Theorie der Elektrizität

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität - mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik

Föppl, A.

1907

Erster Abschnitt. Vektoren und Vektorfelder

urn:nbn:at:at-ubi:2-6404

Erster Abschnitt.

Vektoren und Vektorfelder.

Erstes Kapitel.

Die Vektoren.

§ 1. Definition des Vektors.

Unter den Größen, die zur mathematischen Darstellung geometrischer Gebilde oder physikalischer Zustände und Vorgänge dienen, zeichnen sich durch ihre Einfachheit die sogenannten Skalaren aus. Eine Größe wird Skalar genannt, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in stetiger, umkehrbar eindeutiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen ist. Die Forderung der umkehrbar eindeutigen Zuordnung besagt, daß nach Festsetzung der Maßeinheit die Gleichheit zweier Werte der Größe an der Gleichheit der Maßzahlen, die Forderung der Stetigkeit, daß die näherungsweise Gleichheit der Werte an der näherungsweisen Gleichheit der Maßzahlen erkennbar sein soll. Es gibt Skalaren, z. B. Masse, Volumen, Dichte, deren Maßzahlen stets positiv sind; andere, z. B. Potential, Elektrizitätsmenge, sind sowohl positiver, wie negativer Werte fähig.

In manchen Zweigen der Wissenschaft pflegt man die Maßeinheiten auf die drei Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit zu beziehen; die Dimension einer Größe in einem solchen „absoluten Maßsystem" drückt die Maßeinheit durch die Grundeinheiten aus. Ob man nun jene drei Grundeinheiten, oder andere dem Dimensionssystem zugrunde legt, darüber mag zunächst keine Festsetzung getroffen werden. Jedenfalls müssen in einer Gleichung stets die beiderseits stehenden Größen nicht nur der Maßzahl, sondern auch der Dimension nach gleich sein; Verschiedenheit der Dimension würde nämlich bedingen, daß bei einer Änderung der Grundeinheiten die Gleichheit der Maßzahlen fortfiele.

Es gibt geometrische und physikalische Größen, die nicht zur Klasse der Skalaren gehören. So ist die Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen, die einen beweglichen Punkt aus einer bestimmten Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen, keineswegs in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen; zur eindeutigen Festlegung der Endlage sind vielmehr drei Zahlangaben notwendig; denn eine Zahlangabe ist erforderlich, um den Betrag der Verrückung zu bestimmen, d. h. den Abstand von Anfangslage und Endlage, zwei weitere zur Bestimmung der Richtung. Die Verrückung eines Punktes repräsentiert eine Klasse von Größen, die man als *Vektoren* bezeichnet.

Wir nennen eine physikalische Größe einen Vektor, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise der Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen zuzuordnen ist, welche einen Punkt aus einer festen Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen. Die an einem materiellen Punkte angreifende Kraft ist ein Beispiel eines Vektors; in der Tat betrachtet man zwei Kräfte dann und nur dann als physikalisch gleichwertig, wenn sie dem Betrage und der Richtung nach übereinstimmen. Andere Vektoren sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke.

Jedem Vektor kommt eine bestimmte Dimension zu; zwei Vektoren werden als gleich nur dann zu bezeichnen sein, wenn nicht nur die repräsentierenden Verrückungen, sondern auch die Dimensionen gleich sind.

Jedem Vektor kann ein Skalar zugeordnet werden, der dem Betrage der repräsentierenden Verrückung entspricht. Wir nennen diesen Skalar „Betrag des Vektors“ und schreiben ihm die Dimension des Vektors selbst zu.

Zur Kennzeichnung der Vektoren sind in dieser Schrift ein für allemal fett gedruckte gotische Buchstaben angewendet, während die lateinischen und griechischen Lettern zur Bezeichnung von Skalaren dienen. So bezeichnet $\mathfrak{B}$ einen Vektor; sein Betrag wird durch $|\mathfrak{B}|$ dargestellt.

§ 2. Addition und Subtraktion von Vektoren.

Die Regeln der Vektoraddition gewinnen wir durch Zusammensetzung geradliniger Verrückungen. Dabei mögen solche Verrückungen als gleichwertig betrachtet, d. h. einem und demselben Werte des darzustellenden Vektors zugeordnet werden, die nach Richtung und Betrag übereinstimmen, wenn sie auch von verschiedenen Punkten des Raumes ausgehen. Diese Festsetzung ermöglicht es, zwei Verrückungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aneinander zu fügen; infolge der Verrückung $\mathfrak{A}$ gelangt der bewegliche Punkt von 1 nach 2, infolge der Verrückung $\mathfrak{B}$ von 2 nach 3. Die geradlinige Verrückung $\mathfrak{C}$, die direkt von 1 nach 3 führt, definiert die **geometrische Summe** oder **Resultierende** der Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

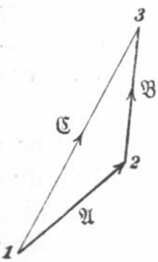

Abb. 1.

(1) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$ (Abb. 1.)

Führt man zuerst die Verrückung $\mathfrak{B}$ und darauf die Verrückung $\mathfrak{A}$ aus, so beschreibt der bewegliche Punkt den Weg (1 4 3), welcher den Weg (1 2 3) zu einem Parallelogramm ergänzt; die Resultierende der Verrückungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ wird demnach, ebenso wie diejenige der Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, durch die Diagonale (1, 3) jenes Parallelogramms dargestellt (vgl. Abb. 2). Es befolgt daher

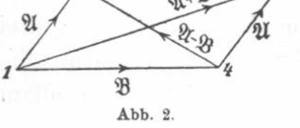

Abb. 2.

die Vektoraddition das kommutative Gesetz: Die geometrische Summe zweier Vektoren ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Wenn wir in der soeben erklärten Weise die Vektoren durch Zusammensetzung der sie repräsentierenden Verrückungen addieren, so folgt ohne weiteres die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Vektoraddition:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}). \tag{3}$$

Welche Bedeutung soll nun der geometrischen Differenz zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigelegt werden? Die Differenz soll so definiert werden, daß für Vektoren, ebenso wie für Skalare, die Beziehung gilt:

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B} = 0. \tag{4}$$

Demgemäß ordnet man dem Vektor $-\mathfrak{B}$ eine Verrückung zu, welche die Verrückung $\mathfrak{B}$ aufhebt, indem sie den beweglichen Punkt zur Anfangslage zurückführt, d. h. eine Verrückung von gleichem Betrage, wie $\mathfrak{B}$, aber von entgegengesetzter Richtung. Unter der geometrischen Differenz der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jedoch versteht man die geometrische Summe der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$, und definiert dementsprechend die Vektorsubtraktion folgendermaßen: Von einem Vektor $\mathfrak{A}$ wird ein Vektor $\mathfrak{B}$ subtrahiert, indem man zu $\mathfrak{A}$ einen Vektor von gleichem Betrage, wie $\mathfrak{B}$, aber von entgegengesetzter Richtung, addiert.

In dem Parallelogramm der Abb. 2 stellt die Diagonale (1 3) die geometrische Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, die Diagonale (4 2) die geometrische Differenz $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ vor.

Die vorstehend entwickelten Regeln der Addition und Subtraktion von Vektoren stimmen formal mit den Gesetzen der gewöhnlichen Algebra überein.

§ 3. **Einheitsvektoren und Grundvektoren.**

Wie für die Addition und Subtraktion von Vektoren, so nehmen wir auch für die Multiplikation von Vektoren mit

Skalaren die Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra als gültig an; so gilt beispielsweise die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A} = 3\,\mathfrak{A}.$$

Allgemein verstehen wir unter dem Produkte aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ und einem Skalar m einen Vektor vom Betrage $m \cdot |\mathfrak{A}|$, dessen Richtung durch diejenige von $\mathfrak{A}$ bestimmt ist.

Als „Einheitsvektor“ bezeichnet man einen Vektor vom Betrage 1. Vermöge der Beziehung

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| \cdot \mathfrak{t}_1 \tag{5}$$

kann man durch einen festen Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$ alle diejenigen Vektoren $\mathfrak{A}$ ausdrücken, welche der Richtung nach mit $\mathfrak{t}_1$ übereinstimmen.

Da wir in § 1 übereingekommen waren, dem Betrage eines Vektors stets die Dimension des Vektors selbst zuzuschreiben, so kommt Einheitsvektoren stets die Dimension Null zu.

Wie durch Gl. (5) alle Vektoren von übereinstimmender Richtung auf einen festen Einheitsvektor zu beziehen sind, so kann man auch Vektoren beliebiger Richtung und beliebigen Betrages auf feste Einheitsvektoren beziehen. Dazu bedarf es jedoch dreier nicht in einer Ebene liegender Einheitsvektoren. Wir wählen drei wechselseitig aufeinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ als „Grundvektoren“; ihre Richtungen mögen mit den Achsen eines cartesischen Koordinatensystems zusammenfallen.

Bekanntlich gibt es zwei Arten von Achsensystemen x, y, z, die man als Rechtssysteme und Linkssysteme unterscheidet; alle Rechtssysteme lassen sich miteinander zur Deckung bringen und ebenso alle Linkssysteme miteinander, aber nicht die Rechtssysteme mit den Linkssystemen. Durch Spiegelung an einer der Koordinatenebenen entsteht aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Auch durch Spiegelung am Anfangspunkt der Koordinaten (Umkehrung der drei Achsenrichtungen) wird aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Wir werden uns weiterhin stets des von Maxwell (und den englischen Gelehrten überhaupt) gewählten Rechtssystemes bedienen.

Durch Abbildung 3 wird dieses in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Die xyz-Achsen, in die zugleich die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ fallen, folgen so aufeinander, daß eine Drehung aus der x-Richtung in die y-Richtung, verbunden mit einer fortschreitenden Bewegung in der z-Richtung, zu einer rechtsgängigen Schraube führt; die xyz-Richtungen eines Rechtssystemes können durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand angezeigt werden.

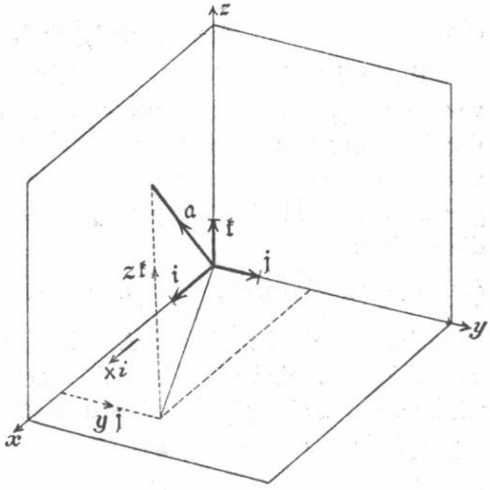

Abb. 3.

Um den Vektor $\mathfrak{a}$ auf die drei Grundvektoren zu beziehen, projiziere man (Abb. 3) zunächst den Vektor $\mathfrak{a}$ auf die xy-Ebene und die Projektion wiederum auf die x-Achse und die y-Achse. Schreitet man längs der x-Achse um die Strecke x, sodann parallel der y-Achse um y, endlich parallel der z-Achse um z fort, so gelangt man zum Endpunkte des Vektors $\mathfrak{a}$.

Demgemäß ist $\mathfrak{a}$ als geometrische Summe dreier den Grundvektoren $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$ paralleler Vektoren darzustellen:

$$\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}. \tag{6}$$

Die skalaren Größen x, y, z sind die Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{a}$; sie messen die Länge der Projektionen der Verrückung $\mathfrak{a}$ auf die Koordinatenachsen. Man bezeichnet diese Größen als „Komponenten“ des Vektors $\mathfrak{a}$. Um die Verknüpfung mit dem Vektor selbst kenntlich zu machen, schreiben wir weiterhin die Komponenten:

$$\mathfrak{a}_x, \quad \mathfrak{a}_y, \quad \mathfrak{a}_z,$$

so daß (6) zu ersetzen ist durch

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z \mathfrak{k}. \tag{6a}$$

Damit ist die Zerlegung des Vektors $\mathfrak{a}$ in drei den Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ parallele Teilvektoren, deren Betrag und Sinn durch Betrag und Vorzeichen der Komponenten bestimmt ist, ausgeführt; diese Zerlegung ist eine eindeutige; ist nämlich $\mathfrak{a}$ gegeben, so sind die Komponenten eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_x = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, x), \quad \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, y), \quad \mathfrak{a}_z = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, z). \tag{7}$$

Umgekehrt ist durch Angabe der drei Komponenten der Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig festgelegt als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kanten die Vektoren $\mathfrak{a}_x \mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}_y \mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}_z \mathfrak{k}$ sind; sein Betrag ist

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2}, \tag{7a}$$

seine Richtung bestimmen die Gleichungen (7).

Die Komponenten der geometrischen Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man, indem man die Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ algebraisch summiert; ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{C}_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x$ usf. Das leuchtet sofort ein, wenn man die Verrückungen, welche den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechen, gemäß § 2 aneinander reiht und dabei die Projektion des beweglichen Punktes auf die x-Achse verfolgt.

Es gilt sogar der allgemeinere Satz: Die Komponente der geometrischen Summe einer beliebigen Zahl von Vektoren nach irgendeiner festen Richtung ist gleich der algebraischen Summe der Komponenten der einzelnen Vektoren nach dieser Richtung.

Dieser Satz gestattet es, die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf neue Achsensysteme umzurechnen. Es sei $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ ein neues

System von Grundvektoren; dasselbe sei mit dem ursprünglichen Systeme durch die Gleichungen verknüpft

$$
(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{i}' = \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k} \\ \mathfrak{j}' = \beta_1 \mathfrak{i} + \beta_2 \mathfrak{j} + \beta_3 \mathfrak{k} \\ \mathfrak{k}' = \gamma_1 \mathfrak{i} + \gamma_2 \mathfrak{j} + \gamma_3 \mathfrak{k} \end{cases}
$$

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

Die Koeffizienten des Gleichungssystemes (8) sind die Kosinus der Winkel, welche die neuen Achsen x', y', z' mit den alten x, y, z einschließen; diese 9 Richtungskosinus sind in der beigefügten Tabelle zusammengestellt. Es seien $\mathfrak{a}_{x'}, \mathfrak{a}_{y'}, \mathfrak{a}_{z'}$ die Komponenten von $\mathfrak{a}$, bezogen auf die neuen Achsen; sie werden erhalten, indem man die Vektoren $\mathfrak{a}_x \mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}_y \mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}_z \mathfrak{k}$ einzeln auf die neuen Achsen x', y', z' projiziert und die entsprechenden Komponenten addiert,

$$
(9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_{x'} &= \alpha_1 \mathfrak{a}_x + \alpha_2 \mathfrak{a}_y + \alpha_3 \mathfrak{a}_z, \\ \mathfrak{a}_{y'} &= \beta_1 \mathfrak{a}_x + \beta_2 \mathfrak{a}_y + \beta_3 \mathfrak{a}_z, \\ \mathfrak{a}_{z'} &= \gamma_1 \mathfrak{a}_x + \gamma_2 \mathfrak{a}_y + \gamma_3 \mathfrak{a}_z. \end{aligned}
$$

Zerlegt man anderseits $\mathfrak{a}$ in die Vektoren $\mathfrak{a}_{x'} \mathfrak{i}'$, $\mathfrak{a}_{y'} \mathfrak{j}'$, $\mathfrak{a}_{z'} \mathfrak{k}'$ und addiert die Projektionen auf die alten Achsen x, y, z, so erhält man

$$
(9\text{a})\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_x &= \alpha_1 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_1 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_1 \mathfrak{a}_{z'}, \\ \mathfrak{a}_y &= \alpha_2 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_2 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_2 \mathfrak{a}_{z'}, \\ \mathfrak{a}_z &= \alpha_3 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_3 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_3 \mathfrak{a}_{z'}. \end{aligned}
$$

Die 9 Richtungskosinus, die in diesen Formeln auftreten, sind natürlich nicht unabhängig voneinander (vgl. § 6).

§ 4. Differentiierung nach einer skalaren Veränderlichen.

Der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach einer skalaren Variabeln s ist definiert als der Grenzwert, dem der

Differenzenquotient $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta s}$ zustrebt, wenn der Zuwachs Δs der unabhängigen Veränderlichen verschwindend klein wird; dabei ist die Differenz $\Delta \mathfrak{r}$ zweier, den Werten s und $s + \Delta s$ der Unabhängigen entsprechender Werte des Vektors in dem Sinne zu verstehen, der im vorigen Paragraphen erklärt wurde.

Als Beispiel betrachten wir eine beliebige Raumkurve (Abb. 4); $\mathfrak{r}$ bezeichne den von einem festen Punkte O nach einem beliebigen Kurvenpunkte gezogenen Radiusvektor, s die Länge des von einem bestimmten Punkte P an gerechneten Bogens. Der Zuwachs $\Delta \mathfrak{r}$ ist gleich der Sehne, die zu dem Bogen Δs gehört. In der Grenze ist $\Delta \mathfrak{r}$ ein Vektor, der tangentiell zur Kurve gerichtet ist und dessen Betrag gleich Δs ist.

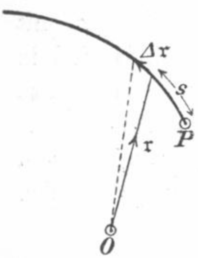

Abb. 4.

Es ist daher

$$\frac{d \mathfrak{r}}{d s} = \mathfrak{t}_1 \tag{10}$$

ein Einheitsvektor, der die Richtung der Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkte anzeigt.

Welches ist nun die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d s^2} = \frac{d \mathfrak{t}_1}{d s}$? Der Vektor $\frac{d \mathfrak{t}_1}{d s}$ liegt in der durch zwei benachbarte Tangentenrichtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ gelegten Ebene, d. h. in der Schmiegungsebene der Kurve. Da der Betrag von $\mathfrak{t}_1$ stets gleich 1 ist, so bewegt sich beim Fortschreiten längs der Kurve der Endpunkt von $\mathfrak{t}_1$, wenn man diesen Vektor von einem festen Punkte aus aufträgt, auf einer Kugel vom Radius 1; mithin steht der Vektor $d\mathfrak{t}_1$ senkrecht auf $\mathfrak{t}_1$; seine Richtung weist parallel der vom Kurvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gezogenen Hauptnormalen. Der Betrag von $d\mathfrak{t}_1$ ist gleich dem Betrage von $\mathfrak{t}_1$ mal dem von zwei benachbarten Hauptnormalen eingeschlossenen Kontingenzwinkel $d\varphi$, also einfach gleich $d\varphi$. Folglich ist der Betrag von $\frac{d \mathfrak{t}_1}{d s}$ gleich $\frac{d\varphi}{d s} = \frac{1}{R}$, wo R den Krümmungsradius der Kurve angibt. Bezeichnet $\mathfrak{R}_1$ einen nach dem Krümmungsmittelpunkte hin weisenden Einheitsvektor, so ist

$$(11) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R}$$

zu setzen.

In den vorangehenden Paragraphen haben wir die Addition und Subtraktion von Vektoren, sowie deren Multiplikation mit Skalaren so erklärt, daß für alle diese Operationen die Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra gelten. Nun ist die Differentiation nach einer skalaren Veränderlichen, wie soeben erläutert wurde, durch einen Grenzprozeß aus diesen Operationen abgeleitet. Auf die Differentiation nach einer skalaren Veränderlichen sind also, auch wenn Vektoren differenziiert werden, die Rechnungsregeln der Differentialrechnung anzuwenden. So gilt z. B. für den Differentialquotienten des Produktes aus dem Vektor $\mathfrak{a}$ und dem Skalar p die Regel:

$$(12) \qquad \frac{dp\mathfrak{a}}{ds} = p\frac{d\mathfrak{a}}{ds} + \mathfrak{a}\frac{dp}{ds}.$$

Ist die unabhängige Veränderliche s als Funktion einer anderen skalaren Veränderlichen t anzusehen, so gilt allgemein

$$(13) \qquad \frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Ein Beispiel hierfür bietet die Bewegung eines Punktes längs einer Raumkurve, wenn statt der Bogenlänge s die Zeit t als Unabhängige eingeführt wird. Der erste Differentialquotient des Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Zeit

$$(14) \qquad \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathfrak{t}_1 \cdot \frac{ds}{dt}$$

definiert den Geschwindigkeitsvektor des bewegten Punktes. Er weist parallel der Tangente der Bahn, sein Betrag ist gleich $\frac{ds}{dt}$.

Nochmaliges Differentiieren nach der Zeit ergibt, unter Berücksichtigung der Regeln (12) und (13), den Beschleunigungsvektor:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder nach Gleichung (11)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{N}_1 \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{14a}$$

Diese Gleichung stellt den Beschleunigungsvektor als geometrische Summe zweier Vektoren dar; der erste ist parallel der Hauptnormalen der Bahnkurve gerichtet und seinem Betrage nach gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividiert durch den Krümmungsradius; der zweite weist parallel der Bahntangente, sein Betrag ist gleich der zeitlichen Änderung des Betrages der Geschwindigkeit. Diese Zerlegung der Beschleunigung in Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung ergibt sich durch Vektorrechnung in überaus einfacher Weise.

§ 5. **Das innere (skalare) Produkt.**

Die Bewegungsgleichung eines freien materiellen Punktes von der Masse m lautet

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K} = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{K}_h. \tag{15}$$

Der Vektor $\mathfrak{K}$ stellt die Resultierende aller an dem beweglichen Punkte angreifenden Kräfte dar. Der Satz vom Kräfteparallelogramm besagt, daß die Zusammensetzung der einzelnen Kräfte nach den Regeln der Vektoraddition zu geschehen hat. Dieser Satz ist natürlich a priori ebensowenig durch Vektorrechnung wie durch gewöhnliche Analysis und Algebra beweisbar, er ist ein Erfahrungssatz.

Nach Gleichung (14 a) ist

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \mathfrak{K}_s$$

die tangentielle Komponente der Kraft $\mathfrak{K}$. Wir multiplizieren mit $\frac{ds}{dt}$, setzen $\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = T$ für die lebendige Kraft des materiellen Punktes und erhalten

$$\frac{dT}{dt} = \mathfrak{K}_s \cdot \frac{ds}{dt} = |\,\mathfrak{K}\,| \cdot |\,\mathfrak{v}\,| \cdot \cos(\mathfrak{K}, \mathfrak{v}). \tag{16}$$

Hier steht links die zeitliche Zunahme der lebendigen Kraft, rechts die pro Zeiteinheit von der Kraft $\mathfrak{K}$ geleistete Arbeit; beides sind skalare Größen.

Wir bezeichnen nun das rechts stehende Produkt aus den Beträgen der Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{v}$ und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels

$$\mathfrak{K}\mathfrak{v} = |\mathfrak{K}| \cdot |\mathfrak{v}| \cdot \cos(\mathfrak{K}\mathfrak{v}) \tag{17}$$

als skalares oder (nach Graßmann) inneres Produkt der beiden Vektoren und übertragen diese Bezeichnung auf beliebige andere Vektoren.

Der Kosinus des Winkels zwischen den Richtungen der beiden Vektoren wird $+1$, wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet, -1, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind; er wird Null, wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Wendet man dies auf die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ an, so erhält man

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0, \tag{18}$$

hingegen

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1. \tag{19}$$

Das skalare Produkt bleibt, nach der Definitionsgleichung (17), ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht. Die innere Multiplikation zweier Vektoren befolgt das kommutative Gesetz. Man kann das skalare Produkt (17) zweier Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{v}$ auch auffassen als algebraisches Produkt aus dem Betrage des einen Vektors (etwa $\mathfrak{v}$), und aus der nach dessen Richtung genommenen Komponente des anderen Vektors ($\mathfrak{K}$). Aus dieser Deutung folgt sofort das distributive Gesetz der skalaren Multiplikation:

$$\mathfrak{v}\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{K}_h = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{v}\mathfrak{K}_h. \tag{20}$$

Es ist nämlich nach einem bereits in § 2 benutzten Satze die nach irgendeiner Richtung genommene Komponente der geometrischen Summe der Vektoren $\mathfrak{K}_h$ gleich der algebraischen Summe der nach dieser Richtung genommenen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{K}_h$. Werden, wie oben, die Vektoren $\mathfrak{K}_h$ als Kräfte, $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit angesehen, so besagt (20): Die Arbeit der resultierenden Kraft ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte.

Aus der Gültigkeit des kommutativen und des distributiven Gesetzes ergeben sich für die innere Multiplikation die Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra. So gilt z. B.:

$$(21) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{d}.$$

Drückt man die beiden Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des skalaren Produktes durch die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aus, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z\mathfrak{k}).$$

Wenn man die rechte Seite nach den gewöhnlichen Multiplikationsregeln ausrechnet und (18) und (19) berücksichtigt, so folgt

$$(22) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z,$$

eine Formel, die gemäß der Definition des skalaren Produktes und der Gleichung (7) in die bekannte Formel der analytischen Geometrie

$$(22\text{a}) \qquad \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \cos(\mathfrak{A}x)\cos(\mathfrak{B}x) + \cos(\mathfrak{A}y)\cos(\mathfrak{B}y) + \\ + \cos(\mathfrak{A}z)\cos(\mathfrak{B}z)$$

übergeht.

Eine andere, einfache Anwendung des skalaren Produktes mag das Parallelogramm der Abb. 2 betreffen, dessen Seiten die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Diagonalen die Vektoren $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ darstellen. Es ist

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2,$$
$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2 = 2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}^2.$$

Da nach (Gl. 7a) allgemein das Quadrat eines Vektors gleich dem Quadrate seines Betrages ist, so haben wir den Satz bewiesen, daß die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes gleich der Summe der Quadrate über allen vier Seiten ist. Ferner gilt

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2=4\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d. h. das skalare Produkt aus den Seiten eines Parallelogrammes ist gleich dem vierten Teile von der Differenz der Quadrate der Diagonalen.

Will man das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nach der gemeinsamen unabhängigen Veränderlichen t differentiieren, so hat man den Grenzwert zu berechnen, dem der Quotient

$$\frac{(\mathfrak{A}+\varDelta\mathfrak{A})\cdot(\mathfrak{B}+\varDelta\mathfrak{B})-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\varDelta t}$$

mit verschwindendem $\varDelta t$ zustrebt. Die Anwendung der Multiplikationsregeln ergibt

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt}=\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}+\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \tag{23}$$

Es gilt demnach für die Differentiation des skalaren Produktes zweier Vektoren nach einer skalaren Veränderlichen die bekannte Differentiationsregel.

§ 6. Das äußere Produkt oder Vektorprodukt.

Die Verrückungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmen ein Parallelogramm (Abb. 5). Mit Graßmann nennen wir dasselbe „äußeres Produkt“ der beiden Verrückungen und schreiben es $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, indem wir die beiden Vektoren in eckige Klammern einschließen. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes beträgt

$$|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\sin(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),$$

seine Ebenenstellung ist durch die Richtungen, sein Umlaufssinn durch die Reihenfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ festgelegt. Da wir Verrückungen als gleichwertig betrachten, falls sie nach Betrag und Richtung übereinstimmen, auch dann, wenn sie von verschiedenen Anfangslagen

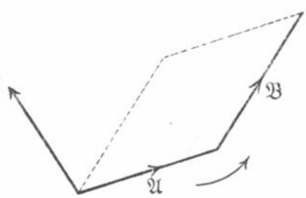

Abb. 5.

ausgehen, so gelten zwei derartige Parallelogramme als gleichwertig, wenn sie von beliebigen Punkten des Raumes aus in zwei parallelen Ebenen konstruiert sind. Wir wollen sie sogar auch dann noch als gleichwertig betrachten, wenn ihre Seitenlängen verschieden sind und sie nur nach Flächeninhalt, Ebenenstellung und Umlaufssinn übereinstimmen. Ferner ordnen wir allen gleichwertigen Parallelogrammen eine einzige Verrückung zu durch folgende Festsetzung: der Betrag der Verrückung soll numerisch gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms sein, seine Richtung soll senkrecht zu der Ebene des Parallelogramms stehen, und dessen Umlaufssinne so zugeordnet sein, wie bei einer rechtsgängigen Schraube die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne zugeordnet ist. Es entsprechen also zwei gleichwertige Parallelogramme einer und derselben Verrückung, zwei verschiedenwertige entsprechen verschiedenen Verrückungen, umgekehrt ist durch Angabe der repräsentierenden Verrückung das Parallelogramm nach Betrag, Ebenenstellung und Umlaufssinn festgelegt, und zwar ändern sich diese Bestimmungsstücke in stetiger Weise mit Betrag und Richtung der Verrückung.

Nach der von uns zugrunde gelegten Definition des Vektors (§ 1) ist das so erklärte *äußere Produkt zweier Vektoren selbst ein Vektor*; es wird daher vielfach auch „vektorielles Produkt“ oder „*Vektorprodukt*“ genannt. Gerade darum haben wir die Definition des Vektors (§ 1) so allgemein gehalten, um auch solche geometrische und physikalische Größen, die nicht einen Fortschreitungssinn, sondern einen Umlaufs- oder Drehsinn besitzen, als Vektoren bezeichnen zu können.

