Theorie der Elektrizität

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität - mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik

Föppl, A.

1907

Zweiter Abschnitt. Das elektrische Feld

urn:nbn:at:at-ubi:2-6404

Zweiter Abschnitt.

Das elektrische Feld.

Erstes Kapitel.

Das elektrostatische Feld im Luftraume.

§ 35. Die elektrische Feldstärke.

Reibt man eine Siegellackstange mit einem Stück Katzenfell, so werden diese Körper und der sie umgebende Raum in einen eigentümlichen Zustand versetzt, der sich dadurch kundgibt, daß leichte, in der Nähe befindliche Teilchen in Bewegung geraten; man sagt, jene Körper sind durch Reibung „elektrisch“ geworden, der umgebende Raum ist ein „elektrisches Feld“. Der elektrische Zustand haftet nicht an der Siegellackstange und an dem Katzenfell; er wird auf Metalle, die mit diesen Körpern in Berührung gebracht werden, übertragen. Die Entstehung des elektrischen Zustandes ist nicht an den Vorgang der Reibung gebunden; ein Metallstück, das durch einen metallischen Draht mit einem der Pole eines galvanischen Elementes in Verbindung steht, äußert, auch nach Entfernung des Drahtes, gleichfalls elektrische Wirkungen.

Ein elektrisches Metallstück mag sich im Luftraume befinden. Das elektrische Feld in seiner Umgebung untersucht man mit Hilfe eines Probekörpers, etwa eines mit Goldblatt überzogenen Holundermarkkügelchens, das seinerseits durch Berührung mit der geriebenen Siegellackstange oder mit dem

Katzenfell elektrisch gemacht ist. Dieser Probekörper wird im elektrischen Felde von einer Kraft $\mathfrak{K}$ angegriffen. Wir denken uns diese Kraft $\mathfrak{K}$ gemessen; sie wird nach Betrag und Richtung für die verschiedenen Punkte des Feldes verschieden ausfallen; sie wird auch für einen bestimmten Punkt des Feldes verschieden sein, je nach der Art, wie das Holundermarkkügelchen elektrisch gemacht ist. In der letzteren Hinsicht jedoch herrscht eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit: war der Probekörper mit der Siegellackstange in Berührung, so ist die Richtung der Kraft $\mathfrak{K}$, die er in einem gegebenen Punkte des Feldes erfährt, eine ganz bestimmte, und nur der Betrag hängt von der Art der Behandlung ab; war er mit dem Katzenfell in Berührung, so ist die Richtung der Kraft die entgegengesetzte, ihr Betrag hängt wieder von der Art der Behandlung ab. Wir werden so dazu geführt, die Kraft, welche im elektrischen Felde auf den Probekörper wirkt,

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E} \tag{124}$$

zu setzen, wo der Skalar e von dem elektrischen Zustande des Probekörpers abhängt, während der Vektor $\mathfrak{E}$ von diesem Zustande unabhängig ist, aber für die verschiedenen Punkte des Feldes verschiedene Richtung und verschiedenen Betrag besitzt. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß für zwei verschieden behandelte Probekörper, die nacheinander an denselben Punkt des Feldes gebracht werden, die Kräfte in einem bestimmten Verhältnis

$$\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{K}_2 = e_1 : e_2 \tag{124a}$$

stehen, das für verschiedene Punkte des Feldes das gleiche ist. Die Erfahrung lehrt ferner, daß auf einen gegebenen Probekörper in zwei verschiedenen Punkten P und P' des elektrischen Feldes Kräfte $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ wirken, deren Beträge in einem von der Behandlung des Probekörpers unabhängigen Verhältnis

$$|\mathfrak{K}| : |\mathfrak{K}'| = |\mathfrak{E}| : |\mathfrak{E}'| \tag{124b}$$

stehen. Diese beiden Aussagen (124a, b) sind in (124) enthalten. Ist für den ersten Probekörper e_1 gegeben, so ist für jeden anderen e_2 durch (124a) bestimmt; alsdann ist $\mathfrak{E}$ für die einzelnen Punkte des Feldes mit Hilfe eines beliebigen Probekörpers zu ermitteln.

Den skalaren Faktor e im Ausdrucke (124) nennt man die „elektrische Ladung“ des Probekörpers oder die Menge der auf ihm befindlichen Elektrizität, den vektoriellen Faktor $\mathfrak{E}$ die „elektrische Feldstärke“. Durch die in (124) enthaltene Definition der Elektrizitätsmenge und der elektrischen Feldstärke sind beide Größen eindeutig bestimmt, sobald die Einheit der Elektrizitätsmenge festgelegt ist. Der entgegengesetzten Richtung der Kraft auf zwei mit der Siegellackstange bzw. mit dem Katzenfell berührte Probekörper trägt man dadurch Rechnung, daß man positive und negative Elektrizität unterscheidet. Man hat ganz willkürlich der Elektrizität des mit dem geriebenen Katzenfell berührten Kügelchens das positive Vorzeichen gegeben und infolgedessen der Elektrizität der geriebenen Siegellackstange das negative. Demgemäß hat man als Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ diejenige der Kraft bezeichnet, welche der mit dem Katzenfell berührte Probekörper erfährt.

Da der Vektor $\mathfrak{K}$ polar ist, so sind über die Natur des Skalars e und des Vektors $\mathfrak{E}$ nur zwei Annahmen möglich. Entweder e ist ein eigentlicher Skalar und $\mathfrak{E}$ ein polarer Vektor, oder e ist ein Pseudoskalar und $\mathfrak{E}$ ein axialer Vektor. Wir wollen uns jetzt schon für die erstere Annahme entscheiden, indem wir die elektrische Ladung als Skalar im eigentlichen Sinne betrachten. Zunächst ist diese Festsetzung allerdings durchaus willkürlich, sie findet ihre Rechtfertigung erst in einer ziemlich entfernten Folgerung. Es würde sich indessen nicht empfehlen, in die Definition der Grundbegriffe eine Unbestimmtheit einzuführen, die später doch wieder zu beseitigen wäre.

Der in (124) formulierte Satz, welcher die Definition der elektrischen Feldstärke enthält, ist nicht unbeschränkt gültig. Seine genaue Gültigkeit hört auf, wenn der Probekörper zu nahe an dem geladenen Körper sich befindet, und zwar um so eher, je größer die Ladung des Probekörpers ist. Der Satz wird auch dann ungenau, wenn die Feldstärke zu stark mit dem Orte veränderlich ist, um so mehr, je größer die Abmessungen des Probekörpers sind. Wir werden später die Gründe dieser Abweichungen erkennen und den Ausdruck für die Kraft entsprechend korrigieren. Für das erste müssen wir uns daher eines hinreichend kleinen und hinreichend schwach geladenen Probekörpers bedienen, wenn wir auf Grund der Gleichung (124) das elektrische Feld ermitteln.

§ 36. **Der elektrische Kraftfluß.**

Wir werden in diesem Kapitel auch ferner von dem elektrischen Felde im Luftraume reden.

Mit Hilfe eines Probekörpers denke man sich in jedem Punkte des Raumes den Vektor $\mathfrak{E}$ konstruiert und so das elektrische Feld ermittelt. Die hydrodynamische Analogie, die im ersten Abschnitte (§ 16ff.) behandelt wurde, vergleicht nun das elektrische Feld mit dem Felde einer Flüssigkeitsströmung. Die Verfolgung dieser Analogie führt dazu, dem Flüssigkeitsvolumen $\mathfrak{v}_n df$, welches in der Zeiteinheit durch das Flächenelement df in dem durch $\mathfrak{n}$ angezeigten Normalensinne strömt, den Ausdruck $\mathfrak{E}_n df$ an die Seite zu stellen. Man nennt ihn den „Kraftfluß“, welcher das Flächenelement df durchsetzt. Die Abbildung des elektrischen Kraftfeldes auf das Strömungsfeld, welche dieser Bezeichnung zugrunde liegt, wird sich weiterhin als sehr fruchtbar erweisen.

Durch Zusammenfügung der Beiträge der einzelnen Flächenelemente erhält man den Kraftfluß durch eine beliebige Fläche f, insbesondere durch eine geschlossene Fläche. Die Strömung durch eine geschlossene Fläche haben wir mit der Ergiebigkeit der innerhalb der Fläche befindlichen Quellen in Verbindung gebracht. Dementsprechend (vgl. z. B. Gl. 78) setzen wir jetzt

$$\int df \mathfrak{E}_n = 4\pi e, \tag{125}$$

indem wir unter e die gesamte Ergiebigkeit der im Innern von f befindlichen Quellen des Kraftflusses verstehen.

Es lehrt nun die Erfahrung, daß ein Kraftfluß im Luftraume nur dort entquillt oder mündet, wo sich elektrische Ladungen befinden: Die Elektrizität ist die Quelle des Kraftflusses. Dieser Satz führt uns dazu, den positiven oder negativen Skalar e in (125) mit der Elektrizitätsmenge zu indentifizieren. Den Faktor 4π haben wir hinzugefügt, um zur Übereinstimmung mit dem sogenannten „absoluten elektrostatischen Maßsysteme" zu gelangen.

Ist die Elektrizität räumlich verteilt, so wird ihre Dichte durch die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit des Kraftflusses, d. h. durch die Divergenz (§ 19) von $\mathfrak{E}$, bestimmt:

(125a) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho .$$

Bei flächenhafter Verteilung der Elektrizität ist die Flächendichte ω in ganz entsprechender Weise mit der Flächendivergenz (§ 24) von $\mathfrak{E}$ verknüpft:

(125b) $$-(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2}) = 4\pi\omega .$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß bei allen bekannten Arten der Elektrizitätserregung immer die gleiche Menge positiver wie negativer Elektrizität entsteht. Berücksichtigt man alle entstehenden Ladungen, so ist deren Gesamtmenge stets gleich Null, die gesamte Ergiebigkeit der Quellen des Kraftflusses ist gleich Null. Darin unterscheidet sich das elektrische Feld wesentlich von dem Gravitationsfelde. Im Gravitationsfeld sind indessen die Quellen des Kraftflusses durch Massen gegeben, welche weder neu geschaffen noch vernichtet werden können.

§ 37. Das elektrostatische Potential.

Das „elektrostatische Feld" hat, wie sein Name besagt, die Eigenschaft, sich mit der Zeit nicht zu ändern. Es ist allerdings durch diese Eigenschaft noch nicht vollständig gekennzeichnet. Es gibt nämlich elektrische Felder, bei denen die Elektrizität sich nicht im Gleichgewichte, sondern im Zustande stationärer Bewegung befindet. Diese elektrischen Felder sind gleichfalls zeitlich konstant; sie sind jedoch dadurch von den elektrostatischen Feldern unterschieden, daß sie von Wärmeentwicklung begleitet sind, und daß daher ihre Aufrechterhaltung dauernde Energiezufuhr erfordert. *Das elektrostatische Feld hingegen bleibt ohne Energiezufuhr bestehen.*

Wie wir in den beiden vorangehenden Paragraphen erläutert haben, ist *die Elektrizität sowohl die Quelle des elektrischen Kraftflusses, wie die Angriffsstelle der elektrischen Kraft.* Zu diesen beiden, durch (124) und (125) formulierten Grundbedingungen tritt nun, wenn es sich speziell um elektrostatische Felder handelt, noch eine dritte. Um sie abzuleiten, denken wir uns den Probekörper des § 35 auf einem geschlossenen Wege herumgeführt. Wäre das Linienintegral der Feldstärke $\mathfrak{E}$ für irgendeinen geschlossenen Weg von Null verschieden, so könnte man durch Herumführen des Probekörpers fortgesetzt Arbeit aus dem Felde ziehen. Die Erfahrung lehrt nun, daß dies nicht möglich ist. Das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ für einen jeden geschlossenen Weg ist im elektrostatischen Felde gleich Null. *Das elektrostatische Feld ist demnach wirbelfrei:*

$$\text{(126)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0 .$$

Es ist folglich die Feldstärke im elektrostatischen Felde als negativer Gradient aus einem skalaren, eindeutigen Potentiale φ abzuleiten:

$$\text{(126a)} \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi ;$$

man nennt es das „*elektrostatische Potential*“. Seine Abnahme von einem Punkte (1) bis zu einem Punkte (2) ist gleich dem Linienintegrale von $\mathfrak{E}$, berechnet für einen beliebigen, von (1) nach (2) führenden Weg s oder s':

$$\text{(126b)} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{E}_s ds = \int_1^2 \mathfrak{E}_{s'} ds' .$$

Ist die Elektrizitätsverteilung gegeben, so berechnet sich das elektrostatische Potential, und damit das wirbelfreie Feld $\mathfrak{E}$, nach den Lehren der §§ 21—25. Der Ergiebigkeit e der Quellen entspricht hier die Elektrizitätsmenge, die wir ebenso bezeichnet haben. Für eine Anzahl h von elektrischen Punkten wird das Potential (Gl. 79):

$$\varphi = \sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{r_i}; \tag{127}$$

für räumlich verteilte Ladungen (Gl. 83) ist

$$\varphi = \int \frac{dv\varrho}{r}, \tag{127a}$$

und für flächenhaft verteilte (Gl. 87a)

$$\varphi = \int \frac{df\omega}{r}, \tag{127b}$$

während das Feld von Doppelschichten sich nach den Angaben des § 25 berechnen würde.

Die Kraft, welche ein elektrischer Punkt von der Ladung e_1 auf einen zweiten, von der Ladung e_2 ausübt, läßt sich aus (126a), (127), in Verbindung mit (124), ermitteln. Sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie, und hat den Wert

$$\mathfrak{K}_{12} = \mathfrak{r}_{12} \frac{e_1 e_2}{r_{12}^{\,3}}. \tag{127c}$$

Für die Wechselwirkung zweier geladenen Körper, insofern als dieselben wie Punktladungen aufgefaßt werden können, erhalten wir damit das Coulombsche Gesetz. Die Fernwirkungstheorie stellt dieses Gesetz an die Spitze, während wir, dem Gedankengange der Nahewirkungstheorie folgend, die Beziehungen (126), (124) als Grundlage gewählt haben. Die Beziehung (124) hätten wir entbehren können, wenn wir über den Wert der elektrostatischen Energie eine Annahme gemacht hätten; wir kommen weiter unten darauf zurück.

§ 38. Die Verteilung der Elektrizität auf Leitern.

Bei den Problemstellungen der Elektrostatik liegt die Sache meist nicht so einfach, daß die Verteilung der Elektrizität gegeben ist, und das Potential aus (127a, b) zu ermitteln ist. Die Verteilung der Elektrizität auf Metallkörper ist selber durch Bedingungen bestimmt, zu deren Aufstellung wir uns jetzt wenden. Wir erwähnten bereits in § 35 die Eigenschaft eines Metalldrahtes, Elektrität von dem Pole einer Batterie einem Körper zuzuführen. Man nennt Körper, denen diese Eigenschaft zukommt, „Leiter der Elektrizität", solche, denen sie fehlt, „Isolatoren". Diese Körperklassen sind nicht immer strenge zu sondern. So gibt es Körper, z. B. der Nernstsche Glühkörper, die, bei gewöhnlicher Temperatur Isolatoren, bei Erwärmung Leiter werden. Bei Luft und anderen Gasen hängt es vom Luftdruck und von dem Betrage der Feldstärke ab, ob sie sich wie Leiter oder wie Isolatoren verhalten. Es steht aber fest, daß die Metalle unter allen Umständen Leiter der Elektrizität sind. Im Innern eines Metallstückes ruft demnach ein elektrisches Feld stets einen elektrischen Strom hervor.

Hieraus ergibt sich ohne weiteres eine Bedingung für das elektrostatische Gleichgewicht im Innern des Metalles; es muß, wenn anders eine Bewegung der Elektrizität nicht hervorgerufen werden soll, der Vektor $\mathfrak{E}$ in dem vom metallischen Leiter erfüllten Raume verschwinden. Berücksichtigt man die bereits früher angeführte Eigenschaft der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, sich im Luftraume aus einem einwertigen Potentiale φ abzuleiten, so kann man jene Gleichgewichtsbedingung auch folgendermaßen ausdrücken: Das elektrostatische Potential φ ist im Innern eines Leiters konstant.

Ob wirklich im Innern eines Metallstückes kein elektrostatisches Feld besteht, kann man nicht direkt prüfen, da man den Probekörper, der zur Untersuchung des Feldes dient, nicht in das Innere der Leitersubstanz bringen kann, ohne diese selbst zu entfernen. Man kann indessen einen Hohlraum herstellen, der rings von metallischen Wänden umschlossen ist. Sind innerhalb des Hohlraumes keine elektrischen Ladungen, so ist erfahrungsgemäß hier das Feld in der Tat Null, die metallische Umhüllung schirmt das Innere gegen das elektrostatische Feld außerhalb befindlicher Ladungen. Füllt man nun den Hohlraum mit der leitenden Materie, so wird dadurch ein elektrisches Feld nicht entstehen. In das Innere des Metalles dringt mithin das elektrostatische Feld nicht ein.

Anders liegt die Sache, wenn man in das Innere des von Leitern umschlossenen Hohlraumes elektrische Ladungen bringt. Hier muß, nach Gleichung (125), der gesamte Kraftfluß durch eine den Leiter umschließende Fläche hindurch proportional der im Inneren des Metalles und an seiner Oberfläche angesammelten Elektrizitätsmenge sein. In dem von der leitenden Materie eingenommenen Raume aber darf ein Feld nicht auftreten. War nun vor der Einführung der Elektrizität in ihr Inneres die metallische Wand unelektrisch, so muß sie jetzt elektrisch werden, da ja von ihr ein Kraftfluß ausgeht. Das wird sie in der Tat, und zwar erhält die Außenwand Ladung von dem Betrage und Vorzeichen der in den Hohlraum eingeführten Elektrizität, die Innenwand Ladung von gleichem Betrage und von entgegengesetztem Vorzeichen, so daß im ganzen von dem Systeme derjenige Kraftfluß ausgeht, welcher der hineingebrachten Ladung entspricht. Das Verhalten der Metalle ist auch hier durchaus in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Elektrizität in ihrem Inneren frei beweglich ist, und daß im Falle des elektrischen Gleichgewichtes innerhalb des Metalles kein Feld besteht.

Betrachten wir nun das gesamte, den Raum erfüllende Feld sowohl außerhalb wie innerhalb der Metalle, so ist dasselbe überall wirbelfrei. Wir nehmen an, daß die Luft von Ladungen frei, mithin hier

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

sei; im Innern des vom Metalle eingenommenen Raumes befindet sich selbstverständlich keine Ladung, weil hier kein Feld besteht. Wohl aber ist an der Oberfläche des Metalles eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}$ vorhanden, da von ihr ein Kraftfluß nach außen geht; dieser beträgt $\mathfrak{E}_n$, wenn n die nach dem Luftraum weisende Normale ist.

Die Flächendichte der Elektrizität, ω, multipliziert mit 4π, ist nun gleich dem von der Flächeneinheit ausgehenden Kraftfluß; es ist demnach

$$(128)\qquad 4\pi\omega = \mathfrak{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Noch wäre es möglich, daß außer den flächenhaft verteilten Quellen des Kraftflusses Doppelquellen an der Grenzfläche von Luft gegen Metall ihren Sitz hätten. In der Tat, eine homogene Doppelschicht auf dieser geschlossenen Fläche würde nach § 25 weder innen noch außen das Feld ändern. Darin liegt eine Schwierigkeit, ihr Vorhandensein experimentell festzustellen. Wir wollen daher zunächst solche Doppelschichten nicht in Betracht ziehen. Wir kommen später auf die Frage nach der Existenz solcher Doppelschichten zurück.

Kennt man das wirbelfreie Feld des Vektors $\mathfrak{E}$, so kann man die Verteilung der Elektrizität nach (128) berechnen. Wäre anderseits die Verteilung der Elektrizität auf den Oberflächen der Leiter bekannt, so könnte man das Feld aus (127b, 126a) berechnen. Weder die eine noch die andere Problemstellung liegt indessen in Wirklichkeit vor. Das Grundproblem der Elektrostatik ist vielmehr das folgende: In dem von Ladungen freien Luftraume gilt für das elektrostatische Potential die Laplacesche Gleichung

$$(129)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = -\operatorname{div}\nabla\varphi = -\nabla^2\varphi = 0.$$

Auf den Oberflächen f_i eines jeden der Leiter muß φ einen konstanten Wert:

$$(129\text{a})\qquad \varphi = \varphi_i = \text{konstans},$$

annehmen. Dieser Wert des Potentiales herrscht dann auch im Innern des Leiters, da ja hier der Gradient des Potentiales verschwinden soll. Nicht diese Werte aber sind im allgemeinen gegeben, sondern die Gesamtladung eines jeden der Leiter:

(129b) $$e_i = \int df_i \omega_i = -\frac{1}{4\pi}\int df_i \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}.$$

Gesucht ist die entsprechende Lösung der Laplaceschen Gleichung; ist diese bis auf eine additive Konstante bekannt, so ist das elektrische Feld, durch den Gradienten von φ, eindeutig bestimmt. Das so bestimmte Feld ist das elektrostatische, die entsprechende Elektrizitätsverteilung tritt, im Falle des Gleichgewichtes, wirklich ein.

§ 39. **Die Kapazität des Kugelkondensators.**

Das elektrostatische Problem ist nur in wenigen Fällen gelöst. Der einfachste Fall ist eine geladene metallische Kugel. Es sei e die Ladung derselben, a ihr Radius; aus Symmetriegründen liegt es nahe, eine gleichförmige Verteilung der Ladung anzunehmen, so daß

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2}$$

die Flächendichte der Elektrizität ist. Man erfüllt die Gleichungen (125) und (128), welche den Zusammenhang von Elektrizität und Kraftfluß ausdrücken — die erstere in Form einer Integralgleichung, die letztere in Form einer Differentialgleichung — indem man den Kraftfluß $4\pi e$ durch alle zur Oberfläche des Leiters konzentrischen Kugeln treten läßt und demgemäß die radiale Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{e}{r^2}$$

setzt. Das Potential dieses wirbelfreien Feldes ist

$$\varphi = \frac{e}{r} + C;$$

es hat auf der Kugel den konstanten Wert

$$\varphi_a = \frac{e}{a} + C.$$

Wir müssen nun, um ein in der Natur mögliches elektrostatisches Feld zu erhalten, angeben, wo der Kraftfluß, welcher von der Kugel ausgeht, mündet. Wir wollen festsetzen, daß eine zweite konzentrische hohle Metallkugel vom inneren Radius b die erste einschließt und daß auf dieser die negative Elektrizität sich befindet; da die Ladung $-e$ gleichförmig über die Kugel verteilt ist, so beträgt die Flächendichte

$$\omega = -\frac{e}{4\pi b^2};$$

das Potential hat für $r = b$ den Wert

$$\varphi_b = \frac{e}{b} + C.$$

Diese Anordnung bezeichnet man als Kugelkondensator, und nennt „Kapazität" des Kondensators den Quotienten aus der positiven Ladung e, und der Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b$ des positiv geladenen und des negativ geladenen Leiters. Es ist

$$\varphi_a - \varphi_b = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = e\,\frac{b-a}{ab},$$

mithin die Kapazität

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{ab}{b-a}. \tag{130}$$

Durch Verkleinerung des Abstandes $(b - a)$ der beiden Kugeln kann man sehr große Kapazitäten erzielen.

