt sich stetig ändern, sei es infolge der Inhomogenität des betreffenden Körpers, sei es, weil in ferromagnetischen Körpern die Permeabilität von der Feldstärke abhängt. Es können aber auch an der Trennungsfläche verschiedener Körper sprungweise Änderungen von  $\mu$  vorkommen. Es wird sich nach Einführung jener Körper ein Feld herstellen, dessen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und dessen Induktion  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{H}_0$  bzw.  $\mathfrak{B}_0$  ver-

schieden sind. Wir stellen uns die Aufgabe, die Eigenschaften dieser Vektoren zu untersuchen.

Nun muß, unseren Grundannahmen zufolge, wie in jedem Felde, so auch hier das Integral der normalen Komponente der Induktion für jede geschlossene Fläche gleich Null sein. Es muß also nicht nur überall die räumliche Divergenz, sondern auch an den Trennungsflächen verschiedener Körper die Flächen-divergenz (§ 24) von  $\mathfrak{B}$  verschwinden. Daraus folgt: die Normalkomponente von  $\mathfrak{B}$  durchsetzt stetig die Trennungsfläche zweier verschiedener Körper.

Da ferner das zu betrachtende Gebiet des Feldes stromlos ist, so muß das Linienintegral von  $\mathfrak{H}$  für jede in dem Gebiete verlaufende geschlossene Kurve verschwinden. Es ist also nicht nur überall

$$(172) \quad \text{curl } \mathfrak{H} = 0,$$

sondern außerdem ist an den Trennungsflächen verschiedener Körper der Flächenwirbel (§ 29) von  $\mathfrak{H}$  gleich Null. Daraus folgt: die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{H}$  durchsetzen stetig die Trennungsflächen zweier verschiedener Körper.

Vergleicht man das in Rede stehende stromlose Gebiet des konstanten magnetischen Feldes mit dem von wahrer Elektrizität freien Gebiete eines elektrostatischen Feldes, so bemerkt man, daß hier die Heaviside-Hertzsche Analogie (§ 60) sich durchführen läßt. Der Gleichung

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0$$

entspricht

$$\text{div } \mathfrak{D} = 0,$$

der Gleichung

$$\text{curl } \mathfrak{H} = 0$$

entspricht

$$\text{curl } \mathfrak{G} = 0.$$

Auch in den Grenzbedingungen entsprechen sich die Vektoren  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$ , deren Tangentialkomponenten, und die Vektoren  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$ , deren Normalkomponenten stetig sein müssen. Man

kann daher das im § 44 abgeleitete Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien unmittelbar auf die magnetischen Kraftlinien übertragen. In der Tat, sind  $\alpha_1, \alpha_2$  die Winkel, welche die magnetischen Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfäche mit einer der Flächennormalen einschließen, so hat man

$$|\mathfrak{B}_1| \cos \alpha_1 = |\mathfrak{B}_2| \cos \alpha_2, \quad |\mathfrak{H}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{H}_2| \sin \alpha_2,$$

daher

$$(172a) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Daß hier die Analogie sich vollständig durchführen läßt, liegt an der Spezialisierung, die wir einführten. Verschwindet die wahre Elektrizität, so ist  $\mathfrak{D}$  quellenfrei, wie  $\mathfrak{B}$  es stets ist; verschwindet der elektrische Strom, so ist  $\mathfrak{H}$  wirbelfrei, wie es  $\mathfrak{C}$  im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist. Obwohl nun bei einer allgemeineren Problemstellung die Analogie versagt, so wird es doch nützlich sein, sich gerade im vorliegenden Falle von ihr leiten zu lassen.

Das wirbelfreie Feld  $\mathfrak{H}$  wird bestimmt sein, wenn man die Verteilung seiner Quellen kennt. Man setze die räumliche Divergenz von  $\mathfrak{H}$  gleich  $4\pi\varrho'_m$ , die Flächendivergenz an den Trennungsfächen verschiedener Körper gleich  $4\pi\omega'_m$ . Es gibt dann  $\varrho'_m$  die räumliche Dichte,  $\omega'_m$  die Flächendichte des freien Magnetismus an.

Freier Magnetismus tritt nur dort auf, wo  $\mu$  variiert. Denn an der Trennungsfäche zweier Körper derselben Permeabilität wäre die Flächendivergenz von  $\mathfrak{H}$  derjenigen von  $\mathfrak{B}$  proportional, die stets gleich Null ist. Und für das Innere der Körper folgt aus dem Verschwinden der Divergenz von  $\mathfrak{B}$

$$0 = \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} \nabla \mu),$$

daher

$$(172b) \quad 4\pi\varrho'_m = \operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{1}{\mu} (\mathfrak{H} \nabla \mu).$$

Es tritt demnach nur dort freier Magnetismus auf, wo die Permeabilität einen Gradienten besitzt,

d. h. in inhomogenen oder in ferromagnetischen Körpern und an der Grenzfläche zweier Körper verschiedener Permeabilität.

Da das durch das Hereinbringen der Körper modifizierte Feld  $\mathfrak{H}$  von denselben Strömen erregt ist wie das ursprüngliche Feld  $\mathfrak{H}_0$ , so ist  $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$  wirbelfrei. Da aber  $\mathfrak{H}_0$  keine Quellen besitzt, sondern nur Wirbel, so sind die Quellen von  $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ , wie diejenigen von  $\mathfrak{H}$ , nur in den hereingebrachten Körpern befindlich, nämlich dort, wo freier Magnetismus sich befindet. Das skalare Potential des Feldes  $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$  ist daher

$$(172c) \quad \varphi_m = \int \frac{dv \varrho'_m}{r} + \int \frac{df \omega'_m}{r},$$

entsprechend der Formel (138a) für das skalare Potential des elektrostatischen Feldes. Kennen wir also die Verteilung des freien Magnetismus, so sind wir vermöge der Gleichung

$$(172d) \quad \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\nabla \varphi_m$$

imstande, anzugeben, wie durch Hereinbringen der Körper in das stromlose Gebiet das magnetische Feld geändert ist; und zwar beziehen sich die Formeln sowohl auf das Feld außerhalb, wie auf das Feld innerhalb der hereingebrachten para-, dia- oder ferromagnetischen Körper.

Wir können den Ausdruck für das skalare Potential des von diesen Körpern erregten Feldes  $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$  auf eine Form bringen, welche der im § 47 für das Potential eines Dielektrikums erhaltenen entspricht und eine entsprechende Deutung gestattet. Wir wollen bei der Umformung die Veränderungen der Permeabilität im Innern des betrachteten Körpersystemes als stetig ansehen und Unstetigkeiten nur an der Trennungsfläche gegen den Äther zulassen. Wir führen einen neuen Vektor  $\mathfrak{M}$  ein, den wir durch die Gleichung

$$(173) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \{ \mathfrak{B} - \mathfrak{H} \}$$

definieren und als „Magnetisierung“ bezeichnen. Er entspricht dem im § 47 eingeführten Vektor  $\mathfrak{P}$  der elektrischen Polarisation.

Wir können schreiben

$$(173a) \quad \mathfrak{M} = \kappa \mathfrak{H},$$

wo

$$\kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

die „magnetische Suszeptibilität“ genannt wird. Im leeren Raume ist die Suszeptibilität wie die Magnetisierung Null. Einen materiellen Körper, in dem der Vektor  $\mathfrak{M}$  von Null verschieden ist, bezeichnet man als magnetisiert.

Da  $\mathfrak{B}$  durchweg quellenfrei ist, so folgt aus (173)

$$(173b) \quad \varrho'_m = -\operatorname{div} \mathfrak{M},$$

$$(173c) \quad \omega'_m = \mathfrak{M}_n,$$

wo  $n$  die von der Begrenzungsfläche der magnetisierten Körper nach außen (nach dem Äther hin) gezogene Normale bezeichnet. Das Potential (172c) des magnetisierten Körpers wird jetzt

$$\varphi_m = -\int \frac{dv \operatorname{div} \mathfrak{M}}{r} + \int \frac{df \mathfrak{M}_n}{r}.$$

Das Flächenintegral mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Gleichung (73) umformend, erhalten wir für  $\varphi_m$  ein über das Volumen des magnetisierten Körpers zu erstreckendes Integral

$$(173d) \quad \varphi_m = \int dv \left( \mathfrak{M} \nabla_q \frac{1}{r} \right).$$

Dieser Ausdruck für das skalare Potential eines magnetisierten Körpers entspricht durchaus dem in Formel (142c) des § 47 für das Potential eines dielektrisch polarisierten Körpers abgeleiteten. Wir können ihn in entsprechender Weise deuten, indem wir den Körper in seine Volumelemente zerlegt denken. Jedes Volumelement wird dann als Träger einer Doppelbelegung von freiem Magnetismus angesehen. Durch Superposition der Felder aller magnetisierten Volumelemente erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (80)

$$(173e) \quad \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\nabla_a \varphi_m = \nabla_a \int dv \left( \mathfrak{M} \nabla_a \frac{1}{r} \right),$$

einen Ausdruck, der das Feld des magnetisierten Körpers sowohl innerhalb wie außerhalb richtig angibt. Nach den Koordinatenachsen zerlegend und die durch  $\nabla_a$  angedeuteten Differentiationen nach den Koordinaten  $xyz$  des Aufpunktes ausführend, erhält man

$$(173f) \begin{cases} \mathfrak{H}_x - \mathfrak{H}_{0x} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}, \\ \mathfrak{H}_y - \mathfrak{H}_{0y} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right\}, \\ \mathfrak{H}_z - \mathfrak{H}_{0z} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\}. \end{cases}$$

Da  $\mathfrak{H}_0$  durch (171a) gegeben ist, so bestimmt sich, wenn  $\mathfrak{M}$  bekannt ist, hieraus das Feld  $\mathfrak{H}$ , und vermöge

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

dann auch die magnetische Induktion im Innern des magnetisierten Körpers. Die rechnerische Ermittlung der Magnetisierung eines Körpers in einem gegebenen Felde ist allerdings meist keine einfache Aufgabe.

Für eine in ein homogenes Feld  $\mathfrak{H}_0$  gebrachte Kugel läßt sich die Magnetisierung und das Feld bestimmen, genau so wie im § 48 das analoge elektrostatische Problem gelöst wurde. Man findet (vgl. Gleichung 145), daß die entstehende Magnetisierung der Kugel homogen und zwar gleich

$$(173g) \quad \mathfrak{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0$$

ist.

Im Innern der homogen magnetisierten Kugel befindet sich, wie aus (173b) hervorgeht, kein freier Magnetismus. Derselbe hat ausschließlich auf der Oberfläche seinen Sitz, wo

er, nach (173c), mit der Dichte

$$(173h) \quad \omega'_m = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0 \cos \vartheta$$

verteilt ist;  $\vartheta$  gibt dabei den Winkel an, den der Kugelradius an dem betreffenden Punkte der Oberfläche mit der Richtung des ursprünglichen Feldes  $\mathfrak{H}_0$  einschließt. Die Flächendichte des freien Magnetismus ist Null am Äquator, sie ist auf der einen Kugelhälfte positiv, auf der anderen negativ; die vom Pole der negativ belegten Halbkugel nach dem der positiv belegten weisende Richtung stimmt mit  $\mathfrak{H}_0$  überein, wenn  $\mu > 1$  ist, sie weist  $\mathfrak{H}_0$  entgegen, wenn  $\mu < 1$  ist.

#### § 64. Der freie elektrische Strom und das Vektorpotential eines magnetisierten Körpers.

Wir wollen das im vorigen Paragraphen behandelte Problem noch von einem anderen Standpunkte aus diskutieren. Wir wollen der Lösung eine solche Form geben, daß bei gegebener Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  nicht sowohl die Feldstärke  $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ , als vielmehr die magnetische Induktion  $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$  direkt bestimmt wird. Da in dem ursprünglichen Felde  $\mu = 1$ , daher  $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0$  war, so folgt aus (173) und (173f) für die  $x$ -Komponente

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = 4\pi \mathfrak{M}_x + \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}.$$

Nun ist nach der Poissonschen Gleichung

$$4\pi \mathfrak{M}_x = -\nabla^2 \int \frac{dv \mathfrak{M}_x}{r} = -\int dv \mathfrak{M}_x \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\},$$

sowohl im Innern des magnetisierten Körpers, als auch außerhalb, wo beide Seiten der letzten Gleichung verschwinden. Wir erhalten daher

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = \frac{\partial}{\partial y} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial z} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{M}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\}.$$

Diese Formel und die entsprechenden beiden für die  $y$ -Komponente und die  $z$ -Komponente geltenden schreiben wir in Vektorform

$$(174) \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \text{curl} \{ \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0 \},$$

wo

$$(174a) \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0 = - \int dv \left[ \mathfrak{M} \nabla_a \frac{1}{r} \right] = + \int dv \left[ \mathfrak{M} \nabla_a \frac{1}{r} \right]$$

das Vektorpotential des magnetisierten Körpers darstellt.

Diese durch formale Umrechnung der Resultate des vorigen Paragraphen erhaltene Darstellung des Feldes erfordert eine eingehendere Diskussion. Sie bestimmt direkt die vom magnetisierten Körper herrührende Veränderung der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$ . Die Darstellung mit Hilfe des skalaren Potentials ist offenbar auf stromlose Felder beschränkt, in denen

$$\text{curl} \{ \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 \} = 0$$

ist. Die Darstellung mit Hilfe des Vektorpotentials stützt sich auf die quellenfreie Beschaffenheit des Vektors  $\mathfrak{B}$  und ist daher nicht auf stromlose Felder beschränkt, sondern sie gilt allgemein für jedes konstante magnetische Feld. Wir wollen daher den Ausdruck für das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  direkt ableiten, und zwar für beliebige Stromverteilung und für beliebige magnetisierbare Körper. Wir wollen dabei die in den §§ 61 und 62 bemerkte Analogie der Vektoren  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{B}$  einerseits,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  andererseits deutlicher hervortreten lassen.

Wie  $\text{div} \mathfrak{D}$  durch die wahre Elektrizität bestimmt wird, so wird  $\text{curl} \mathfrak{H}$  durch den elektrischen Strom bestimmt. Da aber im elektrostatischen Felde nicht  $\mathfrak{D}$ , sondern  $\mathfrak{G}$  sich allgemein

als negativer Gradient eines skalaren Potentials darstellt, so wünscht man behufs Berechnung desselben nicht die Quellen von  $\mathfrak{D}$ , sondern diejenigen von  $\mathfrak{C}$  zu kennen. Daher führt man die Rechnungsgröße ein, die man als „freie Elektrizität“ bezeichnet und deren Dichte der Divergenz von  $\mathfrak{C}$  proportional ist. Hier, im magnetischen Felde, ist  $\mathfrak{B}$  allgemein als Curl eines Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  darzustellen. Behufs Berechnung dieses Vektorpotentials müßten wir die Wirbel von  $\mathfrak{B}$  kennen. Zunächst kennen wir indessen nur die Wirbel von  $\mathfrak{H}$ , die der wahren Stromdichte proportional sind. Daher führen wir eine Rechnungsgröße ein, welche die Verteilung der Wirbel von  $\mathfrak{B}$  anzeigt und welche wir als „Dichte des freien elektrischen Stromes“ bezeichnen. Wir definieren, der Gleichung (169) für die wirkliche Stromdichte entsprechend, durch

$$(175) \quad \text{curl } \mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathbf{i}'}{c}$$

die „räumliche Dichte  $\mathbf{i}'$  des freien Stromes“ und, da wir Unstetigkeitsflächen in Betracht ziehen wollen, durch

$$(175a) \quad [\mathbf{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi \mathbf{i}'}{c}$$

die „Flächendichte  $\mathbf{j}'$  des freien Stromes“. Diese letztere Formel ergibt sich aus der in Gleichung (104) des § 29 für den Flächenwirbel erhaltenen;  $\mathbf{n}$  bezeichnet dabei einen Einheitsvektor, der nach der durch den Index 1 gekennzeichneten Seite der betreffenden Trennungsfläche  $f_{12}$  zweier Körper hinweist. Der freie Strom stimmt im ganzen Raume mit dem Wirbel des Vektors  $\mathfrak{B}$  überein, bis auf den universellen Faktor  $c$ . Der freie Strom ist demnach, ebenso wie der wirkliche Strom, im stationären Felde durchweg quellenfrei verteilt.

Aus den Resultaten der §§ 28, 29 erhalten wir jetzt das Vektorpotential

$$(175b) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{d\mathbf{v} \mathbf{i}'}{r} + \frac{1}{c} \int \frac{d\mathbf{f} \mathbf{i}'}{r},$$

wobei das erste Integral über den Raum, das zweite über die Unstetigkeitsflächen zu erstrecken ist. Da das Feld des freien Stromes als Wirbelfeld des Vektors  $\mathfrak{B}$  definiert ist, so folgt

nach § 28, daß die Gleichung

$$(175c) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

erfüllt ist, wofern nur die Integration über das ganze Wirbelgebiet von  $\mathfrak{B}$  erstreckt wird. Kennt man die Verteilung des freien Stromes, so kann man das Vektorpotential und vermöge

$$(175d) \quad \mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

die magnetische Induktion finden, ähnlich wie man bei Kenntnis der Verteilung der freien Elektrizität das skalare Potential und die elektrische Kraft des elektrostatischen Feldes bestimmen kann. Freilich ist der freie Strom nur eine Rechnungsgröße; seine Verteilung ist keineswegs von vornherein bekannt.

Nach (175), (112) und (169) ist

$$\frac{4\pi \mathbf{i}'}{c} = \operatorname{curl} \mu \mathfrak{G} = \mu \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} + [\nabla \mu, \mathfrak{G}],$$

daher

$$(175e) \quad \mathbf{i}' = \mu \mathbf{i} + \frac{c}{4\pi} [\nabla \mu, \mathfrak{G}].$$

Es tritt demnach dort freie Strömung auf, wo ein wirklicher Strom fließt oder die Permeabilität einen Gradienten besitzt; letzteres kann in inhomogenen sowie in ferromagnetischen Körpern stattfinden. Unstetigkeitsflächen mit flächenhaft verteilter Strömung sind als extremer Grenzfall eines inhomogenen Körpers aufzufassen.

Aus (175b, e) ergibt sich für den Fall einer stetig sich ändernden Permeabilität, d. h. räumlich verteilten freien Strom, der folgende Ausdruck des Vektorpotentials

$$(175f) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dv \mu \mathbf{i}}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} [\nabla \mu, \mathfrak{G}].$$

Nur ein konstantes  $\mu$  darf in dem ersten Gliede vor das Integralzeichen gesetzt werden, wodurch der Ausdruck, weil das zweite Glied verschwindet, in (170) übergeht.

Wir wollen jetzt den freien Strom zu der Magnetisierung  $\mathfrak{M}$ , die in (173) definiert wurde, in Beziehung setzen. Es ist

$$\frac{4\pi \mathbf{i}'}{c} = \operatorname{curl} \{ \mathfrak{G} + 4\pi \mathfrak{M} \} = \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} + 4\pi \operatorname{curl} \mathfrak{M},$$

daher

$$(176) \quad \frac{\mathbf{i}'}{c} = \frac{\mathbf{i}}{c} + \text{curl } \mathfrak{M}.$$

Ganz entsprechend wie die räumliche Dichte, drückt sich die Flächendichte des freien Stromes durch die Flächendichte  $\mathbf{j}$  des wirklichen Stromes und den Flächenwirbel von  $\mathfrak{M}$  aus:

$$(176a) \quad \frac{\mathbf{j}'}{c} = \frac{\mathbf{j}}{c} + [\mathbf{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2].$$

Wir werden indessen den wirklichen Leitungsstrom infolge des endlichen Widerstandes der Leiter im allgemeinen nur als räumlich verteilt ansehen dürfen und seine Flächendichte  $\mathbf{j}$  daher gleich Null zu setzen haben. Daher wird (175b)

$$(176b) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{d\mathbf{v} \mathbf{i}}{r} + \int \frac{d\mathbf{v}}{r} \text{curl } \mathfrak{M} + \int \frac{df}{r} [\mathbf{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2].$$

Wir fassen die Glieder zusammen, die von der Magnetisierung der durch den Index 1, 2 charakterisierten Körper herrühren, wobei wir berücksichtigen, daß die äußeren Normalen  $n_1, n_2$  der Begrenzungsflächen dieser Körper dem Vektor  $\mathbf{n}$  entgegen bzw. ihm parallel weisen. Aus der Regel (102b) folgt dann

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v}_1 \text{curl} \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{r} \right\} &= - \int \frac{df_1}{r} [\mathbf{n}, \mathfrak{M}_1] \\ \int d\mathbf{v}_2 \text{curl} \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{r} \right\} &= + \int \frac{df_2}{r} [\mathbf{n}, \mathfrak{M}_2] \end{aligned}$$

Berücksichtigt man weiter, daß nach Regel (112)

$$\frac{1}{r} \text{curl } \mathfrak{M} = \text{curl} \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{r} \right\} - \left[ \nabla_q \frac{1}{r}, \mathfrak{M} \right]$$

zu setzen ist — selbstverständlich handelt es sich in (176b) um Differentiation nach den Koordinaten des magnetisierten Körpers, d. h. um Quellpunktdifferentiation —, so folgt

$$\int \frac{d\mathbf{v}}{r} \text{curl } \mathfrak{M} = \int \frac{df}{r} [\mathbf{n}, \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1] + \int d\mathbf{v} [\mathfrak{M} \nabla_q \frac{1}{r}].$$

Hier ist das Flächenintegral über sämtliche Begrenzungsflächen zweier magnetisierter Körper, das Volumintegral über

alle magnetisierten Volumelemente zu erstrecken. Durch Einsetzen in (176b) erhalten wir als Ausdruck des Vektorpotentials

$$(176c) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dvi}{r} + \int dv \left[ \mathfrak{M} \nabla_{\mathfrak{q}} \frac{1}{r} \right].$$

Er stimmt durchaus überein mit dem früher auf Grund spezieller Voraussetzungen in den Formeln (171), (174a) erhaltenen. Der jetzt gegebene Beweis ist ganz allgemein. Er beruht neben den allgemeinen Eigenschaften der Vektorfelder nur auf den Grundgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}.$$

Die Formel (176c) gilt demnach, ebenso wie diese Grundformeln, für jedes stationäre magnetische Feld, z. B. auch dann, wenn magnetisierbare Körper vom Strome durchflossen sind. Ist die Verteilung des elektrischen Stromes sowie die Magnetisierung der Körper bekannt, so bestimmt (175d) zusammen mit (176c) das Feld des Vektors  $\mathfrak{B}$  sowohl außerhalb wie auch innerhalb der magnetisierten und der den elektrischen Strom leitenden Körper.

Eine homogene, stromlose Eisenkugel nimmt in einem homogenen Felde  $\mathfrak{H}_0$  die durch (173g) gegebene homogene Magnetisierung an. Nach (176) ist in ihrem Innern keine freie Strömung, wohl aber zirkuliert nach (176a) eine solche längs ihrer Oberfläche. Beziehen wir den Index 1 auf den umgebenden Äther, so daß die von (2) nach (1) weisende Normale  $\mathfrak{n}$  mit dem vom Mittelpunkte aus gezogenen Radiusvektor zusammenfällt, so wird

$$(176d) \quad \frac{\mathfrak{j}'}{c} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} [\mathfrak{H}_0 \mathfrak{n}].$$

Die freie Strömung zirkuliert also längs der Breitenkreise, und zwar von Westen nach Osten, wenn  $\mathfrak{H}_0$  vom Südpol zum Nordpol weist und  $\mu > 1$  ist. Der Betrag der Flächendichte der Strömung ist

$$|\mathfrak{j}'| = c \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} |\mathfrak{H}_0| \sin \vartheta, \quad \vartheta = \sphericalangle \mathfrak{n}, \mathfrak{H}_0.$$

Würde man die Eisenkugel beseitigen und statt dessen dieses fingierte Stromsystem anbringen, so würde jetzt im Äther die Verteilung von  $\mathfrak{B}$  die gleiche sein wie vorher innerhalb und außerhalb der Eisenkugel. Das Feld  $\mathfrak{H}$  aber würde jetzt innerhalb der Kugel ein anderes sein. Wäre es hingegen möglich, die durch (173h) gegebene Verteilung von freiem Magnetismus durch wahren Magnetismus im leeren Raume zu ersetzen, so würde das Feld  $\mathfrak{H}$  innerhalb und außerhalb der Kugel jetzt im Äther das gleiche sein, das vorher von der magnetisierten Eisenkugel erregt wurde. Die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  aber hätte innerhalb der Kugel einen anderen Betrag.

So dient die Einführung des freien Magnetismus zur Darstellung des Feldes  $\mathfrak{H}$ , die allgemeiner verwendbare des freien Stromes zur Darstellung des Feldes der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$ .

### § 65. Die beiden Hauptgleichungen.

Die erste Hauptgleichung war in der Form, die wir ihr gaben (169), auf stationäre elektrische Ströme beschränkt. Denn nur der stationäre Leitungsstrom ist quellenfrei verteilt, wie es Gleichung (169) verlangt. In der Tat folgt aus (169) und (94), daß die Divergenz von  $\mathfrak{i}$  gleich Null ist. Ist der Leitungsstrom nicht quellenfrei, so ist es nicht möglich, ihn dem curl  $\mathfrak{H}$  proportional zu setzen. Nun wissen wir aber (§ 54), daß ein nicht stationärer Strom im allgemeinen nicht durchweg quellenfrei ist. Während der stationäre Strom nur in geschlossenen Leitungskreisen zirkuliert, können wechselnde Ströme auch in offenen, etwa durch einen Kondensator unterbrochenen Bahnen fließen. Hier bilden die Kondensatorbelegungen Quellen bzw. Senken des Leitungsstromes. Es ist daher nicht möglich, die Form (169) der ersten Hauptgleichung allgemein aufrecht zu erhalten.

Wir bemerkten indessen bereits in § 54, daß in diesem Falle der Leitungsstrom seine Fortsetzung in dem Verschie-

bungsströme findet, daß Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen eine quellenfreie Strömung bilden. Es ist mithin vom Standpunkte der Nahwirkungstheorie aus eine sehr plausible Annahme, daß im allgemeinen, für zeitlich wechselnde Felder, der „wahre Strom“  $\mathfrak{c}$ , der sich aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt, in der ersten Hauptgleichung den Leitungsstrom ersetzt. Das ist in der Tat die Annahme, welche Maxwell gemacht hat und welche die Maxwellsche Theorie von den anderen, auf den Anschauungen der Fernwirkung aufgebauten elektrodynamischen Theorien unterscheidet.

Jene Fernwirkungstheorien ergaben für die Elektrostatik sowie für stationäre elektrische Ströme Resultate, die mit denen der Maxwellschen Theorie übereinstimmten; nur die Interpretation war eine andere. Dort sah man die Potentiale, das skalare Potential bzw. das Vektorpotential, als das primäre an, die Erweiterung der Theorie auf ungeschlossene Leitungsströme suchte man durch Korrektur der Potentiale zu erzielen. Die Maxwellsche Theorie, welche die elektromagnetischen Vektoren als die fundamentalen Größen betrachtet, nimmt die Erweiterung in den differentiellen Verkettungsgleichungen vor und gelangt so zu der erweiterten ersten Hauptgleichung:

$$(177) \quad \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{c}.$$

Der Wirbel der magnetischen Feldstärke ist dem wahren Strome proportional.

Wir ziehen zunächst nur ruhende Körper in Betracht und haben daher Konvektionsströme nicht zu berücksichtigen, sondern für den wahren Strom  $\mathfrak{c}$  den Ausdruck (157) zu setzen:

$$(177a) \quad \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

ist die allgemeinste Form der ersten Hauptgleichung für ruhende Körper.

Die zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie

ergibt sich aus dem Faradayschen Induktionsgesetz. Wir haben dasselbe bereits im § 61 bei der Definition des Vektors  $\mathfrak{B}$  herangezogen, haben aber dort nur von dem Zeitintegrale des Stromes gesprochen, der bei Erregung eines magnetischen Feldes in einem linearen Leiter induziert wird. Das Faradaysche Induktionsgesetz reicht aber weiter, es bezieht sich auf beliebig veränderliche magnetische Felder.

Wir denken uns in einem solchen Felde einen geschlossenen linearen Leiter. Dieser Leiter bilde die Umfangslinie eines Flächenstückes, welches so gelegt ist, daß jede Induktionslinie des Feldes die Fläche nicht mehr als einmal durchschneidet. Nach dem Faradayschen Induktionsgesetz wird dann in dem Leiter eine elektromotorische Integralkraft induziert, die der zeitlichen Abnahme der Zahl der die Fläche durchsetzenden magnetischen Induktionslinien proportional ist. Der Durchsetzungssinn der Induktionslinien und der Sinn der elektromotorischen Kraft im Leitungskreise sind einander wieder durch eine Rechtsschraube zugeordnet (vgl. § 61).

Wir können die induzierte elektrische Kraft zunächst als eingeprägte Kraft im Sinne des § 56 einführen. Bezeichnen wir sie mit  $\mathfrak{E}^i$ , ihr Integral längs des geschlossenen Kreises mit  $E^i$ , so lautet die Formulierung des Induktionsgesetzes

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i ds = - \frac{1}{c} \int df \frac{\partial \mathfrak{B}^n}{\partial t}.$$

Der universelle Faktor  $\frac{1}{c}$  ist hier eingeführt, um die Übereinstimmung mit den Definitionen des § 61 zu erzielen.

Im § 56 sahen wir, daß die totale elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , welcher die Dichte des Leitungsstromes proportional ist, sich zusammensetzt aus der von der Ansammlung freier Ladungen herrührenden „elektrostatischen Kraft“  $\mathfrak{E}^s$  und der durch chemische oder thermische Inhomogenität des Leiters bedingten eingepprägten oder elektromotorischen Kraft  $\mathfrak{E}^e$ . Indem wir nun die durch Veränderung des Magnetfeldes entstehende induzierte Kraft  $\mathfrak{E}^i$  als der elektromotorischen Kraft

$\mathfrak{G}^e$  gleichwertig betrachten, haben wir zu setzen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^s + \mathfrak{G}^e + \mathfrak{G}^i.$$

Da  $\mathfrak{G}^s$ , die „elektrostatische Kraft“, stets wirbelfrei verteilt ist, so fällt sie bei Integration längs des linearen Leiters heraus und es wird

$$\int \{ \mathfrak{G}_s - \mathfrak{G}_s^e \} ds = \int \mathfrak{G}_s^i ds = E^i.$$

Das soeben formulierte Induktionsgesetz verknüpft nun das Linienintegral  $E^i$  mit der zeitlichen Änderung des Induktionsflusses, welchen die Kurve  $s$  umschlingt. An Stelle des Linienintegrals von  $\mathfrak{G}^i$  tritt der Wirbel dieses Vektors, wenn wir zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen und auf diese das Integralgesetz der Induktion mit Hilfe des Stockesschen Satzes (§ 27) übertragen. Es wird dann

$$(178) \quad \text{curl} \{ \mathfrak{G} - \mathfrak{G}^e \} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Diese differentielle Form des Induktionsgesetzes stellt für ruhende Körper die zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes dar.

Das Integralgesetz, aus dem wir sie ableiteten, bezog sich zunächst nur auf einen geschlossenen Leitungskreis. Indessen liegt, vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus, die Auffassung nahe, daß elektrische Kräfte durch Veränderung des Magnetfeldes im Raume auch dann erregt werden, wenn kein Leiter anwesend ist, und daß wir des Leitungskreises nur bedürfen, um das erregte elektrische Feld beobachten zu können. Dieser Auffassung entsprechend sieht die Maxwellsche Theorie die Hauptgleichung (178) für alle Punkte des Raumes als gültig an.

Bilden wir in (178) beiderseits die Divergenz, so folgt nach (94)

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Wir können also zunächst nur schließen, daß die Divergenz von  $\mathfrak{B}$  an allen Punkten des von ruhenden Körpern erfüllten

Feldes konstant ist. Machen wir indessen die Annahme, daß zu einer früheren Zeit einmal das betreffende Volumelement von magnetischer Erregung frei war, so gelangen wir zu der Grundgleichung (165) zurück:

$$(178a) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Wie bereits im § 61 erwähnt wurde, kann die Hypothese eines unmagnetischen Anfangszustandes Bedenken erregen, wenn permanente Magnete sich im Felde befinden; dennoch werden wir auch bei ferromagnetischen Körpern den Vektor  $\mathfrak{B}$  als quellenfrei betrachten, wahren Magnetismus demnach ausschließen.

