Hand- und Hülfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen

Ostwald, Wilhelm
Luther, Robert

Leipzig, 1902

Erstes Kapitel. Das Rechnen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6392

Erstes Kapitel.

Das Rechnen.

Allgemeines. Alle messenden Beobachtungen sind mit entsprechenden Rechnungen nach zwei Richtungen verbunden, indem solche der anzustellenden Beobachtung einerseits vorausgehen, andererseits der angestellten Beobachtung nachfolgen. Der Zweck beider ist ganz verschieden: die vorauszuschickende Rechnung hat den Zweck, Anhaltspunkte für die Einrichtung und Verknüpfung der Messungen zu liefern und den Plan der Untersuchung in Bezug auf die zu erlangende Genauigkeit feststellen zu lassen; die nachfolgenden Rechnungen entstehen daraus, dass die Ablesung am Messinstrument im allgemeinen das gewünschte zahlenmässige Ergebnis nicht unmittelbar liefert, sondern nur eine Funktion desselben. Erst durch Einführen des beobachteten Wertes in eine Gleichung, welche ausserdem noch einige weitere Zahlenfaktoren zu enthalten pflegt, gelangt man zu dem gesuchten Werte; in vielen Fällen sind sogar mehrere derartige Stufen zurückzulegen. Die Rechnungen nach der Beobachtung oder die Reduktion ist also wesentlich ein numerisches Auflösen von Gleichungen, und weitere mathematische Überlegungen kommen nur insofern in Frage, als es sich um die zweckmässigste technische Durchführung dieser Rechnungen einerseits und um die Ermittelung des wahrscheinlichsten Ergebnisses aus mehreren Einzelbeobachtungen derselben Grösse andererseits handeln kann. Wir betrachten diese verschiedenen Aufgaben gesondert.

Einleitende Rechnungen. Die Definition. Die erste Frage beim Entwerfen eines Messplanes ist nicht die nach der Feinheit des Messverfahrens, sondern die nach der Genauigkeit, mit welcher das Objekt definiert ist. Was man mit gleichem Namen bezeichnet, ist im allgemeinen keineswegs in strengem Sinne gleich, und jedes einzelne Ding unterliegt der Veränderung im Laufe der Zeit. Somit muss, wenn etwas gemessen werden soll, zunächst Klarheit darüber vorhanden sein, mit welchem Grade der Annäherung das spezielle der Messung unterworfene Objekt als konstant und wiederherstellbar oder auffindbar angesehen werden kann, bevor man über die Genauigkeit seiner Messung beschliessen kann. Ein gegebenes Objekt kann in einem gegebenen Augenblick einer Messung von relativ sehr grosser Genauigkeit fähig sein, und nach dieser Richtung besteht oft keine Grenze für die Feinheit des anzuwendenden Verfahrens. Wohl aber fragt es sich, wie gross der Unterschied ist, wenn man dasselbe Objekt zu einer anderen Zeit, oder ein anderes Exemplar eben dieses Objektes einer Messung unterzieht. Wir können in diesem Sinn von einer Genauigkeit der »Definition« eines Objektes sprechen.

Wir entnehmen hieraus die Grundregel für das Entwerfen eines Messplanes: Die Genauigkeit der Messung muss der Genauigkeit der Definition des zu messenden Gegenstandes entsprechen. So begeht der Chemiker, welcher sich auf einer gewöhnlichen, $\frac{1}{20}$ g angebenden Tarierwage, die 63 g Oxalsäure für ein Liter Normallösung abwägt, keineswegs einen Fehler der Methode. Denn eine Normalsäurelösung lässt sich massanalytisch nicht wohl schärfer als auf 0.2 % definieren, und da der bei der Wägung mögliche Fehler im vorliegenden Falle kleiner ist als 0.2 %, nämlich 0.08 %, so ist das Verfahren für den angegebenen Zweck genügend genau. Im Gegensatz dazu muss es als ein methodischer Fehler (wenn auch nicht als einer im Resultat) bezeichnet werden, wenn der Anfänger, um eine Salzlösung von bekanntem Gehalt herzustellen, auf derselben feinen Wage neben der erforderlichen Salzmenge von beispielsweise 1 g auch die Wassermenge, von 100 g abwägt und sich dabei befleissigt, dieselbe Fehlergrenze von etwa 0.2 mg einzuhalten. Denn die Definition einer solchen Wassermenge, welche in offenen Gefässen gehandhabt, umgegossen u. s. w. werden muss, ist wegen der dabei auftretenden Verdunstung um mehrere Milligramm unsicher.

Ferner aber bedingt ein Fehler von 0.2 mg im Gewicht des Salzes einen ebenso grossen Fehler im Gehalt, wie eine hundert mal so grosse Abweichung im Gewicht des Wassers, also 20 mg. Folglich ist es überhaupt unnütz, eine grössere Genauigkeit als etwa 5 oder 10 mg anzustreben. Auf diesen Punkt, die gegenseitige Abgleichung zusammengehöriger Messungen, wird später genauer eingegangen werden.

In manchen Fällen, insbesondere bei der Erforschung neuer Gebiete, wird eine vorgängige Kenntnis der Schärfe, mit welcher das Objekt definiert ist, nicht vorhanden sein. Alsdann wählt man Messmethoden, welche der wünschenswerthen Genauigkeit ungefähr entsprechen und stellt unter möglichst verschiedenen Umständen Messungen des gleichen Objekts an. Dabei ergiebt sich aus den eintretenden Abweichungen die gewünschte Aufklärung; bleiben die Abweichungen aber innerhalb der dem Messverfahren als solchem anhaftenden Grenzen, so kann ein genaueres Verfahren gewählt werden.

Einfache Messungen. Die zu messende Grösse erscheint meist als (empirisch oder theoretisch) bekannte Funktion der Angaben des Messinstruments. Je nach der Art der Funktion steht die Ungenauigkeit der Ablesung zur Ungenauigkeit der Messung in verschiedener Beziehung.

Am häufigsten ist die zu messende Grösse (r) proportional zur abgelesenen (a); $r = na$.

Wird a um da falsch abgelesen, so ergiebt sich r um dr falsch. Die Differentialrechnung ergiebt $dr = nda$, d. h. ein absoluter Fehler von da bedingt einen n-mal so grossen Fehler in r. Dagegen sind die relativen Fehler gleich, wie sich durch Division der Gleichung $dr = nda$ mit der Gleichung $r = na$ ergiebt

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a}$$

d. h. soll eine Grösse etwa auf 1 % genau gemessen werden, so muss die Angabe des Apparates mindestens auf 1 % genau abgelesen werden können.

Dasselbe gilt wenn $r = \frac{n}{a}$ ist (z. B. wenn der Druck aus dem Volum einer abgeschlossenen Luftmenge bestimmt wird), denn

$$dr = -\frac{n}{a^2}da \text{ und } \frac{dr}{r} = -\frac{da}{a}.$$

Wenn r proportional dem Quadrat von a, also $r = na^2$ ist, so ist $dr = 2nada$ und $\frac{dr}{r} = \frac{2da}{a}$ d. h. es muss a prozentisch zweimal so genau abgelesen werden können, als die gewünschte prozentische Genauigkeit der Messung sein soll.

Wenn $r = m\,e^{na}$ ist, so ist $dr = nr\,da$ oder $\frac{dr}{r} = nda$, in

Worten: die relative Genauigkeit der Messung ist proportional der absoluten Genauigkeit der Ablesung. Soll z. B. r mit einer Genauigkeit von 1 % bestimmt werden $\left(\frac{dr}{r} = \frac{1}{100} = nda\right)$, so muss die Ablesung von a auf $\frac{1}{n \times 100}$ derjenigen Einheiten, auf welche sich der Zahlenwert von n bezieht, möglich sein.

Andere Fälle lassen sich nach dem obigen Schema leicht berechnen.

Zusammengesetzte Messungen. Nur in verhältnismässig seltenen Fällen werden die zu erlangenden Ergebnisse durch eine einzige Messung, eventuell deren Wiederholung, zu ermitteln sein. Meistens sind mehrere Arten der Messung an dem Ergebnis beteiligt und es erhebt sich die Frage nach dem Grade der Genauigkeit, welcher in jeder einzelnen Gruppe anzustreben ist.

Stellt man das gesuchte Resultat r in der Gestalt

$$r = f(a, b, c \ldots)$$

dar, wo f ein allgemeines Funktionszeichen und $a, b, c \ldots$ die in das Resultat eingehenden einzelnen verschiedenartigen Grössen, Konstanten oder Messungen sind, so lautet die Bedingung dahin, dass der Einfluss jeder der Grössen $a, b, c \ldots$ auf das Resultat r den gleichen Wert haben soll. Es soll demnach sein

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) da = \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) db = \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) dc = \ldots$$

Im allgemeinen ist diese Bedingung nicht ohne weiteres erfüllbar. Es werden stets einige der Grössen $a, b, c \ldots$ sich mit gleicher Mühe viel genauer bestimmen lassen als andere. Führt man die Rechnung durch, indem man für $da, db, dc \ldots$, die aus der Beschaffenheit der Messungen abzuschätzenden Fehlergrössen einführt, so ergiebt sich bald, dass meist sehr erhebliche Verschiedenheiten der Werte für die partiellen Differentialquotienten zu Tage treten. Alsdann ist das Interesse den Messungen zuzuwenden, deren angenommene Fehler den grössten Fehler im Ergebnis bedingen würden und es ist zu erwägen, ob durch Änderung der Versuchsanordnung, Anwendung feinerer Apparate, Anbringung neuer u. s. w. eine Verkleinerung dieses Fehlerwertes sich bewirken lässt. Häufig ist auf Kosten der Genauigkeit anderer Teile der Messungsgruppe dies Ergebnis erreichbar; dann findet ein gegenseitiges Ausgleich-verfahren statt, bis eine passende Annäherung an die obige Bedingungsgleichung erreicht ist.