Wenn man von der Kapazität einer einzelnen Kugel schlechtweg redet, so nimmt man an, daß die andere Kugel, welche die entgegengesetzte Ladung trägt, sich in sehr großer Entfernung befindet; die Kapazität der Kugel ist in diesem Falle gleich ihrem Radius a. Da die gesamte Elektrizitätsmenge eines Feldes stets gleich Null ist, so muß man in jedem Falle angeben, wo die entsprechende Ladung entgegengesetzten Vorzeichens ihren Sitz hat, d. h. wo der von der Kugel ausgehende Kraftfluß mündet. Bei Laboratoriumsversuchen mündet der Kraftfluß an den Wänden des Zimmers oder auf der Oberfläche etwa im Zimmer anwesender Leiter. Befinden sich diese in Entfernungen, die groß gegen den Radius der Kugel sind, so ist die Kapazität der Kugel praktisch gleich ihrem Radius.

§ 40. Das gestreckte Rotationsellipsoid.

Wir wollen jetzt ein leitendes, gestrecktes Rotationsellipsoid betrachten, das elektrisch geladen ist; welches ist sein Feld und seine Kapazität? Die Mündung des von der Leiteroberfläche ausgehenden Kraftflusses wird, wenn von der Kapazität des Ellipsoides schlechtweg die Rede ist, in sehr große Entfernung verlegt, etwa auf eine zum Ellipsoid konzentrische Kugelfläche. Die Aufgabe ist nun mathematisch folgendermaßen zu formulieren (vergl. § 38): Innerhalb des von den beiden Leitern begrenzten Raumes hat das Potential φ der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{131}$$

zu genügen; auf den Oberflächen f_1, f_2 der Leiter nimmt es konstante Werte

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2 \tag{131a}$$

an; der Gradient von φ weist senkrecht zu diesen Flächen und ist nach (128) der Flächendichte ω proportional

$$4\pi\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Dabei ist ω noch bis zu einem gewissen Grade willkürlich, es ist nur die Gesamtladung

$$e = \int df_1 \omega = -\frac{1}{4\pi}\int df_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = +\frac{1}{4\pi}\int df_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \tag{131b}$$

vorgeschrieben.

Es kommt meist nicht so sehr auf die Ermittelung der Elektrizitätsverteilung, als eben auf den Wert der Kapazität an; dieser ist bestimmt, wenn die Potentiale φ_1, φ_2 der beiden Leiter gefunden sind; es wird dann

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{131c}$$

Da es allgemeine Methoden zur Lösung des Grundproblems der Elektrostatik für beliebige Leiterformen nicht gibt, so wollen wir die Kapazität des gestreckten Rotationsellipsoides auf einem eigentümlichen, nur für diese spezielle Leiterform gangbaren Wege lösen. Wir denken uns in unserer hydrodynamischen Analogie die Verbindungslinie der Brennpunkte des Ellipsoids gleichförmig mit Quellen besetzt. Wir zeigen, daß die Äquipotentialflächen des zugehörigen wirbelfreien Feldes konfokale Rotationsellipsoide sind, und daß das Feld auch die übrigen verlangten Eigenschaften besitzt.

Die Ergiebigkeit der ganzen Strecke, von der Länge $2c$, setzen wir gleich e. Ihr Potential

$$\varphi = \frac{e}{2c}\int_{-c}^{+c}\frac{d\zeta}{r},$$

wo r den Abstand eines Aufpunktes von den Punkten der mit Quellen belegten Linie angibt, stellt selbstverständlich eine Lösung der Laplaceschen Gleichung (131) dar. Die z-Achse in die Quellenlinie, den Koordinatenanfang in ihren Mittelpunkt legend, setzen wir

$$r = \sqrt{(z-\zeta)^2 + x^2 + y^2}$$

und erhalten

$$(132) \qquad \varphi = -\frac{e}{2c}\left\{ln(z-\zeta+r)\right\}_{\zeta=-c}^{\zeta=+c} = \frac{e}{2c}\,ln\left(\frac{z+c+r_1}{z-c+r_2}\right),$$

wenn r_1, r_2 die Entfernungen des Aufpunktes von den durch

$$\zeta = -c, \quad \zeta = +c$$

gekennzeichneten Endpunkten der belegten Linie sind.

Um nun zu zeigen, daß φ auf konfokalen Rotationsellipsoiden konstant ist, gehen wir aus von der Gleichung dieser Flächenschar in der Parameterdarstellung

$$z = c\alpha\cos\beta, \quad \sqrt{x^2+y^2} = c\sqrt{\alpha^2-1}\sin\beta, \quad \begin{matrix} 1 \leqq \alpha < \infty, \\ 0 \leqq \beta \leqq \pi. \end{matrix}$$

Die Flächen $\alpha =$ constans sind gestreckte Rotationsellipsoide von den Halbachsen

$$a = c\alpha, \quad b = c\sqrt{\alpha^2-1};$$

für $\alpha = 1$ erhält man die belegte Linie als Grenzfall eines sehr gestreckten Rotationsellipsoides. Die Flächen α = constans werden senkrecht geschnitten von den Flächen β = constans; dieses sind nämlich konfokale Rotationshyperboloide mit den reellen Halbachsen $c \cos \beta$. Die Brennpunkte beider Flächenscharen sind die Endpunkte der belegten Linie. Mithin folgt aus bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte:

$$r_1 + r_2 = 2c\alpha, \qquad r_1 - r_2 = 2c \cos \beta,$$
$$r_1 = c\alpha + c \cos \beta, \qquad r_2 = c\alpha - c \cos \beta.$$

Setzt man die für z, r_1, r_2 erhaltenen Werte in (132) ein, so erhält man

$$\text{(132a)} \quad \varphi = \frac{e}{2c}\, ln \left(\frac{\alpha \cos \beta + 1 + \alpha + \cos \beta}{\alpha \cos \beta - 1 + \alpha - \cos \beta}\right) = \frac{e}{2c}\, ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\right).$$

Das Potential ist also in der Tat konstant auf den konfokalen Rotationsellipsoiden α = konstans; es verschwindet auf einer in sehr großer Entfernung befindlichen Kugel. Denken wir uns irgendeines der gestreckten Ellipsoide der Schar als leitend, so genügt das Feld in dem von dieser Fläche einerseits, von der sehr entfernten Kugel anderseits begrenzten Raume allen Bedingungen des elektrostatischen Problemes. Das Feld ist hier wirbelfrei und quellenfrei, der gesamte, aus dem Ellipsoide heraustretende Kraftfluß ist gleich der Ergiebigkeit e der belegten Linie, endlich sind die beiden das Feld begrenzenden Leiteroberflächen Äquipotentialflächen. Es sind demnach die Bedingungen (131, 131a, 131b) erfüllt. Vorausgesetzt, daß diese Bedingungen überhaupt das elektrostatische Feld eindeutig bestimmen — auf diese Frage kommen wir weiter unten zurück — ist φ das Potential des gesuchten Feldes.

Sind a, b, c jetzt große und kleine Halbachse und halber Brennpunktabstand des leitenden Ellipsoides, so ist, um dessen Potential φ_1 zu erhalten, in (132a)

$$\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

zu setzen. Es wird

$$(132\,\mathrm{b})\qquad \varphi_1 = \frac{e}{2c}\, ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}}\, ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right);$$

da außerdem auf der sehr entfernten Kugel (für $\alpha = \infty$)

$$\varphi_2 = 0$$

ist, so wird die Kapazität K des gestreckten Rotationsellipsoides bestimmt durch

$$(132\,\mathrm{c})\qquad \frac{1}{K} = \frac{\varphi_1}{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right).$$

Für sehr gestreckte Ellipsoide, d. h. für sehr kleine Werte des Quotienten $b:a$, erhält man

$$(132\,\mathrm{d})\qquad \frac{1}{K} = \frac{1}{a} \cdot ln\left(\frac{2a}{b}\right).$$

Die Kapazität eines solchen stabförmigen Leiters, der etwa durch einen Draht mit kreisförmigem, nach den Enden hin abnehmendem Querschnitt zu realisieren ist, ergibt sich um so kleiner, je geringer bei gegebener Länge seine Dicke ist. Die Elektrizitätsverteilung wird übrigens in diesem Grenzfalle durch die oben zur Ableitung des Potentiales benutzte homogene Belegung der die Brennpunkte verbindenden Strecken dargestellt. Die Elektrizität verteilt sich demnach über den stabförmigen Leiter so, daß auf gleiche Längen des Drahtes gleiche Ladungen entfallen.

§ 41. **Ein elektrischer Punkt gegenüber einer leitenden Ebene.**

Wir denken uns das Feld auf der einen Seite durch eine unendliche Ebene begrenzt, welche die Oberfläche eines Leiters bildet. Im Abstande a von dieser Ebene, in einem Punkte A, denken wir uns einen kleinen, mit der Elektrizitätsmenge e geladenen Körper befindlich. Die Abmessungen des Körpers sollen so klein sein, daß sein elektrisches Feld bei Abwesenheit der leitenden Ebene aus dem Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

abzuleiten wäre. Es fragt sich nun, wie die leitende Begrenzungsebene das Feld modifiziert. Jenes Potential genügt offenbar keineswegs der Bedingung, auf der leitenden Ebene konstant zu sein. Man kann indessen ein Feld erhalten, für welches jene Ebene Äquipotentialfläche ist, indem man dem Punkte A den spiegelbildlich ihm entsprechenden B zuordnet und sich in diesem Bildpunkte die entgegengesetzte Ladung $-e$ befindlich denkt. Ist r' der Abstand eines Aufpunktes vom Bildpunkte, so stellt

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \tag{133}$$

das Potential des resultierenden Feldes in dem betrachteten Halbraume dar. Dasselbe ist gleich Null auf der Begrenzungsebene, da hier $r = r'$ ist. Das wirbelfreie Feld ist auf derjenigen Seite der Ebene, in welcher der Punkt A liegt, quellenfrei, mit Ausnahme des Punktes A selbst; von diesem geht der Kraftfluß $4\pi e$ aus.

Auf der Begrenzungsebene beträgt die senkrecht zu ihr weisende elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -e\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + e\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = -\frac{2ae}{r^3};$$

die ihr nach (128) proportionale Flächendichte ist

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_n = -\frac{e}{2\pi}\cdot\frac{a}{r^3}. \tag{133a}$$

Die Elektrizität verteilt sich mithin in der Weise auf der ebenen Oberfläche des Leiters, daß die Flächendichte der dritten Potenz des Abstandes vom elektrischen Punkte umgekehrt proportional ist. Als gesamte Ladung der Ebene

$$\int \omega\, df = -\frac{e}{2\pi}\int\frac{a\,df}{r^3}$$

wird durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ϑ erhalten

$$\int \omega\, df = -\frac{e}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\infty}\frac{a\varrho\, d\varrho}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = +e\left\{\frac{a}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}_{\varrho=0}^{\infty} = -e.$$

Es endigt mithin der ganze im Punkte A beginnende Kraftfluß auf der ebenen Oberfläche des Leiters.

Die Erscheinung, daß ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters, Ladung entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als „elektrische Influenz". Diese Erscheinung ist als Folge des Umstandes aufzufassen, daß in das Innere des Leiters das Feld nicht eindringen kann. Ist der Leiter von endlicher Ausdehnung und ohne leitende Verbindung mit anderen Körpern, so muß, da seine Ladung im ganzen gleich Null bleibt, der Kraftfluß, welcher auf der dem influenzierenden Punkte gegenüberliegenden Seite endigt, auf der anderen Seite wiederum den Leiter verlassen. In dem oben behandelten Falle eines unendlich ausgedehnten, das Feld nach der einen Seite hin abschließenden Leiters indessen ist die Ladung $+e$, die gleichzeitig mit der influenzierten Ladung $-e$ bei Annäherung des influenzierenden Punktes entstand, fortgeschafft zu denken.

Die Lösung des Influenzproblemes mit Hilfe elektrischer Bilder ist von W. Thomson auf kugelförmige Leiter ausgedehnt worden.

Wird in die Nähe eines geladenen Leiters ein elektrischer Punkt gebracht, etwa als Probekörper zur Untersuchung des Feldes, so superponiert sich sein durch Anwesenheit des Leiters modifiziertes Feld dem ursprünglichen Felde des Leiters. Daher wird die Kraft, die der Probekörper erfährt, nicht der ursprünglichen, sondern der durch seine Anwesenheit modifizierten Elektrizitätsverteilung über den Leiter hin entsprechen, die Kraft wird hier ein genaues Maß für die ursprünglich herrschende Feldstärke nicht ergeben, um so weniger, je größer die Ladung des Probekörpers ist und je mehr er sich der Oberfläche des Leiters nähert. In unmittelbarer Nähe der Leiteroberfläche ist die im § 35 gegebene Definition des Vektors $\mathfrak{E}$ durch den Probekörper nur dann richtig, wenn man die Ladung desselben beliebig klein machen kann. Streng genommen, definiert erst der bei fortgesetzter Verkleinerung der

Ladung e des Probekörpers erreichte Grenzwert

$$\lim_{e=0}\left(\frac{\mathfrak{K}}{e}\right)$$

den Vektor $\mathfrak{E}$.

Zweites Kapitel.

Dielektrika.

§ 42. Dielektrizitätskonstante und elektrische Verschiebung.

Wir haben uns bisher auf das elektrische Feld im Luftraume beschränkt. Wir gehen jetzt dazu über, andere Isolatoren in Betracht zu ziehen. Faraday hat gefunden, daß die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 39) sich ändert, wenn der Raum zwischen den Kugeln mit anderen isolierenden Substanzen, etwa Wachs oder Schwefel, ausgefüllt wird; die Ladung der Kugeln bei konstant gehaltener Potentialdifferenz wächst dann in einem bestimmten, nur von der betreffenden isolierenden Substanz abhängigen Verhältnis; die Kapazität des Kondensators wird jetzt nicht mehr durch die Formel (130), sondern durch die allgemeinere Formel

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \varepsilon \cdot \frac{ab}{b - a} \tag{134}$$

gegeben. Die Konstante ε, welche das dielektrische Verhalten eines Isolators anzeigt, wird die „Dielektrizitätskonstante" genannt. Sie ist definiert als Quotient aus der Kapazität eines mit dem betreffenden homogenen Dielektrikum gefüllten Kugelkondensators und der Kapazität eines geometrisch gleichen Luftkondensators. Es ist z. B. die Dielektrizitätskonstante von Paraffin 2,3, von Gläsern 6 bis 8, von destilliertem Wasser 76.

Die Dielektrizitätskonstante der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft, hängt wesentlich von der Dichte ab und zwar in der Weise, daß für alle Gase die Werte von ε mit abnehmender Dichte sich einem und demselben Grenzwerte nähern. Diesen Grenzwert bezeichnet man als Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes oder des „Äthers“. Die Tatsache, daß bei starker Verdünnung der in einem Raume enthaltenen Materie die Gesetze des elektrischen Feldes von der chemischen Natur der Materie unabhängig werden, ist für die Entwicklung der Elektrizitätslehre überaus wichtig geworden. Sie legt die Annahme nahe, daß auch der leere Raum elektrische Wirkungen vermittelt, daß er der Sitz eines elektrischen Feldes sein kann. Da man früher dem Raum nur geometrische Eigenschaften beizulegen pflegte, so hat man für den mit elektromagnetischen Eigenschaften behafteten Raum ein besonderes Wort „Äther“ eingeführt. Es ist gut, sich zu vergegenwärtigen, daß sowohl der Begriff des geometrischen Raumes, wie auch der Begriff des elektromagnetischen Äthers nur Abstraktionen sind. Die Eigenschaften des Raumes, welche die Geometrie behandelt, und diejenigen, welche uns durch das Studium der elektromagnetischen Vorgänge bekannt geworden sind, sind zwar rein begrifflich zu scheiden, in Wirklichkeit aber sind sie unzertrennlich; geometrische und elektromagnetische Eigenschaften zusammen charakterisieren erst den wirklichen Raum. Wir verbinden heute mit dem Worte „Äther“ keineswegs die Vorstellung einer hypothetischen Substanz; vielmehr gebrauchen wir dieses historisch überlieferte Wort heute als Abkürzung, wenn wir ohne Weitschweifigkeiten von dem Raume als Träger eines elektromagnetischen Feldes sprechen.

Wir haben uns bisher der Luft bei Atmosphärendruck als Normalsubstanz bedient und auf diese die Dielektrizitätskonstanten der Körper bezogen. Bei theoretischen Untersuchungen wird man besser die Dielektrizitätskonstanten der Körper auf den Äther beziehen; die Zahlenwerte von ε werden dann alle größer als 1, insbesondere wird für Luft unter Atmosphärendruck $\varepsilon = 1{,}000590$. Praktisch ist demnach der Unterschied der dielektrischen Konstanten von Luft bei Atmosphärendruck und bei großer Verdünnung meist zu vernachlässigen. Immerhin wollen wir von jetzt an die Festsetzung treffen, daß die Entwickelungen des vorigen Kapitels sich streng genommen auf den Luftraum bei unendlicher Verdünnung der Luft, d. h. auf den Äther beziehen. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Grundgesetze der Elektrostatik so zu verallgemeinern, daß sie beliebige isotrope Dielektrika umfassen.

Für ein homogenes, flüssiges oder gasförmiges Dielektrikum bleibt die Definition des Vektors $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des geladenen Probekörpers (124) bestehen; auch hier ergibt die Erfahrung, daß das Feld von $\mathfrak{E}$ überall wirbelfrei ist (126); dasselbe leitet sich also aus einem Potential φ ab. Um nun die nach Gl. (134) geänderte Kapazität eines Luftkondensators zu erklären, muß man die durch (125) formulierte Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Ladung e aufgeben.

Wir führen mit Maxwell einen neuen Vektor $\mathfrak{D}$ ein, welcher den Vektor $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ in jener Relation (125) ersetzt und welcher „elektrische Verschiebung“ genannt wird. Er soll folgender Festsetzung genügen

$$\int df\mathfrak{D}_n = e. \tag{135}$$

D. h. das über eine geschlossene Fläche f erstreckte Integral der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}$, oder die gesamte elektrische Verschiebung durch die Fläche ist gleich der gesamten, von der Fläche umschlossenen elektrischen Ladung. Maxwells Bezeichnung „elektrische Verschiebung“ legt eine von der hydrodynamischen Abbildung etwas abweichende mechanische Analogie zugrunde, indem sie das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ nicht durch die in der Zeiteinheit stattfindende Strömung eines Fluidums abbildet, sondern durch die gesamte Verschiebung, welche die Teilchen eines gewissen Fluidums von der Gleichgewichtslage aus erfahren haben. Vom Standpunkte der Geometrie der Vektorfelder aus sind indessen die beiden Bilder nicht wesentlich voneinander verschieden. Die Elektrizität ist, je nach dem Vorzeichen, Quelle oder Senke der elektrischen Verschiebung. In dem von Elektrizität freien Gebiete des Isolators ist das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ quellenfrei; dagegen gelten, wenn es sich um räumlich oder flächenhaft verteilte Ladungen handelt, die Beziehungen

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = \varrho, \tag{135a}$$

$$-\{\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2}\} = \omega, \tag{135b}$$

welche an die Stelle von (125a, b) treten.

Da nun für den Kugelkondensator von gegebener Ladung nach diesen Festsetzungen die gesamte Verschiebung durch konzentrische Kugeln dieselbe ist wie früher, und da der Zusammenhang von $\mathfrak{E}$ und φ der alte geblieben ist, so ist, um die durch (134) ausgedrückte Änderung der Kapazität zu erhalten, der Vektor $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ folgendermaßen zu verknüpfen

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}. \tag{136}$$

In der Tat wird bei dieser Festsetzung der Quotient von Ladung zur Potentialdifferenz der Kugeln im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vergrößert, wenn der vorher leere Raum des Kugelkondensators mit dem betreffenden Isolator gefüllt wird. Überhaupt kann man das elektrostatische Problem für den Fall, daß das Feld von einem homogenen Isolator gefüllt ist, allgemein zurückführen auf den Fall, wo die geladenen Leiter sich im leeren Raume befinden. Werden die Ladungen der Leiter konstant gehalten, so wird das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ durch Füllung des Raumes mit dem Dielektrikum nicht geändert, aber $\mathfrak{E}$ und φ werden im Verhältnis $1 : \varepsilon$ verkleinert. Werden aber die Potentiale der Leiter konstant gehalten, so bleibt das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ ungeändert, mithin wird $\mathfrak{D}$ und die elektrische Ladung im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vergrößert. Es folgt z. B., daß die Kapazität eines einzelnen Leiters im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vermehrt wird, wenn der Leiter aus dem leeren Raum in ein Dielektrikum gebracht wird, freilich streng genommen nur dann, wenn dasselbe den ganzen Raum außerhalb des Leiters erfüllt. Wenn die Dielektrika nicht homogen sind, oder wenn

Trennungsflächen zweier Isolatoren im Felde verlaufen, sind besondere Betrachtungen notwendig.

Für ein festes Dielektrikum ist es nicht ohne weiteres möglich, den Vektor $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des Probekörpers zu bestimmen und so die wirbelfreie Verteilung des Feldes festzustellen. Hier sind die soeben aufgestellten Gesetze des Feldes zunächst rein hypothetisch einzuführen; die Rechtfertigung ist in der Richtigkeit der weiterhin zu entwickelnden Folgerungen zu sehen, die sich auf das Feld außerhalb der festen Dielektrika oder auf die Kapazität der Leiter beziehen.

§ 43. **Wahre und freie Elektrizität.**

In einem elektrostatischen Felde, welches von dielektrischen Körpern erfüllt ist, haben wir jetzt zwei Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ zu unterscheiden, die in isotropen Körpern durch (136) verknüpft sind. Die Quellen der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ sind nach (135a, b) die Ladungen wahrer Elekrizität:

Die räumliche Dichte der wahren Elektrizität ist gleich der Divergenz, ihre Flächendichte gleich der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$.