Stellt man die zweite Hauptgleichung (178) der ersten (177a) gegenüber, so fällt die Hertz-Heavisidesche Analogie der Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  einerseits,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  andererseits auf. Auf der linken Seite steht in der Tat jedesmal der Curl der Feldstärke  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{H}$ , auf der rechten steht die zeitliche Änderung der Vektoren  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{B}$ . Die Symmetrie wird nur gestört durch das Fehlen des magnetischen Leitungsstromes und durch die hiermit zusammenhängende, dem Vektor  $\mathfrak{B}$  auferlegte Bedingung der Quellenlosigkeit, der  $\mathfrak{D}$  im allgemeinen nicht zu genügen braucht. Man kann indessen diese Lücken der Analogie äußerlich verhüllen, indem man, mit dem Begriffe des „wahren elektrischen Stromes“ operierend, der Form (177) der ersten Hauptgleichung die zweite in der Form gegenüberstellt

$$(178b) \quad \operatorname{curl} \{ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e \} = - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{g},$$

und

$$(178c) \quad \mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

als „Dichte des wahren magnetischen Stromes“ bezeichnet. Führt man dann noch in (177) eingeprägte magnetische Kräfte ein, wovon wir hier noch absehen wollen, so ist die Analogie vollkommen, nur das Vorzeichen ist in der zweiten Hauptgleichung ein anderes als in der ersten.

Diese Verschiedenheit des Vorzeichens ist eng mit dem

Mechanismus der elektromagnetischen Wechselwirkungen verknüpft. Die beste Übersicht über die Vorzeichenverhältnisse wird man aus den nachstehenden vier Figuren erhalten, von denen Abb. 10a die Ampèresche Schwimmregel für einen geradlinigen Strom vor Augen führt. Abb. 10b zeigt, was aus der Ampèreschen Schwimmregel für die Richtung des von einem elektrischen Kreisstrome erregten magnetischen Feldes folgt. Die Ampèresche Regel ist in der Formel (168) für das Feld eines linearen Stromes enthalten. Stromrichtung in den

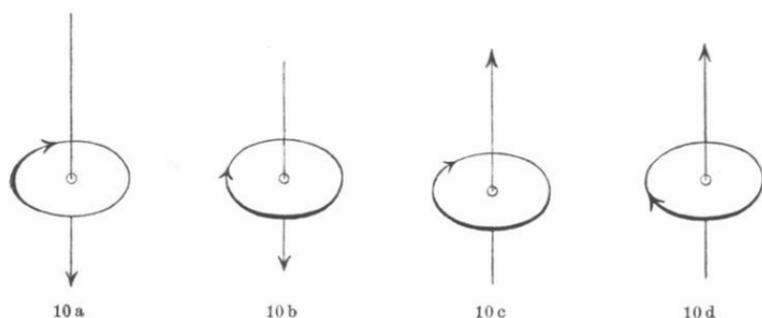


Abb. 10.

Leiterelementen, Radiusvektor nach dem Aufpunkt und magnetische Feldrichtung entsprechen sich wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

Eine analoge Vorzeichenregel über die Richtung der mit einem magnetischen Strome verbundenen elektrischen Kraft liefert uns das Lenzsche Gesetz. Ihm zufolge ruft der induzierte elektrische Strom selbst eine magnetische Induktion hervor, die dem erregenden magnetischen Strome entgegengesetzt gerichtet ist. Auf Grund dieses Gesetzes geht für die Richtung der mit einem geradlinigen magnetischen Strom verbundenen elektrischen Kraft Abb. 10c aus 10b, für einen magnetischen Kreisstrom Abb. 10d aus 10a hervor. Für den magnetischen Strom und die zugehörige elektrische Kraft kehrt sich also die Ampèresche Schwimmregel um. Dem entspricht das entgegengesetzte Vorzeichen in den beiden Hauptgleichungen.

Daß wir bei der Festlegung der Richtung der magnetischen Vektoren stets von rechter oder linker Hand, von Rechtsschraube oder Linksschraube reden müssen, läßt schon vermuten, daß hier axiale Vektoren eine Rolle spielen. Das ist in der Tat der Fall. Wir erkannten schon in § 26, daß der Curl eines polaren Vektors stets axialer, der Curl eines axialen Vektors stets polarer Natur ist. Nun müssen wir unbedingt annehmen, daß die Vektoren  $\mathcal{G}$ ,  $\mathbf{i}$  und  $\mathcal{D}$  zu derselben Art von Vektoren gehören; denn auch in isotropen Körpern ruft ein elektrisches Feld Leitungsstrom bzw. elektrische Verschiebung hervor, es kann aber nur in Körpern von schraubenartiger Struktur ein polarer Vektor einen axialen, oder ein axialer Vektor einen polaren erregen. Aus demselben Grunde müssen die beiden magnetischen Vektoren  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B}$  Vektoren derselben Art sein. Demgemäß lassen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nur zwei Möglichkeiten offen: entweder alle elektrischen Vektoren sind polarer und alle magnetischen axialer Art; oder alle magnetischen Vektoren sind polarer, alle elektrischen axialer Art. Wir hatten bereits in § 35 die erstere Alternative bevorzugt. In der Tat wirkt im homogenen elektrischen Felde auf ein geladenes Probekügelchen eine translatorische Kraft, während eine Magnetnadel im homogenen Magnetfelde nur Drehkräften unterworfen ist. Es liegt hiernach nahe, mit Maxwell die elektrische Kraft als polar, die magnetische als axial anzusehen.

Ein bündigerer Beweis dafür, daß die erstere Alternative zutrifft, läßt sich auf Grund der Existenz des sogenannten Hall-Effektes erbringen. In einer dünnen Metallplatte fließe ein elektrischer Strom; diesem parallel ist zunächst das elektrische Feld in der Platte gerichtet. Nun erzeuge man ein intensives Magnetfeld, dessen Kraftlinien die Plattenebene senkrecht durchschneiden. Alsdann entsteht in der Platte ein transversales elektrisches Feld, dessen Richtung sich umkehrt, wenn entweder der Strom kommutiert oder das Magnetfeld umgekehrt wird. Nun kann ein polarer Vektor und ein axialer mit einer auf

jenem senkrechten Achse sehr wohl einen dritten polaren Vektor bestimmen; denn die Richtung des letzteren kann eindeutig gekennzeichnet werden durch die Festsetzung, daß sie erhalten wird, wenn man die Richtung des ersten, polaren Vektors um einen Rechten in dem durch den zweiten, axialen Vektor festgelegten Sinne dreht. Dieser dritte Vektor wird dann sowohl bei Umkehrung der Richtung des ersten, wie auch bei Umkehrung des Drehsinnes des zweiten Vektors die Richtung umkehren. Dieser Möglichkeit entspricht der Hall-Effekt, wenn man den elektrischen Vektoren polare, den magnetischen axiale Natur zuschreibt. Hingegen ist es nicht denkbar, daß ein axialer Vektor zusammen mit einem auf ihm senkrechten polaren eindeutig den Drehungssinn um eine Achse bestimmt, die senkrecht auf der Achse des ersten und der Richtung des zweiten Vektors ist. Denn spiegelt man dieses Gebilde an der Ebene, die durch die Richtung des zweiten und die Achse des dritten Vektors geht, die mithin auf der Achse des ersten senkrecht steht, so bleibt die Richtung des zweiten und der Drehsinn des ersten unverändert, der Drehsinn des dritten aber kehrt sich um. Es ist daher nicht möglich, daß in einem isotropen Körper ein polarer Vektor zusammen mit einem axialen in der angenommenen Weise einen dritten axialen Vektor bestimmt. Das kann nur in solchen anisotropen Körpern stattfinden, in denen zwei spiegelbildlich einander entsprechende Felder nicht als gleichwertig zu betrachten sind. Es ist also mit der Existenz des Hall-Effektes in isotropen Metallen die Annahme nicht vereinbar, daß die elektrische Kraft ein axialer Vektor ist. Der Hall-Effekt entscheidet zugunsten der ersten der beiden mit den Grundgleichungen verträglichen Möglichkeiten: die elektrischen Vektoren sind polarer, die magnetischen axialer Art.

Da die Divergenz eines polaren Vektors ein richtiger Skalar, die Divergenz eines axialen Vektors hingegen ein Pseudoskalar ist (§ 8), so haben wir die Dichte der wahren Elektrizität als Skalar im eigentlichen Sinne des Wortes zu

betrachten. Die Dichte des wahren Magnetismus hingegen würde, wenn sie von Null verschieden wäre, ein Pseudoskalar sein, der beim Übergang von einem Rechtssystem zu einem Linkssystem das Vorzeichen wechselte. Der wahre Magnetismus könnte daher niemals als Maß der Menge einer Substanz oder auch nur als Maß der zeitlichen Zunahme oder Abnahme einer solchen Menge betrachtet werden. Durch diese Bemerkung wird allen Fluidumshypothesen des Magnetismus der Boden entzogen. Der Maxwell'schen Theorie, welche wahren Magnetismus von vornherein als nicht existierend betrachtet, liegt allerdings die Einführung einer solchen Hypothese auch ohnedies sehr fern.

### § 66. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper.

Die Hauptgleichungen (177a) und (178) sind zunächst nur ein allgemeines Schema; dasselbe wird erst durch Hinzufügung der Beziehungen ausgefüllt, die einerseits die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  mit der elektrischen Stromdichte bzw. der elektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$ , anderseits die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  mit der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$  verknüpfen. Nun ist im elektrostatischen Felde nach (136)

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E},$$

ferner gilt für stationären elektrischen Strom gemäß dem Ohm'schen Gesetz

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E};$$

dabei sind die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  Konstanten, die das elektrische Verhalten des betreffenden isotropen Körpers kennzeichnen. Auch die magnetischen Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  werden (vgl. § 60) einander proportional gesetzt:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

doch ist die so definierte Permeabilität  $\mu$  nur für diamagnetische und paramagnetische Körper wirklich konstant, für ferro-

magnetische Körper aber hängt sie nicht nur von dem momentanen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Feldes ab. Wir schließen daher ferromagnetische Körper hier ausdrücklich aus, indem wir uns vorbehalten, im vierten Abschnitte auf dieselben zurückzukommen. Die Maxwellsche Theorie nimmt nun an, daß die Proportionalität der elektrischen Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{i}$  einerseits, der magnetischen Vektoren  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$  andererseits, die für statische und stationäre Felder durch die Erfahrung bestätigt wird, auch für beliebig rasch wechselnde Felder gilt. Führt man diese Annahme in die Hauptgleichungen (177a), (178) und (178a) ein, so erhält man die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper in der Heaviside-Hertzschen Form:

$$(179) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E},$$

$$(179a) \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl} \{ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e \},$$

$$(179b) \quad \text{div } \mu \mathfrak{H} = 0.$$

Die dritte Gleichung schränkt allgemein die räumliche Verteilung des magnetischen Feldes ein. Ist die momentane Verteilung des magnetischen und des elektrischen Feldes gegeben und sind die eingepprägten elektrischen Kräfte bekannt, so bestimmen die beiden ersten Differentialgleichungen eindeutig die zeitliche Änderung des elektrischen Vektors  $\mathfrak{E}$  und des magnetischen Vektors  $\mathfrak{H}$  an allen Punkten des Feldes. Sie bestimmen daher die aus einem Anfangszustande des Feldes entstehenden Folgezustände.

Wir sind zu diesen Grundgleichungen der Elektrodynamik auf synthetischem Wege gelangt, indem wir von den durch die Erfahrung bestätigten Gesetzen des elektrostatischen Feldes und des magnetischen Feldes stationärer Ströme ausgingen und diese Gesetze in einer zwar hypothetischen, aber doch vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus plausiblen

Weise verallgemeinerten. Ein Beweis, daß diese Gleichungen nun auch für ein jedes elektromagnetische Feld gelten, läßt sich auf Grund der auf statische und stationäre Felder bezüglichen Erfahrungen selbstverständlich nicht erbringen. Die Maxwellsche Theorie unterscheidet sich ja gerade durch die Einführung des Verschiebungsstromes in die erste Hauptgleichung wesentlich von den in dem Boden der Fernwirkung wurzelnden Theorien, welche im Gebiete der Elektrostatik und des stationären Stromes die Erscheinungen ebenso gut darstellen. Der Verschiebungsstrom ist aber der zeitlichen Änderung von  $\mathcal{E}$  proportional; er wird gegenüber dem Leitungsstrom um so mehr zur Geltung gelangen, je schneller die zeitlichen Änderungen des Feldes erfolgen. Daher waren die von Heinrich Hertz entdeckten, schnellen elektrischen Schwingungen für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie von so großer Bedeutung.

Der Beweis der Grundgleichungen wird nicht anders zu erbringen sein als durch Entwicklung der Folgerungen, die sich für rasch wechselnde Felder aus ihnen ergeben. Wir werden in den folgenden Kapiteln, insbesondere im dritten Kapitel dieses Abschnittes sehen, daß sich dieselben in guter Übereinstimmung mit den Tatsachen befinden.

Die Erweiterungen, die man neuerdings der Maxwellschen Theorie gegeben hat, lassen das Schema der Hauptgleichungen (177) und (178) unverändert. Sie füllen es aber in einer etwas anderen Weise aus, indem sie die Beziehungen zwischen der elektrischen Feldstärke  $\mathcal{E}$  und dem Leitungsstrom oder dem Verschiebungsstrom erweitern. Das erweist sich für anisotrope Körper als notwendig, sowie auch z. B. wenn man den oben erwähnten Hall-Effekt mathematisch zur Darstellung bringen will. Auch in der elektromagnetischen Lichttheorie hat man behufs der Erklärung der Dispensionserscheinungen die einfache Proportionalität der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung aufgegeben. Daher haben wir es zweckmäßig gefunden, hier zunächst die beiden Hauptgleichungen zu entwickeln und erst dann zu den Differential-

gleichungen des elektromagnetischen Feldes herabzusteigen, welche der Maxwell'schen Theorie in engerem Sinne eigentümlich sind.

Die Ausdrücke für die elektrische Feldenergie (146) und für die magnetische Feldenergie (162) konnten bisher als einigermaßen willkürlich gewählt erscheinen. Wir wollen jetzt zeigen, daß dem Energieprinzip genügt wird, wenn man die Energie eines elektromagnetischen Feldes der Summe der elektrischen Energie  $U$  und der magnetischen Energie  $T$  gleichsetzt:

$$(180) \quad W = U + T,$$

wo

$$(180a) \quad U = \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) = \frac{1}{8\pi} \int dv \varepsilon \mathfrak{E}^2,$$

$$(180b) \quad T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) = \frac{1}{8\pi} \int dv \mu \mathfrak{H}^2.$$

Wir führen den Beweis, indem wir die zeitliche Zunahme der Größe  $W$  berechnen und uns davon überzeugen, daß sie für ein abgeschlossenes elektromagnetisches Feld der Differenz der von den elektromotorischen Kräften  $\mathfrak{E}^e$  geleisteten Arbeit und der pro Zeiteinheit in den Leitern entwickelten Jouleschen Wärme gleich ist. Es ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int dv \left\{ \left( \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{E} \right) + \left( \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \mathfrak{H} \right) \right\}.$$

Setzt man hier für  $\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  und  $\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$  die durch die beiden ersten Feldgleichungen 179, 179a gegebenen Werte ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{c}{4\pi} \int dv \{ (\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}) \} \\ &\quad + \frac{c}{4\pi} \int dv (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}^e) - \int dv \sigma \mathfrak{E}^2. \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe der allgemeinen Formel (102a) in ein über die Begrenzungsfläche des Feldes erstrecktes Oberflächenintegral umgewandelt, näm-

lich in

$$-\frac{c}{4\pi} \int df[\mathfrak{G}\mathfrak{H}]_n.$$

Auf Grund derselben Formel geht das zweite Integral der rechten Seite über in

$$+\frac{c}{4\pi} \int df[\mathfrak{G}^e\mathfrak{H}]_n + \frac{c}{4\pi} \int dv(\mathfrak{G}^e \operatorname{curl} \mathfrak{H}),$$

was mit Rücksicht auf (179) ergibt

$$+\frac{c}{4\pi} \int df[\mathfrak{G}^e\mathfrak{H}]_n + \int dv(\mathfrak{G}^e \mathfrak{r}),$$

wenn wiederum, was hier zweckmäßig ist, die Dichte des wahren Stromes

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{G} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}$$

eingeführt wird.

Das dritte Glied der rechten Seite endlich gibt die in dem ganzen Felde entwickelte Joulesche Wärme an; denn diese beträgt

$$(180c) \quad Q = \int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{G}) = \int dv \sigma \mathfrak{G}^2.$$

Wir erhalten also schließlich

$$(180d) \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int df[\mathfrak{G} - \mathfrak{G}^e, \mathfrak{H}]_n + \int dv(\mathfrak{G}^e \mathfrak{r}) - Q.$$

Wir denken uns nun das ganze Feld in eine Fläche eingeschlossen, welche im Verlaufe des ganzen Vorganges niemals von einer magnetischen Erregung erreicht wird. Für das von der Fläche eingeschlossene System geht (180d) über in

$$(180e) \quad \frac{dW}{dt} = \int dv(\mathfrak{G}^e \mathfrak{r}) - Q.$$

Wir wollen zunächst den speziellen Fall ins Auge fassen, wo eingeprägte Kräfte  $\mathfrak{G}^e$  nicht vorhanden sind. Dann besagt die zuletzt erhaltene Gleichung: Die zeitliche Abnahme der Größe  $W$  ist der entwickelten Jouleschen Wärme gleich. Da es sich hier um ruhende Körper handelt, wo weder kinetische

Energie ponderabler Massen noch etwa eine Arbeitsleistung ponderomotorischer Kräfte in Frage kommt, so kann nach dem Energieprinzip die Größe  $W$  nur durch eine additive Konstante vom Werte der elektromagnetischen Energie abweichen; doch ist es das einfachste, diese so zu wählen, daß sie mit verschwindendem elektromagnetischen Felde gleich Null wird. So ergibt sich denn, wenigstens falls eingeprägte Kräfte  $\mathfrak{G}^e$  fehlen, der Ausdruck (180) für die gesamte elektromagnetische Energie mit Notwendigkeit aus den Feldgleichungen.

Wenn nun die Maxwellsche Theorie diese Gesamtenergie in bestimmter Weise, nämlich mit der Dichte

$$(180f) \quad \psi = \frac{1}{8\pi} \left\{ \varepsilon \mathfrak{G}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \right\}$$

über das Feld verteilt denkt, so liegt hierin allerdings eine gewisse Willkür. Wir hatten für gewisse spezielle Felder auch andere Annahmen über die Verteilung als zulässig erkannt. Doch dürfte der Ansatz (180f) für die Energiedichte sich kaum durch einen andern, ebenso einfachen, ersetzen lassen, welcher die Energie des Volumelementes nur von den daselbst herrschenden Feldstärken abhängig macht.

Nicht ganz so einfach liegt die Sache, wenn eingeprägte Kräfte  $\mathfrak{G}^e$  wirken. Die nächstliegende Deutung der Beziehung (180e) ist dann die folgende.

Das erste Glied der rechten Seite stellt die von den eingepprägten elektromotorischen Kräften  $\mathfrak{G}^e$  pro Zeiteinheit im ganzen Felde geleistete Arbeit dar:

$$(180g) \quad \frac{dA}{dt} = \int dv (\mathfrak{G}^e \mathfrak{r}) = \int dv \left( \mathfrak{G}^e, \mathbf{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right);$$

es leisten nach dieser Auffassung die elektromotorischen Kräfte nicht nur dann Arbeit, wenn ein Leitungsstrom, sondern auch dann, wenn ein Verschiebungsstrom den Körper durchströmt, in dem jene Kräfte ihren Sitz haben. Die Gleichung (180e) besagt nun: Die zeitliche Zunahme, welche die durch (180) definierte Größe  $W$  erfährt, ist gleich dem Überschuß der von den eingepprägten elektrischen Kräften geleisteten Arbeit über

die Joulesche Wärme. Die elektrische Energie ist dabei durch die totale elektrische Kraft  $\mathfrak{G}$  bestimmt, in welcher die eingeprägte Kraft  $\mathfrak{G}^e$  mitgerechnet ist. Diese Annahme wird natürlich nur dann zulässig sein, wenn die elektrische Verschiebung dem Vektor  $\mathfrak{G}$  proportional ist.

Es ist jedoch noch eine zweite, von jener abweichende Deutung der Beziehung (180e) möglich. Wirken die eingeprägten Kräfte  $\mathfrak{G}^e$  bei der elektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  mit, so wird, nach Analogie von (161), zu setzen sein

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} (\mathfrak{G}^s + \mathfrak{G}^e) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{G},$$

wo  $\mathfrak{G}^s$ , gemäß (179a), in statischen oder stationären elektrischen Feldern wirbelfrei ist. Da jedoch die eingeprägte Kraft während des betreffenden elektromagnetischen Vorganges konstant gehalten zu denken ist, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}^s}{\partial t}.$$

Man kann nun auch, in (180e), den Anteil des Verschiebungsstromes auf die linke Seite schaffen und erhält so

$$\int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \left( \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{G}^s}{\partial t} \mathfrak{G}^s \right) + \left( \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \mathfrak{H} \right) \right\} = \int dv (\mathfrak{G}^e \mathbf{i}) - Q.$$

Diese Form der Energiegleichung gestattet die Deutung, daß nicht (180g), sondern

$$(180h) \quad \frac{dA'}{dt} = \int dv (\mathfrak{G}^e \mathbf{i})$$

die Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte darstellt, und daß für die Energie, statt (180), zu setzen ist:

$$(180i) \quad W' = \int \frac{dv}{8\pi} \{ \varepsilon (\mathfrak{G} - \mathfrak{G}^e)^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \}.$$

Der zweite Ansatz (180h) für die Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte ist von dem ersten nur dann verschieden, wenn dort, wo eingeprägte Kräfte wirken, ein Verschiebungsstrom stattfindet. Nach der ersten Annahme leisten die eingeprägten Kräfte dann Arbeit, nach der zweiten nicht; je nachdem man jener oder dieser

Annahme sich anschließt, hat man im Ausdrucke der elektrischen Energie die eingeprägte Kraft  $\mathcal{G}^e$  mitzurechnen oder nicht. Man kann zwischen den beiden Annahmen wohl nur auf Grund spezieller Vorstellungen über die Wirkungsweise der eingepägten Kräfte entscheiden.

In einer wässerigen Lösung eines Elektrolyten wirken nach der osmotischen Theorie die osmotischen Kräfte  $\mathcal{G}^e$  nur auf die gelösten Ionen, welche den Leitungsstrom bilden. Finden nun elektrische Schwingungen in dem Lösungsmittel statt, so ist der Verschiebungsstrom wesentlich durch das Lösungsmittel bedingt, auf welches die osmotischen Kräfte nicht wirken. In diesem Falle wird also eine Arbeitsleistung der eingepägten Kräfte nur beim Leitungsstrom, nicht beim Verschiebungsstrom in Rechnung zu ziehen sein, entsprechend der zweiten Auffassung. Hier ist allerdings die Verschiebung  $\mathfrak{D}$  nicht dem Vektor  $\mathcal{G}$ , sondern  $\mathcal{G}^e$  proportional, so daß von vornherein der Energieausdruck (180i) als der zutreffende erscheint.

### § 67. Maßeinheiten und Dimensionen.

Wir erkannten im § 59, daß die verschiedenen absoluten Einheitssysteme der elektrischen Größen sich durch die Einheit und Dimension kennzeichnen ließen, welche der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  zugeschrieben werden. Das sogenannte elektrostatische Maßsystem betrachtet  $\epsilon$  als reine Zahl, deren Wert für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Wir wollen jetzt, nachdem wir die Verkettungsgleichungen der elektrischen und magnetischen Größen kennen gelernt haben, eine Übersicht über die verschiedenen absoluten Maßsysteme geben. In den Verkettungsgleichungen (179), (179a) kommen außer  $\epsilon$  noch zwei Größen  $\mu$  und  $c$  vor, über deren Dimension wir noch nichts ausgesagt haben; wir haben deren Dimension gerade darum zunächst unbestimmt gelassen, weil wir der Wahl des Maßsystemes nicht vorgreifen wollten. Wir wurden indessen durch das Energieprinzip dazu veranlaßt, die Konstante  $c$  in

beide Hauptgleichungen aufzunehmen. Wir können jetzt auf Grund der Feldgleichungen (179), (179a) uns davon überzeugen, daß wir, welche Verfügung wir auch über die Einheiten von  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $c$  treffen, für die elektrische und die magnetische Energiedichte die gleiche Dimension erhalten. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die beiden Feldgleichungen über Kreuz; dabei können wir das mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  behaftete Glied in (179) außer acht lassen, weil wir die Dimension von  $\sigma$  bereits in § 59 mit der Dimension von  $\epsilon$  in Verbindung gebracht haben. Da die Bildung des Curl der Division durch eine Länge in bezug auf die Dimension äquivalent ist, so steht auf der einen Seite ein Ausdruck, dessen Dimension dem Quotienten aus elektrischer Energiedichte  $\frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{G}^2$  und dem Produkte von Länge, Zeit und  $c$  äquivalent ist; die andere Seite hingegen ist in bezug auf die Dimension dem Quotienten aus der magnetischen Energiedichte  $\frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2$  und dem Produkte aus Länge, Zeit und  $c$  äquivalent. Hätten wir die universelle Konstante  $c$  nur in eine der beiden Hauptgleichungen eingeführt, so würde es unmöglich sein, beiden Energiearten die vom absoluten Maßsystem vorgeschriebene Dimension zu geben.

Das absolute Maßsystem legt aber den zu wählenden Dimensionen noch eine weitere Einschränkung auf. Wir erkennen dieses, indem wir die linken und rechten Seiten der Feldgleichungen miteinander multiplizieren (der Leitungsstrom mag dabei wieder gestrichen werden, weil seine Dimension allgemein derjenigen des Verschiebungsstromes gleich gemacht ist). Dann heben sich die Dimensionen von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  heraus und man erhält

$$(181) \quad \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = L T^{-1}.$$

Die hier auftretende Verbindung der drei Konstanten  $c$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  hat demnach die Dimension einer Geschwindigkeit. Es ist, wie hier vorweg bemerkt werden mag, die Geschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Störungen in dem betreffenden

Isolator fortpflanzen. Es dürfen also nur zweien der drei Konstanten willkürliche Dimensionen beigelegt werden, die Dimension der dritten ist dann durch (181) festgelegt. Das allgemeinste absolute Maßsystem der elektrischen und magnetischen Größen müßte also die Dimension zweier der drei Konstanten unbestimmt lassen.

Man hat es indessen vorgezogen, das Maßsystem nicht sowohl möglichst allgemein zu lassen, als vielmehr es so einfach zu gestalten, wie es für den ins Auge gefaßten Zweck zulässig war. Dabei sind nun verschiedene Auffassungen möglich. Man kann beabsichtigen, in den Dimensionen den Unterschied von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$ , von  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{B}$  hervortreten zu lassen, so daß man etwa in einem gegebenen Falle kontrollieren kann, ob die Einführung von wahrer oder freier Elektrizität, von wahren oder freiem Strome in eine Gleichung die angemessene ist. Dann wird man  $\epsilon$  und  $\mu$  eine Dimension geben und wird nur  $c$  als reine Zahl betrachten, deren Wert man dann konsequenterweise gleich 1 setzt. Dieser Auffassung entsprechen die beiden ersten Spalten der beigegebenen Dimensionstafel. In der ersten Spalte ist die Dimension von  $\epsilon$ , in der zweiten diejenige von  $\mu$  unbestimmt gelassen.

Vernachlässigt man in der ersten Spalte der Tafel die Dimension von  $\epsilon$ , so gelangt man zu den Angaben des elektrostatischen Maßsystemes. Dieses setzt den Zahlwert von  $c$  gleich 1 und schreibt  $c$  wie  $\epsilon$  die Dimension Null zu; daher muß es, gemäß (181),  $\mu$  die Dimension  $L^{-2} T^2$  geben.

Streicht man in der zweiten Spalte die Dimension von  $\mu$ , so erhält man die Angaben des elektromagnetischen Maßsystemes. Dieses setzt gleichfalls den Zahlwert von  $c$  gleich 1 und schreibt  $c$  wie  $\mu$  die Dimension Null, mithin  $\epsilon$  die Dimension  $L^{-2} T^2$  zu.

Man kann von der ersten Spalte zur zweiten übergehen, indem man für die Dimension von  $\epsilon$  in die erste Spalte den Wert einführt, der ihm in der zweiten Spalte zukommt. Umgekehrt gelangt man von den Angaben der zweiten Spalte zu denen der ersten, indem man die Dimension von  $\mu$  durch

Tafel der Dimensionen.

	Ausgedrückt in $\epsilon$	Ausgedrückt in $\mu$	Gaußsches System
Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ . . . . .	$\epsilon$	$L^{-2} T^2 \mu^{-1}$	0
Permeabilität $\mu$ . . . . .	$L^{-2} T^2 \epsilon^{-1}$	$\mu$	0
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Wahre Elektrizitätsmenge $e$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdicke derselben $q$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Freie Elektrizitätsmenge $e'$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdicke derselben $q'$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Wahrer Magnetismus (nicht vorhanden) . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdicke desselben $e_m$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$

Freier Magnetismus . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdicke desselben $e'_m$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Potential der freien Elektrizität $\varphi$ = elektro- motorische Kraft $E^e$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potential des freien Magnetismus $\varphi_m$ = magneto- motorische Kraft . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Strom $J$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Wahre Stromdichte $i$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \epsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Freie Stromdichte $i'$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Vektorpotential des freien Stromes $\mathfrak{A}$ . . . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Leitfähigkeit $\sigma$ . . . . .	$T^{-1} \epsilon$	$L^{-2} T \mu^{-1}$	$T^{-1}$
Widerstand $R$ . . . . .	$L^{-1} T \epsilon^{-1}$	$L T^{-1} \mu$	$L^{-1} T$
Kapazität $K$ . . . . .	$L \epsilon$	$L^{-1} T^2 \mu^{-1}$	$L$
Selbstinduktion $L$ . . . . .	$L^{-1} T^2 \epsilon^{-1}$	$L \mu$	$L$
Universelle Konstante $c$ . . . . .	$0$	$0$	$L T^{-1}$

diejenige von  $\epsilon$  ausdrückt. Dabei gehen dann stets ganzzahlige Potenzen einer Geschwindigkeit ein. So kommt es, daß die Dimensionen des elektrostatischen und elektromagnetischen Systemes, die man durch Unterdrückung von  $\epsilon$  bzw.  $\mu$  in der ersten bzw. zweiten Spalte erhält, sich durch ganzzahlige Potenzen einer Geschwindigkeit unterscheiden. Man hat z. B., um eine elektromagnetisch gemessene Stromstärke auf elektrostatisches Maß umzurechnen, mit einer Geschwindigkeit zu multiplizieren; diese Geschwindigkeit hat man experimentell gleich  $3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  gefunden. Die gleiche Geschwindigkeit bzw. eine ganze positive oder negative Potenz derselben tritt bei der Umrechnung der anderen Größen auf.

Während in diesen Systemen entweder die elektrischen oder die magnetischen Größen bevorzugt werden, werden in dem Gaußschen Maßsysteme elektrische und magnetische Größen paritätisch behandelt. Es werden nämlich die Konstanten  $\epsilon$  und  $\mu$  beide als reine Zahlen betrachtet, wodurch dann  $c$  nach (181) die Dimension einer Geschwindigkeit erhält, deren Zahlwert gleich  $3 \times 10^{10}$  ist. Elektrische und magnetische Feldstärke werden hier beide gleich der Wurzel aus einer Energiedichte, wahre und freie Elektrizität werden dimensionsgleich, ebenso wahrer und freier Strom. Die Dimensionen dieses auch von H. Hertz zugrunde gelegten Maßsystemes finden sich in der dritten Spalte der Tabelle. Der von den neueren Weiterbildungen der Maxwellschen Theorie gemachten Annahme, daß das elektromagnetische Feld eigentlich als Feld im Äther zu betrachten ist, das nur durch die in der Materie enthaltene Elektrizität bzw. durch deren Bewegung modifiziert wird, paßt sich dieses Dimensionssystem am besten an. Denn  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  werden hier wesensgleich,  $\epsilon$  und  $\mu$  sinken daher zum Range dimensionsloser Größen herab, deren Zahlwert für den Äther gleich 1 gesetzt wird. Dieses Gaußsche Maßsystem wird daher den weiteren Entwicklungen zugrunde gelegt werden.

## Zweites Kapitel.

## Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

## § 68. Die Anwendung des Vektorpotentials in der Elektrodynamik.

Wir stellen uns in diesem Kapitel die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf elektrischer Ströme in ruhenden Leitern zu untersuchen. Den im vorigen Kapitel entwickelten Anschauungen gemäß haben wir uns die Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme folgendermaßen vorzustellen. Der erste Strom erzeugt, der ersten Hauptgleichung entsprechend, ein magnetisches Feld  $\mathfrak{H}$ . Dieses gibt zu einem Induktionsflusse durch den zweiten Leiter Veranlassung, der wesentlich von der Permeabilität der im Felde befindlichen Körper abhängt. Solange als der Induktionsfluß durch den zweiten Leiter konstant ist, beeinflusst er den daselbst zirkulierenden Strom nicht; ändert sich aber der Induktionsfluß, d. h. die Zahl der vom zweiten Leiter umschlungenen Induktionslinien, so wird in diesem Leiter eine elektromotorische Kraft induziert. Das Linienintegral der induzierten elektromotorischen Kraft ist nach dem Induktionsgesetze (vgl. § 65) für einen ruhenden Leiter

$$(182) \quad E^i = \int \mathfrak{G}_s^i ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df,$$

wenn  $\mathfrak{s}$  die Leitlinie des geschlossenen Stromkreises,  $f$  die umrandete Fläche bedeutet.