Welche Bedeutung kommt nun den Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{24}$$

zu? Da $\mathfrak{C}$ mit einer jeden der Achsen denselben Winkel einschließt, wie das dem Vektor $\mathfrak{C}$ zugeordnete Parallelogramm mit der zu der Achse senkrechten Ebene, so sind die Komponenten von $\mathfrak{C}$ nach den Koordinatenachsen (xyz) numerisch gleich den

Flächeninhalten der senkrechten Projektionen des Parallelogramms auf die yz-, zx-, xy-Ebene, ihr Vorzeichen legt den Umlaufssinn dieser Projektionen fest.

Ändert man die Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukte, so kehrt sich nach unseren Festsetzungen der Umlaufssinn des Parallelogramms, mithin die Richtung der zugeordneten Verrückung um. Es gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{25}$$

Die äußere Multiplikation befolgt nicht das kommutative Gesetz.

Dagegen bleibt das distributive Gesetz auch für die Vektorprodukte gültig. Es ist

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]. \tag{26}$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze man $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{D}$ und konstruiere das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Diagonale dem Vektor $\mathfrak{D}$ entspricht. Man projiziere es auf die zu $\mathfrak{C}$ senkrechte Ebene; man erhält so wiederum ein Parallelogramm mit den Seiten $|\mathfrak{A}| \cdot \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$, $|\mathfrak{B}| \cdot \sin(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und der Diagonale $|\mathfrak{D}| \cdot \sin(\mathfrak{D}\mathfrak{C})$. Dieses Parallelogramm vergrößere man im Verhältnis $|\mathfrak{C}| : 1$ und drehe es in seiner Ebene um einen rechten Winkel. Alsdann stellen die Seiten die äußeren Produkte $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dar, die Diagonale aber das äußere Produkt $[\mathfrak{D}\mathfrak{C}]$; dieses letztere ist mithin die geometrische Summe der beiden ersteren, wie die Gleichung (26) behauptet.

Man darf also bei der Ausrechnung der Vektorprodukte die Regeln der gewöhnlichen Algebra anwenden, mit der Einschränkung, daß bei der Vertauschung der Reihenfolge zweier Vektoren das Vorzeichen des Produktes umzukehren ist.

Die Vektorprodukte der Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind

$$\begin{cases} [\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}, & [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}, \quad [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{j}\mathfrak{i}] = -\mathfrak{k}, & [\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = -\mathfrak{i}, \quad [\mathfrak{i}\mathfrak{k}] = -\mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Mithin gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [(\mathfrak{A}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{k})]$$
$$= \mathfrak{i}(\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y) + \mathfrak{j}(\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z) + \mathfrak{k}(\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x).$$

In Determinantenform läßt sich diese Gleichung wie folgt schreiben

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Die Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x$ sind die Komponenten des Vektorproduktes, d. h. die Projektionen des Parallelogramms $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ auf die Koordinatenebenen.

Für die Differentiierung des Vektorproduktes nach einer skalaren Variabeln t gilt die Rechnungsregel

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right]. \tag{29}$$

Wir betrachteten in § 3 zwei Systeme von Grundvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}'\,\mathfrak{j}'\,\mathfrak{k}'$, die durch die Gleichungen (8) verknüpft waren.

Wir erhalten Beziehungen zwischen den Koeffizienten dieser Gleichungen, indem wir die Regeln (18, 19) der inneren und die Regeln (27) der äußeren Multiplikation von Grundvektoren anwenden.

Die Regeln (18) ergeben 6 Gleichungen, von denen es genügt, die beiden folgenden zu schreiben.

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Die Regeln (19) liefern gleichfalls 6 Beziehungen von der Form

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \text{ usf.}$$

Aus den Regeln (27) aber folgt $[\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'] = \mathfrak{i}'$, und wenn wir die $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ durch die $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ausdrücken

$$\mathfrak{i}(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \mathfrak{j}(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \mathfrak{k}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$
$$= \alpha_1\mathfrak{i} + \alpha_2\mathfrak{j} + \alpha_3\mathfrak{k}.$$

Die Gleichung zerfällt in die drei folgenden

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 .$$

Zu diesen Gleichungen kommen die durch zyklische Vertauschung der α, β, γ entstehenden. Ferner folgt, mit Rücksicht auf die Beziehung $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, für die Determinante der 9 Winkelkosinus

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 .$$

Diese Beziehungen gelten nur dann, wenn das System $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ wie das der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ein Rechtssystem ist. Wäre es ein Linkssystem, so würde $[\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}'$, $[\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'] = -\mathfrak{i}'$ sein und es würde die Determinante der 9 Winkelkosinus den Wert -1 annehmen.

§ 7. **Produkte dreier Vektoren.**

Da wir weiterhin die eckigen Klammern zur Kennzeichnung der Vektorprodukte verwenden, so werden wir runde Klammern benutzen, wenn wir zwei skalar zu multiplizierende Vektoren von den übrigen trennen wollen. Produkte dreier Vektoren kann man in drei verschiedenen Weisen ableiten.

I. Produkt aus einem Vektor und dem skalaren Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Da $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein Skalar ist, so ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein zu $\mathfrak{A}$ paralleler Vektor. Hieraus erhellt, daß z. B. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ ein von dem vorigen völlig verschiedener Vektor ist.

II. Skalares Produkt aus einem Vektor und dem vektoriellen Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Hier gilt die wichtige Relation

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]. \tag{30}$$

Es stellt nämlich jeder dieser Ausdrücke den Rauminhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds dar.

Um sich hiervon zu überzeugen, beachte man, daß der Betrag von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dem Flächeninhalt der durch die Kanten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildeten Seitenfläche des Parallelepipeds gleich ist; die Richtung von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht auf diesem Parallelogramm, und zwar weist sie nach derselben Seite, wie $\mathfrak{A}$, vorausgesetzt, daß die Aufeinanderfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einem Rechtssystem führt. In diesem Falle erhalten wir das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, indem wir den Flächeninhalt jener Seitenfläche mit der Länge des vom Endpunkte der Kante $\mathfrak{A}$ auf sie gefällten Lotes multiplizieren. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ in der Tat den Inhalt des Parallelepipeds angibt, und zwar mit positivem Vorzeichen, wenn die Aufeinanderfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem, mit negativem Vorzeichen, wenn sie ein Linkssystem bildet.

Es folgt gleichzeitig, daß die Beziehungen (30) erfüllt sind, indem für jedes der beiden anderen Produkte dieselben Schlüsse gelten, und weil die Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleichfalls zu Rechtssystemen führt, wenn dies für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zutrifft.

Der Ausdruck der drei Produkte durch die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist nach (22) und (28)

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix}. \tag{31}$$

III. Vektorprodukt aus einem Vektor und dem Vektorprodukte zweier anderer Vektoren: $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{F}$.

Der Vektor $\mathfrak{F}$ liegt in der Ebene, die durch die Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmt ist, und zwar senkrecht zur Projektion von $\mathfrak{A}$ auf diese Ebene. Denn der Vektor $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht zu jener Ebene, und $\mathfrak{F}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{A}$ und auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{F}$ ist nach (28)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{A}_y(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) - \mathfrak{A}_z(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z);$$

wir ordnen folgendermaßen

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{C}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{C}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z),$$

oder nach (22)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B});$$

entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Komponenten; wir fassen sie zu der Vektorgleichung zusammen

$$\text{(32)} \qquad \big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Hierdurch ist ein Produkt der dritten Art auf zwei Produkte der ersten Art zurückgeführt. Mit Hilfe dieser Beziehung findet man auch leicht

$$\text{(32a)} \qquad \big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] + \big[\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]\big] + \big[\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big] = 0,$$

indem man die Glieder nach (32) entwickelt.

Endlich berechne man das skalare Produkt aus zwei Vektorprodukten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$.

Dieses ist ein Produkt der zweiten Art, in dem der erste Vektor durch das Vektorprodukt zweier anderer ersetzt ist; wir wenden die Regel (31) an und erhalten

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \mathfrak{C}\big[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big].$$

Da nun nach Regel (32)

$$\big[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big] = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

zu setzen ist, so folgt

$$\text{(33)} \qquad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}).$$

§ 8.

Polare und axiale Vektoren. Skalare und Pseudoskalare.

Obwohl man dem Vektorprodukte zweier Verrückungen in umkehrbar eindeutiger Weise eine Verrückung zuordnen kann, so besteht doch zwischen dem mit Umlaufssinn begabten Parallelogramme und der ihm zugeordneten, mit einem Fortschreitungssinne versehenen Strecke (Abb. 5) ein gewisser Unterschied. Das Wesentliche dieses Unterschiedes erkennt man, wenn man das Parallelogramm $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ an seiner eigenen Ebene spiegelt; der Umlaufssinn bleibt bei dieser Spiegelung ungeändert, die zugeordnete Verrückung hingegen kehrt ihre Richtung um. Hiermit hängt es zusammen, daß wir zur eindeutigen Bestimmung der zugeordneten Verrückung einer rechtsgängigen Schraube bedurften; bei der Spiegelung wird diese zu einer linksgängigen, in dem gespiegelten Systeme entspricht mithin die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne wie bei einer linksgängigen Schraube.

Die geradlinige Verrückung und das Vektorprodukt zweier solcher sind die Repräsentanten zweier Arten von Vektoren, die wir als polare und axiale Vektoren unterscheiden. Den polaren Vektoren kommt eine Fortschreitungsrichtung, den axialen ein Drehsinn zu. Ist einem mechanischen Vorgange ein Vektor zuzuordnen, so kann man folgendermaßen über die Art des Vektors entscheiden: Man konstruiere die durch den Vektor bestimmte Gerade; bleibt bei Spiegelung an einer zur Geraden senkrechten Ebene der Vorgang ungeändert, so ist ihm ein axialer Vektor zuzuordnen; verläuft dagegen der gespiegelte Vorgang in entgegengesetztem Sinne, so gehört zu ihm ein polarer Vektor. In der Mechanik starrer Körper sind Translationsgeschwindigkeit und Kraft polare, Rotationsgeschwindigkeit und Drehkraft axiale Vektoren.

Solange man keine allgemein gültige mechanische Theorie der elektromagnetischen Vorgänge besitzt, ist es nicht ohne weiteres möglich, die polare oder axiale Natur der elektrischen und magnetischen Vektoren zu erkennen. Man muß hier nach anderen Kriterien suchen; doch hat die Entwicklung der Wissenschaft die Vermutung Maxwells bestätigt, daß die magnetischen Vektoren axialer, die elektrischen polarer Art sind.

Rechnet man mit Komponenten, so kommt der Unterschied der beiden Arten von Vektoren nicht zur Geltung, solange man ausschließlich ein Rechtssystem zugrunde legt. Geht man aber zu einem Linkssystem über, indem man etwa die Richtungen der drei Grundvektoren umkehrt, so wechseln die Komponenten eines polaren Vektors das Vorzeichen, diejenigen eines axialen Vektors hingegen behalten es bei, da der durch die Reihenfolge der Grundvektoren festgelegte Umlaufssinn in den Koordinatenebenen der gleiche bleibt. So kommt es, daß in Gleichungen, welche Komponenten beider Arten von Vektoren zueinander in Beziehung setzen, Vorzeichenwechsel vorzunehmen sind, sobald man ein Rechtssystem mit einem Linkssystem vertauscht. Aus dem Umstande, daß die Komponenten des äußeren Produktes zweier Vektoren sich aus algebraischen Produkten der Komponenten der beiden Vektoren zusammensetzen, folgt ohne weiteres die Regel:

Das Vektorprodukt zweier polarer und ebenso das zweier axialer Vektoren ist ein axialer, das Vektorprodukt eines polaren und eines axialen Vektors ist ein polarer Vektor.

Wie steht es nun mit dem skalaren Produkte eines polaren und eines axialen Vektors? Ein solches wurde im vorigen Paragraphen betrachtet (Gleichung 30, 31) und als Rauminhalt des durch drei polare Vektoren bestimmten Parallelepipeds gedeutet; es wurde bemerkt, daß das Vorzeichen des Produktes positiv oder negativ sein kann. Wir können jetzt hinzufügen, daß das Vorzeichen zu wechseln ist, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Wir werden so dazu geführt, auch bei den Skalaren zwei Arten zu unterscheiden, die wir als Skalare erster und zweiter Art, oder als Skalare schlechtweg und Pseudoskalare unterscheiden. Zu der ersten Art gehören alle diejenigen Skalaren, die nicht bloße Rechnungsgrößen sind, sondern die Mengen wirklicher Substanzen messen, so z. B. Masse, Energie; denn diese werden bei Veränderung des Koordinatensystemes das Vorzeichen nicht ändern. Als Rechnungsgrößen hingegen treten, wie wir später sehen werden, auch Pseudoskalare in der mathematischen Physik auf.

Durch Multiplikation mit einem Pseudoskalar wird der polare Vektor zum axialen, der axiale zum polaren.

§ 9. Bewegung starrer Körper.

Es wird sich als nützlich erweisen, die Begriffe der Vektoralgebra zunächst an einigen, der Mechanik starrer Körper entnommenen Beispielen zu erläutern, um an geläufigen Dingen die Anwendung der Regeln zu üben.

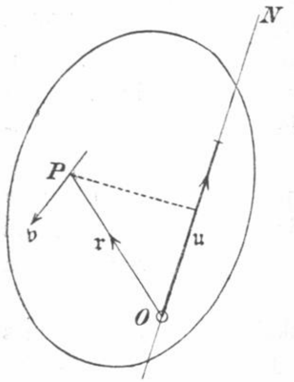

Abb. 6.

Ein starrer Körper sei in einem Punkte O festgehalten, er rotiere um eine Achse ON (Abb. 6). Wir tragen von O aus auf dieser Achse eine Strecke ab, deren Länge den Betrag der Winkelgeschwindigkeit anzeigt, und zwar nach derjenigen Richtung, die der Drehbewegung sich zuordnet wie die Fortschreitungsrichtung dem Drehsinne bei einer rechtshändigen Schraubenbewegung. Durch diese Festsetzung ist der Rotationsbewegung ein Vektor $\mathfrak{u}$ zugeordnet. Ist ferner $\mathfrak{r}$ der von O aus nach irgendeinem Punkte P des starren Körpers gezogene Radiusvektor, so ist offenbar dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]. \tag{34}$$

In der Tat, der Punkt P bewegt sich senkrecht zu der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}$ gelegten Ebene; der Pfeil, der die Richtung von $\mathfrak{v}$ anzeigt, ist, wie die Figur lehrt, so gerichtet, wie das Vektorprodukt. Dem Betrage nach finden wir $\mathfrak{v}$ durch Fällen eines Perpendikels von P auf die Drehachse und Multiplikation desselben mit der Winkelgeschwindigkeit; das gibt aber genau den Betrag $|\,\mathfrak{u}\,| \cdot |\,\mathfrak{r}\,| \cdot \sin(\mathfrak{u}\mathfrak{r})$ des Vektorproduktes, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus dem durch Gleichung (34) ausgesprochenen Satze folgt sofort die Art der Zusammensetzung mehrerer Drehgeschwindigkeiten, deren Achsen alle durch denselben festen Punkt O gehen. Man hat, wenn $\mathfrak{u}', \mathfrak{u}'' \ldots$ die Drehgeschwindigkeiten und $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'' \ldots$ die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeiten des willkürlichen Punktes P des starren Körpers angeben, für die resultierende Geschwindigkeit von P den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' + \cdots = [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}] + [\mathfrak{u}''\mathfrak{r}] + \cdots = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

wo $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'' + \cdots$ eine Drehgeschwindigkeit um eine gleichfalls durch O gehende Achse darstellt, die sich aus den einzelnen Drehgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$... nach den Regeln der Vektoraddition zusammensetzt.

In der Kinematik starrer Körper wird gezeigt, daß, bei festgehaltenem Bezugspunkt O, die Rotationsbewegung (34) die allgemeinste Bewegung des starren Körpers darstellt. Ist jedoch der Punkt O nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ im Raume, so wird die Geschwindigkeit der Punkte des starren Körpers gegeben durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]. \tag{35}$$

Man erhält, entsprechend den 6 Freiheitsgraden des starren Körpers, den allgemeinsten Bewegungszustand desselben, wenn man die Vektoren $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{u}$ der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit beliebig läßt. Es sind, wenn man den Bezugspunkt O vorgibt, durch den Bewegungszustand des Körpers die Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ eindeutig bestimmt.

Die Zerlegung in eine translatorische und eine rotatorische Bewegung hängt indessen von der Wahl des Bezugspunktes ab; wählen wir statt O einen anderen Bezugspunkt O', so stellt sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ dar als Resultierende der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0'$ des neuen Bezugspunktes O' und der durch die Rotation $\mathfrak{u}'$ um eine durch O' gehende Achse hervorgebrachten Geschwindigkeit; es gilt neben (35) die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}'], \tag{35a}$$

wo $\mathfrak{r}'$ den von O' nach dem Punkte P gezogenen Radiusvektor darstellt. Ist weiter $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ der Radiusvektor OO', so ist nach (35)

$$\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{a}] \tag{36}$$

die Geschwindigkeit des neuen Bezugspunktes. Setzt man dies in die Gleichung (35) ein, so erhält man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u},\ \mathfrak{r} - \mathfrak{a}] = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}'],$$

und es wird die in (35a) noch unbestimmt gelassene Geschwindigkeit $\mathfrak{u}'$ der Drehung um O'

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}\,. \tag{37}$$

Bei Verlegung des Bezugspunktes bleibt mithin der Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ stets der gleiche, der Vektor $\mathfrak{v}_0$ der translatorischen Geschwindigkeit nur dann, wenn der Bezugspunkt parallel dem Vektor $\mathfrak{u}$ verschoben wird. Im allgemeinen ändert er sich bei Verlegung des Bezugspunktes gemäß (36). Es kommt eine zu $\mathfrak{u}$ senkrechte Geschwindigkeit dazu.

War für den Bezugspunkt O speziell $\mathfrak{v}_0$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$, so kann man den neuen Bezugspunkt O' immer so wählen, daß $\mathfrak{v}_0 = -[\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$ wird. Die von O' aus betrachtete Bewegung stellt sich alsdann als reine Rotation dar.

Im anderen Falle, wenn der Vektor $\mathfrak{v}_0$ nicht zu $\mathfrak{u}$ senkrecht steht, kann man ihn durch geeignete Wahl von $\mathfrak{a}$ in zwei Vektoren zerlegen: $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_1 - [\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$, von denen der erste zu $\mathfrak{u}$ parallel, der zweite zu $\mathfrak{u}$ senkrecht ist. Verlegt man den Bezugspunkt O' nach dem Endpunkte von $\mathfrak{a}$, oder nach irgendeinem Punkte der durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}$ gehenden, zu $\mathfrak{u}$ parallelen Geraden, so kann man die Bewegung als Schraubenbewegung auffassen. Die Geschwindigkeit von O' wird nämlich, nach (36), $\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_1$, und die Drehbewegung um O' wird durch den zu $\mathfrak{v}_1$ parallelen Vektor $\mathfrak{u}$ bestimmt. Dabei hängt es von dem Vorzeichen ($+$ oder $-$) des skalaren Produktes $\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{u}$ ab, ob die Schraubenbewegung eine rechtshändige oder eine linkshändige ist.

Der Vektor $\mathfrak{u}$ ist ein axialer Vektor; das folgt aus Gleichung (34), welche den polaren Vektor $\mathfrak{v}$ als Vektorprodukt von $\mathfrak{u}$ und dem polaren Vektor $\mathfrak{r}$ darstellt, gemäß dem Satze des § 8; bei der Festlegung eines dem Vektor $\mathfrak{u}$ zugehörigen Fortschreitungssinnes konnten wir in der Tat nicht umhin, von einer rechtsgängigen Schraube zu reden.

Die axiale Natur von $\mathfrak{u}$ geht auch daraus hervor, daß die Drehbewegung ungeändert bleibt, wenn wir sie an einer zur Drehachse senkrechten Ebene spiegeln.

Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers ist bestimmt durch zwei Vektoren, einen polaren $\mathfrak{v}_0$ und einen axialen $\mathfrak{u}$, die beide von demselben Punkte aus zu konstruieren sind. Der Pseudoskalar $\mathfrak{v}_0\mathfrak{u}$, der einen Schraubungssinn festlegt, ist ein typischer Repräsentant dieser Größenklasse. Er ist positiv oder negativ, je nachdem die Schraubenbewegung ihrer Art nach mit der bei der eindeutigen Festlegung von $\mathfrak{u}$ verwandten übereinstimmt oder nicht. Da wir uns bei der Zuordnung des Vektors $\mathfrak{u}$ einer Rechtsschraube bedient haben, so ist jener Pseudoskalar positiv für solche Bewegungen des starren Körpers, die sich durch eine Rechtsschraube, negativ für solche, die sich durch eine Linksschrauhe darstellen lassen. Umgekehrt wäre sein Vorzeichen zu wählen, wenn wir der Drehbewegung den Vektor $\mathfrak{u}$ durch eine Linksschraube zugeordnet hätten.

§ 10. Prinzip der virtuellen Arbeit und Satz der statischen Momente.

An den Punkten eines starren Körpers mögen die Kräfte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, ... $\mathfrak{K}_n$ angreifen. Um zu beurteilen, ob Gleichgewicht besteht, denke man sich von der betreffenden Lage aus eine Bewegung vorgenommen. Diese Bewegung wird in Wirklichkeit nur dann eintreten können, wenn die algebraische Summe der Arbeiten, die von den einzelnen Kräften dabei geleistet werden, positiv ist; denn nur dann ist der Zuwachs an lebendiger Kraft, der den Übergang von Ruhe zur Bewegung begleitet, mit dem Energieprinzip verträglich. Genügt keine der kinematisch möglichen Bewegungen jener Bedingung, so wird der Körper in Ruhe bleiben; die allgemeinste Gleichgewichtsbedingung verlangt daher, daß bei allen kinematisch möglichen (virtuellen) Bewegungen die Arbeit der angreifenden Kräfte negativ oder Null ist.

Hat man es insbesondere mit einem System zu tun, in dem zu einer jeden Bewegung auch die entgegengesetzte kinematisch möglich ist, so würde negativer Arbeit bei jener positive bei dieser entsprechen. Hier nimmt die Gleichgewichtsbedingung die Form an

$$\frac{dA}{dt} = \sum_1^n (\mathfrak{K}\mathfrak{v}) = 0 \tag{38}$$

für alle virtuellen Bewegungen. Diese für das Gleichgewicht notwendige und hinreichende Bedingung spricht das „Prinzip der virtuellen Arbeit“ aus.

Für unseren starren Körper ist die allgemeinste Bewegung durch (35) gegeben. Wir erhalten daher

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \cdot \sum_1^n \mathfrak{K} + \sum_1^n \mathfrak{K} \cdot [\mathfrak{u}\mathfrak{r}];$$

indem wir das zweite Glied nach Regel (30) umformen, formulieren wir die Gleichgewichtsbedingung folgendermaßen

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \cdot \sum_1^n \mathfrak{K} + \mathfrak{u} \cdot \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = 0 \tag{39}$$

für beliebige Werte der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit. Diese Forderung ist offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn sowohl

$$\sum_1^n \mathfrak{K} = 0,$$

als auch

$$\sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = 0. \tag{40}$$

Die erste Gleichung verlangt, daß die geometrische Summe aller Kräfte verschwindet; in der zweiten bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von dem Bezugspunkte O nach dem Angriffspunkte der betreffenden Kraft gezogen ist; wir können ihn als Hebelarm der Kraft $\mathfrak{K}$ bezeichnen und das Vektorprodukt aus Hebelarm und Kraft als statisches Moment der Kraft. Wir fassen also das statische Moment als Vektorgröße auf, und zwar als axialen Vektor, weil es einen Umlaufssinn in einer Ebene anzeigt, und sprechen die Gleichung (40) so aus: Die Vektorsumme der statischen Momente der einzelnen Kräfte für den gegebenen Momentenpunkt soll gleich Null sein. Diese vektorielle Auffassung des Momentensatzes besitzt manche Vorzüge vor der sonst gebräuchlichen, welche für die Komponenten der Momente nach drei senkrechten Achsen einzeln die Gleichgewichtsbedingung aufstellt.

Geht man zu einem neuen Bezugspunkt O' über, dessen Lage relativ zu O durch $\mathfrak{a}$ gegeben ist, so ist die Resultierende der Kräfte $\sum_1^n \mathfrak{K}$ offenbar die gleiche. Hingegen ist das resultierende Moment jetzt $\sum_1^n [\mathfrak{r}'\mathfrak{K}]$, wo $\mathfrak{r}'$ den von O' als Momentenpunkt ausgehenden Hebelarm bezeichnet. Da allgemein $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}'$ gilt, so wird das resultierende Moment für O

$$(41) \qquad \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = \left[\mathfrak{a}, \sum_1^n \mathfrak{K}\right] + \sum_1^n [\mathfrak{r}'\mathfrak{K}].$$

Das Moment für O wird demnach erhalten, indem zu dem Moment für O' das Moment der in O' angreifenden Resultierenden $\sum_1^n \mathfrak{K}$ in bezug auf O hinzugefügt wird.

Das allgemeinste, an einem starren Körper angreifende Kräftesystem läßt sich durch Angabe zweier Vektoren, eines polaren, der Kraft, und eines axialen, des Momentes, für einen gegebenen Momentenpunkt darstellen. Der polare Vektor, die Kraft, spielt in der Statik die entsprechende Rolle, wie in der Kinematik der axiale Vektor $\mathfrak{u}$ der Rotationsgeschwindigkeit, insofern, als er bei Verlegung des Bezugspunktes ungeändert bleibt; der axiale Vektor hingegen, das Moment, entspricht dem polaren Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_0$, indem er bei Verlegung des Bezugspunktes im allgemeinen seinen Wert ändert. Ebenso wie der Vektor $\mathfrak{u}$ längs seiner Richtung verschoben werden konnte, ohne $\mathfrak{v}_0$ zu ändern, so kann die Kraft längs ihrer eigenen Richtung verschoben werden, ohne ein neues Moment zu ergeben. Und wie die allgemeinste Bewegung des starren Körpers sich bei geeigneter Wahl der Drehachse als Schraubenbewegung darstellte, so ist das allgemeinste Kräftesystem, wenn man die Angriffslinie der Kraft passend wählt, aufzufassen als Kraft, kombiniert mit einem Moment um die Angriffslinie als Achse. Der Charakter der hierdurch bestimmten Schraube wird wiederum durch einen Pseudoskalar, nämlich das skalare Produkt aus Kraft und Moment angezeigt; positives Vorzeichen desselben entspricht der Rechts-, negatives der Linksschraube. Wirkliche Skalare hingegen sind selbstverständlich die in den Ausdruck der Arbeit (39) eingehenden inneren Produkte aus Geschwindigkeit und Kraft, sowie aus Drehgeschwindigkeit und Moment.

§ 11. Stabilität des Gleichgewichtes.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit unterscheidet nicht zwischen stabilem und instabilem Gleichgewicht. Betrachten wir etwa ein homogen mit Masse erfülltes Ellipsoid, das auf einer horizontalen Ebene rollen kann. Berührt es in dem Endpunkte einer der drei Achsen die Ebene, so verschwindet das Moment aus der im Schwerpunkte angreifenden Schwerkraft und der ihr entgegengesetzt gleichen Reaktionskraft der Ebene. Dennoch liegen sehr verschiedene Fälle des Gleichgewichtes vor, je nachdem die große, die mittlere oder die kleine Achse des Ellipsoids vertikal steht.

Man kann hier die Arbeit der äußeren Kräfte

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

setzen, wo U die potentielle Energie bezeichnet, die der Körper infolge der Schwerkraft besitzt. Es ist dann zwischen solchen Gleichgewichten zu unterscheiden, bei denen U ein Maximum, und solchen, bei denen es ein Minimum ist. Ist U in der zu betrachtenden Lage ein M a x i m u m, so gebe man dem Körper einen kleinen Stoß; die lebendige Kraft, die der Körper durch den Stoß erhielt, wird im Verlaufe der Bewegung sich auf Kosten der potentiellen Energie vergrößern, und er wird mit wachsender Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage verlassen. Ein solches Gleichgewicht ist demnach labil. Ist hingegen U ein Minimum, so vergrößert sich die potentielle Energie bei Entfernung aus der Gleichgewichtslage auf Kosten der lebendigen Kraft, und der Körper wird sich nur so weit bewegen können, bis die lebendige Kraft des Stoßes erschöpft ist. Je geringer die lebendige Kraft des Stoßes war, desto kleiner ist die erreichte Entfernung aus der Gleichgewichtslage. Dieses Gleichgewicht ist stabil.

Bei dem vorhin angeführten Beispiele ist die potentielle Energie proportional der Höhe des Schwerpunktes über einer beliebig festzusetzenden horizontalen Ebene. Die potentielle Energie ist ein absolutes Maximum, wenn das Ellipsoid im Endpunkte der großen Achse, ein absolutes Minimum, wenn es im Endpunkte der kleinen Achse die Ebene berührt. Im ersteren Falle ist das Gleichgewicht labil, im zweiten stabil. Fraglich kann nur im dritten Falle, wo die mittlere Achse vertikal steht, die Stabilität des Gleichgewichtes sein; hier nimmt die potentielle Energie bei einigen der möglichen Bewegungen zu, bei anderen nimmt sie ab. Da jedenfalls Stöße eintreten können, welche Bewegungen der letzteren Art einleiten, so wird auch in diesem Falle das Gleichgewicht labil zu nennen sein.