Neben der „wahren Elektrizität“ führen wir jetzt die „freie Elektrizität“ durch folgende Festsetzungen ein: Die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität und die Flächendichte ω' derselben sollen gleich der räumlichen Divergenz bzw. der Flächendivergenz des Vektors $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ sein:

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho', \tag{137}$$

$$-(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2}) = 4\pi\omega'. \tag{137a}$$

Die auf einem isolierten Leiter befindliche Menge wahrer Elektrizität wird durch Einführung in einen anderen Isolator nicht geändert. Der vom Leiter ausgehende Kraftfluß aber, und daher die Menge der freien Elektrizität auf dem Leiter, wird dadurch geändert.

Wir betrachten das Feld, das eine Anzahl geladener

Leiter umgibt. Die Flächendichte der wahren Elektrizität, die an der Oberfläche der Leiter ihren Sitz hat, ist, wenn n die äußere Normale dieser Fläche bezeichnet, nach (135b)

$$\omega = \mathfrak{D}_n. \tag{137b}$$

Wir nehmen an, daß weder im Innern der im Felde befindlichen Dielektrika, noch an der Trennungsfläche je zweier derselben wahre Elektrizität sich befindet, dann gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \tag{137c}$$

$$\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2} = 0. \tag{137d}$$

Die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ durchsetzt demnach stetig die Trennungsfläche zweier Dielektrika.

Die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität ist nach (136) und (137c) im Innern homogener Isolatoren ebenfalls gleich Null, sie ist aber von Null verschieden, wenn der Isolator inhomogen, d. h. wenn ε in demselben nicht konstant ist. Insbesondere in einer Übergangsschicht zweier Dielektrika ist freie Elektrizität anzunehmen; im Grenzfalle unstetigen Überganges bildet sie eine Flächenbelegung von der durch (137a) bestimmten Flächendichte ω'.

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist im elektrostatischen Felde überall wirbelfrei verteilt und daher als negativer Gradient eines Potentiales darzustellen

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \quad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0. \tag{138}$$

Auch an der Trennungsfläche verschiedener Substanzen treten keine Flächenwirbel (§ 29) des Vektors $\mathfrak{E}$ auf, d. h. die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche zweier Körper.

Im Innern homogener Isolatoren ist nach (136) und (138) auch der Wirbel des Vektors $\mathfrak{D}$ Null, aber im Innern inhomogener Isolatoren, sowie insbesondere auf der Trennungsfläche verschiedener Isolatoren können Wirbel von $\mathfrak{D}$ ihren Sitz haben; das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ ist somit nicht durchweg wirbelfrei und daher nicht allgemein aus einem skalaren Potential abzuleiten.

Will man das Potential φ berechnen, so muß man natürlich die Quellen des wirbelfreien Vektorfeldes

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$$

in Betracht ziehen, d. h. die freie Elektrizität.

Es ist

$$\varphi = \int \frac{dv\varrho'}{r} + \int \frac{df\omega'}{r}, \tag{138a}$$

wo ϱ', die räumliche Dichte der freien Elektrizität, in denjenigen Volumelementen von Null verschieden ist, wo ε mit dem Orte variiert, und ω', die Flächendichte der freien Elektrizität, nicht nur an der Oberfläche der Leiter, sondern auch an der Trennungsfläche je zweier Isolatoren ihren Sitz hat.

§ 44. Die elektrischen Kraftlinien.

Bei elementaren Darstellungen der Elektrizitätslehre pflegt man vielfach das elektrische Feld durch Zeichnung der „Kraftlinien" zu veranschaulichen. Es sind dies Kurven, deren Tangente in jedem Punkt des Feldes die Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ anzeigt. Man zeichnet die Kraftlinien gewöhnlich so, daß die Zahl der Kraftlinien, die eine gegebene Fläche durchsetzen, ein Maß für den durch die Fläche hindurchtretenden Kraftfluß ist. Es beginnen dann die Kraftlinien dort, wo freie Elektrizität positiven Vorzeichens, sie endigen dort, wo solche negativen Vorzeichens ihren Sitz hat.

Ebenso kann man das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ durch „Verschiebungslinien" darstellen, deren Tangente in die Richtung von $\mathfrak{D}$ fällt, während ihre Zahl ein Maß des Betrages von $\mathfrak{D}$ ist. Der Ursprung und die Mündung der Verschiebungslinien wird dann mit dem Sitz der wahren Elektrizität zusammenfallen. Begnügt man sich jedoch mit der Darstellung der Richtung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, welche in isotropen Körpern miteinander übereinstimmt, so kann man in solchen Körpern die Verschiebungslinien mit den Kraftlinien zusammenfallen lassen.

Aus der Stetigkeit der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ (§ 43) folgt das

Brechungsgesetz der Kraftlinien an der Grenze zweier homogener Isolatoren. Die Kraftlinien, die vom Dielektrikum (1) nach (2) gehen mögen, zeigen die Richtung beider Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ an. Es seien α_1, α_2 die Winkel, welche die Richtungen der beiden Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfläche mit der von (1) nach (2) gehenden Normalen einschließen. Dann ist

$$|\mathfrak{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathfrak{D}_2| \cos \alpha_2, \quad |\mathfrak{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{E}_2| \sin \alpha_2;$$

daher, mit Rücksicht auf (136)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2. \tag{139}$$

Die trigonometrischen Tangenten der Kraftlinienrichtungen gegen die Normale der Trennungsfläche verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten der beiden aneinander grenzenden Isolatoren. Die Kraftlinien werden also beim Eintritt in einen Isolator mit größerer Dielektrizitätskonstante von der Normale fortgebrochen.

§ 45. Kugelkondensator mit zwei dielektrischen Schichten.

Treffen die Kraftlinien senkrecht auf die Trennungsfläche zweier Isolatoren, so ändert sich ihre Richtung nicht; es entsteht aber eine Flächenbelegung freier Elektrizität. Als Beispiel mag wieder der Kugelkondensator (§ 39) dienen. An die innere Kugel vom Radius a mag sich zunächst eine dielektrische Kugelschicht von der Dielektrizitätskonstante ε_1 anschließen, die nach außen durch eine konzentrische Kugel vom Radius c begrenzt wird; der Raum zwischen dieser Kugel und der leitenden Kugel vom Radius b sei von einem zweiten Isolator von der dielektrischen Konstante ε_2 erfüllt.

Wahre Elektrizität sitzt nur auf der Oberfläche der beiden Metallkugeln, und zwar positive $+e$ auf der inneren, negative $-e$ auf der äußeren. Die gesamte elektrische Verschiebung durch die konzentrischen Kugeln ist gleich e. Die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind radial gerichtet, es ist daher im ersten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{r^2},$$

im zweiten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{e}{r^2}.$$

Die Grenzbedingungen, welche stetigen Übergang der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ verlangen, sind hierdurch erfüllt.

Es ist die Flächendichte der wahren Elektrizität an der inneren Metallkugel

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega = -\frac{e}{4\pi b^2}.$$

Hingegen die Flächendichte der freien Elektrizität an der inneren Metallkugel ist

$$\omega' = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{4\pi a^2},$$

an der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$\omega' = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \frac{e}{4\pi c^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega' = -\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{e}{4\pi b^2}.$$

Die Gesamtmengen freier Elektrizität sind auf der inneren Metallkugel

$$e' = \omega' \, 4\pi a^2 = \frac{e}{\varepsilon_1},$$

auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$e' = \omega' \, 4\pi c^2 = e\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$

auf der äußeren Metallkugel

$$e' = \omega' \, 4\pi b^2 = -\frac{e}{\varepsilon_2}.$$

Die algebraische Summe der freien Elektrizitäten, die auf den beiden Metallkugeln und auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren sich befinden, ist gleich Null.

Die Potentialdifferenz der beiden leitenden Kugeln ist

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^c \mathfrak{E}_r dr + \int_c^b \mathfrak{E}_r dr = \frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{e}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Daher ist die Kapazität K des Systemes bestimmt durch

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{e} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b} + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{140}$$

Sind die Radien b, c groß gegen a, so kann man $K = \varepsilon_1 a$ setzen, d. h. die Kapazität eines Systemes ist dann gleich der Kapazität einer Kugel, die sich allein in einem ganz von dem ersten Isolator erfüllten Raume befindet. Die erhaltene Gleichung lehrt, wie groß die Dicke der dielektrischen, der Kugel anliegenden Schicht sein muß, damit praktisch das zweite Dielektrikum die Kapazität nicht mehr beeinflußt.

§ 46. Ein elektrischer Punkt gegenüber einem dielektrischen Halbraume.

Wir denken uns einen elektrischen Punkt A im Luftraume befindlich, im Abstande a von der ebenen Oberfläche eines Dielektrikums; welchen Einfluß übt die Anwesenheit des Dielektrikums aus? Die Aufgabe entspricht der im § 41 für die leitende Ebene gelösten. Damals jedoch brauchten wir nur das Feld im Luftraume in Betracht zu ziehen, da jenseits der leitenden Ebene überhaupt kein Feld besteht. Jetzt wird auch das Feld innerhalb des Isolators zu berücksichtigen sein; wir wollen annehmen, daß der Isolator den ganzen Halbraum einnimmt. Seine Dielektrizitätskonstante sei ε_2, ε_1 diejenige der Luft.

Wir versuchen auch dieses Problem nach der Methode der elektrischen Bilder zu lösen. Wir denken uns wieder den Punkt B jenseits der ebenen Begrenzung des Halbraumes, der A spiegelbildlich entspricht, und nennen r, r' die Abstände eines Aufpunktes von A bzw. seinem Bilde B.

Wir setzen für das Potential im Luftraume

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} - \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}.$$

Es soll also das Feld im Luftraume der wahren Ladung e in A und der fingierten wahren Ladung e' in B entsprechen. Dieser Ansatz genügt der Grundbedingung, daß Quellen elektrischer Verschiebung innerhalb des Luftraumes nur in A vorhanden sind; denn der Bildpunkt B liegt ja außerhalb des Luftraumes.

Was nun das Feld innerhalb des Dielektrikums anbelangt, so wollen wir versuchen, es durch den Ansatz für das Potential im Dielektrikum

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}$$

darzustellen. Es soll also das Feld in dem Isolator so beschaffen sein, als ob der Isolator unendlich ausgedehnt und in A die wahre Ladung e'' befindlich wäre. Dieser Ansatz entspricht der Bedingung, daß innerhalb des wirklich von dem Dielektrikum erfüllten Halbraumes Quellen oder Senken elektrischer Verschiebung nicht vorkommen.

Man zeigt, daß das Feld wirklich durch diese Ansätze dargestellt wird, indem man nachweist, daß die Grenzbedingungen an der Begrenzungsebene des Dielektrikums durch geeignete Verfügung über die bisher unbestimmten Größen e', e'' zu erfüllen sind. Was zunächst die Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ anbelangt, so ist

$$\mathfrak{D}_{n1} = + \frac{e}{4\pi}\frac{a}{r^3} + \frac{e'}{4\pi}\frac{a}{r'^3}, \quad \mathfrak{D}_{n2} = - \frac{e''}{4\pi}\frac{a}{r^3},$$

wobei die Normalen n_1, n_2 von dem betreffenden Medium nach der Grenzfläche hinweisend angenommen sind. Die Grenzbedingung (137d) verlangt nun das Verschwinden der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$; da $r = r'$, so ist die Forderung dieser ersten Grenzbedingung

$$e + e' - e'' = 0.$$

Anderseits sollen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ zu beiden Seiten der Trennungsebene die gleichen Werte besitzen;

dies wird jedenfalls dann der Fall sein, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ längs der Ebene erfüllt ist, denn $\mathfrak{E}$ ist ja der negative Gradient von φ. Die Bedingung $\varphi_1 = \varphi_2$ ist nicht nur hinreichend, sie ist auch notwendig, wenn Doppelschichten freier Elektrizität an der Oberfläche des Isolators ausgeschlossen werden. Wir verlangen also zweitens

$$\frac{e - e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}.$$

Man erhält aus den beiden in e, e', e'' linearen Gleichungen

$$(141) \qquad \begin{cases} \dfrac{e - e'}{e + e'} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \qquad e' = e \cdot \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \\[2ex] e'' = e + e' = e \cdot \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \end{cases}$$

Hierdurch sind die fingierten „wahren" Ladungen $(-e')$ in B, $(+e'')$ in A bestimmt. Die Kraftlinien innerhalb des Dielektrikums verlaufen so, daß sie radial von A auszugehen scheinen, während im Luftraume das Feld durch Superposition zweier von dem Quellpunkte A und dem Senkpunkte B herrührender Felder sich darstellen läßt.

Ersetzt man das Dielektrikum durch einen Leiter, so hat man nach § 41, um das Potential im Luftraume zu bestimmen, dem Bildpunkte B die Ladung $(-e)$ zu geben. Es ist also die störende Wirkung des Dielektrikums auf die Feldstärke im Luftraume, verglichen mit der störenden Wirkung des Leiters, zu messen durch

$$e' : e = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Das Dielektrikum übt also stets einen geringeren Einfluß aus als der Leiter. Im Grenzfalle indessen, wo die Dielektrizitätskonstante ε_2 des Isolators sehr groß ist gegen diejenige der Luft, wird $e' = e$, d. h. der Leiter beeinflußt das Feld im Luftraume ebenso, wie ein Isolator von unendlich großer Dielektrizitätskonstante.

Was ferner die Feldstärke innerhalb des Dielektrikums betrifft, so entspricht diese der in A befindlichen freien Ladung $\frac{e''}{\varepsilon_2}$ in einem unbegrenzten Dielektrikum; würde das Dielektrikum entfernt, so wäre die Feldstärke hier aus der freien Ladung $\frac{e}{\varepsilon_1}$ zu bestimmen, welche dem im Luftraume befindlichen Punkte A wirklich zukommt. Das Eindringen des Feldes wird demnach gemessen durch den Quotienten

$$\frac{e''}{\varepsilon_2} : \frac{e}{\varepsilon_1} = 2\,\varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1 .$$

Im Grenzfalle unendlicher Dielektrizitätskonstante ε_2 ist die elektrische Feldstärke im Innern des Isolators Null, genau wie im Innern eines Leiters.

Für das Eindringen der elektrischen Verschiebung trifft das allerdings nicht zu; dieses wird gemessen durch das Verhältnis der wahren Ladungen

$$e'' : e = 2\,\varepsilon_2 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1 ,$$

welches im Grenzfalle eines unendlichen Wertes von ε_2 gleich 2 wird. Die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien wäre offenbar, falls der ganze Raum mit Luft gefüllt wäre, gleich $\frac{e}{2}$, der halben wahren Ladung von A; denn die Verschiebungslinien würden in diesem Falle von A radial ausgehen, nach allen Seiten in gleicher Dichte. Ist hingegen der Halbraum von dem Dielektrikum eingenommen, so entspricht, wie wir sehen, die eintretende elektrische Verschiebung einer in A befindlichen wahren Ladung e''; mithin ist die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien

$$\frac{e''}{2} = e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} .$$

Auf der Grenzebene der beiden Dielektrika können keine Verschiebungslinien beginnen oder endigen, weil hier keine wahre Elektrizität ist.

Es muß demnach von den e Verschiebungslinien, welche im Punkte A beginnen, der Teil

$$e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Dielektrikums endigen, der Rest

$$e \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Luftraumes; hier sind etwa leitende Körper anzunehmen, auf denen die Verschiebungslinien endigen. Im Grenzfalle $\varepsilon_2 = \infty$ befindet sich die wahre Ladung $-e$ jenseits des Dielektrikums, während sie in dem zum Vergleiche herangezogenen Falle des Leiters auf der Leiteroberfläche sitzt. Die freie Ladung hingegen verteilt sich in dem hier betrachteten Falle über die Begrenzungsebene des Dielektrikums von unendlicher Dielektrizitätskonstante genau so, wie über die Oberfläche des Leiters, da ja die Feldstärken in beiden Fällen die gleichen sind.

§ 47. Die Polarisation der Dielektrika.

Wir kehren zum allgemeinen Falle beliebiger isotroper Dielektrika zurück. Dieselben mögen teils an die mit wahrer Elektrizität geladenen Leiter unmittelbar angrenzen, teils in den leeren Raum eingebettet sein. Wir wollen jetzt versuchen, das elektrische Feld in zwei Felder zu zerlegen, von denen das erste $\mathfrak{E}_0$ von der an der Oberfläche der Leiter befindlichen wahren Elektrizität herrührt, während das zweite $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ von den dielektrischen Körpern auszugehen scheint. Dabei soll $\mathfrak{E}_0$ aus der Flächendichte ω der wahren Elektrizität nach den Gesetzen berechnet werden, die für das Feld im leeren Raume gelten, also folgendermaßen

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla \varphi_0, \quad \varphi_0 = \int \frac{df\omega}{r}.$$

Zu dem Potentiale φ_0 liefern nur die Flächen Beiträge, in denen die Metalle an den leeren Raum bzw. an Dielektrika angrenzen.

Für das Feld $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ gilt jetzt, nach (138a)

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = -\nabla(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi - \varphi_0 = \int \frac{dv\varrho'}{r} + \int \frac{df(\omega' - \omega)}{r};$$

zu dem Potentiale $\varphi - \varphi_0$ liefern demnach alle mit freier Elektrizität behafteten Volumelemente der Dielektrika Beiträge, sowie die Grenzflächen, welche Dielektrika vom Äther bzw. von den Metallen, oder welche zwei Dielektrika trennen. Dabei gilt an solchen Trennungsflächen, nach (135b und 137a)

$$\omega' - \omega = -\left\{\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{D}_{n1} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_{n2} - \mathfrak{D}_{n2}\right\}.$$

Im Äther ist ferner

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

während im Innern der Metalle ein elektrostatisches Feld überhaupt nicht auftritt. Es bleibt daher an den Flächen, in denen ein Dielektrikum an den leeren Raum oder an ein Metall angrenzt, nur der auf das Dielektrikum bezügliche Summand bestehen

$$\omega' - \omega = -\left\{\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_n - \mathfrak{D}_n\right\},$$

wo n die von dem Innern des Dielektrikums aus nach der Oberfläche hinweisende Normale bezeichnet.

An der Trennungsfläche zweier Dielektrika bleibt der obige allgemeinere Ausdruck für $(\omega' - \omega)$ gültig, der sich aus zwei auf die einzelnen Dielektrika bezüglichen Termen zusammensetzt. Wir wollen jedoch den Übergang eines Dielektrikums in ein anderes als stetig voraussetzen, so daß die Übergangsschicht als inhomogenes, mit freier räumlicher Ladung behaftetes Dielektrikum anzusehen ist. Es gilt hier, wie überhaupt in inhomogenen Isolatoren, nach (137, 137c)

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} - \mathfrak{D}\right).$$

Wir führen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{P}$ ein

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}, \tag{142}$$

den wir „elektrische Polarisation" des Dielektrikums nennen. Dann wird an der Grenzfläche des Dielektrikums, sei es, daß Metall oder daß Äther an dieses angrenzt, wenn n

die vom Dielektrikum aus nach der Grenzfläche weisende Normale bezeichnet

(142a) $$\omega' - \omega = \mathfrak{P}_n,$$

und im Innern des Dielektrikums

(142b) $$\varrho' = -\operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Demgemäß ist das Potential des Feldes $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0)$

$$\varphi - \varphi_0 = -\int \frac{dv}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \int \frac{df}{r} \mathfrak{P}_n.$$

Wendet man auf den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum die aus dem Gaußschen Satze abgeleitete Integraltransformation (73) an, so wird

$$\int \frac{df \mathfrak{P}_n}{r} = \int dv \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{P} \nabla_q \frac{1}{r} \right\}.$$

Dabei bezieht sich die Operation

$$\nabla_q \frac{1}{r}$$

auf Verrückung des Quellpunktes (vgl. § 22). Der Aufpunkt, der irgendwo im Raume liegen kann, wird bei Ausführung der Verrückung festgehalten. Durch Anwendung dieser Umformung erhält man

(142c) $$\varphi - \varphi_0 = \int dv \left(\mathfrak{P} \nabla_q \frac{1}{r} \right)$$

als **Potential des Dielektrikums.**

Die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes geht aus der Formel (81) hervor, die im § 22 für das Potential einer Doppelquelle erhalten wurde. Es war, wenn $\mathfrak{m}$ das Moment einer solchen bezeichnet,

$$\left(\mathfrak{m} \nabla_q \frac{1}{r} \right)$$

das Potential der erzeugten Strömung. Wir können demnach jetzt das wirbelfreie Feld $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0)$ als von Doppelquellen erzeugt ansehen. Dabei ist $\mathfrak{P} dv$ das Moment der im Volumelement dv des Dielektrikums enthaltenen Doppelquellen, mithin $\mathfrak{P}$ das

Moment der Volumeinheit. Wir können etwa das Dielektrikum in zylindrische Volumelemente zerlegen, von dem Querschnitte σ und der Höhe l, deren Grundflächen zu $\mathfrak{P}$ senkrecht sind. Dann ist

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{P}\sigma l$$

das Moment des Volumelementes dv.

Erinnern wir uns nun der Art, wie im § 22 das Moment der Doppelquelle definiert wurde; es wurde ein Quellpunkt und ein Senkpunkt angenommen; die vom Senkpunkt nach dem Quellpunkt weisende Richtung gab die Richtung von $\mathfrak{m}$ an, das Produkt aus der Ergiebigkeit des Quellpunktes und dem Abstand l vom Senkpunkte den Betrag dieses Vektors. Wir haben demnach die Grundflächen aller der zylindrischen Volumelemente mit Ladungen $\pm |P| \sigma$ zu belegen und jedes Volumelement als Doppelquelle des Kraftflusses zu betrachten. Das Feld $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ ist sowohl außerhalb wie auch innerhalb des vom Dielektrikum eingenommenen Raumes identisch mit dem Felde, welches ein solches System von Doppelquellen des Kraftflusses im Äther erzeugen würde. So rechtfertigt sich auch die Bezeichnung des Vektors $\mathfrak{P}$ als elektrische Polarisation des Dielektrikums.

Wir sind bisher analytisch verfahren, indem wir das Dielektrikum zunächst als Ganzes behandelten und dann in Volumelemente zerlegten. Wir können auch synthetisch von dem einzelnen Volumelemente ausgehen; denken wir uns aus einem solchen zylindrischen Elemente, dessen Mantelfläche von Kraftlinien gebildet wird, die Materie entfernt, das Feld aber unverändert gelassen, so werden zwar an der Mantelfläche die Grenzbedingungen erfüllt sein, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ verlangen, aber an den Grundflächen nicht ohne weiteres. Die elektrische Verschiebung durch die Querschnitte des Zylinders, die vor Entfernung der Materie $|\mathfrak{D}|\sigma$ betrug, ist jetzt nur

$$\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|\sigma .$$

Außerhalb des zylindrischen Elementes hingegen besteht dieselbe elektrische Verschiebung wie vorher.