Nun läßt sich der stets quellenfreie Vektor  $\mathfrak{B}$  als Curl des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  darstellen. Wir haben in den §§ 62 und 64 gelernt, für ein stationäres magnetisches Feld das Vektorpotential zu berechnen, wenn die Stromverteilung bzw. die Magnetisierung der Körper bekannt war. Nach dem Stokeschen Satze (§ 27) erhalten wir für den Induktionsfluß

$$(182a) \quad \int \mathfrak{B}_n df = \int \text{curl}_n \mathfrak{A} df = \int \mathfrak{A}_s ds,$$

und somit für die längs der geschlossenen Leitlinie integrierte elektromotorische Kraft (182)

$$(182b) \quad E^i = \int \mathfrak{G}_i^i ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{A}_i ds.$$

Die in einem geschlossenen Stromkreise induzierte elektromotorische Integralkraft ist proportional der zeitlichen Abnahme des längs der Leitlinie des Stromkreises erstreckten Linienintegrals des Vektorpotentials.

Die in den §§ 62 und 64 gegebene Berechnung des Vektorpotentials war, wie erwähnt, auf das Feld stationärer elektrischer Ströme beschränkt, indem die erste Hauptgleichung in der Form (169) zugrunde gelegt wurde. Für den Fall, daß die Permeabilität  $\mu$  im ganzen Raume konstant ist, ließ sich das Vektorpotential durch Integration über das ganze Feld der quellenfreien Strömung  $\mathbf{i}$  berechnen (170). Jetzt haben wir es indessen nicht mit einem stationären, sondern mit einem veränderlichen Strome zu tun. Hier ist streng genommen der Leitungsstrom  $\mathbf{i}$  nicht quellenfrei, er wird erst durch den Verschiebungsstrom zu einer quellenfreien Strömung ergänzt. Der erweiterten ersten Hauptgleichung (177) gemäß ist hier das Vektorpotential nicht aus dem Leitungsstrome  $\mathbf{i}$ , sondern aus dem wahren Strome  $\mathbf{t}$  zu berechnen. Tut man dieses, so kann man an der bisherigen Definition des Vektorpotentials (§ 28) festhalten, als eines Vektors, dessen Divergenz gleich Null ist und dessen Komponenten der Laplaceschen bzw. der Poissonschen Gleichung genügen. Man kann so die bisherige Entwicklung formal auf das Feld beliebig rasch wechselnder Ströme übertragen, indem nur neben dem Leitungsstrome der Verschiebungsstrom berücksichtigt wird. Hierbei verliert indessen die Lösung ihre einfache physikalische Bedeutung; denn der Verschiebungsstrom ist nicht auf den Leiter beschränkt, sondern er erfüllt den ganzen umgebenden Isolator; auch ist seine Verteilung nicht bekannt, so daß dieser Ausdruck des Vektorpotentials sich gar nicht auswerten läßt. Man ist also

nicht imstande, auf Grund dieses Ausdruckes das Vektorpotential und, mit Hilfe der Gleichung (182b), die in einem benachbarten Leiter induzierte elektromotorische Integralkraft zu berechnen, wenn man es mit hochfrequenten Wechselströmen zu tun hat.

Es ist ja auch ohne weiteres einleuchtend, daß die Ausbreitung der von einem solchen Strome ausgehenden elektromagnetischen Erregung sich nicht durch Potentialausdrücke darstellen lassen wird. Denn diese Ausdrücke machen das Feld im Aufpunkte von den gleichzeitigen Zuständen in den Quellpunkten der Erregung abhängig, sie berücksichtigen nicht, daß die Störung nach unserer Theorie Zeit gebraucht, um vom Quellpunkte zum Aufpunkte zu gelangen. Für die allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes ist das Vektorpotential in der bisherigen Form ebensowenig verwertbar, wie das skalare Potential der Elektrostatik.

Man kann allerdings die Potentiale für die Theorie rasch veränderlicher Felder verwertbar machen, indem man die Zeit der Ausbreitung in Rechnung zieht, also eine gewisse „Latenzzeit“ einführt. Doch genügen die so abgeänderten Ausdrücke nicht mehr der Laplaceschen Gleichung, sondern der sogenannten Wellengleichung; die im ersten Abschnitte gegebenen Definitionen des skalaren und des Vektorpotentials sind demgemäß wesentlich zu modifizieren, wenn man jenen Ausdrücken diese Benennung beizulegen wünscht. Wir kommen darauf im zweiten Bande dieses Werkes ausführlich zurück; hier im ersten Bande jedoch werden wir der bisherigen Definition gemäß das skalare Potential und das Vektorpotential aus den gleichzeitigen Ladungen und Strömen berechnen.

Wenn wir nun trotzdem in diesem Kapitel mit dem Vektorpotentiale operieren, so schränken wir den Gültigkeitsbereich der Entwicklungen von vornherein sehr wesentlich ein. Wir beschränken ihn auf solche Fälle, wo der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom zu vernachlässigen ist. Wir beseitigen also gerade dasjenige, was die Maxwellsche

Theorie von den in dem Boden der Fernwirkungsvorstellung wurzelnden Theorien trennt, und können daher nicht hoffen, irgendein Kriterium zu finden, welches die Maxwellsche Theorie von den Fernwirkungstheorien sondert. In den Gültigkeitsbereich der Entwicklungen dieses Kapitels fallen nur solche Systeme veränderlicher Ströme, deren Änderungszeit (Schwingungsdauer bei Wechselströmen) groß ist gegen die Zeit, welche die elektromagnetischen Störungen gebrauchen, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Systemes zu durchmessen. Solche Ströme werden wir als quasistationär bezeichnen. Wir berechnen das magnetische Feld quasistationärer Ströme und dessen Energie so, als ob der Strom stationär wäre, und bestimmen aus dem so berechneten Felde die Induktionswirkungen. Ob wir in einem gegebenen Falle so verfahren dürfen, das hängt, wie erwähnt, erstens von der Frequenz der Ströme ab und zweitens von ihrem Abstände. Auf dem Gebiete des gewöhnlichen Wechselstromes hat sich die mit quasistationärem Strome operierende Theorie gut bewährt, bei den hochfrequenten Störungen indessen, mit denen die drahtlose Telegraphie arbeitet, versagt diese Theorie vielfach.

### § 69. Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme.

Wir denken uns zwei Stromringe, deren Entfernung so gering ist, daß den Bedingungen genügt wird, welche die Theorie der quasistationären Strömung stellt, und doch so groß, daß der kleinste Abstand der beiden Leiter groß gegen den Querschnittsradius eines jeden Leiters ist. Alsdann kann für die in der Nachbarschaft des zweiten Leiter liegenden Aufpunkte der erste Leiter als linear betrachtet werden und umgekehrt; für die gegenseitigen Induktionswirkungen kommen dann nicht die Querschnittsdimensionen, sondern nur die Leitlinien  $s_1$ ,  $s_2$  der beiden Stromringe bzw. deren gegenseitige Lage in Betracht.

Es ist  $J_1$  der im ersten Leiter zirkulierende, etwa durch

eingeprägte Kräfte unterhaltene Strom; nach Gleichung (168a) leitet sich das magnetische Feld bzw. die magnetische Induktion aus dem Vektorpotentiale ab:

$$(183) \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{\mu J_1}{c} \int \frac{d\mathfrak{s}_1}{r}.$$

Dieser Gleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß im ganzen Raume die Permeabilität die gleiche ist; diese Voraussetzung wollen wir zunächst festhalten.

Da wir nun im vorigen Paragraphen gelernt haben, den Induktionsfluß direkt durch das Linienintegral des Vektorpotentiales auszudrücken, so können wir uns die Berechnung des Vektors  $\mathfrak{B}$  ersparen. Die Gleichung (182a) ergibt als Induktionsfluß, den der erste Leiter durch den zweiten sendet

$$\int \mathfrak{B}_{1n} df_2 = \int \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_2.$$

Führt man hier den Ausdruck (183) des Vektorpotentiales  $\mathfrak{A}_1$  ein, so erhält man als Induktionsfluß, den der im ersten Leiter zirkulierende Strom  $J_1$  durch eine vom zweiten Leiter begrenzte Fläche sendet,

$$(183a) \quad \frac{1}{c} L_{12} J_1 = J_1 \frac{\mu}{c} \int \int \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}.$$

Der hierbei auftretende Koeffizient von  $J_1$

$$(183b) \quad L_{12} = \mu \int \int \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}$$

wird Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden linearen Leiter genannt. Er ist der Permeabilität des raumerfüllenden Körpers proportional, hängt aber im übrigen nur von der Form der beiden Leitlinien und ihrer gegenseitigen Lage ab. Es ist, behufs Auswertung des Ausdruckes für  $L_{12}$ , das Produkt aus je zwei Linienelementen der beiden linearen Leiter und dem Cosinus des von den Stromrichtungen in den beiden Elementen eingeschlossenen Winkels  $\eta$

$$ds_1 ds_2 \cos \eta = d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2$$

durch den Abstand der beiden Elemente zu dividieren und

sodann über alle Kombinationen je zweier solcher Elemente zu integrieren. Da das Resultat dieser Operationen offenbar unabhängig davon ist, welchen Leiter man als ersten und welchen man als zweiten bezeichnet, so ist

$$(183c) \quad L_{12} = L_{21}.$$

Dabei ist der Induktionsfluß, den ein im zweiten Stromring zirkulierender Strom  $J_2$  durch den ersten sendet,

$$\int \mathfrak{B}_{2n} df_1 = \int \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{s}_1,$$

wofür, in entsprechender Weise, wie oben, erhalten wird

$$(183d) \quad \frac{1}{c} L_{21} J_2 = J_2 \frac{\mu}{c} \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{21}}.$$

Die Dimension des Induktionskoeffizienten ist gleich dem Produkte von Länge und Dimension der Permeabilität. In der Dimensionstafel des § 67 ist dies bereits berücksichtigt und für  $L$  in jeder der drei Spalten der betreffende Dimensionsausdruck eingeführt worden. Im Gaußschen System z. B., wo  $\mu$  eine reine Zahl ist, wird  $L_{12}$  eine Länge.

Wenn wir nun die Induktionswirkungen in dem betrachteten Systeme zweier quasistationärer elektrischer Ströme erschöpfend darstellen wollen, so haben wir in Betracht zu ziehen, daß durch eine von der Leitlinie des zweiten Stromkreises umrandete Fläche nicht nur der erste Strom, sondern auch der zweite Strom selbst Induktionslinien hindurchsendet. Eine elektromotorische Kraft wird daher in jedem der beiden Leiter nicht nur dann induziert, wenn die Stromstärke in dem anderen, sondern auch, wenn die Stromstärke in dem betreffenden Leiter selbst sich ändert. Der gegenseitigen Induktion tritt daher die Selbstinduktion an die Seite.

Bei der Definition des Koeffizienten der Selbstinduktion tritt nun eine Schwierigkeit auf. Zunächst ist bei der Bestimmung des Vektorpotentials in den Punkten eines Leiters der in dem Leiter selbst zirkulierende Strom nicht als linearer

Strom zu betrachten, da die Entfernung je zweier Leiter-elemente durchaus nicht immer groß gegen die Querschnittsdimensionen ist. Das magnetische Feld in der Nachbarschaft des Stromes und der Induktionsfluß, den er durch sich selbst hindurchsendet, hängt daher auch wesentlich von der Gestalt des Querschnittes ab. Außerdem ist die Wahl der Leitlinie, die das von den Induktionslinien durchsetzte Flächenstück begrenzen soll, mit einiger Willkür verbunden. Behufs eindeutiger Festlegung des Koeffizienten der Selbstinduktion müssen wir anders verfahren.

Wir gehen zurück auf den Ausdruck (170b), auf den wir die magnetische Energie eines stationären Stromsystemes gebracht hatten und der ganz allgemein gilt:

$$(184) \quad T = \frac{1}{2c} \int dv (\mathbf{i} \mathfrak{A}).$$

Wir wollen das Stromfeld in Stromfäden zerlegen und einen einzelnen Stromfaden betrachten; es ist das Volumen eines Elementes des Stromfadens

$$dv = q ds,$$

wo  $q$  den Querschnitt,  $ds$  die Länge des Stromelementes bedeutet. Der Beitrag, den dieses Element zur magnetischen Energie beisteuert, ist gleich

$$\frac{1}{2c} q |\mathbf{i}| \int ds \mathfrak{A}_s.$$

Dabei bedeutet  $q |\mathbf{i}|$  die Stromstärke des Fadens,

$$\int ds \mathfrak{A}_s,$$

den Induktionsfluß durch eine von dem Faden umrandete Fläche. Um die magnetische Energie des Stromsystemes zu berechnen, hat man für jeden Stromfaden das Produkt aus Stromstärke und umschlungenem Induktionsfluß zu bilden, über alle Stromfäden zu integrieren und das Integral durch  $2c$  zu dividieren.

Wir wenden dieses Ergebnis auf unser Problem an, indem

wir den Induktionsfluß in zwei Teile zerlegen, den vom ersten und den vom zweiten Strome erzeugten. Der vom ersten Strome erzeugte Induktionsfluß ist für alle Stromfäden des zweiten Stromes merklich der gleiche, da wir ja die Entfernung groß gegen die Querschnittsabmessungen annehmen. Der zweite Stromring ist hier als Stromfaden anzusehen und der entsprechende Energieanteil gleich

$$\frac{1}{2c} J_2 \cdot \frac{1}{c} L_{12} J_1 = \frac{1}{2c^2} L_{12} J_1 J_2$$

zu setzen.

Entsprechend ergibt der vom zweiten Strom durch den ersten gesandte Induktionsfluß einen Energieanteil

$$\frac{1}{2c} J_1 \cdot \frac{1}{c} L_{21} J_2 = \frac{1}{2c^2} L_{21} J_2 J_1.$$

Die Summe der beiden von der wechselseitigen Induktion der beiden Ströme herrührenden Energieanteile ist nach (183 c)

$$(184a) \quad T_{12} = \frac{L_{12}}{c^2} J_1 J_2.$$

Hierzu treten diejenigen Energieanteile, welche von dem Induktionsfluß herrühren, den jeder der beiden Ströme durch seine eigenen Stromfäden hindurchsendet. Diese Anteile bezeichnen wir mit  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  und erhalten

$$(184b) \quad T = T_{11} + T_{12} + T_{22}.$$

$T_{11}$  ist von der Anwesenheit des zweiten Stromes ganz unabhängig. Sein Wert hängt nur von dem ersten Strome ab. Steigert man dessen Stromstärke  $J_1$ , so nimmt  $T_{11}$  dem Quadrate von  $J_1$  proportional zu. Denn es wachsen die Stromstärken der einzelnen Fäden und daher auch die Induktionsflüsse alle wie  $J_1$ . Setzen wir

$$(184c) \quad T_{11} = \frac{1}{2} \frac{L_{11}}{c^2} J_1^2,$$

so ist  $L_{11}$  eine mit  $L_{12}$  dimensionsgleiche Größe, welche nur von der Beschaffenheit des ersten Leiters abhängt, übrigens aber der Permeabilität proportional ist, die innerhalb und außerhalb des Leiters durchweg den gleichen Wert besitzen

mag. Wir nennen  $L_{11}$  den „Selbstinduktionskoeffizienten“ des ersten Leiters.

Führt man in (184) den Ausdruck (170) des Vektorpotentials ein, so erhält man für die Energie eines einzelnen Stromkreises

$$T = \frac{\mu}{2c^2} \int dv' \int \frac{dv''}{r} (\mathbf{i}' \mathbf{i}'').$$

Dabei bezeichnen  $dv'$ ,  $dv''$  je zwei in der Entfernung  $r$  voneinander befindliche Volumelemente des Stromkreises. Jede Kombination zweier Volumelemente kommt zweimal vor, einmal nämlich steuert das eine, das andere Mal das andere seinen Beitrag zum Vektorpotential bei. Nimmt man jede Kombination nur einmal, so ist zu setzen

$$(184d) \quad T = \frac{\mu}{c^2} \int \int \frac{dv' dv''}{r} (\mathbf{i}' \mathbf{i}'').$$

Ist  $J$  die Stromstärke dieses Kreises, so ist der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  gemäß (184c) zu definieren durch

$$(184e) \quad \frac{1}{2} L J^2 = \mu \int \int \frac{dv' dv''}{r} (\mathbf{i}' \mathbf{i}'').$$

Der Quotient  $L/\mu$  hängt nur von der Beschaffenheit des Leiters ab; denn die Stromverteilung ist — wofern sie mit der Verteilung des stationären Stromes übereinstimmt — von der Stromstärke unabhängig, die Quotienten  $\mathbf{i}'/J$ ,  $\mathbf{i}''/J$  haben demnach Beträge und Richtungen, die nur von der geometrischen und physikalischen Beschaffenheit des Stromkreises, nicht aber von der Stromstärke  $J$  abhängen. Hat man es mit einem durchweg homogenen Leiter zu tun, dessen Permeabilität gleich 1 ist und der sich im Luftraume befindet, so ist  $L$  durch die geometrische Form des Leiters allein bestimmt. Dabei kommt nicht nur die Form der Leitlinie, sondern auch diejenige des Querschnittes in Betracht. Bei schnellen elektrischen Schwingungen allerdings kann, auch wenn im übrigen die Voraussetzungen der quasistationären Strömung erfüllt sind, die Stromverteilung von derjenigen des stationären Stromes abweichen. Alsdann hängt auch  $L$  von der Frequenz der

Schwingungen ab. Doch würde es hier zu weit führen, wenn wir auf diese Fragen eingehen wollten. Für langsame Stromschwankungen ist der Selbstinduktionskoeffizient eines Stromringes nunmehr eindeutig durch die magnetische Energie definiert.

Zu unserm Systeme zweier Stromringe zurückkehrend, erhalten wir für die gesamte magnetische Energie

$$(185) \quad T = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right\}.$$

Hat man es mit dem ersten Strome allein zu tun, so ist die Abnahme der Stromstärke  $J_1$  mit einer Energieabnahme verbunden:

$$- \frac{dT_{11}}{dt} = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2 \right\} = - \frac{L_{11}}{c^2} J_1 \frac{dJ_1}{dt}.$$

Diese Energieabnahme muß der Arbeitsleistung der induzierten elektromotorischen Kräfte äquivalent sein; da die Arbeit der induzierten Integralkraft  $E_{11}^i$  gleich  $J_1 E_{11}^i$  ist, so erhält man

$$J_1 E_{11}^i = - \frac{L_{11}}{c^2} J_1 \frac{dJ_1}{dt},$$

daher

$$(185a) \quad E_{11}^i = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_{11} J_1}{c^2} \right\}.$$

Treten aber außerdem Stromschwankungen im zweiten Leiter ein, so erhält man eine zeitliche Änderung des Induktionsflusses (183 d), den der zweite Stromring durch den ersten sendet. Dieselbe beträgt

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_{21} J_2}{c} \right\},$$

und nach dem Induktionsgesetz (§ 65) wird die induzierte elektromotorische Integralkraft

$$(185b) \quad E_{21}^i = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_{21} J_2}{c^2} \right\}.$$

Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion (185a) entspricht also durchaus derjenigen der gegenseitigen Induktion (185b), obwohl wir behufs ihrer eindeutigen Definition auf

den Ausdruck (184e) für die Energie eines Stromringes zurückgehen mußten, und obwohl es bei der Berechnung des Koeffizienten der Selbstinduktion nicht gestattet ist, den Stromring als Stromlinie zu betrachten. Mithin können wir das Resultat jetzt so deuten, daß wir für den gesamten Induktionsfluß, der von einem passend gewählten Stromfaden des ersten Ringes umschlungen wird, setzen:

$$(185c) \quad \frac{1}{c} \{ L_{11} J_1 + L_{12} J_2 \}$$

und entsprechend für den Induktionsfluß, der von einem passend gewählten Stromfaden des zweiten Ringes umschlungen wird:

$$(185d) \quad \frac{1}{c} \{ L_{12} J_1 + L_{22} J_2 \}.$$

Für die in den beiden Leitern induzierten elektromotorischen Integralkräfte erhält man alsdann:

$$(185e) \quad E_1^i = - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{11} J_1 + L_{12} J_2 \},$$

$$(185f) \quad E_2^i = - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{12} J_1 + L_{22} J_2 \}.$$

Die hierbei auftretenden Induktionskoeffizienten sind identisch mit den Koeffizienten des Energieausdruckes (185).

Wir haben uns bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten auf den Fall durchweg konstanter Permeabilität beschränkt. Diese Einschränkung war indessen nur zur Ableitung der Formeln (183b), (184e) erforderlich, welche die Induktionskoeffizienten bzw. die magnetische Energie auf eine Form bringen, die mehr der Fernwirkungstheorie als der Nahewirkungstheorie angepaßt ist. Es leuchtet ein, daß diese Ausdrücke abzuändern sind, wenn ein Körper abweichender Permeabilität in das Feld gebracht wird. Denn dieser Körper verändert den Verlauf der Induktionslinien und den Betrag der magnetischen Feldenergie. Andererseits ist klar, daß dem Ausdruck (185) der magnetischen Energie eine allgemeinere Gültig-

keit zukommt; denn die magnetische Energie des Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv \mu \mathfrak{H}^2$$

kann stets — wofern  $\mu$  von der Feldstärke unabhängig ist — in drei Teile zerlegt werden:

$$T = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int dv \mu \mathfrak{H}_1^2 + 2 \int dv \mu \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 + \int dv \mu \mathfrak{H}_2^2 \right\},$$

wo  $\mathfrak{H}_1$  die vom ersten,  $\mathfrak{H}_2$  die vom zweiten Strome erregte magnetische Kraft ist. Da aber die Grundgleichungen linear sind, so ist  $\mathfrak{H}_1$  proportional  $J_1$ ,  $\mathfrak{H}_2$  proportional  $J_2$ ; mithin ist der erste Teil der magnetischen Energie proportional zu  $J_1^2$ , der zweite zu  $J_1 J_2$ , der dritte zu  $J_2^2$ . Damit ist bewiesen, daß die magnetische Feldenergie stationärer Ströme sich stets als Funktion zweiten Grades der Stromstärken darstellen lassen muß, deren Koeffizienten von der Beschaffenheit und Form der im Felde befindlichen Körper abhängen, von den Stromstärken aber unabhängig ist. Diese Schlußweise versagt nur bei ferromagnetischen Körpern; hier hängt  $\mu$  von der Feldstärke ab; es sind daher auch die Grundgleichungen nicht linear; endlich ist auch (vgl. § 62) der zugrunde gelegte Energieausdruck bei diesen Körpern abzuändern.

Es mag nochmals ausdrücklich bemerkt werden, daß die Anwendung des Energieausdruckes (185) quasistationäre Strömung voraussetzt; denn die Energie ist von den gleichzeitigen Werten der Stromstärken abhängig gemacht, sie ist der Energie des stationären Stromes gleichgesetzt worden. Die Anwendung auf veränderliche Ströme zur Bestimmung der Induktionswirkungen unterliegt daher den im vorigen Paragraphen angeführten Einschränkungen.

## § 70. Der elektrische Strom als zyklisches System.

### Die Lagrangeschen Gleichungen.

Die Entwicklungen des letzten Paragraphen können in gewisser Hinsicht einen unbefriedigenden Eindruck hinterlassen; insofern nämlich, als zwar die Selbstinduktion aus dem

Energieprinzip, die gegenseitige Induktion aber aus dem Faradayschen Induktionsgesetz hergeleitet wurde. Man wird wünschen, die Selbstinduktion und die gegenseitige Induktion aus einem und demselben Prinzip herzuweisen. Das Energieprinzip kann dieses nicht leisten; denn, wie aus der Mechanik bekannt ist, führt es nur für ein System von einem Freiheitsgrade zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Nun gibt aber die analytische Mechanik eine Methode an die Hand, welche es gestattet, aus dem Ausdrucke der kinetischen Energie ohne weiteres die Bewegungsgleichungen eines Systemes von beliebig vielen Freiheitsgraden herzuweisen. Dieses leisten die im § 15 des ersten Abschnittes hergeleiteten Lagrangeschen Gleichungen. Wir wollen diese Gleichungen als heuristisches Prinzip verwenden; es zeigt sich, daß sie auch in der Elektrodynamik zu Ergebnissen führen, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

Wir nehmen demgemäß an; daß in dem Felde eines elektrischen Stromes irgendeine unseren Sinnen verborgene Bewegung vor sich geht. Das war in der Tat eine der Arbeitshypothesen, von denen Maxwell sich leiten ließ. Entsprechend der Nahwirkungsvorstellung soll diese Bewegung nicht auf die Stromleiter beschränkt sein, sondern sie soll den umgebenden Raum erfüllen. Ihre lebendige Kraft ist die magnetische Energie, die von Maxwell daher auch als elektrokinetische Energie bezeichnet worden ist. Für stationäre und quasistationäre Ströme ist die lebendige Kraft der verborgenen Bewegung durch (185) als Funktion zweiten Grades der Stromstärken gegeben. Ihre Koeffizienten hängen von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Stromleiter ab.

Der elektrische Strom gehört, vom Standpunkte dieses mechanischen Bildes aus betrachtet, einer Klasse von Bewegungen an, welche von Helmholtz als zyklische Bewegungen bezeichnet worden sind. Die Parameter, welche die augenblickliche Lage eines zyklischen Systemes kennzeichnen, lassen sich in zwei Gruppen bringen. Die Parameter der einen Gruppe ändern sich während der Bewegung gar nicht oder

doch so langsam, daß die ihren Änderungsgeschwindigkeiten entsprechenden Glieder im Ausdrucke der lebendigen Kraft zu vernachlässigen sind. Diese Parameter gehen mithin zwar selbst im allgemeinen in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein, aber nicht ihre Differentialquotienten nach der Zeit. Dieser ersten Gruppe gehören in dem vorliegenden Falle diejenigen Parameter an, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Die Parameter der zweiten Gruppe hingegen, die wir Koordinaten der zyklischen Bewegung nennen wollen, kommen zwar selbst nicht im Ausdrucke der lebendigen Kraft vor, wohl aber ihre Differentialquotienten nach der Zeit, die zyklischen Geschwindigkeiten. In unserem Falle können als zyklische Geschwindigkeiten die Stromintensitäten  $J_1, J_2$  gewählt werden; die zyklischen Koordinaten sind dann deren Integrale nach der Zeit, von einem bestimmten Zeitpunkte an gerechnet, d. h. die Elektrizitätsmengen, die seitdem durch die Querschnitte der beiden Leiter hindurchgeströmt sind; dieselben gehen nicht in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein.

Ein anderes Beispiel für eine zyklische Bewegung ist eine inkompressible Flüssigkeit, die in einer geschlossenen Röhre strömt und dieselbe ganz erfüllt. Hier tritt bei der zyklischen Bewegung immer ein Teilchen an die Stelle des anderen, indem es dessen Geschwindigkeit annimmt. Die lebendige Kraft hängt daher von der Lage der einzelnen Flüssigkeitsteilchen nicht ab; sie ist bei gegebener Form der Röhre bestimmt durch die Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde die Querschnitte durchströmt. Dieses ist hier die zyklische Geschwindigkeit. Ein solches System mit nur einer zyklischen Koordinate wird als Monozykel bezeichnet. In dem hydrodynamischen Beispiele können wir von der mechanischen Bedeutung der zyklischen Geschwindigkeit Rechenschaft geben. Im Falle des elektrischen Stromes ist dieses nicht ohne neue, das mechanische Bild genauer zeichnende Hypothesen möglich. Bei der Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen brauchen wir in dessen die zyklische Bewegung nicht genauer zu beschreiben; es kommt nur auf den Ausdruck der lebendigen Kraft  $T$  an;

aus diesem können wir alles ableiten, was der Wahrnehmung zugänglich ist, nämlich die elektromotorischen und die ponderomotorischen Kräfte.

Das zyklische System, auf welches wir die Lagrangeschen Gleichungen anwenden wollen, hat zwei zyklische Koordinaten  $p_1, p_2$ ; es wird daher als Bizekel bezeichnet. Die betreffenden zyklischen Geschwindigkeiten  $q_1, q_2$  sollen mit den Stromintensitäten identisch sein. Die entsprechenden verallgemeinerten Kraftkomponenten sind die elektromotorischen Kräfte, die beim Durchgang der Elektrizität Arbeit leisten. In § 15 sind die von außen her wirkenden Kräfte mit  $P_1, P_2$  bezeichnet worden; zu ihnen sind die eingepprägten elektromotorischen Kräfte und die reibungsartigen Widerstände des Leiters zu rechnen.

Wir gingen im § 15 von dem d'Alembertschen Prinzip aus. Dieses verlangt, daß Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften  $P_\lambda$  und den Trägheitskräften besteht; durch eine passende Umformung des Ausdrucks der Trägheitskräfte ergaben sich die Lagrangeschen Gleichungen (64)

$$(186) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} = P_\lambda.$$

Da nun die zyklischen Koordinaten  $p_1, p_2$  in den Ausdruck der lebendigen Kraft nicht eingehen, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial p_2} = 0$$

zu setzen.

Ferner folgt aus dem Energieausdruck (185)

$$(186a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial J_1} = \frac{1}{c^2} \{ L_{11} J_1 + L_{12} J_2 \}, \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial J_2} = \frac{1}{c^2} \{ L_{12} J_1 + L_{22} J_2 \}. \end{aligned}$$

Diese Differentialquotienten von  $T$  nach den zyklischen Geschwindigkeiten werden in der Mechanik als zyklische Momente oder zyklische Impulskomponenten bezeichnet. Nach (185 c, d) sind sie, abgesehen von dem universellen Faktor  $c$ ,

identisch mit den magnetischen Induktionsflüssen, welche von den beiden Stromringen umschlungen werden. Diese werden daher wohl auch als elektrokinetische Momente der beiden Stromringe bezeichnet. Für die Trägheitskräfte, welche bei einer Änderung der elektrokinetischen Momente entstehen, erhält man

$$(186b) \quad \begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{11} J_1 + L_{12} J_2 \}, \\ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{12} J_1 + L_{22} J_2 \}. \end{aligned}$$

In der mechanischen Analogie sollen nun, wie erwähnt wurde, diesen Trägheitskräften der zyklischen Bewegung die induzierten elektromotorischen Kräfte entsprechen. Wir finden, daß sie in der Tat übereinstimmen mit den im vorigen Paragraphen (185e, f) gefundenen Werten der induzierten Kräfte. Ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung beschränkt sich indessen nicht auf Ströme in ruhenden Leitern. Denn auch für bewegte Stromringe bleibt das Faradaysche Induktionsgesetz gültig, welches die induzierten elektromotorischen Kräfte der zeitlichen Abnahme der Zahl der umschlungenen magnetischen Induktionslinien proportional setzt. Auch für bewegte Stromkreise werden also die induzierten elektromotorischen Kräfte  $E_1^i$ ,  $E_2^i$  durch (186b) gegeben.

Setzen wir nun für die äußeren Kräfte die Summe der eingepägten und der Widerstandskräfte

$$(186c) \quad \begin{aligned} P_1 &= E_1^e - J_1 R_1, \\ P_2 &= E_2^e - J_2 R_2, \end{aligned}$$

so ergeben die Lagrangeschen Gleichungen (186)

$$(186d) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{11} J_1 + L_{12} J_2 \} &= E_1^e - J_1 R_1, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \{ L_{12} J_1 + L_{22} J_2 \} &= E_2^e - J_2 R_2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen allgemein den zeitlichen Verlauf quasistationärer elektrischer Ströme

in zwei Stromringen. Wir werden in den folgenden Paragraphen zahlreiche Anwendungen derselben kennen lernen.

Wir kehren jetzt zurück zu unserem Bicykel. Bisher wurden die Lagrangeschen Gleichungen nur auf die zyklischen Koordinaten angewandt. Wir wollen jetzt die Gleichungen aufstellen, welche den Koordinaten der ersten Gruppe zugehören, d. h. den Parametern, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Wir wollen sie mit  $p_3, p_4 \dots$  bezeichnen und die zugehörigen verallgemeinerten Kraftkomponenten mit  $P_3, P_4 \dots$ . Dieses sind die äußeren ponderomotorischen Kräfte, welche den zwischen den Stromringen wirksamen elektrodynamischen Kräften das Gleichgewicht halten.

Halten wir die Leiter fest und die Stromintensitäten konstant, so fallen alle Differentialquotienten nach der Zeit fort und die Lagrangeschen Gleichungen (186) ergeben für die durch die zyklischen Bewegungen bedingten ponderomotorischen Kräfte

$$+ \frac{\partial T}{\partial p_3}, + \frac{\partial T}{\partial p_4}, \text{ usf.}$$

Diese Kräfte sind in der zugrunde gelegten Analogie den elektrodynamischen Kräften äquivalent. Man erhält für die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer virtuellen Verrückung der Leiter bzw. ihrer Teile leisten:

$$\frac{\partial T}{\partial p_3} \delta p_3 + \frac{\partial T}{\partial p_4} \delta p_4 + \dots$$

Es ist zu beachten, daß hier die partiellen Differentialquotienten nach  $p_3, p_4$  bei konstant gehaltenen zyklischen Geschwindigkeiten  $q_1, q_2$  zu nehmen sind. Daraus folgt: Die virtuelle Arbeit der elektrodynamischen Kräfte ist gleich der Zunahme, welche die elektrokinetische Energie erfährt, wenn die Verrückung bei konstant gehaltenen Stromintensitäten ausgeführt wird. Die elektrodynamischen Kräfte stationärer Ströme streben demnach die elektrokinetische Energie so weit zu vergrößern, als es mit der Bewegungsfreiheit des Systemes verträglich ist.