Artet das Ellipsoid in eine Kugel aus, so bleibt die potentielle Energie auch bei endlichen Bewegungen ungeändert. Alsdann liegt ein Fall des indifferenten Gleichgewichtes vor.

§ 12. D'Alemberts Prinzip. Die Impulssätze.

D'Alemberts Prinzip führt die Dynamik auf die Statik zurück. Es berücksichtigt den Einfluß der Massenträgheit in der Weise, daß es an jedem Massenpunkt außer der äußeren Kraft $\mathfrak{K}$ die „Trägheitskraft" $-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ angreifen läßt, und verlangt, daß äußere und Trägheitskräfte zusammen sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten. Für den freien starren Körper besagt das: es sollen die resultierenden Kräfte und Momente verschwinden

$$\sum_1^n \left(\mathfrak{K} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = 0, \tag{42}$$

$$\sum_1^n \left[\mathfrak{r},\ \mathfrak{K} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = 0. \tag{43}$$

Dabei ist zu beachten, daß die statischen Momente auf einen im Raume festen Momentenpunkt O zu beziehen sind.

Es ist zweckmäßig, zwei neue Vektoren einzuführen. Der erste ist die Resultierende der Bewegungsgrößen aller Massenpunkte des Körpers

$$\mathfrak{B} = \sum_1^n m\mathfrak{v}, \tag{44}$$

der andere das resultierende Moment der Bewegungsgrößen

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n [\mathfrak{r},\ m\mathfrak{v}]. \tag{45}$$

Diese Vektoren, von denen der erste polarer, der zweite axialer Art ist, bezeichnet man wohl auch kurz als „Impuls“ und „Drehimpuls“ oder „Impulsmoment“ des Körpers. Man bemerkt, daß in dem Differentialquotienten des Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ nach der Zeit das von der Änderung der Hebelarme $\mathfrak{r}$ herrührende Glied

$$\sum_1^n \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt},\ m\mathfrak{v}\right]$$

verschwindet, weil $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$ und das äußere Produkt daher Null ist; bei dieser Überlegung ist allerdings wesentlich, daß die

Hebelarme $\mathfrak{r}$ von einem im Raume festen Momentenpunkte aus zu nehmen sind. Es wird in diesem Falle

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n \left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right],$$

und man kann daher (42), (43) durch folgende Gleichungen ersetzen

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{46}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{47}$$

Diese Gleichungen formulieren die beiden „Impulssätze“: die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der resultierenden Kraft; die zeitliche Änderung des Impulsmomentes ist gleich dem resultierenden Kraftmomente, bezogen auf denselben im Raume festen Momentenpunkt.

Hat man es mit einem sogenannten „Kreisel“ zu tun, d. h. mit einem starren Körper, der in einem seiner Punkte festgehalten wird, so wird man diesen festen Punkt als Bezugspunkt wählen, und durch (47) die Drehbewegung um den festen Punkt darstellen.

Beziehen wir hingegen das Impulsmoment auf einen im Körper festen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegt, so ist die zeitliche Änderung des Hebelarmes nicht gleich $\mathfrak{v}$, sondern gleich der Differenz $(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ der Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes und derjenigen des Momentenpunktes zu setzen. Aus

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$$

aber folgt, da nunmehr das von der zeitlichen Änderung der Hebelarme $\mathfrak{r}$ herrührende Glied nicht gleich Null ist,

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = -\left[\mathfrak{v}_0, \sum_1^n m\mathfrak{v}\right] + \sum_1^n \left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right],$$

und es wird nach (43), (44) die auf einen bewegten Momentenpunkt bezogene zweite Impulsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{B}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{48}$$

Meist führt man bei der Behandlung der freien Bewegung des starren Körpers den Schwerpunkt als Momentenpunkt ein. Ist M die gesamte Masse des Körpers, so ist der Impuls $\mathfrak{B} = M \cdot \mathfrak{v}_0$, er weist parallel der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Alsdann fällt das Zusatzglied in (48) fort, und es lauten die Bewegungsgleichungen

$$M \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{49}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{50}$$

Die erste Gleichung spricht den Schwerpunktsatz aus: Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein materieller Punkt von der Masse M, an dem die Resultierende der äußeren Kräfte angreift. Die zweite Gleichung ist formal mit (47) identisch; sie führt mithin die Bestimmung der Bewegung um den Schwerpunkt auf das Problem der Rotation des in einem seiner Punkte festgehaltenen starren Körpers, des sogenannten Kreisels, zurück.

§ 13. **Rotierendes Bezugssystem.**

Wie es soeben zweckmäßig war, einen Bezugspunkt zu wählen, der die Bewegung des Körpers mitmacht, so empfiehlt es sich auch zuweilen, die zeitliche Zunahme eines Vektors $\mathfrak{A}$, den wir uns im Koordinatenanfang aufgetragen denken, nicht von einem im Raume festen, sondern von einem mit dem Körper rotierenden Bezugssysteme aus zu beurteilen; so nehmen wir z. B. an der Oberfläche der rotierenden Erde nicht die wirkliche Bewegung, sondern die Relativbewegung der Massen gegen die Erde wahr, wir beurteilen also die Bewegung der

Körper von einem rotierenden Bezugssysteme aus. Wir fragen allgemein nach der zeitlichen Zunahme von $\mathfrak{A}$, beurteilt von einem Bezugssysteme aus, das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um den Koordinatenanfangspunkt rotiert; wir wollen sie $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ schreiben.

Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ gegen das ursprüngliche im Raume feste Bezugssystem. Die Punkte des starren Körpers und des mit ihm starr verbundenen Systemes bewegen sich nach (35) mit Geschwindigkeiten, die durch das Vektorprodukt $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ angegeben werden, wenn $\mathfrak{r}$ den vom festen Anfangspunkte aus konstruierten Radiusvektor anzeigt. Betrachten wir jetzt die Bewegung, die der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ in dem rotierenden Systeme beschreibt; im Raume bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$; der Punkt des rotierenden Systemes, in den er gerade fällt, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $[\mathfrak{u}\mathfrak{A}]$ im Raume. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Endpunkt von $\mathfrak{A}$ in dem rotierenden System fortwandert, ist offenbar die Relativgeschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - [\mathfrak{u}\mathfrak{A}].$$

Wir erhalten demnach als die vom rotierenden Systeme aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$

$$\frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}]. \tag{51}$$

Wir sind jetzt imstande, die Bewegungsgleichungen des freien starren Körpers auf ein im Körper festes Bezugssystem umzurechnen. Lassen wir zunächst die Lage des Bezugspunktes im Körper beliebig, so folgt aus (46) und (48)

$$\frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{B}] = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{52}$$

$$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{U}] + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{53}$$

Legt man insbesondere, im Falle des freien starren Körpers, den Momentenpunkt in den Schwerpunkt, oder, im Falle des Kreisels, in den festgehaltenen Punkt, so wird die Rotationsbewegung durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{U}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}], \tag{54}$$

die man direkter aus (47) oder (50), in Verbindung mit (51), erhalten hätte.

Es mögen die Gleichungen (52, 53) in den allgemeinen Ausdruck (39) für die Arbeit der äußeren Kräfte eingesetzt werden.

Die hier auftretende Summe

$$\mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}\mathfrak{B}] + \mathfrak{u}[\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}]$$

verschwindet nach den Rechnungsregeln (25, 30), ebenso das Glied $\mathfrak{u}[\mathfrak{u}\mathfrak{U}]$, weil das Vektorprodukt $[\mathfrak{u}\mathfrak{U}]$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ ist.

Es wird daher

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{u} \frac{d'\mathfrak{U}}{dt}.$$

Da nach dem Energieprinzip der Zuwachs der lebendigen Kraft der Arbeit der äußeren Kräfte gleich ist, so folgt

$$\frac{dT}{dt} = \mathfrak{v}_0 \frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{u} \frac{d'\mathfrak{U}}{dt}. \tag{55}$$

Bei der Differentiierung von Skalaren, wie $\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{U}$ nach der Zeit kommt es nicht darauf an, ob ein im Raume festes oder ein rotierendes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Wir erhalten daher

$$\frac{d}{dt}\{\mathfrak{v}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{u}\mathfrak{U} - T\} = \mathfrak{B}\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt} + \mathfrak{U}\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}, \tag{56}$$

und für den speziellen Fall der Kreiselbewegung ($\mathfrak{v}_0 = 0$)

$$\frac{d}{dt}\{\mathfrak{u}\mathfrak{U} - T\} = \mathfrak{U}\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}. \tag{57}$$

§ 14. **Trägheitsmomente. Tensortripel.**

Die Form (54) des Momentensatzes führt sofort zu den Eulerschen Bewegungsgleichungen des Kreisels; da hier ein im Kreisel festes Bezugssystem $x'y'z'$ angenommen ist, so kann man den Drehimpuls $\mathfrak{U}$ ein für allemal durch die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ausdrücken; denn die Massenverteilung in bezug auf die Achsen $x'y'z'$ ist konstant.

Der Bezugspunkt bewegt sich nicht, es ist $\mathfrak{v}_0 = 0$, mithin sind nach (35) die Geschwindigkeiten der Massenpunkte gegeben durch

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}].$$

Der Ausdruck (45) des Drehimpulses wird daher

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n m\big[\mathfrak{r}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\big],$$

er geht nach der Regel (32) über in

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n m\{\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})\}.$$

Nehmen wir Komponenten nach den Achsen $x'y'z'$, so erhalten wir

$$\mathfrak{U}_{x'} = \sum_1^n m\,\{\mathfrak{u}_{x'}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(\mathfrak{u}_{x'}\,x' + \mathfrak{u}_{y'}\,y' + \mathfrak{u}_{z'}\,z')\}$$

und entsprechende Gleichungen, die wir schreiben können

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{x'} &= k_{11}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{12}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{13}\,\mathfrak{u}_{z'},\\
\mathfrak{U}_{y'} &= k_{21}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{22}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{23}\,\mathfrak{u}_{z'},\\
\mathfrak{U}_{z'} &= k_{31}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{32}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{33}\,\mathfrak{u}_{z'}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Die Koeffizienten dieser linearen Gleichungen sind die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers

$$k_{11} = \sum_1^n m\,(y'^2 + z'^2),\quad k_{22} = \sum_1^n m\,(z'^2 + x'^2),\quad k_{33} = \sum_1^n m\,(x'^2 + y'^2),$$

$$k_{12} = k_{21} = -\sum_1^n m\,x'y',\ k_{23} = k_{32} = -\sum_1^n m\,y'z',\ k_{31} = k_{13} = -\sum_1^n m\,z'x'.$$

Die Gleichungen (58) stellen, wie man sagt, die Abhängigkeit des Vektors $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{u}$ durch eine lineare Vektorfunktion dar, d. h. die Komponenten der beiden Vektoren sind durch lineare Gleichungen miteinander verknüpft. Hier haben wir es insbesondere mit homogenen linearen Gleichungen zu tun, deren Koeffizienten gewisse Symmetrieeigenschaften $k_{21} = k_{12}$ usf. besitzen. Die Gleichungen (58) stellen eine sogenannte „symmetrische" lineare Vektorfunktion dar.

Es wird gut sein, diesen einfachsten Fall sogleich genauer zu diskutieren. Die Symmetrieeigenschaft bringt es mit sich, daß man nach Einführung des Skalars

$$(59)\quad L = \frac{1}{2}\,\mathfrak{u}\mathfrak{U} = \frac{1}{2}\,k_{11}\mathfrak{u}_{x'}^{2} + \frac{1}{2}\,k_{22}\,\mathfrak{u}_{y'}^{2} + \frac{1}{2}\,k_{33}\mathfrak{u}_{z'}^{2} + k_{12}\mathfrak{u}_{x'}\mathfrak{u}_{y'} + k_{23}\mathfrak{u}_{y'}\mathfrak{u}_{z'} + k_{31}\mathfrak{u}_{z'}\mathfrak{u}_{x'}$$

die Beziehung der Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}$ zueinander folgendermaßen ausdrücken kann

$$(60)\qquad \mathfrak{U}_{x'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{x'}},\quad \mathfrak{U}_{y'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{y'}},\quad \mathfrak{U}_{z'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{z'}}.$$

Die Bedeutung des Skalars L ergibt sich sofort, wenn man die aus (60) folgende Gleichung

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{U}\,\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}$$

mit (57) vergleicht; es wird nämlich

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\{\mathfrak{u}\mathfrak{U} - T\},$$

oder, nach (59)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dL}{dt},$$

und da sowohl L wie T für $\mathfrak{u} = 0$ verschwinden, so ist

$$L = T.$$

Es ist L mit der lebendigen Kraft des rotierenden Kreisels identisch.

Wir denken uns den Kreisel um eine beliebige Achse rotierend; das Trägheitsmoment k für eine solche Achse ist definiert als Quotient aus der in Richtung der Drehachse genommenen Komponente des Drehimpulses und dem Betrage der Rotationsgeschwindigkeit

$$k = \frac{|\mathfrak{U}| \cdot \cos(\mathfrak{U}\mathfrak{u})}{|\mathfrak{u}|} = \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{u}}{\mathfrak{u}^2} = \frac{2L}{\mathfrak{u}^2}.$$

Es drückt sich durch die sechs Koeffizienten $k_{11} \cdots k_{31}$ und die Richtungskosinusse $\alpha\beta\gamma$ des Vektors $\mathfrak{u}$ gegen die Achsen der $x'y'z'$ folgendermaßen aus

$$k = k_{11}\alpha^2 + k_{22}\beta^2 + k_{33}\gamma^2 + 2k_{12}\alpha\beta + 2k_{23}\beta\gamma + 2k_{31}\gamma\alpha. \tag{61}$$

Man stellt die Gesamtheit der Trägheitsmomente für die verschiedenen Achsen bekanntlich geometrisch dar, indem man das Trägheitsellipsoid

$$1 = k_{11}x'^2 + k_{22}y'^2 + k_{33}z'^2 + 2k_{12}x'y' + 2k_{23}y'z' + 2k_{31}z'x'$$

konstruiert; es gilt dann $kr'^2 = 1$, d. h. das reziproke Quadrat der Radienvektoren des Ellipsoides gibt das Trägheitsmoment für die betreffende Achse an.

Führt man die Hauptachsen des Trägheitsellipsoides als Koordinatenachsen $\xi\eta\zeta$ ein und schreibt die Hauptträgheitsmomente $k_1 k_2 k_3$, so erhält man

$$\mathfrak{U}_\xi = k_1\mathfrak{u}_\xi, \quad \mathfrak{U}_\eta = k_2\mathfrak{u}_\eta, \quad \mathfrak{U}_\zeta = k_3\mathfrak{u}_\zeta.$$

Die Form (54) der Momentengleichung führt dann sofort zu den Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned}
k_1 \frac{d\mathfrak{u}_\xi}{dt} - (k_2 - k_3)\,\mathfrak{u}_\eta\mathfrak{u}_\zeta &= \sum_1^n (\eta\mathfrak{K}_\zeta - \zeta\mathfrak{K}_\eta),\\
k_2 \frac{d\mathfrak{u}_\eta}{dt} - (k_3 - k_1)\,\mathfrak{u}_\zeta\mathfrak{u}_\xi &= \sum_1^n (\zeta\mathfrak{K}_\xi - \xi\mathfrak{K}_\zeta),\\
k_3 \frac{d\mathfrak{u}_\zeta}{dt} - (k_1 - k_2)\,\mathfrak{u}_\xi\mathfrak{u}_\eta &= \sum_1^n (\xi\mathfrak{K}_\eta - \eta\mathfrak{K}_\xi).
\end{aligned} \tag{62}$$

In dem Systeme der Trägheits- und Deviationsmomente $k_{11} \cdots k_{31}$ des Kreisels tritt uns eine neue Klasse physikalischer Größen gegenüber, die sowohl von den Vektoren, als auch von den Skalaren verschieden ist; dasselbe ist durch sechs Bestimmungsstücke festgelegt, sei es, daß wir als solche jene sechs Größen oder die drei Hauptträgheitsmomente k_1, k_2, k_3 und drei die Lage der Hauptachsen bestimmende Angaben wählen

Zustandsgrößen dieser Art sind in der theoretischen Physik nicht selten, insbesondere in der Elastizitätstheorie werden sie von Wichtigkeit. Der Spannungszustand eines homogen deformierten Körpers wird durch ein System von sechs Größen von diesem Charakter bestimmt; er ist immer aufzufassen als Zusammensetzung dreier Druck- oder Zugspannungen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen. Daher rührt die Bezeichnung der in Rede stehenden Klasse physikalischer Größen als „Tensortripel", der auf ein bestimmtes Achsensystem bezogenen sechs Komponenten $k_{11} \cdots k_{31}$ als „Tensorkomponenten". Größen dieser Art treten, wie die obige Betrachtung lehrt, bei einer jeden symmetrischen linearen Vektorfunktion auf; sie lassen sich stets durch eine Mittelpunktfläche zweiten Grades darstellen, die allerdings im allgemeinen auch ein Hyperboloid sein kann (das stets positive Vorzeichen der Trägheitsmomente bedingt es, daß diese stets durch Ellipsoide repräsentiert werden). Sind die drei Hauptachsen der repräsentierenden Fläche zweiten Grades einander gleich, so artet das Tensortripel in einen Skalar aus; Beispiele hierfür sind das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel um ihren Mittelpunkt, der Druck in einer reibungslosen Flüssigkeit.

Auf die allgemeine lineare Vektorfunktion, die 12 Koeffizienten besitzt, kommen wir im § 17 zurück.

§ 15. Die Gleichungen von Lagrange.

Hat man es mit einem Systeme von Massenpunkten zu tun, das gewissen, durch Gleichungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte auszudrückenden Einschränkungen der Bewegungsfreiheit unterworfen ist, so führt man mit Lagrange neue Parameter $p_1 p_2 \cdots p_\lambda \cdots p_l$ ein, welche die Lage des Systemes bestimmen; man wählt sie so, daß sie unabhängig voneinander sind; ihre Zahl (l) zeigt alsdann die Zahl der

Freiheitsgrade des Systemes an. Die Lage der sämtlichen n Massenpunkte werde durch die von einem festen Punkte aus konstruierten (n) Radienvektoren $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \cdots \mathfrak{r}_\nu \cdots \mathfrak{r}_n$ angezeigt, die Funktionen der Parameter p_λ sind. Die Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v}_\nu = \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt}$$

sind abhängig von den p_λ und von deren Differentialquotienten nach der Zeit

$$q_\lambda = \frac{dp_\lambda}{dt},$$

die man als Geschwindigkeitskomponenten im allgemeineren Sinne bezeichnen kann. Aus diesen Festsetzungen folgt

$$\mathfrak{v}_\nu = \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_1} \cdot q_1 + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda} \cdot q_\lambda + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_l} \cdot q_l,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_1 \partial p_\lambda} \cdot q_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda^2} \cdot q_\lambda + \cdots + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_l \partial p_\lambda} \cdot q_l,$$

mithin

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).$$

Die Bewegungsgesetze erhält man, indem man das D'Alembertsche Prinzip (§ 12), das die Dynamik auf die Statik zurückführt, mit dem statischen Prinzip der virtuellen Arbeit (§ 10) vereinigt. Dabei bezeichnet man die virtuellen Verrückungen der Massenpunkte, um sie von den bei der Bewegung wirklich stattfindenden $d\mathfrak{r}_\nu$ zu unterscheiden, mit $\delta \mathfrak{r}_\nu$. Das D'Alembertsche Prinzip verlangt: Die Summe der virtuellen Arbeiten der an den einzelnen Massenpunkten angreifenden äußeren Kräfte $\mathfrak{K}_\nu$ und der Trägheitskräfte

$$- m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt}$$

soll für jede mit den Systembedingungen verträgliche Verrückung verschwinden

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\mathfrak{K}_\nu - m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt},\ \delta \mathfrak{r}_\nu\right) = 0.$$

Da die Konfiguration des Systemes durch die Parameter p_λ bestimmt ist, so muß die Arbeit, welche die äußeren Kräfte bei einer virtuellen Verrückung leisten, sich in folgender Form schreiben lassen

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{K}_\nu \delta \mathfrak{r}_\nu) = \sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda \delta p_\lambda .$$

Die P_λ sind dabei als Kraftkomponenten im allgemeineren Sinne zu bezeichnen.

Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte hingegen ist

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \delta p_\lambda \sum_{\nu=1}^{n} \left(- m_\nu \frac{d \mathfrak{v}_\nu}{dt}, \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).$$

Wir erhalten, die oben abgeleiteten Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der $\mathfrak{v}_\nu$ und $\mathfrak{r}_\nu$ beachtend

$$\begin{aligned}\left(- m_\nu \frac{d \mathfrak{v}_\nu}{dt}, \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) &= - \frac{d}{dt}\left(m_\nu \mathfrak{v}_\nu, \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) + \left(m_\nu \mathfrak{v}_\nu, \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) \\ &= - \frac{d}{dt}\left(m_\nu \mathfrak{v}_\nu, \frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial q_\lambda}\right) + \left(m_\nu \mathfrak{v}_\nu, \frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).\end{aligned}$$

Daher wird

$$\begin{aligned}\sum_{=1}^{n}\left(- m_\nu \frac{d \mathfrak{v}_\nu}{dt}, \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) &= - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} m_\nu \mathfrak{v}_\nu^2 + \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2} m_\nu \mathfrak{v}_\nu^2 \\ &= - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}.\end{aligned}$$

Es folgt schließlich als Forderung des D'Alembertschen Prinzipes

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \delta p_\lambda \left\{P_\lambda - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}\right\} = 0;$$

da die δp_λ voneinander unabhängig sind, so gelten l Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} = P_\lambda \text{ für } \lambda = 1, 2 \cdots l. \tag{63}$$

Das sind die Lagrangeschen Gleichungen. Wir verstehen ihre Bedeutung am besten, wenn wir die Parameter p_λ

als durch die Lage gewisser, auf vorgeschriebenen Bahnen sich bewegender Antriebspunkte bestimmt ansehen; durch die Lage und Bewegung der Antriebspunkte soll die Konfiguration und Bewegung des ganzen Systemes, mithin auch die lebendige Kraft T bestimmt sein; die q_λ sind die Geschwindigkeiten der Antriebspunkte, die P_λ die Komponenten der äußeren Kräfte in Richtung der Bahn, die entweder, direkt oder durch den Mechanismus des Systemes übertragen, auf den betreffenden Antriebspunkt wirken. Diesen Kräften P_λ sollen nun, das verlangen die Lagrangeschen Gleichungen, die an jedem Antriebspunkt angreifenden Trägheitskräfte der bewegten Massen das Gleichgewicht halten.

Kommt dem mechanischen Systeme, außer der kinetischen Energie T, noch eine potentielle Energie U zu, so tritt zu der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte noch die Abnahme der potentiellen Energie:

$$-\delta U = -\sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\partial U}{\partial p_\lambda} \delta p_\lambda .$$

Durch Hinzufügung dieses Gliedes ergibt die obige Betrachtung an Stelle von (63):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial p_\lambda} = P_\lambda . \tag{64}$$

Führt man endlich die sogenannte „Lagrangesche Funktion“

$$L = T - U$$

ein, und berücksichtigt, daß U von den q_λ unabhängig ist, so kann man die Lagrangeschen Gleichungen schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\lambda} = P_\lambda . \tag{64a}$$

Wenn wir es mit einer Maschine zu tun haben, deren innere Bewegungen wir nicht kennen, und die wir nur nach gewissen Kraftäußerungen beurteilen, so werden wir zweckmäßig die Gleichungen von Lagrange verwenden; dieselben verlangen nur die Kenntnis der Lagrangeschen Funktion, in ihrer Abhängigkeit von Lage und Geschwindigkeit der Antriebspunkte; kennen wir diese Abhängigkeit, so können wir die Kräfte bestimmen, mit denen das System nach außen wirkt, auch wenn uns die Kenntnis der inneren Bewegung des Systemes fehlt.

Das ist der Standpunkt, den Maxwell schließlich den elektromagnetischen Erscheinungen gegenüber einnahm. Er suchte diese als den Gesetzen der Mechanik unterworfen zu begreifen; er sah indessen von den speziellen mechanischen Bildern, die ihn wohl früher geleitet hatten, ab und begnügte sich damit, nachzuweisen, daß die allgemeinen Eigenschaften der Massensysteme, welche die Lagrangeschen Gleichungen ausdrücken, auch den elektromagnetischen Systemen zukommen.

Zweites Kapitel.

Die Vektorfelder.

§ 16. Die hydrodynamische Abbildung.

Im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten wir den Begriff des Vektors und die Regeln der Vektoralgebra in Anlehnung an die Mechanik des materiellen Punktes. Die Geschwindigkeit eines solchen wurde durch einen einzigen Vektor dargestellt. Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers, der doch aus einer unendlichen Zahl materieller Punkte besteht, konnten wir durch zwei Vektoren abbilden, die von einem beliebig gewählten Bezugspunkte aus zu konstruieren waren. In diesem Kapitel knüpfen wir an die Aufgabe an, den Bewegungszustand einer den Raum erfüllenden Flüssigkeit zu analysieren. Hier sind die Geschwindigkeiten verschiedener Massenteilchen im allgemeinen als voneinander unabhängig anzusehen, es ist jedem Punkte sein besonderer Geschwindigkeitsvektor zuzuordnen. Die bewegte, den Raum erfüllende Flüssigkeit repräsentiert, wie man sagt, ein V e k t o r f e l d.

Man spricht in der mathematischen Physik von dem Felde einer Zustandsgröße, wenn man den Wert der Zustandsgröße in einem räumlichen Bereiche in seiner Abhängigkeit vom Orte betrachtet, und nimmt die Werte im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Flächen, Linien und Punkte, als stetig an. Es gibt Skalarfelder (z. B. das Temperaturfeld) und Vektorfelder (z. B. das Schwerkraftfeld).

Durch das Studium der Flüssigkeitsbewegungen ist die Theorie der Vektorfelder außerordentlich gefördert worden, insbesondere durch die grundlegenden Untersuchungen von Helmholtz über die Wirbelbewegungen. Auf ihnen fußte Maxwell, als er es unternahm, die Faradaysche Idee des Kraftfeldes mathematisch zu begründen. Maxwell waren hydrodynamische Analogien sogar mehr als rein mathematische Bilder, hydrodynamische Vorstellungen über den Feldmechanismus leiteten ihn bei der Aufstellung der Nahewirkungsgesetze des elektromagnetischen Feldes.

Wir schließen uns demnach der historischen Entwicklung an, wenn wir in diesem Kapitel die mathematische Theorie der Vektorfelder an der Hand der hydrodynamischen Abbildung entwickeln. Wir denken uns eine den Raum erfüllende Flüssigkeit; den von Punkt zu Punkt im allgemeinen stetig wechselnden Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ betrachten wir als Funktion des von dem festen Anfangspunkte aus konstruierten Radiusvektors $\mathfrak{r}$. Die Vektorfunktion $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ gibt die Geschwindigkeit an, die an der Stelle herrscht, auf die sich $\mathfrak{r}$ bezieht. Wir stellen in dieser Weise durch die hydrodynamische Abbildung ein beliebiges Vektorfeld dar, in demselben Sinne, in dem wir im vorigen Kapitel einem beliebigen Vektor eine Verrückung zuordneten. Allerdings müssen wir dabei, um nicht auf spezielle Vektorfunktionen beschränkt zu sein, der Flüssigkeit zuweilen Eigenschaften zuschreiben, die von denen der wirklichen Flüssigkeiten einigermaßen abweichen. Das wird gestattet sein, da es sich hier nur um eine mathematische Analogie handelt.

§ 17. Die lineare Vektorfunktion.

Die einfachste Vektorfunktion erhalten wir, indem wir die Komponenten des abbildenden Vektors $\mathfrak{v}$ linearen Funktionen der Raumkoordinaten gleichsetzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_x &= \mathfrak{v}_{0x} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \mathfrak{v}_y &= \mathfrak{v}_{0y} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \mathfrak{v}_z &= \mathfrak{v}_{0z} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{65}$$

Die drei von xyz freien Glieder sind offenbar die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Anfangspunktes.