Um die Anwendung des Verfahrens zu zeigen, sollen einige einfache Fälle berechnet werden. Es soll z. B. eine Grösse f als Summe oder Differenz zweier anderen a und b bestimmt werden.

Wir haben dann

$$f = a \pm b$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} da = da, \; \frac{\partial f}{\partial b} db = \pm\, db.$$

Es muss somit da numerisch gleich db gemacht werden, d. h. beide Werte müssen mit gleicher absoluter Genauigkeit gemessen werden.

Ist die Grösse f als Produkt von a und b gegeben, so ist

$$f = ab$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} da = b da, \; \frac{\partial f}{\partial b} db = a db.$$

Die zu erfüllende Bedingung ist somit

$$b da = a db$$

oder

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b}.$$

Beide Grössen müssen mit gleicher relativer Genauigkeit, d. h auf gleiche Bruchteile ihres Wertes gemessen werden.

Erscheint die Grösse f als Quotient, so ist

$$f = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} da = \frac{da}{b}, \; \frac{\partial f}{\partial b} db = -\frac{a}{b^2} db$$

und wir haben

$$\frac{da}{b} = -\frac{a}{b^2} db$$

oder

$$\frac{da}{a} = -\frac{db}{b},$$

was dieselbe Bedingung wie beim Produkt ergiebt.

Haben wir f in der Gestalt $a + mb$, wo m als fehlerfreier Koeffizient angesehen werden soll, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial a} da = da, \quad \frac{\partial f}{\partial b} db = mdb$$

$$da = mdb.$$

Der Fehler in b soll m-mal so klein sein, als der in a.

Weitere Fälle wird der Leser der bestimmten Aufgabe gegenüber hiernach leicht behandeln können.

Rechnungen, wie die vorstehenden, sind zunächst mit allen Grössen anzustellen, welche mit einem Fehler behaftet sein können; absolute Koeffizienten, wie die Zahlen π, e (die Basis der natürlichen Logarithmen) u. s. w. kommen dabei nicht in Frage. Dabei ergiebt es sich häufig, dass mit geringer Mühe einzelne gemessene Grössen so genau bestimmt werden können, dass ihr Einfluss auf den Fehler des Resultats dem der anderen Grössen gegenüber sehr geringfügig, kleiner als ein Fünftel oder Zehntel der anderen Einflüsse ist. Solche Grössen können dann auch als absolut genau behandelt und bei der Abschätzung des schliesslichen Fehlers vernachlässigt werden. Eine Grenze hierfür festzustellen, würde allerdings unter allen Umständen willkürlich sein, doch wird, wenn ein schliesslicher Fehler kleiner als ein Zehntel der anderen ist, seine Vernachlässigung für unsere Zwecke immer gerechtfertigt erscheinen und meist wohl auch schon, wenn er ein Fünftel beträgt.

Berechnung der Messungen. Ist der Messplan aufgestellt, so wird der Apparat hergerichtet, korrigiert oder kalibriert (s. w. u.) und es werden die Messungen ausgeführt. Im allgemeinen wird man jedes zu beobachtende Ding mehrmals messen, teils um sich gegen zufällige grobe Irrtümer beim Ablesen und Aufzeichnen zu schützen, teils um die Genauigkeit der Definition (S. 2) kennen zu lernen und den Betrag der vorhandenen Fehler zu ermitteln, soweit sie von den noch veränderlich gebliebenen Einflüssen abhängig sind.

Aus n wiederholten Messungen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ derselben Grösse ergiebt sich als wahrscheinlichster Mittelwert a das arithmetische Mittel

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{n} = \frac{\Sigma a}{n},$$

Beim Ausrechnen ist es unzweckmässig, die ganzen Werte der a zu addieren; man addiert vielmehr nur die Abweichungen der

a von einer nahe belegenen runden Zahl, nimmt von diesen das Mittel und fügt es jener runden Zahl hinzu. Man zerlegt mit anderen Worten jedes a_n in einen konstanten Wert a_0 plus einem kleinen Zusatz α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$, so dass $a_1 = a_0 + \alpha_1$, $a_2 = a_0 + \alpha_2$ ist u. s. w., woraus sich unmittelbar $a = a_0 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n}{n}$ ergiebt.

So seien z. B. an einer Kreisteilung nacheinander abgelesen $23^0 13$, $23^0 15$, $23^0 16$, $23^0 12$, $23^0 09$; so setzt man $a_0 = 23^0 10$, und hat die α gleich 3, 5, 6, 2, — 1; die Summe ist 15, der Mittelwert 3.0, somit ist der gesuchte Mittelwert $a = 23.10 + 0.030 = 23.130$. Man ersieht aus diesem Beispiel gleichzeitig die Art der Rechnung, nach welcher man die Decimalen der letzten Stelle vorläufig als Ganze behandelt und ihren Stellwert erst zuletzt berücksichtigt. Das Mittel wird im allgemeinen auf eine Decimale mehr berechnet, als die Ablesungen besitzen.

Dieses Mittelziehen soll am unmittelbaren Messungsergebnis vorgenommen werden und nicht an etwa aus ihnen berechneten Funktionen. Ist jene Kreisteilung z. B. die einer Tangentenbussole, so hat man nicht etwa von jeder Ablesung die Tangente aufzusuchen und diese Werte zu einem Mittel zu vereinigen, sondern man muss dies an den unmittelbaren Ablesungen ausführen und zu dem Mittelwerte des Winkels die Tangente suchen. Dies ist nicht nur das bequemere, sondern auch das theoretisch richtigere Verfahren.

Mittlerer Fehler der Beobachtung und des Mittelwertes. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergiebt für den mittleren Fehler f, welcher als jeder einzelnen Beobachtung anhaftend vorausgesetzt werden kann, den Ausdruck

$$f = \pm \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}}$$

und für den mittleren Fehler F des Mittelwertes

$$F = \pm \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n(n-1)}}.$$

Hier bedeutet d die Abweichung jeder einzelnen Beobachtung vom Mittelwert, also $d_1 = a - a_1$, $d_2 = a - a_2$ u. s. w., Σd^2 ist die Summe der Quadrate dieser Abweichungen und n wie früher die Zahl der Beobachtungen. Aus dem mitgeteilten Beispiel folgt $\Sigma d^2 = 0 + 4 + 9 + 1 + 16 = 30$, somit $f = 2.7$ und $F = 1.2$. Das Resultat der fünf Messungen ist somit zu schreiben $a = 23.130 \pm 0.012$, falls es zu weiteren Rechnungen verwendet wird; dagegen 23.13 ± 0.01, falls es als definitives Ergebnis auftritt.

Aus der Formel für F ergiebt sich, dass der mittlere Fehler des Ergebnisses durch Wiederholung der Beobachtungen vermindert werden kann, aber nur im Verhältnis der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen. Um also z. B. den mittleren Fehler auf seinen halben Wert, 0.006, einzuschränken, muss die Zahl der Messungen vervierfacht, d. h. auf 20 gesteigert werden.

Der mittlere Fehler der Einzelbeobachtung wird natürlich durch die Vermehrung der Messungen nicht kleiner, sondern nur genauer bestimmt.

Neben diesen mittleren Fehlern sind noch vielfach die „wahrscheinlichen" Fehler im Gebrauch, welche sich aus den vorigen durch Multiplikation mit 0.6745 oder rund $^2/_3$ ergeben.

Die Berechnung des mittleren Fehlers geschieht einerseits zur Beurteilung der Genauigkeit des erhaltenen Ergebnisses, andererseits als Anhaltspunkt für die Vereinigung mehrerer auf verschiedenen Wegen erhaltener Bestimmungen der Mittelwerte derselben Grösse zu einem allgemeinen Mittel. Für den letzteren Zweck berechnet man die Masszahl der Genauigkeit oder Zuverlässigkeit: das „Gewicht" p jedes einzelnen Mittelwertes, welches umgekehrt proportional dem Quadrate des mittleren Fehlers F ist, $p = \frac{1}{F^2}$. Sind $m_1, m_2 \ldots$ die einzelnen Mittel, so ist das allgemeine Mittel m gleich [1])

$$m = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots.}{p_1 + p_2 + \ldots.}$$

und der wahrscheinliche Fehler des allgemeinen Mittels gleich

$$F^0 = \sqrt{\frac{\Sigma p d^2}{(n-1)\Sigma p}}.$$

Diese Formeln gelten indessen nur unter der Voraussetzung, dass den verschiedenen Methoden, nach welchen die einzelnen Mittel m_1, m_2 u. s. w. bestimmt worden sind, keine konstanten Fehler anhaften. Diese Voraussetzung ist ausserordentlich viel seltener erfüllt, als man meinen sollte.

