universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Bahnbestimmung der Himmelskörper

Bauschinger, Julius

Leipzig, 1928

Siebenter Teil. Bahnbestimmung der Meteore, Satelliten und Doppelsterne

urn:nbn:at:at-ubi:2-6413

Siebenter Teil.

Bahnbestimmung der Meteore, Satelliten und Doppelsterne.

Abschnitt XXXV.

Bahnbestimmung der Meteore.

181. Einleitung. Forschungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, die insbesondere durch *Schiaparelli* zu einem gewissen Abschluß gebracht wurden, haben gezeigt, daß der Raum um die Sonne nicht nur von Planeten und Kometen, sondern auch von einer zahllosen Menge von Körpern eingenommen wird, die uns wegen ihrer Kleinheit nur dann sichtbar werden, wenn sie mit der Erde auf ihrem Weg um die Sonne direkt in Berührung kommen: sie fallen auf ihre Oberfläche nieder — *Meteorsteine* —, oder sie entzünden sich durch Reibung bei ihrer Bewegung durch die Atmosphäre und künden durch die kurze Lichterscheinung bis zu ihrer vollständigen Verbrennung ihr Dasein an — *Sternschnuppen* —, oder endlich sie durchziehen in längerer Lichtbahn die unteren Schichten der Atmosphäre und zersplittern schließlich in der Luft oder durch Auffallen auf die feste Erde — *Feuerkugeln*, alle drei nur verschiedene Erscheinungsformen desselben Ereignisses, der Vereinigung kosmischer Körper mit der Erde. Nachdem dieser Sachverhalt konstatiert war, entstand die Aufgabe, die von diesen Körperchen *vorher* beschriebenen *Bahnen* aus den zur Verfügung stehenden Beobachtungen zu ermitteln, um Aufschluß über ihre kosmische Stellung zu erlangen; mit dieser Aufgabe allein wollen wir uns hier beschäftigen, alle anderen Fragen der Meteor-Astronomie aber bei Seite lassen.

Die Körperchen unterliegen der Anziehungskraft der Sonne und beschreiben infolgedessen Bahnen um diese. Von diesen Bahnen ist uns von vorneherein ein Punkt bekannt, nämlich der Ort, den die Erde zur Zeit des Phänomens einnahm. Gelingt es also noch, Richtung und Größe der Geschwindigkeit des Körperchens in diesem Ort aus Beobachtungen abzuleiten, so kann die Bahn bestimmt werden (Nr. 43). Nimmt man die Form der Bahnkurve von vornherein als *Parabel* an, so ist die Größe der Geschwindigkeit v durch (Nr. 42)

$$v^2 = \frac{2k^2}{R}$$

gegeben, wenn R die Entfernung der Erde und des Körperchens von der Sonne bedeutet. Hat man Grund zu der Annahme, daß die Kurve eine Ellipse von der großen Halbachse a ist, so kann man die Geschwindigkeit aus der allgemeineren Formel

$$v^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

entnehmen. In diesen beiden Fällen hat man also nur die *Richtung* der Geschwindigkeit aus den Beobachtungen abzuleiten. Kann man keinerlei Voraussetzung über die Kurve machen, so muß man auch die Größe der Geschwindigkeit den Beobachtungen entnehmen, was offenbar nur möglich ist, wenn zwei Punkte der Bahn mit den zugehörigen Zeiten beobachtet sind; bei den sogenannten Feuerkugeln gelingt dies in der Tat und für diese wird also das Problem in der allgemeinsten Form zu lösen sein.

Die Richtung, aus der ein Meteor zur Erde gelangt, wird durch die sphärischen Koordinaten des sogenannten *Radiationspunktes* gegeben. Bei Feuerkugeln wird derselbe dadurch bestimmt, daß zwei Punkte der Bahn, die während ihrer kurzen Sichtbarkeitsdauer als Gerade angenommen werden kann, durch Visieren von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus festgelegt werden und der Schnitt ihrer Verbindungslinie mit der Sphäre aufgesucht wird; die hierzu nötigen Formeln werden unten abgeleitet werden. Bei den gewöhnlichen Sternschnuppenerscheinungen aber wird von dem Umstande Gebrauch gemacht, daß dieselben in der Regel nicht vereinzelt auftreten, sondern in größeren Schwärmen, deren einzelne Partikel für kurze Zeit in parallelen geradlinigen Bahnen angenommen werden dürfen. Tritt die Erde in einen solchen Schwarm ein, so schneiden die einzelnen Partikel die Atmosphäre in parallelen Lichtlinien, die vom Beobachter an der Sphäre als Stücke größter Kreise wahrgenommen werden, die sich alle in einem Punkte schneiden; dieser Punkt ist der Radiationspunkt, denn er zeigt offenbar die gemeinsame Richtung an, aus der die Partikel kommen.

Man hat sich diese Schwärme als Bestandteile von Meteorströmen vorzustellen, die in Kegelschnittskurven die Sonne umziehen und die Erdbahn schneiden. Jedes Jahr, wenn die Erde den Schnittpunkt passiert, tritt der Strom aus dem betreffenden Radiationspunkt in Tätigkeit. Im allgemeinen muß man die Bahnen dieser Ströme als Parabeln betrachten, da man kein Mittel besitzt, Abweichungen von der parabolischen Geschwindigkeit zu konstatieren. Nur wenn das Phänomen der Sternschnuppen periodische Schwankungen der Intensität aufweist oder wenn es gelingt, die Bahn eines Meteorstromes mit einer Kometenbahn zu identifizieren, kann man annehmen, daß eine Stelle größerer Dichtigkeit im Strom vorhanden ist, aus deren Umlaufszeit, der Periode der Intensitätsschwankung, die große Achse der elliptischen Bahn erschlossen werden kann.

182. Zenithattraktion. Aberration des Radiationspunktes. Apex. Ehe wir die Bahnbestimmung der Meteorströme und Feuerkugeln vornehmen, muß der Einfluß der Anziehung und der Bewegung der Erde auf das beobachtete Phänomen besprochen werden, damit der Bahnbestimmung korrigierte Daten zugrunde gelegt

werden können. Die relative Bewegung eines Meteors zu der als ruhend gedachten Erde kann, bevor die Anziehungskraft der Erde merklich zu werden beginnt, für kurze Zeit als geradlinig und gleichförmig angesehen werden. Durch die Attraktion der Erde wird die Bahn zu einem Kegelschnitt mit dem Brennpunkt im Mittelpunkte der Erde gekrümmt und die ursprüngliche Geschwindigkeit u geändert. Der Kegelschnitt wird, als aus dem Unendlichen kommend, eine Hyperbel sein, deren eine Asymptote die Gerade ist, in der das Meteor sich ursprünglich bewegte. Es sei in Fig. 63 O der Mittelpunkt der Erde, QN die Gerade, in der das Meteor sich bewegen würde, wenn keine Erdattraktion stattfände; die Hyperbel, in der es sich tatsächlich bewegt, treffe die Erdoberfläche im Punkte M. Die Tangente MV in M an die Hyperbel gezogen zeigt die Richtung an, aus der der Beobachter das Meteor kommen sieht; die wahre relative Bewegungsrichtung aber ist QN. Da die Hyperbelebene durch den Mittelpunkt der Erdkugel geht, so liegt die Tangente MV in der Vertikalebene des Ortes M, wo das Meteor endet und bildet mit der Zenithlinie MZ dieses Ortes den Winkel z, der offenbar kleiner ist, als der Winkel ζ, den die ursprüngliche Richtung QN oder AM mit der Zenithlinie bildet. Die Attraktion der Erde äußert sich also in einer Verminderung der Zenithdistanz des Punktes der Sphäre, von dem das Meteor herkommt oder des *Radiationspunktes*. Die Zenithdistanz des beobachteten Radiationspunktes ist hiernach um $\zeta - z$ zu korrigieren, um die des wahren zu erhalten. Den Unterschied $\zeta - z$ nennt *Schiaparelli* die *Zenithattraktion*; ihre Bestimmung wird uns nachher beschäftigen, wenn wir erst noch den Unterschied der wahren ungestörten Geschwindigkeit u des Meteors und der scheinbaren, in M beobachteten, die wir mit w bezeichnen wollen, festgestellt haben. Die Anziehungskraft der Erde in der Entfernung der astronomischen Einheit ist $k^2 M$, wo k^2 die Gaußsche Konstante, M die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse ist; an der Erdoberfläche wird sie also $\frac{k^2 M}{\varrho^2}$, wenn ϱ der Radius der Erdkugel in astronomischen Einheiten ist; wird sie in üblicher Weise mit g bezeichnet, so hat man

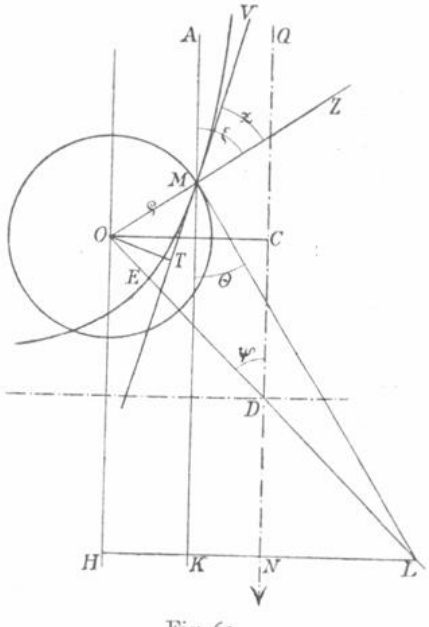

Fig. 63.

$$k^2 M = \varrho^2 g \,. \qquad 1)$$

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Hyperbel mit dem Radiusvektor r ergibt sich aus

$$v^2 = k^2 M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) = \varrho^2 g \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right),$$

wo a den absoluten Wert der reellen Halbachse bezeichnet. Da u als Geschwindigkeit in unendlicher Ferne aufgefaßt werden darf, so wird:

$$u^2 = \frac{g\varrho^2}{a} \qquad 2)$$

und für die Geschwindigkeit w im Punkte M mit dem Radiusvektor ϱ folgt:

$$w^2 = \varrho^2 g\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{a}\right).$$

Also wird

$$w^2 = u^2 + 2\varrho g. \qquad 3)$$

Hieraus kann u berechnet werden, wenn w beobachtet ist. Wählt man als Längen- und Zeit-Einheit das Meter und die Sekunde mittlerer Zeit, so ist bekanntlich $g = 9.80$ m und $\varrho = 6\,370\,000$ m (rund), also wird

$$2\varrho g = 124\,852\,000.$$

Die Elemente der Hyperbel bestimmt man nach Nr. 43. Zunächst folgt aus 2) die reelle Halbachse:

$$a = \frac{g\varrho^2}{u^2}. \qquad 4)$$

Ist ferner $OT = \varrho \sin z$ das Lot von O auf die Richtung der Geschwindigkeit w, und $p = a(e^2 - 1)$ der Parameter, so wird, wenn die Masse des Meteors gleich Null gesetzt wird:

$$k\sqrt{M}\sqrt{p} = \varrho \sin z \cdot w$$

oder nach 1)

$$a(e^2 - 1) = \frac{\sin z^2 \cdot w^2}{g}. \qquad 5)$$

Nennt man ψ den Winkel der Asymptote mit der Achse der Hyperbel, also $e = \sec\psi$, so folgt aus 4) und 5)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{uw}{g\varrho}\sin z. \qquad 6)$$

Die Entfernung $OC = s$ der Asymptote vom Brennpunkt O wird erhalten, wenn man beachtet, daß die Strecke vom Mittelpunkt D der Hyperbel bis C gleich a ist, nach 4) und 6):

$$s = a \operatorname{tg}\psi = \varrho\frac{w}{u}\sin z. \qquad 7)$$

Um nun die Beziehung zwischen ζ und z aufzusuchen, konstruieren wir den zweiten Brennpunkt L der Hyperbel, indem wir DL gleich OD machen, und setzen $ML = \varrho'$ und den Winkel, den ϱ' mit der Richtung QN oder AMK bildet, gleich θ; endlich fällen wir das Lot LNK auf die letztgenannte Richtung. Dann ist $CN = 2a$ und daher $MK = 2a + \varrho\cos\zeta$; ferner nach der Fundamentaleigenschaft der Hyperbel $ML = \varrho' = \varrho + 2a$, also

$$(\varrho + 2a)\cos\theta = 2a + \varrho\cos\zeta$$

oder wenn für a sein Wert aus 4) eingetragen und 3) beachtet wird:

$$w^2\cos\theta = 2g\varrho + u^2\cos\zeta.$$

Da die Tangente in M den Winkel zwischen ϱ und ϱ' halbiert, so wird Winkel OML einerseits gleich $2x$ und andererseits ist er gleich $\zeta + \theta$, so daß $\theta = 2x - \zeta$ sich ergibt; dies in der letzten Formel eingetragen führt auf die gesuchte Beziehung:

$$w^2 \cos(2x - \zeta) = 2g\varrho + u^2 \cos\zeta,$$

die aber eleganter geschrieben werden kann, wenn man sie von 3) abzieht:

$$w^2 (1 - \cos(2x - \zeta)) = u^2 (1 - \cos\zeta)$$

oder

$$w \sin(x - \tfrac{1}{2}\zeta) = u \sin\tfrac{1}{2}\zeta. \qquad 8)$$

Diese Formel giebt x, wenn ζ gegeben ist; um die häufiger vorkommende umgekehrte Aufgabe zu lösen, wird man am besten die Zenithattraktion $\varphi = \zeta - x$ direkt berechnen; denn mit $\zeta = x + \varphi$ folgt aus 8)

$$w \sin\tfrac{1}{2}(x - \varphi) = u \sin\tfrac{1}{2}(x + \varphi)$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{w - u}{w + u} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x. \qquad 9)$$

Hierdurch kann der scheinbare Radiationspunkt in den wahren verwandelt werden, soweit die Zenithattraktion in Betracht kommt. Es ist nun aber auch noch die Bewegung der Erde in Rechnung zu ziehen, denn u stellt die relative Geschwindigkeit des Meteors zur Erde vor. Nennt man die wahre Geschwindigkeit des Meteors in Bezug auf die Sonne v, die der Erde V, den Winkel zwischen V und v s und den zwischen u und V n, so hat man (Fig. 64):

$$u \sin n = v \sin s$$
$$V \sin n = v \sin(s - n). \qquad 10)$$

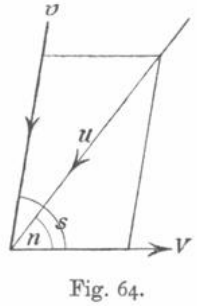

Fig. 64.

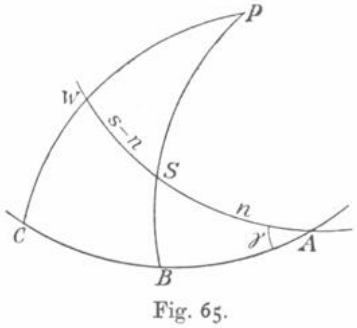

Fig. 65.

Verlängert man die Richtungen von V, u und v bis zur Sphäre und nennt A, S, W die Schnittpunkte, so stellt A den Punkt der Sphäre dar, auf welchen sich die Erde bei ihrem Lauf um die Sonne zu bewegt und der *Apex* genannt wird, ferner ist S der scheinbare und W der wahre Radiationspunkt. Der Apex liegt in der Ekliptik und seine heliozentrische Länge L ist leicht anzugeben; denn sind R und λ Radiusvektor und Länge der Erde, $\odot = 180^\circ + \lambda$ die Sonnenlänge, so werden ihre Geschwindigkeitskomponenten

$$V \cos L = \frac{d(R \cos\lambda)}{dt} = -\frac{d(R \cos\odot)}{dt}$$
$$V \sin L = \frac{d(R \sin\lambda)}{dt} = -\frac{d(R \sin\odot)}{dt}$$

woraus

$$V \sin (L - \odot) = - R \frac{d\odot}{dt}$$

$$V \cos (L - \odot) = - \frac{dR}{dt}$$

also:

$$\operatorname{tg} (L - \odot) = R \frac{d\odot}{dR}.$$

Nun ist

$$R = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos (\lambda - \omega)} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos (\odot - \omega)},$$

wenn e und ω die Exzentrizität der Erdbahn und die Länge ihres Perihels bedeuten. Vernachlässigt man, was hier völlig gestattet ist, die zweiten Potenzen der Exzentrizität, so wird

$$R = 1 + e \cos (\odot - \omega)$$

also

$$\frac{dR}{d\odot} = - e \sin (\odot - \omega)$$

und daher

$$\operatorname{tg} (L - \odot) = - \frac{R}{e \sin (\odot - \omega)}$$

oder

$$\operatorname{tg} (90^\circ + L - \odot) = \frac{e \sin (\odot - \omega)}{R}$$

oder wenn $R = 1$ gesetzt und die tang mit dem Bogen vertauscht wird:

$$L = \odot - 90^\circ + \frac{e}{\sin 1'} \sin (\odot - \omega). \qquad 11)$$

Hierin ist

$$\omega = 101^\circ\, 13'.2 + 1'.028\, (t - 1900) \text{ (incl. Präzession)}$$

$$\frac{e}{\sin 1'} = 57'.6.$$

Nennt man l', b' die auf die Ekliptik bezogenen Koordinaten von S, l, b jene von W, ferner γ die Neigung des größten Kreises ASW gegen die Ekliptik, so gibt zunächst das Dreieck ABS (Fig. 65)

$$\begin{aligned} \sin n \sin \gamma &= \sin b' \\ \sin n \cos \gamma &= \cos b' \sin (l' - L) \\ \cos n &= \cos b' \cos (l' - L) \end{aligned} \qquad 12)$$

woraus mittels der beobachteten Koordinaten l', b' und dem durch 11) bestimmten L die Größen n und γ unzweideutig berechnet werden können.

Ferner werden die Geschwindigkeitskomponenten des Meteors in bezug auf die Erde

$$- u \cos b' \cos l', \qquad - u \cos b' \sin l', \qquad - u \sin b',$$

da die Richtung der Geschwindigkeit der Visierrichtung entgegengesetzt ist; und jene in bezug auf die Sonne

$$- v \cos b \cos l, \qquad - v \cos b \sin l, \qquad - v \sin b;$$

endlich sind

$$V\cos L, \qquad V\sin L, \qquad 0$$

die Geschwindigkeitskomponenten der Erde in bezug auf die Sonne. Also hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} -v\cos b\cos l &= -u\cos b'\cos l' + V\cos L \\ -v\cos b\sin l &= -u\cos b'\sin l' + V\sin L \\ -v\sin b &= -u\sin b' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} v\cos b\cos(l-L) &= u\cos b'\cos(l'-L) - V \\ v\cos b\sin(l-L) &= u\cos b'\sin(l'-L) \\ v\sin b &= u\sin b'. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Formel

$$v^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos n, \tag{13}$$

welche die Berechnung von v ermöglicht. Um die Koordinaten l und b des wahren Radiationspunktes zu erlangen, hat man mit Benutzung von 10)

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-L) &= \cos s \\ \cos b\sin(l-L) &= \sin s\cos\gamma \\ \sin b &= \sin s\sin\gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

Diese Formeln kann man auch unmittelbar dem Dreieck AWC entnehmen. Sie setzen die Berechnung des Winkels s aus

$$\sin(s-n) = \frac{V}{v}\sin n \tag{15}$$

voraus. Läßt man γ von 0° bis 360° laufen, dann kann man den Winkel s auf 0° bis 180° beschränken, so daß $\sin s$ stets positiv angenommen werden kann. Geht, wie bei den Feuerkugeln, die Geschwindigkeit u aus Beobachtungen direkt hervor, so muß v aus 13) berechnet werden, worauf sich die Lage des wahren Radiationspunktes aus 12), 15), 14) ergibt. Nimmt man von vornherein an, daß das Meteor sich in einem Kegelschnitt von der großen Halbachse a bewegt, so hat man für die Geschwindigkeiten V und v von Erde und Meteor zur Zeit des Zusammentreffens:

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - 1\right)$$
$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

also:

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}R}{1-\frac{R}{2a}}}. \tag{16}$$

a wird nur bekannt sein, wenn wie bei gewissen Meteorströmen die Umlaufszeit U aus anderen Erscheinungen erschlossen werden kann, da dann

$$a = \sqrt[3]{U^2}$$

wird, falls U in Jahren ausgedrückt ist. Sonst muß man die Bahn als Parabel annehmen, so daß wird:

$$\frac{V}{v} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}R}$$

oder mit Vernachlässigung des Quadrats der Exzentrizität:

$$\frac{V}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \tfrac{1}{2}e\cos(\odot - \omega)\right). \qquad 17)$$

Ist die Lage des wahren Radiationspunktes durch l und b und die wahre Geschwindigkeit v ermittelt, dann kann zur Bestimmung der Bahn um die Sonne geschritten werden. Wir werden nach den Auseinandersetzungen in Nr. 181 zwei Teile unterscheiden, je nachdem die kosmische Geschwindigkeit von vornherein als bekannt angenommen wird, oder erst aus den Beobachtungen erschlossen wird.