Es beginnen also jetzt auf den Grundflächen des Zylinders Verschiebungslinien in der Zahl

$$\pm\,\sigma\left\{|\mathfrak{D}|-\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|\right\}=\pm\,\sigma\,|\mathfrak{P}|.$$

Das ist nur möglich, wenn daselbst wahre Ladungen mit der Flächendichte $\pm\,|\mathfrak{P}|$ ihren Sitz haben. Die in dem Volumelement enthaltene Materie läßt sich hinsichtlich ihres Einflusses auf das elektrische Feld durch eine solche Doppelbelegung ersetzen. Man kann nun nacheinander die Materie aus den einzelnen Volumelementen des Dielektrikums entfernen und statt ihrer fingierte Flächenbelegungen der Volumelemente mit positiver und negativer Elektrizität einführen. So gelangt man zur Formel (142c) für das Potential des Dielektrikums. Ist das Produkt $\sigma\,|\mathfrak{P}|$ längs einer aus Kraftlinien gebildeten Röhre konstant, so heben sich die positiven und negativen Ladungen benachbarter Volumelemente auf. In einem homogenen Dielektrikum, wo ε konstant ist und daher $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}$ nur um konstante Faktoren verschieden sind, findet dieses statt; hier bleiben nur auf der Begrenzungsebene des Dielektrikums fingierte Ladungen übrig. In einem inhomogenen Dielektrikum hingegen, wo ε von Ort zu Ort wechselt, heben sich die Flächenbelegungen der Volumelemente nicht auf, sie geben Anlaß zu einer räumlichen Divergenz von $\mathfrak{E}$, d. h. zu freier Elektrizität im Innern des Dielektrikums. Dieser Gedankengang, mathematisch präzisiert, würde uns zur Ausgangsformel für $\varphi-\varphi_0$ zurückführen.

Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß die Annahme einer elektrischen Polarisation der Isolatoren ein Kunstgriff ist, mit dessen Hilfe man die Bestimmung des elektrischen Feldes bei Anwesenheit beliebiger Dielektrika zurückführen kann auf die im vorigen Kapitel gelöste Aufgabe, das Feld elektrischer Ladungen im Äther zu ermitteln. Das Feld $\mathfrak{E}$ setzt sich zusammen aus dem von der wahren Elektrizität erzeugten und dem vom polarisierten Dielektrikum herrührenden Felde. Es ist

$$(143) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \int \frac{df\omega}{r} + \int dv \left(\mathfrak{P}\nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

der allgemeine Ausdruck für das resultierende Feld.

Ist das Feld geladener Leiter im leeren Raume bekannt, und handelt es sich darum, den störenden Einfluß eines in das Feld gebrachten Isolators zu ermitteln, so reicht die Formel (143) zur Lösung des Problemes keineswegs aus. Denn selbst, wenn die entstehende Polarisation des Dielektrikums bekannt wäre, so würde doch die Verteilung der wahren Elektrizität auf dem Leiter durch Einführung des Dielektrikums geändert sein und es wäre unzulässig, für die Flächendichte ω der wahren Elektrizität den vor Einführung des Isolators geltenden Wert zu setzen. Das ist nur dann gestattet, wenn das eingeführte Dielektrikum so klein, seine Polarisation so gering oder seine Entfernung von den Oberflächen der Leiter so groß ist, daß seine Rückwirkung auf die Elektrizitätsverteilung daselbst zu vernachlässigen ist. In diesem Falle kann man das Feld $\mathfrak{E}_0$ als gegeben betrachten; es führt dann die Formel (143) die Bestimmung des resultierenden Feldes auf die Aufgabe zurück, die Polarisation des Dielektrikums zu finden. Indessen, in dieser Allgemeinheit ist auch die letztgenannte Aufgabe kaum lösbar. Man wird sie weiter vereinfachen, indem man ein homogenes Feld $\mathfrak{E}_0$ annimmt, weiter das Dielektrikum als homogen, d. h. ε als durchweg konstant betrachtet; endlich wird man sich auf einfache Körperformen beschränken. Wir behandeln im folgenden Paragraphen die einfachste, nämlich die Kugel. Es stellt sich heraus, daß die Polarisation, welche eine dielektrische Kugel im homogenen Felde $\mathfrak{E}_0$ annimmt, ihrerseits homogen, d. h. im ganzen Dielektrikum konstant ist. Wir weisen diese Behauptung als richtig nach, indem wir das Feld der homogen polarisierten Kugel bestimmen und zeigen, daß es sich den Grenzbedingungen der vorgelegten Aufgabe anpassen läßt.

§ 48. Eine homogen polarisierte Kugel.

Wir setzen wieder

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0),$$

nehmen $\mathfrak{E}_0$ in dem betrachteten, von der dielektrischen Kugel eingenommenen Raume als konstant an und erhalten aus (143) das Potential der homogen polarisierten Kugel

$$\varphi - \varphi_0 = \int dv \left(\mathfrak{P} \nabla_q \frac{1}{r}\right) = \mathfrak{P} \int dv \nabla_q \frac{1}{r}.$$

Die Bedeutung des letzteren Ausdruckes ist folgende: Man berechne das Potential einer mit der räumlichen Dichte ϱ geladenen Kugel und einer mit der Dichte $-\varrho$ geladenen, um die Strecke $\frac{1}{\varrho}$ in einer dem Vektor $\mathfrak{P}$ entgegengesetzten Richtung gegen die erste verschobenen und gehe zur Grenze über, indem man ϱ immer größer macht. Der Grenzwert, multipliziert mit dem Betrage von $\mathfrak{P}$, ist das gesuchte Potential der dielektrischen Kugel. Man hat nun solche Punkte zu unterscheiden, die außerhalb und die innerhalb der dielektrischen Kugel liegen. Es sei a der Radius der Kugel, R der Abstand eines Aufpunktes von ihrem Mittelpunkte. Außerhalb der Kugel wirkt jede der beiden mit der Dichte ϱ bzw. $-\varrho$ geladenen Kugeln so, als ob ihre gesamte Ladung $V\varrho$, $-V\varrho$ im Mittelpunkte vereinigt wäre (vgl. § 23). Geht man zur Grenze über, indem man den Abstand $\frac{1}{\varrho}$ kleiner und kleiner macht, so erhält man eine Doppelquelle vom Momente V. Mithin wird

$$(144) \quad \varphi - \varphi_0 = \mathfrak{P} V \nabla_q \frac{1}{R} = -\mathfrak{P} \frac{4\pi a^3}{3} \nabla_a \frac{1}{R} = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{R^3} (\mathfrak{R}\mathfrak{P})$$

für $R \geqq a$, wobei $\mathfrak{R}$ den vom Mittelpunkte der dielektrischen Kugel nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor darstellt.

Für einen innerhalb gelegenen Aufpunkt ist das Potential der beiden positiv bzw. negativ geladenen Kugeln nach Gleichung (83b) des § 23

$$\pm \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right) \varrho.$$

Die beiden Kugeln sind jetzt um $\frac{1}{\varrho}$ gegeneinander verschoben zu denken und es ist zur Grenze verschwindenden Abstandes überzugehen. Man erhält als resultierendes Potential

$$\nabla_q\left\{2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}R^2\right\} = + \nabla_a \frac{2\pi}{3}R^2 = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{R},$$

es wird daher

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P}), \text{ für } R \leqq a. \tag{144a}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß für $R = a$ die Potentiale (144) und (144a) stetig ineinander übergehen. Das von der dielektrischen Kugel erzeugte Feld wird innerhalb derselben

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = - \nabla(\varphi - \varphi_0) = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}, \quad R \leqq a. \tag{144b}$$

Das Feld, das von der homogen polarisierten Kugel erzeugt wird, ist innerhalb der Kugel selbst homogen und der Polarisation entgegengerichtet.

Außerhalb der Kugel mögen die Komponenten des Vektors $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ auf rechtwinklige Koordinaten xyz bezogen werden, wobei die z-Achse in der Richtung von $\mathfrak{P}$ gelegt werde. Es ist nach (144)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi a^3}{3} \left|\mathfrak{P}\right| \frac{z}{R^3} = V \left|\mathfrak{P}\right| \frac{z}{R^3},$$

daher

$$\left.\begin{cases} \mathfrak{E}_x - \mathfrak{E}_{0x} = V\left|\mathfrak{P}\right|\frac{3zx}{R^5}, \quad \mathfrak{E}_y - \mathfrak{E}_{0y} = V\left|\mathfrak{P}\right|\frac{3zy}{R^5} \\ \mathfrak{E}_z - \mathfrak{E}_{0z} = V\left|\mathfrak{P}\right|\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) \end{cases}\right\} R \geqq a. \tag{144c}$$

Wir fragen jetzt, welche Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ vor Einführung der dielektrischen Kugel vorhanden sein mußte, damit die Kugel, in das Feld gebracht, die Polarisation $\mathfrak{P}$ erhält. Es liegt nahe, $\mathfrak{E}_0$ gleichfalls der z-Achse parallel anzunehmen. Wir berechnen die radiale und die zur Kugel tangentielle Komponente der Feldstärke $\mathfrak{E}$; innerhalb der dielektrischen

Kugel ist nach (144b)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= |\mathfrak{E}_0| \cos\vartheta - \frac{4\pi}{3} |\mathfrak{P}| \cos\vartheta \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= |\mathfrak{E}_0| \sin\vartheta - \frac{4\pi}{3} |\mathfrak{P}| \sin\vartheta\end{aligned}\right\} R \leqq a.$$

Dabei gibt ϑ den Winkel an, den der Radiusvektor mit der z-Achse einschließt und $\mathfrak{E}_\vartheta$ die tangentielle Komponente von $\mathfrak{E}$, die längs der Meridiane der Kugeln weist.

Außerhalb der Kugel hingegen ist nach (144c)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= |\mathfrak{E}_0| \cos\vartheta + \frac{4\pi a^3}{3} |\mathfrak{P}| \frac{2\cos\vartheta}{R^3} \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= |\mathfrak{E}_0| \sin\vartheta - \frac{4\pi a^3}{3} |\mathfrak{P}| \frac{\sin\vartheta}{R^3}\end{aligned}\right\} R \geqq a.$$

Nun verlangen die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche des Dielektrikums gelten: erstens sollen die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ innerhalb und außerhalb der Kugel die gleichen Werte besitzen; da $\mathfrak{E}_0$ innerhalb und außerhalb derselbe Vektor ist, so ist diese Bedingung bereits erfüllt. Zweitens sollen die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung innerhalb und außerhalb die gleichen Werte besitzen. Im Äther ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

im Dielektrikum

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}.$$

Mithin verlangt die zweite Grenzbedingung

$$\varepsilon\left\{ |\mathfrak{E}_0| - \frac{4\pi}{3} |\mathfrak{P}| \right\} = |\mathfrak{E}_0| + \frac{8\pi}{3} |\mathfrak{P}|,$$

oder

$$\frac{4\pi}{3} |\mathfrak{P}| (\varepsilon + 2) = |\mathfrak{E}_0| (\varepsilon - 1),$$

und da die Richtungen der beiden Vektoren $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{P}$ übereinstimmend gewählt waren

$$\mathfrak{P} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0. \tag{145}$$

Die so bestimmte äußere Feldstärke genügt allen Bedingungen des Problems. Umgekehrt, wenn die dielektrische Kugel in ein homogenes Feld $\mathfrak{E}_0$ gebracht wird, so entsteht eine Polarisation, die homogen und $\mathfrak{E}_0$ parallel ist und die genauer durch (145) bestimmt wird. Was die resultierende Feldstärke im Innern der Kugel anbelangt, so beträgt dieselbe nach (144b)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\mathfrak{E}_0; \tag{145a}$$

die elektrische Verschiebung endlich ist nach (142)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2}\mathfrak{E}_0. \tag{145b}$$

Das Feld außerhalb der Kugel entsteht durch Superposition des ursprünglichen Feldes $\mathfrak{E}_0$ und des Feldes, das von einer im Mittelpunkte der Kugel befindlichen Doppelquelle des Kraftflusses vom Momente (vgl. 144)

$$\mathfrak{P}\,V = \mathfrak{P}\,\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}a^3\,\mathfrak{E}_0 \tag{145c}$$

erzeugt wird.

Es ist von Interesse, den Grenzfall $\varepsilon = \infty$ zu betrachten. Hier wird innerhalb der Kugel $\mathfrak{E}$ gleich Null, das Potential demnach konstant; das war die Bedingung, die für die leitende Kugel galt, es ist also das dieser Grenzbedingung entsprechende äußere Feld identisch mit dem Felde einer leitenden Kugel von der Gesamtladung Null. Die störende Wirkung einer solchen leitenden Kugel läßt sich demnach darstellen durch eine Doppelquelle vom Momente $a^3\mathfrak{E}_0$ im Mittelpunkte der Kugel.

Alle diese Folgerungen setzen, wie schon bemerkt wurde, voraus, daß die in das Feld $\mathfrak{E}$ gebrachte Kugel, sei sie nun leitend oder dielektrisch, die ursprüngliche Verteilung wahrer Elektrizität, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ im Äther erzeugte, nicht wesentlich ändert.

Drittes Kapitel.

Die Energie und die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes.

§ 49. Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie.

Als ein Merkmal des elektrostatischen Feldes wurde im § 37 das Fehlen einer das Bestehen des Feldes begleitenden Wärmeentwickelung angesehen. Würde eine solche stattfinden, so wäre zur Erhaltung des Feldes eine dauernde Energiezufuhr erforderlich. Das ist nicht der Fall. Wohl aber ist eine einmalige Arbeitsleistung notwendig, um das Feld zu erregen, eine Arbeitsleistung, die nach dem Energieprinzip von dem Wege, auf dem die Herstellung des Feldes geschah, unabhängig ist. Diese Arbeitsleistung ist das Maß der Energie des elektrostatischen Feldes, bezogen auf den unelektrischen Zustand als Normalzustand. Beim Erlöschen des Feldes geht die elektrische Energie wiederum in andere Energieformen über.

Die Fernwirkungstheorie der Elektrizität sah den elektrischen Zustand als einen eigentümlichen Zustand der Körper an und als wesentlichste Zustandsgröße die elektrische Ladung der Körper; dementsprechend ging sie von einer Definition der elektrischen Energie aus, welche diese von den Ladungen und Potentialen der Körper abhängig macht. Die Nahewirkungstheorie hingegen sieht das ganze Feld als Träger des elektrischen Zustandes an und als wesentlichste Zustandsgrößen die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, die elektrische Feldstärke und die elektrische Verschiebung. Demgemäß verteilt sie die elektrische Energie über die Volumelemente des Feldes; jedes Volumelement liefert einen Beitrag zu der Feldenergie, der nur von seinem elektrischen Zustande abhängt. Der auf die Volumeinheit entfallende Anteil an der Feldenergie soll nun gleich dem halben skalaren

Produkte der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$$

sein.

Man kann diesen zunächst willkürlich scheinenden Ansatz durch ein mechanisches Bild erläutern. Man denke sich ein den Raum erfüllendes Agens, die Verschiebung der in der Volumeinheit enthaltenen Menge desselben sei durch $\mathfrak{D}$ gegeben, so daß der Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung hier wirklich durch eine Verschiebung dargestellt wird. Es soll ferner das Agens durch quasielastische Kräfte an seine Gleichgewichtslage gebunden sein. $\mathfrak{E}$ soll die äußere Kraft sein, welche die Teile des Agens aus der Gleichgewichtslage zu entfernen strebt; die Verschiebung wird dann der äußeren Kraft proportional sein, entsprechend der Gleichung (136):

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}.$$

Die Dielektrizitätskonstante ε ist, falls das Agens den ganzen Raum mit gleicher Dichte erfüllt, der quasielastischen Kraft umgekehrt proportional zu setzen. Die pro Volumeinheit von der äußeren Kraft $\mathfrak{E}$ bei der ihr proportionalen Verschiebung $\mathfrak{D}$ geleistete Arbeit wird alsdann

$$\int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2.$$

Diese Vorstellung kann natürlich nicht zur Rechtfertigung, sondern nur zur Veranschaulichung des von der Nahewirkungstheorie zugrunde gelegten Energieausdruckes dienen. Seine Rechtfertigung findet der Ansatz dadurch, daß die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes, die aus ihm abgeleitet werden, der Erfahrung entsprechen. Bevor wir dieses nachweisen, wollen wir indessen zeigen, daß für die gesamte Energie des elektrostatischen Feldes aus der Nahewirkungstheorie sich der gleiche Wert ergibt wie aus der Fernwirkungstheorie.

Die gesamte elektrische Feldenergie beträgt

$$U = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}). \tag{146}$$

Dabei ist nach (138) der Vektor $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, $-\mathfrak{E}$ ist der Gradient des Potentiales φ. Der Ausdruck

$$U = -\frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}, \nabla\varphi)$$

wird nun mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Formel (73) umgeformt in

$$U = \frac{1}{2}\int dv\varphi \operatorname{div} \mathfrak{D} - \frac{1}{2}\int df\varphi\mathfrak{D}_n;$$

n bezeichnet dabei die äußere Normale der Begrenzungsfläche f des betrachteten Raumes. Der Raum, über den das Integral zu erstrecken ist, ist hier der leere und der von Isolatoren erfüllte Raum; denn innerhalb der metallischen Leiter ist kein Feld und daher auch keine Feldenergie vorhanden. Auf das ganze Feld dürfen wir die Formel (73) allerdings nur dann anwenden, wenn keine Diskontinuitätsflächen das Feld durchsetzen. Wir haben uns bei der Anwendung jener Formel den Übergang aus einem Isolator in den anderen als kontinuierlich zu denken, so daß nur räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$, nicht Flächendivergenz in Rechnung zu ziehen ist; übrigens würden auch Diskontinuitätsflächen sich leicht berücksichtigen lassen durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, die im § 30 zur Formel (108a) für die Energie des wirbelfreien Strömungsfeldes führten. Wir brauchen hierauf um so weniger einzugehen, als nach (137c, d) sowohl die räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$ im Innern der Dielektrika, als auch an der Grenzfläche zweier Dielektrika die Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$ verschwindet. Wahre Ladung tritt nur an der Oberfläche der Leiter auf. Ihre Flächendichte ω wird nach (137b) durch die nach dem Innern des Isolators hinweisende Komponente von $\mathfrak{D}$ angegeben. Da auch die unendlich entfernte Begrenzungsfläche f keinen Beitrag liefert, so wird die Energie U gegeben durch das über die Oberflächen der Leiter erstreckte Integral

$$U = \frac{1}{2}\int df\varphi\omega. \tag{146a}$$

Ebenso wie wir die Energie eines wirbelfreien Strömungsfeldes, die zunächst über das ganze Feld verteilt war, durch Integrale über das Quellengebiet ausdrücken konnten (84 bzw. 108a), so können wir die elektrostatische Energie, die nach der Maxwellschen Theorie über die Volumelemente des Feldes verteilt ist, auf eine Form bringen, in der sie über die wahren Ladungen verteilt erscheint; diese Verteilung der Energie über die wahren Ladungen ist die von der Fernwirkungstheorie angenommene. Das Potential φ ist dabei natürlich das Potential der freien elektrischen Ladungen (vgl. Formel 138a).

Ist das Feld von einem homogenen isotropen Dielektrikum erfüllt, so treten auch die freien Ladungen nur an der Oberfläche der Leiter auf und zwar mit der Dichte

$$\omega' = \frac{\omega}{\varepsilon}.$$

Dann wird

$$\varphi = \int \frac{df\omega'}{r} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{df\omega}{r},$$

daher

$$U = \frac{1}{2}\int df_1\,\omega_1 \int \frac{df_2\,\omega_2}{r_{12}}.$$

Dabei kommt jedes Flächenelement der Leiteroberflächen zweimal vor, einmal als Träger der freien Elektrizität, die zu dem Potential einen Beitrag liefert, das andere Mal als Träger der wahren Elektrizität. Rechnet man jedes Flächenelement nur einmal, so fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort und es wird

$$\left\{\begin{aligned} U &= \iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1\,\omega_2'}{r_{12}} = \\ \frac{1}{\varepsilon}&\iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1\,\omega_2}{r_{12}} = \varepsilon \iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1'\,\omega_2'}{r_{12}}. \end{aligned}\right. \tag{146b}$$

Hat man ein System wahrer Ladungen zuerst im leeren

Raume und füllt dann den Raum mit einem Dielektrikum, so wird, bei konstant gehaltenen wahren Ladungen, die elektrostatische Energie im Verhältnis $1:\varepsilon$ verkleinert, sie wird im Verhältnis $\varepsilon:1$ vermehrt bei konstant gehaltenen freien Ladungen. In dem gleichen Verhältnis werden die aus der Energie abgeleiteten ponderomotorischen Kräfte geschwächt bzw. verstärkt.

Da auf den Leitern das Potential φ konstante Werte $\varphi_1 \cdots \varphi_i \cdots \varphi_h$ annimmt, so kann man den allgemeinen Ausdruck (146a) der elektrostatischen Energie auch folgendermaßen schreiben:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{h} \varphi_i e_i . \tag{146c}$$

Bei der Anordnung des Kondensators, wo zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm e$ vorhanden sind, wird (vgl. § 39)

$$U = \frac{1}{2} e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2K} = \frac{K(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} . \tag{146d}$$

Die Energie ist bei konstant gehaltener wahrer Ladung des Kondensators der reziproken Kapazität, bei konstant gehaltener Potentialdifferenz der Belegungen der Kapazität selbst proportional.

Da Fernwirkungstheorie und Nahewirkungstheorie für elektrostatische Felder zu demselben Werte der Gesamtenergie gelangen, so müssen sie auch stets dieselben Werte für die ponderomotorischen Kräfte ergeben. Denn diese Kräfte ergeben sich aus der Energie auf Grund mechanischer Prinzipien, wie wir sehen werden. Durch Beobachtungen über die Kräfte des elektrostatischen Feldes kann daher durchaus nicht zwischen den beiden Theorien weder zugunsten noch zuungunsten der Maxwellschen Theorie entschieden werden. Der Vorzug der Maxwellschen Theorie liegt nicht auf dem Gebiete der statischen, sondern auf dem der rasch wechselnden Felder; dort, wo das elektrische Feld aufhört, wirbelfrei zu sein, wo demnach ein skalares Potential nicht mehr existiert, wird der Ansatz, den die Fernwirkungstheorie für die Energie macht, hinfällig. Der

Ansatz der Nahewirkungstheorie bleibt bestehen und dient zur Erklärung der Strahlungsvorgänge.