Zusammengesetzte Fehler. Die zur Ermittelung des Fehlers im Ergebnis einer zusammengesetzten Beobachtung erforder-

---

1) Man erleichtert sich auch hier die Rechnung auf die S. 6 angegebene Weise.

lichen Rechnungen stimmen völlig mit denen überein, welche bezüglich des Einflusses der Messungsbestandteile auf das Resultat bereits früher (S. 3) ausgeführt worden sind. Man hat also die Formel, welche das Resultat r in der Gestalt

$$r = f\,(a,\ b,\ c\ .\ .\ .)$$

ausdrückt, nach einander nach a, b, c . . . partiell zu differenzieren, und erhält in der Gestalt $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b} \ldots$ die Faktoren, mit denen man die Fehler in da, db, . . . in a, b, . . . zu multiplizieren hat, um die entsprechenden Fehler in r zu erhalten.

Der gesamte mittlere Fehler beträgt schlimmsten Falles, nämlich wenn die Teilfehler alle gleiches Zeichen und ihren mittleren Wert haben, die Summe der Teilfehler $dr = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \ldots\ldots$ Der mittlere Wert Fr des gesamten Fehlers ist gleich $Fr = \sqrt{fa^2 + fb^2 + \ldots}$, wo der Kürze wegen $\frac{\partial f}{\partial a} da = fa$ u. s. w. gesetzt worden ist.

Es ist zu beachten, dass in den allermeisten Fällen nicht die absolute Grösse des mittleren Fehlers Fr des Endresultates, sondern die relative (prozentische) d. i. $\frac{Fr}{r}$ für die Beurteilung der Zuverlässigkeit des Resultates von Wichtigkeit ist.

Beispiel: Es sollen die Gefrierpunktserniedrigungen von zwei Lösungen A und B mit derselben relativen Genauigkeit von $\pm$ 2% gemessen werden. Die Erniedrigung von A betrage ca. 0.1°, die von B ca. 0.2°. Fr soll also bei A 0.002°, bei B 0.004° betragen, Da die Erniedrigung sich als Differenz des Gefrierpunktes des reinen Lösungsmittels und der Lösung ergiebt, so ist r in diesem Fall $= a\text{-}b$.

5 unabhängige Bestimmungen des Gefrierpunktes des reinen Lösungsmittels ergaben die Werte:

3.536°, 3.532°, 3.534°, 3.530°, 3.535°.

Das Mittel ist 3.5334° ± 0.0011°, denn $fa = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n(n-1)}} = 0.0011°$.

5 unabhängige Bestimmungen des Gefrierpunktes der Lösung A ergaben:

3.421°, 3.410°, 3.410°, 3.422°, 3.417°. Mittel 3.4160° ± 0.0026°.

fb ist also ± 0.0026. Der mittlere Fehler der Gefrierpunktserniedrigung Fr ist $= \sqrt{(fa)^2 + (fb)^2} = 0.0028$, also grösser als erwünscht.

Nach p. 4 sollen fa und fb möglichst gleich gross sein. Aus $Fr = \sqrt{(fa)^2 + (fb)^2} = 0.0020^0$ und $fa = fb$ ergiebt sich $fa = fb = 0.0014^0$. Während also a genügend genau bestimmt ist, muss b genauer gemessen werden. Die zulässige Maximalgrösse von fb ergiebt sich aus $Fr = \sqrt{(0.0011)^2 + (fb)^2} = 0.002^0$ zu $fb = 0.0017^0$. Die Anzahl der Messungen, welche diesen Fehler ergiebt, ist nach p. 7 $= 5 \cdot \left(\frac{0.0026}{0.0017}\right)^2 = \text{ca. } 12$. Es muss b also durch ca. 7 fernere Versuche genauer bestimmt werden.

Wesentlich günstiger gestalten sich die Verhältnisse für die Lösung B. Wir haben hier

$$Fr = \sqrt{(fa)^2 + (fb)^2} = 0.004 = \sqrt{(0.0011)^2 + (fb)^2},$$

woraus fb sich zu 0.0038^0 ergiebt.

Nimmt man in erster Annäherung den Fehler der Einzelbestimmung des Gefrierpunktes bei B gleich dem bei A an, also $= 0.0058^0$, so sieht man, dass schon 3 oder 4 Bestimmungen genügen, um diese Genauigkeit zu erreichen.

Ähnliche Überlegungen können in allen vorkommenden Fällen zur Orientierung über mögliche Genauigkeitsgrenzen dienen.

Zufällige und konstante Fehler. Wenn man Messungen derselben Grösse wiederholt ausführen will, so muss man alle Umstände, von denen die Grösse abhängt, konstant lassen, oder ihre vorhandene Änderung als Korrektionen in Rechnung bringen. Alsdann rühren die übrig bleibenden Verschiedenheiten in den einzelnen Messungen von den unbeherrscht gebliebenen Resten dieser Unterschiede, den Unsicherheiten der Ablesungen, zufälligen Störungen und dergleichen Ursachen her, durch deren Wirkung im allgemeinen ebenso häufig die abgelesenen Werte zu gross wie zu klein erscheinen werden; das arithmetische Mittel der Ablesungen wird dann, wie erwähnt, den wahrscheinlichsten Wert des Ergebnisses darstellen.

Nun ist aber diese Bedingung, dass man alle Einflüsse auf das Messungsergebnis konstant gelassen oder berücksichtigt hat, in aller Strenge nie zu erfüllen; man kann ihre Schwankungen nur auf einen Betrag herabdrücken, welcher unterhalb einer gewissen Grenze liegt, die dann eben die Fehlergrenze der Messungen darstellt. Aber noch nach einer anderen Seite wird die Bedingung verletzt. Um alle Einflüsse zu berücksichtigen, muss man sie kennen, und dies ist gerade bei der Untersuchung noch unbekannter Erscheinungen im allgemeinen nicht der Fall.

Man wird also im allgemeinen voraussetzen müssen, dass sich neben den berücksichtigten Einflüssen noch andere geltend machen, deren Betrag unbekannt ist und die in dem mittleren Fehler des Ergebnisses in dem Falle nicht zu Tage treten, dass sie während der Messungsreihe nicht oder nur wenig gewechselt haben. Wenn z. B. das spezifische Gewicht des Kupfers bestimmt werden soll, und das Stück Metall, mit dem gearbeitet wird, hat eine Blase, so wird ein zu kleiner Wert erhalten werden und da die Ursache des Fehlers konstant bleibt, so wird sein Betrag durchaus nicht im Werte des mittleren Fehlers zum Ausdruck gelangen.

Der Weg, solche konstante Fehler zu entdecken, ist der, die zu messende Grösse mittelst verschiedener Methoden und an verschiedenen Objekten zu messen. Weichen dann die einzelnen Mittelwerte von einander nicht mehr ab, als nach den Beträgen der mittleren Fehler jedes Mittels zu erwarten ist, so sind konstante Fehler entweder gar nicht oder in allen Fällen gleichartig und in gleichem Betrage vorhanden. Dass das zweite zufällig eintritt, ist in dem Masse weniger wahrscheinlich, als die Mannigfaltigkeit der Methoden grösser wird. Schon bei drei oder vier unabhängigen Versuchsreihen wird man in dieser Beziehung ziemlich sicher sein können.

Es muss betont werden, dass diese Voraussetzung für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in unserem Gebiet der messenden Wissenschaften nur äusserst selten erfüllt ist. Mit fast alleiniger Ausnahme der Messungen von Stas weichen beispielsweise alle Atomgewichtsbestimmungen eines und desselben Elementes viel mehr von einander ab, als die mittleren Fehler der einzelnen Reihen erwarten liessen, und zwar trifft dies nicht nur für die Messungen verschiedener Beobachter, sondern auch für die nach verschiedenen Methoden von einem Beobachter ausgeführten Messungen zu. Bei allen diesen Versuchen waren somit noch konstante Fehler nachgeblieben, deren Ursache der Aufmerksamkeit der Forscher entgangen war. Ähnlich, nur meist noch schlimmer steht es in anderen Gebieten.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der sich aus ihr ergebenden Methode der kleinsten Quadrate ist daher bei physikalisch-chemischen Messungen in der Mehrzahl der Fälle nicht nur überflüssig, sondern thatsächlich fehlerhaft, weil sie eine Voraussetzung enthält, welche bei weitem nicht erfüllt zu sein pflegt. Dagegen ist die Berechnung mittlerer Fehler der einzelnen Reihen von grossem Nutzen, da sie beim Vergleich unabhängiger Reihen darüber Auskunft giebt, wie gross der Betrag der konstanten Fehler einiger oder aller Methoden noch mindestens ist und somit Fingerzeige für ihre Aufsuchung und Beseitigung liefert.

Wahrscheinlicher Wert eines konstanten Intervalls. Werden die der Funktion $X = a + bn$ entsprechenden Werte von X für verschiedene ganzzahlige Werte von n bestimmt, so ist der wahrscheinlichste Mittelwert des Intervalls b gegeben[1] durch

$$b = 6\,\frac{(n-1)(X_n - X_1) + (n-3)(X_{n-1} - X_2) + \ldots}{n(n^2-1)}$$

Derartige Aufgaben kommen sehr häufig vor; in unserem Gebiete beispielsweise bei der stöchiometrischen Bearbeitung der Eigenschaften homologer Reihen für den Einfluss von CH^2. Wenn man nur das arithmetische Mittel aus den für aufeinanderfolgende Werte von n bestimmten b-Grössen zöge, so würde der Einfluss der mittleren Messungen, wie man sich leicht überzeugt, ganz herausfallen, und der Wert von b wird gleich $\frac{X_n - X_1}{n-1}$, d. h. so, als wenn nur die äussersten Werte gemessen worden wären.