183. Bahnbestimmung von Meteorschwärmen. Die Grundlagen für die Berechnung solcher Bahnen sind die Beobachtungszeit des Sternschnuppenfalls, die Koordinaten l und b des *wahren* Radiationspunktes und die *wahre* Geschwindigkeit v. Aus der Beobachtungszeit ergibt sich der Ort der Erde in ihrer Bahn, welcher gleich ist $180^\circ + \odot$, wenn $\odot$ die Sonnenlänge bedeutet, und damit die Länge des auf- oder absteigenden Knotens der Meteorbahn auf der Ekliptik. Liegt der Radiationspunkt nördlich von der Ekliptik, so zeigt der Erdort den absteigenden Knoten an und die Länge des aufsteigenden Knotens wird also

$$\Omega = \odot \qquad b \text{ positiv.} \qquad 18)$$

Liegt der Radiationspunkt südlich von der Ekliptik, so zeigt der Erdort den aufsteigenden Knoten an und dessen Länge ist also:

$$\Omega = 180^\circ + \odot \qquad b \text{ negativ.} \qquad 18^a)$$

Da die Meteorbahn außer durch die Erde auch durch den Radiationspunkt gehen muß, läßt sich auch ihre Neigung sofort angeben. Es sei in Fig. 66 E der Ort der

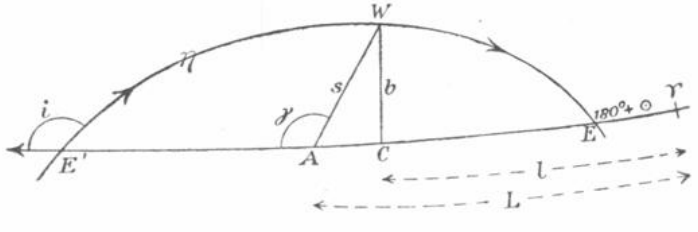

Fig. 66.

Erde, E' der in der Ekliptik 180° davon abstehende Punkt, A der Apex mit der Länge L, W der Radiationspunkt. Nehmen wir letzteren zuerst nördlich der Ekliptik an, so liegt der aufsteigende Knoten der Meteorbahn EWE' in E' und ihre Neigung i ist der zwischen den Bewegungsrichtungen liegende Winkel bei E'. Führt man noch den später gebrauchten Winkel $E'W = \eta$ ein und nennt wie früher den Bogen AW s und seine Neigung gegen die Ekliptik γ, so hat man im Dreieck $E'AW$ außerdem: $AE' = \odot - L$ und daher:

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos s\cos(\odot - L) + \sin s\sin(\odot - L)\cos\gamma \\ \sin\eta\sin i &= \sin s\sin\gamma \\ \sin\eta\cos i &= -\cos s\sin(\odot - L) + \sin s\cos(\odot - L)\cos\gamma. \end{aligned} \qquad 19)$$

Führt man hier für $\cos s$, $\sin s\cos\gamma$ und $\sin s\sin\gamma$ ihre Werte aus 14) ein, so gehen die Formeln über in:

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos b\cos(\odot - l) \\ \sin\eta\sin i &= \sin b \\ \sin\eta\cos i &= -\cos b\sin(\odot - l), \end{aligned} \qquad 20)$$

die man auch direkt hätte dem Dreieck $E'WC$ entnehmen können.

Liegt der Radiationspunkt südlich der Ekliptik, so kommt der aufsteigende Knoten nach E, der Winkel bei E' im Dreieck $E'AW$ wird also wieder $180^\circ - i$, der Winkel bei A aber gleich $360^\circ - \gamma$, folglich erleiden die Gl. 19) und 20) nur insofern eine Änderung, als die zweiten Gleichungen das Zeichen wechseln. Die Formeln zur Bestimmung von Knoten und Neigung der Meteorbahn für beide Fälle zusammengestellt, werden also:

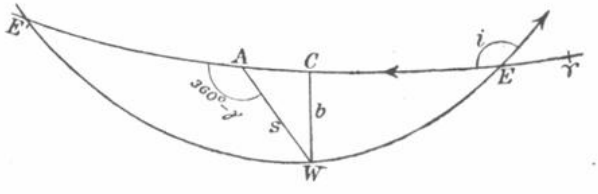

Fig. 67.

$\Omega = \odot$ Radiationspunkt nördlich von der Ekliptik
$\Omega = 180^\circ + \odot$ » südlich » » »

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos b\cos(\odot - l) \\ \sin\eta\sin i &= \pm\sin b \\ \sin\eta\cos i &= -\cos b\sin(\odot - l) \end{aligned}$$

Zeichen + für b positiv
Zeichen − für b negativ.

Die bisherigen Entwicklungen sind von der Art des Kegelschnittes unabhängig; zur Bestimmung der weiteren Elemente aber haben wir zwischen den Kurven zu unterscheiden. Wir betrachten zuerst die *Parabel*.

In dem Punkte E, in welchem die Erde die Meteorbahn trifft, ziehen wir an letztere die Tangente; in deren Richtung liegt dann der Radiationspunkt und zwar je nach der Bewegungsrichtung des Stromes auf der einen oder der anderen Seite. Wir untersuchen zuerst den Fall, wo der Durchgang des Stromes durch sein Perihel noch bevorsteht (Fig. 68); hier wird Winkel $E'SW = \eta = SEW$, also nach der bekannten Eigenschaft der Parabel Winkel $SEZ = UEW = \eta - \Theta$, wenn Θ der Winkel des Radiusvektors SE mit der Richtung nach dem Perihel SP genannt wird; folglich hat man

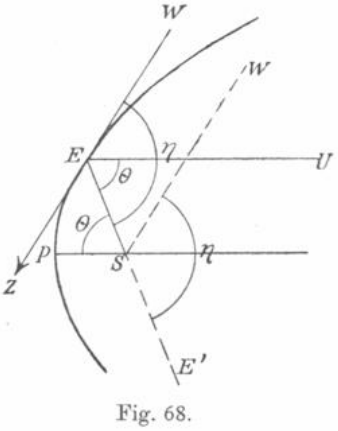

Fig. 68.

$$\Theta = 180^\circ - 2(\eta - \Theta)$$

oder

$$\Theta = 2\eta - 180^\circ.$$

Hat der Durchgang durchs Perihel schon stattgefunden (Fig. 69), so wird

$$\text{Winkel } SEW = UEZ = \eta$$

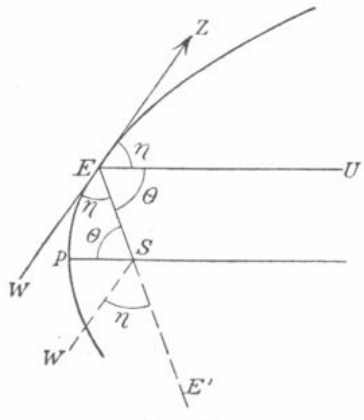

Fig. 69.

und daher

$$\Theta = 180^\circ - 2\eta.$$

Um daraus die Länge des Perihels π abzuleiten, haben wir zu beachten, ob der aufsteigende Knoten der Meteorbahn in E' (Radiationspunkt nördlich) oder in E (Radiationspunkt südlich) liegt. Im ersteren Falle wird

$\pi = \Omega + (180^\circ - \Theta)$, wenn der Perihelsdurchgang bevorsteht,

und

$\pi = \Omega - (180^\circ - \Theta)$, wenn er schon stattgefunden hat;

im letzteren Falle wird

$\pi = \Omega + \Theta$, wenn der Perihelsdurchgang bevorsteht,

und $\pi = \Omega - \Theta$, wenn er schon stattgefunden hat.

Da im ersteren Fall $\Omega = \odot$ und im letzteren $\Omega = 180^\circ + \odot$ ist, so folgt allgemein für alle vier Fälle

$$\pi = \odot + 2\eta. \qquad 21)$$

Die Periheldistanz q ergibt sich unmittelbar aus

$$R = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}\Theta^2},$$

da in obiger Ableitung $-\Theta$ bzw. $+\Theta$ die wahre Anomalie darstellt; wird der Wert von Θ eingetragen, so folgt:

$$q = R \sin \eta^2. \qquad 22)$$

Die Zeit des Periheldurchganges findet sich aus Θ mittels der Barkerschen Tafel, ist übrigens im vorliegenden Fall ohne praktische Bedeutung, da es kein Interesse bietet, sie gerade für denjenigen Teil des Stromes kennen zu lernen, der der Erde begegnete.

Inspiziert man die einfachen Formeln, welche die Bestimmung parabolischer Elemente von Meteorströmen vermitteln, so sieht man, daß sie sich leicht durch Tabulierung auflösen lassen. Solche Tafeln hat *Lehmann-Filhés* entworfen (»Die Bestimmung von Meteorbahnen«, Berlin 1883).

Wir gehen nun zur Bestimmung *elliptischer* Bahnen über. Die große Halbachse a muß dabei als von vornherein bekannt angenommen werden, d. h. sie muß aus der Umlaufszeit des Schwarms abgeleitet sein. Damit folgt dann die Geschwindigkeit v im Moment des Zusammentreffens mit der Erde aus

$$v^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) \qquad 23)$$

und das Geschwindigkeitsverhältnis der Erde und des Schwarms aus 16) (Seite 585):

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}R}{1 - \frac{R}{2a}}}. \qquad 24)$$

Weiter wird aus dem scheinbaren Radiationspunkt l', b' und der Länge des Apex L nach 12) (Seite 584) n und γ berechnet:

$$\begin{aligned} \sin n \sin \gamma &= \sin b' \\ \sin n \cos \gamma &= \cos b' \sin (l' - L) \\ \cos n &= \cos b' \cos (l' - L); \end{aligned} \qquad 25)$$

sodann der Abstand s des wahren Radiationspunktes vom Apex aus 15) (Seite 585):

$$\sin (s - n) = \frac{V}{v} \sin n; \qquad 26)$$

und endlich die Koordinaten l und b des wahren Radiationspunktes aus 14) (Seite 585):

$$\begin{aligned} \cos b \cos (l - L) &= \cos s \\ \cos b \sin (l - L) &= \sin s \cos \gamma \\ \sin b &= \sin s \sin \gamma. \end{aligned} \qquad 27)$$

Die Elemente Ω und i ergeben sich genau wie bei der Parabel aus

$$\begin{aligned} \Omega &= \odot && b \text{ positiv} \\ \Omega &= 180^\circ + \odot && b \text{ negativ} \\ \cos \eta &= \cos b \cos (\odot - l) && \\ \sin \eta \sin i &= \pm \sin b && \left\{ \begin{array}{l} + \text{ bei } b \text{ positiv} \\ - \text{ bei } b \text{ negativ} \end{array} \right. \\ \sin \eta \cos i &= - \cos b \sin (\odot - l), && \end{aligned} \qquad 28)$$

für die noch übrigen Elemente e und π aber müssen besondere Formeln aufgestellt werden. Wir verfahren am einfachsten nach den Vorschriften der Nr. 110 und müssen hierzu in erster Linie die Koordinaten des Schwarms und ihre Geschwindigkeiten im Moment des Zusammentreffens mit der Erde aufstellen. Die Koordinaten sind die der Erde, also:

$$x = - R \cos \odot, \quad y = - R \sin \odot, \quad z = 0.$$

Die Geschwindigkeiten fanden wir Seite 584 zu:

$$\frac{dx}{dt} = - v \cos b \cos l, \qquad \frac{dy}{dt} = - v \cos b \sin l, \qquad \frac{dz}{dt} = - v \sin b,$$

also wird nach den Formeln (c) (Seite 344), wenn mit p der Parameter bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} k\sqrt{p} \cos i &= Rv \cos b \sin (l - \odot) \\ k\sqrt{p} \cos \Omega \sin i &= Rv \sin b \cos \odot \\ k\sqrt{p} \sin \Omega \sin i &= Rv \sin b \sin \odot \end{aligned} \qquad 29)$$

oder wenn $\Omega = \odot$ bez. $= 180 + \odot$ eingetragen wird:

$$\begin{aligned} k\sqrt{p} \cos i &= Rv \cos b \sin (l - \odot) \\ k\sqrt{p} \sin i &= \pm Rv \sin b \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ für } b \text{ positiv} \\ - \text{ für } b \text{ negativ.} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt für i derselbe Wert wie oben, außerdem aber noch $p = a\cos\varphi^2$, wo $e = \sin\varphi$. Die Formel für φ wird:

$$\cos\varphi = \frac{Rv\cos b\sin(l-\odot)}{k\sqrt{a}\cos i} = \pm\frac{Rv\sin b}{k\sqrt{a}\sin i}. \qquad 30)$$

Für die Periheldistanz erhält man:

$$q = a(1-e). \qquad 31)$$

Ist Θ die wahre Anomalie, so wird die Länge des Perihels π:

$$\pi = \Omega + 180^\circ - \Theta \text{ bez. } \pi = \Omega - \Theta,$$

also in jedem Fall

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta, \qquad 32)$$

so daß es nur mehr der Berechnung der wahren Anomalie bedarf. Hierzu bedienen wir uns der Gleichungen (Seite 346):

$$e\sin\Theta = \frac{\sqrt{p}}{kR}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

welche hier geben:

$$e\sin\Theta = \frac{\sqrt{p}}{kR}Rv\cos b\cos(l-\odot)$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

oder nach der ersten Gl. 29) und nach 28):

$$e\sin\Theta = \frac{p}{R}\cos i\,\mathrm{cotg}(l-\odot) = \frac{p}{R}\mathrm{cotg}\,\eta$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1,$$

so daß schließlich:

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\mathrm{cotg}\,\eta}{1-\frac{R}{p}}. \qquad 33)$$

Wir kommen endlich zu den geringen Modifikationen, welche die bisherigen Formeln erleiden, wenn es sich um eine *hyperbolische Bahn* handelt. Wie wir in Nr. 185 sehen werden, wird bei solchen Bahnen die Geschwindigkeit v durch Beobachtung ermittelt und die Gleichung

$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

kann also dazu dienen, die reelle Halbachse der Hyperbel abzuleiten; ist a der absolute Wert derselben, so folgt:

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\frac{v^2}{k^2} - \frac{2}{R}}. \qquad 34)$$

Den Parameter wird man aus den Gl. 29) erhalten, welche ergeben

$$\sqrt{p} = \frac{Rv\cos b\sin(l-\odot)}{k\cos i} = \pm\frac{Rv\sin b}{k\sin i} \qquad 35)$$

(+ für b positiv, − für b negativ)

und hierauf die Exzentrizität e aus

$$e = \sqrt{1+\frac{p}{a}}. \qquad 36)$$

Da die Länge des Perihels auch hier

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta \qquad 37)$$

sein wird, so braucht man nur noch die wahre Anomalie, welche durch die ungeänderte Gleichung 33) geboten wird. Die Durchgangszeit durchs Perihel kann man durch

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \\ &\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-T) = e\operatorname{tg}F - \log\operatorname{nat}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}F+45^\circ\right) \end{aligned}\right\} \qquad 38)$$

finden, falls sie von Interesse sein sollte. Für Knoten und Neigung gelten dieselben Formeln, wie bei der Parabel und der Ellipse.

184. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Bahnen von Meteorströmen.

I. Für die Zeit des Sternschnuppenfalles entnehme man die Sonnenlänge $\odot$ und den Radiusvektor R dem Jahrbuch und berechne die Länge des Apex L aus:

$$L = \odot - 90^\circ + 57.'6\sin(\odot-\omega)$$
$$\omega = 101^\circ 13.'2 + 1.'028\,(t-1900).$$

II. Sind l', b' die Koordinaten des scheinbaren, l, b jene des wahren Radiationspunktes, so ergeben sich letztere aus:

$$\begin{aligned} \sin n\sin\gamma &= \sin b' \\ \sin n\cos\gamma &= \cos b'\sin(l'-L) \\ \cos n &= \cos b'\cos(l'-L) \end{aligned}$$

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}R}{1-\frac{R}{2a}}}$$

$$\sin(s-n) = \frac{V}{v}\sin n$$

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-L) &= \cos s \\ \cos b\sin(l-L) &= \sin s\cos\gamma \\ \sin b &= \sin s\sin\gamma \end{aligned} \qquad \sin s \text{ positiv.}$$

Bei der Parabel wird $\frac{1}{a} = 0$; in der Ellipse wird a durch $a = U^{\frac{2}{3}}$ gefunden,

wo U die Umlaufszeit des Schwarmes in Jahren ist; bei der Hyperbel muß a aus

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{v^2}{k^2}$$

abgeleitet werden.

III.

b positiv	b negativ
$\Omega = \odot$	$\Omega = 180^\circ + \odot$
$\sin\eta \sin i = \sin b$	$\sin\eta \sin i = -\sin b$
$\sin\eta \cos i = \cos b \sin(l - \odot)$	$\sin\eta \cos i = \cos b \sin(l - \odot)$
$\cos\eta = \cos b \cos(l - \odot)$	$\cos\eta = \cos b \cos(l - \odot)$.

IV. A) Parabel:

$$\pi = \odot + 2\eta, \qquad q = R \sin\eta^2.$$

B) Ellipse:

$$\frac{v}{k} = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}}$$

$$\cos\varphi = \frac{R \cos b \sin(l - \odot)}{\sqrt{a} \cos i} \frac{v}{k} = \pm \frac{R \sin b}{\sqrt{a} \sin i} \frac{v}{k}$$

(+ für b positiv, − für b negativ)

$$e = \sin\varphi, \qquad p = a\cos\varphi^2, \qquad q = a(1 - e)$$

$$\sin\varphi \sin\Theta = \frac{p}{R} \operatorname{cotg}\eta$$

$$\sin\varphi \cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta.$$

C) Hyperbel: a absoluter Wert der reellen Halbachse

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\frac{v^2}{k^2} - \frac{2}{R}}$$

$$\sqrt{p} = \pm \frac{R \sin b}{\sin i} \frac{v}{k}$$

+ für b positiv, − für b negativ

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mathrm{a}}} \qquad q = \mathrm{a}(e - 1)$$

$$e \sin\Theta = \frac{p}{R} \operatorname{cotg}\eta$$

$$e \cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$

$$\frac{k\,\mathrm{Mod}}{\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}(t - T) = e\,\mathrm{Mod}\operatorname{tg}F - \log\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}F + 45^\circ).$$

185. Bahnbestimmung von Feuerkugeln. Bei sehr hellen Meteoren, die einen bedeutenden Weg in der Atmosphäre zurücklegen und von einem großen Ländergebiet aus gesehen werden, können zwei oder mehrere Punkte ihrer scheinbaren Bahn nach Zeit und Ort festgelegt und zur Bestimmung ihrer wahren um die Sonne beschriebenen Bahn herangezogen werden. Die sich hier darbietende Aufgabe läßt sich auf die im vorigen behandelte zurückführen, wenn man zuerst die in der Atmosphäre beschriebene Bahn, die als gerade Linie betrachtet werden kann, bestimmt und damit den Radiationspunkt des Meteors und seine wahre Geschwindigkeit aufsucht. Ersterer ist der Schnitt der genannten Geraden mit der Sphäre und die letztere ergibt sich durch Division des vom Meteor in der Atmospäre zurückgelegten Weges durch die Zeit. Da hierdurch die Daten des in Nr. 183 behandelten Problems gewonnen sind, kann die *kosmische* Bahnbestimmung als erledigt gelten. Dagegen ist noch zu zeigen, in welcher Weise die *atmosphärische* Bahn am sichersten festgelegt wird. Die besonderen Verhältnisse, unter denen hier die Beobachtungen zustande kommen, schließen die Aufstellung eines allgemeinen Typus aus und es kann daher hier nur *ein* Verfahren auseinandergesetzt werden, das in den häufigsten Fällen zum Ziel führen wird. Es ist von *Galle* in den Astr. Nachrichten Band 83 Seite 321 angegeben und bereits vielfach mit Erfolg angewendet worden.

Da der *Endpunkt* des Meteors in der Regel am sichersten und häufigsten beobachtet ist, empfiehlt es sich, seine geographische Lage und Höhe zuerst zu bestimmen und zur Grundlage des Ganzen zu machen. Die Beobachtung irgend eines anderen Punktes der Bahn von einem beliebigen Ort aus gibt dann die scheinbare Bahn für diesen Ort und der gemeinsame Schnitt aller auf diese Weise erhaltenen scheinbaren Bahnen ist der Radiationspunkt. Ist so die Richtung der Bahn festgelegt, dann werden die in der Regel spärlichen und unsicheren Beobachtungen des *Anfangspunktes* zur Fixierung desselben auf der Geraden benutzt und damit schließlich die Länge der atmosphärischen Bahn und die Geschwindigkeit abgeleitet.