§ 50. Der Thomsonsche Satz.

Wir wollen in diesem Paragraphen von dem Grundproblem der Elektrostatik handeln. Gegeben sind eine Anzahl von Leitern und die wahren Ladungen $e_1 \dots e_n$, mithin die über die Leiteroberflächen $f_1 \dots f_h$ erstreckten Integrale

$$(\alpha) \qquad \int \mathfrak{D}_n df_1 = e_1, \quad \int \mathfrak{D}_n df_2 = e_2 \dots, \quad \int \mathfrak{D}_n df_h = e_h,$$

wo die Normale nach dem Isolator hinweist. Im Felde mögen sich beliebige Dielektrika befinden; im Innern derselben soll keine wahre Elektrizität angenommen werden; hier soll also

$$(\beta) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$$

sein.

Ebensowenig soll wahre Elektrizität an der Trennungsfläche zweier Dielektrika vorhanden sein; hier soll mithin

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2} = 0$$

gelten.

Auch soll die Beziehung zwischen elektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ und elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$

$$(\delta) \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}$$

gelten, wo ε die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Isolators ist. Die vier Bedingungen (α) bis (δ) wollen wir die „allgemeinen Bedingungen“ nennen. Sie gelten, wie wir in späteren Abschnitten sehen werden, für ein ganz beliebiges elektrisches Feld. Für das elektrostatische Feld kommen noch die „besonderen Bedingungen“ hinzu:

Es soll $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, also der negative Gradient eines überall stetigen Potentiales sein

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla \varphi.$$

Dieses Potential soll auf den Oberflächen der Leiter konstant sein. Es soll

$$(\zeta) \qquad \varphi = \varphi_1 \text{ auf } f_1, \quad \varphi = \varphi_2 \text{ auf } f_2, \ldots \varphi = \varphi_h \text{ auf } f_h$$

sein.

Wir denken uns neben diesem elektrostatischen Felde noch ein anderes Feld, dessen Feldstärke $\mathfrak{E}'$ und elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}'$ sein mag. Die Vektoren $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}'$ sollen zwar den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ), aber nicht den besonderen Bedingungen (ε), (ζ) Genüge leisten. Dann behauptet der Thomsonsche Satz: das neue Feld $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, besitzt eine größere elektrische Energie als das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$.

Es soll, das behauptet der Thomsonsche Satz, sein:

$$(147) \qquad \frac{1}{2}\int(\mathfrak{D}'\mathfrak{E}')dv > \frac{1}{2}\int(\mathfrak{D}\mathfrak{E})dv.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = \mathfrak{E}'', \quad \mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = \mathfrak{D}''.$$

Das neue Feld $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{D}''$ hat jetzt folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$(\alpha'') \qquad \int \mathfrak{D}_n'' df_1 = 0, \ldots \int \mathfrak{D}_n'' df_h = 0$$

an den Leiteroberflächen,

$$(\beta'') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D}'' = 0$$

im Innern eines jeden Dielektrikums, und

$$(\gamma'') \qquad \mathfrak{D}_{n1}'' + \mathfrak{D}_{n2}'' = 0$$

an der Grenze zweier Dielektrika.

Endlich ist allgemein

$$(\delta'') \qquad \mathfrak{D}'' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}''.$$

Wir setzen jetzt U, U', U'' für die Energien der drei Felder und erhalten

$$U' = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}'\mathfrak{E}') = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'', \mathfrak{E} + \mathfrak{E}'')$$
$$= U + U'' + \frac{1}{2}\int dv\{(\mathfrak{D}''\mathfrak{E}) + (\mathfrak{D}\mathfrak{E}'')\},$$

oder nach (δ), (δ'')

$$U' = U + U'' + \int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'').$$

Nach (ε) ist

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = -\int dv(\mathfrak{D}'',\ \nabla\varphi),$$

und nach der Formel (73)

$$-\int dv(\mathfrak{D}''\nabla\varphi) = \int dv\varphi \operatorname{div}\mathfrak{D}'' - \int df\varphi\mathfrak{D}_n'';$$

diese Formel ist allerdings nur auf die Gebiete anzuwenden, wo φ, $\mathfrak{D}$ sich stetig ändern; wir haben daher die Unstetigkeitsflächen, die zwei Isolatoren trennen, zu der Begrenzung des Feldes zu rechnen. Jedes Flächenelement einer solchen kommt zweimal vor, sein Beitrag verschwindet nach (γ'') ebenso, wie das Volumintegral auf der rechten Seite der letzten Gleichung infolge von (β'') verschwindet. Es bleibt nur das über die Leiteroberflächen erstreckte Integral

$$-\int df\varphi\mathfrak{D}_n'',$$

in welchem wir das Vorzeichen umkehren müssen, um in Übereinstimmung mit der in (α, α'') angewandten Bezeichnung n nach dem Innern des Isolators rechnen zu dürfen. Es wird somit

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{h}\int df_i\varphi\mathfrak{D}_n''.$$

Die Summe ist über die Oberflächen der h Leiter zu erstrecken. Da hier nach (ζ) φ konstant ist, so folgt aus (α''):

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{h}\varphi_i\int df_i\mathfrak{D}_n'' = 0.$$

Daher wird schließlich

$$U' = U + U'',$$

wo

$$U'' = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}''\mathfrak{E}'') = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{E}''^2$$

stets positiv ist, es sei denn, daß

$$\mathfrak{E}'' = 0$$

wäre, in welchem Falle

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D},$$

mithin das mit dem elektrostatischen zu vergleichende Feld mit diesem identisch sein würde. Jedes von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ verschiedene elektrische Feld aber, welches den allgemeinen Grundgleichungen (α) bis (δ) Genüge leistet, ohne ein elektrostatisches Feld zu sein, besitzt eine größere Energie als das elektrostatische. Oder anders ausgedrückt: unter allen elektrischen Feldern, welche den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ) Genüge leisten, besitzt das elektrostatische, das außerdem noch (ε) und (ζ) befriedigt, die kleinste Energie.

Der Thomsonsche Satz leitet also das Feld, welches der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität entspricht, aus einem Minimalprinzip ab. Dieses Minimalprinzip entspricht ganz der Gleichgewichtsbedingung, die für schwere Körper im Schwerkraftfelde im § 11 abgeleitet wurde; diese Körper befinden sich im Gleichgewicht und zwar im stabilen Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie der Schwerkraft in der betreffenden Konfiguration ein Minimum ist. Ebenso sehen wir hier, daß das Gleichgewicht der Elektrizität, die sich auf der Oberfläche festgehaltener Leiter befindet, durch ein Minimum der elektrischen Energie gekennzeichnet ist. Die elektrische Energie spielt demnach hier dieselbe Rolle, wie die potentielle Energie in der gewöhnlichen Mechanik.

Noch in anderer Hinsicht sind die obigen Entwickelungen bedeutungsvoll. Sie zeigen, daß es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems geben kann. Die Ungleichung (147) besagte nämlich, daß für jedes vom elektrostatischen verschiedene Feld $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, welches den Bedingungen (α) bis (δ) genügt, die Energie $U' > U$ ist. Ist nun $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$ selbst ein elektrostatisches Feld, so muß außerdem $U > U'$ gelten, was unmöglich ist. Folglich kann es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems geben; durch die Bedingungen (α) bis (ζ) ist das elektrostatische Feld eindeutig bestimmt.

Wir haben in früheren Abschnitten Lösungen des elektrostatischen Problems für spezielle Fälle gefunden, z. B. für den Kugelkondensator, für das gestreckte Rotationsellipsoid, für eine dielektrische Kugel im homogenen Felde. Wir stellten damals jedesmal eine partikuläre Lösung auf, ohne uns darum zu kümmern, ob diese die einzige mögliche ist. Jetzt sehen wir nachträglich, daß es in der Tat nur eine einzige Lösung geben kann.

§ 51. Das Gesetz von Coulomb.

Das Coulombsche Gesetz, welches die experimentelle Grundlage der Fernwirkungstheorie bildet, haben wir für zwei Punktladungen im leeren Raume bereits in § 37 als gültig nachgewiesen. Dabei haben wir aber für die ponderomotorische Kraft den Ausdruck (124) ohne weiteres als gültig angenommen. Jetzt, wo wir über den Ausdruck der elektrischen Feldenergie verfügen, wollen wir die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes aus der Energie ableiten; dabei wird sich dann ein anderer Beweis für das Coulombsche Gesetz ergeben. Hierzu ist außer den im vorigen Paragraphen zusammengestellten Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und dem Ansatze (146) für die Feldenergie noch eine dritte, zunächst hypothetische Annahme nötig, die den Zusammenhang zwischen Energie und ponderomotorischen Kräften betrifft.

Wir sahen (§ 49), daß die Feldenergie U nach dem Energieprinzip der Arbeit gleich ist, welche bei der Herstellung des Feldes geleistet wurde. Wir nehmen nun an, daß die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei einer Verrückung der Leiter oder Dielektrika leisten, gleich der Abnahme der Feldenergie ist; es sollen also andere Energieumwandlungen außer der zwischen der elektrostatischen Feldenergie und der geleisteten mechanischen Arbeit bei dem ganzen Vorgange nicht im Spiele sein. Dabei ist natürlich ein abgeschlossenes System elektrischer Ladungen vorausgesetzt und es ist angenommen, daß die Lagenänderung der Körper langsam genug erfolgt, um das Feld in jedem Momente als elektrostatisches ansehen zu können. Alsdann soll die elektrische Feldenergie die Rolle der potentiellen Energie spielen, nicht nur insofern, als nach dem Thomsonschen Satze die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität durch ein Minimum der elektrischen Feldenergie bei festgehaltenen Körpern charakterisiert war, sondern auch bezüglich der durch Lagenänderung der Körper aus dem Felde zu gewinnenden Arbeit.

Nehmen wir nun eine Lagenänderung der im Felde befindlichen Leiter oder Dielektrika vor, so entspricht der veränderten Lage auch eine veränderte Gleichgewichtsverteilung der auf den Leiteroberflächen angesammelten wahren Elektrizität. Wir wollen den Übergang von dem ersten elektrostatischen Felde zu dem zweiten, der veränderten Lage der Körper entsprechenden, in zwei Schritte zerlegen. Der erste Schritt soll, bei konstant gehaltener Lage der Körper, die Verteilung der wahren Elektrizität so abändern, wie es der beabsichtigten Lagenänderung der Körper entspricht, der zweite Schritt soll die Körper, ohne die Elektrizitätsverteilung zu ändern, in die neue Lage überführen. Die gesamte Änderung der Feldenergie setzt sich demgemäß aus zwei Änderungen $\delta_1 U$, $\delta_2 U$ zusammen. $\delta_1 U$ stellt die Variation der Energie bei festgehaltener Lage und Gesamtladung der Körper vor, die infolge der Abänderung der Elektrizitätsverteilung eintritt, $\delta_2 U$ die Variation der Energie infolge der Lagenänderung der Körper bei festgehaltener Elektrizitätsverteilung; auf die Reihenfolge der Variationen kommt es nicht an, da diese unendlich klein sind. Nun besagte aber der im vorigen Paragraphen bewiesene Thomsonsche Satz, daß die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität bei gegebener Gesamtladung und Lage der Körper einem Minimum von U entspricht Es ist folglich

$$\delta_1 U = 0$$

und die Arbeit, welche die Kräfte des elektrostatischen Feldes bei einer unendlich kleinen Lagenänderung leisten, ist

$$\delta A = -\delta U = -\delta_2 U. \tag{148}$$

Die virtuelle Arbeit ist also gleich der Abnahme der elektrostatischen Feldenergie bei einer virtuellen Verrückung der Körper; dabei soll die wahre Elektrizität als fest an den Flächenelementen der Leiteroberflächen haftend angenommen werden.

Um nun aus diesem allgemeinen Prinzip zu dem Coulombschen Gesetze zu gelangen, denken wir uns zwei kleine Leiter, etwa mit Goldblatt überzogene Holundermarkkügelchen, im leeren Raume befindlich, oder in ein homogenes flüssiges Dielektrikum eingebettet. Es seien e_1, e_2 die wahren Ladungen der Kügelchen, ihre Abmessungen seien klein gegen den Abstand R ihrer Mittelpunkte. Wir bedienen uns des Ausdruckes (146c) für die elektrostatische Energie, der in diesem Falle ergibt

$$U = \frac{1}{2} e_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} e_2 \varphi_2 .$$

Dabei sind φ_1, φ_2 die Potentiale der freien Ladungen, die an den Oberflächen der beiden Kügelchen sitzen,

$$\varphi_1 = \int \frac{df_1\, \omega_1'}{r_{11}} + \int \frac{df_2\, \omega_2'}{r_{12}}, \quad \varphi_2 = \int \frac{df_2\, \omega_2'}{r_{22}} + \int \frac{df_1\, \omega_1'}{r_{12}}.$$

Die bei einer Vergrößerung des Abstandes R von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit ist nun nach (148)

$$\delta A = -\delta_2 U = -\frac{1}{2} e_1 \delta \varphi_1 - \frac{1}{2} e_2 \delta \varphi_2 .$$

Bei der virtuellen Verrückung ist die Dichte ω der wahren Elektrizität auf den Kugeln konstant zu halten. Da nun der Isolator als homogen, d. h. seine Dielektrizitätskonstante als durchweg konstant angenommen werden soll, so sind auch die Dichten der freien Elektrizität

$$\omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_1, \quad \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_2$$

bei der Verrückung konstant zu halten. Es sind also die Variationen der ersten Glieder in φ_1, φ_2 gleich Null zu setzen und es bleiben nur die Variationen der zweiten, von den Wechselwirkungen der beiden Kügelchen herrührenden Glieder übrig.

Hier ist nun für r_{12} mit genügender Annäherung der Abstand R der Kugelmittelpunkte zu setzen. Sind ferner

$$e_1' = \int df_1 \omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} e_1, \quad e_2' = \int df_2 \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} e_2$$

die freien Ladungen der Kügelchen, so wird

$$-\delta \varphi_1 = \frac{e_2'}{R^2} \delta R, \quad -\delta \varphi_2 = \frac{e_1'}{R^2} \delta R,$$

mithin ist

$$\delta A = \left(\frac{e_1 e_2' + e_2 e_1'}{2 R^2}\right) \delta R$$

die virtuelle Arbeit.

Die Kraft, mit der die Kügelchen sich abstoßen, beträgt daher

$$\mathfrak{K}_R = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2} = \frac{\varepsilon e_1' e_2'}{R^2}, \tag{148a}$$

wie es das Coulombsche Gesetz verlangt.

Bei dieser Ableitung aus den Hypothesen der Nahewirkungstheorie wird die Dielektrizitätskonstante des Mediums in ungezwungenerer Weise eingeführt als in der Fernwirkungstheorie. Führt man die Kügelchen, die sich zuerst in Luft gegenüberstanden, in Petroleum über, ohne daß sie mit einem Leiter in Berührung kommen, so bleiben ihre wahren Ladungen konstant, die abstoßende Kraft verkleinert sich im Verhältnis $\frac{1}{\varepsilon}$. Hingegen wächst die Kraft im Verhältnis $\varepsilon:1$, wenn wir die Kügelchen auf dasselbe Potential bringen, das sie vorher in Luft besaßen, etwa durch Berührung mit den Polen eines galvanischen Elementes.

Als ein weiterer Vorzug dieser Ableitung ist es anzusehen, daß die Umstände, unter denen das Coulombsche Gesetz gilt, deutlich zutage treten. Das Coulombsche Gesetz gilt z. B. nicht mehr für die beiden Kügelchen, wenn außer ihnen sich im leeren Raume irgendwo ein begrenzter dielektrischer Körper befindet. Dann ruft nämlich das von den Kügelchen erregte

Feld auf der Oberfläche des Dielektrikums freie Ladungen hervor, welche auf die Kügelchen zurückwirken, falls die Entfernung nicht zu groß ist. Ebenso hört das Coulombsche Gesetz auf, genau gültig zu sein, wenn das den Raum erfüllende Dielektrikum nicht homogen ist, d. h. wenn ε mit dem Orte variiert; dann ist es bei der obigen Betrachtung nicht mehr gestattet, die freien Ladungen der Kügelchen, als den wahren proportional, bei der Verrückung konstant zu halten. Glücklicherweise weicht für die Gase, deren Dielektrizitätskonstante wegen ihrer Kompressibilität vom Drucke abhängt, überhaupt der Wert von ε so wenig von 1 ab, daß die Kräfte, die aus der Inhomogenität der als Isolatoren dienenden Gase resultieren, außerordentlich klein und meist ganz zu vernachlässigen sind.

Wir wollen das allgemeine, zur Berechnung der ponderomotorischen Kräfte dienende Prinzip verwenden, um den Ansatz zu rechtfertigen, welchen wir früher für die Kraft auf einen in das Feld gebrachten Probekörper gemacht haben; würde doch das ganze System der Nahewirkungstheorie eine Lücke aufweisen, wenn die Wirkung des Feldes, durch die zuerst der Vektor $\mathfrak{E}$ definiert wurde, sich nicht jetzt auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit als Folgerung der Theorie ergäbe. Wir bringen also jetzt ein einziges, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen in das homogene Dielektrikum in einigem Abstande von den Leitern und geben ihm eine Ladung, die so gering ist, daß sie die Verteilung der freien Elektrizität an den Leiteroberflächen nicht merklich beeinflußt. Durch Hereinbringen des Probekügelchens hat nun nach (146b) das Feld einen Energiezuwachs erfahren

$$U_{12} = \int\int \frac{df_1\, df_2\, \omega_1\, \omega_2'}{r_{12}};$$

hier bezeichnet ω_1 die Dichte der wahren Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens, ω_2' die Dichte der freien Elektrizität, die sowohl an der Oberfläche des Kügelchens wie auch auf den Leitern sitzen kann. Bei der virtuellen Verrückung $\delta\mathfrak{s}$ des Kügelchens ist nun die Dichte der wahren Elektrizität konstant zu halten, unserem Prinzip gemäß. Mithin ist die Dichte der freien Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens konstant zu halten, weil es sich in einem homogenen Dielektrikum befindet. Es fällt daher in δU_{12} alles fort, was sich auf Wechselwirkungen der freien und wahren Ladungen des Kügelchens selbst bezieht.

Es war nun angenommen, daß das Hereinbringen des Probekörpers in das Feld die ursprüngliche Verteilung der freien Elektrizität nicht merklich ändert. Es darf demnach der Probekörper nicht zu nahe an die Leiteroberflächen heranrücken.

Ist diese Bedingung erfüllt und sind ferner die Abmessungen des Probekörpers hinreichend klein, so kann für r_{12} der Abstand des Mittelpunktes des Kügelchens von dem betreffenden Flächenelemente df_2 gesetzt und das äußere Feld als über die Ausdehnung des Kügelchens hin homogen betrachtet werden. Alsdann wird die Arbeit bei der virtuellen Verrückung des Kügelchens:

$$\delta A = -\delta_2 U_{12} = -\int df_1 \omega_1 \cdot \delta \int \frac{d f_2 \omega_2'}{r_{12}} = -e_1 \delta \varphi,$$

wo e_1 die wahre Ladung des Kügelchens, φ das Potential ist, welches in dem betreffenden Punkte des Feldes vor dem Hereinbringen des Kügelchens vorhanden war. Die Kraft $\mathfrak{K}$, die auf das Kügelchen wirkt, folgt aus

$$(\mathfrak{K}\delta\mathfrak{s}) = \delta A = -e_1 \delta \varphi = -e_1(\nabla\varphi, \delta\mathfrak{s}).$$

Sie beträgt

$$\mathfrak{K} = -e_1 \nabla\varphi = e_1 \cdot \mathfrak{E},$$

was mit (124) vollkommen übereinstimmt.

Ist das Kügelchen nicht klein genug, so kommt die Inhomogenität des Feldes in Betracht; sie modifiziert die Kraft, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden.

§ 52. Eine dielektrische oder leitende Kugel im inhomogenen Felde.

Im allgemeinen kann man sagen, daß auf jeden im elektrischen Felde befindlichen Körper eine ponderomotorische

Kraft wirkt, sei er nun mit wahrer Ladung behaftet oder nicht. Hat man es etwa mit dem Felde $\mathfrak{E}_0$ geladener Leiter im leeren Raume zu tun, in welches ein Isolator, etwa eine dielektrische Kugel gebracht wird, so wird eine solche Kugel von Kräften angegriffen, wenigstens dann, wenn das Feld nicht streng homogen ist. Um dieses zu zeigen, berechnen wir den Energiezuwachs $U - U_0$, den das Hereinbringen eines dielektrischen Körpers in das Feld zur Folge hat, wobei wir, ganz wie im § 48, voraussetzen, daß der dielektrische Körper keinen merklichen Einfluß auf die Verteilung wahrer Elektrizität ausübt, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ erzeugte. In diesem Falle ist die Energie U_0 des ursprünglichen Feldes von der Lage der Kugel unabhängig und es kann die bei einer virtuellen Verrückung des Isolators geleistete Arbeit aus der Abnahme von

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}\int dv\,(\mathfrak{E}_0\mathfrak{D}_0)$$

berechnet werden. Dieser letztere Ausdruck gestattet nun eine allgemeine, für beliebige dielektrische Körper gültige Umformung in ein Integral über den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum. Wir schreiben zunächst

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv\{(\mathfrak{E}, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0, \mathfrak{D}_0)\}.$$

Was nun die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ anbelangt, so rührt sie von dem dielektrischen Körper her. Da dieser aber weder im Innern, noch an seiner Oberfläche wahre Ladungen trägt, und da die wahren Ladungen, welche die Felder $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_0$ erzeugen, die gleichen sind, so ist $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ im ganzen Raume quellenfrei. Der Vektor $\mathfrak{E}$ anderseits ist wirbelfrei.