Es spielt in diesem Sinne die negative elektrokinetische Energie  $-T$  die Rolle der Kräftefunktion der elektrodynamischen Kräfte. Man nennt sie daher das „elektrodynamische Potential“.

Diese aus den Lagrangeschen Gleichungen gezogene Folgerung befindet sich in Übereinstimmung mit den Tatsachen. Denken wir uns z. B. die beiden Leiter starr und den einen fest, den anderen um seinen Mittelpunkt drehbar. Da  $J_1, J_2$  konstant gehalten werden sollen und die Selbstinduktionskoeffizienten  $L_{11}, L_{22}$  von der relativen Lage der Stromkreise unabhängig sind, so ändert sich bei einer Drehung des zweiten Leiters nur der durch (184a) bestimmte Anteil  $T_{12}$  der Energie; dieser ist proportional  $\frac{L_{12} J_1}{c}$ , d. h. dem Induktionsfluß, der vom ersten Strome durch den zweiten hindurchgesandt wird. Der zweite drehbare Stromleiter wird sich demnach so einzustellen streben, daß er möglichst viele der vom ersten festen Stromringe herrührenden magnetischen Induktionslinien umschlingt.

Die elektrodynamischen Kräfte, die zwischen zwei starren Stromringen wirken, leisten bei einer beliebigen Änderung der relativen Lage der beiden Ringe die Arbeit

$$\delta T = \frac{J_1 J_2}{c^2} \delta L_{12}.$$

Diese Arbeit kann gleichgesetzt werden der bei konstant gehaltenen Stromstärken erfolgenden Abnahme eines elektrodynamischen Potentials

$$-\frac{J_1 J_2}{c^2} \cdot L_{12}.$$

Ist der Raum von einem Medium konstanter Permeabilität erfüllt, so wird das Potential nach (183b) gleich

$$(186e) \quad -\frac{J_1 J_2}{c^2} \cdot \mu \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}.$$

Dieser Ausdruck wurde zuerst von F. E. Neumann auf Grund der Fernwirkungstheorie entwickelt.

Unsere Ableitungen gelten auch für biegsame Stromleiter, bei denen  $L_{11}$ ,  $L_{22}$  variabel sind. Hier ist das elektrodynamische Potential der negativen magnetischen Energie gleichzusetzen, und es ist zu beachten, daß die Variation des Potentials bei konstant gehaltenen Stromstärken auszuführen ist. Aus diesem allgemeinen Ausdrucke ergeben sich die ponderomotorischen Kräfte stationärer oder quasistationärer Ströme stets in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Wir kommen übrigens im vierten Abschnitte auf die Arbeitsleistungen, welche an bewegten Stromleitern stattfinden, und auf die entsprechenden Energieumsetzungen zurück.

Die Feststellung, daß die Gesetze der Elektrodynamik sich aus den allgemeinen Gleichungen der Mechanik ableiten lassen, ist von der größten Bedeutung für die gesamte Naturanschauung geworden. Einmal hat diese Feststellung Maxwells auf die Mechanik insofern zurückgewirkt, als man unter Beseitigung der Fernkräfte der Mechanik eine Form zu geben suchte, welche geeignet war, die im elektromagnetischen Felde wirkenden Kräfte zu umfassen. Diese Richtung, die in der Hertz'schen Mechanik gipfelt, hält an der Vorstellung fest, daß alle physikalischen Vorgänge schließlich auf Bewegungen träger Massen zurückzuführen sind. Sie muß, wo die Bewegung der sichtbaren Massen die Erscheinungen nicht erklärt, verborgene Massen zu Hilfe nehmen, die in Bewegung begriffen sind. Der ganze Raum muß als von solchen Massen erfüllt betrachtet werden. Dieselben sind miteinander gekoppelt und übertragen so die Bewegung von einem Körper auf den anderen; die Hertz'sche Mechanik postuliert die Zurückführung aller Fernkräfte auf solche Mechanismen verborgener Massen.

Die Vorstellung eines Mechanismus in dem von ponderabler Materie leeren Raume hat manches Gekünstelte. Aber auch derjenige, der sie nicht akzeptiert, muß die Wichtigkeit der Entdeckung anerkennen, daß die Bewegungen der ponderablen Körper und die elektrodynamischen Vorgänge denselben Gesetzen unterworfen sind. Man braucht allerdings diese enge Beziehung der Mechanik zur Elektrodynamik nicht unbedingt

zugunsten der mechanischen Naturanschauung zu deuten. Man kann in ihr mit demselben Rechte einen Hinweis darauf sehen, daß die Bewegungen der Körper den Gesetzen der Elektrodynamik unterworfen sind. Dieser Auffassung neigt in der Tat die moderne Physik mehr und mehr zu; man wünscht die Mechanik aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes abzuleiten und überhaupt die ganze Physik elektromagnetisch zu begründen.

Da wir uns von vornherein weder für die mechanische noch auch für die elektromagnetische Anschauung entscheiden wollten, haben wir es vorgezogen, die Gesetze der Induktion direkt an der Hand der Erfahrung zu entwickeln. Wir werden auch die Behandlung der ponderomotorischen Kräfte von demselben Standpunkte aus im vierten Abschnitte wieder aufnehmen.

### § 71. Ein Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Wir betrachten einen einzelnen geschlossenen Stromring. In demselben mögen gewisse eingeprägte Kräfte wirken, welche durch die chemische und thermische Beschaffenheit der zum Stromring zusammengefügteten Leiter bedingt sind. Zu diesen Kräften können noch solche elektromotorischen Kräfte treten, die von Stromschwankungen in anderen Stromkreisen oder von irgendwelchen sonstigen Änderungen des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses herrühren. Diese Kräfte wollen wir hier zu den eingepprägten rechnen, indem wir die induktive Rückwirkung unseres Stromringes auf die übrigen Leiter außer Betracht lassen. Das Linienintegral aller der eingepprägten Kräfte bezeichnen wir mit  $E$ . Die Summe dieser elektromotorischen Kraft und der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion muß dann dem Produkte aus Widerstand und Stromstärke gleich sein:

$$(187) \quad E - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} = RJ.$$

Bringen wir die Stromstärke  $J$ , die als Unbekannte zu gelten hat, auf die linke Seite, so wird die Differentialgleichung erhalten

$$(187a) \quad \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + RJ = E.$$

Deren Integration ergibt bei gegebener elektromotorischer Kraft die zeitliche Änderung der Stromintensität  $J$ .

A.  $E$  konstant. In diesem Falle erhält man, da auch  $L$  und  $R$  Konstanten sind, als Lösung der Differentialgleichung (187a)

$$(188) \quad J = \frac{E}{R} - Ce^{-\frac{c^2 R}{L} t}.$$

Die Integrationskonstante  $C$  bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen. Wird der Strom zur Zeit  $t = 0$  geschlossen und von nun an der Einwirkung einer konstanten, eingepprägten elektromotorischen Kraft unterworfen, so ist

$$C = \frac{E}{R}$$

zu setzen, damit  $J$  für  $t = 0$  verschwindet. Wir haben dann

$$(188a) \quad J = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\vartheta}} \right),$$

wobei abkürzungsweise

$$(188b) \quad \vartheta = \frac{L}{c^2 R}$$

gesetzt ist.

Die Konstante  $\vartheta$  hat die Dimension einer Zeit. Sie wird als Zeitkonstante des Stromkreises bezeichnet. Von ihr hängt das zeitliche Anschwellen der Stromstärke nach dem Stromschlusse ab. Dasselbe erfolgt um so langsamer, je größer die Selbstinduktion im Verhältnis zum Widerstande ist.

B.  $E$  periodisch. Wir nehmen die äußere elektromotorische Kraft als periodisch an, etwa nach dem Gesetze

$$E = a \sin(\nu t)$$

schwingend;  $a$  stellt hier die Amplitude,  $\nu$  die Frequenz (Schwingungszahl in  $2\pi$  Sekunden) dar. Uns interessiert nur

der Wechselstrom  $J$  von der Frequenz  $\nu$ , der sich unter der Einwirkung dieser periodischen elektromotorischen Kraft herstellt. Demgemäß suchen wir (187a) durch den Ansatz zu genügen

$$(189) \quad J = b \sin(\nu t + \beta) = b \{ \sin \nu t \cos \beta + \cos \nu t \sin \beta \}.$$

Es wird dann

$$\frac{dJ}{dt} = b\nu \cos(\nu t + \beta) = b\nu \{ \cos \nu t \cos \beta - \sin \nu t \sin \beta \}.$$

Soll (187a) für alle  $t$  erfüllt sein, so haben die Konstanten  $b$ ,  $\beta$  den Gleichungen zu genügen

$$(189a) \quad \begin{aligned} \frac{L}{c^2} b\nu \cos \beta + Rb \sin \beta &= 0, \\ -\frac{L}{c^2} b\nu \sin \beta + Rb \cos \beta &= a. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$(189b) \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{\nu L}{c^2 R}$$

und durch Kombination der ersten und zweiten

$$(189c) \quad b = \frac{a}{R} \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}}}.$$

Die Gleichung (189b) zeigt an, daß der durch (189) bestimmte Strom  $J$  der Phase nach hinter der erregenden elektromotorischen Kraft zurückbleibt. Die Gleichung (189c) bestimmt das Verhältnis  $b:a$  der Amplituden von Strom und elektromotorischer Kraft. Dasselbe wird nicht, wie bei Gleichstrom, durch den reziproken Widerstand  $R$  gegeben, sondern durch das Reziproke des Ausdrucks

$$(189d) \quad R' = \sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}},$$

der stets größer als  $R$  ist und der „scheinbarer Widerstand“ oder auch „Impedanz“ genannt wird.

Wir wollen die Differentialgleichung (187a) noch auf die Probepule anwenden, die wir in § 61 zur Definition des Vektors  $\mathfrak{B}$

verwandt haben. Die bei der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes induzierte elektromotorische Kraft ist nach dem Induktionsgesetz gleich

$$-\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df.$$

Nun sollte die Probepule so klein gewählt werden, daß das magnetische Feld auf  $f$  wirklich homogen ist, daher ist der Induktionsfluß gleich

$$\mathfrak{B}_n df$$

zu setzen; demnach wird die elektromotorische Kraft

$$E = -\frac{1}{c} f \frac{d\mathfrak{B}_n}{dt}.$$

Ferner war in § 61 von einem Felde die Rede, welches vom unmagnetischen Anfangszustande (für  $t=0$ ) aus erregt und dann konstant gehalten wird; für ein solches wird

$$\int_0^{\infty} E dt = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n,$$

und es ergibt Gleichung (187a)

$$\frac{L}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{dJ}{dt} dt + R \int_0^{\infty} J dt = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n.$$

Da der induzierte Strom schließlich wieder erlischt, so ist

$$\int_0^{\infty} \frac{dJ}{dt} dt = 0;$$

es fällt also das erste Glied fort. Ferner ist

$$\int_0^{\infty} J dt = e$$

die Elektrizitätsmenge, die im ganzen den Querschnitt durchströmt hat. Es wird daher

$$Re = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n,$$

d. h. es hängt  $e$  nicht von der Selbstinduktion, sondern nur von dem Widerstande der Spule und dem schließlich umschlungenen Induktionsflusse ab. Wir durften daher in § 61, ohne von der Selbstinduktion der Spule zu reden, den Vektor  $\mathfrak{B}$  durch die Gleichung (163)

$$-\mathfrak{B}_a = c \cdot \frac{Re}{l}$$

definieren. Die Definition von  $\mathfrak{B}$  durch die Probespule stimmt also mit den uns nunmehr genauer bekannten Gesetzen der Elektrodynamik überein.

Wir haben hier nur von der magnetischen Energie des Stromes gesprochen, nicht von seiner elektrischen Energie. Und doch wird im allgemeinen auch der stationäre Strom von einem elektrischen Felde umgeben sein.

Denken wir uns nämlich den Kreisstrom durch eine eingeprägte Kraft unterhalten, die an einer bestimmten Stelle in die Strombahn eingeschaltet ist (etwa ein galvanisches Element), so entstehen freie elektrische Ladungen und in deren Folge ein elektrostatisches Feld; denn nur dadurch, daß ein tangentielles Potentialgefälle längs der Leitung besteht, wird der Strom in den homogenen Teilen der Leitung aufrechterhalten. Dem elektrostatischen Felde aber entspricht eine elektrische Energie.

Die elektrostatische Energie eines geschlossenen Leitungsstromes ist aber meist nur gering im Vergleiche zu der magnetischen Energie, die man deshalb gewöhnlich allein als Stromenergie bezeichnet. Insbesondere für dünne Leitungsdrähte ist der elektrische Anteil der Energie zu vernachlässigen. Wir können uns in dieser Hinsicht auf das Resultat des § 40 berufen, wonach die Kapazität eines stabförmigen Leiters mit abnehmender Dicke kleiner und kleiner wird. Demnach wird bei gegebener Spannungsverteilung längs der Leitung mit abnehmender Dicke die Ladung immer geringer. Da nun die elektrische Energie eines elektrostatischen Feldes sich nach Gleichung (146a) durch die Produkte der Ladungen und Spannungen ausdrückt, so wird mit abnehmendem Querschnitte

der Leitung die elektrische Energie immer geringer. Die magnetische Energie aber verhält sich gerade umgekehrt. Bei gegebenem Strome ist die Feldstärke in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes dem Abstand von der Drahtachse umgekehrt proportional, die magnetische Energiedichte also dem Quadrate derselben, die magnetische Energie wird daher logarithmisch unendlich, wenn der Querschnittsradius gleich Null wird. Aus diesem Grunde durften wir auch bei der Berechnung der Selbstinduktion nicht den Leiter als linearen Leiter ansehen; die Selbstinduktion eines solchen würde unendlich sein. Da nun mit abnehmendem Querschnitt der Leitung die magnetische Energie des Stromes immer größer, die elektrische immer kleiner wird, so wird die letztere schließlich gegen die erstere zu vernachlässigen sein.

Neben dem Querschnitt kommt allerdings noch die Leitfähigkeit des Materials in Frage. Wird die Strombahn aus einem schlechten Leiter gebildet, so wird die elektrische Energie beträchtlich. Denn hier bedürfen wir weit größerer elektrischer Kräfte als bei einem guten Leiter, um einen Strom von bestimmter Stärke, also auch ein magnetisches Feld von gegebener Energie, aufrechtzuerhalten. Die elektrische Energie wächst daher, bei gegebener magnetischer Energie, umgekehrt proportional dem Quadrate der Leitfähigkeit.

Von solchen Fällen sehen wir hier ab und verstehen, wie üblich, unter der Energie eines geschlossenen Stromes ausschließlich die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes. Man kann übrigens die elektrostatische Energie ganz ausschließen, wenn man die den Strom unterhaltenden eingepprägten Kräfte nicht auf eine kurze Strecke konzentriert, sondern in passender Weise längs der Strombahn verteilt annimmt; durch geeignete Verteilung der eingepprägten elektrischen Kräfte kann man in der Tat erreichen, daß kein elektrisches Feld in der Umgebung des Drahtes entsteht.

§ 72. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand. Elektrische Eigenschwingungen.

Bisher haben wir in diesem Kapitel nur von Strömen gesprochen, die in geschlossenen Bahnen fließen. Jetzt betrachten wir einen Leitungsdraht, dessen Enden in die sich gegenüberstehenden Platten eines Kondensators ausmünden. Bei dieser Anordnung wird, wie wir wissen, der Leitungsstrom durch den die Kondensatorplatten verbindenden Verschiebungsstrom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt. Ist indessen die dielektrische Schicht hinreichend dünn, so kann für die Berechnung des magnetischen Feldes und der magnetischen Energie die Anordnung als einem geschlossenen Stromkreise gleichwertig betrachtet werden, indem der Verschiebungsstrom in der dünnen dielektrischen Schicht durch ein kurzes, vom Leitungsstrom durchflossenes Drahtstück ersetzt gedacht wird.

Die Einschaltung des Kondensators bringt nun aber insofern eine wesentlich neue Problemstellung mit sich, als seine Kapazität und seine elektrische Energie zu berücksichtigen sind. In der Tat geht z. B. aus der für die Kapazität  $K$  des Kugelkondensators abgeleiteten Formel (130) hervor, daß die Kapazität gerade für geringen Abstand der Kondensatorbelegungen beträchtlich wird. Und aus der Formel (146d) folgt, daß die elektrische Energie des Kondensators

$$U = \frac{1}{2} K \varphi^2$$

ist, wenn  $\varphi$  jetzt für die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen geschrieben wird. Da anderseits die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J^2$$

ist, so beträgt die jeweilige Energie des Systemes

$$(190) \quad W = U + T = \frac{1}{2} K \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J^2.$$

Äußere elektromotorische Kräfte sollen nicht wirksam sein. Alsdann muß die Joulesche Wärmeentwicklung durch eine

Energieabnahme des Systemes kompensiert werden; es ist

$$R\mathcal{J}^2 = -\frac{dW}{dt} = -K\varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{L}{c^2} \mathcal{J} \frac{d\mathcal{J}}{dt}.$$

Da nun der Strom der einen Kondensatorbelegung Elektrizität entzieht und der anderen die gleiche Menge zuführt, so hat man

$$(190a) \quad \mathcal{J} = -\frac{de}{dt} = -K \frac{d\varphi}{dt};$$

dabei ist Leitungsstrom und Potentialgefälle längs des Drahtes in demselben Sinne gerechnet.

Wir erhalten jetzt

$$(190b) \quad R\mathcal{J} = \varphi - \frac{L}{c^2} \frac{d\mathcal{J}}{dt},$$

eine Gleichung, die wir auch direkt gewonnen hätten, wenn wir in Gleichung (187) des vorigen Paragraphen für  $E$  die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen gesetzt hätten. Aus (190a, b) folgt

$$(190c) \quad \varphi + RK \frac{d\varphi}{dt} + \frac{LK}{c^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung bestimmt den zeitlichen Verlauf der Potentialdifferenz der Kondensatorplatten.

Nach (190a) ist dieselbe Differentialgleichung

$$(190d) \quad \mathcal{J} + RK \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \frac{LK}{c^2} \frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2} = 0$$

für den zeitlichen Verlauf des Stromes maßgebend.

Die Gleichungen sind beide von der Form

$$(191) \quad y'' + 2\delta y' + (\nu^2 + \delta^2)y = 0,$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$(191a) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{RK}{L}$$

und

$$(191b) \quad \nu^2 = \frac{c^2}{LK} - \frac{1}{4} \frac{R^2 c^4}{L^2}.$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (191) ist

$$(191c) \quad y = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t},$$

worin  $c_1, c_2$  Integrationskonstanten,  $k_1$  und  $k_2$  aber die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(191d) \quad k^2 + 2\delta k + \nu^2 + \delta^2 = 0$$

sind.

Wir erhalten zwei wesentlich verschiedene Arten der Entladung des Kondensators, je nachdem  $\nu^2$  negativ oder positiv ist.

Ist 
$$R > \frac{2}{c} \sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 < 0,$$

so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (191d)

$$(192) \quad k_1 = -\delta + \nu i, \quad k_2 = -\delta - \nu i$$

reell.

Die Lösung (191c) ergibt in diesem Falle eine aperiodische Entladung. Je mehr wir aber den Widerstand  $R$  verkleinern, oder  $L$  vergrößern und  $K$  verkleinern, desto mehr nähern wir uns dem Falle, wo

$$R < \frac{2}{c} \sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 > 0$$

ist.

In diesem Falle findet eine oszillatorische Entladung statt. Durch Umformung der Lösung (191c) und indem wir die Integrationskonstanten durch andere ersetzen, erhalten wir

$$(192a) \quad y = a e^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha).$$

Hier kann  $y$  sowohl Strom  $J$  wie Potentialdifferenz  $\varphi$  bedeuten. Die Integrationskonstanten  $a$  und  $\alpha$  sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Das hier behandelte Problem geht übrigens in das im vorigen Paragraphen behandelte über, wenn man  $K = \infty$  setzt. Dann wird

$$\nu = \delta i,$$

daher

$$k_1 = -2\delta = -\frac{Rc^2}{L}, \quad k_2 = 0.$$

Die Gleichung (191c) ergibt dann

$$y = c_1 e^{-\frac{c^2 R}{L} t} + c_2,$$

einen Ausdruck, der das vollständige Integral der Differentialgleichung (187a) des geschlossenen Kreisstromes darstellt, für den Fall, daß die eingeprägte Kraft  $E$  gleich Null ist. Ein Stromkreis, in den ein Kondensator von unendlich großer Kapazität eingeschaltet ist, ist demnach einem geschlossenen Stromkreis äquivalent.

Ein anderer Grenzfall wird erhalten, wenn der Widerstand  $R = 0$  gesetzt wird. Dann wird  $\delta = 0$ , mithin geht (192a) über in

$$(192b) \quad y = a \sin(\nu t + \alpha).$$

Die Schwingung ist dann eine rein periodische. Die Schwingungsfrequenz  $\nu$  (Schwingungszahl in  $2\pi$  Sekunden) wird in diesem Falle nach (191b)

$$(192c) \quad \nu = \frac{c}{\sqrt{LK}}.$$

Bezeichnet  $\tau$  die Dauer einer ganzen Schwingung, so ist

$$(192d) \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{LK}.$$

Die theoretische Möglichkeit oszillatorischer Flaschenentladungen wurde zuerst von W. Thomson erkannt. Nach ihm wird die Formel (192d) für die Schwingungsdauer die „Thomsonsche Formel“ genannt. Daß die rechte Seite in der Tat die Dimension einer Zeit hat, davon überzeugt man sich an der Hand der Dimensionstafel des § 67. Das Gaußsche System, welches die Kapazität elektrostatisch, die Selbstinduktion aber elektromagnetisch definiert, also beide Größen in Zentimetern mißt, ist hier das zweckmäßigste. Die Wellenlänge der elektrischen Wellen von der Schwingungsdauer  $\tau$  im Äther wird hier durch die Gleichung

$$(192e) \quad \lambda = c\tau = 2\pi\sqrt{LK}$$

in Zentimetern berechnet.

Kommt der Leitungswiderstand  $R$  in Betracht, so ist die Entladung nicht mehr streng periodisch, sondern sie erfährt eine Dämpfung, die sich in (192a) durch den Exponentialfaktor kundgibt; dabei wird dann die elektromagnetische Energie des Kreises allmählich in Joulesche Wärme verwandelt. Für die Schwingungsfrequenz gilt jetzt die Formel (192c) nicht mehr genau, sondern sie ist durch die exakte Formel (191b) zu ersetzen. Auch die Thomsonsche Formel ist entsprechend zu korrigieren, doch kommt die Korrektur nicht in Betracht, falls  $R^2$  klein gegen  $\frac{4L}{c^2 K}$  ist.

Wir wollen die Formeln auf einen konkreten Fall anwenden. Die Kapazität  $K$  können wir für einen Kugelkondensator nach Gleichung (134) berechnen. Hat man z. B.

$$\varepsilon = 5, \quad a = 10 \text{ cm}, \quad b = 10,2 \text{ cm},$$

so folgt

$$K = 2550 \text{ cm}.$$

Wir denken uns eine Leydener Flasche von dieser Kapazität durch einen einfachen Schließungsbogen entladen; es mag etwa

$$L = 10^7 \text{ cm}$$

sein. Der Widerstand sei gleich 1 Ohm, daher in absolutem elektrostatischen Maße

$$R = \frac{1}{9} 10^{-11}.$$

Diese Zahl ist hier für  $R$  zu setzen, da das Gaußsche System den Widerstand elektrostatisch mißt. Demgemäß wird

$$R^2 = \frac{1}{81} \cdot 10^{-22}, \quad \frac{4L}{c^2 K} = \frac{4 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{20} \cdot 2550} = \frac{16}{9} \cdot 10^{-17} \text{ zirka.}$$

Der Quotient

$$R^2 : \frac{4L}{c^2 K}$$

ist demnach etwa gleich  $10^{-7}$ .

Der Widerstand beeinflußt also die Frequenz der Schwingungen nur sehr wenig, und man darf mit der Thomsonschen

Formel rechnen. Dieselbe ergibt gemäß (192d, e)

$$\lambda = 2\pi \sqrt{2250 \cdot 10^7} = 10^6 \text{ cm}$$

und

$$\tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Die Dämpfungskonstante  $\delta$  endlich wird nach (191a)

$$\delta = 50,$$

d. h. der Exponentialfaktor in (192a), der die Dämpfung der Schwingungen ausdrückt, nimmt unter den angenommenen Verhältnissen erst nach 0,02 Sekunden den Wert

$$e^{-1} = \frac{1}{2,718}$$

an. Während dieser Zeit erfolgen aber 600 Schwingungen, so daß in der Tat für eine kleine Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen die Abnahme der Amplitude kaum merklich ist. Der durch (192b) dargestellte Fall der ungedämpften Schwingung hat daher als Grenzfall, der sich oft in großer Annäherung mit dem wahren Vorgange deckt, eine nicht zu unterschätzende Bedeutung.

Wir wollen diesen Grenzfall noch etwas eingehender erörtern. Setzen wir

$$(193) \quad J = a \sin(\nu t),$$

so folgt aus Gleichung (190b), die hier in

$$\varphi = \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt}$$

übergeht,

$$\varphi = \frac{L}{c^2} a \nu \cos(\nu t),$$

oder nach (192c)

$$(193a) \quad \varphi = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{L}{K}} \cos(\nu t).$$

Diese Form der Lösung ist bereits den Anfangsbedingungen angepaßt, die man zu stellen hat, falls die Belegungen des geladenen Kondensators zur Zeit  $t = 0$  in leitende Verbindung gebracht werden; diese plötzliche Herstellung der leitenden Verbindung wird in der Tat durch den elektrischen Funken ver-

wirklicht. Zur Zeit  $t = 0$  fließt noch kein Strom. Demgemäß ist die magnetische Energie Null; es ist die Energie nur in elektrischer Form vorhanden. Sie beträgt

$$(193b) \quad W = U = \frac{1}{2} K \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 L}{c^2}.$$

Nun beginnt der Strom zu fließen; die elektrische Energie wird im Verlaufe einer Viertelschwingung in magnetische Energie verwandelt; zu dieser Zeit

$$t = \frac{\tau}{4} = \frac{\pi}{2\nu}$$

ist

$$U = 0$$

und

$$(193c) \quad W = T = \frac{1}{2} \frac{a^2 L}{c^2}.$$

Im Verlaufe der nächsten Viertelschwingung kehrt die Energie wieder zwischen die Kondensatorplatten zurück und dann beginnt das Spiel von neuem, indem ein pulsierender Energiestrom bald vom Kondensator in das den Leitungsdraht umgebende Magnetfeld, bald wieder zurückströmt; dabei ist im Mittel die magnetische Energie der elektrischen gleich.

Die anfängliche Potentialdifferenz  $\varphi_0$  hängt von der Schlagweite der Funkenstrecke ab; die Stromamplitude  $a$  bestimmt sich hieraus; es ist nach (193a)

$$\varphi_0 = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{L}{K}},$$

daher

$$(194) \quad a = \varphi_0 c \sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Die Stromamplitude ist daher um so größer, je größer die Kapazität des Kondensators und je kleiner die Selbstinduktion des Schließungsbogens ist.

Die Wellenlänge des vorhin durchgerechneten Zahlenbeispiels betrug 10 Kilometer; dies entspricht der Größenordnung nach den von Feddersen beobachteten Schwingungen. Hier ist die Annahme quasistationärer Strömung durchaus zulässig. Denn die Dimensionen des Flaschenkreises sind klein gegen

die Wellenlänge; für die Berechnung der Selbstinduktion einerseits kommt die kurze, vom Verschiebungsstrom eingenommene Strecke des Kreises nicht in Betracht, und andererseits ist die Kapazität des Leitungsdrahtes sehr gering gegen die Flaschenkapazität. Demgemäß ist die obige mit den Begriffen der Potentialtheorie operierende Betrachtung hier angemessen. Wir konnten das Problem so behandeln, als ob das elektrische Feld momentan der Ladung der Kondensatorbelegungen, das magnetische dem im Schließungskreise zirkulierenden Strome entspricht. Daher reichen diejenigen mathematischen Methoden aus, welche zunächst nur für die Elektrostatik bzw. die stationäre elektrische Strömung entwickelt worden sind. Gerade dasjenige, was die Maxwellsche Theorie von der Fernwirkungstheorie unterscheidet, kommt bei diesen Schwingungen noch nicht zur Geltung. Für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie war daher die Erzeugung schnellerer elektrischer Schwingungen notwendig.

Es war Heinrich Hertz, der zuerst lehrte, elektrische Wellen von wesentlich kürzerer, im Laboratorium meßbarer Wellenlänge zu erregen und zu beobachten, und der so die Grundlage für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie schuf. Aus der Thomsonschen Formel folgt, daß man theoretisch die Wellenlänge verkleinern kann, indem man Kapazität des Kondensators und Selbstinduktion des Schließungsbogens möglichst klein wählt. Man wird also den Abstand der Kondensatorplatten möglichst vergrößern und, an Stelle eines mehrfach gewundenen, einen möglichst gestreckten Draht setzen. Tut man dies, so gelangt man schließlich zu derjenigen Erregerform, die von Hertz bei seinen ersten Versuchen verwandt wurde. Derselbe besteht aus zwei Kugeln, die durch einen geradlinigen, in der Mitte durch die Funkenstrecke unterbrochenen Draht verbunden sind. Die Wellenlänge der von diesem Erreger entsandten Wellen betrug nur wenige Meter. Es ist sehr bemerkenswert und war theoretisch nicht vorauszusehen, daß der elektrische Funke die Eigenschaft besitzt, in einer gegen die Schwingungsdauer dieser schnellen Schwingungen

kurzen Zeit den die Funkenbahn ausfüllenden Isolator leitend zu machen und seinen Widerstand so zu erniedrigen, daß wirklich oszillatorische, nicht aperiodische Entladungen eintreten.

Bei diesen Hertz'schen Schwingungen ist es nun nicht mehr gestattet, den Strom als quasistationär anzusehen. In der Tat, der Leitungsstrom ist hier auch nicht näherungsweise geschlossen, der Verschiebungsstrom, der die eine Kugel des Erregers mit der anderen durch den Isolator hindurch verbindet, kommt hier wesentlich in Betracht. Auch ist die Länge der offenen Bahn des Leitungsstromes hier durchaus nicht mehr klein gegen die Wellenlänge, sondern nur wenig kleiner als eine halbe Wellenlänge. Man muß daher die zeitliche Ausbreitung des Feldes berücksichtigen, d. h. die Differentialgleichungen des Feldes integrieren, wenn man die hier stattfindenden Schwingungsvorgänge mathematisch behandeln will. Das wird insbesondere dann notwendig, wenn man zu noch kürzeren Wellen übergeht. Hertz selbst gelangte in seinen Hohlspiegelversuchen zu einer Wellenlänge von 60 cm herab, spätere Experimentatoren haben elektrische Wellen von nur wenigen Millimetern Wellenlänge beobachtet.

Bei der praktischen Verwendung der schnellen Schwingungen in der drahtlosen Telegraphie hat man es mit Wellen von 100 bis 1000 Metern Wellenlänge zu tun. Die Sendedrähte oder Antennen, die man dabei verwendet, sind ihrerseits von derselben Größenordnung; auch hier darf man demnach nicht ohne weiteres mit den Begriffen operieren, welche der Theorie der quasistationären Strömung entnommen sind.

Diese Theorie erweist sich insbesondere insofern als unzureichend, als sie die vom Erreger ausgesandten Wellen nicht enthält. Diese Wellen führen Energie mit sich, und je weiter bei dem Fortgange der Schwingungen die Wellenzüge sich im Raume ausbreiten, desto mehr muß der Energieinhalt des Wellenerregers aufgezehrt werden. Auf diese Energiestrahlung nimmt die Theorie der quasistationären Strömung keine Rücksicht. Sie führt die Dämpfung ausschließlich auf die Joule-

sche Wärme zurück, während in Wirklichkeit auch bei verschwindendem Widerstande die Erregerschwingungen eine Dämpfung durch Strahlung erfahren. Auch sind es gerade die von dem Sendedrahte ausgesandten Wellen, die in der drahtlosen Telegraphie wirksam sind.

Um über die Wirkung einer gegebenen Senderanordnung ein Urteil zu gewinnen, genügt es nicht, die Vorgänge in dem Senderapparat zu verfolgen; man muß auch wissen, welches die Amplituden der auf den Empfänger fallenden Wellen sind und wie diese durch Veränderungen am Sender beeinflußt werden. Auf diese Fragen werden wir im zweiten Bande des Werkes genauer eingehen.