Die *geographische Lage des Endpunktes* des Meteors wird entweder durch Ermittlung des Ortes bekannt, wo es im Zenith zersprang oder sie ist durch die Auffindung der herabgefallenen Meteoriten direkt gegeben oder endlich, wenn keiner dieser Fälle zutrifft, sie wird durch die beobachteten Azimute ermittelt. Nur im letzten Falle ist ein rechnerisches Verfahren notwendig, das wir unter der Annahme ableiten, daß eine größere Zahl von Beobachtungen als zwei vorliegt, so daß eine Ausgleichung stattfinden muß. Die beobachteten Azimutlinien schneiden sich wegen der hier häufig nicht unbeträchtlichen Beobachtungsfehler nicht in einem Punkte, sondern alle Schnittpunkte je zweier füllen einen Bereich aus und man muß sich entscheiden, welche Stelle desselben man als die plausibelste für die Lage des Endpunktes betrachten will. Wir wollen jene wählen, für welche die Summe der Quadrate der sphärischen Lote auf die beobachteten Azimutlinien ein Minimum wird. Der Ausdruck für das genannte Lot

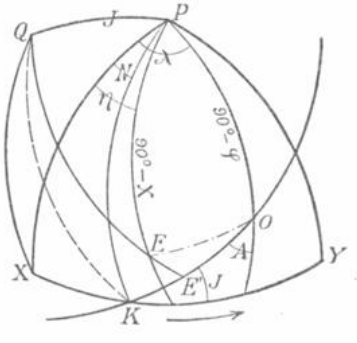

Fig. 70.

kann leicht aufgestellt werden, wenn man für die Oberfläche der Erde jene Kugel substituiert, die sich dem betreffenden Ländergebiet möglichst eng anschmiegt. Es sei XY die Äquatorebene, P der Pol dieser Kugel, PX der Anfangsmeridian, von dem aus die geographischen Längen nach Osten positiv gezählt werden; O sei der Ort, in welchem das Azimut A des Endpunktes beobachtet wurde (positiv vom südlichen Teil des Meridians nach Westen zu gerechnet) und habe die geographischen Koordinaten λ und φ; die beobachtete Azimutallinie OK habe zum Pol den Punkt Q, ihre Neigung gegen den Äquator sei J und die Länge ihres Knotens K auf ihm sei N; endlich seien η und χ die gesuchten Koordinaten des plausibelsten Ortes E des Endpunktes. Da mit diesen Bezeichnungen die Richtungskosinus von E im genannten Koordinatensystem

$$\cos\chi\cos\eta, \qquad \cos\chi\sin\eta, \qquad \sin\chi,$$

und ebenso jene von Q

$$\sin N\sin J, \qquad -\cos N\sin J, \qquad \cos J$$

werden, so hat man unmittelbar für das gesuchte Lot $EE' = \varepsilon = 90^\circ - QE$ den Ausdruck:

$$\sin\varepsilon = \sin N\sin J\cdot\cos\chi\cos\eta - \cos N\sin J\cdot\cos\chi\sin\eta + \cos J\cdot\sin\chi.$$

Die ersten Faktoren der Glieder rechts sind durch die Beobachtung des Azimutes A m Orte O gegeben, denn man hat (Dreieck POK)

$$\begin{aligned} \sin J\sin(\lambda - N) &= \sin A\sin\varphi \\ \sin J\cos(\lambda - N) &= \cos A \\ \cos J &= \sin A\cos\varphi; \end{aligned} \qquad 1)$$

die zweiten Faktoren sind die gesuchten Unbekannten, die man durch

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{cotg}\chi\cos\eta \\ y &= \operatorname{cotg}\chi\sin\eta \end{aligned} \qquad 2)$$

auf zwei reduzieren kann. Wird noch

$$\begin{aligned} a &= \sin N\sin J \\ b &= -\cos N\sin J \\ c &= \cos J \end{aligned} \qquad 3)$$

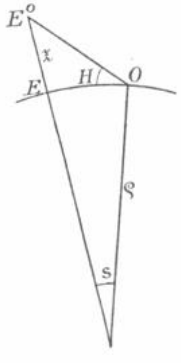

Fig. 71.

gesetzt, so hat man die Gleichung:

$$ax + by + c = \delta. \qquad 4)$$

Jedes beobachtete Azimut gibt eine solche Gleichung; aus der Gesamtheit aller ermittelt man nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung die Unbekannten x und y und hierauf durch 2) η und χ.

Die *lineare Höhe* z *des Endpunktes über der Erdoberfläche* ergibt sich aus den Messungen der Höhenwinkel. Ist im Orte O die Höhe H des Zerspringungspunktes E^0 über dem eben bestimmten Punkt E beobachtet, so wird im ebenen Dreieck zwischen dem Mittelpunkt der Erde C, E^0 und O, wenn ϱ der Radius der Erdkugel genannt wird:

$$\varrho\cos H = (\varrho + z)\cos(H + s).$$

Für den Winkel $s = EO$ folgt aus Fig. 70 sofort:

$$\cos s = \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \cos(\lambda - \eta)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}s^2 = \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \chi)^2 + \cos\varphi \cos\chi \sin\tfrac{1}{2}(\lambda - \eta)^2, \qquad 5)$$

so daß in

$$z = 2\varrho \sin\tfrac{1}{2}s \frac{\sin(H + \tfrac{1}{2}s)}{\cos(H + s)} \qquad 6)$$

rechts alles bekannt ist. Eine etwaige Verschiedenheit der Meereshöhen von O und E kann natürlich leicht berücksichtigt werden.

Ist nun die Lage von E^0 vollständig bekannt, so kann man den *scheinbaren Ort* am Himmel *berechnen*, den der Punkt von jedem Beobachtungsort aus eingenommen hat, und man wird bei Bestimmung der an diesem Ort gesehenen scheinbaren *Bahn* von diesem berechneten Ort Gebrauch machen gleichviel ob eine direkte Beobachtung desselben vorliegt oder nicht. Sind α, δ, Δ scheinbare Rektaszension, Deklination und Entfernung des Punktes E^0 von O aus, ferner Θ, ϱ, φ Sternzeit, Erdhalbmesser, geozentrische Breite für O; Θ^0, $\varrho^0 = \varrho + z$, φ^0 dieselben Größen für E^0, so hat man:

$$\begin{aligned} \Delta \cos\delta \cos(\alpha - \Theta) &= \varrho^0 \cos\varphi^0 \cos(\Theta^0 - \Theta) - \varrho \cos\varphi \\ \Delta \cos\delta \sin(\alpha - \Theta) &= \varrho^0 \cos\varphi^0 \sin(\Theta^0 - \Theta) \\ \Delta \sin\delta &= \varrho^0 \sin\varphi^0 - \varrho \sin\varphi . \end{aligned} \qquad 7)$$

Wird mit den hieraus folgenden α, δ eine am selben Orte gelungene Beobachtung α', δ' eines anderen Punktes der scheinbaren Bahn verbunden, so kann Knoten Γ und Neigung γ der letzteren gegen den Himmelsäquator aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma \sin(\alpha' - \Gamma) &= \operatorname{tg}\delta' \\ \operatorname{tg}\gamma \cos(\alpha' - \Gamma) &= \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\delta' \cos(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha - \alpha')} \end{aligned} \qquad 8)$$

entnommen werden (Nr. 69).

Die für alle Orte berechneten scheinbaren Bahnen müssen sich im *Radiationspunkt* schneiden. Da dies wieder nur genähert der Fall sein wird, hat man dieselbe Aufgabe zu lösen, wie oben bei Bestimmung von E. Die Bedingungsgleichungen werden hier ganz wie dort, wenn A und D Rektaszension und Deklination des Radiationspunktes genannt werden:

$$\sin\Gamma \sin\gamma \cdot \cos D \cos A - \cos\Gamma \sin\gamma \cdot \cos D \sin A + \cos\gamma \sin D = 0$$

oder wenn wieder

$$\begin{aligned} \sin\Gamma \sin\gamma &= a \\ -\cos\Gamma \sin\gamma &= b \\ \cos\gamma &= c \end{aligned} \qquad 9)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} D \cos A &= x \\ \operatorname{cotg} D \sin A &= y \end{aligned} \qquad 10)$$

gesetzt wird:

$$ax + by + c = \delta . \qquad 11)$$

Statt der Unbekannten x und y wird man unter Umständen zweckmäßiger tg A und tg D : cos A oder cotg A und tg D : sin A einführen, überhaupt immer obige Gleichung durch den größten der drei Faktoren cos D cos A, cos D sin A, sin D dividieren.

Nach Ermittelung des Radiationspunktes wird man zur Bestimmung der *linearen Länge der Bahn innerhalb der Atmosphäre* schreiten. Hiezu dienen die Beobachtungen des *Anfangs*punktes von den Orten O aus; nennt man dessen beobachtete Koordinaten α' und δ' (bezogen auf den Äquator) und wie oben α und δ die Koordinaten des Endpunktes, so wird zunächst der Bogen σ der in O gesehenen scheinbaren Bahn zwischen den Richtungen nach dem Anfangs- und Endpunkt gegeben sein durch:

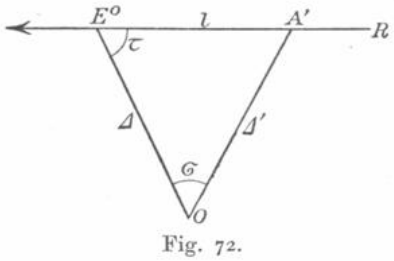

Fig. 72.

$$\cos\sigma = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos(\alpha - \alpha') \quad 12)$$

und sodann der Winkel τ bei E^0 im ebenen Dreieck OE^0A' durch

$$\cos\tau = -\sin D\sin\delta - \cos D\cos\delta\cos(A - \alpha), \quad 13)$$

da nämlich die Richtung E^0A' zusammenfällt mit der nach dem Radiationspunkt R, und die Richtung E^0O nach dem Gegenpunkte von $\alpha\delta$ zielt; außerdem ist bereits aus 7) die Entfernung $\Delta = OE^0$ bekannt, so daß die lineare Länge $l = A'E^0$ sich aus

$$l = \frac{\Delta\sin\sigma}{\sin(\sigma + \tau)} \quad 14)$$

ergibt. Auch die Entfernung $OA' = \Delta'$ kann durch

$$\Delta' = \frac{\Delta\sin\tau}{\sin(\sigma + \tau)} \quad 15)$$

berechnet werden. Die Division von l durch die zu seiner Beschreibung gebrauchte Zeit gibt die *Geschwindigkeit* des Meteors in der Atmosphäre.

Es kann schließlich von Interesse sein, die *Lage des Anfangspunktes* A' nach Länge λ', Breite φ' und Höhe x' über der Erdoberfläche zu erfahren. Hiezu berechnet man zuerst Azimut a und Höhe h des Radiationspunktes für den Ort E; da Rektaszension und Deklination A und D des ersteren und die Koordinaten Θ^0 und φ^0 des Ortes E bekannt sind, hat man:

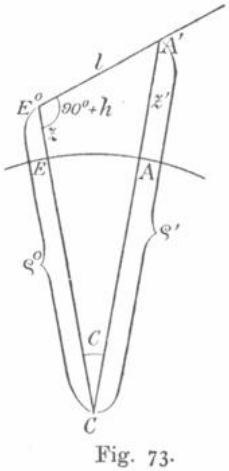

Fig. 73.

$$\begin{aligned}\cos h\sin a &= \cos D\sin(\Theta^0 - A)\\ \cos h\cos a &= -\cos\varphi^0\sin D + \sin\varphi^0\cos D\cos(\Theta^0 - A)\\ \sin h &= \sin\varphi^0\sin D + \cos\varphi^0\cos D\cos(\Theta^0 - A).\end{aligned} \quad 16)$$

Verbindet man dann den Anfangspunkt A' und den Endpunkt E^0 durch gerade Linien mit dem Mittelpunkt C der Erde, welche die Erdoberfläche in A und E schneiden, so sind in dem ebenen Dreieck $CA'E^0$ die Seiten $CE^0 = \varrho^0$, $A'E^0 = l$ und der Winkel bei $E^0 = 90^0 + h$ bekannt; man bekommt also, wenn der Winkel bei C gleich C gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} C = \frac{l\cos h}{\varrho^0 + l\sin h} \quad 17)$$

und wenn $CA' = \varrho' = \varrho^0 + \zeta$ gesetzt wird:

$$\varrho' = \frac{l \cos h}{\sin C}$$

$$\varrho^0 = \frac{l \cos (h + C)}{\sin C}$$

also $$\zeta = \varrho' - \varrho^0 = \frac{l}{\sin C} (\cos h - \cos (h + C)) = \frac{l \sin (h + \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2} C}; \qquad 18)$$

schließlich ist:

$$x' = x + \zeta. \qquad 19$$

Zur Berechnung der geographischen Länge und Breite λ' und φ' von A dient am besten das sphärische Dreieck auf der Erdoberfläche zwischen dem Pol, dem Ort E und dem Ort A; dieses gibt, wenn λ^0, φ^0 die Koordinaten von E genannt werden:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda^0 - \lambda') \cos\varphi' &= \cos C \cos\varphi^0 + \sin C \sin\varphi^0 \cos a \\ \sin(\lambda^0 - \lambda') \cos\varphi' &= \sin C \sin a \qquad 20) \\ \sin\varphi' &= \cos C \sin\varphi^0 - \sin C \cos\varphi^0 \cos a. \end{aligned}$$

Das Azimut a ist durch 16) bekannt geworden.

Die hier entwickelten Formeln haben neben dem Vorzug, genau den eigentümlichen Beobachtungsverhältnissen angepaßt zu sein, auch den, an jeder Stelle den plausibelsten Wert der Unbekannten und seine Unsicherheit nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung aufstellen zu können, was gerade beim vorliegenden Problem von nicht geringer Bedeutung ist. Liegen die Beobachtungen von nur zwei Stationen vor, etwa die in Sternkarten eingezeichneten scheinbaren Bahnen, so ergibt sich die atmosphärische Bahn als Schnitt der beiden Ebenen, die durch die Stationen und die zugehörigen scheinbaren Bahnen gelegt werden. Die Gleichung für die Schnittgerade erhält man dann einfacher, als nach dem obigen Verfahren, allein bei mehreren Beobachtungen kehrt sich das Verhältnis gerade um. Wir gehen daher auf dieses Verfahren nicht näher ein und verweisen auf die Abhandlungen von *Bessel* (Astr. Nachr. Band 16, S. 321; Ges. Abh. Band III, S. 328) und *H. Rosenberger* (Astr. Nachr. Bd. 167, S. 49).

Abschnitt XXXVI.

Bahnbestimmung der Satelliten.

186. Einleitung. Die Satelliten der großen Planeten bewegen sich um diese unter dem Einflusse einer anziehenden Hauptkraft, deren Betrag für die Einheit der Entfernung auf k^2M anzusetzen ist, wo k die Gaußsche Konstante und M die Masse des Planeten in Teilen der Sonnenmasse bedeutet; außerdem wirken als störende Kräfte solche, die von den Massen der Sonne und der übrigen Planeten herrühren, und solche, die durch die Abweichung der Figur der Hauptkörper von der Kugelgestalt bedingt sind. Sieht man von diesen störenden Kräften vorläufig ab, so resultiert durch die Hauptkraft eine Bewegung der Satelliten um ihre Hauptkörper nach den Keplerschen Gesetzen d. h. nach den Formeln:

$$M_0 + \mu t = E - e \sin E$$
$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$$
$$r \cos v = a (\cos E - e)$$
$$\text{Länge in der Bahn } u = \pi + v,$$

welche die Bewegung in der Bahnebene ergeben; rechnet man hiezu die beiden Stücke, welche die Lage der Bahnebene im Raum bestimmen, nämlich die Länge des Knotens N und die Neigung J, so kommt man auf *sieben* Elemente, welche zur Beschreibung der Bewegung eines Satelliten nötig sind, nämlich

$$M_0, \quad \mu, \quad a, \quad e, \quad \pi, \quad N, \quad J.$$

Statt der mittleren Bewegung μ kann man auch die Umlaufszeit einführen. Zwischen den Elementen a und μ besteht zwar auch hier die Beziehung

$$\mu^2 a^3 = k^2 (M + m)$$

oder wenn die Satellitenmasse vernachlässigt wird:

$$\mu = \frac{k\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

allein dieselbe kann hier nicht zur Verminderung der Zahl der Elemente dienen, es sei denn, daß man die Masse M als bekannt voraussetzt oder *sie* als Element einführt, womit die Zahl wieder auf sieben steigt. Es ist Aufgabe der Bahnbestimmung, diese sieben Elemente aus den Beobachtungen abzuleiten. Man könnte dabei so vorgehen, wie bei den Planetenbahnen um die Sonne, indem man aus sieben Beobachtungsdaten die Elemente darstellt; dieser Weg würde aber hier wegen der Unsicherheit der Beobachtungen zu ziemlich unbrauchbaren Resultaten führen. Man macht daher von vornherein von den besonderen Verhältnissen Gebrauch, die bei Satellitenbahnen vorliegen; zunächst von dem Umstande, daß die Umlaufszeiten direkt aus den Beobachtungen hervorgehen, wenn man die Zeitunterschiede gleicher Stellungen des Satelliten zum Hauptkörper unter Berücksichtigung der geozentrischen

Bewegung des letzteren bildet; sodann davon, daß die Bahnen fast aller Satelliten so nahe Kreisbahnen sind, daß diese als erste Näherungen aufgefaßt werden dürfen. Das Geschäft der eigentlichen Bahnbestimmung fällt infolgedessen auf die *Bahnverbesserung*, sobald Kreisbahnelemente vorliegen. Die hier zu lösende Aufgabe wird also eine doppelte sein: 1. Ableitung eines Verfahrens, durch welches Kreisbahnen erlangt werden, 2. Ableitung der Formeln, aus welchen die von den Beobachtungen erheischten Verbesserungen hervorgehen. Beide Probleme haben wir im Prinzip schon bei den Planetenbahnen gelöst und es wird hier also nur darauf ankommen, die früheren Entwicklungen den hier vorliegenden Verhältnissen anzupassen. Es versteht sich von selbst, daß wenn bereits elliptische Elemente vorliegen, das Verbesserungsverfahren auf diese anzuwenden ist.

187. Bestimmung der Kreisbahn eines Satelliten.*) Wird die Umlaufszeit als bekannt vorausgesetzt, so bleiben nach Ausscheidung der Elemente e und π vier Elemente M_0, a, N, J zu bestimmen übrig. Es sind also vier Beobachtungsdaten nötig. Als solche nehmen wir an die von der Erde aus gemessenen Positionswinkel und Distanzen des Satelliten in bezug auf das Zentrum des Hauptkörpers für zwei Beobachtungszeiten. Bekannt sind ferner die geozentrischen Koordinaten des Hauptkörpers für dieselben Zeiten, bezogen auf das Koordinatensystem des Äquators, das wir hier zugrunde legen wollen. Die Daten zusammengestellt bezeichnen wir in folgender Weise:

$$\begin{array}{cccccc} t & s & p & A & D & \Delta \\ t' & s' & p' & A' & D' & \Delta'. \end{array}$$

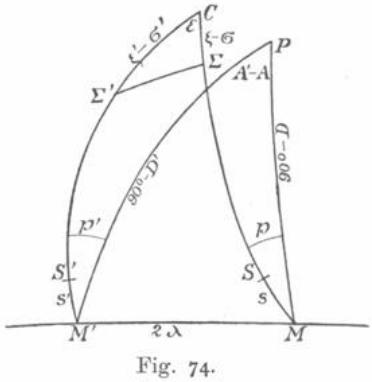

Fig. 74.

Verbindet man die Planetenörter M und M' einerseits mit dem Pol P des Äquators, andererseits mit den zugehörigen Satellitenörtern S und S', und nennt im Dreieck $MM'P$ die Seite $MM' = 2\lambda$ und die Winkel bei M und M' γ und γ', ferner im Dreieck $MM'C$ die Seiten $MC = \zeta$ und $M'C = \zeta'$ und den Winkel bei C: ε, so führt die Durchrechnung folgender Formelgruppen zur Kenntnis der letztgenannten Größen ζ, ζ' und ε:

$$\begin{aligned}
&\sin\lambda \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') = \cos\tfrac{1}{2}(A' - A) \sin\tfrac{1}{2}(D - D')\\
&\sin\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') = \sin\tfrac{1}{2}(A' - A) \cos\tfrac{1}{2}(D + D')\\
&\cos\lambda \sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') = \cos\tfrac{1}{2}(A' - A) \cos\tfrac{1}{2}(D - D')\\
&\cos\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') = \sin\tfrac{1}{2}(A' - A) \sin\tfrac{1}{2}(D + D')\\
&\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta) = \sin\lambda \cos\left(\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') - \tfrac{1}{2}(p' + p)\right)\\
&\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta) = \cos\lambda \cos\left(\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') + \tfrac{1}{2}(p' - p)\right)\\
&\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \sin\lambda \sin\left(\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') - \tfrac{1}{2}(p' + p)\right)\\
&\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \cos\lambda \sin\left(\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') + \tfrac{1}{2}(p' - p)\right).
\end{aligned} \qquad 1)$$

*) *A. Marth*, Researches on Satellites, Astr. Nachr. Band 44, Seite 134.