Nun hatten wir in der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 30) den Satz bewiesen: „Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.“ Demnach verschwindet das Volumintegral des inneren Produktes

$$(\mathfrak{E}, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)$$

und es wird

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv\,(\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Wir bezeichnen nun mit v' den leeren, mit v'' den vom Dielektrikum eingenommenen Teil des Raumes. In v' ist

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0),$$

daher ist

$$\frac{1}{2}\int dv'\,(\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) = \frac{1}{2}\int dv'(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Da ferner $\mathfrak{E}_0$ wirbelfrei ist, so ist auch das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes von $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ gleich Null, daher gilt

$$\frac{1}{2}\int dv'\,(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = -\frac{1}{2}\int dv''\,(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Mithin wird für $U - U_0$ das über v'' zu erstreckende Integral erhalten

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv''\{(\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) - (\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)\}.$$

Hier ist weiter zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{D}_0$ sich auf das Feld beziehen, welches vor dem Hereinbringen des Dielektrikums bestand, d. h. auf ein Feld im Äther; folglich ist

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_0$$

und

$$(\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Setzen wir ferner nach (142)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

so wird

$$(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{P}) + \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Das schließliche Resultat ist

$$U - U_0 = -\frac{1}{2}\int dv''\,(\mathfrak{E}_0\mathfrak{P}). \tag{149}$$

Die Funktion, deren Abnahme die bei einer Verrückung des Dielektrikums von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit angibt, ist gleich einem über das Dielektrikum erstreckten Integrale; der Integrand ist, bis auf den Faktor $(-\frac{1}{2})$ gleich dem inneren Produkte aus der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$, die vor dem Hereinbringen des Dielektrikums bestand, und der Polarisation $\mathfrak{P}$ des Dielektrikums.

Wir wenden das Resultat auf eine dielektrische Kugel an, deren im Felde $\mathfrak{E}_0$ angenommene Polarisation durch (145) bestimmt war. Es wird für diese

$$(149\text{a})\qquad U - U_0 = -\frac{3}{8\pi}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\int dv''\,\mathfrak{E}_0^{\,2} = -\frac{a^3}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\mathfrak{E}_0^{\,2}.$$

Obwohl bei der Berechnung der Polarisation der Kugel im § 48 das Feld als homogen vorausgesetzt war, können wir doch jetzt die Kraft bestimmen, welche auf die Kugel wirkt, wenn das ursprüngliche Feld $\mathfrak{E}_0$ nicht vollkommen homogen war. Denn in diesem Falle stellt (149a) eine erste Annäherung für den Energiezuwachs dar, welchen das elektrische Feld durch Hereinbringen der dielektrischen Kugel erfährt; derselbe ist negativ. Daraus ergibt sich als Näherungswert für die ponderomotorische Kraft

$$(150)\qquad \mathfrak{K} = -\nabla(U - U_0) = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\nabla\mathfrak{E}_0^{\,2}.$$

Die im inhomogenen Felde wirkende Kraft sucht die dielektrische Kugel nach Stellen größerer Feldstärke hinzutreiben; denn hier wird die Feldenergie durch die Anwesenheit der Kugel stärker verkleinert. Von der Richtung der Feldstärke ist diese Kraft unabhängig.

Wir erwähnten am Schlusse des § 48, daß im Grenzfalle $\varepsilon = \infty$ die Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Innern der Kugel verschwindet. Es bleibt zwar in diesem Falle nach (145b) die elektrische Verschiebung im Innern der Kugel endlich, aber die elektrische Energie im Innern der Kugel ist Null. Außerhalb der Kugel aber stimmt das Feld mit dem einer vollkommen leitenden

Kugel von gleichem Volumen überein, da das Potential auf der Kugeloberfläche konstant ist. Folglich stimmt auch die Änderung der Feldenergie durch die Anwesenheit einer leitenden Kugel überein mit der Änderung der Feldenergie durch eine dielektrische Kugel vom gleichen Radius a und der Dielektrizitätskonstante unendlich. Die Feldenergie nimmt beim Hereinbringen der leitenden Kugel um $\frac{a^3}{2} \mathfrak{E}_0^2$ ab; hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \frac{a^3}{2} \nabla \mathfrak{E}_0^2 \tag{150a}$$

als angenäherter Ausdruck der Kraft, die auf eine ungeladene leitende Kugel im inhomogenen Felde wirkt.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Kraft, die auf ein geladenes, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen wirkt, berechnet, ohne auf die Inhomogenität des Feldes Rücksicht zu nehmen. Ziehen wir diese in Rechnung, so wird

$$\mathfrak{K} = e\,\mathfrak{E}_0 + \frac{a^3}{2} \nabla \mathfrak{E}_0^2 \tag{150b}$$

die resultierende Kraft sein. Man kann also, indem man den Radius a des Probekügelchens hinreichend klein wählt, es stets erreichen, daß das geladene Probekügelchen auch in inhomogenen Feldern die Feldstärke anzeigt, die vor seiner Anwesenheit an der betreffenden Stelle des Feldes herrschte.

Viertes Kapitel.

Der elektrische Strom.

§ 53. Die Gesetze von Ohm und Joule.

Bereits in § 50 wurde angedeutet, welche Eigenschaften des elektrischen Feldes die Maxwellsche Theorie als allgemein, auch für zeitlich veränderliche Felder, gültig ansieht, und welche Eigenschaften insbesondere die elektrostatischen Felder kennzeichnen. Allgemeingültig sind die Verknüpfungen zwischen der Feldstärke $\mathfrak{E}$, der Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der elektrischen Energie U, sowie die zwischen Elektrizitätsmenge und elektrischer Verschiebung; dem elektrostatischen Felde eigentümlich hingegen ist es, daß $\mathfrak{E}$ sich aus einem einwertigen Potentiale ableitet, welches auf der Oberfläche der Leiter und in ihrem Innern konstant ist.

Wir denken uns jetzt zwei Leiter, welche mit entgegengesetzt gleichen Ladungen versehen sind, etwa die Belegungen eines Kondensators. Das elektrostatische Feld, welches sich hergestellt hat, stören wir dadurch, daß wir die beiden Belegungen durch einen metallischen Draht miteinander verbinden. Da die Enden des leitenden Drahtes dadurch auf verschiedene Potentiale φ_1, φ_2 gebracht werden, so kann im Innern desselben der Gradient von φ nicht durchweg gleich Null sein; es muß sich im Innern des Leiters ein elektrisches Feld ausbilden, so daß die Bedingung des elektrostatischen Gleichgewichtes nicht mehr erfüllt ist.

Was geschieht jetzt? Man beobachtet, daß nach kurzer Zeit die Ladungen $\pm e$ der Kondensatorbelegungen sich geändert haben oder ganz verschwunden sind; man sagt dann: Ein elektrischer Strom hat den Leitungsdraht durchflossen, und nimmt die zeitliche Änderung der wahren elektrischen Ladung als Maß der Stromstärke:

$$J = \frac{de}{dt}. \tag{151}$$

Man findet, daß gleichzeitig im Drahte eine Wärmeentwickelung stattgefunden hat und daß einer benachbarten Magnetnadel ein Drehimpuls erteilt worden ist.

Auf die soeben erwähnte Verknüpfung des elektrischen Stromes mit dem magnetischen Felde werden wir erst im nächsten Abschnitte genauer eingehen. Zunächst handelt es sich darum, die Beziehungen festzustellen, welche zwischen dem elektrischen Felde und dem elektrischen Leitungsstrome sowie der Wärmeentwickelung bestehen; diese Beziehungen werden durch die Gesetze von Ohm und Joule formuliert.

Beide Gesetze sind allerdings nicht für den rasch verklingenden Strom der Kondensatorentladung zuerst gefunden worden, sondern für den galvanischen Strom. Einen solchen erhält man, indem man die Enden des Drahtes an die Pole eines galvanischen Elementes anschließt; die beiden Merkmale des elektrischen Leitungsstromes: Wärmeentwickelung und magnetisches Feld, sind auch beim galvanischen Strome vorhanden. Eine zeitliche Änderung wahrer elektrischer Ladung allerdings wird durch stationären, in einer geschlossenen Bahn fließenden galvanischen Strom nicht bedingt. Dennoch berechtigen jene beiden Merkmale dazu, den galvanischen Strom als wesensgleich mit dem Entladungsstrome eines Kondensators anzusehen.

Wie allen zeitlich konstanten elektrischen Feldern, so kommt auch demjenigen des stationären Stromes die Eigenschaft zu, wirbelfrei zu sein und sich daher aus einem skalaren Potentiale φ abzuleiten. Wir denken uns einen Leitungsdraht aus homogenem Materiale; den Enden P_1, P_2 mögen die Potentiale φ_1 und φ_2 zukommen; dann besagt das Ohmsche Gesetz, wie es in den elementaren Lehrbüchern der Physik formuliert wird: Die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Leitung ist gleich dem Produkte aus Stromstärke und Widerstand

$$\varphi_1 - \varphi_2 = JR. \tag{152}$$

Dabei stellt $\varphi_1 - \varphi_2$ das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ von P_1 bis P_2 vor, J ist die Stärke des Stromes, der durch die Querschnitte der Leitung von P_1 nach P_2 fließt, und R der Gesamtwiderstand des homogenen Leitungsdrahtes, welcher die beiden Punkte verbindet.

Das Ohmsche Gesetz ist eine reine Erfahrungstatsache; als solche läßt es sich wortgetreu nur durch das Integralgesetz (152) wiedergeben. Für die weitere theoretische Darstellung eignen sich aber weit besser als die Integralgesetze die Differentialgesetze, die man erhält, wenn man jene auf unendlich kleine Gebietsteile überträgt. Diese geben das Naturgesetz in strengerer Fassung wieder, da bei unendlich kleinen

Gebietsteilen eine Reihe möglicher Komplikationen vermieden wird, deren ausdrückliche Ausschließung bei Leitern von endlichen Abmessungen nicht in allen Fällen zulässig ist.

Wir führen an Stelle der Stromstärke J die Stromdichte des elektrischen Leitungsstromes ein, die wir mit $\mathfrak{i}$ bezeichnen. Verteilt sich die Strömung gleichförmig über den Draht, so ist der Betrag des der Leitlinie s parallelen Vektors $\mathfrak{i}$ einfach der Quotient aus Stromstärke und Querschnitt

$$\mathfrak{i}_s = |\,\mathfrak{i}\,| = \frac{J}{q}.$$

Für ein zylindrisches Stück eines homogenen Leiters von der Länge l, in welchem sich ein homogenes, der Leitlinie paralleles elektrisches Feld hergestellt hat, ist ferner

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathfrak{E}_s\, l.$$

Setzt man weiter

$$R = \frac{l}{\sigma q},$$

wo dann σ eine Materialkonstante, die spezifische elektrische Leitfähigkeit, darstellt, so ergibt das Ohmsche Gesetz (152):

$$\mathfrak{i}_s = \sigma\, \mathfrak{E}_s.$$

Für isotrope Körper ist die Leitfähigkeit von der Richtung unabhängig. Hier gilt als differentielle Form des Ohmschen Gesetzes:

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{152a}$$

Das Ohmsche Gesetz besagt also, daß für einen isotropen Leiter die Stromdichte der elektrischen Feldstärke parallel ist und daß der Quotient der Beträge der beiden Vektoren eine Materialkonstante, also unabhängig von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ ist. Mit der chemischen und physikalischen Beschaffenheit des Leiters, insbesondere mit der Temperatur, wird sich natürlich auch die Leitfähigkeit σ ändern. Bei anisotropen, kristallinischen Leitern stimmen die Richtungen von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ im allgemeinen nicht überein; man stellt hier $\mathfrak{i}$ durch eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{E}$ dar, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, obschon ein näheres Eingehen auf solche Fälle aus dem Rahmen dieser Schrift heraustritt.

Ebenso wie das Ohmsche wird auch das Joulesche Gesetz durch die Erfahrung unmittelbar in Form eines Integralgesetzes gegeben: Die Wärmeentwickelung, die pro Zeiteinheit in der ganzen Leitung stattfindet, ist

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) = RJ^2; \tag{153}$$

sie ist natürlich in mechanischem Maße zu messen, da wir $\varphi_1 - \varphi_2$ und J in absoluten elektrostatischen Einheiten ausdrücken. Das zugehörige Differentialgesetz bezieht sich auf die pro Zeiteinheit und pro Volumeinheit entwickelte Wärme; diese beträgt

$$\mathfrak{i}\mathfrak{E} = \sigma\mathfrak{E}^2 = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{i}^2. \tag{154}$$

Die Gesetze von Ohm und Joule, die von der Erfahrung zunächst nur für stationäre Ströme bestätigt sind, werden als auf die Volumelemente bezogene Differentialgesetze von der Maxwellschen Theorie auch auf beliebig rasch wechselnde Felder angewandt; für die gesamte im Felde entwickelte Joulesche Wärme wird stets gesetzt

$$Q = \int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv\,\sigma\mathfrak{E}^2 = \int dv\,\frac{\mathfrak{i}^2}{\sigma}. \tag{154a}$$

Von den Differentialgesetzen (152a) und (154) gelangt man leicht zu den Integralgesetzen zurück, auch wenn es sich um einen linearen Leiter von veränderlichem Querschnitt q handelt. Man nennt einen Leiter „linear", wenn die Querabmessungen so klein gegen die Längsabmessungen sind, daß der Strom sich gleichförmig über den Querschnitt verteilt und daß in jedem Querschnitt der Leitung ein konstanter Potentialwert φ besteht. Dann ist

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \mathfrak{E}_s = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{i}_s = \frac{J}{\sigma q};$$

da nun durch alle Querschnitte der gleiche Strom fließt, so ergibt die Integration längs der Leitlinie, von P_1 bis P_2:

(155) $$\varphi_1 - \varphi_2 = J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} = JR.$$

Wir finden also das Ohmsche Integralgesetz (152) wieder und, darüber hinaus, einen bestimmten Ausdruck für den Widerstand des linearen Leiters.

Was die Joulesche Wärme anbelangt, so ergibt sie sich nach (154a) durch Integration

(155a) $$Q = \int_1^2 dsq\,\frac{\mathfrak{i}_s^2}{\sigma} = J^2\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} = J^2 R,$$

was mit (153) vollkommen übereinstimmt.

§ 54. **Leitungsstrom und Verschiebungsstrom.**

Für den stationären elektrischen Strom, der in einem ringförmigen Leiterkreise von irgendwelchen elektromotorischen Kräften erregt wird, gilt als allgemeines Grundprinzip der Satz, daß durch alle Querschnitte des Kreises der gleiche Gesamtstrom fließt. Sollte überhaupt irgendwo Elektrizität entstehen, so entsteht doch immer positive und negative Elektrizität in gleichen Mengen, so daß die Ergiebigkeit der Quellen in Summa Null ist. Einem von Null verschiedenen Werte der Divergenz von $\mathfrak{i}$ würde demnach eine zunehmende oder abnehmende Dichte der Elektrizität entsprechen. Diese würde eine Änderung der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und damit des Feldes $\mathfrak{E}$ bedingen; eine solche Änderung aber wäre mit der stationären Stromverteilung nicht vereinbar.

Das Feld des stationären elektrischen Leitungsstromes ist demnach durchweg quellenfrei. Es ist

(156) $$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0$$

innerhalb des Leiters,

(156a) $$\mathfrak{i}_{n1} + \mathfrak{i}_{n2} = 0$$

an der Grenze zweier Leiter,

(156b) $$\mathfrak{i}_n = 0$$

an der Grenze gegen den Isolator.

Betrachten wir hingegen den nicht stationären Strom, der einen Kondensator ladet oder entladet, so beginnt oder endigt der Leitungsstrom auf einer der Kondensatorplatten; wo er beginnt, nimmt die wahre Ladung entsprechend ab, wo er endigt, nimmt die wahre Ladung entsprechend zu. Eine Senke des Leitungsstromes würde hiernach eine zeitlich ansteigende Dichte, eine Quelle des Leitungsstromes eine abnehmende Dichte der wahren Elektrizität ergeben. Nun beginnen aber überall dort, wo wahre Ladung sich befindet, elektrische Verschiebungslinien. Das Integral der elektrischen Verschiebung, erstreckt über eine Fläche, welche eine der Kondensatorplatten einschließt, ist gleich der wahren Ladung der Platte, wie die Grundgleichung (135) besagt. Ist nun J die Stromstärke des auf der Platte endigenden Stromes, so ist nach (151)

$$J = \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n df = \int df \frac{\partial \mathfrak{D}_n}{\partial t}.$$

Die Stromstärke des Leitungsstromes, der zur Platte fließt, ist demnach gleich der zeitlichen Zunahme der Zahl der von der Platte ausgehenden Verschiebungslinien. Der Leitungsstrom im Drahte findet seine Fortsetzung in dem „Verschiebungsstrome" im Dielektrikum. Diese Auffassung des Ladungsvorganges, die sich auf die allgemeingültige Beziehung zwischen wahrer Elektrizität und elektrischer Verschiebung stützt, ist für die Maxwellsche Theorie von fundamentaler Bedeutung. Sie gipfelt in dem allgemeinen Prinzip: Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen stellen in einem ruhenden Körpersystem eine quellenfreie Strömung dar.

Dem Vektor $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$, der Richtung und Dichte des Leitungsstromes bestimmt, würde jetzt der Vektor

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

an die Seite treten, der Richtung und Größe des Verschiebungsstromes anzeigt.

Ist der Leitungsstrom nach dem Jouleschen Gesetze von einer Wärmeentwickelung im Leiter begleitet, die $(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \sigma \mathfrak{E}^2$ pro Volumeinheit beträgt, so findet im Dielektrikum infolge des Verschiebungsstromes die Energieänderung

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{\partial t} = \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

pro Volumeinheit statt, und zwar eine Energieansammlung, wenn der Verschiebungsstrom einen spitzen Winkel mit dem schon bestehenden elektrischen Felde bildet, eine Energieabgabe, wenn die beiden Vektoren einen stumpfen Winkel einschließen.

Das Prinzip des quellenfreien Stromes läßt sich am einfachsten formulieren, wenn man sich einen Körper denkt, der sowohl Träger eines Leitungsstromes als eines Verschiebungsstromes sein kann. Nach der Anschauung Maxwells besitzt jeder Körper eine Leitfähigkeit σ und eine Dielektrizitätskonstante ε. Die Dichte des „wahren" Stromes ist durch den Vektor

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{157}$$

gegeben. Je nachdem das Feld langsamer oder rascher wechselt, wird der betreffende Körper mehr als Leiter oder als Dielektrikum erscheinen; von der Wechselzahl wird es auch abhängen, ob der elektrische Strom im Körper mehr von Wärmeentwickelung oder von umkehrbarer Änderung elektrischer Energie begleitet ist.

Das oben erwähnte Prinzip besagt nun: der wahre Strom $\mathfrak{c}$ ist durchweg quellenfrei; es ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0 \tag{157a}$$

im Innern eines Körpers,

$$\mathfrak{c}_{n1} + \mathfrak{c}_{n2} = 0 \tag{157b}$$

an der Grenze zweier Körper.

Diese Grundgleichungen sind nach (157) identisch mit den beiden folgenden

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

$$-(\mathfrak{i}_{n1} + \mathfrak{i}_{n2}) = +\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2}) = -\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

die besagen: räumliche Divergenz und Flächendivergenz des Leitungsstromes sind bzw. gleich der zeitlichen Abnahme der räumlichen bzw. der Flächendichte der wahren Elektrizität. Sie sprechen mithin in bezug auf die Volumelemente und Flächenelemente den allgemeinen Satz aus, daß die Menge wahrer Elektrizität in einem ruhenden Körper nur durch einen Leitungsstrom geändert werden kann; sie gelten in einem jeden ruhenden Körpersystem.

Die erste der beiden Gleichungen ergibt für die Dichte $\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ der freien Elektrizität bei isotropen Körpern die Beziehung:

$$\sigma \varrho' = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varrho'}{\partial t}$$

oder, wenn

(158) $$\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

gesetzt wird,

(158a) $$\varrho' = \varrho_0' \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}},$$

wenn ϱ_0' den Wert von ϱ' zur Zeit $t = 0$ angibt. Die Dichte der freien Elektrizität sinkt also innerhalb jedes isotropen Körpers, der sowohl leitend wie dielektrisch ist, mit der Zeit in geometrischer Progression. Die Zeit ϑ, nach der ϱ' auf den e^{-1}ten Teil gesunken ist, ist nach (158) um so kleiner, je größer die Leitfähigkeit des Körpers ist. Sie wird als Relaxationszeit bezeichnet. Für die Metalle ist sie unmeßbar klein, was damit zusammenhängt, daß der Verschiebungsstrom im Metalle auch für die raschesten elektrischen Schwingungen gegen den Leitungsstrom verschwindet. Für reines Wasser aber ist die Leitfähigkeit so gering, daß die Relaxationszeit von der Größenordnung meßbarer Zeiten wird.

§ 55. **Der Konvektionsstrom.**

Wir haben im vorigen Paragraphen nur von ruhenden Körpern gesprochen. Läßt man Bewegungen der Körper zu, so kann die Elektrizität auch ohne Leitungsstrom bewegt werden. Den Transport der Elektrizität durch bewegte, geladene Körper bezeichnet man als „Konvektionsstrom“.

Ein elektrisch geladener, isolierter Körper bewege sich etwa im Luftraume oder in einem mit Petroleum gefüllten Gefäße. Irgendwo in dem Medium sei eine geschlossene Fläche konstruiert. Solange der Körper sich außerhalb der Fläche befindet, ist die gesamte elektrische Verschiebung, die er durch die Fläche sendet, gleich Null; sobald er in die Fläche eingetreten ist, wird die elektrische Verschiebung durch die Fläche hindurch gleich der wahren Elektrizitätsmenge, welche der Körper in das Innere der Fläche eingeführt hat. Es hat also gleichzeitig mit dem Eintritt des Körpers die elektrische Verschiebung sich geändert, es ist ein Verschiebungsstrom durch die Fläche hindurchgetreten. Hier bilden Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen den geschlossenen Strom.

Im allgemeinen Falle werden Leitungsstrom, Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen einen geschlossenen Strom ergeben. Die Dichte des Konvektionsstromes ist offenbar

$$\mathfrak{k} = \varrho\,\mathfrak{v}, \tag{159}$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des materiellen Volumelementes ist, an dem die Ladung mit der Dichte ϱ haftet. Wenn konvektive Bewegungen wahrer Elektrizität stattfinden, so ist als quellenfrei der Vektor:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{v} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D} \tag{159a}$$

anzusehen, welcher für ruhende Körper in den Vektor (157) übergeht.