### § 73. Elektrische Resonanz.

Die Wellen, welche ein Hertzscher Erreger aussendet, werden der Beobachtung dadurch zugänglich gemacht, daß man einen Resonator in das Feld der Wellen bringt. H. Hertz selbst beobachtete die kleinen Funken, die sich an den einander gegenüberstehenden Enden eines kreisförmigen Resonators ausbilden, spätere Experimentatoren wandten elektrometrische und bolometrische Messungsmethoden an. In der drahtlosen Telegraphie verwendet man als Empfangsapparat eine dem Senderapparat ähnliche, mit einer Empfangsantenne versehene Anordnung und gibt beiden Apparaten die gleiche Schwingungsdauer. Als Reagens für die elektrische Erregung des Empfängers bedient man meist sich des Kohärens. Für das Überspringen der Funken bzw. das Ansprechen des Kohärens ist die maximale elektrische Spannung maßgebend, während die elektrometrischen und bolometrischen Methoden Zeitintegrale des Quadrates von Spannung bzw. Strom messen.

Die strenge Theorie der elektrischen Resonanz kann nur durch Integration der Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes gewonnen werden. Denn die Dimensionen der Resonatoren sind, insbesondere bei Verwendung von Antennen, mit der Wellenlänge der in ihnen stattfindenden

Schwingungen vergleichbar. Dennoch konnte V. Bjerknæs, der die Untersuchungen von Heinrich Hertz in dieser Richtung weiterführte, die wichtigsten Erscheinungen der elektrischen Resonanz auf Grund der elementaren Schwingungslehre erklären.

Wir gelangen zu dem Ansatz der Bjerknæsschen Theorie, indem wir in der Grundgleichung (187) der Theorie der quasistationären Strömung für die elektromotorische Kraft  $E$  einen allgemeineren Ausdruck setzen. Die von den Ladungen der Kondensatorbelegungen herrührende elektromotorische Kraft  $\varphi$  hatten wir bereits im vorigen Paragraphen berücksichtigt. Dazu tritt jetzt die von den auffallenden Wellen herrührende, äußere elektromotorische Kraft, die wir mit  $E^a$  bezeichnen wollen. Dieselbe wird der längs des Resonatorkreises integrierten elektrischen Feldstärke der auffallenden Wellen gleich zu setzen sein und wird nicht nur von der Amplitude und Frequenz dieser Wellen abhängen, sondern auch von der Form des Resonators, sowie von seiner Stellung gegen die Wellen und gegen die Richtungen des elektrischen und des magnetischen Vektors in den Wellen. Die Einführung dieser äußeren Kraft in (187) ergibt

$$(195) \quad \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + RJ = \varphi + E^a,$$

oder infolge von

$$J = -K \frac{de}{dt} = -K \frac{d\varphi}{dt},$$

$$(195a) \quad \varphi + RK \frac{d\varphi}{dt} + \frac{LK}{c^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -E^a.$$

Um nun zu der Differentialgleichung zu gelangen, welche der Gleichung (191) für die Eigenschwingungen entspricht, setzen wir wieder

$$(195b) \quad \frac{c^2}{LK} = \nu^2 + \delta^2, \quad \frac{Rc^2}{L} = 2\delta,$$

und erhalten

$$(195c) \quad \varphi'' + 2\delta\varphi' + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = -(\nu^2 + \delta^2)E^a.$$

Bjerknæs setzt nun für die von den Erregerwellen ausgeübte elektromotorische Kraft eine gedämpft periodische

Funktion der Zeit, deren Frequenz und Dämpfungskonstante mit denen der Erregerschwingungen identisch sind. Er führt die Integration der Differentialgleichung (195c) für den allgemeinen Fall durch, daß Erreger und Resonator verschiedene Frequenz und verschiedene Dämpfung besitzen. Wir wollen uns indessen hier auf die Behandlung des speziellen Falles beschränken, wo der Erreger dieselbe Frequenz  $\nu$  und Dämpfungskonstante  $\delta$  besitzt wie der Resonator. Wir setzen

$$(196) \quad -E^a(\nu^2 + \delta^2) = Ae^{-\delta t} \cos(\nu t).$$

$A$  ist der Bjerknessche „Intensitätsfaktor“, der von der Amplitude und Frequenz der Erregerschwingungen und von der Form und Stellung des Resonators abhängt. Jetzt wird

$$(196a) \quad \varphi'' + 2\delta\varphi' + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = Ae^{-\delta t} \cos(\nu t).$$

Eine Partikulärlösung dieser Differentialgleichung ist

$$(197) \quad \varphi = \frac{A}{2\nu} te^{-\delta t} \sin(\nu t),$$

wie man durch Einsetzen in die Differentialgleichung leicht beweist. Das vollständige Integral von (196a) erhält man, indem man zu (197) das mit zwei Integrationskonstanten versehene Integral der homogenen Gleichung hinzufügt, die durch Nullsetzung der rechten Seite von (196a) entsteht. Dieses hinzuzufügende Glied entspricht der gedämpften Eigenschwingung des Resonators. Setzt man aber voraus, daß vor dem Eintreffen der Welle, das zur Zeit  $t=0$  stattfindet, der Resonator ungeladen und stromlos war, so gelten die Anfangsbedingungen: für  $t=0$  ist

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Diesen Anfangsbedingungen nun genügt bereits das partikuläre Integral (197); dies ist also schon das vollständige Integral.

Die Amplitude der Resonatorschwingungen steigt, wie aus (197) hervorgeht, nach dem Gesetze  $te^{-\delta t}$  zunächst an, um dann, wenn die schwächer gewordene äußere Kraft die eigene

Dämpfung des Resonators nicht mehr kompensieren kann, wiederum abzunehmen. Der Zeitpunkt, wo die Potentialamplitude am größten geworden ist, wird gegeben durch

$$0 = \frac{d}{dt} \{ t e^{-\delta t} \} = e^{-\delta t} (1 - \delta t),$$

oder

$$t = \frac{1}{\delta}.$$

Die dann eintretende maximale Potentialamplitude ist

$$(197a) \quad \varphi_m = \frac{A}{2\nu\delta e}.$$

Ihr Wert ist für die mit Hilfe des elektrischen Funkens oder des Kohäerers festzustellende Erregung des Resonators maßgebend.

Wir haben uns hier auf die Behandlung des speziellen Falles beschränkt, wo Erreger und Resonator die gleiche Frequenz und die gleiche Dämpfungskonstante besitzen. Dieser Fall ist in der drahtlosen Telegraphie nahezu realisiert, wenn man als Erreger einen einfachen Marconischen Sendedraht und als Resonator einen Empfangsdraht der gleichen Länge und Dicke verwendet. Dann stimmen die Frequenzen der Eigenschwingungen überein und auch die Dämpfungen der beiden Leiter, die hauptsächlich durch Strahlung bedingt sind, sind nicht sehr verschieden. Es geht aus (197a) hervor, daß die Erregung des Empfängers um so größer ist, je geringer die Dämpfung der beiden Leiter gewählt ist. In der Tat wird der Empfänger von den isochronen Erregerwellen um so stärker ins Mitschwingen versetzt werden, je geringer seine eigene Dämpfung sowie auch die Dämpfung der Erregerschwingungen ist.

Das Ansprechen des Resonators ist indessen nicht auf den Fall vollkommener Isochronität beschränkt. Man kann das Verhalten des Resonators am besten durch Konstruktion der sogenannten „Resonanzkurve“ veranschaulichen; diese Kurve erhält man, indem man etwa den Erreger in bestimmter Weise abändert, die Frequenz des Erregers als Abszisse und

das Ansprechen des Resonators als Ordinate aufträgt. Diese Resonanzkurven fallen natürlich verschieden aus, je nach der Art, wie man den Erreger abändert, d. h. je nachdem man seine Frequenz durch Veränderung der Kapazität oder der Selbstinduktion variiert; sie fallen ferner verschieden aus, je nach der zur Messung des Ansprechens verwandten Methode. Alle diese Resonanzkurven aber haben einen gemeinsamen Charakter. Sie besitzen ein Maximum in der Nähe der Isochronität. Nach beiden Seiten hin fallen die Kurven um so steiler ab, je geringer die Dämpfung des Erregers sowie die Dämpfung des Resonators ist. Konstruiert man die zu verschiedenen Werten der Dämpfungsdekrementen gehörigen Resonanzkurven, von größeren zu geringeren Dekrementen fortschreitend, so erhält man eine Kurvenschar, in der jede Kurve die vorhergehende einhüllt; in der Nähe der Isochronität erheben sich die Kurven zu einem immer höheren und steileren Maximum. Ein solches Verhalten ergibt sich aus der elementaren Schwingungslehre in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Diese Verhältnisse sind für die drahtlose Telegraphie von Wichtigkeit. Man wird hier aus zwei Gründen wünschen, mit einer möglichst geringen Dämpfung zu arbeiten. Erstens, weil dadurch die Maximalamplitude der Spannung entsprechend vergrößert würde, zweitens, weil nur bei hinreichend geringer Dämpfung eine abgestimmte Telegraphie möglich ist. Infolge der mehr oder weniger veränderlichen Empfindlichkeit des Kohärens ist man nämlich gezwungen, die Anordnung so zu treffen, daß der Kohärer in einem Augenblicke größter Empfindlichkeit auch dann reagiert, wenn die maximale Potentialamplitude des Empfängers in einem bestimmten Verhältnis kleiner ist als das Maximum der Resonanzkurve. Daher findet ein Ansprechen des Empfängers nicht nur bei genauer Isochronität des Senders statt, sondern auch dann, wenn der Sender eine etwas abweichende Frequenz besitzt. Es gibt einen ganzen Bereich an Frequenzen, auf die der Empfänger anspricht. Dieser Bereich ist um so kleiner, je steiler das Maximum der Resonanzkurve ist, d. h. je geringer die Dämpfungen der beiden

Apparate sind. Wünscht man nun den Empfangsapparat einer Station so abzustimmen, daß er nur auf einen bestimmten Sender, nicht aber auf andere, gleichzeitig nach anderen Stationen telegraphierende Sender anspricht, so müssen die Frequenzen dieser anderen Sender außerhalb des Bereiches des Ansprechens liegen. Man wird mit um so mehr Sendern nach verschiedenen Stationen unabhängig telegraphieren können, je kleiner die Bereiche des Ansprechens, d. h. je geringer die Dämpfungen der Apparate sind.

Man kann nun aber die Dämpfung eines Marconi-Senders nicht beliebig erniedrigen. Die vom Sender zum Empfänger eilenden elektromagnetischen Wellen sind es ja gerade, welche die telegraphischen Zeichen übermitteln. Ihre Energie wird den Senderschwingungen entzogen und die so entstehende Dämpfung muß man mit in Kauf nehmen, wofern es nicht gelingt, dem Sender die verlorene Energie nachzuliefern. Die Strahlungsdämpfung ist um so größer, als es bisher nicht gelungen ist, die Wellen nach dem Orte der Empfangsstation zu konzentrieren. Die Wellen breiten sich nach allen Seiten hin aus und entziehen dem Sender erhebliche Energiemengen. Wir werden im zweiten Bande dieses Werkes zeigen, wie man die von einer Antenne entsandte Strahlung berechnet. Durch die Strahlungsfähigkeit der Antenne und die anfänglich aufgespeicherte Energie bestimmt sich der Verlauf der durch den elektrischen Funken ausgelösten Schwingungen des Marconi-Senders. Die anfängliche Energie jedoch hängt von dem Funkenpotential und von der Kapazität der eingeschalteten Kondensatoren ab. Diese Kapazität ist nicht beliebig zu steigern; denn es müßte, um gleich schnelle Schwingungen zu erhalten, der Thomsonschen Formel gemäß die Selbstinduktion gleichzeitig verringert werden. Aber auch ein kurzer und dicker Schließungsbogen besitzt eine bestimmte Selbstinduktion; diese kann nicht unterschritten werden.

Die Herabdrückung der Dämpfung des Senders ist demnach nur durch Schwächung der entsandten Wellen möglich. Hierdurch würde der Intensitätsfaktor  $A$  verkleinert und so

die Tragweite des Senders verringert werden. Die Forderungen guter Abstimmbarkeit und großer Tragweite widersprechen sich also.

Wir haben hier den Fall behandelt, daß der Sender nur eine einzige gedämpfte Schwingung ausführt. Dieser Voraussetzung entspricht die ursprüngliche Marconische Senderschaltung, bestehend aus einer Antenne, eventuell mit eingeschalteter Kapazität. Es ist aber klar, daß der oben gezogene Schluß aus rein energetischen Gründen auch bei komplizierteren Senderschaltungen zutreffen muß. Wünscht man lange anhaltende Schwingungen zu erzeugen, so muß man die Ausstrahlung verringern, daher auf große Tragweite verzichten. Wünscht man hingegen eine möglichst große Entfernung zu erreichen, so muß man möglichst intensive Wellen erzeugen. Alsdann erschöpft sich die Energie des Senders rasch; die Schwingungen erlöschen und gestatten so keine scharfe Abstimmung.

Neuerdings scheint man jedoch im elektrischen Lichtbogen ein Mittel gefunden zu haben, Gleichstrom in hochfrequenten Wechselstrom zu verwandeln und so dem Sender die ausgestrahlte Energie fortgesetzt nachzuliefern; dies würde einen wesentlichen Fortschritt der drahtlosen Telegraphie bedeuten.

#### § 74. Zwei induktiv gekoppelte Stromkreise.

Wir haben im letzten Paragraphen den Fall behandelt, daß ein Stromkreis einen zweiten zu Schwingungen anregt. Wir haben indessen eine Rückwirkung des zweiten Kreises auf den ersten nicht in Betracht gezogen. Eine solche Rückwirkung wird stattfinden, wenn die Entfernung der beiden Kreise gering, etwa von der Ordnung der Wellenlänge ist. Im Rahmen dieses Kapitels, d. h. auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung, können wir strenge nur den Fall behandeln, daß die Entfernung der beiden Stromkreise klein gegen die Wellenlänge der in ihnen pulsierenden Ströme ist.

Die von A. Oberbeck und anderen gegebene Theorie der Schwingungen zweier induktiv gekoppelter Stromkreise, welche in diesem Paragraphen dargelegt werden soll, gilt exakt z. B. für den Tesla-Transformator, auf die Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie ist sie aus den in § 72 dargelegten Gründen nur mit Vorsicht anzuwenden. Diese Braun-Slaby'schen Senderanordnungen sind aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der erste Teil stellt einen geschlossenen Stromkreis dar, bestehend aus einer Zahl Leydener Flaschen und einem Schließungsbogen bzw. einer Spule, der zweite Teil des Systemes enthält die Sendeantenne. Letztere ist entweder direkt an den ersten Kreis angeschlossen oder vermittelt elektromagnetischer Induktion mit ihm verkoppelt. Den ersten Kreis, der klein gegen die Wellenlänge der entstehenden Schwingungen ist, kann man unter Umständen auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung behandeln, den zweiten hingegen, der die Antenne enthält, nicht. Nichtsdestoweniger konnte M. Wien zeigen, daß gewisse Eigenschaften dieser Sendeapparate sich auf Grund jener Theorie ableiten lassen. Wir wollen diese, auf den Regeln der allgemeinen Schwingungslehre beruhenden Eigenschaften gleichfalls entwickeln, indem wir die Vorgänge in zwei induktiv gekoppelten Stromkreisen unter Annahme quasistationärer Strömung verfolgen.

Wir gehen dabei zurück auf die Gleichungen (186d), welche bereits der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion Rechnung tragen. Die dort eingeführten elektromotorischen Kräfte  $E_1^e$ ,  $E_2^e$  wollen wir jetzt durch die von den Ladungen eingeschalteter Kondensatoren herrührenden ersetzen, d. h. durch die Potentialdifferenzen  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  ihrer Belegungen. Dann erhalten wir

$$(198) \quad \begin{aligned} \varphi_1 - \frac{1}{c^2} L_{11} \frac{dJ_1}{dt} - \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_2}{dt} &= J_1 R_1, \\ \varphi_2 - \frac{1}{c^2} L_{22} \frac{dJ_2}{dt} - \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_1}{dt} &= J_2 R_2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gehen auch aus der in § 72 für einen einzelnen Stromkreis aufgestellten Gleichung (190b) durch

Einführung der gegenseitigen Induktion hervor. Wir setzen, wie dort,

$$(198a) \quad J_1 = -K_1 \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad J_2 = -K_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

indem wir unter  $K_1, K_2$  die Kapazitäten des in den ersten bzw. den zweiten Kreis eingeschalteten Kondensators verstehen. Dadurch geht (198) über in

$$(198b) \quad \begin{aligned} \varphi_1 + R_1 K_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{L_{11} K_1}{c^2} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{L_{12} K_2}{c^2} \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= 0, \\ \varphi_2 + R_2 K_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{L_{22} K_2}{c^2} \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{L_{12} K_1}{c^2} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Widerstände  $R_1, R_2$  gering sind, so daß die von ihnen herrührende Dämpfung nicht wesentlich den Schwingungsvorgang beeinflußt. Setzen wir sie gleich Null, so werden die Frequenzen der beiden Stromkreise bei fehlender Koppelung nach (191b)

$$(198c) \quad \nu_1 = \frac{c}{\sqrt{L_{11} K_1}}, \quad \nu_2 = \frac{c}{\sqrt{L_{22} K_2}}.$$

Schreiben wir weiter abkürzungsweise

$$(198d) \quad k_1 = \frac{K_2 L_{12}}{K_1 L_{11}}, \quad k_2 = \frac{K_1 L_{12}}{K_2 L_{22}},$$

so gelten für  $\varphi_1, \varphi_2$  die simultanen Differentialgleichungen

$$(198e) \quad \begin{aligned} \varphi_1'' + \nu_1^2 \varphi_1 + k_1 \varphi_2'' &= 0, \\ \varphi_2'' + \nu_2^2 \varphi_2 + k_2 \varphi_1'' &= 0. \end{aligned}$$

Da die Vermutung nahe liegt, daß die Gleichungen sich durch periodische Lösungen befriedigen lassen, so machen wir den Ansatz

$$(199) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 e^{i\nu t}, \\ \varphi_2 &= a_2 e^{i\nu t}. \end{aligned}$$

Gelingt es, durch diesen komplexen Ansatz den Differentialgleichungen zu genügen, so stellen die reellen Teile dieser Ausdrücke ein reelles Lösungssystem der linearen Gleichungen

dar. Wir erhalten durch Einsetzen in (198e)

$$(199a) \quad \begin{aligned} a_1 (\nu_1^2 - \nu^2) &= k_1 a_2 \nu^2, \\ a_2 (\nu_2^2 - \nu^2) &= k_2 a_1 \nu^2 \end{aligned}$$

oder

$$(199b) \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\nu_1^2 - \nu^2}{k_1 \nu^2} = \frac{k_2 \nu^2}{\nu_2^2 - \nu^2}.$$

Ist demnach die Frequenz  $\nu$  der entstehenden Schwingungen gefunden, so ist  $a_2$  durch  $a_1$  bestimmt. Ferner folgt für  $\nu^2$  die quadratische Gleichung

$$(199c) \quad \nu^4 (1 - k_1 k_2) - \nu^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 = 0.$$

Führt man durch die Substitutionen

$$(199d) \quad \nu = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{\tau_1}, \quad \nu_2 = \frac{2\pi}{\tau_2}$$

die Schwingungsdauern ein, so erhält man

$$(199e) \quad \tau^4 - \tau^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1^2 \tau_2^2 (1 - k_1 k_2) = 0,$$

daher

$$(199f) \quad \tau^2 = \frac{1}{2} \left\{ \tau_1^2 + \tau_2^2 \pm \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 + 4k_1^2 \tau_1^2 \tau_2^2} \right\},$$

wenn abkürzungsweise

$$(199g) \quad k^2 = k_1 k_2 = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}$$

gesetzt wird. Wir nennen  $k^2$  den „Koppelungskoeffizienten“.

Wir verstehen nun unter  $\tau_1$  die größere, unter  $\tau_2$  die kleinere der Schwingungsdauern der beiden Kreise vor der Koppelung, hingegen unter  $\tau'$ ,  $\tau''$  die Schwingungsdauern der beiden Eigenschwingungen des gekoppelten Systemes, und zwar mag  $\tau'^2$  die größere,  $\tau''^2$  die kleinere der Wurzeln (199f) bezeichnen. Dann folgt aus jener Gleichung

$$(200) \quad \tau' > \tau_1 \geq \tau_2 > \tau''.$$

Die langsamere Eigenschwingung des gekoppelten Systemes ist langsamer, die schnellere schneller als jede der beiden Eigenschwingungen der ungekoppelten Kreise.

Auch wenn man den Fall betrachtet, daß die beiden Stromkreise vor der Koppelung die gleiche Schwingungsdauer

$$(200a) \quad \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \frac{2\pi}{\nu_1} = \frac{2\pi}{\nu_2} = \frac{2\pi}{\nu_0}$$

besitzen, d. h. daß

$$L_{11} K_1 = L_{22} K_2$$

ist, fallen die Perioden des gekoppelten Systemes keineswegs zusammen; es wird vielmehr

$$(200b) \quad \begin{aligned} \tau' &= \tau_0 \sqrt{1+k}, \\ \tau'' &= \tau_0 \sqrt{1-k}. \end{aligned}$$

Zwei Kreise der gleichen Periode geben, miteinander gekoppelt, ein System von zwei verschiedenen Perioden, von denen die eine größer, die andere kleiner als die Periode der ungekoppelten Kreise ist.

Wir wollen für diesen letzteren Fall, wo die ungekoppelten Kreise aufeinander abgestimmt sind, den Schwingungsvorgang genauer verfolgen. Zu den Frequenzen übergehend, erhalten wir

$$(200c) \quad \begin{aligned} \nu'^2 &= \frac{\nu_0^2}{1+k} \\ \nu''^2 &= \frac{\nu_0^2}{1-k}. \end{aligned}$$

Der Frequenz  $\nu = \nu'$  entspricht nun eine Partikularlösung

$$\varphi_1' = a_1' e^{i\nu't}, \quad \varphi_2' = a_2' e^{i\nu't},$$

der Frequenz  $\nu = \nu''$  eine Partikularlösung

$$\varphi_1'' = a_1'' e^{i\nu''t}, \quad \varphi_2'' = a_2'' e^{i\nu''t}$$

der Differentialgleichungen (198e). Für die entsprechenden Konstanten folgt aus (199b), (200c) und (199g)

$$(200d) \quad \begin{aligned} \frac{a_2'}{a_1'} &= \frac{\nu_0^2 - \nu'^2}{k_1 \nu'^2} = \frac{k}{k_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \\ \frac{a_2''}{a_1''} &= \frac{k_2 \nu''^2}{\nu_0^2 - \nu''^2} = -\frac{k_2}{k} = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \end{aligned}$$

Da nun die beiden ungekoppelten Kreise aufeinander abgestimmt sind, d. h.

$$L_{11} K_1 = L_{22} K_2$$

ist, so folgt aus (198 d)

$$(200e) \quad \frac{k_2}{k_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{L_{22}}{L_{11}}.$$

Die beiden Systeme von Partikularlösungen werden demnach

$$\varphi_1' = a_1' e^{i\nu't}, \quad \varphi_2' = a_1' \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} e^{i\nu't}$$

und

$$\varphi_1'' = a_1'' e^{i\nu''t}, \quad \varphi_2'' = -a_1'' \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} e^{i\nu''t}.$$

Wir können etwa für die komplexen Konstanten  $a_1'$ ,  $a_2''$  setzen

$$a_1' = a' e^{i\alpha'}, \quad a_1'' = a'' e^{i\alpha''},$$

wo  $a'$ ,  $\alpha'$ ,  $a''$ ,  $\alpha''$  jetzt vier reelle Integrationskonstanten bedeuten. Der Übergang zu den reellen Bestandteilen und die Zusammensetzung der Partikularlösungen ergibt dann

$$(201) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= a' \cos(\nu' t + \alpha') + a'' \cos(\nu'' t + \alpha''), \\ \varphi_2 &= \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \{ a' \cos(\nu' t + \alpha') - a'' \cos(\nu'' t + \alpha'') \}. \end{aligned}$$

Dieses ist die vollständige Lösung für den Fall zweier ursprünglich in Resonanz befindlicher und dann induktiv gekoppelter Kreise. Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten kann sie jedem vorgegebenen Anfangszustande angepaßt werden. Die entsprechenden Stromstärken in den beiden Kreisen sind nach (198a)

$$(201 a) \quad \begin{aligned} J_1 &= K_1 \{ a' \nu' \sin(\nu' t + \alpha') + a'' \nu'' \sin(\nu'' t + \alpha'') \}, \\ J_2 &= \sqrt{K_1 K_2} \{ a' \nu' \sin(\nu' t + \alpha') - a'' \nu'' \sin(\nu'' t + \alpha'') \}. \end{aligned}$$

Ist nun der erste Kreis anfangs geladen und stromlos und der zweite Kreis ungeladen und stromlos und wird zur Zeit  $t=0$  der Schwingungsvorgang durch einen Funken-

übergang im ersten Kreise eingeleitet, so sind die Anfangsbedingungen zu stellen

$$(201b) \quad t = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_0, \quad J_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad J_2 = 0.$$

Den beiden Bedingungen  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 0$  genügen wir, indem wir die Phasenkonstanten  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha'' = 0$  setzen.

Alsdann folgt gemäß (201) aus  $\varphi_2 = 0$ :

$$a' = a''$$

und daher aus  $\varphi_1 = \varphi_0$ :

$$(201c) \quad a' = a'' = \frac{\varphi_0}{2}.$$

Die Potentiale in den beiden Kreisen werden jetzt

$$(201d) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{2} \{ \cos \nu' t + \cos \nu'' t \}, \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \{ \cos \nu' t - \cos \nu'' t \}. \end{aligned}$$

Es tritt also jede der beiden Schwingungsfrequenzen in beiden Kreisen auf; die Amplituden des Potentials im zweiten Kreise hängen wesentlich von dem Verhältnisse der Kapazitäten ab. Der Koppelungskoeffizient  $k$  spielt nur insofern eine Rolle, als er gemäß (200c) die Frequenzen der beiden Eigenschwingungen beeinflusst; dabei ist die Differenz der beiden Schwingungszahlen um so kleiner, je loser die Koppelung, d. h. je kleiner  $k$  ist. Bei loser Koppelung und geringer Schwingungsdifferenz darf man setzen

$$(201e) \quad \nu' = \nu_0 \left( 1 - \frac{1}{2} k \right), \quad \nu'' = \nu_0 \left( 1 + \frac{1}{2} k \right),$$

daher

$$(201f) \quad \nu' + \nu'' = 2\nu_0, \quad \nu'' - \nu' = k\nu_0.$$

Für lose Koppelung entspricht demnach das arithmetische Mittel der beiden Schwingungsfrequenzen der gemeinsamen Frequenz der ungekoppelten Kreise, die Differenz der beiden Frequenzen ist dem Koppelungskoeffizienten proportional.

Zwei Schwingungen der gleichen Amplitude und nur wenig verschiedener Periode ergeben nun bekanntlich Schwe-

bungen. Die Zahl der Schwebungen in einer gegebenen Zeit ist gleich der Differenz der Zahlen der Schwingungen, die in der gleichen Zeit stattfinden. Es ist mithin die Zahl der Schwebungen in  $2\pi$  Sekunden oder die Schwebungsfrequenz gleich

$$\nu'' - \nu' = k\nu_0.$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist das Potential im zweiten Kreise Null; nach einer halben Schwebung, zur Zeit  $t = \frac{\pi}{\nu'' - \nu'}$ , wird das Potential daselbst seinen größten Wert erreicht haben, um wiederum nach einer halben Schwebung gleich Null zu werden. Dieser Zusammensetzung der beiden Partialschwingungen zu einer einzigen Schwebung entspricht die Umformung von (201 d) in

$$(201 g) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\nu'' - \nu'}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu'' + \nu'}{2} t\right), \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \sin\left(\frac{\nu'' - \nu'}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu'' + \nu'}{2} t\right). \end{aligned}$$

Bei geringer Schwingungsdifferenz, d. h. loser Koppelung, sind diese Ausdrücke zu deuten als Schwingungen der Frequenz  $\nu_0$  von periodisch wechselnder Amplitude. Nach einer halben Schwebung ist die Potentialamplitude im ersten Kreise Null, im zweiten Kreise ist sie gleich

$$\varphi_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} = \varphi_0 \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}}$$

geworden. Wenn man also die Kapazität im ersten Kreise eines Tesla-Transformators erheblich größer und gemäß der Resonanzbedingung die Selbstinduktion entsprechend kleiner wählt als im zweiten Kreise, so erzielt man eine Steigerung der Potentialamplitude im zweiten Kreise. Nach einer ganzen Schwebung, zur Zeit  $t = \frac{2\pi}{\nu'' - \nu'}$ , ist die Potentialamplitude im zweiten Kreise Null geworden, im ersten ist sie zum anfänglichen Werte  $\varphi_0$  zurückgekehrt; dabei ist aber die Schwingungsphase die entgegengesetzte geworden; das gleiche gilt von den

Schwingungsphasen des zweiten Kreises, die durch das Zeitintervall einer ganzen Schwebung voneinander getrennt sind. Die anfängliche Energie des ersten Kreises

$$\frac{1}{2} \varphi_0^2 K_1$$

findet sich nach einer halben Schwebung im zweiten Kreise wieder, da

$$\frac{1}{2} \left( \varphi_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \right)^2 K_2 = \frac{1}{2} \varphi_0^2 K_1$$

ist. Die Energie pendelt also gewissermaßen zwischen den beiden Kreisen hin und her.

Wir wollen noch zum Grenzfalle sehr loser Koppelung der beiden in Resonanz befindlichen Kreise übergehen. Hier wird (201 g)

$$(202) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos(\nu_0 t), \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \frac{k\nu_0}{2} t \sin(\nu_0 t) = \varphi_0 \frac{\nu_0}{2} \frac{L_{12}}{L_{11}} t \sin(\nu_0 t). \end{aligned}$$

Diese Lösung ist zu verwenden, wenn die Zeit einer Schwebung sehr groß ist gegen die sonst in Betracht kommenden Zeiten. Alsdann steigt die Amplitude des Potentials im zweiten Kreise der Zeit proportional an; die Rückwirkung auf den ersten Kreis aber ist herausgefallen. Diese Lösung entspricht der Problemstellung des vorigen Paragraphen; dort wurde die Einwirkung des Erregers auf den Resonator behandelt, ohne eine Rückwirkung in Betracht zu ziehen. Der „Intensitätsfaktor“  $A$  wurde dort unbestimmt gelassen, während hier dieser Faktor einen bestimmten, dem Koppelungskoeffizienten proportionalen Wert annimmt. Setzen wir in Gleichung (197) des vorigen Paragraphen die Dämpfungskonstante des Erregers gleich Null und wählen den Intensitätsfaktor  $A$  passend, so erhalten wir für  $\varphi_2$  den durch Gleichung (202) gegebenen Ausdruck. Würden wir andererseits die allgemeinen Ansätze dieses Paragraphen verfolgen, ohne die Dämpfungsglieder zu vernachlässigen und ohne speziell Resonanz der beiden Kreise anzunehmen, so würde der Grenz-

übergang zu sehr loser Koppelung die allgemeine Bjerknessche Theorie des elektrischen Resonators ergeben, welche der Rückwirkung des Resonators auf den Erreger nicht Rechnung trägt.

Bei enger Koppelung treten die beiden Eigenschwingungen des Systemes deutlich hervor; in diesem Falle ist die Form (201g) der Lösung zur Deutung der beobachteten Vorgänge weniger geeignet als die ursprüngliche Form (201d). Bei den enggekoppelten Sendern der drahtlosen Telegraphie hat man nun in der Tat zwei Eigenschwingungen festgestellt. Qualitativ lassen sich demnach die Schwingungsvorgänge in diesen Sendeapparaten auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung diskutieren. Daß aber diese Theorie unzureichend ist, geht schon daraus hervor, daß die Entstehung elektromagnetischer Wellen, auf der die Möglichkeit einer drahtlosen Telegraphie beruht, von ihr nicht erklärt wird. Ein gründliches Verständnis der bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge ist nur auf Grund der Theorie der elektrischen Wellen möglich. Wir kommen im zweiten Bande dieses Werkes auf die mit der drahtlosen Telegraphie verknüpften Probleme der Elektrodynamik zurück.

### Drittes Kapitel.

#### Elektromagnetische Wellen.

##### § 75. Ebene Wellen in einem isotropen, homogenen Dielektrikum.

Wir gehen in diesem Kapitel zur Behandlung solcher elektromagnetischer Felder über, die zeitlich und räumlich rasch wechseln. Bei diesen versagt die Theorie des quasistationären Stromes. Man hat der mathematischen Theorie der elektrischen Wellen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper (§ 66) zugrunde zu legen.

Wir betrachten zunächst ein homogenes, isotropes Dielektrikum; ein solches ist von eingepägten Kräften frei. Die Feldgleichungen (179), (179a) ergeben hier

$$(203a) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H},$$

$$(203b) \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}.$$

Da  $\mu$  konstant ist, so wird (179b)

$$(203c) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Dazu kommt, wenn wir wahre Ladungen im Innern des Isolators ausschließen,

$$(203d) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0.$$

Durch dieses Gleichungssystem bestimmt sich die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in dem Dielektrikum.