In dem ebenen Dreieck Erde-Planet-Satellit nennen wir die Seite $PS = a =$ Radius der Kreisbahn und den Winkel, den dieser mit der Richtung Planet-Erde bildet, $180^\circ - \sigma$, dann ist:

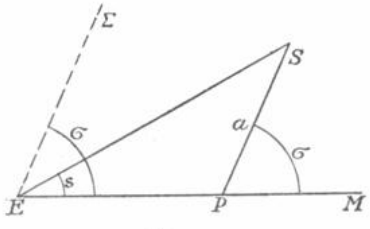

Fig. 75.

$$\left.\begin{aligned} \sin(\sigma - s) &= \frac{\Delta}{a}\sin s \\ \text{und ebenso} \quad \sin(\sigma' - s') &= \frac{\Delta'}{a}\sin s'. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Eine durch die Erde zur Richtung PS gezogene Parallele $E\Sigma$ trifft die geozentrische Sphäre in einem Punkte Σ des größten Kreises MSC und zwar im Abstande $M\Sigma = \sigma$, so daß $\Sigma C = \zeta - \sigma$ wird. Macht man dieselbe Konstruktion mit dem zweiten Ort, so entsteht das sphärische Dreieck $C\Sigma\Sigma'$, in welchem die Seite $\Sigma\Sigma'$ offenbar identisch mit der planetozentrischen Bewegung des Satelliten in der Zwischenzeit $t' - t$ ist. Hat man also die mittlere tägliche Bewegung μ aus der Umlaufszeit U durch

$$\mu = \frac{360^\circ}{U}$$

berechnet, so wird

$$\Sigma\Sigma' = \mu(t' - t)$$

als bekannte Größe angenommen werden dürfen. Das Dreieck $\Sigma\Sigma' C$ ergibt nun die Gleichung

$$\cos\mu(t' - t) = \cos(\zeta - \sigma)\cos(\zeta' - \sigma') + \sin(\zeta - \sigma)\sin(\zeta' - \sigma')\cos\varepsilon \qquad 3)$$

mit den einzigen unbekannten Größen σ und σ', die ihrerseits durch 2) ausschließlich von der Unbekannten a abhängig sind. Man hat in 2) und 3) also die Mittel, a durch sukzessive Näherung zu bestimmen. Mit einem Werte von a berechnet man aus 2) σ und σ' und untersucht, ob durch dieselben die Gl. 3) befriedigt wird. Durch geeignete Variation von a unter Anwendung der regula falsi kommt man rasch zum Ziel. Hiebei ist noch folgendes zu beachten. Die Winkel σ und σ' kann man zwischen 0° und 180° annehmen, allein da sie in 2) durch ihre Sinus bestimmt sind, bleibt der Quadrant, in dem sie liegen, unbestimmt. Diese Zweideutigkeit liegt aber in der Natur der Sache und kann auch ohne sonstige Wahrnehmungen über die Bewegungsrichtung oder Stellung der Satelliten nicht beseitigt werden. Denn die Beobachtungen der Winkel s und s' allein lassen nicht entscheiden, ob der Satellit in S oder in S_1, in S' oder in S_1' sich befindet, d. h. ob er sich in der Richtung SS' direkt oder in der Richtung S_1S_1' retrograd um den Planeten bewegt. Beide Hypothesen sind also zu verfolgen, bis anderweitig die Bahnlage festgelegt ist. Hat man einmal entscheiden können, daß die Neigung der Bahnebene kleiner als 90° ist, d. h. daß die Bewegung eine direkte ist, so wird östlich vom Planeten σ aus dem

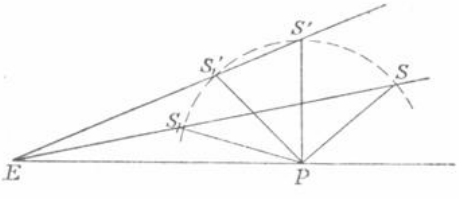

Fig. 76.

ersten in den zweiten Quadranten übergehen, westlich dagegen vom zweiten in den ersten.

Zur Ermittelung der weiteren Elemente geht man zum planetozentrischen Standpunkt über und bestimmt zunächst die planetozentrischen Äquatorealkoordinaten a, d bez. a', d' des Satelliten. Das Dreieck zwischen dem Pol, dem Gegenpunkt der Erde M und dem Satelliten S gibt:

$$\begin{aligned}
\cos d \sin(a - A) &= \sin p \sin\sigma \\
\cos d \cos(a - A) &= \cos\sigma \cos D - \sin\sigma \sin D \cos p \\
\sin d &= \cos\sigma \sin D + \sin\sigma \cos D \cos p \\
\cos d' \sin(a' - A') &= \sin p' \sin\sigma' \\
\cos d' \cos(a' - A') &= \cos\sigma' \cos D' - \sin\sigma' \sin D' \cos p' \\
\sin d' &= \cos\sigma' \sin D' + \sin\sigma' \cos D' \cos p'.
\end{aligned} \tag{4}$$

Hierauf ergeben sich Knoten und Neigung durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} J \sin(a - N) &= \operatorname{tg} d \\
\operatorname{tg} J \sin(a' - N) &= \operatorname{tg} d',
\end{aligned}$$

die man wie in Nr. 69 in der Form

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} J \cos(a - N) &= \frac{\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d \cos(a' - a)}{\sin(a' - a)} \\
\operatorname{tg} J \sin(a - N) &= \operatorname{tg} d
\end{aligned} \tag{5}$$

schreiben wird. Schließlich werden die Argumente der Breite u und u' gefunden aus:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} u &= \operatorname{tg}(a - N) \sec J \\
\operatorname{tg} u' &= \operatorname{tg}(a' - N) \sec J
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{Kontrolle} \quad u' - u = \mu (t' - t).$$

Hiermit sind die vier Elemente der Kreisbahn ermittelt. Selbstverständlich hängt der Erfolg der Methode im hohen Grade von der Genauigkeit der beiden benutzten Beobachtungen ab. Es wird sich daher in Fällen, wo man über eine größere Anzahl von Beobachtungen verfügt, die in guter Verteilung *einem* Umlauf angehören, ein *graphisches Verfahren* empfehlen, indem man die scheinbare (an die Sphäre projizierte) Bahnellipse durch die aufgezeichneten Beobachtungspunkte hindurchlegt und aus ihr die Elemente ableitet.

Es seien α und β die große und die kleine Halbachse der Projektionsellipse, p_0 der Positionswinkel der ersteren, ferner nach wie vor A, D die geozentrische Rektaszension und Deklination des Planeten. Wird durch die Erde, den Planeten und den Pol der Bahnebene des Satelliten eine Ebene gelegt, so schneidet diese die wahre Bahn nach dem Kreishalbmesser $a = \alpha$, dessen Projektion die kleine Halbachse β ist, und der von beiden eingeschlossene Winkel ist i, die Neigung der wahren Bahn gegen die Projektionsebene. Man hat also

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{7}$$

Konstruiert man ferner das sphärische Dreieck zwischen dem geozentrischen Ort des Planeten M, dem Pol P des Erdäquators und dem Pol der Satellitenbahn P', so wird,

da M der Pol der Projektionsebene ist, $MP' = i$, und da in MP' die kleine Achse β liegt, so wird der Winkel bei M gleich $90^\circ - p_0$; ferner ist, wenn wie früher N und J Knoten und Neigung der Satellitenbahn gegen den Erdäquator genannt werden, $PP' = J$, $PM = 90^\circ - D$ und der Winkel bei P gleich $90^\circ + A - N$. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin J \sin(N - A) &= \cos i \cos D - \sin i \sin D \sin p_0 \\ \sin J \cos(N - A) &= \sin i \cos p_0 \\ \cos J &= \cos i \sin D + \sin i \cos D \sin p_0 \end{aligned} \qquad 8)$$

und daraus N und J; die zwei aus 7) sich ergebenden Werte von i liefern zwei Wertepaare N und J, von denen das eine der direkten, das andere der retrograden Bewegung entspricht. Welches das richtige ist, kann nur durch hinzutretende Erscheinungen entschieden werden. Da die große Achse der Projektionsellipse gleich dem Radius der Kreisbahn ist und die Umlaufszeit direkt aus den Beobachtungen erschlossen wird, so fehlt als letztes Element nur noch der Ort in der Bahn für eine bestimmte Zeitepoche. Man erhält denselben am bequemsten mittels Durchrechnung der Formelgruppen 1) und 2) der nächsten Nr., auf die wir hier vorgreifend verweisen müssen.

188. Darstellung der beobachteten Koordinaten durch die Elemente. Um die Unterschiede der Beobachtung von der Rechnung bilden zu können, die für das Verbesserungsverfahren gebraucht werden, sowie um die Grundlagen für die Bildung der ebenfalls hierzu notwendigen Differenzialkoeffizienten der Koordinaten nach den Elementen zu erhalten, muß gezeigt werden, in welchem Zusammenhange die Stücke der Beobachtung mit den Elementen der planetozentrischen Bewegung stehen.

Wir beschreiben um das Zentrum des Planeten eine Kugel und zeichnen auf ihr den größten Kreis mit dem Pole P, der durch eine Parallelebene zum Erdäquator ausgeschnitten wird. Wir wählen diese Ebene als Fundamentalebene, weil sich auf sie die Messungen beziehen; der Übergang auf eine andere Fundamentalebene, sei es Ekliptik oder Planetenäquator, kann immer leicht durch Auflösung des von den drei in Betracht kommenden größten Kreisen gebildeten sphärischen Dreieckes ausgeführt werden. Wir ziehen ferner den größten Kreis, der durch die Ebene der Satellitenbahn ausgeschnitten wird und bestimmen dessen Lage durch die Länge des aufsteigenden Knotens N und die Neigung J; sein Pol P' hat dann die Rektaszension $N - 90^\circ$ und die Deklination $90^\circ - J$. Endlich verlängern wir die Verbindungslinie der Erde mit dem Planeten über letzteren hinaus und nennen den Schnittpunkt mit der Sphäre Z; die Koordinaten desselben, die wir mit A und D bezeichnen wollen, sind natürlich identisch mit den geozentrischen Koordinaten des Planeten. Aus dem sphärischen Dreieck $PP'Z$, in welchem $PP' = J$, $PZ = 90^\circ - D$ und der Winkel bei P gleich $A - N + 90^\circ = 90^\circ - (N - A)$ sind, können dann der Positionswinkel K von P' in Z, sowie die Koordinaten von Z bezogen auf die Bahnebene des Satelliten abgeleitet werden; letztere bezeichnen wir mit U (vom Knoten aus gerechnet) und $-B$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos B \sin U &= \sin D \sin J - \cos D \cos J \sin(N - A) \\
\cos B \cos U &= \cos(N - A) \cos D \\
\cos B \sin K &= -\cos(N - A) \sin J \\
\cos B \cos K &= \cos J \cos D - \sin J \sin D \sin(N - A) \\
\sin B &= -\cos J \sin D - \sin J \cos D \sin(N - A).
\end{aligned} \qquad 1)$$

Ist ferner S die Projektion des Satelliten an die Sphäre, u seine Länge in der Bahn, gezählt vom Knoten aus, und σ der Winkel am Planeten zwischen den Richtungen nach Z und S, also der Bogen SZ, so wird im Dreieck $P'ZS$, da der Winkel bei $Z = p - K$ und der Winkel bei $P' = u - U$ ist:

$$\begin{aligned}
\sin\sigma \sin(p - K) &= \sin(u - U) \\
\sin\sigma \cos(p - K) &= \sin B \cos(u - U) \\
\cos\sigma &= \cos B \cos(u - U).
\end{aligned} \qquad 2)$$

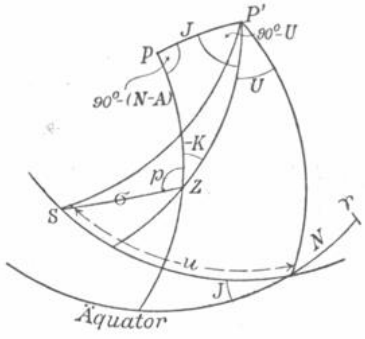

Fig. 77.

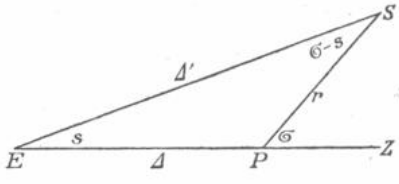

Fig. 78.

Betrachtet man jetzt das ebene Dreieck zwischen Erde E, Planet P und Satellit S, nennt dessen Seiten $EP = \Delta$, $ES = \Delta'$ und $PS = r$ und dessen Winkel bei E s und bei P $180^\circ - \sigma$, wo augenscheinlich σ der oben eingeführte Winkel ist und s die gemessene scheinbare Distanz des Satelliten vom Planeten, so erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
\Delta' \sin s &= r \sin\sigma \\
\Delta' \cos s &= r \cos\sigma + \Delta.
\end{aligned} \qquad 3)$$

Die mit r multiplizierten Gleichungen 2) führen also mit Benutzung von 3) auf:

$$\begin{aligned}
\Delta' \sin s \sin(p - K) &= r \sin(u - U) \\
\Delta' \sin s \cos(p - K) &= r \sin B \cos(u - U) \\
\Delta' \cos s &= r \cos B \cos(u - U) + \Delta.
\end{aligned} \qquad 4)$$

Hieraus kann man Δ', s und p berechnen, wenn durch die Elemente der Bahnlage B, U und K (Formeln 1) berechnet sind und die Bewegung des Satelliten in seiner Bahnebene (r und u) gegeben ist. In der Regel ist Δ' ohne Interesse; man wird dann 4) so schreiben:

$$\operatorname{tg} s \sin(p - K) = \frac{\frac{r}{\Delta} \sin(u - U)}{1 + \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U)}$$

$$\operatorname{tg} s \cos(p - K) = \frac{\frac{r}{\Delta} \sin B \cos(u - U)}{1 + \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U)}, \qquad 4^a)$$

oder wohl immer ausreichend:

$$\begin{aligned} s'' \sin(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin(u - U)\, \frac{1}{1+\zeta} \\ s'' \cos(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin B \cos(u - U)\, \frac{1}{1+\zeta} \\ \zeta &= \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U). \end{aligned} \qquad 5)$$

Da man die Gleichung hat:

$$\sin s = \frac{r}{\Delta} \sin(\sigma - s), \qquad 6)$$

so kann man p und σ auch aus 2) berechnen, worauf sich s durch indirekte Auflösung von 6) ergibt; wegen der Kleinheit von s ist dieser Weg durchaus bequem. In vielen im Sonnensystem vorliegenden Fällen kann man aber noch kürzer wie folgt verfahren. Aus 3) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} s = \frac{r \sin\sigma}{r\cos\sigma + \Delta} = \frac{r}{\Delta} \sin\sigma \left\{ 1 - \frac{r}{\Delta}\cos\sigma + \left(\frac{r}{\Delta}\right)^2 \cos\sigma^2 - + \cdots \right\};$$

da $\frac{r}{\Delta}$ meistens so klein ist, daß $\left(\frac{r}{\Delta}\right)^2$, ... vernachlässigt werden können, so folgt weiter

$$s'' = \frac{r}{\Delta} \sin\sigma \cdot 206\,264''.8,$$

und wenn der hieraus folgende Wert von $\sin\sigma$ in 2) eingetragen wird:

$$\begin{aligned} s'' \sin(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin(u - U) \\ s'' \cos(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin B \cos(u - U). \end{aligned} \qquad 7)$$

Diese Formeln in Verbindung mit 1) stellen die einfachsten Mittel dar, um s'' und p aus den Elementen des Satelliten zu berechnen.

Die bisherigen Formeln geben die rechtwinkligen Koordinaten $s'' \sin(p - K)$ und $s'' \cos(p - K)$ bezogen auf das System der Satellitenbahn. Hat man Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen gemessen, so kann es erwünscht sein, diese direkt durch die Elemente auszudrücken; man erreicht dies durch folgende von *Bessel**) aufgestellte Formeln, die zwar aus obigen abgeleitet werden könnten, ebenso einfach aber auch direkt gefunden werden.

Es seien A, D, Δ die geozentrische Rektaszension, Deklination und Entfernung des Planeten, s die scheinbare Distanz des Satelliten vom Planeten, p der Positionswinkel; ferner r und Δ' die linearen Entfernungen des Satelliten vom Planeten und von der Erde; endlich σ der planetozentrische Winkelabstand des Satelliten vom Gegenpunkt der Erde. Denkt man sich nun ein Koordinatensystem, dessen Z-Achse

---

*) *Bessel*, Ges. Abh. Band I, Seite 130.

durch die Richtung Erde-Planet gegeben ist, dessen Y-Achse in der Deklinationsebene des Planeten in der Richtung auf den Nordpol zu liegt und dessen X-Achse auf der Seite der wachsenden Rektaszensionen liegt, und projiziert auf die Achsen desselben das Dreieck Erde-Planet-Satellit, so erhält man zuerst

$$\begin{aligned} \Delta' \cos(X\Delta') &= \Delta \cos(X\Delta) + r \cos(Xr) \\ \Delta' \cos(Y\Delta') &= \Delta \cos(Y\Delta) + r \cos(Yr) \\ \Delta' \cos(Z\Delta') &= \Delta \cos(Z\Delta) + r \cos(Zr) \end{aligned}$$

und ferner, wenn man die Werte der Richtungskosinus:

$\cos(X\Delta') = \sin s \sin p$	$\cos(X\Delta) = 0$	$\cos(Xr) = \sin\sigma \sin p$
$\cos(Y\Delta') = \sin s \cos p$	$\cos(Y\Delta) = 0$	$\cos(Yr) = \sin\sigma \cos p$
$\cos(Z\Delta') = \cos s$	$\cos(Z\Delta) = 1$	$\cos(Zr) = \cos\sigma$

einträgt:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin s \sin p &= r \sin\sigma \sin p \\ \Delta' \sin s \cos p &= r \sin\sigma \cos p \\ \Delta' \cos s &= r \cos\sigma + \Delta. \end{aligned} \qquad 8)$$

Die Richtungscosinus $\cos(Xr)$, $\cos(Yr)$, $\cos(Zr)$ lassen sich aber sofort auch durch die Elemente ausdrücken. Zeichnet man auf der planetozentrischen Sphäre (Fig. 79) das eben benutzte Koordinatensystem XYZ, die Projektion der Bahnebene des Satelliten und ihren Pol P', zieht die Linien $P'X = f$, $P'Y = g$, $P'Z = h$ und nennt ihre Winkel mit $P'P$ beziehungsweise F, G, H, nennt ferner die Bahnelemente des Satelliten bezogen auf den Äquator N und J, so hat man einerseits aus den Dreiecken $PP'X$, $PP'Y$, $PP'Z$:

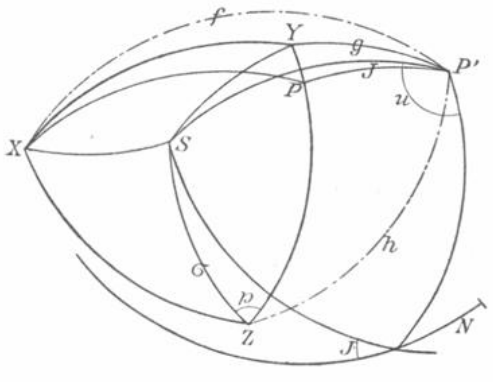

Fig. 79.

$$\begin{aligned} \sin f \sin F &= -\sin(A - N) \\ \sin f \cos F &= +\cos J \cos(A - N) \\ \cos f &= -\sin J \cos(A - N) \\ \sin g \sin G &= -\sin D \cos(A - N) \\ \sin g \cos G &= +\cos D \sin J - \sin D \cos J \sin(A - N) \\ \cos g &= +\cos D \cos J + \sin D \sin J \sin(A - N) \\ \sin h \sin H &= +\cos D \cos(A - N) \\ \sin h \cos H &= +\sin D \sin J + \cos D \cos J \sin(A - N) \\ \cos h &= +\sin D \cos J - \cos D \sin J \sin(A - N) \end{aligned} \qquad 9)$$

und andererseits, wenn mit u die Länge des Satelliten in seiner Bahn, gezählt vom Knoten ab, bezeichnet wird, aus den Dreiecken $P'XS$, $P'YS$, $P'ZS$

$$\begin{aligned} \cos(XS) = \cos(Xr) &= \sin f \sin(F + u) \\ \cos(YS) = \cos(Yr) &= \sin g \sin(G + u) \\ \cos(ZS) = \cos(Zr) &= \sin h \sin(H + u). \end{aligned}$$

Die gesuchten Beziehungen sind also:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin s \sin p &= r \sin f \sin(F+u) \\ \Delta' \sin s \cos p &= r \sin g \sin(G+u) \\ \Delta' \cos s &= r \sin h \sin(H+u) + \Delta. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{\Delta} \sin f \sin(F+u) \\ \eta &= \frac{r}{\Delta} \sin g \sin(G+u) \\ \zeta &= \frac{r}{\Delta} \sin h \sin(H+u), \end{aligned} \qquad 10)$$

so wird daraus

$$\Delta' \sin s \sin p = \xi \Delta, \quad \Delta' \sin s \cos p = \eta \Delta, \quad \Delta' \cos s = (1+\zeta)\Delta$$

und daher mit überall genügender Genauigkeit:

$$\begin{aligned} s'' \sin p &= \frac{\xi}{1+\zeta} 206\,264''.8 \\ s'' \cos p &= \frac{\eta}{1+\zeta} 206\,264''.8. \end{aligned} \qquad 11)$$

Sind die Größen f, g, h, F, G, H vermittels der Elemente N und J der Bahnlage aus den Formeln 9) berechnet und hat man r und u durch die Formeln der elliptischen Bewegung ermittelt:

$$\begin{aligned} M_0 + \mu t &= E - e \sin E \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u-\pi) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \qquad 12)$$

(π = Länge des Perihels, gezählt vom Knoten aus),

so geben die Formeln 10) und 11) Distanz und Positionswinkel des Satelliten gesehen von der Erde aus, beziehungsweise direkt die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz.