Nicht immer ist es möglich, Leitungsstrom und Konvektionsstrom scharf voneinander zu sondern. Betrachten wir z. B. einen Elektrolyten, d. h. einen Körper, der beim Durchgang des Stromes eine chemische Zersetzung erfährt. Für einen solchen Körper gelten die beiden von Faraday entdeckten Gesetze: Die zersetzte Menge des Elektrolyten ist der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge proportional. In verschiedenen Elektrolyten zersetzt ein gegebener Strom in gleichen Zeiten chemisch äquivalente Mengen. Diese beiden Gesetze, die übrigens im Voltameter zur Strommessung verwandt werden, deutet bekanntlich die Elektrochemie folgendermaßen. Es sollen Verbindungen positiver und negativer Elektrizitätsmengen mit Quantitäten der wägbaren Materie, sogenannte „Ionen" sein, welche den Strom in Elektrolyten transportieren. Hier kann man im Zweifel sein, ob man es im Sinne der Maxwellschen Theorie mit einem Leitungsstrome oder mit einem Konvektionsstrome zu tun hat. Die für den Leitungsstrom charakteristischen Gesetze von Ohm und Joule gelten auch in Elektrolyten, anderseits soll die Elektrizität bei ihrer Bewegung an wägbare Massen gebunden sein, wie bei einem Konvektionsstrome. Die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form geht einer Entscheidung dieser Frage aus dem Wege; sie begnügt sich mit der Feststellung, daß die Verknüpfung des Stromes mit der Feldstärke und mit der Wärmeentwickelung hier die gleiche ist wie bei den Metallen und daß es für die Bestimmung des wahren Stromes (159a) nicht darauf ankommt, ob der Transport der Elektrizität in Form des Leitungsstromes oder des Konvektionsstromes erfolgt.

Auch verzichtet die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen, rein phänomenologischen Gestalt darauf, über die molekularen Vorgänge, welche im elektrischen Strome stattfinden, etwas auszusagen. Und doch legen gerade die Faradayschen Gesetze die Hypothese nahe, daß der Elektrizität wie der Materie eine atomistische Struktur zuzuschreiben ist und daß die Ionen Verbindungen chemischer und elektrischer Atome sind, die, der chemischen Valenz entsprechend, sich vereinigt haben. Dieser für die Elektrochemie so fruchtbaren

Vorstellung gegenüber nahm die Maxwellsche Theorie zunächst eine neutrale Stellung ein.

Erst der modernen Elektronentheorie gelang es, die atomistische Hypothese für die Weiterbildung der Maxwellschen Theorie zu verwerten. Sie konnte sich dabei insbesondere auf gewisse, den Elektrizitätsdurchgang durch verdünnte Gase begleitende Erscheinungen, die sogenannten „Kathodenstrahlen" berufen. Diese von der Kathode ausgehenden Strahlen führen negative Elektrizität mit sich; sie besitzen ferner eine gewisse Trägheit, aber eine viel geringere Trägheit als die elektrochemischen Ionen. Die träge Masse der in den Kathodenstrahlen bewegten elektrischen Partikel beträgt nur ein 2000tel derjenigen Masse, welche man bei der gleichen Ladung dem Wasserstoffion zuschreibt. Das Verhältnis von Ladung und träger Masse, welches den Kathodenstrahlen zukommt, ergab sich als unabhängig von der chemischen Natur der Kathode und der Gasfüllung. Es lag die Annahme nahe, daß man es hier mit den freien Atomen der negativen Elektrizität, den freien „Elektronen" zu tun habe. Diese Hypothese konnte auch von Erscheinungen Rechenschaft geben, welche die von radioaktiven Körpern ausgehenden negativen Elektrizitätsteilchen aufweisen. Es ergaben nämlich die messenden Versuche W. Kaufmanns, daß die träge Masse bei diesen enorm rasch, fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt; dieses Ansteigen ließ sich quantitativ dadurch erklären, daß man die träge Masse nur als Konsequenz der elektrischen Ladung der Elektronen auffaßte. Wir werden hierauf ausführlicher erst im zweiten Bande dieses Werkes eingehen. Zunächst interessiert uns das Resultat, daß es Elektrizitätsbewegungen gibt, die man als Konvektionsstrom aufzufassen hat, obwohl sie nicht mit Bewegungen der wägbaren Materie gekoppelt sind. Die Bewegung der Elektronen findet in dem sonst leeren Raume statt, sie hängt nur ab von dem hier herrschenden elektromagnetischen Felde; die Gesetze von Ohm und Joule versagen hier vollkommen.

Die Elektronentheorie geht noch einen Schritt weiter; sie behauptet, daß jeder Leitungsstrom im Grunde ein Konvektionsstrom bewegter Elektronen ist. In Elektrolyten sollen die Elektronen an die ponderablen Atome gebunden sein, in Metallen hingegen, wo chemische Vorgänge den Strom nicht begleiten, sollen sich die Elektronen frei bewegen können. Fließt kein Leitungsstrom durch die Metalle, so sollen die Elektronen in regelloser Bewegung begriffen sein, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; der Einfluß äußerer elektrischer Kräfte aber soll bewirken, daß im Mittel mehr Elektronen nach der einen Seite als nach der anderen wandern. So erklärt man das Entstehen eines elektrischen Stromes und insbesondere die Gültigkeit der Gesetze von Ohm und Joule.

Sogar einen Teil des Verschiebungsstromes will die Elektronentheorie auf den Konvektionsstrom bewegter Elektronen zurückführen. Nach (142) ist die Dichte des Verschiebungsstromes

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Der erste Bestandteil, der gleich der zeitlichen Änderung der Polarisation ist und den man passend als „Polarisationsstrom“ bezeichnen kann, ist nach § 47 durch die Anwesenheit des Dielektrikums bedingt, während der zweite Bestandteil $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ auch im leeren Raume in Rechnung zu ziehen ist, sobald das elektrische Feld sich zeitlich ändert. Jenen ersten Bestandteil des Verschiebungsstromes nun faßt die Elektronentheorie als Bewegung der im Dielektrikum enthaltenen, durch quasielastische Kräfte an Gleichgewichtslagen gebundenen Elektronen auf. Sie kennt demnach nur zwei Arten des Stromes: Verschiebungsstrom im Äther und Konvektionsstrom der Elektronen. Der Einfluß der ponderablen Materie auf das elektromagnetische Feld soll ausschließlich auf die in der Materie enthaltenen Elektronen zurückzuführen sein.

So fruchtbar nun auch die soeben skizzierte, insbesondere von H. A. Lorentz vertretene Auffassung für die Elektrizitätstheorie geworden ist, so erschien es doch zweckmäßig, in diesem ersten Bande auf dem klassischen Standpunkte von Maxwell und Hertz stehen zu bleiben und erst im zweiten Bande zur Elektronentheorie fortzuschreiten. Das Verhältnis der beiden Theorien ist in mancher Hinsicht mit dem Verhältnis der Thermodynamik und Mechanik einerseits, der Kinetik andererseits zu vergleichen. Wie nur derjenige, der Thermodynamik getrieben hat, die Erfolge der kinetischen Theorie gebührend einzuschätzen weiß, so kann die Elektronentheorie nur gewürdigt werden, wenn man sieht, daß sie zur Erkenntnis neuer, in der Maxwellschen Theorie nicht enthaltener Wahrheiten führt. Und wie die Gastheorie die hypothetischen Moleküle nach den Gesetzen der Mechanik wirklicher Körper behandeln muß, so bestimmt die Dynamik der Elektronen die Felder dieser hypothetischen Teilchen auf Grund derjenigen Gesetze, welche Maxwell für die wirklichen elektrischen Felder aufgestellt hat. Auch hat die Elektronentheorie den Nachweis zu erbringen, daß sie durch Mittelwertsbildung zu den durch die Erfahrung bestätigten Maxwellschen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes zurückgelangt, wie die Gastheorie ihre Hypothesen dadurch rechtfertigt, daß sie die Übereinstimmung ihrer Konsequenzen mit den allgemeinen Gesetzen der Thermodynamik nachzuweisen sucht. Wir legen aus diesen Gründen im ersten Bande dieses Werkes die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form der Darstellung zugrunde; nur bei der Erörterung solcher Fragen, bei denen diese Theorie in ihrer ursprünglichen Form versagt, weisen wir kurz auf die Stellung hin, welche die Elektronentheorie zu der betreffenden Frage einnimmt.

§ 56. Die elektromotorischen oder eingeprägten elektrischen Kräfte.

Wir kehren zurück zu dem stationären Strome, der in einer geschlossenen Leitung fließt. Das Ohmsche Gesetz, welches wir in § 53 für homogene Körper aufgestellt haben, ergibt für geschlossene lineare Leiter aus homogenem Materiale, daß J gleich Null ist; das folgt aus (152) oder (155), falls man Anfangspunkt und Endpunkt der Leitung zusammenfallen läßt, wenn anders das elektrische Feld sich aus einem einwertigen Potentiale ableitet. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß in einem geschlossenen, physikalisch und chemisch homogenen Leitungskreise kein Strom fließt, es sei denn, daß äußere Einwirkungen stattfinden. Fließt in einem derartigen Kreise ein stationärer Strom, so wird man das Produkt aus Stromstärke J und Gesamtwiderstand R der Leitung als Maß der äußeren Einwirkungen betrachten. Man schreibt gewöhnlich

$$E^e = JR \tag{160}$$

und nennt E^e die elektromotorische Kraft. Besser würde man in dieser verallgemeinerten Fassung des Ohmschen Integralgesetzes E^e die „elektromotorische Integralkraft" nennen.

Der Begriff der elektromotorischen Kraft entspricht ganz dem Begriffe der „äußeren" oder der „eingeprägten" Kraft in der Mechanik der wägbaren Materie. Man versteht darunter eine Kraft, die nicht durch die Bedingungen, denen das betrachtete System an sich unterworfen ist, mit bestimmt wird, sondern die in willkürlicher Weise mit Hilfe von Mitteln, die in keinem notwendigen Zusammenhange mit dem Systeme stehen, daran angebracht ist. So stehen in einem aus elastischen Körpern aufgebauten Systeme die darin auftretenden Spannungen oder inneren Kräfte in einem gesetzmäßigen Zusammenhange unter sich und mit den Deformationen und Beschleunigungen; äußere Kräfte aber können in ganz willkürlicher Weise daran angebracht werden. Allerdings wirken diese auf die Verteilung der inneren Spannungen bestimmend ein, aber nur in dem Sinne, daß die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, eine Änderung erfahren haben. Die äußeren Kräfte stehen daher den Vorgängen im Systeme in dem Verhältnisse von Ursache und Wirkung gegenüber, ganz ebenso wie die elektromotorische oder eingeprägte elektrische Kraft dem elektrischen Felde und dem Strome eines Leitungskreises.

Die Einführung äußerer oder eingeprägter Kräfte geschieht in der Mechanik zuweilen nur aus dem Grunde, weil man sich auf die Betrachtung eines Teilsystemes beschränkt. Sind in dem obigen Beispiele die äußeren Kräfte durch Lasten gegeben, die wir in beliebiger Verteilung anbringen können, so ist ihre Einwirkung durch die Gesetze der Mechanik bestimmt; sie werden zu inneren Kräften, wenn man das Gravitationsfeld der Erde in das System einbezieht. Dem entspricht auf elektrischem Gebiete diejenige elektromotorische Kraft, welche man als „induzierte“ bezeichnet. Diese verdankt, wie wir im dritten Abschnitte dieser Schrift darlegen werden, Schwankungen des magnetischen Feldes in der Umgebung eines ruhenden Leitungskreises oder der Bewegung eines Leiters durch ein magnetisches Feld ihren Ursprung. Diese Kräfte stellen sich nur dann als äußere dar, wenn man davon absieht, das magnetische Feld in das System einzubeziehen. Sie werden zu inneren Kräften, deren Wirkungsweise durch die Gesetze der Elektrodynamik bestimmt ist, sobald man das magnetische Feld mit zu dem betrachteten Systeme rechnet. Es ist also Ursprung und Gesetz der induzierten elektromotorischen Kräfte bekannt. Sie werden den eingeprägten Kräften nur dann zugezählt, wenn man den elektrischen Strom bestimmen will, ohne vom magnetischen Felde zu reden.

In anderen Fällen hingegen geschieht die Einführung äußerer Kräfte in der Mechanik aus dem Grunde, weil man es mit Einwirkungen auf das System zu tun hat, die vom Standpunkte der Mechanik aus nicht in zureichender Weise zu erklären sind. Hierher gehören etwa Bewegungen von Magneten, oder von elektrisch geladenen Körpern, oder auch Bewegungen explodierender Körper. Wenn die Mechanik behauptet, alle in der Natur vorkommenden Bewegungen der Körper beschreiben zu können, so behält sie sich stillschweigend vor, solche Bewegungen, die sich rein mechanisch nicht deuten lassen, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darzustellen. Diese sind in den genannten Fällen unentbehrlich, bis man das Gesetz der magnetischen und elektrischen Wechselwirkungen bzw. der chemischen Vorgänge bei der Explosion mechanisch gedeutet hat. Solange dies nicht geschehen ist, ist es nicht möglich, die Vorgänge vollständig auf Grund der Gesetze der Mechanik zu verfolgen, weil es eben nicht rein mechanische Vorgänge sind. Die Mechanik behandelt nur eine Seite der Naturvorgänge, und sie versagt, wenn Vorgänge nichtmechanischer Art mitspielen. Sie verdeckt ihre Unkenntnis, indem sie die Einwirkungen anderer physikalischer oder chemischer Prozesse durch eingeprägte Kräfte darstellt.

Die entsprechende Bedeutung hat bisweilen die Einführung eingeprägter Kräfte in der Elektrizitätslehre. Die Kontaktkraft, welche bei der Berührung chemisch verschiedener Körper entsteht, die elektromotorische Kraft in ungleichmäßig konzentrierten elektrolytischen Lösungen, die thermoelektrische Kraft muß man als eingeprägte Kräfte behandeln, weil sie vom Standpunkte der reinen Elektrizitätslehre aus nicht erklärt sind. Hier spielen chemische und thermische Vorgänge mit, deren Gesetz nur in einzelnen Fällen bekannt ist. Wenn man sich auf die Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen beschränkt, muß man hier, wo Vorgänge anderer Art mitspielen, zur Einführung eingeprägter elektromotorischer Kräfte seine Zuflucht nehmen.

Bei der Erregung und Erhaltung elektrischer Felder spielen stets Kräfte nichtelektrischer Art mit. Die positive und negative Elektrizität würden in der Tat ihrem Vereinigungsbestreben folgen und ein jedes elektrische Feld würde bald erlöschen, wenn nicht solche Kräfte mitwirkten. So kommt es, daß gerade die bei der Erregung der Felder stattfindenden Erscheinungen der Reibungselektrizität, des Galvanismus, des permanenten Magnetismus, in ihrer Wirkungsweise gar nicht oder doch nur unvollkommen verstanden sind. Die historische Entwicklung des Elektromagnetismus beginnt mit meist vergeblichen Versuchen, die genannten Erscheinungen aufzuklären. Faraday und Maxwell haben dann die Gesetze der räumlichen Verteilung und des zeitlichen Verlaufes elektromagnetischer Felder erforscht und der Elektrizitätslehre eine Grundlage gegeben, welche an Sicherheit derjenigen der Mechanik gleichkommt. Die Elektrizitätslehre kann jetzt behaupten, die elektromagnetischen Vorgänge zu beschreiben, mit demselben Rechte, wie die Mechanik behauptet, die Bewegungen der wägbaren Körper zu beschreiben. Die Einwirkung solcher physikalischer oder chemischer Prozesse indessen, welche ihrem Lehrgebäude fremd sind, muß sie, ebenso wie die Mechanik, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darstellen. Zu diesen Prozessen gehören naturgemäß gerade diejenigen, die am längsten bekannt sind und die bei der Erregung der Felder stets in Erscheinung treten.

Von dem durch die Erfahrung für ein Stück eines homogenen Leiters gegebenen Ohmschen Integralgesetze (152) gingen wir zu dem auf die Volumelemente bezüglichen Differentialgesetze (152a) über; auf chemisch oder thermisch inhomogene Leiter dehnen wir das letztere aus, indem wir setzen

$$\mathfrak{i} = \sigma(\mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e) = \sigma\mathfrak{E}. \tag{161}$$

Dabei stellt $\mathfrak{E}^e$ die an dem betreffenden Punkte des Leiters infolge seiner chemischen oder thermischen Inhomogenität wirksame eingeprägte oder elektromotorische Kraft dar, $\mathfrak{E}^s$ die früher allein berücksichtigte, durch die Verteilung der freien Ladungen bestimmte „elektrostatische Kraft“, welche sich im Felde des stationären Stromes als negativer Gradient eines skalaren, einwertigen Potentiales φ darstellt:

$$\mathfrak{E}^s = -\nabla\varphi. \tag{161a}$$

Nehmen wir jetzt, unter Berücksichtigung der eingeprägten Kraft, die am Schlusse des § 53 durchgeführte Betrachtung wieder auf, so erhalten wir für den linearen Leiter

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{i}_s - \mathfrak{E}_s^e,$$

und durch Integration längs der Leitlinie, von P_1 bis P_2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} - E^e, \tag{161b}$$

wo

$$(161\text{c}) \qquad E^e = \int_1^2 \mathfrak{E}_s^e ds$$

das längs der Leitlinie von P_1 bis P_2 genommene Linienintegral der eingeprägten Kraft, oder die, für diese Kurve berechnete, eingeprägte Integralkraft ist. Für einen geschlossenen Leiter ist E^e die elektromotorische Integralkraft des ganzen Kreises; da hier die Punkte P_1 und P_2 zusammenfallen, so verschwindet die linke Seite von (161b), und diese Gleichung geht in (160) über.

§ 57. Die elektrische Kontaktkraft.

Nimmt man den Übergang in der Grenzschicht zweier chemisch verschiedener Leiter als stetig an, so wird die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$, mithin (nach 161) auch die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ endlich sein, es wird daher das elektrostatische Potential φ der freien Ladungen, dessen Gradient $-\mathfrak{E}^s$ ist, sich stetig verhalten. Geht man indessen zum Grenzfalle einer mathematischen Trennungsfläche über, so wird das von dem ersten Leiter zum zweiten erstreckte Integral von $\mathfrak{E}^e$, welches durch den Grenzwert des Ausdruckes (161c) gegeben wird, einen von Null verschiedenen Wert E_{12} annehmen können; in diesem Falle besteht eine „Kontaktkraft" E_{12} an der Trennungsfläche. Da der Ohmsche Widerstand des Stückes $P_1 P_2$ bei diesem Grenzübergang verschwindet, die Stromstärke J aber stets endlich ist, so folgt aus (161b) für diesen Fall

$$(161\text{d}) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = E_{12};$$

dies ist der elektrostatische Potentialsprung an der Trennungsfläche der beiden Leiter.

Ein solcher Potentialsprung kann den allgemeinen Gesetzen der Vektorfelder (§ 25) zufolge einer Doppelschicht zugeschrieben werden, und zwar hier einer Doppelschicht freier Elektrizität, deren Sitz die Trennungsfläche der beiden Körper ist. Diese Konsequenz des Auftretens einer Potentialdifferenz ist bereits von Helmholtz gezogen worden. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}^e = 0$ und die Leitfähigkeit endlich. Mit Rücksicht auf (156) und (161) ist daher die Dichte der freien Elektrizität, die durch

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E}^s$$

definiert ist, im Innern homogener Leiter gleich Null sowohl für das elektrische Gleichgewicht wie auch für den stationären Strom. Das elektrische Feld rührt her von einfachen Schichten und von Doppelschichten freier Elektrizität, die sowohl dort, wo zwei Leiter aneinander, als auch dort, wo die Leiter an den Isolator grenzen, ihren Sitz haben können. Dabei wird in Wirklichkeit, da der Übergang zweier in Berührung gebrachter Körper stetig ist, die Doppelschicht nicht strenge realisiert sein, sondern man wird es mit zwei benachbarten Schichten freier Elektrizität zu tun haben, von denen die positive auf dem Körper sitzt, welcher das größere, die negative auf dem Körper, der das kleinere Potential angenommen hat.

Im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist das Feld $\mathfrak{E}^s$ und die Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Leiter bestimmt, wenn die Kontaktkräfte an der Grenze der sich berührenden Körper und dadurch die Potentialdifferenzen je zweier solcher Körper gegeben sind. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}^e = 0$, mithin, da $\mathfrak{i} = 0$, auch $\mathfrak{E}^s = 0$. Folglich befindet sich an der Grenze zweier solcher Leiter im ganzen keine freie Elektrizität, da ja der Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{E}^s$ Null ist. Hier hat nur die Doppelschicht ihren Sitz, deren Moment durch den Sprung von φ bestimmt ist und die ebensoviel freie Elektrizität positiven wie negativen Vorzeichens enthält.

Durchfließt hingegen ein Strom die Trennungsfläche zweier Leiter, so ist im Innern der homogenen Leiter $\mathfrak{E}^e$ zwar gleich Null, aber $\mathfrak{i}$ und somit $\mathfrak{E}^s$ von Null verschieden. Auch ist an der Trennungsfläche zweier Leiter die Normalkomponente von $\mathfrak{i}$ nach (156a) stetig, aber σ ist im allgemeinen unstetig, so daß hier sehr wohl eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}^s$, d. h. freie Elektrizität positiven oder negativen Vorzeichens auftreten kann. Alsdann sitzt auf der Trennungsfläche der beiden Leiter außer der Doppelschicht noch eine einfache Belegung freier Elektrizität; dazu kommen ferner einfache und wahrscheinlich auch Doppelschichten an der Grenzfläche gegen den Isolator.

Alles dieses sind mathematische Folgerungen aus der Beziehung (161), die durchaus nicht darüber aufklären, durch welche Umstände die bei thermischer oder chemischer Inhomogenität auftretenden elektromotorischen Kräfte bedingt sind. Ja sie geben nicht einmal darüber Auskunft, welcher Strom den in Berührung gebrachten Oberflächen der Leiter bei der Bildung der Doppelschicht zufließt. Denn es war bisher nur von der freien Elektrizität die Rede, die von der Divergenz des Vektors $\mathfrak{E}^s$ abhängt, der Strom aber ist mit Ansammlung wahrer Elektrizität verbunden, die durch div $\mathfrak{D}$ gegeben wird. Bevor wir zur Erörterung dieser Frage übergehen, wollen wir nur kurz die Heavisidesche Auffassung der Kontaktkraft zur Sprache bringen. Man findet dieselbe in O. Heavisides Electrical Papers Bd. I. 1892. S. 348 u. f. ausführlich behandelt.