Wir zerlegen den Vektor $\mathfrak{v}$ in zwei Vektoren $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}''$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}''.$$

Dabei sollen die Komponenten von $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ folgendermaßen bestimmt sein

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_x' &= \mathfrak{v}_{0x} - y\,\frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) + z\,\frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}), \\ \mathfrak{v}_y' &= \mathfrak{v}_{0y} - z\,\frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) + x\,\frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}), \\ \mathfrak{v}_z' &= \mathfrak{v}_{0z} - x\,\frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) + y\,\frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_x'' &= a_{11}x + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})y + \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})z, \\ \mathfrak{v}_y'' &= \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})x + a_{22}y + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})z, \\ \mathfrak{v}_z'' &= \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})x + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Führen wir zur Abkürzung einen Vektor $\mathfrak{u}$ ein, mit den Komponenten

$$\mathfrak{u}_x = \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}), \quad \mathfrak{u}_y = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}), \quad \mathfrak{u}_z = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}),$$

so ist, in vektorieller Schreibweise, zu setzen

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_0 - [\mathfrak{r}\mathfrak{u}] = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}].$$

Der Vektor $\mathfrak{v}'$ stellt also eine Bewegung dar, die auch ein starrer Körper ausführen könnte, d. h. bei der immer je zwei Flüssigkeitsteilchen ihren Abstand behalten, bei der also die Form eines gegebenen Quantums der Flüssigkeit sich nicht ändert. Der Vektor $\mathfrak{v}''$ hingegen ist mit den Komponenten von $\mathfrak{r}$ durch lineare homogene Gleichungen verknüpft, die eine symmetrische lineare Vektorfunktion von der aus § 14 bekannten Art darstellen. Die sechs Koeffizienten

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}),\ \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}),\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13})$$

sind daher als Komponenten eines Tensortripels zu bezeichnen. Führen wir die Hauptachsen der durch dieses Tensortripel bestimmten Mittelpunktsfläche zweiten Grades als Koordinatenachsen $(\xi\eta\zeta)$ ein, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{v}_\xi'' = a_1\xi,\quad \mathfrak{v}_\eta'' = a_2\eta,\quad \mathfrak{v}_\zeta'' = a_3\zeta.$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung setzt sich aus drei Bewegungen, parallel den Achsen der $\xi\eta\zeta$, zusammen, bei denen die diesen Achsen parallelen Flüssigkeitszylinder mit den durch a_1, a_2, a_3 angezeigten Geschwindigkeiten sich verlängern oder verkürzen, je nachdem diese Koeffizienten positiv oder negativ sind. Die Bewegung können wir als Formänderungsbewegung bezeichnen, oder als Dilatation nach drei senkrechten Richtungen, indem wir Kompression als negative Dilatation einschließen. Die allgemeinste, durch eine lineare Vektorfunktion (65) darzustellende Bewegung setzt sich nach den Regeln der Vektoraddition zusammen aus einer Parallelverschiebung der Flüssigkeit, welche den Anfangspunkt mit der ihm vorgeschriebenen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegt, einer Rotation, und einer Dilatation nach drei senkrechten Richtungen. Der Vektor $\mathfrak{u}$ der Rotationsgeschwindigkeit und das für die Formänderungsbewegung maßgebende Tensortripel sind durch die neun Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{33}$ bestimmt.

Obwohl die Flüssigkeitsbewegung, welche durch die lineare Vektorfunktion dargestellt wird, sehr spezieller Art ist, so kann man doch die allgemeinste stetige Bewegung auf diese zurückführen, wenn man nicht die ganze Flüssigkeit, sondern einen Teil ins Auge faßt, der nur einen kleinen Bereich erfüllt. Es mag der Bereich den Punkt O umgeben, der für den Moment als Koordinatenanfang genommen werden mag.

Alsdann führt eine Mac-Laurinsche Entwicklung, die bei hinreichender Einschränkung des Bereiches mit den linearen Gliedern abzubrechen ist, zu der linearen Vektorfunktion

$$
(66) \qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_x &= \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}\cdot z,\\
\mathfrak{v}_y &= \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\cdot z,\\
\mathfrak{v}_z &= \mathfrak{v}_{0z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\cdot z.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten der xyz sind dabei die Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}$ usf. im Punkte O.

Aus den oben an die allgemeine lineare Vektorfunktion angeknüpften Betrachtungen folgt jetzt der Helmholtzsche Satz: Man kann die Flüssigkeitsbewegung eines hinreichend kleinen Bereiches immer betrachten **als** Superposition einer Translation, einer Rotation und einer Dilatation nach drei senkrechten Richtungen. Die Komponenten der Rotation sind

$$
(67) \quad \mathfrak{u}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{u}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{u}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right),
$$

während die Komponenten des für die Formänderungsbewegung maßgebenden Tensortripels gegeben werden durch

$$
\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right).
$$

Die soeben vorgenommene Zerlegung ist für jeden Punkt verschieden; sie ist daher nicht geeignet, eine Übersicht über die Flüssigkeitsbewegung im ganzen zu geben. Hierfür sind andere Methoden ausgebildet worden, zu deren Darlegung wir uns jetzt wenden.

§ 18. Das wirbelfreie Feld und das Potential.

Aus einem jeden Skalarfelde können wir folgendermaßen ein Vektorfeld ableiten. Wir denken uns den Skalar φ von Punkt zu Punkt stetig veränderlich. Die Zunahme, welche er beim Fortschreiten längs des Linienelementes $d\mathfrak{s}$ erfährt, dividiert durch dessen Länge ds, mag die Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung des Linienelementes ergeben. Es soll also

$$\mathfrak{v}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

sein und speziell die Komponenten parallel den Koordinatenachsen

$$\mathfrak{v}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Aus der Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s},$$

in welcher den $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$ die Bedeutung von Richtungscosinussen zukommt, geht hervor, daß sich die Komponenten von $\mathfrak{v}$ in der Tat wie Vektorkomponenten verhalten.

Der soeben eingeführte Vektor $\mathfrak{v}$ zeigt die Richtung des größten Anstieges des Skalars φ an, sein Betrag den auf die Längeneinheit bezogenen Betrag des größten Anstieges

$$|\mathfrak{v}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Wir nennen ihn den „Gradienten" des Skalars φ; wir wollen uns indessen nicht des von manchen Autoren verwandten Symboles „grad" für diesen Begriff bedienen, sondern einer anderen symbolischen Schreibweise, die auf Hamilton, den Erfinder des Quaternionenkalküls, zurückgeht. Greifen wir nämlich auf die im § 3 eingeführten Grundvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ zurück, so können wir schreiben

$$\mathfrak{v} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{68}$$

Man führe nun den sogenannten Hamiltonschen Operator ∇ ein

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

und rechne mit ihm nach den Regeln, die für die Multiplikation eines Vektors mit Skalaren im vorigen Kapitel angegeben wurden, indem man die an Stelle der Vektorkomponenten tretenden Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wie Skalare behandelt; dann erhält man

$$\mathfrak{v} = \nabla \varphi = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \tag{68a}$$

als symbolischen Ausdruck der Gleichung (68).

Für zwei Wege s, s', die beide von einem Punkte 1 zu einem Punkte 2 führen, ist nach der Definition des Vektors $\mathfrak{v}$

$$\int_1^2 \mathfrak{v}_s ds = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_2 - \varphi_1,$$

$$\int_1^2 \mathfrak{v}_{s'} ds' = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s'} ds' = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Das hier auftretende Integral nennen wir kurz das Linienintegral des Vektors $\mathfrak{v}$. Es ist das über alle Elemente des Integrationsweges erstreckte Integral des inneren Produktes aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$. In dem Felde eines Gradienten hat es, wie wir sehen, den gleichen Wert für irgend zwei Wege, die zwei bestimmte Punkte des Feldes verbinden. Es verschwindet für jeden geschlossenen Weg

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s ds = 0. \tag{69}$$

Wir wollen die Flüssigkeitsströmung, die das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ abbildet, wirbelfrei nennen, wenn sein Linienintegral längs eines jeden geschlossenen Weges verschwindet, und auch das abgebildete Feld in diesem Falle als wirbelfreies bezeichnen. Dann können wir den Satz aussprechen: Das Feld des Gradienten eines Skalars φ ist stets ein wirbelfreies.

In einem Kraftfelde gibt das Linienintegral des Kraftvektors die Arbeit an. Die Bedingung, daß das Linienintegral längs einer jeden geschlossenen Kurve Null sein soll, besagt hier das Folgende: es ist nicht möglich, durch wiederholtes Herumführen eines materiellen Punktes längs eines geschlossenen Weges unbegrenzt Arbeit zu gewinnen. Wir haben gezeigt, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn der Kraftvektor der Gradient eines Skalars ist. Umgekehrt gilt der Satz: Ein wirbelfreies Vektorfeld ist stets als Feld des Gradienten eines Skalars aufzufassen.

In der Tat, es ist durch

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \int_1^2 \mathfrak{v}_s ds$$

ein Skalar von der verlangten Eigenschaft definiert. Die Definition ist eine eindeutige, wenn der Wert im Punkte 1 festgesetzt ist, denn das Linienintegral des wirbelfreien Vektors $\mathfrak{v}$ verschwindet für jeden geschlossenen Weg, es hat daher den gleichen Wert für alle diejenigen Wege, die von dem festen Punkte 1 zu dem beliebigen Punkte 2 führen. Der Wert φ_1 im Punkte 1 ist willkürlich. Ist das ganze unendliche Feld, nicht nur ein Teil desselben, wirbelfrei, so bestimmt man diese additive Konstante meist so, daß φ im Unendlichen verschwindet.

Ist das Feld, um das es sich handelt, ein Kraftfeld, so nennt man $(-\varphi)$ das Potential, oder besser das skalare Potential. Die Existenz eines Potentials ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß nicht aus dem Kraftfelde auf die angegebene Weise Arbeit unbegrenzt zu gewinnen ist. Das wirbelfreie Kraftfeld der Schwerkraft war es, aus dem zuerst der Begriff des Potentiales erwuchs. Auf die Hydrodynamik hat man diesen Begriff übertragen, indem man den jeder wirbelfreien Bewegung zugeordneten Skalar $(-\varphi)$ als Geschwindigkeitspotential bezeichnete.

§ 19. **Die Ergiebigkeit eines Quellenfeldes und die Divergenz.**

Der idealen Flüssigkeit, die unserer hydrodynamischen Abbildung zugrunde liegt, schreiben wir weiterhin die Eigenschaft der Inkompressibilität zu. Hierdurch wird eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Flüssigkeit eingeführt, da in dem mit Flüssigkeit gefüllten Gebiete durch eine jede geschlossene Fläche im ganzen ebensoviel Flüssigkeit ausströmen, wie einströmen muß. Mit Hilfe einer solchen Strömung könnten wir nur ganz spezielle Vektorfelder abbilden.

Um diese Beschränkung nachträglich wieder aufzuheben, lassen wir zu, daß an gewissen Stellen des Raumes unsere ideale Flüssigkeit fortwährend neu erzeugt, an anderen solche vernichtet wird. Stellen der ersten Art wollen wir als Quellen, Stellen der zweiten Art als Senken oder auch als negative Quellen bezeichnen; wir behalten uns indessen vor, das Wort Quelle auch in dem allgemeineren Sinne zu gebrauchen, daß es die positiven und negativen Quellen umfaßt. Durch Annahme eines geeigneten Quellensystemes sind wir nun in der Lage, ein beliebiges Vektorfeld durch eine stationäre Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit abzubilden.

Wir nehmen die Quellen als stetig über den Raum verteilt an. Es entsteht dann die Aufgabe, ein Maß für die Ergiebigkeit des Quellensystemes zu finden.

Wir denken uns zu diesem Zwecke im Innern der Flüssigkeit ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen a, b, c. Den Koordinatenumfang legen wir in den Mittelpunkt des Parallelepipeds, die Koordinatenachsen xyz seinen Kanten parallel. Die Flüssigkeitsbewegung soll stetig und das Parallelepiped so klein sein, daß wir auf seinen Seitenflächen den Vektor $\mathfrak{v}$ mit Hilfe der Formeln (66) berechnen können.

Wir berechnen die Flüssigkeitsmenge, die im ganzen in der Zeiteinheit aus dem Parallelepiped herausströmt. Wir betrachten zuerst die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen, für die

$$x = \pm \frac{a}{2}$$

ist. Durch die eine auf der Seite der positiven x liegende Fläche entströmt die Menge

$$\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz\,\mathfrak{v}_x = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot z \right\}.$$

Da

$$\mathfrak{v}_{0x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}$$

hier Konstanten sind, die sich auf den Mittelpunkt des Parallelepipeds beziehen, so fallen die mit y und z behafteten Glieder heraus und wir erhalten

$$b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung durch diese Fläche, und ebenso

$$-b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung, die durch die gegenüberliegende Seite das Parallelepiped verläßt; die Summe beider Glieder ist

$$a \cdot b \cdot c \,.\, \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}.$$

Fügt man zwei entsprechende Ausdrücke hinzu, welche die Strömung durch die beiden anderen, zur y- bzw. z-Achse senkrechten Seitenpaare angeben, so erhält man für die Ergiebigkeit der im Innern des Parallelepipeds liegenden Quellen

$$abc\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\right).$$

Dieser Ausdruck gilt mit um so größerer Annäherung, je kleiner das Parallelepiped ist, er gilt exakt im Grenzfalle eines verschwindend kleinen Parallelepipeds, falls die der Gleichung (66) zugrunde liegende Voraussetzung einer stetigen Flüssigkeitsströmung erfüllt ist.

Die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit der Flüssigkeitsquellen nennen wir die Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ und schreiben symbolisch

$$\text{(70)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}.$$

Der hydrodynamischen Bedeutung der Divergenz entsprechend, ist dieselbe als skalare Größe zu betrachten. Positive Werte dieses Skalars zeigen an, daß an dem betreffenden Punkte des Feldes Quellen, negative, daß Senken vorhanden sind. Aus jedem Vektorfelde ist durch Berechnung der Divergenz ein Skalarfeld, das Quellenfeld, abzuleiten. Die Divergenz eines Vektors ist ein eigentlicher Skalar oder ein Pseudoskalar, je nachdem der betreffende Vektor ein polarer oder ein axialer ist; denn geht man durch Umkehrung der Koordinatenachsen von dem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme über, so wechseln die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ wie polare Vektorkomponenten das Vorzeichen, die Divergenz eines polaren Vektors behält also beim Übergang zu einem Linkssysteme das Vorzeichen bei, die Divergenz eines axialen Vektors kehrt es um.

Es ist bemerkenswert, daß man die Divergenz erhält, wenn man den Hamiltonschen Operator

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

nach den Regeln der skalaren Multiplikation (§ 5) mit dem Vektor

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{v}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{v}_z\mathfrak{k}$$

vereinigt:

$$\nabla\mathfrak{v} = \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Maxwell nannte die mit negativem Vorzeichen genommene Divergenz die Konvergenz des betreffenden Vektors; da er nicht die Multiplikationsregeln (19) für die Grundvektoren $\mathfrak{i}\mathfrak{i} = +1$, sondern die Regeln der Quaternionentheorie $\mathfrak{i}\mathfrak{i} = -1$ verwandte, so schrieb er

$$\nabla\mathfrak{v} = \operatorname{conv} \mathfrak{v}.$$

In dieser Schrift wird das Symbol ∇ für den Gradienten reserviert und für die Divergenz immer das Symbol div geschrieben.

Wir berechnen die gesamte Flüssigkeitsströmung durch eine geschlossene Fläche f, die einen mit Flüssigkeit erfüllten

Raum v begrenzt. Infolge der Unzusammendrückbarkeit muß die Menge Flüssigkeit, welche die in einem Raume enthaltenen Quellen im ganzen in der Zeiteinheit erzeugen, durch die Oberfläche nach außen strömen. Führt man die Summation über alle die infinitesimalen Parallelepipede aus, in die man den Raum geteilt denkt, so erhält man den Überschuß der in der Zeiteinheit ausströmenden über die einströmende Flüssigkeit. Ist n die nach außen weisende Normale der Fläche, so gibt $df \,.\, \mathfrak{v}_n$ die durch df in der Zeiteinheit von innen nach außen strömende Flüssigkeit an, es wird daher

$$\int dv \operatorname{div} \mathfrak{v} = \int df \mathfrak{v}_n . \tag{71}$$

Diese Gleichung spricht den sogenannten Gaußschen Satz aus. Mit Rücksicht auf die große Bedeutung dieses Satzes für die Elektrizitätslehre geben wir einen zweiten strengeren Beweis, der sich von Spezialisierung, die in der parallelepipedischen Einteilung des Raumes liegt, frei macht.

§ 20. Die Sätze von Gauß und Green.

Wir beweisen den Gaußschen Satz für ein begrenztes räumliches Gebiet von folgenden Eigenschaften. Jede Parallele zu einer der Koordinatenachsen soll die Oberfläche f nur zweimal schneiden. Besitzt ein Gebiet nicht diese Eigenschaft, so läßt es sich doch durch geeignet gelegte Schnittflächen stets in eine endliche Zahl von Stücken zerlegen, denen die vorausgesetzte Eigenschaft zukommt. Ist der Gaußsche Satz für die einzelnen Raumstücke bewiesen, so folgt durch Summation seine Gültigkeit für das ganze Gebiet, da die auf die Schnittflächen bezüglichen Beiträge der Flächenintegrale sich aufheben.

Wir legen jetzt eine Gerade parallel der x-Achse. Es seien x', x'' die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche f, ferner n', n'' die nach außen weisenden, in diesen Schnittpunkten auf der Fläche errichteten Normalen. Die erste Normale n' schließt einen stumpfen, die zweite n'' einen spitzen Winkel mit der x-Achse ein. Wir legen ferner einen Balken (Abb. 7) von dem unendlich kleinen rechteckigen Querschnitt $dy\,dz$ und mit jener Geraden als Achse; derselbe mag aus der Oberfläche f die Elemente df', df'' herausschneiden; dann ist

$$-\,df'\cos n'x = +\,df''\cos n''x = dy\,dz.$$

Wir erhalten durch Integration längs des Balkens

$$dy\,dz\int\limits_{x'}^{x''}\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}\,dx = dy\,dz\,\{\mathfrak{v}_x\}_{x'}^{x''} = dy\,dz(\mathfrak{v}_x'' - \mathfrak{v}_x'),$$

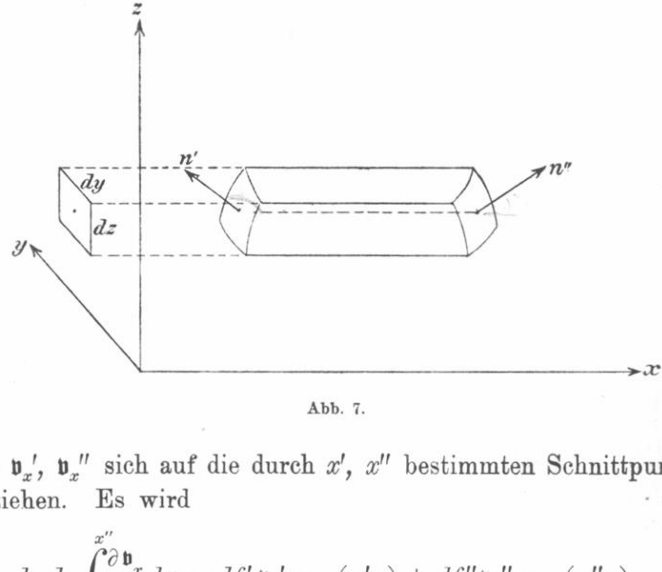

Abb. 7.

wo $\mathfrak{v}_x'$, $\mathfrak{v}_x''$ sich auf die durch x', x'' bestimmten Schnittpunkte beziehen. Es wird

$$dy\,dz\int\limits_{x'}^{x''}\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}\,dx = df'\,\mathfrak{v}_x'\cos(n'x) + df''\,\mathfrak{v}_x''\cos(n''x).$$

Indem man nun den ganzen Raum durch Ebenen parallel der (xy)- und (xz)-Ebene in derartige Balken zerlegt, teilt man gleichzeitig die Oberfläche in Elemente df, von denen jedes nur einmal vorkommt. Es ist daher

$$\int dv\,\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x} = \int df\,\mathfrak{v}_x\cos nx.$$

Durch entsprechende Zerlegungen des Raumes in Balken, deren

Längsachsen der y-Achse bzw. z-Achse parallel sind, und durch Integration der beiden anderen Glieder der Divergenz über den so zerlegten Raum erhält man entsprechende Gleichungen; die Addition der drei so gewonnenen Gleichungen ergibt den Gaußschen Satz

$$(71a) \int dv \operatorname{div} \mathfrak{v} = \int df \{ \mathfrak{v}_x \cos nx + \mathfrak{v}_y \cos ny + \mathfrak{v}_z \cos nz \} = \int df \mathfrak{v}_n .$$

Die soeben gegebene Ableitung zeigt, daß der Gaußsche Satz nichts anderes als eine Formel der Integralrechnung ist, deren Gültigkeit nur die Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Gebiete voraussetzt. Sie führt uns zu einer allgemeineren Fassung der Definition der Divergenz: Der Wert der Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ in einem Punkte P des Feldes wird erhalten, indem eine kleine, den Punkt P einschliessende Fläche f konstruiert und die nach außen tretende Strömung $\int df \mathfrak{v}_n$ berechnet wird; der Grenzwert, dem der Quotient aus dieser Strömung und Volum $\varDelta v$ des von f begrenzten Raumes zustrebt, wenn man das Volumen mehr und mehr verkleinert, definiert den Wert der Divergenz im Punkte P.

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{\varDelta v = 0} \frac{\int \mathfrak{v}_n df}{\varDelta v} .$$

Diese Definition ist insofern allgemeiner als diejenige des vorigen Paragraphen, als sie über die Form der Fläche, für welche die Strömung berechnet wird, keine einschränkende Voraussetzung macht. Der erhaltene Wert ist, wie wir erkennen, unabhängig von der Form der Fläche, insbesondere auch von dem der früheren parallelepipedischen Definition zugrunde liegenden Koordinatensystem. Damit ist erst die skalare Natur der Divergenz streng bewiesen.

Jede für die Divergenz irgendeines Vektors erhaltene Relation läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes sofort in eine Beziehung zwischen Volumintegralen und Flächenintegralen umsetzen. Es sei z. B. ein Vektor $\mathfrak{v}$ das Produkt aus einem Skalar ψ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{v} = \psi \cdot \mathfrak{A}.$$

Dann wird die Divergenz von $\mathfrak{v}$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mathfrak{A}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \mathfrak{A}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \mathfrak{A}_z,$$

oder, da $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ nach § 18 die Komponenten von $\nabla \psi$ sind

$$\operatorname{div} \psi \mathfrak{A} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi. \tag{72}$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt

$$\int df \psi \mathfrak{A}_n = \int dv \{\psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi\} \tag{73}$$

für jede geschlossene, den Raum v des Feldes einschließende Fläche f.

Es sei zweitens der Vektor $\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Raume wirbelfrei verteilt, also, nach § 18, als Gradient eines Skalars φ aufzufassen

$$\mathfrak{v} = \nabla \varphi.$$

Alsdann ist die Divergenz

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{73a}$$

Die Divergenz eines Vektors erhält man, wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, mit Hilfe des Hamiltonschen Operators, indem man diesen mit dem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verknüpft. Man schreibt daher

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi. \tag{73b}$$

Den Operator $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nennt man „Laplaceschen Operator“, mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ die Laplacesche Gleichung heißt.

Die Laplacesche Gleichung sagt nichts anderes aus, als daß die wirbelfreie Strömung $\mathfrak{v} = \nabla \varphi$ gleichzeitig quellenfrei sein soll.

Den Gaußschen Satz auf den Vektor $\nabla\varphi$ anwendend, erhält man

$$(74)\qquad \int df \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \int dv \nabla^2\varphi.$$

Wir setzen endlich in Gleichung (73) $\mathfrak{A} = \nabla\varphi$ und erhalten

$$(75)\qquad \int df \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \int dv \{\psi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi\nabla\psi)\}.$$

Diese Formel wird der „Greensche Satz" genannt; sie geht, wenn $\psi = 1$ gesetzt wird, in (74) über.

Vertauscht man in Gleichung (75) die Skalaren φ, ψ, so erhält man

$$\int df \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} = \int dv \{\varphi\nabla^2\psi + (\nabla\varphi\nabla\psi)\}.$$

Zieht man diese Gleichung von jener ab, so fällt das innere Produkt $(\nabla\varphi\nabla\psi)$ heraus, und man erhält die wichtige Formel

$$(76)\qquad \int df \left\{\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\} = \int dv \{\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\}.$$

Die Gültigkeit des Gaußschen Satzes hatte die Endlichkeit und Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$, deren Divergenz einging, zur Voraussetzung. Die letzte Formel (76), die durch Integration von $\operatorname{div}\{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi\}$ über das Raumstück v entstanden ist, setzt demgemäß die Endlichkeit und Stetigkeit der Skalaren φ, ψ und ihrer Gradienten in dem von der Fläche f begrenzten Gebiete voraus.

§ 21. Quellpunkte.

Wir haben bisher die Quellen immer als stetig verteilt, den Wert der Divergenz immer als endlich vorausgesetzt. In Wirklichkeit ist diese Annahme bei allen Vektorfeldern erfüllt. Indessen gibt es Fälle, wo die Verteilung der Quellen sich einer unstetigen nähert, indem sie nahezu auf Punkte, Linien und Flächen zusammengedrängt erscheinen. Da die unstetigen Verteilungen sich mathematisch zuweilen einfacher behandeln lassen, als die stetigen, so idealisiert man wohl die Probleme, indem man mit unstetiger Verteilung rechnet. Man muß dabei allerdings, wenn man Fehlschlüsse vermeiden will, im Auge behalten, daß man mit Annahmen operiert, die der Wirklichkeit nicht genau entsprechen.

Immerhin erscheint es zweckmäßig, in diesem Paragraphen die von Quellpunkten erzeugte wirbelfreie Strömung zu behandeln. Wir gehen von dem Falle eines einzelnen Quellpunktes in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit aus. Nach der Symmetrie wird die dem Quellpunkte entströmende inkompressible Flüssigkeit sich nach allen Richtungen gleichmäßig ausbreiten. Sie wird radial abfließen, indem durch alle die konzentrischen, um den Quellpunkt als Mittelpunkt gelegten Kugelflächen die gleiche Strömung hindurchtritt. Dieselbe gibt die Ergiebigkeit der Quelle an, wenn wir diese, wie bisher, durch das Volumen der heraustretenden Flüssigkeit messen. Es soll aber von jetzt an die Ergiebigkeit durch die Masse der idealen Flüssigkeit bestimmt und deren Dichte, über die wir noch beliebig verfügen können, gleich $\frac{1}{4\pi}$ gesetzt werden. Das geschieht, um in den Formeln die Analogie des Strömungsfeldes und des in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessenen elektrischen Kraftfeldes deutlich hervortreten zu lassen.

Die so gemessene Ergiebigkeit e der Quelle beträgt

$$e = \frac{1}{4\pi}\int df\,\mathfrak{v}_n = r^2\mathfrak{v}_r;$$

umgekehrt drückt sich die radiale Geschwindigkeit durch die Ergiebigkeit folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{v}_r = \frac{e}{r^2},$$

sie nimmt mit dem reziproken Quadrate der Entfernung r vom Quellpunkte ab und wird unendlich, wenn man in den Quellpunkt hineingeht.

Die wirbelfreie Natur der Strömung bringt es mit sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ sich als negativer Gradient eines Potentiales darstellt

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \tag{77}$$

Im Ausdruck des Potentiales φ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird, wie man sieht, der Faktor 4π durch die über die Dichte getroffene Festsetzung beseitigt; er kommt aber an einer anderen Stelle wieder herein, nämlich in die Beziehung, welche die Ergiebigkeit e mit der über eine den Quellpunkt einschließende Fläche integrierten Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ verknüpft:

$$\int \mathfrak{v}_n df = 4\pi e. \tag{78}$$

Haben wir nun eine Reihe von h Quellpunkten, von den Ergiebigkeiten $e_1 \ldots e_h$, deren Felder sich superponieren, so kann man das resultierende Feld entweder durch geometrische Addition der Vektoren $\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_h$, oder einfacher durch algebraische Addition der skalaren Potentiale $\varphi_1 \ldots \varphi_h$ bestimmen:

$$\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{h} \mathfrak{v}_i = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{r_i}. \tag{79}$$

Konstruiert man eine geschlossene Fläche, die eine Zahl von Quellpunkten einschließt, so ist das Flüssigkeitsvolumen, welches durch die Fläche nach außen tritt, gleich 4πmal der algebraischen Summe der Ergiebigkeiten der eingeschlossenen Quellen.

Schließt die Fläche das ganze endlich ausgedehnte Quellsystem ein, so ist das Volum der herausströmenden Flüssigkeit

$$4\pi \sum_{i=1}^{h} e_i.$$

Ist die Fläche eine Kugel, deren Mittelpunkt innerhalb des Quellsystems liegt, so nähert sich in dem Maße, wie der Radius R der Kugel wächst, die Strömung einer radialen; denn je größer der Kugelradius gegen den größten Abstand zweier Quellpunkte ist, um so geringer ist der Fehler, den man begeht, wenn man in (79)

$$\frac{r_i - R}{R}$$

gegen 1 vernachlässigt, d. h. jedes r_i durch R ersetzt, wodurch

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{h} e_i}{R}$$

wird. In solchen Entfernungen wirkt das Quellsystem wie ein einzelner Quellpunkt im Mittelpunkt der Kugel, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit des Quellsystems ist. Im allgemeinen verschwindet daher das Potential im Unendlichen wie die reziproke erste Potenz, die radiale Geschwindigkeit, wie die reziproke zweite Potenz von R.