Wir wollen noch eine dritte Gruppe von Formeln ableiten, die in vielen Fällen bedeutende Vorteile gewähren. Wenn nämlich die Satellitenbahn nahe mit einer sonst bekannten Ebene zusammenfällt, z. B. mit dem Planetenäquator, so empfiehlt es sich, diese und nicht den Erdäquator als Fundamentalebene einzuführen.

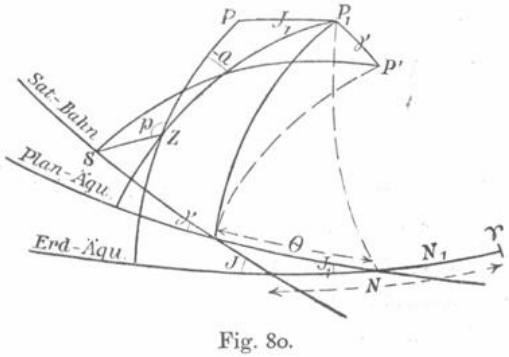

Fig. 80.

Es ergeben sich zunächst die auf den Planetenäquator bezogenen Koordinaten des Gegenpunktes Z, nämlich $\mathfrak{U}$ (vom Schnitt des Planetenäquators mit dem Erdäquator aus gezählt) und $-\mathfrak{B}$, sowie der Positionswinkel Q des Poles P_1 des Planetenäquators, aus der geozen-

trischen Rektaszension und Deklination A und D des Planeten durch dieselben Formeln wie oben, nur tritt hier N_1 und J_1, Knoten und Neigung des Planetenäquators gegen den Erdäquator, ein (Dreieck PP_1Z):

$$\begin{aligned}
\cos\mathfrak{B}\sin\mathfrak{U} &= \sin D\sin J_1 - \cos D\cos J_1\sin(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{U} &= \cos D\cos(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\sin Q &= -\sin J_1\cos(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\cos Q &= \cos J_1\cos D - \sin J_1\sin D\sin(N_1 - A)\\
\sin\mathfrak{B} &= -\cos J_1\sin D - \sin J_1\cos D\sin(N_1 - A).
\end{aligned} \tag{13}$$

Nennt man ferner Θ und γ Knoten und Neigung der Satellitenbahn gegen den Planetenäquator, $\mathfrak{u}$ die Länge des Satelliten in der Bahn und zählt Θ und $\mathfrak{u}$ vom Knoten des Planetenäquators mit dem Erdäquator ab, so ergibt sich gegen die vorhin gelöste Aufgabe nur der Unterschied, daß an Stelle des Erdäquators der Planetenäquator tritt und daß daher

für	zu setzen ist:
p	$p - Q$
J	γ
N	Θ
A	$\mathfrak{U}$
u	$\mathfrak{u} - \Theta$
D	$-\mathfrak{B}$.

Die Formeln werden dann:

$$\begin{aligned}
\Delta'\sin s\sin(p - Q) &= r\sin\mathfrak{f}\sin(\mathfrak{F} + \mathfrak{u} - \Theta)\\
\Delta'\sin s\cos(p - Q) &= r\sin\mathfrak{g}\sin(\mathfrak{G} + \mathfrak{u} - \Theta)\\
\Delta'\cos s &= r\sin\mathfrak{h}\sin(\mathfrak{H} + \mathfrak{u} - \Theta) + \Delta
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{F} &= -\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{F} &= +\cos\gamma\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{f} &= -\sin\gamma\cos(\mathfrak{U} - \Theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{g}\sin\mathfrak{G} &= \sin\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{G} &= \cos\mathfrak{B}\sin\gamma + \sin\mathfrak{B}\cos\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{g} &= \cos\mathfrak{B}\cos\gamma - \sin\mathfrak{B}\sin\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{h}\sin\mathfrak{H} &= \cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{H} &= -\sin\mathfrak{B}\sin\gamma + \cos\mathfrak{B}\cos\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{h} &= -\sin\mathfrak{B}\cos\gamma - \cos\mathfrak{B}\sin\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta).
\end{aligned}$$

Ist, wie hier vorausgesetzt werden soll, γ klein, so wird man diese strengen Formeln sofort durch viel einfachere ersetzen können. Es gibt nämlich die Auflösung obiger $\sin(\mathfrak{F} + \mathfrak{u} - \Theta)$, ... und Eintragung der Werte von $\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{F}$, ... zunächst noch streng:

$$\begin{aligned}
\Delta'\sin s\sin(p - Q) &= r\,(\sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta))\\
\Delta'\sin s\cos(p - Q) &= r\,(\sin\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\gamma\\
&\qquad - 2\sin\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)\\
\Delta'\cos s &= r\,(\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\gamma\\
&\qquad - 2\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2) + \Delta,
\end{aligned}$$

dann aber, wenn man die zweiten Potenzen der Neigungen vernachlässigt und zugleich Δ' eliminiert:

$$s'' \sin(p - Q) = \frac{r}{\Delta} 206\,264''.8 \sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) \frac{1}{1 + \zeta}$$

$$s'' \cos(p - Q) = \frac{r}{\Delta} 206\,264''.8 \,(\sin \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma) \frac{1}{1 + \zeta} \quad 15)$$

$$\zeta = \frac{r}{\Delta} (\cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma).$$

Dieser Formeln hat sich *H. Struve* bei den inneren Saturnssatelliten bedient.

Der Übergang von den Elementen Θ und γ auf die auf den Erdäquator bezüglichen N und J wird durch folgende aus dem Knotendreieck hervorgehende Formeln vermittelt:

$$\begin{aligned} \sin J \sin(N - N_1) &= \sin\gamma \sin\Theta \\ \sin J \cos(N - N_1) &= \cos\gamma \sin J_1 + \sin\gamma \cos J_1 \cos\Theta \\ \cos J &= \cos\gamma \cos J_1 - \sin\gamma \sin J_1 \cos\Theta. \end{aligned} \quad 16)$$

In den bisherigen Formeln ist der Radiusvektor r des Satelliten in astronomischen Einheiten auszudrücken. Es ist aber zweckmäßig und üblich, ihn in Einheiten der halben großen Achse der Bahnellipse des Satelliten einzuführen d. h. zu setzen

$$r = 1 - e \cos E;$$

es ist dann überall statt r zu schreiben: ra. Auch für a behält man nicht den Wert in astronomischen Einheiten, sondern führt die sogenannte mittlere Elongation des Satelliten ein, d. h. die größtmögliche Winkelentfernung a'', die er bei mittlerer Entfernung Δ_0 des Planeten von der Sonne, von der Sonne gesehen erreichen kann. Es wird dann

$$a = \Delta_0 \sin a'' = \frac{\Delta_0 a''}{206\,264''.8}$$

und statt $\frac{r}{\Delta}$ wird in unseren Formeln zu schreiben sein:

$$r \frac{\Delta_0}{\Delta} \frac{a''}{206\,264''.8}.$$

Die drei Formelgruppen 5), 11) und 15) nehmen damit folgende Gestalt an:

A) Koordinaten x, y, bezogen auf die Bahn des Satelliten:

$$\begin{aligned} x &= s'' \sin(p - K) = r\nu \sin(u - U) \\ y &= s'' \cos(p - K) = r\nu \cos(u - U) \sin B \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1 + \zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r \cos B \cos(u - U) \frac{1}{206\,264''.8}$$

K, U, B aus 1) (Seite 603).

B) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator:

$$x = s'' \sin p = r\nu \sin f \sin(F + u)$$
$$y = s'' \cos p = r\nu \sin g \sin(G + u)$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1+\zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r \sin h \sin(H+u) \frac{1}{206\,264''.8}$$

f, g, h, F, G, H aus 9) Seite 605.

C) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator (bei kleiner Neigung γ der Bahn gegen diesen):

$$x = s'' \sin(p - Q) = r\nu \sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U})$$
$$y = s'' \cos(p - Q) = r\nu (\sin \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma)$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1+\zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r (\cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma) \frac{1}{206\,264''.8}$$

Q, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ aus 13) Seite 607.

In A) und B) wird die Länge u des Satelliten in seiner Bahn vom aufsteigenden Knoten der Bahn auf dem Erdäquator gezählt; in C) wird die Länge $\mathfrak{u}$ vom aufsteigenden Knoten des Planetenäquators auf dem Erdäquator ab gezählt. Ist π die Länge des Perihels gezählt von denselben Punkten ab, so ist allgemein:

$$M = E - e \sin E, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u - \pi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E, \qquad r = 1 - e\cos E.$$

189. Die Differenzialformeln der Bahnverbesserung. Wir wollen jetzt die Differenzialquotienten der beobachteten Koordinaten nach den Bahnelementen aufstellen; wie mittels dieser die Bahnverbesserung durchgeführt wird, brauchen wir nach den Erläuterungen in Nr. 140 nicht mehr besonders auseinanderzusetzen.

Wir nehmen als beobachtete Koordinaten zuerst Positionswinkel und Distanz: p und s.*) Die Differenziation der Gleichungen 2) (Seite 603) gibt, wenn alle Größen variabel gesetzt werden:

$$\sin\sigma^2(dp - dK) = \sin B\,(du - dU) - \cos\sigma \sin(u - U)\,dB$$
$$\sin\sigma\, d\sigma \qquad\quad = \cos B \sin(u - U)\,(du - dU) + \sin B \cos(u - U)\,dB.$$

Ebenso gibt die Differenziation der Gl. 1) (Seite 603), wobei jedoch A und D als konstante Größen zu betrachten sind:

$$\cos B\,dU = -\sin B \cos U\,dJ - \cos K \cos D\,dN$$
$$\cos B\,dK = -\cos U\,dJ - \sin U \sin J\,dN$$
$$dB = \sin U\,dJ + \sin K \cos D\,dN$$
$$dB = \sin U\,dJ - \cos U \sin J\,dN.$$

Natürlich ergeben sich beide Gruppen von Gleichungen auch durch Anwendung der Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie auf die Dreiecke SZP' und $PP'Z$ (Fig. 77 Seite 603). Führt man die zweite Gruppe in die erste ein, so folgt nach einfacher Reduktion:

*) *Marth* a. a. O. S. 118.

$$\sin\sigma^2 dp = \sin B du - \cos B \sin(u-U)\sin u dJ + (\cos B\cos(u-U)\sin u\sin J - \sin D)dN$$
$$\sin\sigma d\sigma = \cos B\sin(u-U)du + \sin B\sin u dJ + (\cos K\sin(u-U) + \sin K\cos(u-U)\sin B)\cos D dN.$$

Hierin kann noch $\cos B\cos(u-U) = \cos\sigma$ und der Faktor von $\cos D dN$ gleich $\sin\sigma\sin p$ gesetzt werden. Differenziert man ferner die Gl. 6), wobei Δ konstant zu halten ist, so kommt:

$$\frac{ds}{\sin s} = \frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}\frac{dr}{r} + \frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}d\sigma,$$

woraus nach Eintragung von $d\sigma$ sich ds ergibt:

$$\frac{\sin\sigma}{\sin s}ds = \sin(\sigma-s)\frac{dr}{r} + \frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}(\cos B\sin(u-U)du + \sin B\sin u dJ + \sin\sigma\sin p\cos D dN).$$

Drückt man r in der oben (Seite 608) besprochenen Einheit aus, dann ist statt $\frac{dr}{r}$ hier einzutragen:

$$\frac{dr}{r} + \frac{da''}{a''};$$

wir setzen gleichzeitig:

$$\frac{\sin s}{\sin\sigma} = \frac{r}{\Delta}\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma} = r\frac{\Delta_0}{\Delta}\frac{a''}{206\,264''.8}\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}$$

und

$$\frac{\Delta_0}{\Delta}\frac{a''\sin(\sigma-s)}{206\,264''.8\sin\sigma} = \varkappa,$$

worauf die beiden Formeln für dp und ds in folgender Form erscheinen:

$$\sin s dp = r\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}du - r\varkappa\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u dJ + r\varkappa(\cos\sigma\sin u\sin J - \sin D)\frac{dN}{\sin\sigma}$$

$$ds'' = \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)du + \varkappa r\sin(\sigma-s)\frac{dr}{r}\,206\,264''.8$$
$$+ \varkappa r\sin(\sigma-s)\frac{da''}{a''}\,206\,264''.8$$
$$+ \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u dJ + \varkappa r\cos(\sigma-s)\sin p\cos D dN.$$

Hier sind nun noch die Ausdrücke von du und dr in den elliptischen Elementen zu substituieren. Aus der Differenziation der hier zugrunde zu legenden Formeln

$$M_0 + (t-t_0)\mu = E - e''\sin E$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$
$$u = v + \pi \quad (\pi \text{ vom Knoten aus gezählt})$$
$$r = 1 - \sin\varphi\cos E$$

folgt, wie in Nr. 142 gezeigt ist:

$$du = d\pi + \frac{\cos\varphi}{r^2}dM_0 + \frac{\cos\varphi}{r^2}(t-t_0)d\mu + 206\,264''.8\sin v\left(\frac{1}{r} + \sec\varphi^2\right)de$$

$$dr = \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin v dM_0}{206\,264''.8} + \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin v(t-t_0)}{206\,264''.8}d\mu - \cos v de,$$

und man erhält daher schließlich:

$$\begin{aligned}\sin s\,dp = {} & \varkappa \frac{\sin B}{\sin\sigma}\frac{\cos\varphi}{r}\,(dM_0 + (t-t_0)\,d\mu)\\ & + \varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\,(1 + r\sec\varphi^2)\;206\,264''.8\;de + \varkappa r\frac{\sin B}{\sin\sigma}\,d\pi\\ & - \varkappa r\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u\,dJ\\ & + \varkappa r\,(\cos\sigma\,\sin u\,\sin J - \sin D)\,\frac{dN}{\sin\sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ds'' = {} & \left(\varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\frac{\cos\varphi}{r} + \varkappa\sin(\sigma-s)\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v\right)(dM_0+(t-t_0)d\mu)\\ & + \left(\varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\sin v\,(1+r\sec\varphi^2) - \varkappa\sin(\sigma-s)\cos v\right)206\,264''.8\,de\\ & + \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\,d\pi\\ & + \varkappa r\sin(\sigma-s)\;206\,264''.8\,\frac{da''}{a''}\\ & + \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u\,dJ\\ & + \varkappa r\cos(\sigma-s)\sin p\cos D\,dN.\end{aligned}$$

Etwas einfacher werden die Ausdrücke für die Differenziale der rechtwinkligen Koordinaten, die wir oben für drei Achsenlagen aufgestellt haben. Es ist unnötig, die Entwicklungen hier vorzuführen, da sich die Differenziale mit Benutzung der bereits aufgestellten Formeln für du, dr, dU, ... ohne jede Schwierigkeit bilden lassen. Wir wollen dabei statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge ε, gezählt vom Knoten der Bahn mit dem Erdäquator einführen, so daß $\varepsilon = M + \pi$ wird. Auf die Änderungen von ζ braucht man wegen der Kleinheit desselben keine Rücksicht zu nehmen.

A) Koordinaten x, y, bezogen auf die Satellitenbahn:

$$\begin{aligned}dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi}\,(\cos(u-U) + e\cos(\pi-U))\,d\varepsilon\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\left(\cos(\pi-U) + \cos(u-U)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)e\,d\pi\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\,(\sin(\pi-U)\cos\varphi - \cos(u-U)\sin E)\,de + x\frac{da''}{a''}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy = {} & -\frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\,(\sin(u-U) + e\sin(\pi-U))\,d\varepsilon\\ & + \frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\left(\sin(\pi-U) + \sin(u-U)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)e\,d\pi\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\,(\cos(\pi-U)\cos\varphi + \sin(u-U)\sin E)\,de + y\frac{da''}{a''}\\ & - r\nu\cos B\cos u\,\sin J\,dN + r\nu\cos B\sin u\,dJ.\end{aligned}$$

B) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator.

$$
\begin{aligned}
dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \,(\cos(F+u) + e\cos(F+\pi))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \left(\cos(F+\pi) + \cos(F+u)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \,(\sin(F+\pi)\cos\varphi - \cos(F+u)\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''} \\
& + r\nu\,(\sin h \sin(H+u)\cos D - \sin g \sin(G+u)\sin D)\, dN + r\nu\cos f \sin u\, dJ \\
dy = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \,(\cos(G+u) + e\cos(G+\pi))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \left(\cos(G+\pi) + \cos(G+u)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \,(\sin(G+\pi)\cos\varphi - \cos(G+u)\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''} \\
& + r\nu \sin D \sin f \sin(F+u)\, dN + r\nu\cos g \sin u\, dJ.
\end{aligned}
$$

Ist E die mittlere Länge in der Bahn, gezählt vom Äquinoktium aus und Π die vom selben Punkte gezählte Länge der Perihels, so wird

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon &= d\mathrm{E} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
d\pi &= d\Pi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

Schreibt man in obigen Formeln also $d\mathrm{E}$ und $d\Pi$ statt $d\varepsilon$ und $d\pi$, so treten folgende Glieder hinzu:

In den Formeln A)

$$
\begin{aligned}
dx &= \cdots - r\nu\cos(u-U)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
dy &= \cdots + r\nu\sin(u-U)\sin B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

In den Formeln B)

$$
\begin{aligned}
dx &= \cdots - r\nu \sin f\cos(F+u)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
dy &= \cdots - r\nu \sin g\cos(G+u)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

C) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator.

$\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}$ sind hier konstant.

$$
\begin{aligned}
dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \,(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N}) + e\cos(\pi-\mathfrak{N}))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \left(\cos(\pi-\mathfrak{N}) + \cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N})\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \,(\sin(\pi-\mathfrak{N})\cos\varphi - \cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N})\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dy = &- \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\,(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U}) + e\sin(\pi-\mathfrak{U}))\,d\varepsilon \\
&+ \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\left(\sin(\pi-\mathfrak{U}) + \sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\,d\pi \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\,(\cos(\pi-\mathfrak{U})\cos\varphi + \sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin E)\,de + y\frac{da''}{a''} \\
&\left\{\begin{aligned}
&+ \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\,(\cos(\mathfrak{u}-\Theta) + e\cos(\pi-\Theta))\sin\gamma\,d\varepsilon \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\left(\cos(\pi-\Theta) + \cos(\mathfrak{u}-\Theta)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)\sin\gamma\,e\,d\pi \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\,(\sin(\pi-\Theta)\cos\varphi - \cos(\mathfrak{u}-\Theta)\sin E)\sin\gamma\,de
\end{aligned}\right\} \\
&+ r\nu\cos\mathfrak{B}\sin\mathfrak{u}\,d(\sin\gamma\cos\Theta) - r\nu\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{u}\,d(\sin\gamma\sin\Theta).
\end{aligned}
$$

Die mit $\sin\gamma$ multiplizierten Glieder $\{\cdots\}$ werden wohl in allen Fällen weggelassen werden können, wo man überhaupt von diesen Formeln Gebrauch macht.