In jedem Falle ist übrigens zu prüfen, ob die Voraussetzung, dass b konstant ist, zulässig ist. In dem eben erwähnten Falle ist dies meist zweifelhaft.

Korrektionen. Jedes geteilte Messinstrument ist mit Teilungsfehlern behaftet, welche häufig mehr betragen, als die Fehler der Ablesung und muss deshalb, bevor es zu genauen Messungen benutzt werden kann, kalibriert oder korrigiert werden. Das Verfahren dabei besteht im allgemeinen darin, dass ein Objekt, dessen Unveränderlichkeit in Bezug auf die gemessene Grösse sicher ist (oder dessen Veränderlichkeit man genau kennt), an verschiedenen Stellen des geteilten Instruments gemessen wird; die Abweichungen dieser verschiedenen Messungen von einander geben den Betrag der Fehler zu erkennen.

Der systematische Plan einer Korrektionsuntersuchung ist je nach dem Falle verschieden; die Aufgabe ist dabei stets, mit einem Minimum von Arbeit ein Maximum von Genauigkeit zu erreichen. Einzelne typische Fälle werden später ausführlich geschildert werden.

---

[1]) Kohlrausch, prakt. Phys., 8. Aufl., S. 15, wo auch der Beweis nachzusehen ist.

Bei Instrumenten, bei denen durch Zusammenfügung einzelner individueller Stücke der Messbetrag erreicht wird (Gewichtssätze, Widerstandskasten u. dergl.), handelt es sich um eine begrenzte Anzahl von Verbesserungen, nämlich um so viele, als Stücke vorhanden sind. In diesem Falle wird der Plan so entworfen, dass experimentell so viele unabhängige Gleichungen zwischen den Stücken (nämlich $n-1$, wenn n die Anzahl der Stücke ist) erlangt werden, als zur Ermittelung der Beziehung zwischen den Stücken erforderlich sind. Ist weiter keine Beziehung (z. B. auf eine Normaleinheit) gegeben, so setzt man ein beliebiges Stück, wohl auch die Summe sämtlicher Stücke gleich dem Nominalwert und berechnet dann mittelst der experimentellen Feststellungen den wahren Wert jedes einzelnen Stückes; der Unterschied: wahrer Wert minus Nominalwert giebt dann die Korrektion des Stückes, d. h. die Grösse, die zu dem Nominalwert gefügt werden muss, um den wahren Wert zu ergeben. Ist eine Normaleinheit gegeben, so stellt man durch einen weiteren Versuch das Verhältnis zwischen ihr und dem nominell gleichen Stück fest nnd bezieht hierauf die übrige Rechnung.

Wenn die Möglichkeit nicht gegeben ist, die Messgrösse aus Stücken zusammenzufügen, so muss das Instrument fortlaufend geteilt sein und zwar ist, ganz besondere Umstände ausgenommen, die Teilung stets in gleichen Abständen zu bewirken. Die Korrektur kann sich dann nicht auf jedes einzelne Intervall erstrecken. Man fasst vielmehr eine grössere Anzahl von Intervallen, 10, 50, 100, zu einer Einheit zusammen und ermittelt für diese auf ähnliche Weise die Korrektionen. Das weitere Verfahren beruht auf der Voraussetzung, dass die Fehler sich langsam und stetig ändern. Bestimmt man daher für eine gewisse Anzahl von Stellen der Teilung die Fehler, d. h. die Abweichung vom Sollwert, so ist man berechtigt, die Fehler für die zwischenliegenden Stellen unter der Voraussetzung zu schätzen, dass sie sich den gemessenen stetig anschliessen, d. h. sie zu interpolieren.

Je nach dem relativen Betrage der Fehler wird man die Interpolation mehr oder weniger eingehend durchführen. Sind die Abweichungen sehr gering und sehr regelmässig, so kann man annehmen, dass zwischen den untersuchten Punkten der Fehler sich proportional ändern wird. Ist im Punkt a der Fehler gleich α, und im Punkt b gleich β, so ist für einen zwischenliegenden Grund c der Fehler γ gegeben, indem man einen Wert zwischen α und β sucht, dessen Abstände von α und β sich ebenso verhalten, wie die Abstände des Punktes c von a und b. Hat also ein Thermometer bei 10^0 den Fehler $+ 0.23$ und bei 20^0 den Fehler $+ 0.11$, so hat es bei 13^0 den Fehler $+ 0.19$.

Diese einfache Proportionsrechnung muss in Fällen, wo der Fehler beträchtlicher ist, oder genauer berechnet werden soll, durch eine etwas wahrscheinlichere Annahme ersetzt werden, indem man eine Funktion sucht, welche die Fehler stetig darstellt und eine Berechnung der Zwischenwerte gestattet. Hier ist es bei weitem am zweckmässigsten, nicht rechnend, sondern zeichnend diese Funktion zu entwerfen und der Zeichnung die interpolierten Werte zu entnehmen.

Man macht gegen dieses Verfahren häufig den Einwand, es sei willkürlich. Doch sind die bei rechnerischer Interpolation gemachten Annahmen (ohne welche überhaupt keine Interpolation möglich ist), wie z. B. die Annahme, dass drei aufeinander folgende Punkte in einer Parabel liegen, ebenso willkürlich, und das Zeichenverfahren hat daneben den sehr grossen Vorteil der Schnelligkeit und Übersichtlichkeit.

Ausführung graphischer Interpolationen. Man findet im Handel Papier, welches mit einem Netz gerader Linien von 1 mm Entfernung unter Bezeichnung der Fünfer und Zehner bedruckt ist, und welches sich für unsere Zwecke sehr gut eignet. Die Interpolation geschieht, indem man die Sollwerte in geeignetem Massstabe (ganze Länge 20 bis 50 cm) an die Abscissenachse trägt, und die Korrektionen in vergrössertem Massstabe als Ordinaten hinzufügt. Die erhaltenen Punkte werden dann durch eine stetige Kurve verbunden, deren Ordinaten für jeden zwischenliegenden Punkt die Fehler angeben.

Fig. 1.

Fig. 2.

Das Ziehen der Kurve aus freier Hand gelingt nur geübten Zeichnern befriedigend. Sehr brauchbare Ergebnisse erhält man aber, wenn man zunächst den annähernden Lauf der Kurve mit der Hand in leisen Strichen skizziert und dann mit Hilfe von K u r v e n l i n e a l e n kürzere Gebiete derselben, drei, womöglich vier Punkte umfassend, folgeweise auszieht. Kurvenlineale sind mannigfaltig geschweifte, aus Holz oder Ebonit gefertigte Lineale (Fig. 1 und 2), die von Architekten gebraucht werden und in den Handlungen mit Zeichenmaterialien vorrätig sind. Man wählt sich einige mit möglichst flachen Kurven aus.

Noch ausgiebiger sind Lineale aus dünnem Stahl, welche mit einem Rücken von Blei versehen sind und sich in beliebige, sehr stetig verlaufende Kurven biegen lassen. Sie werden gleichfalls von den Technikern benutzt. Man kann sie sich selbst herstellen, wenn man ein geeignetes Stahlband an einem Rande mit einem umgelegten Bleistreifen versieht, den man leicht anhämmert. Das Blei dient zur Erhaltung der geformten Kurve, die Stahleinlage bewirkt, dass die Kurve stetig verläuft und keine Ecken und Brüche erhält. Man hält am besten ein dünneres Lineal für stark gekrümmte Kurven und ein stärkeres für geringere Krümmungen bereit.

Recht brauchbar ist häufig ein ziemlich primitives Verfahren, welches auf der Thatsache beruht, dass das menschliche Auge und die Muskulatur der Hand meistens noch die Unstetigkeit des zweiten, manchmal sogar die des dritten Differentialquotienten empfindet. Man überträgt die zu verbindende Punktenreihe mit Hilfe von Pauspapier, oder durch Durchstechen mit einer Stecknadel auf ein anderes Papier und legt dasselbe so, dass die Punktreihe ihre konkave Seite der zeichnenden aufgestützten rechten Hand zukehrt. Darauf verbindet man durch häufig wiederholtes ziemlich rasches Hin- und Herfahren mit einem nicht zu harten Bleistift die Punktreihe zu einem kontinuierlich verlaufenden etwa 1 mm breiten Band. Durch die häufige, immer wiederkehrende Bewegung werden alle Unebenheiten der Kurve von selbst ausgeglichen. Radiert man jetzt auf dem kontinuierlichen Bande mit einem weichen Radiergummi in gleichförmigen Strichen herum, bis die Kurve fast vollständig verschwunden ist, so bleiben vor allem die Punkte stehen, über die der Bleistift am häufigsten gegangen ist. Diese bilden die gewünschte stetige Kurve, die entweder mit leichter Mühe sauber ausgezogen, oder noch besser auf ein Stück Karton durchgestochen werden kann. Die Reihe von Stichen (gegenseitiger Abstand ca. 5 mm) wird mit einer Schere zu einer kontinuierlichen Kurve ausgeschnitten, welche als Kurvenlineal zur Vereinigung der ursprünglichen Punktenreihe dient. Beim Schneiden mit der Schere findet wieder ein automatischer Ausgleich der Unebenheiten statt. Das Kartonlineal ist sofort nach der Herstellung zu verwenden, da Karton sich leicht verzieht.

Mit solchen graphischen Methoden hat man sich durch häufigen Gebrauch möglichst vertraut zu machen. Sie dienen nicht nur für den eben dargelegten Zweck, sondern sind wichtige Hilfsmittel der Forschung in unbekannten Gebieten.