§ 22. Doppelquellen.

Besonderes Interesse verdienen diejenigen Quellensysteme, in denen die Summe der Ergiebigkeiten der positiven und der negativen Quellen Null ist. Hier verschwindet im Unendlichen das Potential von höherer als der ersten, die radiale Geschwindigkeit von höherer als der zweiten Ordnung; die Strömung durch eine das ganze Quellensystem einschließende Fläche ist gleich Null

Das einfachste Feld dieser Art ist dasjenige, welches von zwei benachbarten Quellpunkten von gleicher Ergiebigkeit, aber entgegengesetztem Vorzeichen, erzeugt wird. Wir wollen dieses Quellensystem eine „Doppelquelle“ nennen. Das Potential des zugehörigen wirbelfreien Feldes wird erhalten, indem der Grenzwert berechnet wird, dem die Differenz $\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}$ zustrebt, wenn Quellpunkt und Senkpunkt ganz nahe aneinander rücken. Es wird für das Verständnis dieses Grenzüberganges nützlich sein, einige Begriffe zu erläutern, die bisher nicht zur Sprache gekommen sind.

Wir haben in § 18 die Operation ∇ kennen gelernt; dieselbe gab den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs an, den der betreffende Skalar bei einer Verschiebung nach irgendeiner Richtung erfuhr. Wir haben nun im Felde eines Quellpunktes zwei Arten von Verschiebungen zu unterscheiden, solche, bei denen der betrachtete Punkt des Feldes, den wir Aufpunkt nennen wollen, verschoben, aber der Quellpunkt festgehalten wird, und solche, bei denen der Aufpunkt festgehalten und der Quellpunkt verschoben wird. Erteilt man dem Quellpunkt und dem Aufpunkt gleiche und gleichgerichtete Verrückungen, so behält jede Größe, die nur vom Abstand r der beiden Punkte abhängt, ihren Wert bei; denn der Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt ändert sich bei einer solchen gemeinsamen Verschiebung nicht. **Mithin ist eine Verrückung des Quellpunktes nach irgendeiner Richtung äquivalent einer Verrückung des Aufpunktes von dem gleichen Betrage, aber nach der entgegengesetzten Richtung.** Indem wir den Zuwachs bei Verschiebung des Aufpunktes und des Quellpunktes ∇_a und ∇_q schreiben, können wir das Ergebnis unserer Betrachtung, angewandt auf die Größe $\frac{1}{r}$, ausdrücken durch

$$\nabla_a \frac{1}{r} = - \nabla_q \frac{1}{r} \cdot \tag{80}$$

Die gewöhnliche, an skalare Größen sich anlehnende Betrachtungsweise führt zu demselben Resultate, indem sie den Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

setzt, wo xyz die Koordinaten des Aufpunktes, $\xi\eta\zeta$ diejenigen des Quellpunktes sind. Es ist dann

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{\partial r}{\partial \zeta},$$

woraus der obige Satz für jede ausschließlich von r abhängige Größe folgt.

Bei der Aufgabe, von der wir ausgingen, nämlich das Potential einer Doppelquelle zu berechnen, ist eine Verrückung des Quellpunktes vorzunehmen, und zwar in der Richtung vom Senkpunkte zum Quellpunkte, und um eine sehr kleine Strecke, die gleich dem Abstande l der beiden

Punkte ist. Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{m}$ ein, den wir „Moment der Doppelquelle" nennen; seine Richtung soll vom Senkpunkte nach dem Quellpunkte weisen, und sein Betrag soll gleich sein der Ergiebigkeit (e) des Quellpunktes, multipliziert mit dem Abstande l vom Quellpunkt und Senkpunkt: $|\mathfrak{m}| = el$. Dann erhalten wir als Potential der Doppelquelle:

$$\varphi = \left(\mathfrak{m}\nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\left(\mathfrak{m}\nabla_a \frac{1}{r}\right), \tag{81}$$

oder, in skalarer Schreibweise

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \\ &= -\left\{\mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right\}. \end{aligned} \tag{81a}$$

Die Formel (81) gilt als Näherungsformel für ein Quellpaar entgegengesetzten Vorzeichens und für Entfernungen des Aufpunktes, die groß sind gegen den Abstand von Quellpunkt und Senkpunkt. Sie gilt streng für beliebige Abstände des Aufpunktes von der Doppelquelle, wenn man l gleich Null macht; dabei muß natürlich, wenn $|\mathfrak{m}|$ endlich bleiben soll, die Ergiebigkeit e unendlich werden, in der Weise, daß das Produkt $e \cdot l$ bei dem Grenzübergang einem bestimmten endlichen Werte zustrebt. Der Punkt $r = 0$ ist natürlich bei der Doppelquelle ebenso wie bei der einfachen Quelle, aus dem Felde auszuschließen, weil die Geschwindigkeit dort unendlich wird. Hier liegt ein Fall vor, wo die idealisierende Voraussetzung unstetiger Verteilung der Quellen, auf das Quellgebiet selbst angewandt, zum Widerspruche mit der Wirklichkeit führt.

§ 23. **Berechnung des wirbelfreien Vektorfeldes aus dem Quellenfelde.**

Wir kehren zur Untersuchung des wirbelfreien Vektorfeldes mit stetig über den Raum verteilten Quellen zurück.

Dabei soll, ebenso wie im letzten Paragraphen, die Ergiebigkeit der Quellen nicht durch das Volumen, sondern durch die Masse der erzeugten idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ definiert sein. Man hat dann, auf die Volumeinheit berechnet, die Ergiebigkeit

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

und da in dem wirbelfreien Felde der Vektor $\mathfrak{v}$ der negativ genommene Gradient eines Potentiales ist,

$$(82) \qquad 4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\operatorname{div} \nabla\varphi = -\nabla^2\varphi.$$

Die letzte Gleichung lehrt, aus dem Vektor $\mathfrak{v}$, bzw. aus seinem Potentiale φ, die Verteilung der Quellen zu berechnen. Es mag jetzt die umgekehrte Aufgabe vorgelegt sein: Aus dem gegebenen Quellenfelde soll das Vektorfeld berechnet werden, das als stetig und wirbelfrei vorausgesetzt wird; dabei wird angenommen, daß die Quellen durchweg im Endlichen liegen, daß also außerhalb eines gewissen endlichen Bereiches ϱ gleich Null ist.

Es fragt sich zunächst, ob durch diese Angaben das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, oder ob es nicht zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gibt, die beide den Voraussetzungen Genüge leisten, ohne daß ihre Felder durchaus übereinstimmen. Um diese Frage zu entscheiden, untersuchen wir den Vektor $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$, den wir für den Moment mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen wollen. Sein Feld soll einerseits wirbelfrei, andererseits, weil ja $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ dieselben Quellen haben, quellenfrei sein. Aus der letzteren Eigenschaft folgt, daß das ganze Strömungsfeld sich lückenlos in Röhren teilen läßt, derart, daß durch alle Querschnitte einer bestimmten Röhre die gleiche Flüssigkeitsmenge strömt, und daß die Röhren im Endlichen weder beginnen noch endigen. Ins Unendliche aber können sie nicht reichen; denn es verschwindet, da die gesamte Ergiebigkeit der Quellen von $\mathfrak{v}$ gleich Null ist, die Geschwindigkeit im Unendlichen von höherer als der zweiten Ordnung. Es müßten also die Stromröhren geschlossene Röhren sein. Wir berechnen nun die kinetische Energie, die in einer solchen, hinreichend klein gewählten Röhre enthalten ist, indem wir $\frac{\mathfrak{v}^2 dv}{8\pi}$ über die Volumelemente der Röhre integrieren. Ist s die Leitkurve der Röhre, der parallel die Strömung fließt, und q ihr Querschnitt, so ist $\mathfrak{v}^2 = \mathfrak{v}_s^2$ und $dv = q ds$, ferner $\mathfrak{v}_s q$ konstant längs der Röhre. Wir erhalten mithin für die kinetische Energie, die in der ganzen Röhre enthalten ist,

$$\frac{1}{8\pi}\mathfrak{v}_s q \int_P^P \mathfrak{v}_s ds.$$

Da nun aber die Strömung als wirbelfrei vorausgesetzt war, so ist das längs der geschlossenen Leitkurve erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{v}$ Null, mithin die in einer jeden Röhre enthaltene Energie Null, und daher schließlich die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeitsströmung Null.

Das ist aber unmöglich, sofern nicht im ganzen Felde $\mathfrak{v} = 0$, mithin $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ ist. Die beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, die zunächst als verschieden betrachtet wurden, sind also in Wirklichkeit identisch, das gestellte Problem kann nicht mehrere Lösungen besitzen.

Der soeben gegebene Eindeutigkeitsbeweis ist natürlich ganz unabhängig davon, ob unserer idealen Flüssigkeit lebendige Kraft zugeschrieben wird oder nicht, er beruht nur auf dem Verschwinden des mathematischen Ausdruckes

$$T = \int dv \frac{1}{8\pi} \mathfrak{v}^2,$$

der allerdings zweckmäßig als lebendige Kraft der Strömung gedeutet wird. Das tritt vielleicht klarer hervor, wenn wir den geführten Beweis in analytischem Gewande wiederholen. Wir setzen in der Greenschen Formel (75)

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \quad 4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi = 0, \quad \varphi = \psi.$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, wenn die Fläche f in das Unendliche rückt, und es folgt

$$\int dv\, \mathfrak{v}^2 = 0.$$

Da $\mathfrak{v}^2$ niemals negativ werden kann, so kann das über den ganzen Raum erstreckte Integral nur verschwinden, wenn $\mathfrak{v}$ durchweg Null ist.

Die Greenschen Sätze führen uns nun weiter zur Lösung der gestellten Aufgabe; sie gestatten es, aus dem Quellenfelde ϱ zunächst das Feld des Potentiales φ zu berechnen, als dessen negativer Gradient dann der Vektor $\mathfrak{v}$ erhalten wird. Wir legen die Formel (76) zugrunde; φ, ψ bedeuteten daselbst Skalare, die nebst ihren Gradienten im ganzen Raume endlich und stetig sein sollten. Wir verstehen unter φ das gesuchte Potential, während wir

$$\psi = \frac{1}{r}$$

setzen, wo r die Entfernung von einem beliebig gewählten Punkte P des Feldes angibt. Der Punkt P muß dann aus dem Felde ausgeschlossen werden, etwa durch eine kleine Kugelfläche f_0, damit ψ in dem ganzen Gebiete, auf das wir die Formel (76) anwenden, endlich und stetig wird.

Die Begrenzung dieses Gebietes besteht erstens aus der kleinen, um P als Mittelpunkt konstruierten Kugel f_0, zweitens aus einer das ganze Quellensystem einschließenden Fläche f. Das über die letztere erstreckte Integral

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\}$$

verschwindet, wenn wir die Fläche f in das Unendliche rücken lassen; denn es wachsen zwar die Flächenelemente wie r^2, aber φ verschwindet mindestens wie r^{-1}, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ mindestens wie r^{-2}. Es ergibt daher Gleichung (76)

$$\int df_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = \int dv \left\{ \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \right\}.$$

In dem über die kleine Kugel f_0 zu erstreckenden Flächenintegral bedeutet n diejenige Normale, die von dem betrachteten Gebiete nach außen weist, also nach dem Mittelpunkte der

Kugel hin gerichtet ist. Es folgt

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2}.$$

Läßt man nun die Kugel f_0 mehr und mehr sich auf den Punkt P zusammenziehen, so verschwindet in der Grenze das Glied

$$\int d f_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

und das andere Glied wird

$$-\int \frac{d f_0 \varphi}{r^2} = -4\pi\varphi,$$

wo φ jetzt den Wert des Potentiales im Punkte P bezeichnet. Da ferner in dem Volumintegrale nach Gleichung (82)

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\nabla^2\varphi$$

einzuführen und

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

zu setzen ist — es stellt $\frac{1}{r}$ das Potential eines in P befindlichen Quellpunktes von der Ergiebigkeit 1 dar, dessen Feld außerhalb f_0 quellenfrei ist —, so erhält man schließlich

$$\varphi = \int \frac{dv\,\varrho}{r} \tag{83}$$

als Wert des Potentiales in dem jetzt beliebig zu wählenden Aufpunkte P.

Vergleicht man diese Formel mit der im vorigen Paragraphen für das Potential eines Systemes von Quellpunkten abgeleiteten Formel (79), so bemerkt man, daß hier das resultierende Potential ebenso durch algebraische Summation von den einzelnen Volumelementen herrührender Beiträge entsteht, wie es dort durch Addition der Potentiale der einzelnen Quellpunkte entstand. Doch führt das jetzt für stetig verteilte Quellen erhaltene Resultat insofern weiter, als es auch auf das Innere des Quellengebietes anwendbar ist. Auch hier berechnet sich das Potential nach (83), der Vektor $\mathfrak{v}$ wird alsdann als negativer Gradient von φ erhalten:

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi;$$

er entsteht durch geometrische Addition der von den einzelnen Volumelementen des Quellensystemes erzeugten Geschwindigkeiten.

Bisweilen gelingt es auf Grund dieses Superpositionsprinzipes, durch bloße Symmetriebetrachtungen die von einem gegebenen Quellensystem herrührende Strömung zu finden. Es mögen etwa die Quellen gleichförmig über eine Vollkugel vom Radius a verteilt sein. Nach der Symmetrie folgt, daß die Strömung überall radial verläuft. Mithin ist das Flüssigkeitsvolumen, das durch konzentrische Kugeln vom Radius R nach außen tritt,

$$4\pi\,|\mathfrak{v}|\,R^2,$$

und der Gaußsche Satz ergibt gemäß Gleichung (82) für $R \geqq a$

$$|\mathfrak{v}| = \varrho\,\frac{V}{R^2} = \frac{e}{R^2}. \qquad \left(V = \frac{4\pi}{3}\,a^3\right)$$

Die Strömung erfolgt außerhalb der mit Quellen gleichförmig erfüllten Kugel so, als ob im Mittelpunkte ein Quellpunkt sich befände, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit der Kugel ist.

Durch Kugeln hingegen, welche innerhalb des Quellengebietes liegen, tritt nur dasjenige Flüssigkeitsvolumen, welches den eingeschlossenen Quellen von der Ergiebigkeit

$$\varrho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

entspricht; die äußeren Kugelschichten, allein vorhanden, würden in dem inneren Hohlraum nach Symmetrie eine wirbelfreie Strömung nicht erzeugen können. Mithin ist für $R \leqq a$

$$|\mathfrak{v}| = \frac{4\pi}{3}\,R \cdot \varrho.$$

Das Potential φ bestimmt man nun so, daß es im Unendlichen verschwindet. Es ist für $R \geqq a$

$$\varphi = \int_R^\infty |\mathfrak{v}|\, dR = \varrho \frac{V}{R} = \frac{4\pi a^3}{3R} \cdot \varrho,$$

folglich für $R = a$

$$\varphi = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho,$$

daher für $R < a$

$$\varphi = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho + \int_R^a |\mathfrak{v}|\, dR = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho + \left\{ \frac{2\pi R^2}{3} \varrho \right\}_R^a,$$

oder schließlich

(83a) $R \geqq a$ $$\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \varrho \cdot \frac{1}{R},$$

(83b) $R \leqq a$ $$\varphi = \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right) \varrho.$$

Das sind die Werte des Potentiales außerhalb und innerhalb der gleichförmig mit Quellen erfüllten Vollkugel.

Es ist von Interesse, den allgemeinen Ausdruck

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{v}^2,$$

den wir oben als lebendige Kraft der Strömung gedeutet haben, auf eine andere Form zu bringen. Das geschieht, indem wieder in (75) $\psi = \varphi$ gesetzt und diese Gleichung auf das ganze Feld angewandt wird. Das über die unendlich entfernte Grenzfläche erstreckte Flächenintegral ist Null. Es folgt

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\nabla \varphi)^2 = - \frac{1}{8\pi} \int dv \varphi \nabla^2 \varphi,$$

daher mit Rücksicht auf (82):

(84) $$T = \frac{1}{2} \int dv \varrho \varphi.$$

Die lebendige Kraft der Strömung stellt sich hier dar als ein nur über das Quellengebiet zu erstreckendes Integral; diese Art der Darstellung erweckt den Anschein, als ob der Sitz der Energie ausschließlich das Gebiet der Quellen wäre, während doch in Wirklichkeit alle Volumelemente des Strömungsfeldes Energie enthalten.

Die Berechnung der Energie des Strömungsfeldes wird oft erleichtert, wenn man die Formel (84) zugrunde legt; in dem soeben behandelten Beispiele ist die Integration nur über das Innere der Kugel zu erstrecken; da die Dichte ϱ hier konstant ist, so erhält man aus (83b)

$$T = 2\pi\varrho^2 \int_0^a dR\, R^2 \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right);$$

dies ergibt für die *homogen mit Quellen erfüllte Vollkugel*

$$T = \frac{16\pi^2\varrho^2 a^5}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a}. \tag{84a}$$

§ 24. Flächenhaft verteilte Quellen.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen fußten auf der Voraussetzung, daß die betrachtete wirbelfreie Strömung überall endlich und stetig verläuft, daß mithin weder das Potential, noch der Vektor $\mathfrak{v}$ selbst ihre Werte etwa beim Durchschreiten gewisser Flächen sprunghaft ändern. Wir wollen diese Voraussetzung jetzt fallen lassen, indem wir es als zulässig ansehen, daß sowohl φ, wie auch die Komponenten des wirbelfreien Vektors

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi$$

an gewissen Flächen Unstetigkeiten besitzen. Es wird genügen, eine einzige Unstetigkeitsfläche (f_{12}) in Betracht zu ziehen (Abb. 8), die zwei Gebiete (1, 2) des Feldes scheidet. Da zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche $\mathfrak{v}$ der Gradient von $(-\varphi)$ sein soll, so werden die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$ zu jeder Seite von f_{12} sich aus dem Anstiege des Potentiales φ beim Fortschreiten längs der Fläche berechnen, ihre Sprünge aus dem Sprunge der Potentialwerte.

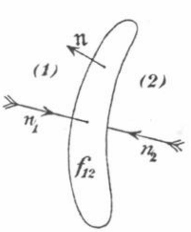

Abb. 8.

Es wird daher außer dem Sprunge von φ nur noch der Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ unabhängig vor-zuschreiben sein. Wir wollen zwei diesen Sprüngen proportionale Größen ω, τ einführen, die genauer durch folgende Gleichungen definiert sind

$$(85)\qquad 4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = -(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}),$$

$$(86)\qquad 4\pi\tau = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Dabei sollen die Normalen n_1, n_2 so gerichtet sein, daß sie von dem betreffenden Gebiete (1) bzw. (2) aus, um dessen Feld es sich gerade handelt, nach der Fläche f_{12} hinweisen (Abb. 8). Diese Festsetzung stimmt überein mit der bei der Formulierung des Gaußschen Satzes getroffenen, daß nämlich die Normale einer das Feld begrenzenden Fläche stets nach der Fläche hin gezogen werden soll.

Man überzeugt sich leicht davon, daß durch Angabe der Verteilung von ω und τ längs der Unstetigkeitsfläche, sowie der räumlichen Verteilung des Quellenfeldes ϱ die wirbelfreie Strömung eindeutig bestimmt ist. In der Tat, betrachten wir zwei wirbelfreie Felder $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, für die sowohl die räumliche Verteilung der Quellen, wie auch die durch (85, 86) vorgeschriebenen Unstetigkeiten an der Fläche f_{12} die gleichen sind, die im übrigen endlich und stetig sind. Die Differenz $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ wird dann ein wirbelfreies Feld darstellen, das überall quellenfrei, endlich und stetig ist; wir haben aber im vorigen Paragraphen gezeigt, daß ein solches Feld durchweg verschwindet; es ist daher $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ gleich Null.

Um nun das Feld bei gegebenen Unstetigkeiten auf f_{12} wirklich zu berechnen, gehen wir wieder, wie im vorigen Paragraphen, von der Formel (76) aus; wir setzen dort

$$\psi = \frac{1}{r},$$

wo r die von irgendeinem Punkte P des Feldes aus gerechnete Entfernung ist. Wir legen diesen Punkt so, daß er nicht gerade in die Unstetigkeitsfläche fällt. Wir legen wieder eine kleine Kugel um P als Mittelpunkt, um diesen Unstetigkeitspunkt von ψ aus dem Integrationsgebiete auszuschließen. Macht man diese Kugel kleiner und kleiner, so ergibt das entsprechende Flächenintegral in (76) wiederum als Grenzwert $-4\pi\varphi$, wo φ das Potential im Punkte P ist. Jetzt muß man aber auch die Unstetigkeitsfläche f_{12} aus dem Integrationsgebiete ausschließen, weil ja Endlichkeit und Stetigkeit sowohl von φ, wie von $\nabla\varphi$ in dem Gebiete notwendig zur Gültigkeit von (76) waren.

Es mag f_{12} zunächst ein ungeschlossenes Flächenstück sein. Wir denken uns eine derselben beiderseits dicht anliegende geschlossene Fläche f, welche f_{12} von dem Integrationsgebiete ausschließt, und berechnen für f das in (76) eingehende Integral

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\}.$$

Dasselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die von den beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche f_{12} herrühren; es wird daher

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = \int df_{12} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) - \varphi_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} - \varphi_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} \right\}.$$

Wir wollen nun diejenige Normalenrichtung bevorzugen, welche von (2) nach (1) geht, und wollen sie durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ zur Darstellung bringen, den wir den einzelnen Punkten der Fläche f_{12} zuordnen (Abb. 8). Dann wird

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = -\left(\mathfrak{n}\,\nabla \frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} = +\left(\mathfrak{n}\,\nabla \frac{1}{r}\right).$$

Dabei bezieht sich der Zuwachs $\nabla \frac{1}{r}$ nicht auf Verrückung des Aufpunktes P, sondern auf ein Fortschreiten durch die Unstetigkeitsfläche hindurch. Da diese in einem im nächsten Paragraphen zu erläuternden Sinne als System von Doppelquellen zu betrachten ist, so schreiben wir in der Bezeichnungsweise des § 21 und mit Rücksicht auf (80)

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} = \left(\mathfrak{n} \nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\left(\mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r}\right)$$

und erhalten durch Einführung der durch (85, 86) definierten Größen ω, τ:

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = 4\pi \int df_{12} \left\{ \frac{\omega}{r} - \left(\tau \mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r}\right) \right\}.$$

Hierzu ist jetzt das von der um P konstruierten Kugel herrührende Glied $-4\pi\varphi$ hinzuzufügen und die Summe ist dem über den ganzen Raum erstreckten Volumintegral der Formel (76) gleichzusetzen, für das sich, wie im vorigen Paragraphen

$$\int \frac{dv}{r} \nabla^2 \varphi = -4\pi \int \frac{dv \varrho}{r}$$

ergibt. Wir erhalten daher

$$\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r} + \int df_{12} \frac{\omega}{r} - \int df_{12} \left(\tau \mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r}\right) \tag{87}$$

als das Potential, dessen negativ genommener Gradient

$$\mathfrak{v} = -\nabla \varphi$$

der gesuchte Vektor ist.

Wir deuten das Resultat, indem wir die drei Glieder einzeln diskutieren. Das erste Glied entspricht gemäß (83) den stetig über den Raum verteilten Quellen von der Ergiebigkeit ϱ pro Volumeinheit. Zu diesem kommt nun das zweite Glied, das als Potential des Systemes über die Fläche f_{12} verbreiteter Quellen, von der Ergiebigkeit ω pro Flächeneinheit, zu deuten ist. In der Tat erkennt man diese Bedeutung der Größe ω, wenn man das Flächenelement df_{12} in einen sehr kleinen Zylinder einschließt, dessen Grundflächen df_{12} parallel und gleich sind, während seine Höhe gegen die Abmessungen der Grundfläche verschwindend klein ist. Durch die Grundflächen entströmt das Flüssigkeitsvolumen

$$-df_{12}(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

— es weisen die Normalenrichtungen n_1, n_2 der Abbildung 8 nach der Fläche f_{12} hin, daher das negative Vorzeichen. Die Menge unserer idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$, die in der Zeiteinheit der Flächenelemente df_{12} entströmt, beträgt mithin

$$-\frac{1}{4\pi} df_{12} (\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}) = \frac{1}{4\pi} df_{12} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right) = \omega\, df_{12},$$

es ist also wirklich ω die auf die Flächeneinheit berechnete Ergiebigkeit.

Neben der Ergiebigkeit der räumlich verteilten Quellen

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

lernen wir jetzt die Ergiebigkeit der flächenhaft verteilten Quellen

$$\omega = -\frac{1}{4\pi} (\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

kennen, als einen dem Sprunge der normalen Geschwindigkeitskomponente porportionalen Skalar. Der „Divergenz“ bei stetigen Feldern tritt bei Unstetigkeitsflächen die „Flächendivergenz“

$$-(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

an die Seite.

Der Formel (83) entspricht, beim Auftreten von flächenhaften Quellenverteilungen, die folgende

$$\varphi = \int \frac{df_{12}\, \omega}{r}. \tag{87a}$$

Es ist übrigens nicht notwendig, daß f_{12} eine ungeschlossene Fläche ist; auch für geschlossene Flächen gelten die gleichen Resultate. Man beweist das, indem man die Formel (76) auf die beiden Gebiete, in die der Raum durch die Unstetigkeitsfläche zerlegt wird, einzeln anwendet und die erhaltenen Relationen addiert. Ebenso ist das Resultat auf den Fall zu übertragen, daß nicht eine einzige, sondern mehrere Unstetigkeitsflächen das Feld durchschneiden. Auch hier läßt sich der Einfluß der Unstetigkeitsflächen stets durch Annahme flächenhaft verteilter Quellen darstellen, solange $\tau = 0$ ist, d. h. solange als das Potential φ bei Durchquerung jener Flächen sich stetig verhält.

§ 25. Doppelschichten.

Besitzt hingegen das Potential φ selbst Unstetigkeiten, so kommt das dritte Glied in (87) für die Berechnung des Feldes in Betracht, wobei τ durch (86) gegeben wird. Die Vergleichung dieses dritten Gliedes mit dem Ausdrucke (81), der in § 22 für das Potential einer Doppelquelle erhalten war, zeigt, welche Quellenverteilung hier anzunehmen ist.

Es sind Doppelquellen von dem Momente $\tau\mathfrak{n}$ pro Flächeneinheit, die über die Unstetigkeitsfläche hin verteilt sind. Man bezeichnet ein solches Quellensystem kurz als „Doppelschicht", den Vektor $\tau\mathfrak{n}$ als „Moment der Doppelschicht". Da $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor vorstellt, so ist nach (86) der Betrag des Momentes, multipliziert mit 4π, gleich dem Sprunge, den das Potential φ beim Durchschreiten der Unstetigkeitsfläche erfährt. Da ferner $\mathfrak{n}$ die Richtung von (2) nach (1) anzeigt und τ positiv ist, wenn beim Durchschreiten in dieser Richtung φ sprungweise wächst, negativ, wenn φ sprungweise abnimmt, so ist die Richtung des Vektors $\tau\mathfrak{n}$ stets diejenige Normalenrichtung, die von niederen zu höheren Potentialwerten führt.

Denkt man sich zwei Parallelflächen zur Unstetigkeitsfläche f_{12} gelegt, die eine auf der Seite der größeren, die andere auf der Seite der kleineren Potentialwerte, und die erste mit einer einfachen Schicht von Quellen, die zweite mit einer einfachen Schicht von Senken belegt, derart, daß zwei einander gegenüberliegende Elemente der beiden Flächen im ganzen die Ergiebigkeit Null besitzen, und läßt man die beiden Flächen näher und näher aneinanderrücken, so besitzt im Grenzfalle die erzeugte wirbelfreie Strömung das Potential

$$(87\text{b}) \quad \varphi = +\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n},\ \nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n},\ \nabla_a \frac{1}{r}\right).$$

Das erkennt man sofort durch Betrachtungen, die durchaus denen entsprechen, die im § 22 zum Ausdrucke (81) für das Potential einer Doppelquelle führten. Der absolute Betrag von τ ist dem Produkte aus Abstand der beiden Schichten und Flächendichte der Quellenschicht gleichzusetzen. Wenn man nicht zur Grenze eines verschwindenden Abstandes übergeht, sondern zwei derartige Schichten in einem kleinen, jedoch endlichen Abstande annimmt, so gilt der obige Ausdruck für das Potential angenähert in solchen Aufpunkten, deren Abstand von den Punkten der beiden Schichten groß ist gegen den Abstand der beiden Schichten; er gilt in diesem Falle auch dann noch, wenn die Verteilung auf jeder der Schichten eine nicht streng, sondern nur angenähert flächenhafte ist. Solche Verteilungen der Quellen kommen in Wirklichkeit vor. Man idealisiert sie, indem man die positiven und negativen Quellen auf zwei Flächen konzentriert denkt, die dann ihrerseits wieder ganz dicht aneinanderrücken. Der Potentialausdruck, der diesem idealisierten Quellensysteme zukommt, gilt für beliebige Entfernungen des Aufpunktes von der Doppelschicht. Man muß aber im Auge behalten, daß in unmittelbarer Nähe des Quellengebietes und innerhalb desselben die vorgenommene Idealisierung nicht der Wirklichkeit entspricht, und muß sich davor hüten, hier die erhaltene Formel anzuwenden.