Wir können aus dem Gleichungssystem leicht einen der beiden Vektoren  $\mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$  eliminieren. Man eliminiert  $\mathfrak{E}$ , indem man von der ersten Gleichung den Curl nimmt, die zweite nach  $t$  differenziert und, mit dem Faktor  $\frac{\varepsilon}{c}$  multipliziert, zur ersten addiert. Dann folgt

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \text{curl curl } \mathfrak{H}.$$

Nach der Rechnungsregel (95) geht diese Gleichung mit Rücksicht auf (203c) über in

$$(203e) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{H}.$$

Andererseits kann man auch  $\mathfrak{H}$  eliminieren, indem man (203a) mit  $\frac{\mu}{c}$  multipliziert und nach  $t$  differenziert, hierauf von (203b) den Curl nimmt und diese Gleichung sodann von der ersten subtrahiert. Man erhält dann

$$(203f) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{E}.$$

Die beiden Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  erfüllen demnach dieselbe Differentialgleichung. Für zeitlich nicht wechselnde Felder geht diese in die Laplacesche Differentialgleichung über.

Wir suchen jetzt partikuläre Lösungen der Feldgleichungen, die ebenen, homogenen Wellenzügen entsprechen. Man bezeichnet einen Wellenzug als homogen, wenn man im Felde eine Schar paralleler Ebenen so legen kann, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke längs einer jeden dieser Ebenen sich nach Betrag und Richtung nicht verändern; jene Ebenen nennt man die Wellenebenen, ihre Normalenrichtung die Wellennormale. Wir wollen die  $x$ -Achse in die Wellennormale legen, so daß die Wellenebenen der  $(yz)$ -Ebene parallel werden. Da längs der Wellenebenen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  konstant sein sollen, so fallen die partiellen Differentialquotienten nach  $y$  und  $z$  fort und es lauten die Feldgleichungen:

$$(204a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0, \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \end{array} \right.$$

$$(204b) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \end{array} \right.$$

$$(204c) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0,$$

$$(204d) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0,$$

Aus (204c, d) folgt, daß die longitudinalen, d. h. die parallel der Wellennormale genommenen, Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  längs der Wellennormale nicht variieren. Die ersten beiden der Gleichungen (204a), (204b) aber besagen, daß diese Komponenten  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{H}_x$  auch von der Zeit nicht abhängen. Wir kennen also diese Größen für alle Zeiten und

für alle Werte von  $x$ , wenn wir ihren Wert für irgendeine Zeit und für irgendeine Parallelebene zur  $(yz)$ -Ebene angeben. Wir wollen nun voraussetzen, daß zu Beginn des Vorganges es eine Parallelebene zur  $(yz)$ -Ebene gibt, die von den Wellen noch nicht erreicht ist. Hier wird sein

$$(204e) \quad \mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_x = 0.$$

Dann verschwinden die longitudinalen Komponenten der Feldstärken im ganzen Raume und zu jeder Zeit.

Würden wir  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{H}_x$  nicht gleich Null, sondern konstant annehmen, so würde ein konstantes elektrisches bzw. magnetisches Feld parallel der  $x$ -Achse sich dem Felde der Wellen überlagern; konstante Felder parallel der  $y$ -Achse oder der  $z$ -Achse können wir ebenfalls einer Lösung der Gleichungen (204a, b) stets hinzufügen, da diese linearen Differentialgleichungen durch Einsetzen konstanter Werte von  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  bzw.  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  erfüllt werden. Die Wellenfortpflanzung würde durch Hinzufügung eines solchen Feldes nicht geändert werden. Daher haben solche Felder für uns kein Interesse. Sie rühren von elektrischen Ladungen oder Strömen her, die ihren Sitz außerhalb des betrachteten Feldes haben und die Wellen in dem hier betrachteten Falle nicht beeinflussen.

Wir bemerken, daß die beiden letzten, noch zu erfüllenden der Gleichungen (204a, b) die Komponenten  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  einerseits und  $\mathfrak{E}_z$ ,  $\mathfrak{H}_y$  andererseits miteinander verknüpfen. Wir können daher diese Paare von Komponenten getrennt behandeln. Die Gleichungen

$$(204f) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

ergeben nach Elimination von  $\mathfrak{E}_y$  bzw.  $\mathfrak{H}_z$

$$(204g) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2},$$

$$(204h) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2},$$

Gleichungen, die aus (203e, f) direkt folgen, wenn man, der Annahme homogener ebener Wellen entsprechend, die Differential-

quotienten nach  $y$  und  $z$  streicht. Diese partiellen Differentialgleichungen sind aus der Theorie der schwingenden Saite bekannt. Die allgemeine Lösung von (204g) schreiben wir in der Form

$$(205) \quad \mathfrak{G}_y = f(x - wt) + g(x + wt),$$

wobei

$$(205a) \quad w = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen (204f, h) werden dann erfüllt durch

$$(205b) \quad \mathfrak{G}_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{f(x - wt) - g(x + wt)\}.$$

Die willkürlichen Funktionen

$$f(x - wt) \text{ und } g(x + wt)$$

stellen Wellen dar, die sich in Richtung der positiven bzw. der negativen  $x$ -Achse fortpflanzen.

Wir beschränken uns weiterhin auf die Diskussion derjenigen Partikulärlösung, welche durch die Funktion

$$f(x - wt)$$

gegeben ist. Die Form der Funktion  $f$  ist durch die Wellenkurve zur Zeit  $t = 0$  bestimmt; diese Wellenkurve pflanzt sich unverzerrt mit der Geschwindigkeit  $w$  fort. Die Geschwindigkeit einer ebenen elektromagnetischen Welle in einem isotropen Isolator hängt also nicht von der Wellenform und Wellenlänge ab. Im leeren Raume, wo das Gaußsche Maßsystem

$$\epsilon = 1 \text{ und } \mu = 1$$

setzt, wird nach (205a) die Geschwindigkeit mit der universellen Konstanten  $c$  identisch, welche durch Vergleichung der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheiten gleich

$$3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gefunden ist. (Vgl. § 67.) Diese Zahl stimmt mit der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume überein. Wir sehen also: im leeren Raume ist die Geschwindigkeit ebener

elektromagnetischer Wellen der Lichtgeschwindigkeit  $c$  gleich.

Nicht nur die Geschwindigkeit ist den Lichtwellen und den elektromagnetischen Wellen gemeinsam. Die elektromagnetischen Wellen sind wie die Lichtwellen transversal. In der Tat fanden wir, daß weder  $\mathcal{E}$  noch  $\mathcal{H}$  eine periodisch wechselnde longitudinale Komponente besitzen kann. Beide Vektoren stehen senkrecht auf der Wellennormalen. Im leeren Raume zeigen demnach die elektromagnetischen Wellen und die Lichtwellen ein ganz analoges Verhalten, wenn auch ihre Wellenlängen sehr verschieden sind.

Diese Konsequenzen seiner Feldgleichungen waren es, die Maxwell zur Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie führten. Die elektromagnetische Lichttheorie betrachtet die Lichtstrahlen und die Wärmestrahlen als elektromagnetische Wellen. Sie ist der alten mechanischen Theorie des Lichtes dadurch überlegen, daß sie den numerischen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus rein elektrischen Messungen zu berechnen gestattet, und dadurch, daß sie von vornherein nur transversale ebene Lichtwellen zuläßt. Die alte Theorie, welche das Licht als Wellenbewegung eines elastischen Mediums betrachtete, konnte nur schwer das Fehlen longitudinalen Lichtes erklären. Die elektromagnetische Lichttheorie schließt longitudinales Licht von vornherein aus.

In dielektrischen Körpern, deren Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Permeabilität von 1 verschieden ist, ist die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen durch (205a) gegeben. Der Brechungsindex eines Dielektrikums ist demnach allgemein gleich

$$(205a) \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Für den Fall speziell, wo  $\mu = 1$  ist, folgt die sogenannte „Maxwellsche Relation“

$$(205d) \quad n^2 = \epsilon.$$

Für Isolatoren, die weder paramagnetisch noch diamagnetisch sind, muß nach der Maxwellschen

elektromagnetischen Lichttheorie die Dielektrizitätskonstante gleich dem Quadrate des optischen Brechungsindex sein. Die experimentelle Prüfung dieser Folgerung gestattet es, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie zu beurteilen, ob die Feldgleichungen das dielektrische Verhalten der Körper diesen sehr schnellen elektrischen Schwingungen gegenüber richtig beschreiben. Es entstanden ja, wie im § 66 dargelegt wurde, die Feldgleichungen für Isolatoren dadurch aus den allgemeinen Hauptgleichungen des § 65, daß die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}$$

von elektrostatischen auf beliebig rasch wechselnde Felder übertragen wurde. Die Gültigkeit der Maxwellschen Relation (205d) ist ein Kriterium für die Richtigkeit dieser Annahme.

Für Gase, z. B. Wasserstoff, Kohlenoxyd, Luft, hat L. Boltzmann die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  gemessen und sie in guter Übereinstimmung mit dem Quadrate des optischen Brechungsindex gefunden. Andere Körper wiederum, wie z. B. das Wasser, gehorchen nicht der Maxwellschen Relation, indem die Dielektrizitätskonstante sich als weit größer ergibt als das Quadrat des optischen Brechungsindex. Diese Körper zeigen indessen bereits im Gebiete der Hertz'schen Wellen Dispersion, d. h. Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Es kann daher nicht wundernehmen, daß in solchen Körpern die Lichtwellen eine ganz andere Geschwindigkeit besitzen, als sich aus der elektrostatisch gemessenen Dielektrizitätskonstante ergibt. Dieser Umstand läßt sich nicht als Argument gegen die Grundvorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie geltend machen, da ja bereits für rein elektrische Wellen in solchen Körpern die Geschwindigkeit nicht durchweg der Maxwellschen Relation entspricht. Man wird, um diese Abweichung von der Maxwellschen Relation zu erklären, das optische Verhalten dieser Isolatoren auf Grund der allgemeinen Hauptgleichungen des § 65 behandeln, aber die Beziehung zwischen elektrischer Feld-

stärke  $\mathcal{E}$  und elektrischer Verschiebung  $\mathcal{D}$  erweitern; das geschieht in der Tat in den elektromagnetischen Theorien der Dispersion.

Indem wir aus dem Gleichungssystem (204a,b) diejenigen Gleichungen herausgriffen, welche  $\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{H}_z$  miteinander verknüpfen, beschränkten wir die Betrachtung auf eine geradlinig polarisierte elektromagnetische Welle. In einer solchen folgen sich elektrischer Vektor, magnetischer Vektor und Richtung der Wellenfortpflanzung, wie  $y$ -,  $z$ -,  $x$ -Achse eines rechtshändigen Achsensystems, d. h. wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. In der Tat kehrt sich dieser Regel gemäß die Richtung von  $\mathcal{H}$  um, wenn die Fortpflanzungsrichtung umgekehrt, aber die Richtung von  $\mathcal{E}$  beibehalten wird; daher das negative Vorzeichen, mit dem

$$g(x + wt)$$

in Gleichung (205b) versehen ist. Die Gleichungen des Systems (204a,b), welche  $\mathcal{E}_z$ ,  $\mathcal{H}_y$  miteinander verknüpfen, gehen aus den für  $\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{H}_z$  geltenden hervor, indem  $\mathcal{E}_y$  durch  $\mathcal{E}_z$ ,  $\mathcal{H}_z$  durch  $-\mathcal{H}_y$  ersetzt wird. Dieser Substitution entspricht eine Drehung um einen Rechten um die Wellennormale als Achse. Die Integration ergibt hier Wellen, die senkrecht zu den bisher behandelten polarisiert sind, die aber im übrigen dieselben Eigenschaften aufweisen wie jene.

Ob die Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Strahles durch den Vektor  $\mathcal{E}$  oder durch  $\mathcal{H}$  bestimmt wird, läßt sich auf Grund der bisherigen Entwicklungen nicht angeben. Doch ergibt die Ausdehnung der elektromagnetischen Theorie auf Kristalle, daß man zu den Gesetzen der Kristalloptik gelangt, wenn man die optische Anisotropie auf die dielektrische zurückführt und die Polarisationsebene mit der durch  $\mathcal{H}$  und die Wellennormale gelegten Ebene identifiziert. Auch die Gesetze der Reflexion des Lichtes an der Oberfläche durchsichtiger Körper, auf die wir hier nicht eingehen wollen, ergeben sich aus der elektromagnetischen Theorie in Übereinstimmung mit den Formeln Fresnels, wenn man die Polarisations-

ebene eines geradlinig polarisierten Strahles senkrecht zum Vektor  $\mathfrak{G}$  annimmt.

Wir wollen jetzt die Energie berechnen, welche eine ebene elektromagnetische Welle mit sich führt. Die in der Volumeneinheit enthaltene Energie beträgt nach (180f)

$$\psi = \frac{1}{8\pi} \{ \varepsilon \mathfrak{G}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \}.$$

Da nun in einer parallel der  $x$ -Achse fortschreitenden Welle, wie sie durch den ersten Summanden in (205, 205b) dargestellt wird,

$$(205e) \quad \varepsilon \mathfrak{G}^2 = \mu \mathfrak{H}^2$$

ist, so ist die in einem gegebenen Volumen des Feldes enthaltene Energie für ebene Wellen in Isolatoren zur einen Hälfte elektrischer, zur anderen magnetischer Art. Während die Welle mit der durch (205a) bestimmten Geschwindigkeit  $w$  fortschreitet, tritt in der Sekunde durch den Quadratzentimeter einer zur Wellenebene parallelen Ebene die folgende Energiemenge hindurch:

$$(205f) \quad \left\{ \begin{aligned} S = w \psi &= \frac{1}{8\pi} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \{ \varepsilon \mathfrak{G}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \} \\ &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{G}^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{G}| \cdot |\mathfrak{H}|. \end{aligned} \right.$$

Der so bestimmte Ausdruck  $S$  ist ein Maß der Energieströmung oder der Strahlung. Wir wollen, an den aus der Optik geläufigen Begriffen des Lichtstrahles uns anlehnend,  $S$  als Betrag eines Vektors deuten, dessen Richtung durch die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle bestimmt ist. Da, wie wir wissen, die Fortpflanzungsrichtung mit der Richtung des äußeren Produktes der beiden aufeinander senkrechten Vektoren  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$  übereinstimmt, so liegt es nahe, für den „Strahlvektor“ zu setzen

$$(205g) \quad \mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{G}\mathfrak{H}].$$

Dann wird die Strahlung nicht nur auf senkrecht zur Wellennormale gestellte, sondern auch auf schief gestellte

Flächen durch die zur Fläche normale Komponente von  $\mathfrak{E}$  angegeben. Der erhaltene Ausdruck des Energiestromes durch die Feldstärken ergab sich hier für ebene Wellen unmittelbar aus dem für die Energiedichte angenommenen Werte. Er ist aber, wie wir später sehen werden, von weit allgemeinerer Bedeutung.

### § 76. Ebene Wellen in Halbleitern.

Wenn der homogene isotrope Körper, in welchem sich die elektromagnetische Welle fortpflanzt, zugleich elektrisch leitet, so ist die Gleichung (203a) durch Einführung des Leitungsstromes zu erweitern. Die allgemeinen Feldgleichungen (179, 179a, b) ergeben hier

$$(206a) \quad \frac{\varepsilon}{e} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{H},$$

$$(206b) \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E},$$

$$(206c) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Die Gleichung (203d), welche das Verschwinden der freien Elektrizität im Innern des homogenen Mediums ausspricht, bleibt auch für die Wellen im Innern des homogenen Leiters gültig. Um dieses einzusehen, bilden wir die Divergenz von (206a). Wir erhalten dann

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{div } \mathfrak{E} = 0.$$

Aus dieser Gleichung schlossen wir bereits im § 54, daß die räumliche Dichte der freien Elektrizität an jedem Punkte des Feldes nach dem Gesetze

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathfrak{E} = \varrho'_0 e^{-\frac{t}{\vartheta}}$$

abnimmt (vgl. 158, 158a), wo

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

die sogenannte Relaxationszeit ist. Das Abklingen einer durch

$\varrho'_0$  gegebenen Anfangsverteilung freier Elektrizität ist also ganz unabhängig von den elektromagnetischen Störungen, die von außen her in das Innere des homogenen Leiters eindringen. Nehmen wir z. B. an, daß zur Zeit  $t = 0$  das Feld im Innern des Leiters Null war, so ist auch  $\varrho'_0 = 0$  und daher  $\varrho'$ , die Dichte der freien Elektrizität, dauernd gleich Null. Aus der so gewonnenen Gleichung

$$(206d) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

und aus (206c) schließen wir nun, ganz ebenso wie im vorigen Paragraphen, daß nur transversale, ebene elektromagnetische Wellen im Innern des homogenen Leiters sich fortpflanzen können. Auch läßt sich die Elimination von  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  in ganz entsprechender Weise ausführen wie dort. Sie ergibt für diese beiden Vektoren die Differentialgleichungen

$$(206e) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{H},$$

$$(206f) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{E},$$

die jetzt an Stelle von (203e, f) treten.

Wir untersuchen wieder ebene homogene Wellen; wir legen die  $x$ -Achse in die Fortpflanzungsrichtung und zerlegen die in die Wellenebenen fallenden Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  in ihre Komponenten. Wir betrachten auch hier nur die Komponenten  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ , die, optisch gesprochen, einer geradlinig und zwar parallel der  $z$ -Achse polarisierten Welle angehören. Für  $\mathfrak{E}_y$  gilt sodann die partielle Differentialgleichung

$$(206g) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2},$$

die man als „Telegraphengleichung“ bezeichnet. Derselben Differentialgleichung hat auch  $\mathfrak{H}_z$  zu genügen.

Wir wollen uns etwa den Leiter durch die  $(yz)$ -Ebene begrenzt denken und ebene Wellen senkrecht auf diese Ebene fallend annehmen. Für  $x = 0$  nehmen wir einen periodischen Schwingungszustand als gegeben an, von der Frequenz  $\nu$ .

Dieser Annahme entspricht der reelle Teil des komplexen Ausdruckes  $ae^{i\nu t}$ , durch den wir die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}_y$  in der  $(yz)$ -Ebene darstellen wollen. Wir suchen nun der Differentialgleichung (206g) durch den Ansatz

$$(207) \quad \mathfrak{E}_y = ae^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}$$

zu genügen. Der reelle Teil des Ausdruckes gibt eine physikalisch zulässige Lösung der linearen Differentialgleichung.

Damit der komplexe Ausdruck (207) die vorgelegte Differentialgleichung erfüllt, ist die komplexe Konstante  $p$  folgendermaßen zu bestimmen:

$$(207a) \quad p^2 = \varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\nu}.$$

Wir wählen für  $p$  diejenige Wurzel, deren reeller Teil positiv ist, und zerlegen diese in den reellen und imaginären Bestandteil

$$(207b) \quad p = n - i\kappa.$$

Die physikalische Bedeutung der reellen Größen  $n, \kappa$  erkennen wir, indem wir sie in (207) einführen; es wird

$$(207c) \quad \mathfrak{E}_y = ae^{-\frac{\kappa\nu x}{c}} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{nx}{c}\right)}.$$

Es ist, wie dieser Ausdruck zeigt,  $\frac{c}{n}$  die Geschwindigkeit, mit der die Wellenphasen im Leiter fortleiten, daher  $n$  der Brechungsindex des Leiters. Da ferner

$$\frac{\kappa\nu x}{c} = \kappa \frac{2\pi x}{\lambda}$$

ist, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge von Wellen der Frequenz  $\nu$  im Vakuum bedeutet, so nimmt die Amplitude der Wellen im Leiter beim Fortschreiten um die Strecke  $x = \lambda$  im Verhältnis  $e^{-2\pi\kappa}$  ab. Die so definierte Konstante  $\kappa$  nennt man den „Extinktionskoeffizienten“.

Der Brechungsindex  $n$  und der Extinktionskoeffizient  $\kappa$  hängen nun mit den elektromagnetischen Materialkonstanten

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  und der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}$$

durch die aus (207a, b) folgenden Gleichungen zusammen:

$$(207d) \quad n^2 - \kappa^2 = \varepsilon\mu,$$

$$(207e) \quad n\kappa = \sigma\mu\tau.$$

Es folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$n^2 + \kappa^2 = \mu\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2},$$

daher

$$(207f) \quad n^2 = \frac{\mu}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon \right\},$$

$$(207g) \quad \kappa^2 = \frac{\mu}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon \right\}.$$

Diese beiden Konstanten bestimmen die Geschwindigkeit und die räumliche Dämpfung der im Leiter sich fortpflanzenden elektromagnetischen Wellen.

Wir haben jetzt durch den für  $\mathfrak{G}_y$  gemachten Ansatz (207) die Differentialgleichung (206g) erfüllt. Der entsprechenden, für  $\mathfrak{H}_z$  geltenden Differentialgleichung werden wir durch einen entsprechenden Ansatz

$$(208) \quad \mathfrak{H}_z = b e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}$$

genügen. Damit durch (207, 208) auch die Feldgleichungen (206a, b) erfüllt sind, müssen die Konstanten  $a$ ,  $b$  in einem bestimmten Verhältnis stehen. Gleichung (206b) ergibt

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial x};$$

hieraus folgt

$$(208a) \quad b = a \frac{p}{\mu} = \frac{a}{\mu} (n - i\kappa).$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  stehen hiernach in einem komplexen Verhältnis. Um die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses zu erkennen, bilden wir die reellen Teile von

(207, 208), nachdem wir

$$a = |a| e^{i\alpha}, \quad b = |b| e^{i\beta}$$

gesetzt haben.

Dann wird

$$(208b) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_y = |a| e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \cos \left\{ \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \alpha \right\}, \\ \mathfrak{H}_z = |b| e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \cos \left\{ \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \beta \right\}. \end{cases}$$

Es bestimmen also  $\alpha$  und  $\beta$  die Phasen der elektrischen und magnetischen Feldstärke in den Wellen. Für ebene Wellen in Isolatoren sind diese Phasen einander gleich; für ebene Wellen in dem Leiter aber folgt aus (208a)

$$(208c) \quad \frac{|b|}{|a|} e^{i(\beta-\alpha)} = \frac{n - i\kappa}{\mu};$$

setzen wir

$$(208d) \quad \gamma = \arctg \left( \frac{\kappa}{n} \right),$$

so erhalten wir

$$(208e) \quad |b| = \frac{|a|}{\mu} \sqrt{n^2 + \kappa^2} = |a| \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}}$$

und

$$(208f) \quad \beta = \alpha - \gamma.$$

Es bleibt daher in Leitern die magnetische Feldstärke der Wellen um den Winkel  $\gamma$  der Phase nach hinter der elektrischen Feldstärke zurück. Für einen Isolator wird  $\gamma = 0$ , und das Amplitudenverhältnis der magnetischen und elektrischen Feldstärke wird gleich  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ , entsprechend der Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energie der Wellen, die wir im vorigen Paragraphen feststellten. Gemäß (208e) ändert das Hinzukommen der Leitfähigkeit  $\sigma$  das Verhältnis der Amplituden und hebt die Gleichheit der beiden Energiebeträge auf.

Wir haben die Beziehung (208a) der komplexen Konstanten  $a$  und  $b$  aus der zweiten der Feldgleichungen abgeleitet.

Die erste Feldgleichung würde nichts Neues ergeben; sie würde nur zu der Relation (207a) für  $p^2$  zurückführen.

Die Entwicklung Joulescher Wärme in Leitern bedingt die Extinktion der elektromagnetischen Wellen, die durch Gleichung (207g) angezeigt wird. Die elektromagnetische Lichttheorie behauptet also, daß die Isolatoren durchsichtig sind und daß nur leitende Körper das Licht absorbieren. Diese Behauptung entspricht im großen und ganzen den Tatsachen. Die besten Leiter, die Metalle, absorbieren das Licht am stärksten. Im einzelnen aber kommen, wie schon Maxwell selbst erkannt hat, Abweichungen vor. So sind die Elektrolyte, obwohl leitend, oft durchsichtig. Diese Tatsache aber erklärt sich, wie E. Cohn bemerkt hat, ganz ungezwungen auf Grund des Faradayschen Gesetzes, wonach in Elektrolyten der elektrische Strom mit einem Massentransport verbunden ist. Auch in den Lichtwellen wird gleichzeitig mit der Elektrizität die mit der Elektrizität verkoppelte Masse schwingen müssen. Die Trägheit der elektrochemischen Ionen ist aber im Verhältnis zu ihrer elektrischen Ladung so beträchtlich, daß sie ein merkliches Mitschwingen in den hohen Frequenzen der Lichtwellen nicht gestattet; der Elektrolyt verhält sich dann wie ein Isolator.

Die Maxwellsche Theorie berücksichtigt, indem sie allgemein  $\mathbf{i} = \sigma \mathfrak{G}$  setzt, die individuellen Eigenschaften der stromführenden Ionen oder Elektronen nicht. Sie nimmt an, daß die Leitfähigkeit eines Körpers für stationären Strom auch noch bei beliebig rasch wechselnden Strömen maßgebend ist. Ganz entsprechend, wie die Gültigkeit der Maxwellschen Relation  $\varepsilon = n^2$  für Licht- und Wärmestrahlen als Kriterium für die Proportionalität von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{D}$  in Isolatoren gelten konnte, so wird die Gültigkeit der soeben für leitende Körper gewonnenen Beziehungen in der Optik ein Prüfstein für die Richtigkeit der Annahme Maxwells sein, daß Feldstärke  $\mathfrak{G}$  und Dichte  $\mathbf{i}$  des Leitungsstromes auch für die schnellsten elektrischen Schwingungen in demselben Verhältnis stehen wie für stationären Strom. Der Relation (207g) zufolge müßte

nun für Licht bestimmter Farbe die Absorption mit der Leitfähigkeit der Körper parallel gehen. Ordnet man die Körper nach ihrer Durchsichtigkeit, so müßte ihre Reihenfolge die gleiche sein, wie wenn man sie nach dem reziproken Werte des Leitvermögens ordnet. Diese Beziehung zwischen Durchsichtigkeit und Leitvermögen hat sich nun gerade bei den metallischen Leitern im sichtbaren Spektralgebiete durchaus nicht bestätigt.

Um so mehr überraschte es, als neuerdings E. Hagen und H. Rubens feststellten, daß im ultraroten Spektralgebiete die optischen Eigenschaften der Metalle durchaus den Forderungen der Maxwell'schen Theorie Genüge leisten. Wir wollen jetzt die Theorie dieser Versuche\* entwickeln.

### § 77. Das Reflexionsvermögen der Metalle.

Wir haben bisher in diesem Kapitel nur die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in homogenen Körpern behandelt. In diesem Paragraphen wollen wir den Fall behandeln, daß die elektromagnetischen Wellen auf die Oberfläche eines metallischen Leiters fallen. Wir haben neben den Differentialgleichungen, die im Innern der aneinander grenzenden Körper gelten, noch die Grenzbedingungen an ihrer Trennungsfläche heranzuziehen. Wir hatten diese Grenzbedingungen bisher nur für den speziellen Fall stationärer Felder in stromlosen Bereichen entwickelt (§ 63). Für ein beliebiges elektromagnetisches Feld ergeben sich die Grenzbedingungen durch sinn-gemäße Anwendungen der Integralsätze, die uns zu den Feldgleichungen führten. Diese Integralsätze besagen, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer Kurve dem elektrischen Strome durch die umschlossene Fläche, und daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs einer Kurve der zeitlichen Abnahme des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses proportional ist. Durch Übergang zu Flächenelementen ergaben sich aus diesen Sätzen die Hauptgleichungen (177) und (178). Diese Differentialgleichungen

verknüpfen den Wirbel von  $\mathfrak{H}$  mit der Dichte des wahren elektrischen Stromes, den Wirbel von  $\mathfrak{G}$  mit der Dichte des magnetischen Stromes (178 b, c). Die Anwendung derselben Sätze auf die Trennungsfläche zweier Körper ergibt, daß die Dichten des elektrischen bzw. des magnetischen Flächenstromes dem Flächenwirbel der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke proportional sind. Wenn wir zulassen, daß der elektrische Strom auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche eines Metalles sich zusammendrängt, so wird dieser Flächenstrom mit einem Flächenwirbel der magnetischen Feldstärke verknüpft sein. Ein solcher flächenhafter Strom würde aber in der Oberflächenschicht unendliche räumliche Stromdichte besitzen. Da wir unendliche Werte der Feldstärken von vornherein ausschließen, so ist unendliche räumliche Dichte des wahren elektrischen Stromes nur bei unendlichen Werten von  $\sigma$  oder  $\varepsilon$ , unendliche Raumdichte des wahren magnetischen Stromes nur bei unendlichen Werten von  $\mu$  möglich. Wir werden im nächsten Paragraphen den idealen Grenzfall eines vollkommenen Leiters erörtern, der unendlicher Leitfähigkeit  $\sigma$  entspricht. In Wirklichkeit aber kommen jenen drei Materialkonstanten stets endliche Werte zu, es ist daher ein flächenhafter elektrischer oder magnetischer Strom auszuschließen. Hieraus ergeben sich die Grenzbedingungen: Der Flächenwirbel der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke an der Trennungsfläche zweier Körper ist gleich Null. Das heißt (§ 29): die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  durchsetzen stetig die Trennungsfläche zweier Körper.

Auf Grund dieser Grenzbedingungen soll nun das Problem der Metallreflexion in Angriff genommen werden. Das Metall soll gegen den leeren Raum durch eine Ebene begrenzt sein, die wir als  $(yz)$ -Ebene wählen. Auf diese Ebene fällt senkrecht ein periodischer Zug ebener, geradlinig polarisierter Wellen

$$(209) \quad \mathfrak{G}_y = \mathfrak{H}_z = a' e^{iv \left( t - \frac{x}{c} \right)}$$

Dieser Ansatz ist in den für Wellen in Isolatoren ab-

geleiteten allgemeinen Ausdrücken (205), (205b) enthalten, er genügt also den Feldgleichungen. Die  $x$ -Achse weist nach dem Innern des Metalles hin. Für die reflektierte Welle machen wir den gleichfalls mit (205), (205b) verträglichen Ansatz

$$(209a) \quad -\mathfrak{G}_y = \mathfrak{H}_z = a'' e^{i\nu \left(t + \frac{x}{c}\right)}.$$

Die reellen Teile dieser komplexen Ausdrücke sollen die einfallenden und die reflektierten Wellen darstellen. Ihre Amplituden werden durch die absoluten Beträge von  $a'$  bzw.  $a''$  angegeben. Die in der einfallenden und der reflektierten Welle fortgepflanzten Strahlungen sind nach (205f) den Quadraten ihrer Amplituden proportional. Der Quotient aus reflektierter und einfallender Strahlung

$$(209b) \quad r = \frac{|a''|^2}{|a'|^2}$$

ist das gesuchte „Reflexionsvermögen“ des Metalles für senkrechte Incidenz.

Um dieses zu ermitteln, haben wir die Wellen zu berücksichtigen, die in das Innere des Metalles eindringen. Für die Feldstärken dieser Wellen führen wir die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke ein (207, 208, 208a):

$$(209c) \quad \mathfrak{G}_y = a e^{i\nu \left(t - \frac{px}{c}\right)},$$

$$(209d) \quad \mathfrak{H}_z = a \frac{(n - i\kappa)}{\mu} e^{i\nu \left(t - \frac{px}{c}\right)}.$$

Diese Feldstärken der im Metalle fortgepflanzten Wellen sind nun mit denjenigen der im leeren Raume fortgepflanzten durch die im Eingange dieses Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen verknüpft, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten an der Trennungsfläche fordern. Die Feldstärken an der einen Seite der Trennungsfläche  $x = 0$  erhält man, indem man diejenigen der einfallenden Welle (209) und der reflektierten (209a) superponiert, die Feldstärken auf der

anderen Seite der Trennungsfläche werden durch (209c, d) gegeben.

Sollen jederzeit die Komponenten  $\mathfrak{G}_y, \mathfrak{H}_z$  zu beiden Seiten der Trennungsfläche einander gleich sein, so müssen die komplexen Konstanten  $a, a', a''$  den Gleichungen genügen

$$(209e) \quad \begin{cases} a' - a'' = a, \\ a' + a'' = a \frac{(n - i\kappa)}{\mu}. \end{cases}$$

Dieselben ergeben

$$(209f) \quad \begin{cases} a' = \frac{1}{2} a \left\{ +1 + \frac{n - i\kappa}{\mu} \right\}, \\ a'' = \frac{1}{2} a \left\{ -1 + \frac{n - i\kappa}{\mu} \right\}, \end{cases}$$

daher wird das Reflexionsvermögen nach (209b)

$$(210) \quad r = \left| \frac{n - \mu - i\kappa}{n + \mu - i\kappa} \right|^2 = \frac{(n - \mu)^2 + \kappa^2}{(n + \mu)^2 + \kappa^2}.$$

Brechungsindex  $n$  und Extinktionskoeffizient  $\kappa$  des Körpers sind dabei für jede Frequenz  $\nu$  gemäß den Gleichungen (207f, g) durch die in Gaußchem Maße gemessenen Materialkonstanten  $\epsilon, \sigma, \mu$  zu bestimmen. Nach der Maxwellschen Theorie gilt (210) für jeden isotropen Körper, sowohl Isolator, wie Halbleiter oder metallischen Leiter.