Die Differenzialformeln vereinfachen sich bedeutend, wenn man als zu verbessernde Bahn eine *Kreisbahn* zugrunde legt. Es wird dann $u = \varepsilon$, $\nu = 1$, ferner

$$
\begin{aligned}
dr &= -e\cos v = -\sin u\cdot e\sin\pi - \cos u\cdot e\cos\pi \\
du &= d\varepsilon + 2e\sin v = d\varepsilon - 2\cos u\cdot e\sin\pi + 2\sin u\cdot e\cos\pi
\end{aligned}
$$

und somit zunächst die Formeln für Positionswinkel und Distanz:

$$
\varkappa = \frac{\Delta_0}{\Delta}\,\frac{a''}{206264''.8}\,\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin s\cdot dp = &\ \varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\cdot d\varepsilon \\
&- 2\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\cos u\cdot e\sin\pi \\
&+ 2\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\sin u\cdot e\cos\pi \\
&- \varkappa\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u\cdot dJ \\
&+ \frac{\varkappa}{\sin\sigma}(\cos\sigma\sin u\sin J - \sin D)\cdot dN
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ds'' = &\ \varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\cdot d\varepsilon \\
&- \varkappa\left(\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\,2\cos B\sin(u-U)\cos u + \sin(\sigma-s)\sin u\right)\cdot e\sin\pi \\
&+ \varkappa\left(\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\,2\cos B\sin(u-U)\sin u - \sin(\sigma-s)\cos u\right)\cdot e\cos\pi \\
&+ \varkappa\sin(\sigma-s)\frac{da''}{a''}\,206264''.8 \\
&+ \varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u\cdot dJ \\
&+ \varkappa\cos(\sigma-s)\sin p\cos D\cdot dN.
\end{aligned}
$$

Ferner für die rechtwinkligen Koordinaten in den oben behandelten drei Achsenlagen:

A_1) Koordinaten x, y, bezogen auf die Satellitenbahn:

$$\begin{aligned} dx &= \nu\cos(u-U)\cdot d\varepsilon + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad -\nu(\cos(u-U)\cos u+\cos U)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu(\cos(u-U)\sin u+\sin U)\cdot e\cos\pi \\ dy &= -\nu\sin B\sin(u-U)\,d\varepsilon + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu\sin B(\sin(u-U)\cos u-\sin U)\cdot e\sin\pi \\ &\quad -\nu\sin B(\sin(u-U)\sin u+\cos U)\cdot e\cos\pi \\ &\quad -\nu\cos B\cos u\sin J dN+\nu\cos B\sin u\,dJ. \end{aligned}$$

B_1) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator:

$$\begin{aligned} dx &= \nu\sin f\cos(F+u)d\varepsilon \\ &\quad -\nu\sin f(\cos(F+u)\cos u+\cos F)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu\sin f(\cos(F+u)\sin u-\sin F)\cdot e\cos\pi + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu(\sin h\sin(H+u)\cos D-\sin g\sin(G+u)\sin D)\,dN \\ &\quad +\nu\cos f\sin u dJ \\ dy &= \nu\sin g\cos(G+u)d\varepsilon \\ &\quad -\nu\sin g(\cos(G+u)\cos u+\cos G)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu\sin g(\cos(G+u)\sin u-\sin G)\cdot e\cos\pi + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu\sin f\sin(F+u)\sin D dN \\ &\quad +\nu\cos g\sin u\,dJ. \end{aligned}$$

C_1) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator (mit Weglassung der in $\sin\gamma$ multiplizierten Glieder):

$$\begin{aligned} dx &= \nu\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})d\varepsilon + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad -\nu(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\cos\mathfrak{u}+\cos\mathfrak{U})\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{u}+\sin\mathfrak{U})\cdot e\cos\pi \\ dy &= -\nu\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}d\varepsilon + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\cos\mathfrak{u}-\sin\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}\cdot e\sin\pi \\ &\quad -\nu(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{u}+\cos\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}\cdot e\cos\pi \\ &\quad +\nu\sin\mathfrak{u}\cos\mathfrak{B}d(\sin\gamma\cos\Theta) \\ &\quad -\nu\cos\mathfrak{u}\cos\mathfrak{B}d(\sin\gamma\sin\Theta). \end{aligned}$$

Abschnitt XXXVII.

Bahnbestimmung der Doppelsterne.

190. Allgemeine Sätze über die Bewegungen bei Doppelsternen. Die bei Doppelsternen beobachteten Bewegungen können, wie die Erfahrung gelehrt hat, durch die Newtonsche Gravitation erklärt werden. Unter dieser Voraussetzung die wahren Bahnen dieser Körper im Raum aus den beobachteten, scheinbaren zu bestimmen, ist die Aufgabe, der wir uns nun zuwenden.

Zwei in Punkte konzentrierte Massen m und m' ziehen sich in der Entfernung ϱ nach dem Newtonschen Gesetz gegenseitig mit der Kraft $\frac{k^2 m m'}{\varrho^2}$ an, die bei der Masse m die Beschleunigung $\frac{k^2 m'}{\varrho^2}$, bei der Masse m' die Beschleunigung $\frac{k^2 m}{\varrho^2}$ hervorbringt, so daß, bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem, in welchem x, y, z; x', y', z' die Koordinaten der beiden Massenpunkte sind, die Bewegungsgleichungen dieser werden:

für m:		für m':	
$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2 m'(x'-x)}{\varrho^3}$		$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(x'-x)}{\varrho^3}$	
$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2 m'(y'-y)}{\varrho^3}$	1)	$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(y'-y)}{\varrho^3}$	2)
$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{k^2 m'(z'-z)}{\varrho^3}$		$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(z'-z)}{\varrho^3}$	

$$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

k^2 ist eine Konstante, deren Bestimmung wir uns vorbehalten, und die vorläufig als Anziehung zweier Massen 1 in der Entfernung 1 definiert werden kann. Aus den beiden Gleichungsgruppen folgt:

$$\frac{d^2\,\frac{mx+m'x'}{m+m'}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\,\frac{my+m'y'}{m+m'}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\,\frac{mz+m'z'}{m+m'}}{dt^2} = 0$$

d. h. der *Schwerpunkt* des Systems, dessen Koordinaten

$$X = \frac{mx+m'x'}{m+m'}, \qquad Y = \frac{my+m'y'}{m+m'}, \qquad Z = \frac{mz+m'z'}{m+m'}$$

sind, bewegt sich geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Diese Bewegung verbindet sich mit der Eigenbewegung des Systems und soll hier außer Betracht bleiben. Nennt man ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' die relativen Koordinaten von m und m' in bezug auf den Schwerpunkt, so daß $x = X + \xi, \cdots x' = X + \xi', \cdots$ wird, und ferner $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die relativen Koordinaten von m' zu m, so daß $x' = x + \mathfrak{x}, \cdots x = x' - \mathfrak{x}, \cdots$ wird, so wird aus den Gl. 1), da $\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \cdots$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{k^2 m'(\xi' - \xi)}{\varrho^3}, \cdots$$

oder wegen $\xi = x - X = x - \frac{mx + m'x'}{m + m'} = -\frac{m'}{m + m'}(x' - x) = -\frac{m'}{m + m'}(\xi' - \xi)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\xi}{\varrho^3}, \cdots \qquad 3)$$

In derselben Weise findet man aus 2)

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\xi'}{\varrho^3}, \cdots. \qquad 4)$$

In 3) und 4) ist

$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 =$$
$$= \left(\frac{m + m'}{m'}\xi\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m'}\eta\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m'}\zeta\right)^2 = \left(\frac{m + m'}{m}\xi'\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m}\eta'\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m}\zeta'\right)^2;$$

sind also g und g' die Entfernungen der Massen m und m' von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt, so wird

$$g^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad g'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und daher

$$\varrho = \frac{m + m'}{m'}g = \frac{m + m'}{m}g'.$$

Aus 3) und 4) wird also:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\frac{m'^3}{(m + m')^2}\frac{\xi}{g^3}, \cdots, \qquad g^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \qquad 3^a)$$

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -k^2\frac{m^3}{(m + m')^2}\frac{\xi'}{g'^3}, \cdots, \qquad g'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \qquad 4^a)$$

und durch Subtraktion:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\mathfrak{x}}{\varrho^3}, \cdots, \qquad \varrho^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2. \qquad 5)$$

Die Gleichungen $3^a)$, $4^a)$, 5) sind von genau derselben Form; die durch sie beschriebenen Bewegungen finden, wie nachher gezeigt wird, in Ellipsen nach den Keplerschen Gesetzen statt; in dem einen der Brennpunkte liegen die Anfangspunkte der Koordinaten, also im Falle von $3^a)$ und $4^a)$ der Schwerpunkt, im Falle von 5) die eine Masse. Man hat also die Sätze:

I. *Die Komponenten eines Doppelsternsystems beschreiben um ihren gemeinsamen Schwerpunkt als Brennpunkt Ellipsen.*

II. *Jede Komponente eines Doppelsternes beschreibt um die andere als Brennpunkt eine Ellipse.*

Da die Radienvektoren g, g', ϱ in einem linearen Verhältnis stehen, indem stets

$$g = \frac{m'}{m + m'}\varrho, \qquad g' = \frac{m}{m + m'}\varrho, \qquad g = \frac{m'}{m}g',$$

so sind alle genannten Ellipsen einander ähnlich und ihre großen Achsen liegen in derselben Geraden.

Da man in der Regel nur die relative Bewegung des einen Sternes um den anderen beobachten kann, brauchen wir uns nur mit den Gleichungen 5) zu beschäftigen, wissen aber, daß die absoluten Bahnen der beiden Körper der sich hieraus ergebenden Ellipse ähnlich sind. Die Gleichungen $5^a)$, die wir jetzt bequemer so schreiben wollen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{z}{r^3} &= 0 \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & \end{aligned} \qquad 5^a)$$

(x, y, z Relativkoordinaten von m' zu m)

liegen auch der Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne zugrunde; da wir aber bei Behandlung dieser Aufgabe (Nr. 41) von anderen Gleichungen ausgegangen sind, wollen wir hier die Integration von $5^a)$ kurz durchführen. Wird die zweite Gleichung mit $-z$, die dritte mit y multipliziert und addiert, so entsteht ein Ausdruck, dessen Integral ist:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_1.$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c_2 \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c_3. \end{aligned} \qquad 6)$$

Das sind die Flächenintegrale, welche besagen, daß die vom Radiusvektor beschriebenen Flächenräume auf irgend eine Ebene projiziert proportional zu den Zeiten sind. Verbindet man ferner die Gl. 5) durch die Multiplikatoren $2dx$, $2dy$, $2dz$, so kommt nach der Integration:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = k^2(m+m')\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad 7)$$

worin a, ebenso wie oben c_1, c_2, c_3 die Integrationskonstante bezeichnet. Aus den Gl. 6) folgt

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

d. h. die Bewegung findet in einer Ebene statt, die durch den Anfangspunkt geht. Nimmt man diese Ebene als Fundamentalebene der xy der Art, daß z konstant Null ist, so reduzieren sich die bisherigen Integrale 6) und 7) auf

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= k^2(m+m')\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

oder wenn durch

$$x = r\cos s, \qquad y = r\sin$$

Polarkoordinaten eingeführt werden:

$$r^2 \frac{ds}{dt} = c \tag{8}$$

$$r^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k^2 (m + m') \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{9}$$

Wird vermittels der ersten Gleichung aus der zweiten die Zeit eliminiert, so kommt:

$$ds = \frac{c d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{k^2(m+m')}{a} + \frac{2k^2(m+m')}{r} - \frac{c^2}{r^2}}}$$

oder:

$$ds = \frac{d\left(\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2 - \frac{k^2(m+m')}{a} - \left(\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist:

$$s - \omega = \arccos \frac{\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}}{\sqrt{\left(\frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2 - \frac{k^2(m+m')}{a}}}$$

woraus:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(s - \omega)} \tag{10}$$

wenn gesetzt wird:

$$p = \frac{c^2}{k^2(m+m')}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2(m+m')a}}. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt vor mit dem Parameter p, der Exzentrizität e und der wahren Anomalie $s - \omega$, dessen einer Brennpunkt im Anfangspunkt liegt; die oben eingeführte Konstante ω bedeutet also die Länge des Perihels, von der X-Achse an gezählt, und die Konstante a wegen $p = a(1 - e^2)$ die große Halbachse.

Nach 8) ist $\frac{1}{2}c$ der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichene Flächenraum. Ist $ab\pi = a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi$ die Fläche der Ellipse und U die Zeit, welche der Radiusvektor braucht, um sie zu beschreiben, also die Umlaufszeit, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}c = \frac{a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi}{U}$$

oder wenn quadriert und nach 11)

$$c^2 = k^2(m + m')p = k^2(m + m')\,a(1 - e^2)$$

eingetragen wird:

$$\frac{4a^3\pi^2}{U^2} = k^2(m + m'). \tag{12}$$

Diese Beziehung zwischen großer Halbachse und Umlaufszeit, die im Sonnensystem

zum dritten Keplerschen Gesetz führt, vermittelt bei Doppelsternen, wenn auch ihre Parallaxe bekannt ist, die Bestimmung ihrer Gesamtmasse. k^2 ist die Anziehung, welche zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 aufeinander ausüben; nimmt man als Einheit der Masse die Sonnenmasse, als Längeneinheit die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne und als Zeiteinheit das siderische Jahr, so gibt die Gl. 12) für das System Sonne-Erde

$$4\pi^2 = k^2(1 + m')$$

oder wenn die sehr kleine Erdmasse m' vernachlässigt wird:

$$k = 2\pi.$$

Mit den festgesetzten Einheiten wird also aus Gl. 12)

$$m + m' = \frac{a^3}{U^2}. \qquad 13)$$

Bezeichnet man mit p'' die Parallaxe des Doppelsternes, d. h. den Winkel, unter welchem die Erdbahnhalbachse — die Längeneinheit — von ihm aus erscheint, so ist $\frac{1}{\sin p''}$ die lineare Entfernung desselben von der Sonne; nennt man ferner a'' den Winkel, unter dem a von der Erde aus gesehen wird, also eine Größe, die man ermitteln kann, wenn eine Bahnbestimmung gelingt, so wird:

$$\sin a'' = a \sin p''$$

oder

$$a = \frac{a''}{p''}.$$

Somit kann 13) so geschrieben werden:

$$a'' = p'' \sqrt[3]{(m + m')\, U^2}. \qquad 14)$$

Diese wichtige Beziehung gibt die Gesamtmasse $m + m'$, wenn durch die Bahnbestimmung a'' und U und durch Parallaxenbestimmung p'' bekannt geworden sind.

Wir fahren in der Entwicklung der Relationen für die elliptische Bewegung fort, indem wir die Gleichung 8) unter Benutzung des Wertes für c und des Umstandes, daß sich s und $s - \omega = v$ nur um einen konstanten Winkel unterscheiden, in der Gestalt

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{k^2(m + m')\, a(1 - e^2)}$$

mit der Polargleichung der Ellipse 10)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

in Verbindung setzen. Aus letzterer folgt

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2)}{er} - \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{er} \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2};$$

also, wenn der Ausdruck von $\cos v$ differenziert und dann $\sin v$ eingetragen wird:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{r\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} \frac{dr}{dt}.$$

Somit wird aus 8) unter gleichzeitiger Benutzung von 12)

$$\frac{r}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{k^2(m+m')}{a^3}}=\frac{2\pi}{U}.$$

Um diese Gleichung integrieren zu können, führt man den Hilfswinkel E durch

$$a-r=ae\cos E$$

ein, welcher einerseits zur Berechnung von r die Gleichung

$$r=a(1-e\cos E) \qquad 15)$$

mit dem Differenzial

$$dr=ae\sin E\cdot dE$$

liefert, anderseits die zu integrierende Gleichung in die Form überzuführen gestattet:

$$(1-e\cos E)\frac{dE}{dt}=\frac{2\pi}{U},$$

die unmittelbar integriert werden kann:

$$E-e\sin E=\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T}). \qquad 16)$$

Wenn $E=0$ wird, nimmt r seinen kleinsten Wert an und umgekehrt; E ist also im Periastron Null und hierfür wird auch $t-\mathrm{T}=0$, d. h. die eingeführte Konstante T stellt die Durchgangszeit durchs Periastron dar. Da die Gl. 16) die Bestimmung des Winkels E aus der Zeit gestattet, bedarf es zur Bestimmung von v nur mehr einer Beziehung zwischen E und v. Werden die beiden Werte von r einander gleichgesetzt:

$$a(1-e\cos E)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

so folgt leicht:

$$\cos v=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}$$

und

$$1+\cos v=2\cos\tfrac{1}{2}v^2=\frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}$$

$$1-\cos v=2\sin\tfrac{1}{2}v^2=\frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}$$

also schließlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E. \qquad 17)$$

Stellt man die Gleichungen 15), 16), 17) zusammen:

$$E-e\sin E=\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T})$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \qquad 18)$$

$$s=\omega+v$$

$$r''=a''(1-e\cos E),$$

so erkennt man, daß mittels der Konstanten U, T, e, a'', ω für jede beliebige Zeit der Ort in der Bahn durch r und s gefunden werden kann. $\frac{2\pi}{U}$ nennt man die *mittlere jährliche Bewegung*; man kann sie statt U als Element einführen; man gibt ihr das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem die Bewegung in der Richtung der wachsenden Positionswinkel stattfindet oder in der entgegengesetzten.

Durch die bisherigen Betrachtungen ist die Bewegung in der Bahnebene erkannt; es kommt nun darauf an, Feststellungen betreff der Lage der Bahnebene im Raum zu machen. Man denkt sich zur Verbindungslinie Erde-Stern, dem *Visionsradius*, im Stern die dazu senkrechte Ebene errichtet, welche eine Tangentialebene der Sphäre sein wird. Auf diese Ebene, die man die *Projektionsebene* nennt, projiziert sich von der Erde aus gesehen die wahre Bahnellipse und es erscheint auf ihr die *scheinbare Bahn*, die durch Beobachtung festgelegt werden kann. Es geschieht dies in der Regel durch Angabe von Positionswinkel und scheinbarer Distanz des einen Sternes — des Nebensternes — in bezug auf den andern — den Hauptstern, für die Beobachtungszeiten; der Positionswinkel P wird vom nördlichen Teil des durch den Hauptstern gelegten Meridianes nach Osten zu von 0° bis 360° gerechnet, die scheinbare Distanz ϱ wird in Bogensekunden angegeben. Dies vorausgesetzt wird die Lage der wahren Bahnebene bestimmt durch ihre *Neigung* i gegen die Projektionsebene und durch den Positionswinkel, den ihre Schnittlinie mit der Projektionsebene — *die Knotenlinie* — mit dem Schnitt des Meridianes und der Projektionsebene einschließt, der *Länge des Knotens* Ω. Betreff dieser beiden Bestimmungsstücke i und Ω kann hier gleich folgende Bemerkung gemacht werden. Offenbar reicht die Kenntnis der scheinbaren Bewegung allein nicht aus, um zu entscheiden, ob in einem bestimmten Teile der Bahn der Nebenstern sich vor oder hinter der Projektionsebene befindet, d. h. die scheinbare Bahn bleibt dieselbe, ob wir die Neigung mit $+ i$ oder mit $- i$ ansetzen. Es kann also eine Unterscheidung zwischen auf- und absteigendem Knoten nicht getroffen werden. Man ist übereingekommen, die Neigungen stets positiv und kleiner als 90° anzusetzen; dann kann die Länge des aufsteigenden Knotens Ω oder $180° + \Omega$ sein. Man hat sich also für einen dieser Werte zu entscheiden, dann ist alles weitere unzweideutig bestimmt. Nur wenn durch spektroskopische Messung auch die Bewegung im Visionsradius bekannt ist, kann die Zweideutigkeit gehoben werden.

Läßt man die früher benutzte X-Achse, von der aus die Winkel s und ω gezählt werden, mit der Knotenlinie zusammenfallen, so wird die Lage der Ellipse in ihrer Ebene durch den Winkel ω gegeben, den ihre große Achse (Richtung nach dem Perihel) mit der Knotenlinie bildet: *Abstand des Perihels vom Knoten.*

Man erkennt jetzt, daß eine Doppelsternbahn durch *sieben* Stücke gegeben ist: a, e, U, T, ω, Ω, i und es läßt sich auch sofort nachweisen, daß diese Stücke genügen, um für jede Zeit den scheinbaren Ort des Nebensterns in bezug auf den Hauptstern an der Sphäre durch Positionswinkel und Distanz zu berechnen. In der Tat gibt das System 18) r'' und v; zieht man ferner vom Hauptstern H den Radiusvektor r nach dem Nebenstern N, seine Projektion HN' auf die Projektionsebene und die Knotenlinie, so hat man ein Dreikant, in dem die Seiten $\Omega N = \omega + v$,

$\Omega N' = P - \Omega$ sind und der Winkel bei Ω gleich i und der bei N' gleich 90° ist. Da nun $\varrho = r\cos(NN')$, so ergibt dasselbe:

$$\operatorname{tg}(P-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + v)$$
$$\varrho = r\frac{\cos(\omega+v)}{\cos(P-\Omega)} \qquad 19)$$

oder auch

$$\varrho \sin(P-\Omega) = r\cos i \sin(\omega+v)$$
$$\varrho\cos(P-\Omega) = r\cos(\omega+v) \qquad 19^a)$$

woraus P und ϱ berechnet werden können; $P-\Omega$ und $\omega+v$ liegen stets im selben Quadranten.