Man betrachte ein Flächenelement df_{12} der Doppelschicht und ziehe von seinem Mittelpunkte aus Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den Aufpunkten. Wir wollen sagen, ein Aufpunkt liege auf der positiven oder negativen Seite von df_{12}, je nachdem der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ mit der Richtung des Momentes $\tau\mathfrak{n}\,df_{12}$ des betreffenden Flächenelementes einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschließt. Nun besitzt

$$-\left(\tau\mathfrak{n},\ \nabla_a \frac{1}{r}\right) = + \frac{\tau\cos(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{r^2}$$

im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Wert, mithin ist

$$\frac{df_{12}\,\tau\cos(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{r^2} = \pm\, d\Omega \mid \tau \mid,$$

wo $d\Omega$ den körperlichen Winkel angibt, unter dem das Flächenelement df_{12} von dem betreffenden Aufpunkte aus erscheint und wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Aufpunkt auf der positiven oder auf der negativen Seite der Doppelschicht liegt; daher wird das aus den Beiträgen der Elemente der Doppelschicht sich zusammensetzende Potential

(88) $$\varphi = \int \pm \mid \tau \mid d\Omega.$$

Man hat demnach den Betrag des Momentes $\mid \tau \mid$ zu multiplizieren mit dem körperlichen Winkel $d\Omega$, unter dem das Flächenelement von dem betreffenden Aufpunkte aus gesehen wird, und über die ganze Doppelschicht zu integrieren, wobei die Beiträge derjenigen Flächenelemente positiv in Rechnung zu setzen sind, auf deren positiver Seite der Aufpunkt liegt, diejenigen negativ, auf deren negativer Seite der Aufpunkt liegt.

Im allgemeinen wird $\mid \tau \mid$ längs der Fläche variabel sein ist es konstant, so nennt man die Doppelschicht homogen; hier wird

(88a) $$\varphi = \mid \tau \mid \int \pm\, d\Omega = \pm \mid \tau \mid \Omega.$$

Dabei gibt Ω den körperlichen Winkel an, unter dem die Fläche von einem im Aufpunkte befindlichen Beobachter gesehen wird. Das folgt ohne weiteres, wenn der Aufpunkt für alle Elemente der Schicht auf der positiven, oder für alle auf der negativen Seite liegt, und hiernach ist das Vorzeichen zu bestimmen. Ist aber die homogene Doppelschicht so beschaffen, daß der Aufpunkt für einzelne Teile der Schicht auf der positiven, für andere auf der negativen Seite sich befindet, so hat man die Potentiale dieser Flächenstücke einzeln aus ihren körperlichen Winkeln zu berechnen und die Winkel, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, zu addieren.

Auch für eine geschlossene Doppelschicht gelten die erhaltenen Resultate. Ist die Doppelschicht homogen und weist das Moment in Richtung der äußeren Normalen, so ist außen

$$\varphi = 0;$$

denn jeder von einem äußeren Punkte aus konstruierte Elementarkegel schneidet aus der Doppelschicht eine gerade Anzahl von Flächenelementen heraus, deren Potentiale numerisch gleich sind und abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen zu nehmen sind. Innen aber ist

$$\varphi = -4\pi\tau.$$

Denn die von inneren Punkten ausgehenden Elementarkegel schneiden aus der Doppelschicht eine ungerade Anzahl von Flächenstücken heraus, von denen das erste mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, während die folgenden sich aufheben. Das einer solchen geschlossenen homogenen Doppelschicht entsprechende Feld ist außen und innen Null, dabei springt aber das Potential beim Durchschreiten der Doppelschicht um $4\pi\tau$, entsprechend der Voraussetzung, von der wir ausgingen.

Daß auch für ungeschlossene homogene Doppelschichten der Sprung des Potentiales $4\pi\tau$ ist, erkennt man, indem man sie zu einer geschlossenen ergänzt denkt; das Potential der zu diesem Zwecke hinzuzufügenden Doppelschicht ist dasselbe für zwei Punkte, die auf den beiden Seiten der ursprünglichen Doppelschicht einander gegenüberliegen, abgesehen von den dem Rande benachbarten Punkten. Der Sprung $4\pi\tau$ der geschlossenen Doppelschicht ist also gleichzeitig der Sprung der ursprünglich gegebenen ungeschlossenen, ausgenommen in unmittelbarer Nähe der Randkurve.

Auf das Potential und das Feld ungeschlossener Doppelschichten kommen wir weiter unten zurück.

§ 26. **Der Wirbel oder Curl eines Vektors.**

Wir haben im § 18 ein Vektorfeld wirbelfrei genannt, wenn für einen jeden im Feld verlaufenen geschlossenen Weg das Linienintegral

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s \, ds \tag{89}$$

verschwindet. Als hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ergab sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient aus dem Felde eines Skalars φ abzuleiten sein mußte, d. h. daß die Komponenten sich in der Form darstellen ließen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Das Kriterium hierfür ist das Verschwinden der drei Ausdrücke

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

in allen Punkten des betreffenden Gebietes. Das Verschwinden jener drei Größen ist mithin für das wirbelfreie Feld charakteristisch.

Wir werden anderseits ein Feld als Wirbelfeld bezeichnen, wenn in dem Felde in sich zurückkehrende Bewegungen vorkommen, derart, daß das Linienintegral (89) nicht für alle im Felde zu konstruierenden geschlossenen Linien verschwindet. Es liegt nahe, dieses Linienintegral als Maß der Wirbelstärke zugrunde zu legen; das soll in der Tat geschehen. Um aber für die Wirbelstärke an einem bestimmten Punkte des Feldes ein Maß zu erhalten, welches der Divergenz des Quellenfeldes entspricht, wollen wir das Linienintegral auswerten für eine sehr kleine, den betreffenden Punkt des Feldes umschlingende Kurve.

Wir wählen den betreffenden Punkt des als stetig vorausgesetzten Feldes zum Anfangspunkte O des Koordinatensystemes und konstruieren in der (yz)-Ebene ein Rechteck von den Seitenlängen b, c, in dessen Mittelpunkt der Punkt O liegt. Wir wählen es so klein, daß wir auf seinem Umfange mit den Gleichungen (66) rechnen dürfen.

Wir durchlaufen das Rechteck in demjenigen Sinne, der sich der x-Achse unseres Rechtssystemes zuordnet, wie der

Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube zuzuordnen ist, und berechnen das Linienintegral (89) für diesen geschlossenen Weg. Die beiden zur y-Achse parallelen Seiten liefern die Beiträge

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left\{ \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \cdot \frac{c}{2} \right\} \text{ bzw. } \int_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} dy \left\{ \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \cdot \frac{c}{2} \right\}.$$

Ihre Summe ist

$$- b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}.$$

Die beiden anderen zur z-Achse parallelen Seiten ergeben

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \cdot \frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \cdot z \right\} \text{ bzw. } \int_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \cdot \frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \cdot z \right\},$$

in Summa also

$$b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}.$$

Der Wert des Linienintegrales wird mithin durch

$$b \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \right)$$

mit um so größerer Annäherung gegeben, je kleiner das betreffende Rechteck ist. Dividieren wir jetzt durch den Flächeninhalt $b \cdot c$ und lassen denselben kleiner und kleiner werden, so definiert der Grenzwert

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}$$

die im Punkte O herrschende „Wirbelstärke um die x-Achse“; entsprechende, durch zyklische Vertauschung der xyz abzuleitende Größen

$$\mathfrak{w}_y = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{w}_z = \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

geben die im Punkte O bestehenden Wirbelstärken um die y-Achse bzw. z-Achse an.

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit denen des Vektors $\mathfrak{u}$ (Gl. 67), den wir im § 17 bei der Helmholtzschen Zerlegung als Rotationsgeschwindigkeit eines kleinen Flüssigkeitsbereiches kennen lernten, ergibt

$$(90) \qquad \mathfrak{w}_x = 2\mathfrak{u}_x, \quad \mathfrak{w}_y = 2\mathfrak{u}_y, \quad \mathfrak{w}_z = 2\mathfrak{u}_z.$$

Jene drei Wirbelstärken um die Koordinatenachsen sind daher gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten um die Koordinatenachsen. Sie sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{w}$, den wir kurz den „Wirbel" der Flüssigkeitsströmung nennen. Wegen der Proportionalität zum Vektor $\mathfrak{u}$ nennen manche Autoren den Vektor $\mathfrak{w}$ „Rotation des Vektors $\mathfrak{v}$" und schreiben ihn rot $\mathfrak{v}$.

Da aber der Wirbel das Doppelte der Rotationsgeschwindigkeit ist, so kann diese Schreibweise leicht zu Irrtümern Veranlassung geben. Wir ziehen es daher vor, mit Maxwell und Heaviside zu schreiben

$$(91) \quad \mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}.$$

Es ist bemerkenswert, daß auch der Curl eines Vektors mit Hilfe des Hamiltonschen Operators

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

abzuleiten ist. Mit einem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verbunden, ergab dieser Operator die Divergenz (§ 19). Vereinigen wir ihn aber mit $\mathfrak{v}$ nach den Gesetzen des Vektorproduktes, so erhalten wir den Curl:

$$\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$
$$[\nabla \mathfrak{A}] = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Wir merken ferner die Identität an

$$(91a) \qquad \operatorname{curl} \nabla \varphi = 0,$$

welche die im Eingange dieses Paragraphen angeführten Gleichungen in Vektorsymbolik darstellt.

Der Wirbel des polaren Strömungsvektors $\mathfrak{v}$ ist ein axialer

Vektor; das ist schon daran zu erkennen, daß wir zur Festlegung seiner Komponenten einen Umlaufssinn mit Hilfe eines Rechtssystemes festlegen mußten. Das analytische Kriterium des axialen Vektors, daß nämlich seine Komponenten bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen die Vorzeichen behalten, ist in der Tat erfüllt; denn der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ ist polar, seine Komponenten, ebenso wie die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wechseln bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen das Vorzeichen. Allgemein gilt die Regel: Der Curl eines polaren Vektors ist ein axialer, der Curl eines axialen ein polarer Vektor.

§ 27. Der Satz von Stokes.

Dem Gaußschen Satze (§ 20), der zu der Divergenz in enger Beziehung steht, tritt jetzt ein Satz an die Seite, der dem Curl eines Vektors in ähnlicher Weise zugeordnet ist, und der von Stokes zuerst allgemein formuliert ist. Derselbe verknüpft das Linienintegral eines Vektors $\mathfrak{v}$, längs einer geschlossenen Kurve genommen, mit dem Flächenintegrale des Wirbels $\mathfrak{w}$, das über eine von der Kurve umrandete Fläche zu erstrecken ist.

Bei der Auswertung des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$ muß die Kurve s in einem bestimmten Sinne durchlaufen werden. Wir betrachten nur eine beliebige, von der Kurve umrandete Fläche f, die in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb des stetigen Strömungsfeldes liegt. Der Umlaufssinn der Randkurve legt auch den Umlaufssinn fest, den wir den einzelnen Elementen $d\mathfrak{f}$ zuordnen können (Abb. 9); diese Elemente sind also Parallelogramme von der im § 6 betrachteten Art. Ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen $d\mathfrak{f}_x$, $d\mathfrak{f}_y$, $d\mathfrak{f}_z$ besitzen einen bestimmten Umlaufssinn, der durch ihr Vorzeichen bestimmt ist. Das Vorzeichen ist positiv, wenn der Umlaufssinn sich der x-Achse bzw. der y- oder z-Achse zuordnet, wie der

Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube; der entgegengesetzte Umlaufssinn hingegen findet statt, wenn das Vorzeichen negativ ist.

Wir nehmen nun an, daß die betrachtete Fläche von der Beschaffenheit ist, daß eine jede Parallelebene zu einer der drei Koordinatenebenen ihren Rand nur in zwei Punkten schneidet. Sollte das nicht der Fall sein, so läßt sich doch die Fläche durch geeignete Schnittkurven stets in eine endliche Zahl von Flächenstücken zerlegen, von denen jedes einzelne die genannte Eigenschaft hat. Die über die Randkurven der einzelnen Stücke erstreckten Linienintegrale setzen sich dann zu dem über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckten zusammen, da die Beiträge der zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufenden Randkurven der einzelnen Stücke sich herausheben.

Wir legen jetzt zwei benachbarte Parallelebenen zur (yz)-Ebene im Abstande dx; dieselben schneiden (vgl. Abb. 9) aus

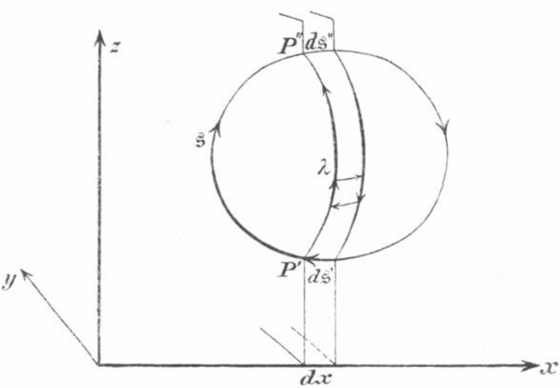

Abb. 9.

der Fläche f einen Streifen heraus, aus der Randkurve zwei Elemente $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$. Dem Streifen ist ein bestimmter Umlaufssinn zuzuordnen, entsprechend dem Sinne, in dem die Linienelemente $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$ zu durchlaufen sind; die Begrenzungslinie des Streifens besteht aus jenen beiden Elementen und aus den Schnittkurven jener beiden Parallelebenen zur (yz)-Ebene. Von diesen beiden Schnittkurven wollen wir diejenige, welche beim Umlauf um den Streifen auf $d\mathfrak{s}'$ folgt, und auf welche sodann $d\mathfrak{s}''$ folgt, mit λ und Anfangs- bzw. Endpunkt von λ mit P', P'' bezeichnen. Wir teilen weiter den Streifen durch Ebenen senkrecht zur z-Achse in Elemente $d\mathfrak{f}$. Ihre Projektionen auf die (zx)-Ebene sind Rechtecke, von dem durch

$$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\, d\lambda\, dx$$

angegebenen Flächeninhalte. Auch der Umlaufssinn dieser Rechtecke wird durch das Vorzeichen von $d\mathfrak{f}_y$ richtig angegeben, wenn das Vorzeichen von dx so gewählt wird, daß

$$dx = dx'' = -\,dx'$$

ist, wo dx' und dx'' die Projektionen der Linienelemente $d\mathfrak{s}'$ und $d\mathfrak{s}''$ auf die x-Achse sind; denn in diesem Falle folgt z. B., wenn $\frac{\partial z}{\partial \lambda} > 0$ ist, auf ein Fortschreiten in Richtung der positiven z-Achse ein Fortschreiten in Richtung der positiven oder negativen x-Achse (längs der Projektion von $d\mathfrak{s}''$), je nachdem $d\mathfrak{s}''$ einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der x-Achse einschließt; im ersteren Falle wird daher der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ positiver, im letzteren negativer Drehung um die y-Achse entsprechen. Mit dem Vorzeichen von $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ kehrt sich auch der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ um. Da nun

$$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\, d\lambda\, dx'',$$

so wird das über den Streifen erstreckte Integral

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda}.$$

Teilen wir anderseits unseren Streifen durch Ebenen senkrecht zur y-Achse in Flächenelemente, deren Projektionen auf die (xy)-Ebene $d\mathfrak{f}_z$ sind, so erkennt man, daß

$$d\mathfrak{f}_z = -\frac{\partial y}{\partial \lambda}\, d\lambda\, dx''$$

nicht nur den Inhalt, sondern auch den Umlaufssinn dieser Flächenelemente richtig wiedergibt; ist z. B.

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} > 0, \quad dx'' > 0,$$

so folgt auf wachsendes y längs λ wachsendes x längs $d\mathfrak{s}''$, was negativer Drehung um die z-Achse entspricht. Wir erhalten daher durch Integration über den Streifen

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = -\, dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

Subtrahiert man die beiden Integrale und berücksichtigt, daß x längs der Kurve λ konstant ist — dieselbe war ja durch eine zur x-Achse senkrechte Ebene aus der Fläche herausgeschnitten worden —, so folgt

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial \lambda},$$

und da ferner $dx'' = -\, dx'$, so ist

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx''\, \mathfrak{v}_x'' + dx'\, \mathfrak{v}_x'.$$

Setzt man nun alle die Streifen, in welche die Fläche f durch Ebenen senkrecht zur x-Achse geteilt wird, zusammen, so kommt jedes Element $d\mathfrak{s}$ der Randkurve nur einmal vor. Man erhält

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = \int dx\, \mathfrak{v}_x.$$

In entsprechender Weise kann man die Fläche durch Ebenen senkrecht zur y-Achse oder zur z-Achse in Streifen teilen und gelangt dann durch analoge Überlegungen zu folgenden, durch zyklische Vertauschung der xyz aus der soeben bewiesenen Formel abzuleitenden Relationen

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \int d\mathfrak{f}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = \int dy\,\mathfrak{v}_y,$$

$$\int d\mathfrak{f}_x \frac{d\mathfrak{v}_z}{\partial y} - \int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} = \int dz\,\mathfrak{v}_z.$$

Die drei Gleichungen addierend und die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen einführend, erhält man

$$\int d\mathfrak{f}_x\mathfrak{w}_x + d\mathfrak{f}_y\mathfrak{w}_y + d\mathfrak{f}_z\mathfrak{w}_z = \int dx\,\mathfrak{v}_x + dy\,\mathfrak{v}_y + dz\,\mathfrak{v}_z,$$

oder, in vektorieller Fassung (nach Vertauschung der beiden Seiten der Gleichung)

$$\int \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \int d\mathfrak{f}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}. \tag{92}$$

Das ist die als Stokesscher Satz bezeichnete Integraltransformation, die für jedes stetige Vektorfeld gültig ist. In dem Linienintegrale steht das skalare Produkt aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$, in dem Flächenintegrale steht das skalare Produkt aus dem Flächenelemente $d\mathfrak{f}$, das mit einem Umlaufssinn versehen ist, und dem Wirbel $\mathfrak{w}$, der gleichfalls einen Umlaufssinn besitzt. Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ polar, so sind beide Produkte Skalare im eigentlichen Sinne, der erste als Produkt zweier polarer, der zweite als Produkt zweier axialer Vektoren. Die obige Formulierung des Stokesschen Satzes ist mithin vom Koordinatensysteme unabhängig, auch dann, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Beschränkt man sich indessen auf ein Rechtssystem, so entfällt die Unterscheidung polarer und axialer Vektoren; es wird dann der Umlaufssinn des Flächenelementes durch Zuordnung einer bestimmten Normalenrichtung festgelegt, und ebenso wird dem Wirbel mit Hilfe einer Rechtsschraube ein Verrückungsvektor zugeordnet. So gelangt man zu der gewöhnlichen Fassung des Stokesschen Satzes

$$\int ds\,\mathfrak{v}_s = \int df\,\mathfrak{w}_n. \tag{92a}$$

Die Stokessche Transformation kann dazu dienen, die Definition des Curl eines Vektors allgemeiner und präziser zu formulieren, als es im vorigen Paragraphen geschah. Um die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach irgendeiner Richtung n zu definieren, konstruiere man eine Kurve s in einer zu n senkrechten Ebene und ordne mit Hilfe einer Rechtsschraube der Fortschreitungsrichtung n einen Umlaufssinn längs der Kurve zu. Man berechne alsdann das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und dividiere durch den Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche. Endlich gehe man zur Grenze über, indem man die Kurve mehr und mehr auf einen Punkt P zusammenzieht. Der Grenzwert, dem der Quotient aus dem Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und dem Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche bei fortgesetzter Verkleinerung des letzteren zustrebt, definiert die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach der Normalenrichtung. Der Stokessche Satz ergibt

$$\text{(93)} \quad \operatorname{curl}_n \mathfrak{v} = \lim_{\Delta f = 0} \frac{\int \mathfrak{v}_s \, ds}{\Delta f} = \mathfrak{w}_x \cos(nx) + \mathfrak{w}_y \cos(ny) + \mathfrak{w}_z \cos(nz),$$

wobei

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \text{ usw.}$$

die im vorigen Paragraphen angegebenen Werte besitzen.

Diese Definition ist allgemeiner als die im vorigen Paragraphen zugrunde gelegte, erstens weil sie nicht mit Rechtecken, sondern mit beliebig gestalteten ebenen Flächenstücken operiert, und zweitens, weil diese nicht in die Koordinatenebenen zu fallen brauchen. Läßt man sie mit diesen zusammenfallen, so erhält man als Komponenten von curl $\mathfrak{v}$ die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen wieder. Läßt man die Stellung der Ebene beliebig, so besagt (93), daß die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach irgendeiner Richtung aus den Komponenten nach den Koordinatenachsen wirklich nach den für Vektorkomponenten gültigen Regeln zu berechnen ist. Den Betrag des Vektors $\mathfrak{w}$ wollen wir weiterhin kurz die „Wirbelstärke“ nennen.

Man kann nunmehr den Stokesschen Satz anschaulich deuten, indem man die Fläche f in kleine, als eben anzusehende Elemente zerlegt und $df\mathfrak{w}_n$ nach der Definition (93) durch das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs der Randkurve ersetzt. Diejenigen Kurvenelemente, welche zwei Flächenelemente begrenzen, sind zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen; es heben sich daher die entsprechenden Linienintegrale auf, und es bleibt nur das über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckte übrig.

Aus dem Stokesschen Satze folgt: Die Normalkomponente von curl $\mathfrak{v}$, integriert über eine geschlossene Fläche, ist Null. In der Tat, trennen wir die geschlossene Fläche durch eine Kurve s in zwei ungeschlossene Teile und legen etwa n in Richtung der äußeren Normalen der ganzen Fläche, so ersetzt der Stokessche Satz die über die ungeschlossenen Flächen erstreckten Integrale durch zwei Linienintegrale, die längs der Randkurve in entgegengesetztem Sinne zu erstrecken sind. Es verschwindet mithin das über die geschlossene Fläche erstreckte Integral von $\mathrm{curl}_n\,\mathfrak{v}$; nach der Definition der Divergenz gilt daher

$$\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = 0, \tag{94}$$

eine Relation, die durch Ausrechnen sofort zu verifizieren ist. Aus ihr folgt umgekehrt mit Hilfe des Gaußchen Satzes

$$\int df\,\mathrm{curl}_n\,\mathfrak{v} = 0 \tag{94a}$$

für eine geschlossene Fläche. Da nach (94) der Wirbel $\mathfrak{w}$ ein quellenfreier Vektor ist, so kann man ein unendliches Wirbelfeld vollständig in dünne Röhren teilen, derart, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ überall tangentiell zu der Röhrenwand weist, und daß für alle Querschnitte einer bestimmten Röhre das Produkt aus Querschnitt q und Wirbelstärke $|\mathfrak{w}|$ konstant ist. Diese Röhren werden vielfach als „Wirbelfäden“, das Produkt $q\,|\mathfrak{w}|$ als „Moment des Wirbelfadens“ bezeichnet. Die Wirbelfäden können im Innern der Flüssigkeit weder beginnen noch endigen.

Die Formel (94) legt die Frage nahe, welche Bedeutung dem Vektor curl curl $\mathfrak{v}$ zukommt. Die Ausrechnung ergibt als x-Komponente

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\right) - \nabla^2 \mathfrak{v}_x = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \nabla^2 \mathfrak{v}_x.$$

Schreiben wir kurz für den Vektor, dessen Komponenten $\nabla^2 \mathfrak{v}_x$, $\nabla^2 \mathfrak{v}_y$, $\nabla^2 \mathfrak{v}_z$ sind, $\nabla^2 \mathfrak{v}$, so können wir die Gleichung für die x-Komponente und die entsprechenden für die y- und z-Komponenten zusammenfassen zu der Vektorgleichung

(95) $$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} - \nabla^2 \mathfrak{v}.$$

§ 28. Berechnung des quellenfreien Vektorfeldes aus dem Wirbelfelde.

Wir wollen in diesem Abschnitte von einem stetigen, quellenfreien Vektorfelde reden; wir stellen dasselbe dem in § 23 behandelten wirbelfreien Felde gegenüber. Dort war

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 0.$$

Hier wollen wir, um die Analogie vollständig zu machen, den Wirbel $\mathfrak{w}$ des vorigen Paragraphen gleich $4\pi\mathfrak{c}$ setzen, so daß man hat

(96) $$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0.$$

Es mag nun die Aufgabe gegeben sein, aus dem Felde des Vektors $\mathfrak{c}$, der die Wirbelverteilung bestimmt, den für die quellenfreie Strömung maßgebenden Vektor $\mathfrak{v}$ zu berechnen, dessen Feld als stetig betrachtet wird; wir setzen voraus, daß die Wirbel durchweg in einem endlichen Bereiche liegen, so daß der Vektor $\mathfrak{c}$ außerhalb dieses Bereiches verschwindet. Es kann ein Vektorfeld nur dann als Wirbelfeld betrachtet werden, wenn durchweg $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$ ist; sonst wäre es nach (94) unmöglich, den Vektor $\mathfrak{v}$ der ersten Gleichung (96) gemäß zu bestimmen. Schreibt man nun das Feld $\mathfrak{c}$ diesen

Bedingungen entsprechend vor, so entsteht die Frage, ob durch (96) das Strömungsfeld $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist. Das ist es nun in der Tat. Würden etwa zwei Felder $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ den Bedingungen (96) Genüge leisten, so wäre das Feld $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ zugleich quellenfrei und wirbelfrei; wir zeigten aber bereits in § 23, daß ein solches Feld durchweg Null ist, also $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ nicht verschieden sein können. Wie dort das wirbelfreie Feld durch die Quellen eindeutig bestimmt war, so ist jetzt das quellenfreie Feld eindeutig durch die Wirbel bestimmt.

Die Bedingung der wirbelfreien Strömung $\operatorname{curl} \mathfrak{v} = 0$ wurde erfüllt, indem $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient eines skalaren Potentiales dargestellt wurde, das sich aus dem Quellenfelde berechnen ließ. In analoger Weise genügen wir jetzt der Bedingung der quellenfreien Strömung $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$, indem wir setzen

(97) $$\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Aus (94) folgt, daß die Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ dann erfüllt ist. Den neuen Hilfsvektor $\mathfrak{A}$ wollen wir das „Vektorpotential" des quellenfreien Feldes nennen.

Das Vektorpotential kann natürlich bis zu einem gewissen Grade willkürlich bestimmt werden, ebenso wie das skalare Potential. Im skalaren Potentiale war eine additive Konstante willkürlich, die bei Bildung des Gradienten fortfiel. Ähnlich wird zu $\mathfrak{A}$ ein wirbelfreier Vektor hinzutreten können, der bei der Berechnung des Curl herausfällt. Wir wollen diese Willkür heben, indem wir das Vektorpotential der einschränkenden Bedingung

(98) $$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

unterwerfen. Die Beziehungen (97, 98), die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{v}$ verknüpfen, sind durchaus identisch mit den Gleichungen (96), die $\mathfrak{v}$ aus $4\pi\mathfrak{c}$ bestimmen. Der oben gegebene Eindeutigkeitsbeweis zeigt, daß $\mathfrak{A}$, falls es im Unendlichen verschwindet, durch $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, ebenso wie $\mathfrak{v}$ durch $4\pi\mathfrak{c}$. Es muß daher auch $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt sein.

Um nun das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ aus dem Wirbelfelde $\mathfrak{c}$ zu berechnen, setzen wir (97) in (96) ein und erhalten

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 4\pi \mathfrak{c}.$$

Wenden wir aber die Rechnungsregel (95) auf $\mathfrak{A}$ an und beachten, daß nach (98) $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ ist, so folgt:

(99) $$4\pi \mathfrak{c} = - \nabla^2 \mathfrak{A}.$$

Diese Gleichung ist drei Gleichungen für die Komponenten,

$$4\pi \mathfrak{c}_x = - \nabla^2 \mathfrak{A}_x \quad \text{usf.}$$

äquivalent, welche durchaus der Gleichung

$$4\pi \varrho = - \nabla^2 \varphi$$

entsprechen, die das skalare Potential φ mit der Quellenverteilung ϱ des wirbelfreien Feldes verknüpft. Diese Analogie führt sofort zu den Ausdrücken für die Komponenten des Vektorpotentiales, die dem Ausdruck (83) des skalaren Potentiales entsprechen

$$\mathfrak{A}_x = \int \frac{dv}{r} \mathfrak{c}_x, \quad \mathfrak{A}_y = \int \frac{dv}{r} \mathfrak{c}_y, \quad \mathfrak{A}_z = \int \frac{dv}{r} \mathfrak{c}_z.$$

Die drei Gleichungen für die Komponenten ersetzen wir durch die Vektorgleichung

(100) $$\mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{c}}{r}.$$

Es steht noch der Nachweis aus, daß der so bestimmte Vektor $\mathfrak{A}$ wirklich der Bedingung (98) Genüge leistet. Um ihn zu führen, berechnen wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int dv \left\{ \mathfrak{c}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{c}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{c}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} = \int dv \left(\mathfrak{c} \nabla_a \frac{1}{r} \right).$$

Es sind natürlich die Änderungen von $\frac{1}{r}$ bei Verrückung des Aufpunktes, die bei der Berechnung des Integrales zunächst eingehen. Mit Rücksicht auf die Gleichung (80) des § 22 können wir diese durch die Veränderung bei entgegengesetzter Verrückung des Quellpunktes

$$- \nabla_q \frac{1}{r} = + \nabla_a \frac{1}{r}$$

ersetzen, oder, wie wir hier besser sagen, durch die Veränderung, die beim Fortschreiten im Wirbelfelde stattfindet. Über das Wirbelfeld soll also das Integral

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int dv \left(\mathfrak{c} \nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

erstreckt werden.