In der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 31) haben wir gesehen, daß eine Doppelschicht von Quellen in dem umgebenden Raume die gleiche Strömung erzeugt, wie eine auf der Randkurve der Doppelschicht befindliche Wirbellinie. Wir können daher das Feld $\mathfrak{E}^s$, anstatt es als wirbelfrei anzusehen und Doppelschichten anzunehmen, auf das Vorhandensein einer Wirbellinie zurückführen; der Sitz dieser Wirbellinie ist die Randkurve der früher angenommenen Doppelschicht. Das ist um so eher gestattet, als unsere Beobachtungen sich nicht auf das Innere der beiden Leiter beziehen. Es mag z. B. die Lötstelle eines Zink-Kupferstabes betrachtet werden. Aus der Erfahrung ist in der Tat nur dies bekannt, daß sich außerhalb des Zink-Kupferkörpers ein elektrostatisches Feld ausbildet. Dazu kommt, daß nach dem, was wir über die Eigenschaften der homogenen Leiter wissen, überall im Innern derselben im

Gleichgewichtsfalle $\mathfrak{E}^s$ verschwindet. Was aber das gesamte Feld $\mathfrak{E}^s$ im Innern der Metalle und in der Luft anbelangt, so kann dasselbe nach § 31 mit demselben Rechte einer Doppelschicht freier Ladungen auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer, oder auch einem Wirbel von entsprechendem Momente auf der Linie zugeschrieben werden, längs deren Zink, Kupfer und Luft zusammenstoßen. Das Vorhandensein eines solchen Wirbels behauptet nun die Theorie von Heaviside. Sie nimmt an, daß ein magnetischer Strom längs jener Linie zirkuliert; es bedingt nämlich, wie wir später sehen werden, ein magnetischer Strom einen Curl der elektrischen Feldstärke. Es soll aber durchaus nicht behauptet werden, daß hier wirklich ein solcher Strom zirkuliert, sondern nur, daß die Ausgangsstelle für das Feld in einer Wirbellinie zu suchen ist, und das ist in der Tat eine zulässige Vorstellung. Wünscht man sie weiter auszuführen, so wird man annehmen, daß durch Wirkungen, über die wir zunächst keine Rechenschaft zu geben vermögen, jedenfalls aber infolge des Zusammentreffens der drei Medien (Zink, Kupfer, Luft) an dieser Stelle ein Curl der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}^e$ hervorgerufen wird. Überall sonst ist $\mathfrak{E}^e$ quellenfrei und wirbelfrei. Dazu tritt nun ein elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}^s$ derart, daß im Innern der beiden Metalle und auch in der Lötstelle

$$\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^s = 0$$

wird, sobald elektrostatisches Gleichgewicht sich hergestellt hat. Dann ist auch $\mathfrak{E}^s$ im Innern der Metalle und an der Lötstelle quellenfrei, nur auf den an die Luft angrenzenden Oberflächen des Zinkes und des Kupfers ist eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}^s$ vorhanden. Das Feld $\mathfrak{E}^s$ ist, im Gegensatze zu demjenigen von $\mathfrak{E}^e$, durchweg wirbelfrei.

Zwischen den Theorien von Helmholtz und Heaviside experimentell zu entscheiden, dürfte kaum möglich sein, da beide bezüglich des zu beobachtenden Feldes zu denselben Resultaten führen. Es ist ja überhaupt das Problem, ob die Kontaktpotentialdifferenz wirklich auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer ihren Sitz hat, durchaus nicht gelöst. Einige

Forscher neigen sogar der Ansicht zu, daß der Sitz der Kontaktkraft ausschließlich in den an die Luft angrenzenden Oberflächen der Metalle zu suchen ist. Es ist daher jedenfalls sehr bemerkenswert, daß es eine Theorie gibt, welche jene Frage überhaupt nicht aufwirft, indem sie das Zusammentreffen dreier chemisch differenter Körper als notwendig zur Erregung einer Kontaktkraft ansieht.

Selbst wenn man es, in Helmholtzscher Auffassung, mit drei Doppelschichten an den Trennungsflächen Zink-Kupfer, Kupfer-Luft und Luft-Zink zu tun hätte, so würde deren Ersetzung durch die äquivalenten Wirbellinien doch wieder nur eine einzige Heavisidesche Wirbellinie längs der Kurve ergeben, wo Zink, Kupfer und Luft zusammentreffen.

Bekanntlich genügen die Kontaktkräfte an der Grenze von Leitern erster Klasse, wenn sie überhaupt existieren, dem Gesetz der Spannungsreihe

$$E_{12} + E_{23} + E_{31} = 0.$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß in einem aus drei thermisch und chemisch homogenen Leitern erster Klasse zusammengesetzten Leitungskreise kein stationärer Strom fließt.

Wird aber einer der Leiter erster Klasse durch einen solchen zweiter Klasse, d. h. einen elektrolytischen Leiter ersetzt, so ist eine elektromotorische Kraft, im allgemeinen von der Größenordnung eines Volt, in dem Kreise vorhanden. Es ist hier

$$E_{12} + E_{23} + E_{31} = E^e \neq 0. \tag{161e}$$

An der Grenzfläche eines Metalles und eines Elektrolyten ist also jedenfalls eine Kontaktkraft anzunehmen. Die Energie, auf deren Kosten der elektrische Strom entsteht, ist hier chemischen Ursprungs. In gewissen Fällen, z. B. für ein Metall, das in eine verdünnte Lösung eines seiner Salze taucht, kann man den beim Stromdurchgang stattfindenden chemischen Prozeß auf Grund der osmotischen Theorie verfolgen und so die Kontaktkraft theoretisch bestimmen.

Für die Joulesche Wärme wollen wir auch dort, wo eingeprägte Kräfte wirken, die Gleichung (154a) als gültig ansehen. Dann bleiben die Überlegungen, welche für lineare Leiter zu (155a) geführt haben, zutreffend und ergeben, zusammen mit (160), für einen geschlossenen linearen Leiter mit eingeprägten Kräften

$$Q = JE^e. \tag{161f}$$

Es ist also die im ganzen Kreise erzeugte Joulesche Wärme gleich der Arbeit, welche die eingeprägten Kräfte beim Stromdurchgang leisten. Diese Arbeitsleistung erfolgt auf Kosten chemischer Energie, wie denn auch der Stromdurchgang durch Leiter zweiter Klasse stets von chemischen Vorgängen begleitet ist. In einem Kreise aus Leitern erster Klasse hingegen fallen mit den chemischen Wirkungen des elektrischen Stromes auch die elektromotorischen Kräfte chemischen Ursprungs fort.

Was nun die Frage anbelangt, welches das Feld der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in der Übergangsschicht zweier Leiter ist und welches die entsprechende Verteilung wahrer Elektrizität, so ist dieselbe bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse kaum zu beantworten. Nimmt man an, daß $\mathfrak{D}$, ähnlich wie $\mathfrak{i}$, durch die resultierende Feldstärke folgendermaßen bestimmt ist:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e = \mathfrak{E},$$

so könnte $\mathfrak{D}$ freilich berechnet werden, wenn die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Körpers bekannt wäre. Für elektrolytische Lösungen ist als Dielektrizitätskonstante diejenige des Lösungsmittels zu betrachten, also für wässerige Lösungen diejenige des reinen Wassers. Die Frage nach der Dielektrizitätskonstante der Metalle hingegen ist noch ganz offen. Wenn es gestattet wäre anzunehmen, daß die Metalle gar nicht elektrisch polarisierbar seien, d. h. daß der Vektor $\mathfrak{P}$ hier verschwindet, so wäre $\varepsilon = 1$ und die Doppelschicht freier Elektrizität wäre zugleich eine Doppelschicht wahrer Elektrizität. Diese Annahme ist indessen durchaus hypothetisch, und so müssen wir darauf verzichten, über die wahre Elektrizität, die sich an der Oberfläche eines Metalls bei der Berührung mit einem anderen Leiter ansammelt, etwas auszusagen.

§ 58. Räumlich verteilte elektromotorische Kräfte.

Der Kontaktkraft, die an der Grenze zweier chemisch verschiedener Körper ihren Sitz hat, steht die räumlich verteilte eingeprägte Kraft gegenüber, die in chemisch oder thermisch inhomogenen Körpern ihren Sitz hat. Sie hängt ab von der Art, wie die chemische Zusammensetzung bzw. die Temperatur von Punkt zu Punkt variiert. Diese eingeprägten Kräfte kennt man am besten für verdünnte elektrolytische Lösungen, in denen man die Vorgänge auf Grund der elektrolytischen Dissoziationstheorie verfolgen kann. Hier ruft die resultierende Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e$$

einen Leitungsstrom hervor. Im Gleichgewichtsfalle muß im Innern des Leiters $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Dabei ist aber unter $\mathfrak{E}^s$ der Durchschnittswert der elektrostatischen Kraft für ein Raumelement zu verstehen, welches eine große Zahl von Ionen enthält. In molekularen Bezirken besteht auch im Gleichgewichtsfalle der von den Ionen ausgehende Kraftfluß, doch ist das Feld hier stetem Wechsel unterworfen, so daß im Durchschnitt keine Richtung im Raume bevorzugt ist und daß bei der Mittelwertsbildung $\mathfrak{E}$ verschwindet. Damit dies der Fall ist, muß freie Elektrizität sich in der Weise ansammeln, daß die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}^e$ das Gleichgewicht hält. Die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ ist dabei die osmotische Kraft, welche die Konzentration der Lösung auszugleichen sucht; diese wirkt auf die wägbaren Atome des gelösten Stoffes und daher auch auf die mit jenen verkoppelten positiven und negativen Elektrizitäten. Sie wirkt auf die positiven und die negativen Ionen in gleichem Sinne, indem sie dieselben von Stellen größerer zu Stellen geringerer Konzentration treibt. Die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ hingegen treibt die negativen Ionen in entgegengesetzter Richtung wie die positiven. Die Bedingung der Stromlosigkeit gestattet es, wie W. Nernst zeigte, die elektromotorische Kraft in einer Lösung eines Elekrolyten von wechselnder Konzentration aus den Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen zu berechnen. Diese räumlichen elektromotorischen Kräfte, deren Bestehen mit einer Diffusion des Elektrolyten verbunden sind, sind viel kleiner als die flächenhaften Kontaktkräfte, die an der Grenze eines Metalles und einer elektrolytischen Lösung wirken.

Von weit geringerem Betrage als diese im vorigen Paragraphen besprochenen Kontaktkräfte sind auch diejenigen eingeprägten Kräfte, die man als thermoelektrische bezeichnet. Dieselben treten in einem aus zwei Metallen bestehenden geschlossenen Stromkreise auf, wenn die beiden Lötstellen verschiedene Temperaturen besitzen. Da der Strom hier keinen Transport wägbarer Materie, mithin auch keinen chemischen Prozeß begleitet, so entsteht die Frage nach der Energiequelle, welche die elektromotorische Kraft verursacht. Diese Frage wird beantwortet durch das Peltiersche Phänomen. Der Strom kühlt im allgemeinen die wärmere Lötstelle ab, er erwärmt die kältere; die Differenz der beim Durchgange der Elektrizitätsmenge 1 den Lötstellen zugeführten bzw. entzogenen Wärmemengen Q_1, Q_2 ist im Sinne des ersten Hauptsatzes der Arbeit der thermoelektrischen Kräfte äquivalent. Ein in entgegengesetzter Richtung fließender, durch sonstige elektromotorische Kräfte unterhaltener Strom würde umgekehrt Arbeit gegen die thermoelektrischen Kräfte leisten, so daß beim Durchgange der Elektrizitätsmenge 1 die Wärme Q_2 der kälteren Lötstelle entzogen und Q_1 der wärmeren Lötstelle zugeführt wird. Wir haben also hier thermische Vorgänge, die, im Gegensatz zur Jouleschen Wärmeentwicklung, umkehrbar verlaufen. Die dabei auftretenden thermoelektrischen Kräfte scheinen zunächst flächenhaft verteilt zu sein; es zeigt jedoch die genauere Untersuchung, daß es nicht gelingt, auf Grund dieser Voraussetzung die Tatsachen befriedigend darzustellen.

Wendet man nämlich auf jene umkehrbare, zwischen den Temperaturen T_1, T_2 der Lötstellen arbeitende kalorische

Maschine den zweiten Hauptsatz an, so erhält man

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{T_1 - T_2}.$$

Hiernach müßte der Peltier-Effekt der absoluten Temperatur der Lötstelle proportional sein und es müßte die elektromotorische Kraft des Thermoelementes

$$E^e = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)\frac{Q_2}{T_2},$$

d. h. bei konstant gehaltener Temperatur der kälteren Lötstelle der Differenz der Temperaturen der beiden Lötstellen proportional sein. Diese Folgerung wird durch die Erfahrung keineswegs bestätigt; es gibt im Gegenteil Thermoelemente, deren elektromotorische Kraft bei Erwärmung der heißeren Lötstelle nicht wächst, sondern abnimmt.

Dies führte W. Thomson zu dem Schlusse, daß in einem Thermoelemente außer den flächenhaften elektromotorischen Kräften an der Grenze der beiden Metalle noch räumliche Kräfte im Innern der Metalle wirksam sind überall dort, wo ein Temperaturgefälle vorhanden ist. Hier findet, dem Peltiereffekte entsprechend, der sogenannte Thomsoneffekt statt, eine umkehrbare thermische Wirkung. Man kann den Vorgang so auffassen, daß in einem chemisch homogenen Metalle infolge eines Temperaturgefälles eingeprägte elektrische Kräfte auftreten. Diese in beiden Metallen wirksamen räumlich verteilten Kräfte, zusammen mit den flächenhaften elektromotorischen Kräften der Lötstellen, ergeben die resultierende elektromotorische Kraft; der entstehende Strom ist begleitet von einem Wärmestrom, der bei Umkehrung der Stromrichtung in entgegengesetztem Sinne verlaufen würde.

Die Analogie der in elektrolytischen Lösungen infolge des Konzentrationsgefälles und in Metallen infolge des Temperaturgefälles auftretenden elektromotorischen Kräfte legt es nahe, hier über den Mechanismus ähnliche Vorstellungen zu entwickeln wie dort. Dies versuchen in der Tat die von E. Riecke und P. Drude herrührenden neueren Elektronentheorien der Metalle, von denen bereits in § 55 die Rede war. Die Konzentration der freien Elektronen soll in verschiedenen Metallen verschieden und in jedem Metall Temperaturfunktion sein, so daß chemische und thermische Differenzen ein Konzentrationsgefälle und so eine eingeprägte elektrische Kraft $\mathfrak{E}^e$ hervorrufen. Anderseits sollen die freien Elektronen im Sinne der kinetischen Gastheorie Anteil an der Wärmebewegung haben, so daß ihr Transport im elektrischen Strome von einem Wärmestrom begleitet ist. Diese Vorstellung erklärt übrigens auch die merkwürdigen Beziehungen, welche zwischen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit der Metalle bestehen. Es ist zu hoffen, daß die weitere Verfolgung der Elektronenhypothese auch sonst für die Theorie der Metalle fruchtbar sein wird; sie liegt indessen jenseits des Zieles, das sich der vorliegende Band gesteckt hat.

Das gleiche gilt von den räumlich verteilten eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$, welche man heranzuziehen hat, um die Erscheinungen der Pyroelektrizität und Piezoelektrizität darzustellen. Diese in gewissen Kristallen bei Erwärmung bzw. Druck auftretenden Kräfte bestimmen zusammen mit der elektrostatischen Kraft der freien Ladungen hier keinen Leitungsstrom, sondern eine elektrische Verschiebung. Es mag beiläufig bemerkt werden, daß die Symmetrie der Kristalle, welche die genannten Erscheinungen aufweisen, im Einklange sind mit den Folgerungen, die man auf Grund kristallphysikalischer Prinzipien aus der polaren Art des elektrischen Vektors gezogen hat.

§ 59. Die Maßeinheiten und Dimensionen der elektrischen Größen.

Die bisherigen Entwicklungen sind noch unabhängig davon, wie man die Maßeinheiten für die in ihnen vorkommenden Größen wählen will. Dies geschieht in den verschiedenen elektrischen und magnetischen Maßsystemen in verschiedener Weise. Alle bisher aufgestellten Systeme aber beruhen auf dem Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (C.-G.-S.) der Mechanik; die Krafteinheit ist also stets die Dyne, die Einheit der Energie das Erg. Bestimmen zwei elektrische Größen eine Kraftgröße oder eine Energiegröße, so ist durch Festlegung der Maßeinheit der einen elektrischen Größe auch die Einheit der anderen festgelegt. So wiesen wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes (in § 35) darauf hin, daß die Gleichung (124), welche das Produkt aus wahrer Ladung e und Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer Kraft gleichsetzt, nur die Wahl der Einheit der Ladung frei läßt; hat man über diese verfügt, so ist die Einheit von $\mathfrak{E}$ bestimmt. Aus (126a) folgt dann die Einheit, in der das Potential φ, aus (137) diejenige, in der die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität zu messen ist. Anderseits sind unmittelbar aus der für die wahre Ladung gewählten Einheit die Einheiten von $\mathfrak{D}$ durch (135), von J und damit von $\mathfrak{i}$ durch (151), bestimmt. Ferner sind durch (134), (152) Kapazität K und Gesamtwiderstand R als Quotienten aus wahrer Ladung und Potentialdifferenz bzw. aus Potentialdifferenz und Stromstärke definiert und durch (136), (152a) die Materialkonstanten ε, σ.

Vom atomistischen Standpunkte aus würde es sich empfehlen, einem Vorschlage J. J. Thomsons gemäß, als Einheit der wahren Ladung diejenige zu wählen, welche ein einwertiges Ion oder ein Elektron mit sich führt. Dabei könnte die Entscheidung darüber, ob die Einheit der Elektrizität auf die mechanischen Grundeinheiten von Länge, Masse und Zeit oder ob umgekehrt die Masse auf die Grundeinheiten von Länge, Zeit und Elektrizität zurückgeführt werden soll, zunächst offen bleiben. Solange man von der Vorstellung ausging, daß alle Naturvorgänge im Grunde Bewegungen träger Massen sind, pflegte man die mechanischen Grundeinheiten ausschließlich in Betracht zu ziehen und die Aufklärung über die wahre mechanische Einheit von e von der Erkenntnis der verborgenen Bewegungen zu erwarten, die sich als elektromagnetisches Feld kundgeben sollten. Heute ist jene mechanische Naturanschauung nicht mehr die allein herrschende. Die moderne Physik neigt vielmehr der Anschauung zu, daß alle Naturerscheinungen in letzter Linie auf elektromagnetische Vorgänge, etwa Elektronenbewegungen, zurückzuführen sind. Dieser elektromagnetischen

Naturanschauung würde sich ein Einheitssystem anpassen, welches auf die Grundeinheiten der Länge, Elektrizität und Zeit begründet ist. Die Einheit der trägen Masse würde auf diese Grundeinheiten leicht zurückzuführen sein, etwa mit Hilfe der für die Masse der Elektronen gültigen Formeln. Dem Grundgedanken dieses Systemes würde am besten die Wahl der Elektronenladung als Einheit der Elektrizität entsprechen; praktisch ist diese Wahl allerdings zur Zeit nicht möglich, da wir diese Einheit noch nicht mit genügender Genauigkeit festzulegen imstande sind.

Man kann nun an Stelle der Einheit der wahren Ladung e die Einheit der Dielektrizitätskonstanten ε offen lassen; diese beiden Größen sind miteinander durch das Coulombsche Gesetz verknüpft. Die verschiedenen Maßsysteme der elektrischen Größen werden sich also durch die für ε gewählte Einheit charakterisieren lassen.

Das „elektrostatische Maßsystem“ betrachtet ε als reine Zahl, die für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Dieses System kann sich darauf berufen, daß im leeren Raume die Unterscheidung wahrer und freier Ladungen nicht notwendig ist; in der Tat haben wir im ersten Kapitel dieses Abschnittes, welches das Feld im Luftraume behandelte, nur von Elektrizität schlechtweg gesprochen. Die Unterscheidung von wahrer und freier Ladung, von Feldstärke und elektrischer Verschiebung wurde erst bei der Einführung dielektrischer Körper notwendig. Vom Standpunkte der Elektronentheorie, welche jedes Feld als Feld im Äther, jeden Strom entweder als Konvektionsstrom der Elektronen oder als Verschiebungsstrom im Äther betrachtet, erscheint es naturgemäß, wahre und freie Ladung durch dieselbe Einheit zu messen. Diese Einheit ist im elektrostatischen Systeme definiert als diejenige Ladung, welche eine ihr gleiche im Vakuum im Abstande von 1 cm mit der Kraft einer Dyne abstößt.

Wünscht man indessen in den auf beliebige Dielektrika bezüglichen Gleichungen den Unterschied von wahren und freien Ladungen kenntlich zu machen, so wird man es vor-ziehen, Einheit und Dimension von ε zunächst unbestimmt zu lassen und alle anderen Einheiten auf die vier Grundeinheiten der Länge, Masse, Zeit und Dielektrizitätskonstanten zu beziehen. Die Dimensionen von wahrer Ladung e und freier Ladung e' sind dann dadurch bestimmt, daß im Ausdrucke (148a) des Coulombschen Gesetzes beiderseits Größen von der Dimension einer Kraft stehen müssen. Die Dimension der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ folgt als Quotient von wahrer Ladung und Fläche, diejenige der Feldstärke $\mathfrak{E}$ als Quotient von freier Ladung und Fläche, das Potential φ und die elektromotorische Kraft E^e sind Produkte von $\mathfrak{E}$ und Längen. Die Stromstärke J ferner ist ein Quotient aus wahrer Ladung und Zeit, die Stromdichte $\mathfrak{i}$ ein Quotient aus Stromstärke und Fläche. Die Dimension von σ endlich ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz als Quotient von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ oder nach (158) als Quotient von ε und einer Zeitgröße. Wir stellen alle Dimensionen in der folgenden Tabelle zusammen:

Dimensionen der elektrischen Größen.

Energie	$M\, L^2\, T^{-2}$,
Ponderomotorische Kraft . . .	$M\, L\, T^{-2}$,
Wahre Elektrizitätsmenge e . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Freie Elektrizitätsmenge e' . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Potential der freien Elektrizität φ	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrostatische Kapazität K . .	$L\, \varepsilon$,
Stromstärke J	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Stromdichte $\mathfrak{i}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Spezifische Leitfähigkeit σ . . .	$T^{-1} \varepsilon$,
Elektrischer Widerstand R . . .	$L^{-1}\, T\, \varepsilon^{-1}$.

Streicht man in dieser Liste überall ε fort, so gelangt man zu den Dimensionen des elektrostatischen Maßsystemes, welches die elektrostatischen Größen auf Masse, Länge und Zeit als Grundeinheiten bezieht. Umgekehrt kann man die Dimension der Masse durch diejenigen der Elektrizität, Länge und Zeit folgendermaßen ausdrücken:

$$M = e^2 L^{-3} T^2;$$

die Einführung dieses Ausdruckes für M würde aus allen Dimensionsformeln die gebrochenen Exponenten fortschaffen, wobei ε ebenso wie im elektrostatischen Systeme als reine Zahl betrachtet werden würde.