Das Ziel der Bahnbestimmung eines Doppelsternes wird also sein, diese sieben Elemente zu bestimmen; zur Verfügung stehen beobachtete Positionswinkel und Distanzen oder wie wir gleich allgemeiner sagen können, die *scheinbare* Bahn. Das Studium der Beziehungen, die zwischen der wahren und scheinbaren Bahn bestehen, wird den Weg anzeigen, der einzuschlagen ist. Ehe wir dazu übergehen, sei noch in Kürze der Korrektionen gedacht, die an die beobachteten Größen ϱ und P angebracht werden müssen, ehe sie der Bahnbestimmung zugrunde gelegt werden können. Refraktion, Aberration und Nutation haben auf so enge Paare, wie sie hier in Frage kommen, einen ganz verschwindenden Einfluß. Dagegen wird man den Einfluß der Präzession nicht vernachlässigen. Da diese eine Lagenänderung des Äquators und damit des Meridians, von dem aus die Positionswinkel gezählt werden, hervorbringt, so müssen die direkt beobachteten Positionswinkel auf eine bestimmte Lage des Meridians reduziert werden, ehe sie miteinander verglichen werden können; die Distanzen bleiben natürlich ungeändert. Man kann die zu ermittelnde Korrektion des Positionswinkels leicht angeben. Da zwischen dem Rektaszensions- und Deklinationsunterschied $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der Komponenten des Doppelsternes und ϱ und P die Beziehungen

$$\cos\delta\,\Delta\alpha = \varrho\sin P, \qquad \Delta\delta = \varrho\cos P$$

bestehen und die Präzession in Deklination $+ 20''.05\cos\alpha\,(t-t_0)$ beträgt (Nr. 20), so wird die Präzession im Positionswinkel dP gegeben sein durch

$$-\varrho\sin P\cdot dP = -20''.05\sin\alpha\,(t-t_0)\,\Delta\alpha$$

oder

$$dP = +0^\circ.00056\sin\alpha\sec\delta\,(t-t_0).$$

Ist P_0 der auf den Meridian der Zeit t_0 bezogene Positionswinkel, so wird der auf den Meridian von t bezogene:

$$P = P_0 + 0^\circ.00056\sin\alpha\sec\delta\,(t-t_0). \qquad 20)$$

Wesentlich schwieriger sind die sogenannten persönlichen Messungsfehler zu behandeln, von denen die Beobachtungen ebenfalls befreit werden müssen, doch ist hier nicht der Ort, auf diese weitläufige Frage einzugehen.

191. Beziehungen zwischen der scheinbaren und der wahren Bahnellipse. Die Projektion der wahren vom Nebenstern beschriebenen Bahnellipse auf die Projektionsebene ist, wie die Geometrie lehrt, wieder eine Ellipse. Zwischen beiden

Ellipsen und den Bewegungen in ihnen bestehen Beziehungen, die wir kennen lernen wollen.

1. Zunächst ist klar, daß auch in der scheinbaren Ellipse das Gesetz der Flächen gilt, d. h. der Radiusvektor vom Hauptstern zum Nebenstern beschreibt auch in der projizierten Bahn Flächenräume, die den Zeiten proportional sind. In der Tat haben wir unser ursprüngliches Koordinatensystem ganz beliebig gelegt und da der Flächensatz nachgewiesen ist für alle Ebenen desselben, so gilt er auch für die Ebene senkrecht zum Visionsradius. Diese Eigenschaft der scheinbaren Bahn wird oft mit Vorteil zur Ausgleichung der Beobachtungen benutzt und namentlich zur Ermittlung von Distanzen durch Rechnung, wenn ihre Messung mit Schwierigkeiten verknüpft war; denn der Flächensatz lautet hier

$$\varrho^2 \frac{dP}{dt} = \text{const.},$$

man kann daraus also ϱ bestimmen, wenn von anderen Bahnteilen her die const. bekannt geworden und die Geschwindigkeit des Positionswinkels $\frac{dP}{dt}$ beobachtet ist.

2. Der Hauptstern, der in einem Brennpunkt der wahren Bahn liegt, liegt *nicht* in einem Brennpunkt der projizierten Ellipse, sondern irgendwo im Innern derselben.

3. Die Projektion des Mittelpunktes der wahren Bahn ist der Mittelpunkt der scheinbaren Bahn.

4. In der wahren Bahn liegen die drei Punkte: Mittelpunkt, Hauptstern (Brennpunkt) und Periastron auf einer Geraden, der großen Achse; die Projektionen dieser drei Punkte müssen folglich ebenfalls auf einer Geraden liegen. Mithin hat man den Satz: Verbindet man den Hauptstern mit dem Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse durch eine Gerade, so liegt auf dieser die Projektion des Periastrons; die Schnittpunkte dieser Geraden mit der scheinbaren Ellipse sind also die Projektionen von Periastron und Apastron der wahren Bahn. Oder: *Der Durchmesser der scheinbaren Bahn, welcher durch den Hauptstern geht, ist die Projektion der großen Achse der wahren Bahnellipse.* Dieser Satz gibt offenbar die Durchgangszeit durchs Periastron, wenn man in der scheinbaren Bahn den diesem Durchmesser entsprechenden Positionswinkel aufsucht und mit den Beobachtungsdaten vergleicht.

5. Die wahre und die scheinbare Bahnellipse haben zwei Punkte gemeinsam, nämlich jene, die auf der Knotenlinie liegen. Die beiden vom Hauptstern gezogenen Radienvektoren der scheinbaren Bahn, welche in die Knotenlinie fallen, sind also gleich den Radienvektoren der wahren Bahn, die in der Knotenlinie liegen.

6. Da die Exzentrizität das Verhältnis des Abstandes des Brennpunktes vom Mittelpunkt zur großen Halbachse ist und dieses Verhältnis durch die Projektion nicht geändert wird, so hat man: *Die Exzentrizität e der wahren Bahn ist gleich dem Verhältnis des Abstandes d des Hauptsternes vom Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse zu dem in der Richtung dieses Abstandes genommenen Halbmesser a' der scheinbaren Ellipse*: $e = \frac{d}{a'}$.

7. In der wahren Ellipse werden die senkrecht zur großen Achse (parallel zur

kleinen) gezogenen Sehnen von ihr halbiert; diese Eigenschaft bleibt in der Projektion erhalten, also: Man erhält in der Projektionsebene die Richtung der Projektion der kleinen Halbachse der wahren Ellipse, wenn man jene Sehnen der scheinbaren Ellipse aufsucht, welche durch die nach Satz 4. bekannte Projektion der großen Achse der wahren Ellipse halbiert werden; die durch den Mittelpunkt gelegte Sehne ist die Projektion der kleinen Achse. Oder: *Die Projektion der großen und der kleinen Achse der wahren Ellipse bilden konjugierte Durchmesser der scheinbaren Ellipse.*

8. Es sei $\varkappa$ das nach Satz 6. bekannte Verhältnis der großen zur kleinen Halbachse der wahren Ellipse:

$$\varkappa = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

dann gilt bekanntlich der Satz: Wenn man alle Ordinaten der wahren Ellipse in dem Verhältnis $1 : \varkappa$ verlängert, so liegen die Endpunkte auf dem um die große Achse als Durchmesser gezogenen Kreis. Dieser Kreis, auf die Projektionsebene projiziert, gibt eine Ellipse, die sofort konstruiert werden kann, da man nur alle parallel zu dem in 7. genannten, der kleinen Achse entsprechenden konjugierten Durchmesser der scheinbaren Ellipse, gezogenen Sehnen im Verhältnis $1 : \varkappa$ zu verlängern braucht. Wir nennen diese Ellipse die »*Hilfsellipse*« und behaupten: *Die große Achse der Hilfsellipse ist gleich der großen Achse der wahren Bahn und ihre Richtung gibt die Richtung der Knotenlinie an.*

In der Tat hat der Kreis, von dem die Hilfsellipse die Projektion ist, als Durchmesser die große Achse der wahren Bahn. Die Durchmesser dieses Kreises werden bei der Projektion alle verkürzt mit Ausnahme eines einzigen; die Projektion dieses einen muß also den größten Durchmesser der Hilfsellipse oder ihre große Achse ergeben. Der unverkürzt projizierte Durchmesser des Kreises muß parallel zur Projektionsebene sein, also auch parallel zur Schnittlinie der Kreisebene mit der Projektionsebene, d. h. parallel zur Knotenlinie. Mittels dieses Satzes kann die große Achse und die Knotenlinie der wahren Bahn aus der scheinbaren Bahn durch Konstruktion gefunden werden (*Zwiers*, Astr. Nachr. Band 139, Seite 369).

Nachdem die Hilfsellipse konstruiert ist, kann man ihre große Achse durch Versuch ziehen; sicherer aber ist es, sie durch Konstruktion zu finden. Bezogen auf das Paar konjugierter Durchmesser, von denen der eine durch den Hauptstern gelegt wurde, ist die Gleichung der scheinbaren Ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

wenn a' und b' die Längen der konjugierten Halbmesser sind. Bezogen auf dieselben Achsen wird die Gleichung der Hilfsellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{(\varkappa b')^2} = 1.$$

Die Achsenrichtungen deuten daher auch in der Hilfsellipse zwei konjugierte Halbmesser an; wir nennen sie a' und $b'' = \varkappa b'$. Aus diesen der Größe und Richtung nach gegebenen konjugierten Halbmessern können aber die große und kleine Halbachse durch folgende bekannte Konstruktion gefunden werden. Im Endpunkt von

a' zieht man die Parallele zu b''; das ist eine Tangente an die scheinbare und an die Hilfsellipse. Zu dieser Tangente errichtet man das Lot und trägt beiderseits b'' auf. Ein durch diese beiden Punkte und den Mittelpunkt geschlagener Kreis schneidet auf der Tangente Punkte ab, die mit dem Mittelpunkt verbunden die Richtungen der großen und der kleinen Achse ergeben.

9. Von den Durchmessern des oben betrachteten Kreises in der Ebene der wahren Bahn wird *einer* unverkürzt auf die Projektionsebene projiziert, die große Achse α der Hilfsellipse, und einer erleidet die stärkste Verkürzung, die kleine Achse β der Hilfsellipse; der erstere ist jener Kreisdurchmesser, der parallel zur Schnittlinie verläuft, der letztere jener, der senkrecht darauf steht; dieser letztere schließt mit seiner Projektion den Winkel i, die gegenseitige Neigung der beiden Ebenen ein; mithin:

Das Verhältnis $\beta : \alpha$ der beiden rechtwinkligen Halbachsen der Hilfsellipse gibt den cos des Neigungswinkels der Bahnebene gegen die Projektionsebene.

10. Nach dem Vorhergehenden ist der durch den Hauptstern gelegte Halbmesser der scheinbaren Ellipse die Projektion der großen Halbachse a der wahren Ellipse, und die große Halbachse α der Hilfsellipse gibt die Richtung der Knotenlinie an. Der Winkel zwischen a und α ist also der Abstand des Periastrons vom Knoten ω und der Winkel zwischen a' und α die Projektion ω' von ω auf die Projektionsebene. Das von den Strahlen a, α, a' gebildete Dreikant gibt also

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\cos i} = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega' .$$

Schlägt man um α als Halbmesser einen Kreis und fällt vom Endpunkt B von a' ein Lot auf α, welches den Kreis im Punkte C trifft, so schließt die Verbindungslinie von C mit dem Mittelpunkt M mit α einen Winkel E ein, mittels dessen bekanntlich (Nr. 37) die rechtwinkligen Koordinaten von B im System $\alpha\beta$ durch

$$\alpha\cos E \text{ und } \beta\sin E$$

ausgedrückt werden können. Man hat also

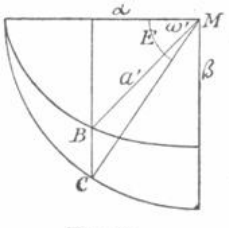

Fig. 81.

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}E \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}E = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega' ,$$

d. h. E ist identisch mit ω: *Der Abstand des Periastrons vom Knoten ist gleich dem Winkel, den MC mit der großen Achse der Hilfsellipse bildet.*

192. Die Bahnbestimmung der Doppelsterne. Allgemeines. Die Methoden der Bahnbestimmung der Doppelsterne unterscheiden sich in rein analytische, in rein graphische und in solche, bei denen Zeichnung *und* Rechnung zur Verwendung gelangen. Unter den rein analytischen findet man solche, die das Problem auffassen wie das Planeten- oder Kometenproblem und eine Darstellung der sieben Elemente durch sieben Beobachtungsstücke erstreben, und solche, die von vornherein möglichst viele Beobachtungen zur Verwendung zu bringen suchen. Die sieben Beobachtungsdaten,

unter denen sich offenbar mindestens ein Positionswinkel und eine Distanz befinden muß, sind variiert worden: *Savary* (Conn. d. Temps 1830) wählt 4 Pos. W. und 3 Distanzen, *Encke* (Berl. Jahrb. 1832) 4 Pos. W. und 4 Dist., *Klinkerfues* (Theor. Astr.) 6 Pos. W. und 1 Dist., allein diese Methoden, deren man noch mehr entwickeln könnte, sind wohl theoretisch elegant, aber praktisch fast wertlos wegen der starken Fehler, denen die einzelnen Beobachtungen unterworfen sind. Die andere Klasse analytischer Methoden, die jetzt ausschließlich zur Verwendung gelangt, trägt von vornherein den Eigentümlichkeiten der Doppelsternbeobachtungen mehr Rechnung, indem sie möglichst viele Beobachtungen heranzieht; viele Forscher haben an der Ausbildung dieser Methode gearbeitet, die denn auch kaum mehr etwas zu wünschen übrig lässt; wir nennen *J. Herschel* (Mem. Roy. Astr. Soc. Vol. 18), *Y. Villarceau* (Conn. des Temps 1877), *Kowalski* (Mém. Univ. Kasan 1873), *Glasenapp* (Monthly Not. Vol. 49), *Seeliger* (Handwörterbuch der Astronomie, Band I) u. a.

Bei allen graphischen Methoden wird die Gesamtheit der Beobachtungen graphisch dargestellt und dadurch der Zug der *scheinbaren Bahnellipse* festgelegt. Aus dieser werden dann die Elemente entweder durch Konstruktion oder durch Rechnung gefunden. Die Methoden von *Klinkerfues* (Theor. Astr. und Astr. Nachr. Bd. 42), *Zwiers* (Astr. Nachr. Bd. 139) u. a. gehören hierher. Die graphischen Methoden spielen auf dem jetzigen Standpunkt der Doppelstern-Astronomie noch eine große Rolle, da sie meist ein ebenso genaues Resultat geben, als eine lange Rechnung. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Herstellung der scheinbaren Ellipse; die Ableitung der Elemente daraus erfolgt graphisch und rechnerisch mit gleicher Leichtigkeit und Schärfe.

Wir wollen zuerst einige graphische Methoden besprechen, zugleich mit den daraus sich ergebenden Rechenvorschriften und dann die rein analytische Methode anschließen.

193. Graphische Methode von Zwiers. Wir nehmen an, daß die scheinbare Ellipse gezeichnet vorliege, ferner der Ort H des Hauptsternes in ihrem Innern und die Richtung nach dem Nordpol. Haben die Beobachtungen für einen vollen Umlauf oder mehr zur Verfügung gestanden, so kann daraus die Umlaufszeit U unmittelbar entnommen werden; bedecken die Beobachtungen nur ein Stück der Bahn, so wird man die Umlaufszeit mit Anwendung des Flächensatzes und Benutzung eines Planimeters oder ähnlichen Hilfsmittels ableiten. — Wird der durch den Hauptstern gehende Durchmesser $2a'$ der scheinbaren Ellipse gezogen, so erhält man den Ort, der dem Periastron entspricht (Nr. 191, Satz 4) und durch Vergleichung mit den Beobachtungen das Element T. Ferner ergibt Satz 6 die Exzentrizität $e = \sin\varphi = \frac{d}{a'}$, wo d die Entfernung des Hauptsternes vom Mittelpunkt ist. Zu $2a'$ sucht man den konjugierten Durchmesser $2b'$ der scheinbaren Ellipse und konstruiert dann mittels $\varkappa = \sec\varphi$ nach Satz 8 die Hilfsellipse und ihre große und kleine Achse 2α und 2β. Die zu α durch H gezogene Parallele gibt dann die Knotenlinie und deren Winkel mit der Richtung nach dem Pol ist die Länge des Knotens Ω; α ist gleich der großen

Halbachse a der wahren Bahn und $\beta : \alpha = \cos i$; endlich folgt ω nach der in Satz 10 angegebenen Konstruktion als Winkel, den α mit MC bildet.

Wenn man der gezeichnet vorliegenden scheinbaren Ellipse die Entfernung d des Hauptsternes vom Mittelpunkte, den durch den Hauptstern gelegten Halbmesser a' und den dazu konjugierten b', endlich die Positionswinkel χ_1 und χ_2 dieser letzteren entnimmt, dann können die Elemente mit Ausnahme der rein dynamischen T und U auch durch einfache Rechnung statt durch Konstruktion gefunden werden. Betreff χ_1 und χ_2 muß die Festsetzung getroffen werden daß χ_1 die Richtung des Hauptsternes vom Mittelpunkt aus gesehen angibt und daß unter der Richtung χ_2 jene zu verstehen ist, die mit der von χ_1 einen spitzen Winkel bildet. Man hat dann zuerst $e = \frac{d}{a'} = \sin\varphi$ und $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \sec\varphi$. Ferner werden a' und $b'' = \varkappa b'$ konjugierte Halbmesser der Hilfsellipse, die bekanntlich mit der großen und kleinen Halbachse α und β derselben in der Beziehung stehen:

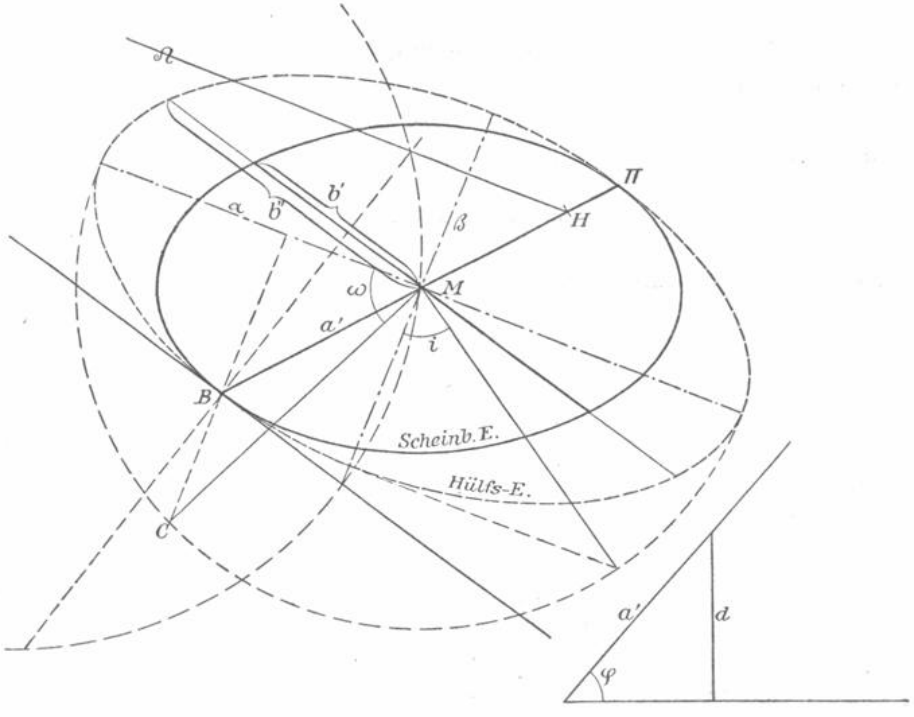

Fig. 82.

$$\alpha^2 + \beta^2 = a'^2 + b''^2$$
$$\alpha\beta = a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2) \quad \text{sin stets positiv.}$$

Hieraus folgen aber die Formeln:

$$(\alpha + \beta)^2 = a'^2 + b''^2 + 2a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)$$
$$(\alpha - \beta)^2 = a'^2 + b''^2 - 2a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)$$

aus denen man α und β berechnen kann. Dann ist:

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$a = \alpha.$$

Aus der in Nr. 191, Satz 10 gegebenen Konstruktion folgt weiter (Fig. 81):

$$a'^2 = \alpha^2 \cos E^2 + \beta^2 \sin E^2$$

oder

$$a'^2 (\sin E^2 + \cos E^2) = \alpha^2 \cos E^2 + \beta^2 \sin E^2$$

oder

$$\operatorname{tg} E = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}}$$

oder da E identisch ist mit ω:

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}}.$$

Die Projektion von ω auf die Projektionsebene wird nach der eben zitierten Nummer gefunden durch

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tg} \omega$$

und dies führt auf:

$$\Omega = \chi_1 - \omega'.$$

Wir stellen die Formeln nochmals zusammen:

Daten aus der scheinbaren Ellipse: d, a', b', χ_1, χ_2.

$$\begin{aligned}
e &= \sin \varphi = \frac{d}{a'} \\
\varkappa &= \sec \varphi \\
b'' &= \varkappa b' \\
\alpha + \beta &= \sqrt{a'^2 + b''^2 + 2 a' b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)} \\
\alpha - \beta &= \sqrt{a'^2 + b''^2 - 2 a' b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)} \\
a &= \alpha \\
\cos i &= \frac{\beta}{\alpha} \\
\operatorname{tg} \omega &= \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}} \\
\operatorname{tg} \omega' &= \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tg} \omega \\
\Omega &= \chi_1 - \omega'.
\end{aligned}$$