Der Integrand läßt sich mit Hilfe der Rechnungsregel (72) umformen; dieselbe ergibt nämlich

$$-\mathfrak{c} \nabla_q \frac{1}{r} = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{c};$$

da ferner $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$ eine wesentliche Eigenschaft des Wirbelfeldes ist, so folgt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int dv \operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right),$$

wo jetzt das Raumintegral der Divergenz über das Wirbelfeld mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umzuformen ist, das sich auf die Begrenzungsfläche des Wirbelfeldes bezieht.

Wir legen die Fläche f so, daß sie das ganze Wirbelsystem einschließt; dann ist auf ihr $\mathfrak{c}_n = 0$, und daher

$$\text{(101)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int \frac{df \mathfrak{c}_n}{r} = 0.$$

Von Null verschieden würde nämlich $\mathfrak{c}_n$ nur dann sein können, wenn die Fläche f Wirbelfäden durchschneiden würde; alsdann würde aber f nicht das ganze Wirbelsystem einschließen; denn, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, können die Wirbelfäden im Innern der Flüssigkeitsströmung nicht endigen. Die Aussage, daß die Fläche f das Wirbelsystem einschließt, enthält mithin für ein unbegrenztes Strömungsfeld $\mathfrak{c}_n = 0$ als Konsequenz.

Es folgt also in der Tat: Wird das Vektorpotential (100) aus dem gesamten Wirbelsystem berechnet, so verschwindet $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ im ganzen Felde.

Für das Folgende ist eine allgemeine Rechnungsregel wichtig, die sich auf die Divergenz des Vektorproduktes bezieht. Es ist

$$\operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) =$$
$$- \mathfrak{B}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial z}\right) - \mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{B}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathfrak{C}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}\right) + \mathfrak{C}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{C}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right),$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}\operatorname{curl}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{C}. \tag{102}$$

Diese, für beliebige Vektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gültige Beziehung läßt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes sofort in eine Volum- und Flächenintegrale verknüpfende Gleichung umwandeln

$$\int df[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_n = \int dv\,\mathfrak{C}\operatorname{curl}\mathfrak{B} - \int dv\,\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{C}. \tag{102a}$$

Ein bemerkenswerter Spezialfall dieser Formel ergibt sich, wenn einer der beiden Vektoren, etwa $\mathfrak{C}$, im ganzen Felde nach Richtung und Betrag konstant gesetzt wird; dann ist $\operatorname{curl}\mathfrak{C}$ gleich Null. Setzen wir nun, gemäß Regel (30), indem wir unter $\mathfrak{n}$ einen in Richtung der äußeren Normalen von f weisenden Einheitsvektor verstehen:

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_n = \mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{n}\mathfrak{B}],$$

so folgt

$$\mathfrak{C}\int df\,[\mathfrak{n}\mathfrak{B}] = \mathfrak{C}\int dv\operatorname{curl}\mathfrak{B},$$

und da dies für beliebige Richtung des konstanten Vektors $\mathfrak{C}$ gelten soll:

$$\int df[\mathfrak{n}\mathfrak{B}] = \int dv\operatorname{curl}\mathfrak{B}, \tag{102b}$$

eine Regel, der eine gewisse Analogie zum Gaußschen Satze zukommt.

Eine zweite Anwendung von (102a) betrifft die Energie des Strömungsfeldes

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{v}^2 = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{v}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}.$$

Wir erhalten hierfür aus (102a)

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{v}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v} - \int df[\mathfrak{v}\mathfrak{A}]_n.$$

Da im Unendlichen $\mathfrak{A}$ mindestens von erster Ordnung, $\mathfrak{v}$ daher mindestens von zweiter Ordnung verschwindet, so wird das Flächenintegral Null, wenn man die Fläche f ins Unendliche rücken läßt, und es folgt aus (96)

$$T = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{c}\,\mathfrak{A}). \tag{103}$$

Die lebendige Kraft der Strömung drückt sich für das quellenfreie Feld durch das Integral über das halbe innere Produkt aus $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}$ aus, ganz ähnlich, wie für das wirbelfreie Feld sie sich (Gl. 84) durch das Integral über das halbe Produkt aus ϱ und φ ausdrückte. Dort erschien sie als ein über das Quellengebiet, hier erscheint sie als ein über das Wirbelgebiet erstrecktes Integral.

§ 29. **Flächenhaft verteilte Wirbel.**

Ein Feld, welches von einer Unstetigkeitsfläche durchschnitten wird, kann nur dann als quellenfrei gelten, wenn nicht nur in den stetigen Teilen des Feldes die Divergenz div $\mathfrak{v}$, sondern auch auf der Unstetigkeitsfläche f_{12} (vgl. Abb. 8) die Flächendivergenz von $\mathfrak{v}$ verschwindet, d. h. wenn die Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ stetig die Fläche f_{12} durchsetzt.

Die einfachste Unstetigkeit des durchweg quellenfreien Feldes ist ein Sprung der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$. Liegt ein solcher vor, so sagen wir, die Fläche sei der Sitz eines „Flächenwirbels". Um ein exaktes Maß für diesen zu erhalten, gehen wir auf unsere Definition des Wirbels zurück, als Grenzwert des Quotienten aus Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und

Flächeninhalt der umschlungenen Fläche. Freilich müssen wir hier, wo es sich um flächenhaft verteilte Wirbel handelt, das Maß der Wirbelstärke nicht durch den Quotienten aus einem Linienintegral und einer Fläche, sondern aus einem Linienintegral und einer Länge nehmen, ähnlich wie die Divergenz als Ergiebigkeit pro Volumeinheit, die Flächendivergenz hingegen als Ergiebigkeit pro Flächeneinheit definiert war. Wir lassen nun die (xy)-Ebene mit der Tangentialebene in dem betreffenden Punkte der Fläche zusammenfallen, die z-Achse mit derjenigen Normalenrichtung, die von (2) nach (1) weist, und die im § 24 durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bestimmt worden ist.

Wir konstruieren ferner ein kleines Rechteck in der (yz)-Ebene, das von der Unstetigkeitsfläche halbiert wird, und umlaufen es, indem wir zunächst auf der Seite (2) parallel der y-Achse, dann von (2) nach (1) parallel der z-Achse, sodann auf der Seite (1) parallel der negativen y-Achse und von (1) nach (2) parallel der negativen z-Achse gehen. Läßt man die Länge der zur y-Achse parallelen Seiten Δy konstant, verkleinert aber die beiden anderen mehr und mehr, so wird der Wert des längs des beschriebenen Weges erstreckten Linienintegrales

$$\int \mathfrak{v}_s ds$$

gleich

$$(\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1})\Delta y.$$

Dividiert man durch Δy und geht zur Grenze über, so erhält man die x-Komponente des Flächenwirbels

$$\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}.$$

In entsprechender Weise folgt die y-Komponente

$$\mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}.$$

Setzen wir den resultierenden Flächenwirbel gleich $4\pi\mathfrak{g}$, so hat man die Vektorgleichung

$$4\pi\mathfrak{g} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2]. \tag{104}$$

Man kann den soeben angedeuteten Grenzübergang derart modifizieren, daß man das Wirbelfeld zuerst zwischen zwei zu f_{12} parallele Flächen einschließt und dann durch Annäherung dieser beiden Flächen an f_{12} zum Grenzfalle des Flächenwirbels übergeht. Dabei entwickelt sich aus dem räumlich verteilten Wirbel, in dem die Geschwindigkeitskomponenten noch endliche Differentialquotienten besitzen, die Unstetigkeitsfläche, längs deren die Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Es liegt nahe, in diesem Falle, nach Analogie der Gleichung (100), das Vektorpotential des Flächenwirbels folgendermaßen zu bestimmen

$$\mathfrak{A} = \int df_{12} \frac{\mathfrak{g}}{r}. \tag{105}$$

Wir wollen diese Formel noch auf einem anderen Wege begründen. Wir gehen aus von dem im § 24 gewonnenen Resultate, daß das skalare Potential eines flächenhaft verteilten Quellensystemes

$$\varphi = \int df_{12} \frac{\omega}{r}$$

ist, wenn φ selbst auf der Fläche stetig ist, die normale Ableitung aber den durch Gleichung (85) definierten Sprung

$$4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}$$

erfährt. Haben wir es mit einer Unstetigkeitsfläche im quellenfreien Felde zu tun, bei deren Durchquerung das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ selbst sich stetig verhält, aber die Differentialquotienten von $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ gewisse Sprünge erfahren:

$$4\pi\mathfrak{g}_x = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial n_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial n_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_z = \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial n_2},$$

so wird die Formel (105) gelten; denn zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche befriedigen das skalare Potential, wie die Komponenten des Vektorpotentiales die Laplacesche Gleichung.

Es ist nur der Nachweis erforderlich, daß diese Größen $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$, die sich zunächst auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen, die Komponenten eben des Vektors $\mathfrak{g}$ sind, den wir in (104) erhalten. Um ihn zu führen, spezialisieren wir das Koordinatensystem in derselben Weise wie oben, indem wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial n_2} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

und wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{A}$ bei Durchquerung der Fläche

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_2.$$

Man erhält dann

$$4\pi \mathfrak{g}_x = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1,$$

$$4\pi \mathfrak{g}_y = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2,$$

woraus wegen $\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ folgt

$$4\pi \mathfrak{g}_x = \mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}, \quad 4\pi \mathfrak{g}_y = \mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultate (104).

Das Verschwinden der dritten, zur Unstetigkeitsfläche normalen Komponente des Flächenwirbels, das aus den allgemeinen Sätzen über Wirbelfäden folgt, hängt mit dem Verschwinden von div $\mathfrak{A}$ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche zusammen.

Der Doppelschicht von Quellen entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit würde hier eine Doppelschicht von Flächenwirbeln entsprechen, dem Sprunge des skalaren Potentiales ein Sprung des Vektorpotentiales. Ein Beispiel wäre eine strömende, sehr dünne Flüssigkeitsschicht, an die beiderseits ruhende Flüssigkeit angrenzt. Beim Durchqueren der Schicht springt die Geschwindigkeit auf einen endlichen Wert und sinkt dann wieder auf Null. Dabei wäre, um einen endlichen Sprung von $\mathfrak{A}$ zu erhalten, die Geschwindigkeit in der Schicht unendlich zu machen, derart, daß beim Grenzübergang das Produkt aus Geschwindigkeit und Dicke der Schicht einem endlichen Werte zustrebt. Es ist jedoch der Grenzfall eben wegen der erforderlichen unendlichen Geschwindigkeit nicht strenge zu realisieren, ebensowenig, wie eine Doppelschicht von Quellen, innerhalb deren die normale Komponente der Geschwindigkeit unendlich werden müßte. Beides sind mathematische Abstraktionen, die nur bei der Darstellung des Feldes in einiger Entfernung von der Schicht in Betracht kommen.

§ 30. Zerlegung eines beliebigen Vektorfeldes in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld.

Es sei jetzt ein beliebiges unbegrenztes Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gegeben; dasselbe sei im allgemeinen stetig; nur beim Durchschreiten gewisser Flächen mögen die Komponenten von $\mathfrak{v}$ sich unstetig ändern. Es soll jedoch $\mathfrak{v}$ stets endlich sein, auch auf den Unstetigkeitsflächen; durch diese Festsetzung werden Doppelschichten von Quellen oder Wirbeln von der Betrachtung ausgeschlossen. Die Quellen und Wirbel des Strömungsfeldes mögen durchweg im Endlichen liegen.

Dieses Feld läßt sich als Superposition eines wirbelfreien Feldes $\mathfrak{v}'$ und eines quellenfreien Feldes $\mathfrak{v}''$ darstellen, und zwar nur auf eine einzige Weise. Das Feld $\mathfrak{v}'$ werde so bestimmt, daß im ganzen Raume seine Divergenz und auf etwaigen Unstetigkeitsflächen f_{12} seine Flächendivergenz derjenigen des gegebenen Vektorfeldes gleich sei,

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}' = \operatorname{div}\mathfrak{v} = 4\pi\varrho, \quad -(\mathfrak{v}'_{n1} + \mathfrak{v}'_{n2}) = -(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}) = 4\pi\omega$$

Hierdurch ist das wirbelfreie Feld $\mathfrak{v}'$ eindeutig bestimmt. Es ist nach den Vorschriften der §§ 23, 24 mit Hilfe des skalaren Potentiales φ zu berechnen, das auf f_{12} stetig ist, da ja Doppelschichten ausgeschlossen sind:

$$\text{(106)} \qquad \mathfrak{v}' = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \int\frac{dv\,\varrho}{r} + \int\frac{df_{12}\,\omega}{r}.$$

Der Vektor $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}''$ ist jetzt quellenfrei, er ist, wie im § 28 bewiesen wurde, eindeutig durch die Wirbelverteilung bestimmt, die auf den Unstetigkeitsflächen auch als Flächenwirbel (§ 29) sich darstellen kann; räumliche und flächenhafte

Wirbelverteilung von $\mathfrak{v}''$ ist mit derjenigen von $\mathfrak{v}$ identisch, da ja $\mathfrak{v}'$ wirbelfrei ist,

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v}'' = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 4\pi \mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2''] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2] = 4\pi \mathfrak{g}.$$

Es wird mithin

$$\mathfrak{v}'' = \operatorname{curl} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{c}}{r} + \int \frac{df_{12}\,\mathfrak{g}}{r}. \tag{107}$$

Durch (106, 107) ist das Vektorfeld $\mathfrak{v}$ in seinen wirbelfreien und seinen quellenfreien Bestandteil zerlegt. Für ein unbegrenztes Feld ist diese Zerlegung nur auf eine einzige Weise möglich.

Hat man es mit einem begrenzten Vektorfelde zu tun, so ist die Zerlegung im allgemeinen auf vielerlei Weisen möglich. Denn denkt man es sich zu einem den unendlichen Raum erfüllenden Felde ergänzt, so kann man in dem hinzugefügten Felde die Verteilung der Quellen und Wirbel bis zu einem gewissen Grade willkürlich variieren, ohne das ursprüngliche Feld dadurch zu ändern. Grenzt man etwa in einem Vektorfelde einen Bereich ab, in dem weder Quellen noch Wirbel liegen, so kann man innerhalb dieses Bereiches das Feld nach Belieben entweder aus einem Vektorpotential oder aus einem skalaren Potential ableiten; die erstere Darstellung würde der Annahme von Wirbeln außerhalb des Bereiches, die zweite der Annahme von Quellen entsprechen. Ein Beispiel dieser Art werden wir im nächsten Abschnitte kennen lernen.

Wir kehren zum unbegrenzten Felde zurück und stellen die Aufgabe, die Energie dieses Feldes zu berechnen. Indem wir der idealen Flüssigkeit unserer hydrodynamischen Abbildung wiederum die Dichte $\frac{1}{4\pi}$ zuschreiben, erhalten wir für die gesamte lebendige Kraft des Strömungsfeldes

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv\, \mathfrak{v}^2 = \frac{1}{8\pi} \int dv \{ \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{v}''^2 + 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' \}.$$

Wir untersuchen zuerst das dritte Glied, das sich als ein über den ganzen Raum erstrecktes Integral aus dem wirbelfreien Vektor

$$\mathfrak{v}' = -\nabla\varphi$$

und dem quellenfreien Vektor $\mathfrak{v}''$ darstellt. Berücksichtigt man

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}'' = 0,$$

so ergibt die Formel (72)

$$\operatorname{div}\varphi\,\mathfrak{v}'' = \mathfrak{v}''\nabla\varphi = -\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''.$$

Bei der Berechnung des Volumintegrales

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = -\int dv \operatorname{div}\varphi\,\mathfrak{v}''$$

dürfen wir nicht ohne weiteres über die Unstetigkeitsflächen hinweg integrieren, wir haben vielmehr den Raum in Raumstücke zu zerlegen, innerhalb deren das Feld stetig ist. Zu den Begrenzungsflächen gehören die Unstetigkeitsflächen f_{12}. Jedes Element derselben kommt zweimal vor als Begrenzung der beiderseits liegenden Raumstücke (Abb. 8). Daher ergibt der Gaußsche Satz

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = -\int df_{12}\{\varphi_1\,\mathfrak{v}_{n1}'' + \varphi_2\mathfrak{v}_{n2}''\} - \int df\,\varphi\,\mathfrak{v}_n''.$$

Das erste, über die Unstetigkeitsfläche erstreckte Integral verschwindet, denn es ist

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

da Doppelschichten ausgeschlossen waren, und

$$\mathfrak{v}_{n1}'' + \mathfrak{v}_{n2}'' = 0,$$

weil der Vektor $\mathfrak{v}''$ quellenfrei ist. Das zweite Integral, welches über die unendlich entfernte, das ganze Feld einschließende Fläche zu erstrecken ist, verschwindet und zwar mindestens von der ersten Ordnung. Mithin ist

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = 0,$$

es gilt folgender wichtige Satz: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.

Nunmehr wird die lebendige Kraft der Strömung

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}'^2 + \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}''^2 = T' + T''. \tag{108}$$

Die Energie eines Strömungsfeldes stellt sich dar als Summe der Energien des wirbelfreien und des quellenfreien Bestandteiles.

Für stetige Felder hatten wir die Berechnung der Energie durchgeführt, sowohl für wirbelfreie (84), wie für quellenfreie Felder (103). Unter Berücksichtigung der Flächendivergenz und des Flächenwirbels gestaltet sich jetzt die Berechnung von T' bzw. T'' folgendermaßen:

$$T' = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}'^2 = -\frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}' \nabla \varphi$$

wird mit Hilfe von (72) umgeformt in

$$T' = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \varphi \operatorname{div} \mathfrak{v}' - \frac{1}{8\pi}\int dv \operatorname{div} \varphi\, \mathfrak{v}'.$$

Das erste Glied ergibt

$$\frac{1}{2}\int dv\, \varphi\, \varrho;$$

das zweite wird wiederum mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt; der Beitrag der das ganze unendliche Feld einschließenden Fläche verschwindet und es bleibt nur der Beitrag der Unstetigkeitsflächen übrig, die als Begrenzungsflächen der stetigen Teile des Feldes auftreten; dieser Beitrag ist

$$-\int \frac{df_{12}}{8\pi} \varphi\, (\mathfrak{v}'_{n1} + \mathfrak{v}'_{n2}) = \frac{1}{2}\int df_{12}\, \varphi\, \omega.$$

Es wird daher

$$T' = \frac{1}{2}\int dv\, \varrho\, \varphi + \frac{1}{2}\int df_{12}\, \omega\, \varphi. \tag{108a}$$

In analoger Weise wird

$$T'' = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}''^2 = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}'' \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

mit Hilfe der Rechnungsregel (102) umgeformt in

$$T'' = \frac{1}{2}\int dv\,\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{v}''].$$

Das Volumintegral der Divergenz wird wieder mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Aggregat von Flächenintegralen umgewandelt, wobei die Komponente des Vektorproduktes $[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']$ in Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche f_{12} auftritt. Es ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']_{n1} = -\,\mathfrak{n}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{v}_1''],$$

hingegen

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']_{n2} = \mathfrak{n}[\mathfrak{A}_2\mathfrak{v}_2''];$$

denn $\mathfrak{n}$ sollte ein Einheitsvektor sein, welcher die von 1 nach 2 weisende Normalenrichtung darstellt (Abb. 8). Die Rechnungsregel (31) ergibt nun

$$-\,\mathfrak{n}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{v}_1''] = \mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1'']; \quad \mathfrak{n}[\mathfrak{A}_2\mathfrak{v}_2''] = -\,\mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2''].$$

Daher wird

$$\frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{v}''] = \frac{1}{8\pi}\int df_{12}\,\{\mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2'']\};$$

das über die Begrenzung des ganzen Feldes erstreckte Integral verschwindet auch hier. Da Doppelschichten von Wirbeln ausgeschlossen waren, so darf das Vektorpotential auf df_{12} keinen Sprung erfahren; es ist hier

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2,$$

mithin

$$\mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2''] = \mathfrak{A}\cdot[\mathfrak{n}(\mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2'')] = \mathfrak{A}\,4\pi\mathfrak{g}.$$

Es wird daher schließlich

$$T'' = \frac{1}{2}\int dv\,\mathfrak{c}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\int df_{12}\,\mathfrak{g}\mathfrak{A}. \tag{108b}$$

Auch für die Berechnung der Energie des Feldes ersetzt die Flächendivergenz vollständig die räumliche Divergenz, der flächenhaft verteilte Wirbel den räumlich verteilten. Wir hätten in der Tat die Formeln (108a), (108b) erhalten, wenn wir das Feld zunächst als stetig angesehen hätten und dann zum

Grenzfall des unstetigen Feldes übergegangen wären, wobei aus der räumlich verteilten Divergenz die Flächendivergenz, aus dem räumlich verteilten Wirbel der Flächenwirbel entsteht.

§ 31. Die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht.

Wir denken uns wieder ein unbegrenztes, quellenfreies Strömungsfeld. Die Strömung soll von einem einzigen Wirbelfaden von gegebener Leitlinie herrühren; es soll also das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ für jede geschlossene Linie verschwinden, welche den Wirbelfaden nicht umschlingt; für eine geschlossene Linie hingegen, welche den Wirbelfaden einmal umkettet, ergibt der Stokessche Satz:

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s\, ds = \int df\, \mathfrak{w}_n, \qquad \mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}.$$

Wir können die Fläche f bei festgehaltener Rundkurve s beliebig deformieren, so daß sie den Wirbelfaden in verschiedenen Querschnitten senkrecht durchschneidet. Da hierbei das Linienintegral seinen Wert nicht ändert und da das Flächenintegral gleich dem Momente des Wirbelfadens, d. h. gleich dem Produkte $q\,|\mathfrak{w}|$ aus Querschnitt und Wirbelstärke sich ergibt, so muß das Moment für alle Querschnitte des Wirbelfadens dasselbe sein. Der Wirbelfaden kann demnach nicht innerhalb der Flüssigkeit endigen; denn gesetzt dieses wäre der Fall, so könnte man die Fläche f so ausbiegen, daß sie ganz im wirbelfreien Gebiete verläuft, daß mithin das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ gleich Null wird; vorhin aber war das über dieselbe Kurve erstreckte Linienintegral durch Konstruktion einer den Wirbelfaden schneidenden Fläche von Null verschieden gefunden worden. Das ist ein Widerspruch, der nur vermieden wird, indem der Wirbelfaden beiderseits ins Unendliche läuft oder eine im Endlichen verlaufende, geschlossene Leitlinie besitzt.

Wir verringern nun den Querschnitt des Wirbelfadens und vergrößern zugleich die Wirbelstärke innerhalb des Fadens derart, daß das Produkt aus beiden Größen, das Moment des Wirbelfadens, konstant bleibt. Dann reduziert sich schließlich der Wirbelfaden auf eine Wirbellinie, von dem Momente

$$\lim_{q=0} q\,|\mathfrak{w}| = 4\pi \lim_{q=0} q\,|\mathfrak{c}| = 4\pi\tau,$$

und es wird für jede die Wirbellinie einmal umschlingende Kurve

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s\, ds = 4\pi\tau.$$

Das Vektorpotential dieser Wirbellinie wird gegeben durch den aus (100) hervorgehenden Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \tau \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{109}$$

Hierbei stellt das gerichtete Linienelement $d\mathfrak{s}$ die Richtung der Wirbelachse dar, der sich der Umlaufssinn der Flüssigkeitsbewegung zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube. In der unmittelbaren Nähe der Wirbellinie wird die Geschwindigkeit der Strömung unendlich; in diesem Gebiete führt die Idealisierung der Aufgabe, die in dem vorgenommenen Grenzübergange liegt, zu unzulässigen Konsequenzen. In der Tat kann ein Wirbel von endlichem Momente ebensowenig auf eine mathematische Linie zusammengedrängt werden, wie eine Quelle von endlicher Ergiebigkeit auf einen mathematischen Punkt. Wohl aber kann man einen Wirbelfaden von endlichem Querschnitt unter Umständen durch eine Wirbellinie ersetzen, nämlich dann, wenn die Abmessungen des Querschnittes klein sind sowohl gegen die Längsabmessungen des Fadens, wie gegen den Abstand des Aufpunktes von den Elementen des Fadens. Hier leistet die Wirbellinie dieselben Dienste, die für das wirbelfreie Feld der Quellpunkt oder die Doppelquelle leistete.

Wir berechnen jetzt nach den Regeln des § 28 die Geschwindigkeit der Strömung, $\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$, wobei wir nach den

Koordinaten xyz des Aufpunktes zu differentiieren haben; stellt $\mathfrak{r}$ den von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor vor, $\mathfrak{r}_x, \mathfrak{r}_y, \mathfrak{r}_z$ seine Komponenten, so wird

$$\mathfrak{v}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \tau \int \left\{ d\mathfrak{s}_z \left(\frac{-\mathfrak{r}_y}{r^3} \right) - d\mathfrak{s}_y \left(\frac{-\mathfrak{r}_z}{r^3} \right) \right\}$$

usf.

Mithin wird der Vektor $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \tau \int \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]. \tag{110}$$

Der Geschwindigkeitsvektor in irgendeinem Punkte des Feldes stellt sich hier dar als geometrische Summe von Geschwindigkeiten

$$d\mathfrak{v} = \frac{\tau}{r^3} [d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}],$$

die von den einzelnen Elementen der Wirbellinie herrühren. Der Beitrag eines jeden Wirbelelementes ist proportional dem Momente $4\pi\tau$ der Wirbellinie, ferner dem reziproken Quadrate des Abstandes von Wirbelelement und Aufpunkt und dem Sinus des Winkels, den die Wirbelachse und der nach dem Aufpunkte hin gezogene Radiusvektor miteinander einschließen; die Richtung von $d\mathfrak{v}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch Wirbelachse und Radiusvektor gelegt ist. Die Vektoren $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{v}$ folgen aufeinander in dem Sinne, wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Diese Regel ist identisch mit der Ampèreschen Schwimmregel, wie man erkennt, wenn man den Daumen der rechten Hand der Richtung vom Fuße zum Kopfe parallel und den Zeigefinger nach vorn streckt; der Mittelfinger weist dann nach links. Wir haben damit das Biot-Savartsche Gesetz gewonnen, welches in der Lehre vom Elektromagnetismus eine so wichtige Rolle spielt. Dabei ist zu beachten, daß die Zerlegung des Ausdruckes (110) in Beiträge der einzelnen Wirbelelemente einigermaßen willkürlich ist; ein Wirbelelement für sich allein kann nicht existieren, sondern nur die geschlossene Wirbellinie als Ganzes; nicht den hypothetischen

Beiträgen der einzelnen Wirbelelemente, sondern nur ihrer Vektorsumme (110) kommt eine physikalische Bedeutung zu.