Da indessen, wie erwähnt, in dem sichtbaren Spektralbereiche die von der Maxwellschen Theorie geforderten Beziehungen sich nicht bestätigt haben, so wollen wir der Diskussion dieses Ausdruckes den Fall zugrunde legen, auf den die Beobachtungen von E. Hagen und H. Rubens (Ann. d. Phys. (4) 11. S. 873. 1903) sich beziehen. Diese Forscher untersuchten das Reflexionsvermögen von Metallspiegeln für langwellige ultrarote Strahlung von der Wellenlänge

$$\lambda = 1,2 \times 10^{-3} \text{ cm.}$$

Die Schwingungsdauer  $\tau$  ist hier

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 0,4 \times 10^{-13} \text{ Sekunde.}$$

Die Leitfähigkeit  $\sigma$  des Kupfers z. B. ist in absolutem elektrostatischem Maße

$$\sigma = 5,14 \times 10^{17}.$$

Es wird demnach

$$2\sigma\tau = 4,11 \times 10^4.$$

In den Gleichungen (207f, g) kommt nun die hypothetische Dielektrizitätskonstante des Metalles vor. Nimmt man an, daß  $\varepsilon < 4$  ist, so ist der Quotient von  $\varepsilon^2$  durch  $4\sigma^2\tau^2$  kleiner als  $10^{-8}$ , für Kupfer. Es wird also für Kupfer, und auch für hundertmal schlechter leitende Metalle hier  $\varepsilon^2$  zu streichen und  $2\sigma\tau$  in (207f, g) an Stelle der Wurzel zu setzen sein. Dann steht auf der rechten Seite  $2\sigma\tau \pm \varepsilon$ . Für Kupfer bedeutet hier das Streichen des  $\varepsilon$  nur einen Fehler von 0,01%, für  $\varepsilon < 4$ , und auch für Stahl, der eine etwa zehnmal so kleine Leitfähigkeit besitzt, begehen wir nur einen geringen Fehler, wenn wir setzen

$$(210a) \quad n = \kappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}.$$

Beschränken wir uns ferner auf Metalle, deren magnetische Permeabilität nicht merklich von 1 abweicht, so erhalten wir als Wert des Reflexionsvermögens (210)

$$r = \frac{(\sqrt{\sigma\tau} - 1)^2 + \sigma\tau}{(\sqrt{\sigma\tau} + 1)^2 + \sigma\tau} = \frac{2\sigma\tau - 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}{2\sigma\tau + 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}$$

oder, da konsequenterweise 1 gegen  $2\sigma\tau$  zu vernachlässigen ist,

$$(210b) \quad r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}.$$

Diese Formel für das Reflexionsvermögen der Metalle gegenüber langen Wellen haben nun E. Hagen und H. Rubens durchweg bestätigt gefunden (nur das Wismut macht eine Ausnahme). So ergibt z. B. für Kupfer die theoretische Formel

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{2,05 \times 10^4}} = 1,4 \times 10^{-2},$$

der Versuch ergab

$$1,6 \times 10^{-2}.$$

Für schlechter leitende Metalle ist das Reflexionsvermögen entsprechend kleiner. Es hat bei gegebener Wellenlänge immer das Produkt

$$(1 - r)\sqrt{\sigma}$$

für alle Metalle den gleichen Wert; dabei bedeutet  $(1 - r)$  offenbar den in das Metall eindringenden Bruchteil der Strahlung, d. h. das Absorptionsvermögen des Metalles.

Geht man zu Wärmestrahlen noch größerer Wellenlänge über, so weicht das Reflexionsvermögen der Metalle noch weniger von 1 ab und der geringe Unterschied ist nur ungenau festzustellen. Daher haben die genannten Forscher es vorgezogen, für längere Wellen an Stelle des Reflexionsvermögens das Emissionsvermögen zu untersuchen. Nach dem Kirchhoffschen Gesetze ist bei gegebener Temperatur das Emissionsvermögen der Körper für Wärmestrahlen bestimmter Wellenlänge dem Absorptionsvermögen proportional. Es muß demnach für alle Metalle bei derselben Temperatur das Produkt aus Emissionsvermögen für strahlende Wärme bestimmter Wellenlänge und Wurzel aus der Leitfähigkeit den gleichen Wert haben. Auch dieses Gesetz haben die Versuche bestätigt; es ergab sich das Emissionsvermögen der Metalle gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, multipliziert mit

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}},$$

übereinstimmend mit der Forderung der Theorie.

Diese Versuche sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Das wichtigste Ergebnis ist: Bei den Metallen ist die von der Maxwell'schen Theorie postulierte Beziehung  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  selbst für die hohen Frequenzen der Wärmestrahlen noch gültig. Man kann das Reflexionsvermögen und Emissionsvermögen der Metalle aus ihrer elektrischen Leitfähigkeit bestimmen und umgekehrt die Leitfähigkeit des Metalles aus dem Reflexionsvermögen oder Emissionsvermögen für ultrarote Strahlen berechnen. Dieses Ergebnis bildet neben der Gültig-

keit der Maxwellschen Relation für Gase die wichtigste Stütze der elektromagnetischen Lichttheorie.

Wir gelangten zu der Formel (210b), indem wir  $\epsilon$  gegen  $2\sigma\tau$  vernachlässigten. Das war jedenfalls erlaubt, wenn  $1 \leq \epsilon \leq 4$  war. Die Gültigkeit jener Formel zeigt, daß die Dielektrizitätskonstante hier nicht wesentlich in Betracht kommt; es ist daher gleichgültig, welchen Wert man dieser Konstanten zuschreibt. M. Planck hat bei der Ableitung der Formel (210b) die Dielektrizitätskonstante der Metalle gleich 1 gesetzt; E. Cohn hingegen hat befürwortet, den Wert dieser Konstanten zunächst unbestimmt zu lassen, indem er es als möglich betrachtet, daß zwischen den sichtbaren Strahlen und jenen langwelligen Strahlen es ein Gebiet gibt, wo der Wert von  $\epsilon$  von Einfluß wird. Im sichtbaren Gebiete reicht, wie erwähnt, auch die Einführung zweier Konstanten  $\sigma$  und  $\epsilon$  nicht zur Darstellung der Beobachtung an Metallen aus. Hier kommen offenbar die von der Maxwellschen Theorie nicht berücksichtigten Eigenschaften der stromführenden Teilchen zur Geltung. Eine befriedigende Theorie der Metallreflexion im sichtbaren und ultravioletten Gebiete steht noch aus.

Was nun drittens die magnetische Permeabilität anbelangt, so haben wir sie gleich 1 gesetzt, um zur Formel (210b) zu gelangen. Würde man  $\mu$  in den Formeln (210), (210a) beibehalten, so würde der Einfluß der Permeabilität zum Ausdruck gebracht werden. Nun gilt aber die Formel (210b) auch für die ferromagnetischen Metalle Eisen und Nickel; hier ist also bei diesen hohen Frequenzen nicht mehr der für statische oder langsam wechselnde Felder gültige Wert von  $\mu$  einzuführen, sondern es ist  $\mu$  nicht merklich von 1 verschieden anzunehmen, d. h.  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$  zu setzen. Das ist um so bemerkenswerter, als nach Versuchen von V. Bjerknes beim Eindringen Hertzscher Wellen in ferromagnetische Metalle deren Permeabilität sich sehr wohl geltend macht. Es muß demnach im Intervalle zwischen den Hertzschen Wellen und den Wärmestrahlen die Permeabilität der ferromagnetischen Metalle mit der Wellenlänge stark abnehmen.

Das ist aber insofern nicht auffällig, als die Permeabilität dieser Körper in keiner Weise als Konstante anzusehen ist.

§ 78. Das Eindringen elektrischer Schwingungen  
in Metalle; der vollkommene Leiter.

Die Resultate des letzten Paragraphen sind auch für die Theorie der elektrischen Wellen in engerem Sinne von Wichtigkeit. Gilt bis zu den ultraroten Wärmestrahlen herab der für stationären Strom maßgebende Wert der Leitfähigkeit  $\sigma$ , so wird derselbe für Hertz'sche Wellen sicher gültig sein. Ist für die geringe Schwingungsdauer der Wärmestrahlen  $\varepsilon$  gegen  $2\sigma\tau$ , d. h. der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom, in Metallen zu vernachlässigen, so wird das für die größere Schwingungsdauer der elektrischen Schwingungen in engerem Sinne gewiß erlaubt sein. Wir dürfen demnach in Metallen an Stelle der für Halbleiter gültigen Differentialgleichungen (206e, f) allgemein die folgenden setzen

$$(211) \quad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{H},$$

$$(211a) \quad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{G}.$$

Für die Komponenten der Feldstärken gelten im Innern der Metalle Differentialgleichungen von der Form der Wärmeleitungsgleichung. Das Eindringen der elektrischen Schwingungen in Metalle ist eine Erscheinung, welche dem Eindringen periodischer Temperaturschwankungen in Wärmeleiter ganz analog ist.

Das Absorptionsvermögen nicht ferromagnetischer Metalle für senkrecht auffallende Wellen, d. h. der in das Metall eindringende und von ihm absorbierte Teil der Energie ist nach (210b):

$$(211b) \quad 1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}.$$

Für elektromagnetische Wellen von der Wellenlänge  $\lambda = 30 \text{ cm}$ ,

d. h. von der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 10^{-9} \text{ sec,}$$

wird das Absorptionsvermögen des Kupfers ( $\sigma = 5,14 \times 10^{17}$ )

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{5,14 \times 10^8}} < 10^{-4}.$$

Für diese Wellen wirkt daher eine Kupferplatte nahezu wie ein vollkommener Spiegel. Noch genauer gilt das, wenn man zu noch langsameren Schwingungen übergeht. Doch ist dann die Reflexion der Wellen schwer zu realisieren, weil dabei eine ebene Oberfläche vorausgesetzt wird, deren Abmessungen groß gegen die Wellenlänge sind.

Wir wollen das Eindringen der Wellen in das Metall noch etwas genauer verfolgen. Da wir  $\mu = 1$  gesetzt und  $\varepsilon$  gestrichen haben, so bestimmen sich Brechungsindex  $n$  und Extinktionskoeffizient  $\kappa$  aus (210a). Es ist

$$(211 \text{ c}) \quad n = \kappa = \sqrt{\sigma\tau}.$$

Gleichung (208a) ergibt als Verhältnis der Konstanten  $b$  und  $a$ , das für das Amplitudenverhältnis und die Phasendifferenz der elektrischen und der magnetischen Feldstärke maßgebend war,

$$(211 \text{ d}) \quad b = a\sqrt{\sigma\tau}(1 - i),$$

daher

$$(211 \text{ e}) \quad |b| = |a| \sqrt{2\sigma\tau} \quad (\text{Gl. 208 e})$$

und

$$(211 \text{ f}) \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Gl. 208 d, f})$$

Es ist also für jeden Wert von  $x$  die magnetische Feldstärke von  $45^\circ$  hinter der elektrischen an Phase zurück. Die Amplitude  $|b|$  der magnetischen Feldstärke ist beträchtlich größer als die Amplitude  $|a|$  der elektrischen Feldstärke.

Beim Eindringen in das Innere des Metalles nehmen die Amplituden der Feldstärken nach der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{2\pi\kappa x}{\lambda}}$$

ab (vgl. 208 b). Die Amplituden werden also auf den Bruchteil  $e^{-2\pi}$  ihres an der Oberfläche herrschenden Wertes in einem Abstände

$$x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}}$$

von der Oberfläche herabgesunken sein, die Energien mithin auf den Bruchteil  $e^{-4\pi}$ . Beträgt die Dicke einer metallischen Platte

$$(212) \quad d = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}} = c \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \text{ Zentimeter,}$$

so dringt praktisch die Strahlung nicht durch die Platte hindurch. In dem obigen Beispiele war

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma\tau}} = \frac{1}{\sqrt{5,14 \times 10^8}} = 0,44 \times 10^{-4}, \quad \lambda = 30 \text{ cm,}$$

daher

$$d = 1,32 \times 10^{-3} \text{ cm.}$$

Eine Kupferplatte von der Dicke eines hundertstel Millimeter läßt somit bereits praktisch Wellen jener Wellenlänge nicht hindurchdringen.

Geht man indessen zu langsameren Schwingungen über, so wächst die für das Abschirmen der elektrischen Wellen erforderliche Dicke der Metallplatte proportional der Wurzel aus der Schwingungsdauer. Für  $\lambda = 3$  Kilometer muß die Kupferplatte eine Dicke von einem Millimeter besitzen, für  $\lambda = 300$  Kilometer, entsprechend einer Schwingungsdauer von  $10^{-3}$  Sekunden, eine Dicke von einem Zentimeter, um als Schirm für die elektromagnetischen Wechselfelder zu dienen. Stationäre magnetische Felder endlich werden durch eine Kupferhülle von endlicher Dicke überhaupt nicht abgeschirmt.

Nach (207) wird die räumliche Stromdichte im Innern des Metalles durch den reellen Teil des komplexen Ausdruckes gegeben:

$$(212a) \quad \mathbf{i}_y = \sigma \mathfrak{G}_y = \sigma a e^{i\nu \left( t - \frac{px}{c} \right)}.$$

Wir wollen das über alle Schichten erstreckte Integral

$$(212b) \quad \mathbf{j}_y = \int_0^{\infty} dx \mathbf{i}_y$$

berechnen. In dem idealen Grenzfalle, wo der Strom sich auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche des Metalles zusammendrängt, wird dieses Integral mit der Dichte des Flächenstromes identisch. Wir erhalten

$$(212c) \quad \mathbf{j}_y = \frac{\sigma a c}{i \nu p} e^{i \nu t}.$$

Andererseits folgt aus (208), (208a) für die magnetische Feldstärke an der Oberfläche des Metalles

$$(212d) \quad \mathfrak{H}_z = b e^{i \nu t} = \frac{\alpha p}{\mu} e^{i \nu t}.$$

Es besteht folglich zwischen den komplexen Ausdrücken von  $\mathbf{j}_y$  und  $\mathfrak{H}_z$ , mithin auch zwischen ihren reellen Teilen, die Beziehung

$$(212e) \quad \mathfrak{H}_z = \frac{i \nu p^2}{\sigma \mu c} \mathbf{j}_y.$$

Da nun bei Vernachlässigung des vom Verschiebungsstrom herrührenden Gliedes (207a) übergeht in

$$p^2 = -i \frac{4 \pi \sigma \mu}{\nu},$$

so wird

$$(212f) \quad \mathbf{j}_y = \frac{c}{4 \pi} \mathfrak{H}_z.$$

Diese Beziehung zwischen den im Metalle fließenden Ströme und der tangentiellen Komponente der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche hätte auch direkt aus der ersten Hauptgleichung abgeleitet werden können.

Für einen vollkommenen Leiter (von unendlicher Leitfähigkeit  $\sigma$ ) wird die Dicke der Stromschicht unendlich klein (nach 212);  $\mathbf{j}_y$  gibt hier die Dichte des „Flächenstromes“ an. Dieser schirmt das Innere gegen das Eindringen der elektrischen Wellen. Die Joulesche Wärmeentwicklung wird Null, das Absorptionsvermögen Null, das Reflexionsvermögen 1

(vgl. 211b). Der vollkommene Leiter ist ein idealer Spiegel für die elektromagnetischen Wellen.

Der Satz, daß elektrische Schwingungen nicht in das Innere vollkommener Leiter eindringen können, ist nicht auf ebene Begrenzung und senkrecht einfallende Wellen beschränkt, er gilt vielmehr allgemein. Um dieses einzusehen, gehen wir aus von den im Innern der Metalle geltenden Differentialgleichungen (211), (211a). Die räumliche Verteilung des Feldes im Innern des Leiters muß stetig sein, daher sind die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sicher nicht unendlich. Geht man nun zum Grenzfall  $\sigma = \infty$  über, so müssen die zeitlichen Änderungen

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

sein, damit die linken Seiten nicht unendlich werden. Es dringt also das Wechselfeld nicht in das Innere des vollkommenen Leiters ein. Da außen ein Feld vorhanden ist, so ist die Grenzfläche des vollkommenen Leiters eine Unstetigkeitsfläche des Feldes, in der endliche Flächendichte der Elektrizität und des Leitungsstromes zuzulassen sind. Die Verteilung der Elektrizität und des Stromes findet eben derart statt, daß das Innere gegen das Eindringen des Feldes geschützt wird. Der ideale Leiter spielt in der Elektrodynamik eine ähnliche Rolle wie die metallischen Leiter überhaupt in der Elektrostatik. Wir wollen nun die Grenzbedingungen, die an seiner Oberfläche vorzuschreiben sind, aufstellen.

Als wir im vorigen Paragraphen die Grenzbedingungen ableiteten, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{H}$  verlangten, da schlossen wir ausdrücklich den Fall  $\sigma = \infty$  aus. Wir wollen jetzt die Grenzbedingungen angeben, welche an der Oberfläche eines vollkommenen, an ein beliebiges Dielektrikum angrenzenden Leiters von beliebiger Oberfläche gelten, dessen Inneres durch eine flächenhafte Verteilung von Elektrizität und Leitungsstrom vor dem Eindringen des elektromagnetischen Wechselfeldes geschützt wird. Die

räumliche Dichte des magnetischen Stromes muß auch hier endlich bleiben, die Flächendichte des magnetischen Stromes ist also Null, es verschwindet folglich der Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke. Die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{G}$  sind demnach auch an der Begrenzungsfläche des vollkommenen Leiters stetig. Da nun im Innern des vollkommenen Leiters das elektrische Feld Null ist, so sind auch außen die tangentiellen Komponenten der Feldstärke Null, d. h. der Vektor  $\mathfrak{G}$  steht senkrecht auf der Oberfläche des vollkommenen Leiters. Sein Betrag ist mit der Oberflächendichte der wahren Elektrizität durch die Beziehung verknüpft

$$(213) \quad \mathfrak{D}_n = \frac{\varepsilon \mathfrak{G}_n}{4\pi} = \omega$$

( $n$  äußere Normale des Leiters). Denn im Innern ist das Feld und, da  $\varepsilon$  in Metallen keinesfalls unendlich ist, auch die Normalkomponente der elektrischen Verschiebung Null.

Die Flächendivergenz von  $\mathfrak{B}$  ist Null, da wahrer Magnetismus nicht angenommen wird. Da innen durchweg  $\mathfrak{B} = 0$  ist, so ist außen

$$(213a) \quad \mathfrak{B}_n = \mu \mathfrak{H}_n = 0,$$

d. h. der Vektor  $\mathfrak{H}$  weist tangentiell zur Oberfläche des vollkommenen Leiters. Was aber die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{H}$  anbelangt, so sind sie mit denen des Flächenstromes  $\mathfrak{j}$  durch den aus der ersten Hauptgleichung folgenden Satz verknüpft. Der Flächenwirbel von  $\mathfrak{H}$  ist gleich der mit  $\frac{4\pi}{c}$  multiplizierten Flächendichte des elektrischen Stromes. Dieses ergibt mit Rücksicht auf den Ausdruck (104) des Flächenwirbels

$$\frac{4\pi \mathfrak{j}}{c} = - [\mathfrak{n} \mathfrak{H}] = [\mathfrak{H} \mathfrak{n}].$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor  $\mathfrak{n}$  die nach dem Innern des Metalles hinweisende Normalenrichtung an. Wählen wir diese wie oben als  $x$ -Achse, so folgt

$$(213b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi j_y}{c} = \mathfrak{G}_z, \\ \text{wie oben in Gleichung (212f), und} \\ \frac{4\pi j_z}{c} = -\mathfrak{G}_y. \end{array} \right.$$

Daß die Vorzeichen hier richtig gefunden sind, ist mit Hilfe der Ampèreschen Regel leicht zu kontrollieren.

In der Theorie der elektrischen Schwingungen kann man die analytische Behandlung oft erheblich dadurch vereinfachen, daß man die im Felde befindlichen Leiter als vollkommene betrachtet. Man erzielt dadurch in vielen Fällen eine recht gute Annäherung an die Wirklichkeit. Man muß dabei aber immer bedenken, daß im Grunde die Annahme unendlicher Leitfähigkeit unzulässig ist, und wenn Widersprüche in den auf den obigen Grenzbedingungen fußenden Entwicklungen hervortreten, so muß man prüfen, ob diese nicht durch Berücksichtigung des endlichen Wertes der Leitfähigkeit sich beseitigen lassen. Mit diesem Vorbehalt werden wir in den nächsten Abschnitten der Theorie der Drahtwellen die soeben entwickelten Grenzbedingungen zugrunde legen, welche das Verschwinden der normalen Komponente von  $\mathfrak{G}$  und der tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  an der Oberfläche eines vollkommen leitenden Drahtes fordern.

### § 79. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs zylindrischer Leiter.

Wir denken uns im Raume eine Anzahl von Leitern, die durch zylindrische Flächen mit parallelen Erzeugenden begrenzt sind. Im übrigen sei der Raum von einem homogenen isotropen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und der Permeabilität  $\mu$  erfüllt. Die Leiter werden als unendlich gut leitend angenommen, so daß nur an ihrer Oberfläche Elektrizität und Leitungsstrom sich befindet; alsdann gelten an den durch die Leiteroberflächen gebildeten Begrenzungen des

Dielektrikums die am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen.

Wir legen die  $x$ -Achse den erzeugenden Geraden der zylindrischen Leiteroberflächen parallel und betrachten Wellen, die sich im Dielektrikum längs der  $x$ -Achse fortpflanzen. Diese Wellen sollen jetzt nicht homogen sein, d. h. es sollen die Feldstärken von  $y$  und  $z$  abhängen. Wir wollen annehmen, daß diese längs der zylindrischen Leiter fortschreitenden Wellen transversal sind, d. h. wir wollen die Komponenten  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{H}_x$  gleich Null setzen. Die Berechtigung dieser beiden Annahmen wird nachträglich dadurch zu beweisen sein, daß die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen sich durch ihre Einführung erfüllen lassen.

Die Differentialgleichungen (203a—d), die im Innern des Dielektrikums gelten, ergeben, wenn

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_x = 0$$

gesetzt wird,

$$(214) \quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z},$$

$$(214a) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x},$$

$$(214b) \quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z},$$

$$(214c) \quad - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x},$$

$$(214d) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0,$$

$$(214e) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0.$$

Die vier Gleichungen (214a, c) sind mit den Gleichungen (204a, b) identisch. Sie ergeben für die Komponenten  $\mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$  partielle Differentialgleichungen von der Form (204g, h). Letztere werden integriert, indem man z. B.

$$(215) \quad \mathfrak{E}_y = f(x - wt, y, z)$$

setzt, wobei

$$(215a) \quad w = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

die Geschwindigkeit homogener ebener Wellen ist (205a).

Dieses partikuläre Integral entspricht Wellen, die mit der Geschwindigkeit  $w$  unverzerrt in Richtung der  $x$ -Achse fort-eilen. Entsprechende Ausdrücke gelten auch für die anderen drei Komponenten. Aus der zugrunde gelegten Annahme der Transversalität der Wellen folgt demnach, daß die Geschwindigkeit der Wellenphasen der Geschwindigkeit homogener ebener Wellen gleich ist und daß ihre Amplitude sich beim Fortschreiten nicht ändert. Kommt hingegen die Absorption der Energie in den Leitern in Betracht, so nimmt beim Fortschreiten der Welle ihre Amplitude ab; dann sind die Vektoren  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$  nicht streng transversal.

Wir können jetzt die Betrachtung auf eine der Wellenebenen beschränken, welche die zylindrischen Leiter senkrecht schneiden. Die Komponenten  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{G}_z$  sind hier nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind durch die Differentialgleichungen (214b,e) miteinander verknüpft; andererseits müssen die Komponenten  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  den Differentialgleichungen (214), (214d) genügen. Hierzu treten die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche der Leiter gelten. An den Schnittkurven  $s_1, s_2 \dots$  der Leiteroberflächen mit der betrachteten Wellenebene muß die tangentielle Komponente von  $\mathfrak{G}$  und die Normalkomponente von  $\mathfrak{H}$  gleich Null sein. Wir betrachten zunächst das elektrische Feld.

Nach (214b) verschwindet im Innern des Dielektrikums die  $x$ -Komponente vom curl  $\mathfrak{G}$ ; auch Flächenwirbel von  $\mathfrak{G}$  an den Leiteroberflächen sind durch die Grenzbedingungen ausgeschlossen. Es ist demnach das Linienintegral von  $\mathfrak{G}$  für alle in Wellenebenen verlaufenden geschlossenen Kurven Null; dieser Vektor leitet sich, wenn man die Betrachtung auf solche Ebenen beschränkt, aus einem einwertigen Skalar  $\Phi$  ab:

$$(215b) \quad \mathfrak{G}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{G}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nach (214e) hat dieser Skalar der Gleichung zu genügen:

$$(215c) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Längs der Schnittkurven der Leiteroberflächen soll den Grenzbedingungen zufolge der tangentielle Gradient von  $\Phi$  Null sein, d. h.  $\Phi$  soll auf den Kurven  $s_1, s_2 \dots$  konstant sein. Sein normaler Gradient, integriert über die Schnittkurve, ergibt den von jener Kurve ausgehenden Kraftfluß

$$\int \mathfrak{G}_n ds_1 = - \int \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} ds_1.$$

Multipliziert man mit  $\frac{\varepsilon}{4\pi} dx$ , so erhält man die elektrische Verschiebung, welche von einem Stücke des ersten Leiters von der Länge  $dx$  ausgeht. Wir wollen diese Verschiebung gleich  $e_1 dx$  setzen, indem wir unter  $e_1$  die auf die Längeneinheit des ersten Leiters berechnete wahre Ladung verstehen. Entsprechende Bedeutung werde den Größen  $e_2, e_3 \dots$  beigelegt. Dann gilt:

$$(215d) \quad e_1 = - \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} ds_1, \quad e_2 = - \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} ds_2, \dots$$

Es wird nun eine Funktion  $\Phi(x, y)$  gesucht, welche der Differentialgleichung (215c) genügt, auf den Kurven  $s_1, s_2 \dots$  konstant ist und mit den Ladungen  $e_1, e_2$  durch die Gleichungen (215d) verknüpft ist. Dieses Problem ist durchaus identisch mit dem elektrostatischen Probleme, bei gegebenen Ladungen der unendlichen zylindrischen Leiter das elektrostatische Potential zu bestimmen. Denn dieses elektrostatische Potential genügt der Laplaceschen Gleichung; da es von  $x$  unabhängig ist, so geht die Laplacesche Gleichung in ihre zweidimensionale Form (215c) über. Auch sonst sind die Bedingungen identisch. Wir schließen, wofern das elektrostatische Problem sich lösen läßt, daß die Funktion  $\Phi$  jenen Bedingungen gemäß sich bestimmen lassen muß.

Es muß jedoch eine Einschränkung gemacht werden,

die wir bei der Behandlung der Elektrostatik, wo wir nur von Leitern endlicher Ausdehnung sprachen, nicht erwähnt haben. Es muß, damit das Problem eine physikalisch zulässige Lösung besitzt, die Summe der Ladungen

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots = 0$$

sein für einen jeden Querschnitt durch das Leitersystem. Um dieses einzusehen, konstruieren wir einen Kreiszyylinder, der das ganze Leitersystem einschließt und dessen Querschnittsradius  $R$  groß gegen die Abmessungen der Leiterquerschnitte und gegen ihre Abstände ist. Die elektrische Verschiebung, die aus der Längeneinheit des Zylinders heraustritt, ist gleich

$$\frac{e}{2\pi R},$$

d. h. das elektrische Feld ist auf dem Zylinder gleich dem einer geladenen Linie von der Ladung  $e$  pro Längeneinheit. Außerhalb des Zylinders gilt derselbe Ausdruck. Es nimmt also die elektrische Energiedichte mit wachsendem  $R$  ab, wie

$$\psi = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \mathfrak{D}) = \frac{2\pi}{\epsilon} \mathfrak{D}^2 = \frac{e^2}{2\pi \epsilon R^2}.$$

Für die außerhalb des Zylinders befindliche elektrische Energie erhält man somit

$$\int_R^\infty 2\pi R dR \psi = \frac{e^2}{\epsilon} \int_R^\infty \frac{dR}{R}.$$

Dieser Ausdruck wird aber logarithmisch unendlich, es sei denn, daß  $e = 0$  ist. Um einen unendlichen Wert der Energie zu vermeiden, müssen wir annehmen, daß die Summe aller Ladungen, die zwischen zwei beliebigen, die Leiter senkrecht durchschneidenden Ebenen liegen, gleich Null ist. Beispiele sind das Kabel, dessen innerer und äußerer Zylinder entgegengesetzt geladen sind, oder zwei parallele, jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten entgegengesetzt geladene Drähte. Wellen längs eines einzelnen Drahtes aber fallen nicht in den Gültigkeitsbereich der hier dargelegten Methode, weil bei solchen  $e$  notwendig von Null verschieden ist.

Daß der Einzeldraht hier auszuschließen ist, liegt an den einschränkenden Annahmen unendlich guter Leitfähigkeit bzw. transversaler Wellen. In der Tat ergibt die von A. Sommerfeld entwickelte strenge Theorie der längs eines Einzeldrahtes fortschreitenden Wellen, daß bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit des Drahtes die Wellen nicht vollkommen transversal sind.

Beschränken wir uns auf zwei Leiter, so ist

$$e_2 = -e_1$$

zu setzen. Wir verbinden zwei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  der beiden Leiter, die in demselben Querschnitte liegen, durch eine beliebige Kurve, die aber durchweg in einer zur  $x$ -Achse senkrechten Ebene verläuft. Dann ist das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{G}_s ds = \Phi_1 - \Phi_2$$

von dem Verlaufe der ebenen Kurve und der Lage der Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  auf den beiden Leitern unabhängig. Wir wollen es als „Spannung“ bezeichnen. Es entspricht der Potentialdifferenz der beiden Leiter in dem elektrostatischen Probleme, doch reden wir hier bei Drahtwellen besser nicht von einem Potentiale, weil das elektrische Feld hier keineswegs wirbelfrei ist; es verschwindet nur die  $x$ -Komponente von  $\text{curl } \mathfrak{G}$ , nicht aber die beiden anderen Komponenten. Haben wir das elektrostatische Problem für die beiden unendlichen zylindrischen Leiter gelöst, so kennen wir auch die Kapazität der Längeneinheit des Systemes, die durch

$$(215e) \quad e_1 = K(\Phi_1 - \Phi_2)$$

definiert ist, und die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung:

$$(215f) \quad U = \frac{1}{2} (e_1 \Phi_1 + e_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{K}.$$

Wir gehen nunmehr zum magnetischen Felde über, dessen Verteilung in der betreffenden Wellenebene den Differential-

gleichungen (214), (214d) gemäß zu wählen ist. Der Differentialgleichung (214d), welche das Verschwinden des freien Magnetismus im Innern des homogenen Dielektrikums ausdrückt, genügen wir durch den Ansatz

$$(216) \quad \mu \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \mu \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Die Gleichung (214) geht hierdurch über in

$$(216a) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Die Funktion  $\Psi$  stellt, für die betreffende Querschnittsebene der Leitung, eine Stromfunktion des Induktionsflusses dar. Ordnet man die Richtungen  $s$ ,  $n$  einander so zu wie die  $y$ - und die  $z$ -Achse des Koordinationssystemes, so folgt aus (216)

$$\mathfrak{B}_n = \mu \mathfrak{H}_n = -\frac{\partial \Psi}{\partial s}.$$

Die Grenzbedingung (213a), welche verlangt, daß an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters die Normalkomponente der magnetischen Induktion verschwindet, erfüllen wir, indem wir die Funktion  $\Psi$  der Bedingung unterwerfen: Längs der Kurven  $s_1$ ,  $s_2$ , in denen die Querschnittsebene die Leiteroberflächen schneidet, ist  $\Psi$  konstant. Es mögen  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  die Werte sein, welche  $\Psi$  auf diesen Kurven annimmt.

Wir verbinden nun zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , welche auf  $s_1$  bzw.  $s_2$  liegen, durch eine ganz in der Querschnittsebene verlaufende Kurve. Die durch diese Kurve hindurchtretende magnetische Induktion

$$(216b) \quad \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_n ds = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = \Psi_1 - \Psi_2$$

ergibt sich als unabhängig von dem Verlaufe der Kurve. Sie stellt den, auf die Längeneinheit der Leitung bezogenen „Induktionsfluß der Leitung“ dar.