Benutzung der Korrektionen. Hat man die Korrektionen einer Teilung ermittelt, so ist jeder Ablesung an derselben der Wert der Korrektion an der fraglichen Stelle unter Berücksichtigung des Zeichens hinzuzufügen. Das Zeichen wird so gewählt, dass die Hinzufügung der Korrektion zur Ablesung am Instrument den richtigen Wert ergiebt. Sind die abgelesenen Strecken z. B. kleiner, als die wahren Entfernungen, so ist die Korrektion positiv zu notieren und umgekehrt.

Haben die Korrektionen kleine Werte, so ist es am besten, sie, wenn es sonst angeht, unmittelbar an den zugehörigen Stellen der Teilung zu notieren. Anderenfalls schreibt man sie auf einen geeigneten Streifen Papier oder dünner Pappe, welchen man neben dem Instrument so anbringt, dass neben jeder Stelle die zugehörige Korrektion zu finden ist. So lege man z. B., wenn eine Bürette korrigiert ist, sie auf den Tisch, daneben einen 2 cm breiten Streifen aus starkem Papier von der Länge der Bürette und schreibe neben jedem Kubikcentimeterstrich die Korrektion auf das Papier. Beim Gebrauch der Bürette hängt der Streifen in richtiger Lage daneben und jede Ablesung wird, bevor man sie niederschreibt, durch Anbringung der Korrektion auf den richtigen Wert reduziert. Will man sich gegen etwaige Versehen schützen, so kann man zur Sicherheit die unmittelbare Ablesung und daneben den korrigierten Wert hinschreiben und hat dann die Möglichkeit späterer Kontrolle. Bei besonders wichtigen Messungen wird man diese Vorsicht beobachten, bei laufender Arbeit wird sie wohl meist entbehrlich sein.

Muss grössere Sorgfalt auf die Korrektionen verwendet werden, so notiert man die rohen Ablesungen und führt die Korrektionsrechnung am besten mit Hilfe der Kurve durch.

Mehrfache Korrekturen. Wenn ein Nullpunkt in der Bezifferung des Instruments vorhanden ist, der im übrigen willkürlich ist (wie z. B. an einem Massstabe oder einer Kreisteilung), so setzt man den Fehler des Nullpunktes gleich Null und bezieht alle Abweichungen auf diese Voraussetzung. In manchen Fällen sind dagegen Anfangs- und Endpunkt anderweitig definiert. Gewöhnlich zerfällt dann die Ausführung der Korrektion in zwei Teile. Man bestimmt zunächst die Teilungsfehler mit Bezug auf den Nullpunkt und sodann den absoluten Fehler des Nullpunktes; letzterer wird den erstgefundenen Fehlern mit Rücksicht auf das Zeichen hinzugefügt.

In anderen Fällen ist der Nullpunkt willkürlich, dagegen wird der Endpunkt anderweitig bestimmt. Dann müssen allen zwischenliegenden Korrektionen Werte hinzugefügt werden, welche proportional dem Abstande vom Nullpunkt zunehmen und entsprechende Bruchteile der Endkorrektion sind.

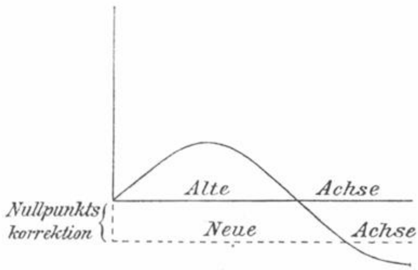

Fig. 3.

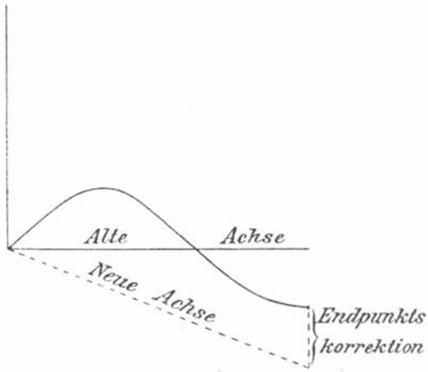

Fig. 4.

Haben endlich Anfangs- und Endpunkt beide noch besondere Korrekturen zu erfahren, so müssen beide eben angegebenen Ergänzungen gleichzeitig ausgeführt werden, d. h. es muss zu jedem Wert die Korrektur des Nullpunktes plus einem dem Abstande von diesem proportionalen Bruchteil des Unterschiedes zwischen der Korrektur des Anfangs- und Endpunktes hinzugefügt werden.

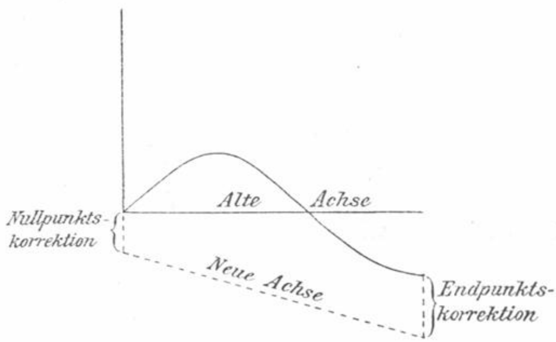

Fig. 5.

Bei der graphischen Interpolation der Korrekturkurve stellen sich diese Zusätze als Änderungen der Abscissenachse dar. Im ersten Falle wird sie parallel sich selbst um ein Stück verlegt (Fig. 3), im zweiten um den Anfangspunkt so gedreht, dass ihr Endpunkt auf den entsprechenden Wert fällt (Fig. 4), im dritten Falle tritt Verlegung und Drehung gleichzeitig ein (Fig. 5).

Da die Ablesung der Korrektur von der neuen Abscissenachse aus unbequem ist, indem man Summen aus je zwei einzeln abzulesenden Anteilen bilden muss, so ist es weit zweckmässiger, erst die neue Abscissenachse zu bestimmen und die Fehler alsdann in Bezug auf diese einzutragen; die endgültigen Korrektionen sind dann von der gewöhnlichen Nullachse aus abzulesen. Die Figuren 3 bis 5 nehmen dann die Gestalt der Fig. 6 bis 8 an.

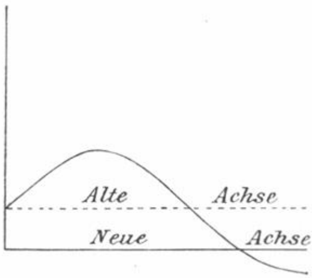

Fig. 6.

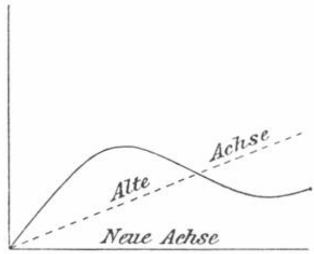

Fig. 7.

Man erledigt auf diese Weise die Summierung beider Korrekturgruppen ein für allemal.

Regeln für das Zahlenrechnen. Rechnungen werden im Allgemeinen mit einer Stelle mehr durchgeführt, als die Genauigkeit der Messungen ergiebt. Bei Additionen und Subtraktionen sind die absoluten Werte der Fehler massgebend, bei Multiplikationen und Divisionen die relativen. Der Fehler des Ergebnisses wird dabei von dem grössten Fehler der an demselben beteiligten Summanden und Faktoren bestimmt. Sind z. B. zwei Strecken zusammenzusetzen, von denen eine zu 205.3 cm, die andere zu 0.2869 cm bekannt ist, so wird man die Summe nicht auf

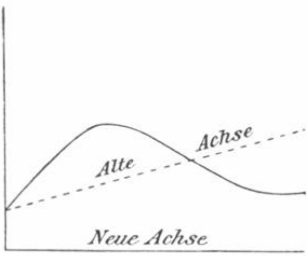

Fig. 8.

$$\begin{array}{r} 205.3 \\ 0.2869 \\ \hline 205.5869 \end{array}$$

ausrechnen, sondern man darf nur für etwaige weitere Rechnungen 205.59 nehmen, oder als Ergebnis 205.6 schreiben, wenn nicht weiter gerechnet werden soll. *Denn die Zahl der Stellen in einem experimentellen Ergebnis soll stets gleichzeitig die Grenze der Genauigkeit angeben*, derart, dass die vor-letzte Stelle als sicher, die letzte als unsicher gilt. Nur für ausgedehntere und besondere rechnerische Sorgfalt erfordernde Arbeiten nimmt man noch eine Stelle hinzu, kürzt aber das Resultat wieder wie angegeben.

Bei der Multiplikation und Division erlangt man auch nicht mehr brauchbare Ziffern, als der am ungenauesten bestimmte Faktor enthält. Es ist deshalb nur irreführend, in der gewöhnlichen Weise eine vollständige Multiplikation auszuführen, da man von dem Produkt doch nur höchstens die Hälfte der Ziffern brauchen kann. Ist beispielsweise der Radius r eines Kreises gleich 3.25 cm gefunden worden, so ist der Umfang desselben gleich $2r\pi$ oder gleich $2 \times 3.25 \times 3.14159$. Von diesen Faktoren sind 2 und 3.14159 fehlerfrei, da sie absolute Zahlenkoeffizienten sind, 3.25 wird nach der angegebenen Regel einen Fehler von einigen Einheiten der letzten Stelle haben. Somit wird das Produkt der drei Zahlen auf einige Einheiten der dritten geltenden Ziffer genau sein und alle folgenden Ziffern sind überflüssig. Statt also das Produkt auf 20.420335 auszurechnen, wird man $\pi = 3.14$ nehmen und damit 20.4 berechnen; alles Weitere ist vom Übel. Allenfalls wird man, wie erwähnt, bei längeren Rechnungen eine Ziffer mehr, also 20.42 benutzen.