Man kann nun das Feld einer Wirbellinie noch von einem wesentlich anderen Standpunkte aus betrachten. Dasselbe ist nämlich, von der Wirbellinie selbst abgesehen, wirbelfrei und muß sich daher von einem skalaren Potentiale φ ableiten. Freilich ist dieses Potential nicht, wie das soeben untersuchte Vektorpotential, einwertig, sondern es nimmt bei jeder Umkreisung der Wirbellinie um $4\pi\tau$ ab. Indessen kann man diese Vieldeutigkeit beseitigen, wenn man irgendeine von der Wirbellinie umrandete Fläche f_{12} konstruiert und diese aus dem Felde ausschließt. Alsdann entsteht ein Feld, welches überall quellenfrei und wirbelfrei ist, und f_{12} als Unstetigkeitsfläche besitzt. Diese Unstetigkeitsfläche des wirbelfreien Feldes ist nun nach den Regeln des § 25 zu behandeln. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ selbst hat zu beiden Seiten der Fläche den gleichen Wert; denn die Fläche verläuft ja, von der Randkurve abgesehen, in dem Gebiete der stetigen Strömung. Die Flächendivergenz ist mithin Null. Das Potential hingegen erfährt eine Abnahme

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{v}_s\, ds = 4\pi\tau,$$

wenn man, der Strömung der Flüssigkeit folgend, von der Seite (1) der Unstetigkeitsfläche, die Wirbellinie umkreisend zur Seite (2) gelangt; es wächst um $4\pi\tau$ beim Durchschreiten der Fläche. Diese Unstetigkeit des Potentiales war es, die wir im § 25 durch eine Doppelschicht von Quellen darstellten. Wir zeigten daselbst, daß durch die Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und des Potentiales das quellenfreie Feld eindeutig bestimmt ist. Mithin ist das Feld einer Wirbellinie identisch mit dem Felde einer homogenen Doppelschicht, die auf einer von der Wirbellinie umrandeten Fläche ausgebreitet ist. Dabei ist die positive Seite der Doppelschicht durch die Ampèresche Regel der Wirbellinie zugeordnet. Das vektoriell aufgefaßte Moment der

Doppelschicht, das im § 25 mit $\tau\mathfrak{n}$ bezeichnet wurde, und das von der negativen nach der positiven Seite der Doppelschicht weist, entspricht dem durch $d\mathfrak{s}$ festgelegten Umlaufssinn längs der Wirbellinie, wie der Fortschreitungssinn der Umlaufsbewegung bei einer Rechtsschraube. Das Moment der Wirbellinie wird durch $4\pi\tau$ dargestellt, wo τ eine stets positive Größe ist.

Wir können jetzt die im § 25 für das Potential einer homogenen Doppelschicht abgeleitete Beziehung (88a):

$$\varphi = \pm \tau \Omega \tag{111}$$

unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen. Ω stellt dabei den körperlichen Winkel dar, unter dem vom Aufpunkte aus die Doppelschicht erscheint, mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen, je nachdem der Aufpunkt sich auf der positiven oder negativen Seite der Doppelschicht befindet. Gehen wir von der Doppelschicht zur äquivalenten Wirbellinie über, so haben wir vom Aufpunkte aus Gerade durch die Punkte der Wirbellinie zu legen und so die Wirbellinie auf die um den Aufpunkt als Mittelpunkt gelegte Einheitskugel zu projizieren; der Flächeninhalt der Projektion ist Ω. Je nachdem der Umlaufssinn um diese Flächenstücke der Einheitskugel durch den Umlaufssinn der Wirbellinie in dem einen oder anderen Sinne bestimmt wird, hat man in (111) $\pm\,\Omega$ zu setzen. Hiernach ist klar, daß das Potential einer Doppelschicht nur von der Randkurve abhängt. Es erledigt sich auch die Frage nach dem Potential einer Doppelschicht, für deren Stücke der Aufpunkt bald auf der positiven, bald auf der negativen Seite liegt. Hier wird die auf die Einheitskugel projizierte Randkurve sich selbst schneiden und demgemäß die Flächenstücke der Einheitskugel bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne umlaufen; danach sind diese mit positivem bzw. negativem Vorzeichen in Rechnung zu ziehen. Endlich wird auch die zu Ende des § 25 gemachte Bemerkung verständlich, daß am Rande der Doppelschicht die angewandte Rechnungsmethode unzulässig wird.

In der Tat ist hier die Geschwindigkeit der Strömung unendlich, und es ist aus diesem Grunde die Randkurve durch eine Röhre aus dem Felde auszuschließen, wenn man mit einer ungeschlossenen Doppelschicht operiert.

Zeigt die Äquivalenz von Doppelschicht und Wirbellinie manche der Resultate, die für erstere vom Standpunkte des Quellenfeldes aus gewonnen wurden, in neuer Beleuchtung, so gestattet sie anderseits, das Feld der Wirbellinie auf Grund der Theorie der wirbelfreien Felder zu berechnen, ohne das Vektorpotential zu benutzen. Wir wollen diese Ableitung angeben und uns davon überzeugen, daß auch auf diesem Wege die Relation (110) erhalten wird. Wir berechnen den Gradienten des Potentiales (111), wobei wir der Einfachheit wegen den Aufpunkt auf der positiven Seite der zugeordneten Doppelschicht annehmen; dann wird

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi = -\tau\nabla_a\Omega .$$

Hierbei stellt $\nabla_a\Omega$ die Änderung vor, welche der körperliche Winkel Ω erfährt, wenn der Aufpunkt um die Längeneinheit verschoben wird. Verschiebt man statt dessen die Wirbellinie translatorisch, so ist, da Ω nur von der relativen Lage von Aufpunkt und Wirbellinie abhängt, nach § 22

$$\mathfrak{v} = \tau\nabla_q\Omega$$

zu setzen. Der durch Verrückung des Wirbelfadens bei festgehaltenem Aufpunkte entstehende Zuwachs von Ω setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten der auf die Einheitskugel um den Aufpunkt projizierten Flächenelemente, welche die Elemente $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie bei der Verrückung bestreichen; diese Flächenelemente sind so zu behandeln, als ob sie mit Doppelschichten vom Momente 1 belegt wären; ihre Potentiale zusammengenommen ergeben den Zuwachs von Ω. Verschiebt man nun den ganzen Wirbelfaden in der durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$ festgelegten Richtung um die Längeneinheit, so bestreicht das Element $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie das Parallelogramm

$$[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}];$$

die Projektion desselben auf die Einheitskugel wird positiv in Rechnung zu ziehen sein, wenn der jenes Vektorprodukt darstellende, auf der Ebene von $\mathfrak{t}_1$ und $d\mathfrak{s}$ senkrechte Vektor mit dem von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hingezogenen Radiusvektor einen spitzen Winkel einschließt; denn in diesem Falle liegt der Aufpunkt auf der positiven Seite der hinzukommenden Doppelschicht. In dem entgegengesetzten Falle, wo jener Winkel ein stumpfer ist, liegt der Aufpunkt auf der negativen Seite. Beide Fälle faßt man zusammen, indem man den Beitrag, den $d\mathfrak{s}$ zum Zuwachs von Ω liefert, mit Rücksicht auf Formel (30) schreibt

$$\frac{1}{r^3}\mathfrak{r}[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}] = \frac{\mathfrak{t}_1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}].$$

Integriert man nun über die Wirbellinie, so resultiert

$$\mathfrak{t}_1\int\frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]$$

als Zuwachs von Ω bei einer translatorischen Verrückung der Wirbellinie parallel einem beliebigen Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$. Wir erhalten mithin

$$\mathfrak{v} = \tau\nabla_q\Omega = \tau\int\frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}],$$

eine Formel, die mit (110) identisch ist.

Eine andere Methode, die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht zu kontrollieren, ist die, daß man dem Felde der Doppelschicht ein Vektorpotential zuordnet und dieses auf die Form (109) bringt. Wir gehen indessen an dieser Stelle hierauf nicht ein, da die Äquivalenz der beiden Felder genügend sichergestellt erscheint.

§ 32. Rechnungsregeln. Die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$.

Den Rechnungsregeln, die uns bisher bei der Entwicklung der Theorie der Vektorfelder begegneten, treten noch eine Reihe weiterer Regeln an die Seite.

Wir beginnen mit der Regel für den Curl des Produktes aus einem Skalar v und einem Vektor $\mathfrak{A}$

$$\operatorname{curl} v\mathfrak{A} = v \operatorname{curl} \mathfrak{A} + [\nabla v, \mathfrak{A}], \tag{112}$$

von deren Richtigkeit man sich durch Nachrechnen leicht überzeugt. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ der Gradient eines zweiten Skalars p

$$\mathfrak{A} = \nabla p,$$

so ist das Feld von $\mathfrak{A}$ wirbelfrei, mithin

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \nabla p = 0;$$

es folgt daher aus (112):

$$\operatorname{curl}\{v\nabla p\} = [\nabla v, \nabla p]. \tag{112a}$$

Die letzte Gleichung findet Anwendung, wenn es sich um die resultierende Kraft handelt, die in einer kompressiblen Flüssigkeit oder in einem Gase auf die Masseneinheit wirkt Diese Kraft findet man entgegengesetzt gleich dem Produkte aus spezifischem Volumen v und dem Druckgradienten ∇p. Der Curl dieses Produktes steht links; integriert man ihn über eine ungeschlossene Fläche f, so ergibt der Stokessche Satz

$$-\int_P^P v \frac{\partial p}{\partial s}\, ds = -\int df [\nabla v, \nabla p]_n. \tag{112b}$$

Links steht jetzt die Arbeit, welche die von dem Drucke der umgebenden Flüssigkeit herrührende Kraft bei Verschiebung der Masseneinheit auf einem geschlossenen Wege leistet. Soll diese Arbeit für einen beliebigen geschlossenen Weg Null sein, so muß der Gradient von v überall parallel dem Gradienten von p sein, d. h. es müssen die Flächen konstanten spezifischen Volumens und konstanten Druckes zusammenfallen. Ist das nicht durchweg der Fall, so wird es Wege geben, für die das Linienintegral der Kraft von Null verschieden ist.

Es wurde bereits häufig die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)$ auf Skalare angewandt. $(\mathfrak{A}\nabla)\varphi$ gab allgemein den Zuwachs an, den der Skalar φ beim Fortschreiten in der Richtung von $\mathfrak{A}$ erfuhr; derselbe war auf die Längeneinheit zu beziehen und mit dem Betrage von $\mathfrak{A}$ zu multiplizieren. Die gleiche Operation können wir nun auch auf einen Vektor $\mathfrak{B}$ anwenden. Ist $\mathfrak{A}$ ein Einheitsvektor, so stellt $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs dar, den der Vektor $\mathfrak{B}$ erfährt, wenn man in seinem Felde in der durch $\mathfrak{A}$ angezeigten Richtung fortschreitet. Ist $\mathfrak{A}$ kein Einheitsvektor, so geht der Betrag von $\mathfrak{A}$ als Faktor ein. Es sind die Komponenten von $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$:

$$(113)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_y = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_z = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir berechnen jetzt den Vektor

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B}.$$

Seine x-Komponente ist

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \operatorname{div}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} - \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}.$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt

$$(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}_x - \mathfrak{B}_x \operatorname{div}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_y \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$$

und durch Subtraktion der vorigen Formel von dieser

$$\{(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A}\}_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z).$$

Hier steht rechts die x-Komponente von $\operatorname{curl}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Es gilt mithin für den Curl des Vektorproduktes die Rechnungsregel

$$(114)\quad \operatorname{curl}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A}.$$

Wir berechnen anderseits

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}].$$

Die x-Komponente ist

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \mathfrak{A}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) - \mathfrak{A}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)$$
$$= \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}.$$

Addieren wir hierzu die durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entstehende Beziehung, so erhalten wir:

$$(115)\quad \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A}].$$

In den beiden nächsten Paragraphen werden die Regeln (114), (115) Anwendung finden.

§ 33. Zeitliche Änderung eines Vektorfeldes, beurteilt von einem bewegten Bezugssysteme aus. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Bisher haben wir nur stationäre Vektorfelder untersucht, d. h. solche, die sich mit der Zeit nicht ändern. Die Gesetze der zeitlichen Änderung eines Vektorfeldes gehören nicht zu der allgemeinen Geometrie der Vektorfelder, sondern zu der Dynamik der speziellen Kraftfelder und Strömungsfelder. Immerhin gibt es einige allgemeine Regeln darüber, wie man die zeitliche Änderung eines Vektorfeldes, wenn sie für ein ruhendes Bezugssystem gegeben sind, auf ein bewegtes Bezugssystem umzurechnen hat. Die analoge Aufgabe haben wir in den Paragraphen 12 und 13 für den einzelnen, am Koordinatenanfang abgetragenen Vektor gelöst.

Wir denken uns jetzt ein starres Gerüst, welches sich durch das Vektorfeld bewegt, indem die Achsen zunächst sich selbst parallel bleiben. Es sei $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit des Gerüstes.

Wir nennen $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung, die der Vektor $\mathfrak{A}$ an einem im Raume festen Punkte erfährt, $\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung an einem Punkte des Gerüstes. Die Differenz

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

ist derjenige Zuwachs, den der Vektor $\mathfrak{A}$ infolge der Bewegung des Gerüstes durch das Feld erfährt. Dieser von einem mitbewegten Beobachter festzustellende Zuwachs beträgt $(\mathfrak{v}_0 \nabla)\mathfrak{A}$. Es ist mithin die gesamte zeitliche Änderung, beurteilt von einem translatorisch bewegten Bezugssystem aus,

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}_0 \nabla)\mathfrak{A}. \tag{116}$$

Hat man es z. B. mit einem bewegten Flüssigkeitsteilchen zu tun, so stellt $\frac{\partial' \mathfrak{v}}{\partial t}$ die Beschleunigung des betreffenden Massenelementes dar, vorausgesetzt, daß man das Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, die eben jenem Massenteile zukommt. Hier gilt

$$\frac{\partial' \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)\mathfrak{v}.$$

Diese Beschleunigung ist nun nach den Grundgesetzen der Mechanik der auf die Masseneinheit bezogenen Kraft gleich. Schließt man Reibung aus, so setzt sich die Kraft zusammen aus der Kraft der Gravitation, die sich aus einem Potentiale Φ ableitet, und der von den benachbarten Flüssigkeitsteilchen ausgeübten Kraft $-v\nabla p$, von der im vorigen Paragraphen die Rede war. Die erhaltene Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)\mathfrak{v} = -\nabla \Phi - v \nabla p \tag{117}$$

ist die Grundgleichung der Hydrodynamik in der Form, die man als „Eulersche Form“ zu bezeichnen pflegt, und die ein im Raume festes Bezugssystem zugrunde legt.

Die Rechnungsregel (115) ergibt

$$(\mathfrak{v} \nabla)\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2} \nabla \mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v} \mathfrak{w}],$$

wenn $\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}$ wieder den Wirbel bezeichnet. Es ist daher

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\nabla\{\Phi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}^2\} - v\nabla p + [\mathfrak{v}\mathfrak{w}]. \tag{118}$$

Bisher wurde das starre Gerüst nur translatorisch durch das Vektorfeld bewegt. Wir wollen jetzt auch Rotationen in Betracht ziehen, so daß die Geschwindigkeit der Punkte des Gerüstes durch Gleichung (35)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

bestimmt ist, woraus

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 2\mathfrak{u}$$

folgt.

Die zeitliche Änderung $\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$ in diesem allgemeineren Falle setzt sich jetzt aus drei Teilen zusammen: Erstens der zeitlichen Änderung $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ des Vektors $\mathfrak{A}$, die an einem im Raume festen Punkte stattfindet; zweitens der Änderung, die infolge der Bewegung des betreffenden Punktes des Gerüstes durch das Feld einem mitbewegten Beobachter stattzufinden scheint: $(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A}$; drittens endlich kommt die Änderung in Betracht, die infolge der Rotation des Bezugssystemes stattfindet, wenn wir die zeitliche Änderung von $\mathfrak{A}$ eben von dem rotierenden Systeme aus beurteilen, d. h. $\mathfrak{A}$ auf ein im Gerüste festes Achsensystem beziehen. Nach § 13 ist die letztere Änderung $[\mathfrak{A}\mathfrak{u}]$. Wir erhalten daher

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}] \tag{119}$$

als resultierende, von dem rotatorisch und translatorisch bewegten Gerüste aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$.

Man überzeugt sich durch Nachrechnen davon, daß

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v} = -[\mathfrak{A}\mathfrak{u}]$$

zu setzen ist; da ferner

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = 2\mathfrak{u}$$

gilt, so ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{u}] = [\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{v}] + (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v},$$

mithin nach (115).

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]. \tag{119a}$$

Setzt man anderseits in (119)

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{u}] = -(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

und berücksichtigt die Regel (114), so wird

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{A}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{119b}$$

Für die Berechnung der Divergenz, sowie des Curl und des Gradienten ist es selbstverständlich ganz gleichgültig, ob man ein im Raume festes oder ein bewegtes Bezugssystem zugrunde legt. Sind doch diese Größen vom Koordinatensysteme unabhängig definiert. Wenn man freilich mit Komponenten operiert und diese vom ruhenden auf das bewegte Bezugssystem umrechnet, so ist die relative Lage der beiden Achsenkreuze in dem betreffenden Zeitpunkte in Betracht zu ziehen, aber die Umrechnung geschieht genau so, als ob das bewegte System in seiner augenblicklichen Lage ruhte. Rechnet man mit den Vektoren selbst, so kommt die Bewegung des Bezugssystemes nur für die durch Differentiation nach der Zeit abgeleiteten Vektoren in Betracht, nicht für die von der augenblicklichen räumlichen Verteilung des Feldes abhängigen Vektoren und Skalaren.

§ 34. Zeitliche Änderung von Linien- und Flächenintegralen, bezogen auf bewegte Linien und Flächen. Die Wirbelsätze von Helmholtz.

Es soll die Aufgabe gestellt sein, die zeitliche Änderung eines Linienintegrales

$$\int_1^2 \mathfrak{A}_s ds, \tag{120}$$

erstreckt über eine ungeschlossene Linie, oder eines Flächenintegrales

(120a) $$\int \mathfrak{B}_n df,$$

erstreckt über eine ungeschlossene Fläche, zu berechnen, wenn die Punkte der Linie oder der Fläche sich in beliebiger stetiger Weise bewegen. Wird die Linie oder Fläche als Ganzes bewegt, ohne daß die relative Lage ihrer Punkte sich ändert, so ist die Lösung auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen zu erhalten. Man führt dann ein starres Gerüst ein, in dem die betreffende Kurve oder Fläche befestigt ist; von diesem aus betrachtet sind ds, df feste Linien- und Flächenelemente, man hat daher

$$\frac{d}{dt}\int_1^2 \mathfrak{A}_s ds = \int_1^2 \frac{\partial' \mathfrak{A}_s}{\partial t} ds, \qquad \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n df = \int \frac{\partial' \mathfrak{B}_n}{\partial t} df,$$

wobei die Komponenten von $\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$, $\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}$ parallel zur bewegten Kurve bzw. senkrecht zur bewegten Fläche nach den Regeln des vorigen Paragraphen zu berechnen sind.

Wir wollen indessen die Aufgabe allgemeiner fassen, indem wir beliebige stetige Bewegungen der Kurve bzw. Fläche zulassen, über welche das Integral zu erstrecken ist. Wir betrachten zunächst das Linienintegral (120). Seine zeitliche Änderung wird sich aus zwei Teilen zusammensetzen: Erstens aus derjenigen, die stattfinden würde, wenn die Kurve $\mathfrak{s}$ ruhte; diese beträgt

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} d\mathfrak{s}.$$

Dazu kommt zweitens die Änderung, die infolge der Bewegung der Kurve durch das Vektorfeld eintritt; für deren Berechnung kommt das Feld des Vektors $\mathfrak{A}$ nur zur Zeit t in Betracht, aber die Lagen der Integrationskurve in den beiden Zeitpunkten t und $t + dt$. Wir wollen diese Lagen durch Angabe der Endpunkte (1, 2) bzw. (1′, 2′) kennzeichnen; dann ist die totale Änderung des Linienintegrales in der Zeit dt:

$$dt\frac{d}{dt}\int\limits_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = dt\int\limits_1^2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\,d\mathfrak{s} + \int\limits_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} - \int\limits_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}.$$

Nun ist

$$\int\limits_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} - \int\limits_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int\limits_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} + \int\limits_2^1 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}.$$

Wir fügen zu diesem Ausdruck die Integrale hinzu, die sich auf die Kurvenstücke $(1\,1')$ und $(2'\,2)$ beziehen; $(1\,1')$ und $(2\,2')$ sind die vom Anfangs- und Endpunkte der Kurve in der Zeit dt beschriebenen Wege; daher ist

$$\int\limits_1^{1'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1\,dt \quad \text{und} \quad \int\limits_{2'}^{2} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = -\,(\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2\,dt.$$

Das Ergebnis ist das Integral von $\mathfrak{A}$, erstreckt über die geschlossene Kurve $1'\,2'\,2\,1\,1'$; dasselbe wird mit Hilfe des Stokesschen Satzes umgerechnet in das Integral von curl $\mathfrak{A}$, erstreckt über die von der Kurve umrandete Fläche. Diese Fläche aber setzt sich zusammen aus den Flächenstücken $[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}]dt$, die von den einzelnen Elementen $d\mathfrak{s}$ in der Zeit dt bestrichen werden. Die Reihenfolge der Faktoren in dem Vektorprodukte ist hier bereits so gewählt, daß der Umlaufssinn mit dem oben festgesetzten $1'\,2'\,2\,1\,1'$ des Integrationsweges übereinstimmt. Zum Flächenintegrale von curl $\mathfrak{A}$ liefert jedes Flächenelement den Beitrag

$$dt\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\,[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}] = dt\,d\mathfrak{s}\,[\mathrm{curl}\,\mathfrak{A},\,\mathfrak{v}].$$

Mithin erhalten wir als Folge des Stokesschen Satzes

$$\int\limits_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} + \int\limits_2^1 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} + (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1\,dt - (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2\,dt = dt\int\limits_1^2 d\mathfrak{s}[\mathrm{curl}\,\mathfrak{A},\,\mathfrak{v}].$$

Schreiben wir hier

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1 - (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2 = -\int\limits_1^2 d\mathfrak{s}\,\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{v}),$$

so erhalten wir

$$\int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} - \int_{1}^{2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = dt \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{ \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}] \right\}$$

als denjenigen Teil der Änderung des Linienintegrales, der von der Bewegung der Kurve herrührt.

Es folgt daher

$$(121) \qquad \frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}] \right\}.$$

Für eine als starr bewegte Kurve ist dieses Resultat bereits in der Formel (119a) des vorigen Paragraphen enthalten.

Als Beispiel betrachten wir den Vektor $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeit einer beliebigen reibungslosen Flüssigkeit. Wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{v}$, $\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{w}$ gesetzt, so wird

$$\frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \nabla \mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\mathfrak{w}] \right\},$$

und nach der hydrodynamischen Grundgleichung (118)

$$\frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{ -\nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \mathfrak{v}^2 - v \nabla p \right\}.$$

Ist die Kurve geschlossen, so folgt als zeitliche Änderung des Linienintegrales der Geschwindigkeit

$$(121\text{a}) \qquad \frac{d}{dt}\int_{1}^{1} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = -\int_{1}^{1} d\mathfrak{s}\, v \nabla p = -\int_{1}^{1} ds\, v \frac{\partial p}{\partial s}.$$

Ist der Zustand der Flüssigkeit so beschaffen, daß überall die Flächen konstanten spezifischen Volumens v und konstanten Druckes p zusammenfallen, so verschwindet nach § 32 das Linienintegral der rechten Seite für die geschlossene Kurve; in diesem Falle wird das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ konstant für jede mit der Flüssigkeit bewegte geschlossene Kurve, und es gilt der Satz: Das Linienintegral der Geschwindigkeit, erstreckt über eine beliebige mit der Flüssigkeit bewegte geschlossene Kurve, bleibt bei der Bewegung ungeändert.

Dieser Satz enthält eine wichtige, von Helmholtz zuerst erkannte Eigenschaft reibungsloser Flüssigkeitsbewegungen.

Wir behandeln jetzt das Flächenintegral (120a); seine zeitliche Änderung

$$dt \frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_n$$

im Zeitelemente dt setzt sich zusammen aus der Änderung, die bei festgehaltener Fläche f in der gleichen Zeit stattfinden würde,

$$dt \int df \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t},$$

und aus der Änderung, welche infolge der Bewegung der Fläche f durch das Vektorfeld eintritt. Bei der Berechnung der letztgenannten Änderung ist wiederum nur das Feld zur Zeit t in Betracht zu ziehen, aber die Lagen der Fläche f in den beiden Zeitpunkten t und $t + dt$. Wir wollen diese als f und f' unterscheiden. Die infolge der Bewegung der Fläche hinzukommende Änderung ist

$$\int df' \mathfrak{B}_n - \int df \mathfrak{B}_n.$$

Die beiden ungeschlossenen Flächen f', f werden nun zu einer geschlossenen Fläche F ergänzt, indem die von der Randkurve $\mathfrak{s}$ im Zeitelemente dt bestrichene Fläche hinzugefügt wird; dabei bestreicht jedes Linienelement $d\mathfrak{s}$ das Flächenelement $dt[d\mathfrak{s}\mathfrak{v}]$. Die Reihenfolge der Faktoren in dem Vektorprodukte ist hier so gewählt, daß der dem Flächenelemente zugeordnete Vektor der Richtung nach mit der äußeren Normale der geschlossenen Fläche F übereinstimmt, sofern die dem Umlaufssinn der Randkurve $\mathfrak{s}$ zugeordneten Normalen von f, f' einen spitzen Winkel mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ bilden; nach denselben Normalen ist die Komponente von $\mathfrak{B}$ in den obigen über die Flächen f, f' erstreckten Integralen zu nehmen. Auf f' stimmt diese Normalenrichtung mit der äußeren Normalen der geschlossenen Fläche überein, auf f mit der inneren Normalen. Es wird daher nach dem Gaußschen Satze

$$\int df' \mathfrak{B}_n - \int df \mathfrak{B}_n + dt \int \mathfrak{B}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}] = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Hier ist dv ein Element des von der geschlossenen Fläche F begrenzten Raumes; da diese Raumelemente von den Flächenelementen df während der Zeit dt bestrichen werden, so ist

$$dv = dt\, df\, \mathfrak{v}_n$$

zu setzen. Schreiben wir ferner

$$\mathfrak{B}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}] = -\, d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}],$$

so wird

$$\int df' \mathfrak{B}_n - \int df \mathfrak{B}_n = dt \left\{ \int df \mathfrak{v}_n \operatorname{div} \mathfrak{B} + \int d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] \right\}.$$

Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf das Linienintegral ergibt schließlich

$$\int df' \mathfrak{B}_n - \int df \mathfrak{B}_n = dt \int df \{ \mathfrak{v}_n \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{curl}_n [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] \}$$

als diejenige zeitliche Änderung des Flächenintegrales, welche infolge der Bewegung der Fläche f eintritt. Die resultierende, auf die Zeiteinheit berechnete Änderung ist daher

$$\text{(122)} \qquad \frac{d}{dt} \int df \mathfrak{B}_n = \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{B} \right\}_n .$$

Für eine starr bewegte Fläche ist auch dieses Resultat bereits in der Formel (119b) des vorigen Paragraphen enthalten.

Ist

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

so ist nach dem Stokesschen Satze

$$\int df \mathfrak{B}_n = \int d\mathfrak{s}\,\mathfrak{A};$$

es wird folglich die linke Seite von (122) nach (121) gleich dem über die geschlossene Kurve $\mathfrak{s}$ erstreckten Integrale:

$$\frac{d}{dt}\int d\mathfrak{s}\mathfrak{A} = \int d\mathfrak{s}\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]\right\}.$$

Wir wollen uns davon überzeugen, daß dieses Linienintegral mit der rechten Seite von (122) identisch ist; wir formen dasselbe mit Hilfe des Stokesschen Satzes in das Flächenintegral:

$$\int df\left\{\operatorname{curl}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{curl}[\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]\right\}_n.$$

um. Da nun

$$\operatorname{curl}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad -\operatorname{curl}[\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}] = \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0,$$

so ist die Identität in der Tat nachgewiesen.

Wir wenden die Formel (122) auf den Wirbel $\mathfrak{w} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}$ an, indem wir die zeitliche Änderung des Wirbels für ein bewegtes Flüssigkeitsteilchen verfolgen. Offenbar ist die linke Seite der so erhaltenen Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int df\mathfrak{w}_n = \int df\left\{\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]\right\}_n$$

mit derjenigen von (121a) identisch. Nach (118) wird anderseits

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} = -\operatorname{curl} v\nabla p - \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]$$

und nach (112a)

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}] = -[\nabla v, \nabla p],$$

mithin

$$\frac{d}{dt}\int df\mathfrak{w}_n = -\int df\,[\nabla v, \nabla p]_n. \tag{123}$$

Sind insbesondere überall die Gradienten von v und p einander parallel, so wird

$$\frac{d}{dt}\int df\mathfrak{w}_n = 0. \tag{123a}$$

Diese Relation enthält eine andere Form des Helmholtzschen Wirbelsatzes: Das Flächenintegral des Wirbels, genommen über eine mit der Flüssigkeit bewegte Fläche, ist konstant, wenn die Flächen konstanten Druckes und konstanten spezifischen Volumens durchweg zusammenfallen.

Fallen jene Flächen nicht zusammen, so ist nach (123) für jedes Flüssigkeitsteilchen die Achse des pro Sekunde erzeugten Wirbels senkrecht zu den Gradienten von v und p gerichtet, sie ist mithin parallel der Schnittkurve der Flächen konstanten Druckes und konstanten spezifischen Volumens.

Die entstehende Flüssigkeitszirkulation umkreist die Schnittkurve in dem Sinne, daß auf die Richtung des zunehmenden spezifischen Volumens (abnehmender Dichte) die Richtung abnehmenden Druckes folgt. Dieses Gesetz beherrscht die durch ungleichförmige Erwärmung der Luft entstehenden Wirbel.