Das magnetische Feld in der Querschnittsebene ist mit den in den Leitern fließenden Strömen  $J_1$ ,  $J_2$  durch die erste Hauptgleichung verknüpft; diese ergibt

$$\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s}_1 = \frac{4\pi}{c} J_1, \quad \int \mathfrak{H} d\mathfrak{s}_2 = \frac{4\pi}{c} J_2.$$

Da, nach (216)

$$\mathfrak{H}_s = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

zu setzen ist (der Strom  $J_1$  wird parallel der  $x$ -Achse gerechnet; äußere Normale  $n$  und Umlaufssinn  $s$  folgen sich nach der Ampèreschen Regel wie  $y$  und  $z$ -Ache), so hat man

$$(216c) \quad J_1 = -\frac{c}{4\pi\mu} \int \frac{\partial \Psi}{\partial n_1} ds_1, \quad J_2 = -\frac{c}{4\pi\mu} \int \frac{\partial \Psi}{\partial n_2} ds_2.$$

Die Funktion  $\Psi$  ist für jede Querschnittsebene dadurch bestimmt, daß sie der Gleichung (216a) genügt, auf den Querschnittskurven  $s_1$  und  $s_2$  konstante Werte annimmt und in dem soeben formulierten Zusammenhange mit den Stromstärken  $J_1, J_2$  steht.

Denkt man sich die Verteilung des Flächenstromes, der senkrecht zu  $s_1, s_2$  längs der Leiter fließt, durch einen stationären Strom verwirklicht, so würde dessen Feld in der betrachteten Wellenebene genau mit dem magnetischen Felde der Wellen übereinstimmen. Das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  dieses stationären Stromes würde parallel der  $x$ -Achse gerichtet sein.  $\mathfrak{A}_x$  wäre von  $x$  unabhängig, so daß die Laplacesche Gleichung, der  $\mathfrak{A}$  zu genügen hat, übergeht in

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = 0.$$

Identifiziert man  $\Psi$  mit  $\mathfrak{A}_x$ , so erhält man auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \text{curl } \mathfrak{A}$$

die Gleichungen (216, 216a) und auch die Gleichungen (216c). Die Grenzbedingung, daß  $\Psi$  für  $s_1, s_2$  konstant ist, gilt allerdings für den stationären Strom, der in den Leitern wirklich fließt, nicht, da dessen magnetisches Feld in das Innere der Leiter eindringt. Doch kann man die hier geforderte flächenhafte Stromverteilung annähernd durch röhrenförmige Leiter realisieren.

Der Form nach genau identisch sind jedoch die Bedingungen, die für die Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  gelten. Beide müssen auf  $s_1, s_2$  konstant sein, im Dielektrikum derselben Differentialgleichung genügen und in dem durch (215d) bzw. (216c) formulierten Zusammenhange mit den Ladungen der Leiter bzw. den in den Leitern fließenden Strömen stehen. Ist das elektrische Feld der längs der Leitung fortschreitenden Wellen für gegebene Ladungen  $e_1, e_2$  der Leiter bestimmt, so ergibt sich sofort das magnetische Feld, das gegebenen Strömen  $J_1, J_2$  entspricht. Es gehen die für  $\Psi$  geltenden Gleichungen einfach aus den für  $\Phi$  geltenden hervor, indem gesetzt wird: an Stelle von  $e_1$ :

$$J_1 \frac{\varepsilon \mu}{c},$$

an Stelle von  $e_2$ :

$$J_2 \frac{\varepsilon \mu}{c}.$$

Der oben für zwei Leiter eingeführten einschränkenden Bedingung

$$e_1 + e_2 = 0$$

entspricht hier die Bedingung

$$J_1 + J_2 = 0.$$

Dieselbe ergibt sich auch aus dem Prinzip des quellenfreien Stromes. In der Tat haben wir vorausgesetzt, daß die longitudinale Komponente von  $\mathfrak{G}$  verschwindet; es werden daher die senkrecht zur Leitung verlaufenden Ebenen von Verschiebungsströmen nicht durchflossen. Durch eine jede solche unendliche Ebene muß demnach im ganzen derselbe Leitungsstrom parallel, wie entgegen der  $x$ -Achse fließen.

Die Kurven  $\Phi = \text{konstans}$  schneiden, da nach (215b)  $\mathfrak{G}$  in der Querschnittsebene der negative Gradient von  $\Phi$  ist, die elektrischen Kraftlinien orthogonal. Andererseits wird die Gleichung der magnetischen Induktionslinien, weil nach (216)  $\Psi$  die Stromfunktion des quellenfreien Vektors  $\mu \mathfrak{G}$  ist, durch  $\Psi = \text{konstans}$  gegeben. Aus der Proportionalität der Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  können wir jetzt den Schluß ziehen: In

jeder Querschnittsebene stellen die elektrischen Kraftlinien und die magnetischen Induktionslinien zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen dar.

Ist für eine gegebene Leitung die für das elektrische Feld maßgebende Funktion  $\Phi$  gefunden, so ist die für das magnetische Feld maßgebende Funktion  $\Psi$  ohne weiteres anzugeben. Es ist einfach

$$J_1 \frac{\varepsilon \mu}{c}$$

statt  $e_1$  zu schreiben, wodurch  $\Phi$  in  $\Psi$  übergeht.

Haben wir  $\Phi$  auf Grund der elektrostatischen Analogie berechnet, so ist nach (215e)

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K},$$

wo  $K$ , die Kapazität der Längeneinheit der Leitung, eine von  $e_1$  unabhängige Konstante der Leitung ist. Nach dem soeben Gesagten folgt jetzt

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{J_1 \frac{\varepsilon \mu}{c}} = \frac{1}{K}.$$

Wir definieren durch die Gleichung

$$(216d) \quad \Psi_1 - \Psi_2 = \frac{L}{c} J_1,$$

die Größe  $L$ , die wir die „Selbstinduktion der Längeneinheit der Leitung“ nennen. Dann erhält man die Relation

$$(216e) \quad LK = \varepsilon \mu.$$

Das Produkt aus Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit der Leitung ist gleich dem Produkte aus Dielektrizitätskonstante und magnetischer Permeabilität des Dielektrikums. — Da  $L$  und  $K$  auf die Längeneinheit bezogen sind, so sind im Gaußschen Systeme beides reine Zahlen, so daß in Gleichung (216e) die Dimensionen beiderseits übereinstimmen. Wir können die Gleichung (215a) für die Geschwindigkeit der Wellen jetzt auch schreiben

$$(216f) \quad w = \frac{c}{\sqrt{LK}}.$$

Was die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung anbelangt, so wird sie durch

$$(216g) \quad T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J_1^2$$

gegeben.

Leitet man aus den beiden Funktionen  $\Phi$ ,  $\Psi$  vermöge (215b) und (216) das elektrische und das magnetische Feld ab, so werden, wie wir zeigten, die Feldgleichungen (214), (214b), (214d), (214e) erfüllt. Es bleibt nur übrig, zu beweisen, daß (214a, c) gleichfalls befriedigt sind. Diese Gleichungen lauten jetzt

$$(217) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x},$$

$$(217a) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \quad - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

Dieselben sind erfüllt, wenn allgemein die Beziehungen

$$(217b) \quad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

gelten.

Nun ist für eine Leitung, die aus zwei jeweils entgegengesetzt geladenen und von entgegengesetzten Strömen durchflossenen Leitern besteht,

$$(217c) \quad \Phi = e_1 \Phi_0(y, z)$$

zu setzen.

Dabei ist  $\Phi_0(y, z)$  das elektrostatische Potential der beiden, mit den Ladungen

$$e_1 = +1, \quad e_2 = -1$$

pro Längeneinheit versehenen zylindrischen Leiter. Diese Darstellung für  $\Phi$  folgt aus dem oben Dargelegten mit Rücksicht darauf, daß die für  $\Phi$  geltenden Bedingungsgleichungen linear sind. Entsprechend gilt, wie wir sahen

$$(217d) \quad \Psi = J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c} \Phi_0(y, z).$$

Demgemäß geht (217 b) über in

$$(217 e) \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = - \frac{\partial J_1}{\partial x},$$

$$(217 f) \quad - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{\partial e_1}{\partial x}.$$

In der Kirchhoffschen, auf den Anschauungen der Fernwirkungstheorie beruhenden Behandlung der elektrischen Wellen in Drähten wird die erste dieser Gleichungen daraus abgeleitet, daß die zeitliche Änderung der Ladung  $e_1 dx$  eines Stückes  $dx$  des ersten Drahtes gleich dem Überschuß des eintretenden über den austretenden Strom ist. Die zweite der Gleichungen aber ist nach (216 e) identisch mit

$$(217 g) \quad - \frac{L}{c^2} \frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial e_1}{\partial x}.$$

Diese wird auch in der Fernwirkungstheorie durch Anwendung des Induktionsgesetzes gewonnen. Wir sehen hier, daß die Maxwellsche Theorie, die vom Standpunkte der Nahewirkung aus die Drahtwellen betrachtet, im vorliegenden Falle zu Ergebnissen gelangt, die formal mit denen der Fernwirkungstheorie übereinstimmen.

Die Elimination von  $J_1$  ergibt für  $e_1$  die partielle Differentialgleichung

$$(218) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2},$$

deren allgemeine Lösung ist

$$(218 a) \quad e_1 = f(x - wt) + g(x + wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Die Gleichungen (217 e, f) werden erfüllt, wenn außerdem gilt

$$(218 b) \quad J_1 = w \{f(x - wt) - g(x + wt)\}.$$

Der allgemeinen Lösung entsprechen zwei Ladungs- und Stromwellen, die längs der Leitung in entgegengesetzten Richtungen laufen. Durch Einführung in (217 c, d) bestimmen sich die Funktionen  $\Phi$ ,  $\Psi$ , aus denen sich vermöge (215 b) und (216) das elektromagnetische Feld ableitet. Die so erhaltene Lösung ist die allgemeine Lösung der partiellen Differential-

gleichungen (214—214e), unter den vorliegenden Grenzbedingungen. Es ist also die allgemeinste Lösung der Feldgleichungen und der Grenzbedingungen, welche mit dem Verschwinden der longitudinalen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  verträglich ist.

Wir betrachten die Wellen, die in Richtung der positiven  $x$ -Achse fortschreiten. Die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung ist nach (215f), (218a)

$$(218c) \quad U = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{K} = \frac{1}{2} \frac{f^2(x - wt)}{K}.$$

Die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung hingegen ist nach (216g) und (218b)

$$(218d) \quad T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J_1^2 = \frac{1}{2} \frac{L}{\varepsilon \mu} f^2(x - wt).$$

Nach (216e) folgt

$$(218e) \quad T = U.$$

Die magnetische Energie der Drahtwellen ist im vorliegenden Falle der elektrischen gleich. Die pro Sekunde durch eine feste Querschnittsebene hindurchtretende Energie ist

$$w(U + T) = w2U = \frac{wf^2(x - wt)}{K},$$

oder nach (215e) und (218a, b)

$$J_1(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Der gesamte Energiestrom längs der Leitung ist das Produkt aus Stromstärke und Spannung.

Wir behandeln jetzt die beiden wichtigsten Spezialfälle, das Kabel und die Paralleldrähte.

### § 80. Wellen in Kabeln.

Die Leitung, längs der die Wellen fortschreiten, soll aus zwei konzentrischen, vollkommen leitenden Kreiszyllindern bestehen. Es soll  $b$  der Querschnittsradius der äußeren Be-

begrenzung des inneren Zylinders,  $a$  der Querschnittsradius der inneren Begrenzung des äußeren Zylinders sein. Es handelt sich nun darum, für dieses System das elektrostatische Problem zu lösen, d. h. das elektrostatische Feld zu bestimmen, das sich herstellt, wenn  $+e_1$  die Ladung der inneren,  $-e_1$  die Ladung des äußeren Zylinders pro Längeneinheit ist.

Da die beiden Zylinder als vollkommen leitend betrachtet werden, so ist das Feld auf den zwischen ihnen befindlichen leeren oder von einem dielektrischen Körper erfüllten Raum beschränkt. Das Feld ist hier leicht anzugeben, da ja Symmetrie um die gemeinsame Achse der beiden Zylinder besteht. Legt man einen konzentrischen Zylinder vom Querschnittsradius  $r$  durch das Feld, so beträgt die elektrische Verschiebung durch die Längeneinheit des Zylinders:

$$e_1 = 2\pi r \mathfrak{D}_r = \frac{r\varepsilon}{2} \mathfrak{G}_r.$$

Es ist demnach die radiale elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{G}_r = \frac{2e_1}{r\varepsilon} = + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln r \right).$$

Die anderen Komponenten von  $\mathfrak{G}$  verschwinden nach Symmetrie; es ist daher das elektrostatische Potential

$$(219) \quad \Phi = - \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln r,$$

mithin die Spannung zwischen dem inneren und dem äußeren Zylinder

$$(219a) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{a}{b} \right),$$

und die Kapazität der Längeneinheit des Kabels

$$(219b) \quad K = \frac{e_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\varepsilon}{2 \ln \left( \frac{a}{b} \right)}.$$

Die magnetischen Kraftlinien verlaufen in konzentrischen Kreisen um die Zylinderachsen. Der Betrag der Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2J_1}{cr},$$

mithin der gesamte Induktionsfluß pro Längeneinheit des Kabels

$$\int_b^a dr \mu | \mathfrak{H} | = \frac{2\mu J_1}{c} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{2\mu J_1}{c} \ln \left( \frac{a}{b} \right).$$

Da anderseits die gesamte Induktion pro Längeneinheit durch

$$\frac{L}{c} J_1$$

ausgedrückt wird (vgl. 216d), so folgt

$$(219c) \quad L = 2\mu \ln \left( \frac{a}{b} \right)$$

als Selbstinduktion pro Längeneinheit des Kabels.

Wie man sieht, genügen Kapazität und Selbstinduktion des Kabels (219b, c) der allgemeinen, im vorigen Paragraphen aufgestellten Beziehung (216e):

$$KL = \varepsilon \mu.$$

Je kleiner der Quotient  $\frac{a}{b}$  der Querschnittsradien der äußeren und inneren Begrenzung der dielektrischen Schicht ist, desto größer ist die Kapazität, desto kleiner die Selbstinduktion des Kabels.

### § 81. Wellen längs zweier paralleler Drähte.

Der Ausdruck (219) stellt das elektrostatische Potential einer gleichförmig geladenen unendlichen Geraden dar. Man überzeugt sich leicht davon, daß er der Differentialgleichung (215c) Genüge leistet. Wir können aus ihm sofort neue Lösungen dieser Differentialgleichung ableiten, indem wir die Potentiale paralleler Geraden superponieren. Wir denken uns z. B. durch zwei Punkte  $O_1$  und  $O_2$  senkrecht zu ihrer Verbindungslinie zwei Gerade gelegt und diese mit den Ladungen  $\pm e_1$  pro Längeneinheit versehen. Das elektrostatische Potential ist dann

$$(220) \quad \Phi = -\frac{2e_1}{\varepsilon} \ln r_1 + \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln r_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right),$$

wenn  $r_1, r_2$  die Abstände eines Aufpunktes  $P$  von den beiden Geraden bezeichnet. In Abbildung 11 ist ein Querschnitt durch die Punkte  $O_1$  und  $O_2$  gelegt; der Koordinatenanfang  $O$  halbiert die Verbindungslinie  $O_2 O_1$ , deren Länge wir gleich  $2\eta$  setzen wollen.  $O O_1$  zeigt die Richtung der  $y$ -Achse an, die  $z$ -Achse ist gleichfalls in der Querschnittsebene gelegen, während die  $x$ -Achse den beiden Geraden parallel weist.

Die Punkte  $O_1 O_2$  sind aus dem Felde auszuschließen, da in ihnen das Potential unendlich wird. Wir wollen sie in zwei zylindrische Flächen einhüllen, auf denen  $\Phi$  konstant ist.

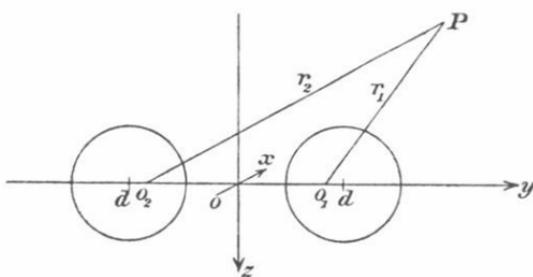


Abb. 11.

Ersetzen wir diese Flächen durch die Oberflächen zweier leitender Zylinder, so erfüllt  $\Phi$  bereits die an solchen Flächen dem elektrostatischen Potentiale vorgeschriebene Grenzbedingung. Aus dem um  $O_1$  gelegten Zylinder dringt pro Längeneinheit die elektrische Verschiebung  $e_1$ , aus dem um  $O_2$  gelegten die entgegengesetzte  $-e_1$  heraus. Außerhalb der beiden Zylinder stellt demnach (220) das Potential des elektrostatischen Feldes dar, welches sich wirklich herstellt, wenn den beiden leitenden Zylindern die Ladungen  $\pm e_1$  pro Längeneinheit gegeben werden.

Nun ist, wie aus der elementaren Geometrie bekannt ist, der geometrische Ort der Punkte, für die das Verhältnis  $r_2 : r_1$  der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, ein Kreis, der einen der beiden festen Punkte exzentrisch einschließt. Wir erhalten demnach aus (220) die Lösung des elektro-

statischen Problems für den Fall zweier Kreiszyylinder. Hieraus können wir, auf Grund der Entwicklungen des § 79, das Feld elektrischer Wellen längs zweier paralleler Drähte von kreisförmigem Querschnitt ableiten. Dabei dürfen sogar die Querschnittsradien der beiden Drähte verschieden sein; wir wollen uns indessen auf den Fall beschränken, daß sie beide gleich  $b$  sind, und wollen mit  $2d$  den Abstand der Drahtachsen bezeichnen (vgl. Abbildung 11).

Der Abstand  $d$  der Drahtachsen von  $O$  ist offenbar durch  $OO_1 = \eta$  und durch den Querschnittsradius  $b$  bestimmt. Da die beiden Durchschnittspunkte des  $O_1$  einschließenden Kreises in Abbildung 11 die Strecke  $O_2O_1$  in demselben Verhältnis teilen, so gilt

$$\frac{\eta + d - b}{\eta - d + b} = \frac{d + b + \eta}{d + b - \eta},$$

oder

$$d^2 - (\eta - b)^2 = (\eta + b)^2 - d^2,$$

daher

(220a)

$$d^2 = \eta^2 + b^2.$$

Das Potential auf dem ersten Zylinder ist demnach

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{d + b + \eta}{d + b - \eta} \right).$$

Drückt man  $\eta$  durch  $d$  und  $b$  aus, so wird

$$\frac{d + b + \eta}{d + b - \eta} = \frac{d + b + \sqrt{d^2 - b^2}}{d + b - \sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{d + b} + \sqrt{d - b}}{\sqrt{d + b} - \sqrt{d - b}} = \frac{d + \sqrt{d^2 + b^2}}{b},$$

daher

(220b)

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 + b^2}}{b} \right).$$

Auf dem anderen Zylinder hat  $\frac{r_2}{r_1}$  den reziproken,  $\Phi$  daher den entgegengesetzten Wert

$$\Phi_2 = -\Phi_1.$$

Es ist folglich die Spannung zwischen den beiden Drähten

(220c)

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{4e_1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 + b^2}}{b} \right);$$

die Kapazität der Längeneinheit der Leitung bestimmt sich aus

$$(220d) \quad \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K} = \frac{4}{\varepsilon} \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b} \right).$$

Aus (216e) folgt die Selbstinduktion der Längeneinheit der Leitung

$$(220e) \quad L = \frac{\varepsilon \mu}{K} = 4\mu \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b} \right).$$

Ist der Querschnittsdurchmesser  $2b$  klein gegen den Abstand  $2d$  der Drahtachsen, so gelten die Näherungswerte

$$(220f) \quad L = \frac{\varepsilon \mu}{K} = 4\mu \ln \left( \frac{2d}{b} \right).$$

In den Wellen, die sich längs der Paralleldrähte fortpflanzen, sind die Kurven, auf denen  $\Phi$  konstant ist, eine Schar von Kreisen. Diese Kreise, zu denen auch die Begrenzungskreise der Drahtquerschnitte gehören, teilen harmonisch den Abstand  $O_2 O_1$  zweier fester Punkte. Mit den zu den elektrischen Kraftlinien orthogonalen Kurven  $\Phi = \text{constans}$  fallen die magnetischen Induktionslinien  $\Psi = \text{constans}$  zusammen. Die elektrischen Kraftlinien, die orthogonal zu jenen Kreisen verlaufen, sind gleichfalls Kreise; dieselben gehen, wenn man sie in das Innere der Drähte fortgesetzt denkt, durch die festen Punkte  $O_1, O_2$ .

Die hier entwickelte Theorie beruht auf der Voraussetzung, daß die elektrischen Wellen nicht merklich in das Innere der Drähte eindringen. Bei den schnellen Hertzschen Schwingungen, bei denen Paralleldrähte häufig zur Fortleitung der Wellen verwandt werden, trifft diese Voraussetzung mit großer Annäherung zu. Bei langsamen Schwingungen, z. B. in Fernsprechleitungen, ist diese Voraussetzung für dünne Drähte nicht mehr zulässig (vgl. § 78, Formel 212). Hier ist bei der Berechnung der Selbstinduktion das magnetische Feld im Drahtinnern zu berücksichtigen, und es ist der Einfluß des Widerstandes auf die Wellenfortpflanzung in Betracht zu ziehen.

## § 82. Kondensator am Ende der Leitung.

Wir haben bisher angenommen, daß die Leitung beiderseits ins Unendliche reicht. In Wirklichkeit hat man es natürlich stets mit Leitungsdrähten von endlicher Länge zu tun. Wir wollen annehmen, daß die Drähte in die einander gegenüberstehenden Platten eines Kondensators einmünden. Es sei  $K_0$  die Kapazität des Kondensators, der bei  $x = 0$  liegt. Von der Seite der negativen  $x$  treffe ein Zug einfach harmonischer Wellen ein. Wir stellen denselben mathematisch dar, indem wir für die dort willkürliche Funktion

$$f(x - wt)$$

des § 79 hier den komplexen Ausdruck setzen

$$(221) \quad f(x - wt) = A' e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}.$$

Nach (218a), (215e) ist dann die Spannung im einfallenden Wellenzug gleich dem reellen Teile von

$$(221a) \quad \Phi_1' - \Phi_2' = \frac{e_1'}{K} = \frac{A'}{K} e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}.$$

Der Strom aber ist nach (218b) gleich dem reellen Teile von

$$(221b) \quad J_1' = w A' e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}.$$

Die einfallende Welle wird nun den am Ende der Leitung befindlichen Kondensator laden. Hierdurch wird zunächst der Welle Energie entzogen. Es wird sich jedoch alsbald ein stationärer Schwingungszustand herstellen, wobei die Energie des Kondensators im Mittel konstant ist. Da Energieverluste durch Joulesche Wärme und durch Strahlung nicht in Betracht gezogen werden, so wird sich ein reflektierter, nach der Seite der negativen  $x$  hineilender Wellenzug ausbilden. Wir setzen für diesen

$$(222) \quad g(x + wt) = A'' e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)},$$

und gemäß (215e, 218a, b)

$$(222a) \quad \Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e_1''}{K} = \frac{A''}{K} e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)},$$

$$(222b) \quad J_1'' = -w A'' e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}.$$

Die reellen Teile dieser Ausdrücke stellen den reflektierten Wellenzug dar.

Wir superponieren nun die beiden Wellen. Die resultierende Spannung  $\Phi_1 - \Phi_2$  soll am Ende der Leitung ( $x = 0$ ) der jeweiligen Ladung des Kondensators entsprechen. Ist  $e_0$  die Ladung der mit dem ersten Drahte verbundenen Kondensatorplatte, so ist hier

$$(223) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_1' - \Phi_2' + \Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e^{i\nu t}}{K} (A' + A'') = \frac{e_0}{K_0}.$$

Die resultierenden Stromstärken  $\pm J_1$  anderseits müssen der zeitlichen Änderung der Ladungen  $\pm e_0$  der Kondensatorplatten gleich sein:

$$(223a) \quad J_1 = J_1' + J_1'' = w e^{i\nu t} (A' - A'') = \frac{d e_0}{d t} = i\nu e_0.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{i\nu K_0}{w K},$$

daher

$$(223b) \quad \frac{A''}{A'} = \frac{1 - \frac{i\nu K_0}{w K}}{1 + \frac{i\nu K_0}{w K}}.$$

So bestimmt sich aus den am Ende der Leitung vorgeschriebenen Bedingungen das Verhältnis der komplexen Konstanten  $A''$ ,  $A'$ , die für Amplitude und Phase der reflektierten und der einfallenden Welle maßgebend sind. Die absoluten Beträge, daher auch die Spannungs- und Stromamplituden der beiden Wellen sind die nach (223b) gleichen. Wir können setzen

$$(223c) \quad A' = |A| e^{\gamma i}, \quad A'' = |A| e^{-\gamma i}$$

und erhalten

$$\frac{A''}{A'} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \gamma}{1 + i \operatorname{tg} \gamma},$$

folglich

$$(223 \text{ d}) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{v}{w} \frac{K_0}{K}.$$

Dabei gibt  $2\gamma$  den Phasenvorsprung an, um den am Ende der Leitung die Spannung der einfallenden Welle derjenigen der reflektierten Welle voreilt.

Die resultierende Spannungsverteilung längs der Leitung wird gegeben durch

$$(224) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = 2 \frac{|A|}{K} \cos\left(\frac{vx}{w} - \gamma\right) \cos(\nu t)$$

und die Stromverteilung durch

$$(224 \text{ a}) \quad J_1 = -J_2 = w 2 |A| \sin\left(\frac{vx}{w} - \gamma\right) \sin(\nu t),$$

wie durch Superposition der komplexen Ausdrücke für die Spannungen und Ströme der beiden Wellen und durch Absonderung der reellen Teile folgt.

Wir ziehen zwei Grenzfälle in Betracht. Der erste Grenzfall soll der sein, wo die Endkapazität  $K_0$  gleich Null ist. Hier ergibt (223 d), daß  $\gamma = 0$  ist, d. h. daß für  $x = 0$  die Spannungsphasen der einfallenden und der reflektierten Welle einander gleich sind. Die Stromstärken der beiden Wellen sind dann für  $x = 0$  in entgegengesetzten Phasen. Demgemäß befindet sich nach (224) in diesem Falle am Ende der Leitung ein Spannungsbauch, nach (224 a) ein Stromknoten.

Der andere Grenzfall ist  $K_0 = \infty$ . Hier wird  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , die Spannungen der beiden Wellen für  $x = 0$  haben die Phasendifferenz  $2\gamma = \pi$ , die Stromstärken sind in gleichen Phasen. Demgemäß ist das Ende der Leitung ein Spannungsknoten und ein Strombauch.

Im allgemeinen Falle verhalten sich die Spannungsphasen so, als ob die Endkapazität beseitigt, d. h.  $K_0 = 0$  gesetzt

wäre, dafür aber die Leitung um die Strecke

$$(224b) \quad \gamma \frac{w}{v} = \gamma \frac{\tau w}{2\pi} = \gamma \frac{\lambda}{2\pi}$$

verlängert wäre. Dann würde in der Tat die reflektierte Welle, welche diese Strecke zweimal durchlaufen hat, erst dann bei  $x = 0$  eintreffen, wenn die Spannung der einfallenden Welle bereits den Phasenvorsprung  $2\gamma$  gewonnen hat. Im Grenzfalle  $K_0 = \infty$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  würde die Verlängerung der Leitung, welche der Endkapazität äquivalent ist, ein Viertel der Wellenlänge betragen.

Wir wollen uns nun die Leitung auch auf der Seite der negativen  $x$  begrenzt denken, und zwar wollen wir an diesem Ende einen Spannungsknoten der stehenden Schwingung annehmen. Ein solcher ist, wie erwähnt, durch Einschaltung eines Kondensators von sehr großer Kapazität zu erzielen. Bei Leitungen, die aus zwei Paralleldrähten bestehen, stellt man am Ende der Leitung nahezu einen Spannungsknoten her, indem man die Drähte dort leitend überbrückt. Bei dieser letzteren Anordnung werden die Belegungen des bei  $x = 0$  befindlichen Kondensators durch den aus den Paralleldrähten und der Brücke bestehenden Schließungskreis leitend verbunden. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die in einem solchen Kreise möglichen stehenden Schwingungen durch (224), (224a) dargestellt werden?

Wir denken uns den Spannungsknoten bei  $x = -l$  gelegen, während an dem anderen Ende, bei  $x = 0$ , der Kondensator von der Kapazität  $K_0$  eingeschaltet ist. Wie oben gezeigt, kann man sich die Kapazität  $K_0$  beseitigt und dafür die Leitung um die Strecke (224b) verlängert denken; dann würden an den Enden ein Spannungsknoten bzw. ein Spannungsbauch liegen, so daß die Länge der gedachten Leitung gleich einem ungeradzahligen Vielfachen der Viertelwellenlänge sein muß:

$$l + \frac{\gamma\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4}(2m + 1).$$

Hieraus folgt

$$(225) \quad \frac{vl}{w} + \gamma = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

wo  $m$  eine ganze Zahl ist. In der Tat verschwindet unter dieser Bedingung die durch (224) gegebene Spannung bei  $x = -l$ .

Ist die Länge  $l$  der Paralleldrähte gegeben, gerechnet vom Spannungsknoten bis zur Endkapazität  $K_0$ , so ergibt (225) in Verbindung mit (223d) die Frequenzen  $\nu$  der möglichen Eigenschwingungen. Diese sind bestimmt durch die transzendente Gleichung

$$(225a) \quad \cotg\left(\frac{vl}{w}\right) = \frac{\nu K_0}{w K}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(225b) \quad \frac{vl}{w} = \frac{2\pi l}{\lambda} = \xi$$

und ferner

$$(225c) \quad \alpha = \frac{Kl}{K_0}.$$

Dann wird (225a)

$$(225d) \quad \xi \operatorname{tg} \xi = \alpha.$$

Diese transzendente Gleichung bestimmt die Wellenlängen der Eigenschwingungen. Dabei ist  $\alpha$  das Verhältnis der Kapazität  $Kl$  der Paralleldrähte zur Kapazität  $K_0$  des Kondensators.

Ist  $\alpha$  sehr klein, d. h. kommt die Kapazität der Leitung nicht gegen die Kapazität des Kondensators in Betracht, so ergibt (225d)

$$\xi = \sqrt{\alpha}$$

als kleinste Wurzel. Setzt man hier, nach (225b, 216f)

$$\xi = \frac{2\pi l}{w\tau} = \frac{2\pi l \sqrt{LK}}{c\tau}$$

so wird

$$\frac{2\pi \sqrt{lL}}{c\tau} = \sqrt{\frac{1}{K_0}}$$

oder

$$(225e) \quad \tau = \frac{2\pi}{c} \sqrt{lLK_0}.$$

Wir erhalten also, wenn wir die Kapazität des Schließungskreises vernachlässigen, für die Grundschwingung die Thomsonsche Formel (192d); denn  $lL$  ist hier die Selbstinduktion der Paralleldrähte, da ja  $L$  die auf die Längeneinheit berechnete Selbstinduktion bedeutet.

Die Formel (225d) stellt nun die Verallgemeinerung der Thomsonschen Formel dar, die sich durch Berücksichtigung der Kapazität des Schließungskreises ergibt. Neben der Grundschwingung läßt sie eine Reihe von Oberschwingungen als möglich vorsehen.

Jene Formel wurde zuerst von G. Kirchhoff aus der Fernwirkungstheorie abgeleitet, und zwar für beliebige Form des Schließungsbogens. Wir haben uns bei ihrer Ableitung aus der Maxwellschen Theorie auf eine ganz spezielle Anordnung beschränkt, nämlich auf den Fall, daß der Schließungskreis aus zwei Paralleldrähten und einer kurzen Brücke besteht. Für diese Anordnung hat der Begriff der Leitungskapazität eine ganz bestimmte Bedeutung (vgl. § 79). Für beliebige Form des Schließungskreises jedoch und für Abmessungen desselben, die nicht klein gegen die Wellenlänge sind, schwebt der Begriff der Kapazität und Selbstinduktion der Leitung ganz in der Luft. Das hängt damit zusammen, daß im allgemeinen von einem solchen Schließungskreise Wellen in den Raum hinausgesandt werden und daß die elektromagnetische Energie der Schwingung nicht auf die unmittelbare Nachbarschaft des Leitungskreises zusammengedrängt ist. Der Einwand, der am Schlusse des § 72 gegen die auf der Theorie des quasistationären Stromes fußende Thomsonsche Behandlung der Kondensatorentladung erhoben wurde, ist auch gegen die Kirchhoffsche Verallgemeinerung geltend zu machen, da auch diese auf die ausgesandte Strahlung keine Rücksicht nimmt. Allein gerade der hier behandelte Fall

zweier paralleler Drähte, die jeweils von entgegengesetzt gleichen Strömen in gegenüberliegenden Querschnitten durchflossen werden, ist diesem Einwande nicht ausgesetzt. Hier hat die magnetische Energie in der unmittelbaren Umgebung der Leitung ihren Sitz; die Strahlung ist zu vernachlässigen. Das kann allerdings an dieser Stelle noch nicht gezeigt werden, sondern erst im zweiten Bande dieses Werkes, wo die Theorie der elektromagnetischen Strahlung ausführlich entwickelt werden soll.

---