Bei der Anwendung von Logarithmen ergiebt sich diese Rechnungsart von selbst, indem man die Logarithmen mit einer Stelle mehr als die ungenaueste Zahl enthält, benutzt. Multipliziert man aber in gewöhnlicher Weise, so erlangt man zu viele Ziffern, deren überflüssige Berechnung man sich durch abgekürzte Multiplikation ersparen kann. Das gleiche gilt für die Division.

Haben wir z. B. einen Skalenausschlag am Galvanometer gleich 235.6 mm gefunden und wissen wir, dass ein Volt einen Ausschlag von 184.3 mm giebt, so kann die elektromotorische Kraft mit vier geltenden Ziffern berechnet werden. Die erforderliche Division wird dann folgendermassen geführt:

	Gewöhnliche Rechnung
235.6 | 184.3 = 1.278	235.6 | 184.3 = 1.278
184.3	184.3
51.3	5130
36.9	3686
14.4	14440
12.9	12901
1.5	15390
	14744
	646

wobei man bei den einzelnen Teildivisionen fortlaufend eine Ziffer des Divisors weniger benutzt, indem man in jedem Produkt die letzte Ziffer rechts nach dem im Kopfe berechneten folgenden Wert abrundet.

Ebenso wird die Multiplikation ausgeführt, wobei die Ziffern des Multiplikators von links nach rechts genommen werden, statt wie häufig umgekehrt. Ein Beispiel wird jede weitere Erläuterung entbehrlich machen.

	Gewöhnliche Rechnung
28.341	28.341
552.69	552.69
14170.5	14170.5
1417.1	1417.05
56.7	56.682
17.0	17.0046
2.6	2.55069
15663.9	15663.78729

Die Gewöhnung an diese Art des Rechnens kann nicht dringend genug empfohlen werden; die gewöhnliche Art muss als unwissenschaftlich bezeichnet werden.

Einige Achtsamkeit beanspruchen die Anfangsziffern bei der Bestimmung der Anzahl geltender Ziffern. Haben wir z. B. 9.3×1.45 zu multiplizieren, so werden wir das Produkt nicht strikt der Regel nach mit nur zwei Ziffern gleich 13 schreiben, sondern mit dreien, nämlich 13.5. Denn betrüge der Fehler in der Zahl 9.3 z. B. eine Einheit, so wäre durch die Abkürzung des Produktes von dem vollständigen Wert 13.485 auf 13 ein viel grösserer Fehler, nämlich einer von 3.6% statt des ursprünglichen von 1.1%, in das Resultat gebracht worden. Die Regel von dem Beibehalten der kleinsten geltenden Zifferzahl soll daher mit der Klausel gelten, dass zweiziffrige Zahlen, deren erste Ziffer 5 oder mehr beträgt als dreiziffrige u. s. w. gezählt werden. Das gleiche gilt für das Resultat. Z. B. $0.92 \times 8.315 = 7.6$ als definitives Ergebnis, $= 7.65$ für weitere Rechnungen; $8.6 \times 0.543 = 4.67$ resp. 4.670.

Nullen vor dem Wert in echten Decimalbrüchen werden nicht als geltende Ziffern gerechnet, 0.000058 hat nur zwei geltende Ziffern. Dagegen sind Nullen am Ende der Zahl hinzuzuschreiben, wenn sie sich bei der Rechnung oder Messung ergeben; die Zahl 3.200 besagt, dass der Wert auf einige Tausendstel bekannt ist, während 3.2 bedeutet, dass die Fehler einige Zehntel betragen können.

Angenähertes Rechnen. Zu raschen Überschlagsrechnungen kann folgende Regel häufig von Nutzen sein. Sind α und β Grössen, welche kleiner als ca. $1/4$ sind, so ist $(1 \pm \alpha)^m \cdot (1 \pm \beta)^n$ angenähert $= 1 \pm m\alpha \pm n\beta$. Je kleiner α und β sind, um so genauer ist die Regel erfüllt. Die sehr häufig vorkommenden Spezialfälle sind die, dass $m = 1$ und $n = \pm 1$ ist, also $(1 \pm \alpha)(1 \pm \beta) = 1 \pm \alpha \pm \beta$ und $\frac{1 \pm \alpha}{1 \pm \beta} = 1 \pm \alpha \mp \beta$. Durch Zerlegung der gegebenen Zahl in ein rationales Vielfaches von 10 und einen Rest, den man als Bruchteil (am besten prozentischen Bruchteil) der grösseren Zahl ausdrückt, lassen sich viele Divisionen und Multiplikationen mit Hilfe der obigen Regeln annäherungsweise im Kopf ausführen.

Die beiden Zahlenbeispiele auf S. 19 u. 20 würden sich z. B. nach folgendem Schema erledigen:

$$\frac{235.6}{184.3} = \frac{236}{184} = \frac{200\,(+\ 18\,\%)}{200\,(-\ 8\,\%)} = 1\,(+\ 26\,\%) = 1.26$$

oder auch

$$\frac{236}{184} = \frac{236\,(+\ 8\,\%)}{184\,(+\ 8\,\%)} = \frac{255}{200} = 1.27$$

$28.341 \times 552.69 = 28.3 \times 553 = 30\,(-\ 6\,\%) \times 500\,(+\ 11\,\%) = 15000\,(+\ 5\,\%) = 15750$. Oder $28.3 \times 553 = (28.3 + 6\,\%) \times (553 - 6\,\%) = 300 \times 520 = 15600$.

Man merke sich ferner, dass eine $\begin{matrix}\text{Multiplikation}\\ \text{Division}\end{matrix}$ mit $\begin{matrix}5\\ 25\\ 125\\ 33\end{matrix}$ einer $\begin{matrix}\text{Division}\\ \text{Multiplikation}\end{matrix}$ mit $\begin{matrix}2\\ 4\\ 8\\ 3\end{matrix}$ und einer gleichzeitigen $\begin{matrix}\text{Multiplikation}\\ \text{Division}\end{matrix}$ mit $\begin{matrix}10\\ 100\\ 1000\\ 100\end{matrix}$ entspricht.

Rechenhilfsmittel. Eine grosse Anzahl von Messungsmethoden ist von der Gestalt, dass die unmittelbare Ablesung dem zu messenden Wert proportional ist (unmittelbar oder nach Anbringung einer additiven Konstanten). Demgemäss sind Multiplikationen und Divisionen unaufhörlich wiederkehrende Arbeiten, deren schnelle und bequeme Ausführung eine Sache von einigem Belang ist.

Als erstes und allgemeinstes Hilfsmittel stellen sich hier die Logarithmentafeln dar, von denen man je nach der Genauigkeit der

Werte vier- bis siebenstellige benutzen wird. Fast in allen Fällen sind vierstellige Logarithmen ausreichend, und hat man sich erst daran gewöhnt, die Rechnungen mit denselben im Kopf auszuführen, so giebt es kaum ein förderlicheres Hilfsmittel, da die ganze Tafel auf zwei Oktavseiten Platz findet und somit mit einem Blick übersehen werden kann.

Hat man viele Zahlen mit einem und demselben Faktor zu multiplizieren, so schreibt man sich zweckmässig den Logarithmus des konstanten Faktors auf ein Stückchen Papier und legt ihn in der Tafel über den Logarithmus des jeweiligen veränderlichen Faktors, worauf die Addition beider Zahlen im Kopfe leicht auszuführen ist. Bei derartigen Divisionen ist es angenehmer, die Subtraktion durch die Addition der dekadischen Ergänzung des Logarithmus des konstanten Divisors zu ersetzen. Um die Charakteristik kümmert man sich am besten während der Rechnung mit Logarithmen überhaupt nicht, sondern rechnet nur mit den Mantissen; dabei gewöhnt man sich, das Ergebnis durch eine unabhängige Berechnung desselben in runden Zahlen im Kopf zu kontrollieren, wodurch sich die Stellung des Kommas ergiebt.

Rechenschieber. Gleichfalls in hohem Masse bequem ist die Anwendung der Logarithmen in Form eines Rechenschiebers. Im Handel kommen vorwiegend nur ganz kleine Taschenapparate für den technischen Gebrauch vor, deren Genauigkeit für die meisten wissenschaftlichen Anwendungen unzureichend ist. Grössere käufliche Apparate müssen, um für unsere Zwecke brauchbar zu sein, mindestens 10 Teilstriche zwischen 1.00 und 1.10 haben. Man prüft sie durch Ausführung von Multiplikationen runder Zahlen. Indes kann man sich mit geringer Mühe selbst derartige Vorrichtungen anfertigen, welche bei noch mässiger Ausdehnung (etwa 1 m Länge) eine Genauigkeit von mehr als 1 : 1000 erreichen lassen und daher bei den meisten Rechnungen Anwendung finden können.

Das Prinzip dieser Vorrichtungen besteht bekanntlich darin, dass man die numerischen Werte der Logarithmen von 1 bis 10 als Längen auf zwei Massstäben abträgt und an die Teilstriche die Numeri der entsprechenden Logarithmen schreibt. Um das Produkt mn zu finden, setzt man den Teilstrich für 1 des ersten Stabes an den Teilstrich für m des zweiten und sucht auf dem ersten den Faktor n auf; gegenüber demselben befindet sich auf dem zweiten Stabe die Zahl für den Wert des Produktes mn. Denn man hat durch diese Operation zum Logarithmus von m den Wert des

Logarithmus von n gefügt (beide als Längen dargestellt) und die gegenüber n befindliche Stelle des zweiten Stabes entspricht der Summe beider Logarithmen. Folglich ist der beigeschriebene Numerus der Wert des Produktes mn. Liegen die zu multiplizierenden Zahlen nicht zwischen 1 und 10, so führt man die Multiplikation ohne Rücksicht auf das Decimalkomma aus und ergänzt dieses durch eine beim blossen Anblick der Faktoren sich ergebende Überschlagsrechnung im Kopfe.

Die Division $\frac{m}{n} = q$ wird derart ausgeführt, dass man den Teilstrich für 1 des ersten Stabes an den Teilstrich für den Divisor n des zweiten Stabes setzt und auf letzterem den Wert des Dividendus m aufsucht. Gegenüber diesem findet man auf dem ersten Stabe den Quotienten q, wie sich alsbald ergiebt, wenn man beachtet, dass man $\log m = \log n + \log q$ gemacht hat.

Wenn der Rechenschieber nur eine einmalige Teilung von 1 bis 10 trägt, so sind die Produkte von Faktoren, welche eine Stelle mehr ergeben, nicht mehr gegenüber dem zweiten Faktor zu finden; während 2×3 und 3×3 nach der oben angegebenen Weise gerechnet werden können, ist 4×3 nicht mehr ausführbar. Bei den kleinen Rechenschiebern ist deshalb die erste Teilung um eine zweite, ganz gleiche verlängert, was den Erfolg hat, dass noch eine zweite Logarithmenreihe mit der Kennziffer 1 vorhanden ist (wenn die der ersten gleich Null gesetzt wird), wodurch sämtliche Zahlen bis 100 in die Reihe fallen und somit sämtliche Produkte bis $9.9 \ldots \times 9.9 \ldots$ beherrscht werden. Bei den genaueren und deshalb längeren Rechenschiebern würden dadurch ungefüge Ausdehnungen notwendig werden; man verzichtet daher auf diese Bequemlichkeit, da man auch Rechenschieber von einfacher Länge zur Auswertung solcher Produkte gleichfalls benutzen kann [1].

Um ein solches Produkt mn, welches eine Stelle (vor dem Komma) mehr hat, als die Faktoren, zu ermitteln, setzt man statt des Anfangspunktes der Teilung des ersten Stabes den Endpunkt derselben an die Zahl m auf dem anderen Stabe und sucht n auf dem ersten auf; diesem Punkte liegt der Wert des Produktes auf dem zweiten gegenüber. Die Richtigkeit des Verfahrens ergiebt sich daraus, dass wenn man den Endpunkt an m bringt und den zweiten Stab durch eine angesetzte gleiche logarithmische Teilung

[1] Den grössten Teil der Vorzüge eines doppelten Rechenschiebers, ohne zu grosse Länge erreicht man, wenn man ein Stück einer zweiten Skala, etwa bis 1.2 oder 1.5 gehend, anfügt.

rückwärts verlängert denkt, der Anfangspunkt gleichfalls bei m liegen würde.

Ebenso hat man zu verfahren, wenn die Anfangsziffer des Divisors grösser ist als die des Dividendus, so dass der Quotient eine Stelle weniger hat. Um $\frac{m}{n} = q$ zu finden, setzt man den Endstrich des ersten Stabes an den Divisor n auf dem zweiten Stabe, sucht den Divisor auf dem zweiten Stabe auf und findet ihm gegenüber auf dem ersten, den Quotienten. Die Begründung ist die gleiche, wie bei der Multiplikation.

Herstellung eines Rechenschiebers. Zur Anfertigung eines Rechenschiebers gehört vor allen Dingen eine Grundteilung, von welcher die Gebrauchsteilung mittelst des Stangenzirkels kopiert wird. Die Grundteilung befindet sich auf einer Glasröhre, und enthält die Teilstriche für die Logarithmen von 1 bis 2.5 in Stufen von 0.005, d. h. die Logarithmen von 1, 1.005, 1.010, 1.015 ..... 2.490, 2.495, 2.500, im ganzen 601 Striche. Die Logarithmen dieser Zahlen sind 0.00000, 0.00217, 0.00432, 0.00647, ... 0.39620, 0.39707, 0.39794. Man bestimmt nun die Länge, welche die Einheit des Logarithmus darstellen soll; dieselbe sei 80 bis 100 cm, was als bequeme Länge anzusehen ist. Bei den neueren Teilmaschinen pflegt ein Schraubengang gleich einem Millimeter zu sein; alsdann entspricht eine Umdrehung der Schraube einer Änderung von 0.001 im Wert des Logarithmus. Da der Unterschied der Logarithmen von 1.000 und 1.005 0.00217 beträgt, so ergiebt sich, dass die ersten Teilstriche um 2.17 mm auseinander liegen; die letzten für 2.495 und 2.500 haben dagegen nur 0.87 mm Abstand.

Man spannt die Röhre auf die Platte der Teilmaschine (s. w. u. S. 30), regelt die Strichlänge auf etwa 1 cm und führt nun die in der nachstehenden Tabelle gegebene Teilung aus. Hat die Schraube zwischen 0.07 und 0.1 cm Gang, so kann man die Zahlen der Tabelle unmittelbar als Schraubenumdrehungen rechnen, anderenfalls müssen sie entsprechend vervielfältigt oder geteilt werden. (S. d. T. auf S. 26 u. 27.)

Der Rechenschieber selbst besteht aus zwei etwas über 1 m langen geraden Stäben von Holz, 1.5 cm breit und 0.5 cm dick, die auf einer Seite mit glattem Zeichenpapier beleimt sind und durch zwei innen mit Leder oder Tuch bekleidete Hülsen von Blech so miteinander verbunden sind, dass sie sich der Länge nach aneinander verschieben lassen; jeder Stab trägt an einem Ende eine der

Hülsen befestigt, durch die der andere gleitet, wie das die beistehende Figur 9 zeigt.

Man befestigt die Glasröhre mit der Grundteilung auf zwei brückenförmigen Trägern und den zusammengeschobenen Rechenschieber, an welchem die Teilung gemacht werden soll, in seiner Verlängerung. Mittelst eines Stangenzirkels überträgt man in der

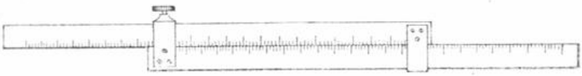

Fig. 9.

weiter unten (S. 36) geschilderten Weise die Striche, indem man gleichzeitig auf beiden Stäben des Rechenschiebers die Teilung so herstellt, dass die Striche an der Berührungslinie der Stäbe zusammenstossen (Fig. 10).

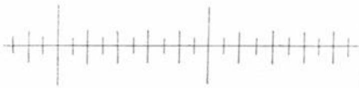

Fig. 10.

Die Teilung wird ausgeführt, indem man zunächst die Logarithmen von 1.00 bis 2.00, also 201 Striche überträgt. Dann wird der Rechenschieber näher an die Mutterteilung gebracht und der Stangenzirkel so eingestellt, dass der Anfangspunkt der Teilung mit dem letzten Strich der übertragenen Teilung zusammenfällt; in dieser Stellung wird die ganze Mutterteilung von 1.0 bis 2.5 übertragen, indem die Fünfer und Zehner nicht mehr bei jedem zehnten und zwanzigsten, sondern bei jedem fünften und zehnten Strich gezogen werden. Denn die Unterschiede der Logarithmen von 2.0 bis 5.0 sind halb so gross, wie die der Logarithmen von 1.0 bis 2.5; man kann also dieselbe Teilung benutzen, wenn man jedem Intervall den doppelten Wert giebt. Auf diese Weise gelangt man zum Logarithmus von 5.0. Jetzt wird der Rechenschieber wieder näher gebracht und der Stangenzirkel so eingestellt, dass seine Spitze auf 1.25 steht, während die Feder mit dem letzten Strich zusammenfällt und die Teilung beendet, indem jeder fünfte Strich lang gezogen wird. Denn jetzt hat jeder Strich der Teilung die vierfache Bedeutung und zwischen 5.0 und 5.1 sind nur fünf Teilstriche vorhanden, ebenso wie zwischen 1.250 und 1.275.

Diese etwas umständliche Zusammensetzung der Teilung ist nötig, um die Abstände einigermassen gleichförmig zu machen; wollte man dieselbe Stufenfolge von 0.005 Einheiten beibehalten, wie sie am Anfange benutzt war, so kämen die letzten Striche um

0.22 mm entfernt heraus, was weder unter diesen Umständen herstellbar, noch auch ablesbar wäre. Durch die zweimalige Verdoppelung des Intervalls steigt der Abstand auf 0.88 (genauer 0.87) mm, welches ein brauchbarer Wert ist.

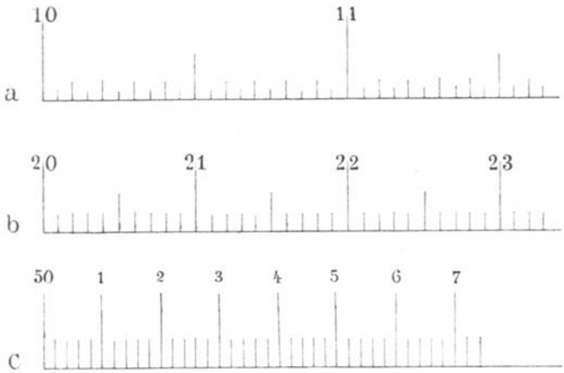

Fig. 11.

Ist die Teilung durchgeführt, wobei sie zwischen 1.0 und 2.0 die Gestalt *a*, von dort bis 5.0 die Gestalt *b* und von dort bis zu Ende die Gestalt *c* (Fig. 11) hat, so

Tabelle für die Mutterteilung des Rechenschiebers.

0.00	51.15	96.91	138.30	176.09	210.85
2.17	53.08	98.64	139.88	177.54	212.19
4.32	55.00	100.37	141.45	178.98	213.52
6.47	56.90	102.09	143.01	180.41	214.84
8.60	58.81	103.80	144.57	181.84	216.17
10.72	60.70	105.51	146.13	183.27	217.48
12.84	62.58	107.21	147.68	184.69	218.80
14.94	64.46	108.90	149.22	186.11	220.11
17.03	66.33	110.59	150.76	187.52	221.41
19.12	68.19	112.27	152.29	188.93	222.72
21.19	70.04	113.94	153.81	190.33	224.01
23.25	71.88	115.61	155.34	191.73	225.31
25.31	73.72	117.27	156.81	193.12	226.60
27.35	75.55	118.93	158.36	194.51	227.89
29.38	77.37	120.57	159.87	195.90	229.17
31.41	79.18	122.22	161.37	197.28	230.45
33.42	80.99	123.85	162.86	198.66	231.72
35.43	82.79	125.48	164.35	200.03	233.00
37.43	84.58	127.10	165.84	201.40	234.26
39.41	86.36	128.72	167.32	202.76	235.53
41.39	88.14	130.33	168.79	204.12	236.79
43.36	89.91	131.94	170.26	205.48	238.05
45.32	91.67	133.54	171.73	206.83	239.30
47.27	93.42	135.13	173.19	208.17	240.55
49.22	95.17	136.72	174.64	209.52	241.80

Fortsetzung.

243.04	273.00	301.03	327.36	352.18	375.66
244.28	274.16	302.11	328.38	353.15	376.58
245.51	275.31	303.20	329.40	354.11	377.49
246.74	276.46	304.28	330.41	355.07	378.40
247.97	277.61	305.35	331.43	356.03	379.31
249.20	278.75	306.43	332 44	356.98	380.21
250.42	279.89	307.50	333.45	357.93	381.12
251.64	281.03	308.56	334.45	358.89	382.02
252.85	282.17	309.63	335.46	359.84	382.92
254.06	283.30	310.69	336.46	360.78	383.82
255.27	284.43	311.75	337.46	361.73	384.71
256.48	285.56	312.81	338.46	362.67	385.61
257.68	286.68	313.87	339.45	363.61	386.50
258.88	287.80	314.92	340.44	364.55	387.39
260.07	288.92	315.97	341.43	365.49	388.28
261.26	290.03	317.02	342.42	366.42	389.17
262.45	291.15	318.06	343.41	367.36	390.05
263.64	292.26	319.11	344.39	368.29	390.94
264.82	293.36	320.15	345.37	369.22	391.82
266.00	294.47	321.18	346.35	370.14	392.70
267.17	295.57	322.22	347.33	371.07	393.58
268.34	296.67	323.25	348.30	371.99	394.45
269.51	297.76	324.28	349.28	372.91	395.33
270.68	298.85	325.31	350.25	373.83	396.20
271.84	299.94	326.34	351.22	374.75	397.07
					397.94

wird sie beziffert und der Rechenschieber ist zum Gebrauch fertig. Er hält sich ziemlich lange brauchbar; ist er schmutzig geworden, so kann man ihn wiederholt durch Abreiben mit Radiergummi reinigen.

Logarithmische Rechentafel. Eine sehr geschickte Anordnung nach dem Prinzip des Rechenschiebers ist die Rechentafel von J. Billeter in Zürich[1]). Man denke sich einen logarithmischen Rechenschieber in mehrere gleiche Stücke geteilt und diese in Gestalt eines horizontalen Gitters unter einander gelegt, so dass die Teile des oberen und die des unteren Stabes sich gleichzeitig bewegen. Man erlangt dadurch den Vorteil, dass die Länge des Apparates sich in demselben Verhältnis verkleinern lässt, während die entsprechende Verbreiterung keinen Nachteil bringt.

[1]) Vertreter für Deutschland L. Resch in Meerane, Sachsen.

Praktisch ist die Sache so ausgeführt, dass die dem oberen Stabe entsprechende Teilung auf einer Tafel hergestellt ist, während die des unteren Stabes auf die Unterseite einer mit Griffen versehenen Glasplatte geklebt ist. Die Glasplatte wird nach den S. 23 gegebenen Regeln auf die Tafel gelegt. Um ohne Verstellung der Glasplatte sämtliche Produkte des eingestellten Faktors ablesbar zu machen, ist statt der einfachen zerlegten logarithmischen Teilung eine vierfache angebracht, die man sich so entstanden denken kann, dass an die erste Teilung rechts um eine Zeile nach oben versetzt eine zweite, und unter beide je eine weitere Teilung gelegt worden ist. Dadurch kommt jeder Faktor viermal auf der Tafel vor und es giebt immer eine Stelle desselben, wo die aufgelegte Glasplatte die Tafel nirgend überragt, wo also alle Produkte gleichzeitig eingestellt sind.

Von den verschiedenen Formen des logarithmischen Rechenschiebers ist die eben erwähnte die praktischste, da sie bei sehr mässigen Grössenverhältnissen schon eine ganz erhebliche Genauigkeit erreichen lässt. Eine Tafel von 15 × 27 cm hat zwischen 1.0 und 1.1 fünfzig Teilstriche, ist also direkt in 0.002 geteilt und gestattet, wenn man Viertel schätzt, auf ein halbes Promille genau zu rechnen. Der allgemeinen Einführung dieses Rechenhilfsmittels ist nur der hohe Preis hinderlich, (welcher mit den Herstellungskosten des einfachen Apparates in gar keinem Verhältnis steht). Einen Rechenschieber mit spiralförmig gewundenen Skalen bringt Stanley, London in den Handel.

Andere Hilfsmittel. Ausser der Anwendung von Logarithmen in ihren verschiedenen Gestalten kommen für unsere Zwecke noch die „Rechentafeln" in Betracht. Solche bestehen aus methodisch geordneten Produkten aller zwei- oder dreistelligen Zahlen. Neben den etwas unhandlichen zwei Bänden der Crelle'schen Rechentafeln, welche die Produkte aller dreistelligen Zahlen enthalten, ist als zwar viel handlicher, aber weniger vollständig die Rechentafel von H. Zimmermann zu nennen, welche die Produkte aller dreistelligen Zahlen mit den Faktoren 1 bis 100 bringt. Der Gebrauch dieses Hilfsmittels ist ebenfalls recht nützlich und für schwache Mathematiker bequemer zu erlernen als der der Logarithmen.

Endlich sind die Rechenmaschinen zu erwähnen, welche gleichfalls schnelle Arbeit ermöglichen. Ihr Vorzug tritt indessen hauptsächlich bei vielstelligen Rechnungen zu Tage. Beim Multiplizieren (resp. Dividieren) einer Reihe von Zahlen mit demselben konstanten Faktor macht man nicht jede Operation von neuem, sondern lässt das jeweilige Resultat stehen und dreht die Kurbel um den Betrag der Differenz der eben multiplizirten Zahl und der nächstfolgenden weiter. Man kann auf diese Weise zum Schluss einer Zahlenreihe eine wertvolle Kontrolle der Richtigkeit der einzelnen Operationen haben, wenn man die letzte Zahl unabhängig mit dem Faktor multipliziert [1]).

Zweites Kapitel.

Längenmessung.

Allgemeines. Sämtliche Messinstrumente beruhen auf optischen Ablesungen und setzen somit Längenteilungen voraus. Unter Umständen, wie z. B. bei der Wage, können diese Teilungen auf kurze Strecken zusammenschrumpfen, indem der grösste Teil der Messung in die Abzählung der Gewichtsstücke verlegt wird; meist handelt es sich aber um längere Teilungen mit zahlreichen Strichen. Auch die Winkelablesungen an geteilten Kreisen ist in letzter Instanz nur eine Vergleichung von Strecken, nämlich den zu den Winkeln gehörigen Bogenlängen.

Daher ist die Herstellung, Prüfung und Ablesung von Teilungen eine immer wiederkehrende Arbeit in den messenden Wissenschaften, die man verstehen muss, wenn man quantitative Untersuchungen ausführen will.

Als Norm der Länge gilt in der Wissenschaft gegenwärtig allgemein das Meter, welches durch den Abstand zweier Marken auf einem in Paris aufbewahrten Platin-Iridiumstabe definiert ist; von diesem sind genau untersuchte Kopieen im Besitz der meisten Kulturstaaten. Vorhandene Massstäbe können durch Vermittelung der betreffenden Behörden (für Deutschland die Normal-Aichungs-Kommission in Berlin) auf das Normal-Meter bezogen werden.

Als Einheit der Länge wird vorwiegend das Centimeter, der hundertste Teil eines Meters, zu wissenschaftlichen Zwecken benutzt. Die Bezeichnung ist cm.

Die Teilmaschine. Die Längenteilmaschine besteht aus einer horizontal gelagerten Schraube, mittelst deren ein Schlitten

1) Briefliche Mitteilung von Prof. Runge.