194. Graphische Methode von Klinkerfues. Wir wollen auch hier als vorliegende Daten die gezeichnete scheinbare Bahnellipse, den durch den Hauptstern gehenden Halbmesser a' derselben, den dazu konjugierten b' und die Positionswinkel χ_1 und χ_2 von a' und b' voraussetzen und zuerst eine Beziehung zwischen diesen Stücken und Knoten und Neigung ableiten. Zieht man durch den Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse eine Parallele zur Knotenlinie, fällt darauf von jedem Punkt der

Ellipse ein Lot und errichtet im Fußpunkt desselben das Lot in der wahren Bahn, so schließen diese beiden die Neigung i miteinander ein; man erhält daher die wahre Bahnellipse, wenn man jedes der erstgezogenen Lote im Verhältnisse $1 : \sec i$ verlängert (Fig. 83). Es liegen dann auf jedem Lot ein Punkt der wahren Ellipse und seine Projektion in der scheinbaren Ellipse. Nach Nr. 191 Satz 4 sind a' und b' die Projektionen der großen und kleinen Halbachse a und b der wahren Ellipse; man kann diese letzteren also unmittelbar durch Konstruktion finden, wenn man von den Endpunkten von a' und b' die Lote auf die Knotenlinie fällt und bis zum Schnitt mit der wahren Ellipse verlängert. Man liest nun unmittelbar aus der Figur ab:

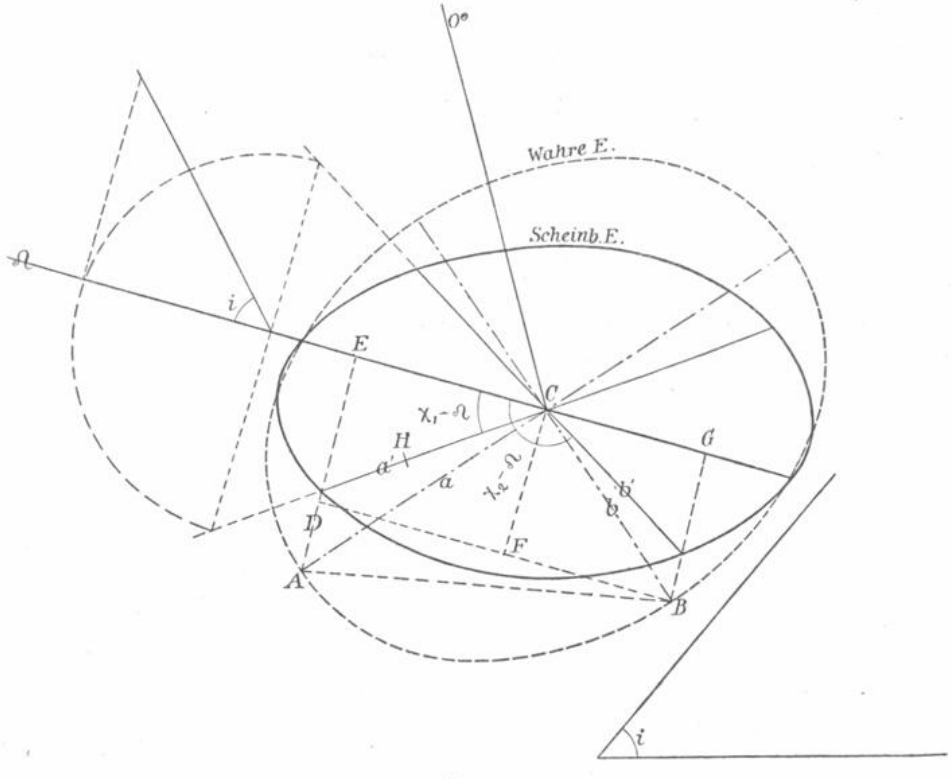

Fig. 83.

$$a^2 = a'^2 \cos(\chi_1 - \Omega)^2 + a'^2 \sin(\chi_1 - \Omega)^2 \sec i^2$$
$$b^2 = b'^2 \cos(\chi_2 - \Omega)^2 + b'^2 \sin(\chi_2 - \Omega)^2 \sec i^2;$$

die Summe dieser beiden gibt das Quadrat der Sehne s, die zwischen den Endpunkten von a und b gezogen wird. Zieht man BD parallel zur Knotenlinie, so läßt sich s^2 auch in folgender Weise ausdrücken:

$$s^2 = (AE - DE)^2 + (EC + CG)^2$$
$$= (a' \sin(\chi_1 - \Omega) \sec i - b' \sin(\chi_2 - \Omega) \sec i)^2 + (a' \cos(\chi_1 - \Omega) - b' \cos(\chi_2 - \Omega))^2,$$

so daß man durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält:

$$\cos i^2 = - \operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega) \operatorname{tg}(\chi_2 - \Omega). \qquad 1)$$

Dividiert man die Gleichungen für a^2 und b^2 durcheinander, so folgt:

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{\sin(\chi_2 - \Omega)^2 + \cos(\chi_2 - \Omega)^2 \cos i^2}{\sin(\chi_1 - \Omega)^2 + \cos(\chi_1 - \Omega)^2 \cos i^2}$$

oder wenn für $\cos i^2$ sein Wert aus 1) eingetragen und $b^2 : a^2 = 1 - e^2$ beachtet wird, nach leichter Reduktion:

$$\frac{\sin 2(\chi_2 - \Omega)}{\sin 2(\chi_1 - \Omega)} = -\frac{a'^2}{b'^2}(1 - e^2). \qquad 2)$$

Da die Exzentrizität e nach Nr. 191 Satz 6 gefunden werden kann, so ist die rechte Seite von 2) völlig bekannt und die Gleichung gibt also den Knoten Ω, worauf aus 1) die Neigung i folgt.

Um 2) durch Rechnung aufzulösen, setzt man:

$$\pm\frac{a'}{b'}\sqrt{1 - e^2} = \operatorname{tg}\zeta, \qquad 3)$$

worauf man erhält

$$\frac{\sin 2(\chi_1 - \Omega) - \sin 2(\chi_2 - \Omega)}{\sin 2(\chi_1 - \Omega) + \sin 2(\chi_2 - \Omega)} = \frac{1 + \operatorname{tg}\zeta^2}{1 - \operatorname{tg}\zeta^2}$$

oder

$$\frac{\cos(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega)\sin(\chi_1 - \chi_2)}{\sin(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega)\cos(\chi_1 - \chi_2)} = \sec 2\zeta$$

oder

$$\operatorname{tg}(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega) = \operatorname{tg}(\chi_1 - \chi_2)\cos 2\zeta. \qquad 4)$$

Die Gleichung 3) gibt vier Werte von ζ, denen vier Werte von 2Ω aus 4) entsprechen; da aber die Gleichung 1) einen positiven Wert von $\cos i^2$ ergeben muß, der kleiner als 1 ist, scheiden zwei Werte aus und es bleiben nur zwei Werte Ω übrig, die sich voneinander um 180° unterscheiden. Diese Zweideutigkeit ist aber, wie schon früher gezeigt, notwendig mit dem Problem verknüpft.

Man kann mittels 2) den Knoten auch leicht durch eine Konstruktion finden. Man braucht nur aus dem Zentrum der scheinbaren Ellipse zwei Gerade zu ziehen, die den Winkeln $2\chi_1$ und $2\chi_2$ entsprechen; zieht man diesen parallel zwei Gerade in Abständen, deren Verhältnis gleich ist $\frac{a'^2}{b'^2}(1 - e^2)$ (welches zu rechnen ist) und verbindet deren Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt der Ellipse, so erhält man eine Gerade, deren Richtung dem Winkel 2Ω entspricht.

Um i nach der Formel 1) zu konstruieren, errichtet man auf der Linie Ω in der Entfernung 1 das Lot; auf diesem werden von den Linien χ_1 und χ_2 Strecken abgeschnitten, welche die tang von $\Omega - \chi_2$ und $\chi_1 - \Omega$ sind; zu diesen wird das geometrische Mittel genommen, indem man über der ganzen Strecke den Halbkreis schlägt usf.

Der Abstand des Periastrons vom Knoten: ω ergibt sich aus dem von den Geraden Ω, a, a' gebildeten Dreikant:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)}{\cos i}$$

oder, wenn quadriert und der Werth von $\cos i^2$ aus 1) eingetragen wird:

$$\operatorname{tg}\omega^2 = \operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)\operatorname{cotg}(\Omega - \chi_2). \qquad 5)$$

$\operatorname{tg}\omega$ wird also wieder als geometrisches Mittel aus den Strecken $\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)$ und $\operatorname{cotg}(\Omega - \chi_2)$ konstruiert. $\chi_1 - \Omega$ und ω liegen im selben Quadranten.

Um die Durchgangszeit durch Periastron: T festzustellen, berechnet man den Positionswinkel P_0, welcher dem Stern entspricht, wenn er im Periastron seiner wahren Bahn sich befindet; da allgemein (Gl. 19, Seite 622)

$$\operatorname{tg}(P - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + v),$$

so folgt für $v = 0$:

$$\operatorname{tg}(P_0 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}\omega. \qquad 6)$$

Wird hieraus P_0 berechnet, so läßt sich durch Vergleichung mit den beobachteten Positionswinkeln die dazugehörige Zeit feststellen, welche T sein wird.

Mit jedem beobachteten Positionswinkel kann man durch

$$\operatorname{tg}(\omega + v) = \frac{\operatorname{tg}(P - \Omega)}{\cos i} \qquad 7)$$

das Argument der Breite $\omega + v$ berechnen und dann mittels der gleichzeitig gemessenen Distanz ϱ den wahren Radiusvektor (Gl. 19) Seite 622)

$$r = \varrho \frac{\cos(P - \Omega)}{\cos(\omega + v)}. \qquad 8)$$

Durch v und r aber findet man die große Halbachse

$$a = \frac{r(1 + e\cos v)}{1 - e^2}. \qquad 9)$$

So kann aus jeder gemessenen Distanz die Halbachse a abgeleitet und damit dieses unsicherste Element mit möglichster Schärfe aus der Gesamtheit der Beobachtungen ermittelt werden; die beste Bestimmung ergeben in der Regel die Messungen im Apastron ($v = 180^0$), wofür man einfach hat:

$$a = \frac{r}{1 + e}, \qquad r = -\varrho \frac{\cos(P - \Omega)}{\cos\omega}.$$

Zur Ermittelung der Umlaufszeit U kann man zwei Wege einschlagen. Man wählt nach dem ersten zwei beobachtete Positionswinkel P_1 und P_2, welche durch eine möglichst große Zwischenzeit $t_2 - t_1$ voneinander getrennt sind, und berechnet dafür die zugehörigen wahren Anomalien nach

$$\operatorname{tg}(v_1 + \omega) = \frac{\operatorname{tg}(P_1 - \Omega)}{\cos i}, \qquad \operatorname{tg}(v_2 + \omega) = \frac{\operatorname{tg}(P_2 - \Omega)}{\cos i}$$

und dann die exzentrischen nach

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2.$$

Mittels dieser wird

$$\frac{2\pi}{U}(t_1 - \mathrm{T}) = E_1 - e\sin E_1$$

$$\frac{2\pi}{U}(t_2 - \mathrm{T}) = E_2 - e\sin E_2$$

und hieraus

$$\frac{2\pi}{U} = \frac{(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)}{t_2 - t_1},$$

welches die mittlere jährliche Bewegung ist.

Auf dem zweiten Wege bedient man sich des Flächensatzes, indem man die Fläche der ganzen scheinbaren Ellipse F mit dem vom Radiusvektor in der Zeit $t_2 - t_1$ überstrichenen Raum f vergleicht, nachdem man beide mittels des Planimeters oder durch Abzählen der Quadrate auf Millimeterpapier ausgemessen hat; es ist dann

$$U = \frac{F}{f}(t_2 - t_1).$$

Wir stellen die Formeln für die Rechnung nochmals zusammen:

Daten: a', b', χ_1, χ_2, d.

$$e = \frac{d}{a'}$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \pm\frac{a'}{b'}\sqrt{1 - e^2}$$

$$\operatorname{tg}(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega) = \operatorname{tg}(\chi_1 - \chi_2)\cos 2\zeta$$

$$\cos i^2 = -\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)\operatorname{tg}(\chi_2 - \Omega)$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)}{\cos i}$$

($\chi_1 - \Omega$ und ω liegen in demselben Quadranten)

$$\operatorname{tg}(P_0 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}\omega \qquad \text{(hiermit T)}$$

$$\operatorname{tg}(\omega + v) = \frac{\operatorname{tg}(P - \Omega)}{\cos i}$$

$$r = \varrho\frac{\cos(P - \Omega)}{\cos(\omega + v)}$$

$$a = \frac{r(1 + e\cos v)}{1 - e^2}$$

$$\overset{t_1}{\operatorname{tg}(v_1 + \omega)} = \frac{\operatorname{tg}(P_1 - \Omega)}{\cos i} \qquad \overset{t_2}{\operatorname{tg}(v_2 + \omega)} = \frac{\operatorname{tg}(P_2 - \Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$\frac{2\pi}{U} = \frac{(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)}{t_2 - t_1}.$$

195. Analytische Methode. Es soll hier keine der rein analytischen Methoden zur Darstellung gelangen, die sich gerade so vieler Beobachtungsdaten bedienen, als Elemente zu bestimmen sind, da sie nur theoretischen Wert besitzen und zur praktischen Ausführung einer Bahnbestimmung nicht mehr verwendet werden; sondern es soll diejenige Methode beschrieben werden, deren man sich gegenwärtig fast ausschließlich bedient, wenn man *nur* die Rechnung anwenden will; wir lehnen uns dabei an die Formulierung an, die ihr *Seeliger* a. a. O. gegeben hat.

Voraussetzung der Methode ist, daß mindestens fünf zusammengehörige Positionswinkel und Distanzen gegeben seien. Fehlt es an guten Distanzen, was bei engen Doppelsternen vorkommen kann, so muß wenigstens eine derartig fortlaufende Reihe von Positionswinkeln P gegeben sein, daß man daraus für fünf Zeitepochen den Wert der Differenzialquotienten $\frac{dP}{dt}$ berechnen kann; ist dies möglich, so kann man nach dem Flächensatz $\varrho^2 \frac{dP}{dt} = \text{const.}$ die const. mittels *einer* guten Distanz berechnen und dann für die vier anderen Zeiten die zugehörigen ϱ durch Rechnung finden. Man kann die eine Distanz auch beliebig annehmen und erhält dann natürlich die Dimensionen der wahren Ellipse in diesem willkürlichen Maßstab ausgedrückt, sonst aber alles andere ebenso richtig, als ob die eine Distanz bekannt gewesen wäre. Man wird sogar meistens die Distanz anfänglich willkürlich lassen und erst zum Schluß aus allen guten Distanzmessungen die gewählte Einheit in Bogensekunden ermitteln.

Durch die fünf (ϱ, P) sind fünf Paar rechtwinklige Koordinaten x, y bestimmt, durch welche die Punkte der scheinbaren Ellipse ebenfalls bestimmt werden können. Konstruiert man nämlich ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Hauptstern liegt, dessen $+X$-Achse der nördliche Teil des Meridians ist und dessen $+Y$-Achse nach Osten gerichtet ist, so wird

$$x = \varrho \cos P, \qquad y = \varrho \sin P.$$

In diesen rechtwinkligen Koordinaten wird die Gleichung der scheinbaren Ellipse, allgemein angesetzt und mit Beachtung, daß der Hauptstern (Anfangspunkt) nicht im Brennpunkt liegt:

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0, \qquad 1)$$

worin $\beta, \gamma, \beta\gamma - \delta^2$ positiv sein müssen. Setzt man hier die fünf gegebenen Paare x, y ein, so hat man fünf lineare Gleichungen mit den fünf Unbekannten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, aus welchen diese bestimmt werden können. Man wird indessen niemals versäumen, etwa mehr vorhandene Daten mit zu benutzen und so viele lineare Gleichungen aufzustellen, als zusammengehörige x, y vorhanden sind. Man wird dann aus allen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der $\beta, \gamma, \ldots$ berechnen. Ist dies geschehen, so ist die *Gleichung der scheinbaren Bahn* bekannt. Aus dieser aber läßt sich Form und Lage der wahren Ellipse bestimmen, indem man einfach in Zeichen umsetzt, daß die scheinbare Ellipse die rechtwinklige Projektion der wahren und daß der Koordinatenanfangspunkt der Brennpunkt der wahren ist.

Die Gl. 1) stellt einen elliptischen Zylinder dar, dessen Achse — die Z-Achse — mit dem Visionsradius zusammenfällt. Wir transformieren sie auf ein anderes System, dessen x-Achse mit der Knotenlinie zusammenfällt und dessen y-Achse in der wahren Bahnebene liegt. Hierzu haben wir zuerst das bisherige System um die z-Achse um den Winkel Ω zu drehen; es wird dann

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\Omega - y' \sin\Omega \\ y &= x' \sin\Omega + y' \cos\Omega \\ z &= z' \end{aligned}$$

sodann ist das System $X'Y'Z$ um die Neigung i um die X'-Achse zu drehen; das gibt:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \\ y' &= y'' \cos i - z'' \sin i \\ z' &= y'' \sin i + z'' \cos i \end{aligned}$$

und daher wird:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i + z'' \sin \Omega \sin i \\ y &= x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i - z'' \cos \Omega \sin i \\ z &= \qquad\quad y'' \sin i \qquad\quad + z'' \cos i . \end{aligned}$$

Trägt man dies in 1) ein, so erhält man die Gleichung des Zylinders im X''-Y''-Z''-System; setzt man darin $z'' = 0$, so erhält man den Schnitt des Zylinders mit der Ebene $z'' = 0$, d. h. mit der wahren Bahnebene oder man erhält die *Gleichung der wahren Bahnellipse*, bezogen auf die $X''Y''$-Achsen. Diese wird also:

$$\begin{aligned} &\beta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)^2 + \gamma(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i)^2 + \\ &\qquad + 2\delta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) + \\ &+ 2\varepsilon(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) + 2\zeta(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) - 1 = 0. \end{aligned} \qquad 2)$$

Die Gleichung der wahren Bahnellipse kann aber auch auf einem anderen Wege aufgestellt werden. In bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der wahren Ellipse liegt und dessen Achsen mit der großen und kleinen Halbachse a und b zusammenfallen, wird sie

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 ;$$

führt man ein hierzu paralleles System $\xi'\eta'$ ein, dessen Anfangspunkt im Brennpunkt liegt, so wird

$$\xi = \xi' + ae , \qquad \eta = \eta'$$

und daher die Gleichung im letzten System:

$$\frac{(\xi' + ae)^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} = 1 .$$

Dreht man jetzt noch das $\xi'\eta'$-System um den Winkel ω, den die Apsidenlinie mit der Knotenlinie bildet — Abstand des Periastrons von Knoten —, so fällt es mit dem $x''y''$-System zusammen und es wird daher

$$\begin{aligned} \xi' &= \quad x'' \cos \omega + y'' \sin \omega \\ \eta' &= -x'' \sin \omega + y'' \cos \omega \end{aligned}$$

und die Gleichung der wahren Ellipse:

$$\frac{(x'' \cos \omega + y'' \sin \omega + ae)^2}{a^2} + \frac{(-x'' \sin \omega + y'' \cos \omega)}{b^2} = 1 . \qquad 3)$$

Die Gl. 2) und 3) sind die Gleichungen derselben Kurve bezogen auf dasselbe System; sie müssen also identisch sein, d. h. ihre Koeffizienten müssen bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ übereinstimmen. Dies führt auf folgende Beziehungen:

$$\beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + \delta \sin 2\Omega = \varkappa \left(\frac{\cos \omega^2}{a^2} + \frac{\sin \omega^2}{b^2} \right) \quad 4)$$

$$\cos i^2 (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - \delta \sin 2\Omega) = \varkappa \left(\frac{\sin \omega^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2} \right) \quad 5)$$

$$\cos i (-\beta \sin 2\Omega + \gamma \sin 2\Omega + 2\delta \cos 2\Omega) = \varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin 2\omega \quad 6)$$

$$\varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega = \varkappa \frac{ae \cos \omega}{a^2} \quad 7)$$

$$\cos i (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) = \varkappa \frac{ae \sin \omega}{a^2} \quad 8)$$

$$-1 = \varkappa (e^2 - 1), \quad 9)$$

deren Auflösung die fünf Elemente a, e, ω, Ω, i liefern muß. Aus 9) folgt

$$\varkappa = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

also

$$\varkappa \frac{e}{a} = \frac{e}{p} \qquad (p = \text{Parameter})$$

$$\varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varkappa}{a^2} \right) = -\frac{e^2}{p^2}.$$

Damit werden 7) und 8)

$$\frac{e}{p} \cos \omega = \varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega \quad 7^a)$$

$$\frac{e}{p} \sin \omega = (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) \cos i, \quad 8^a)$$

deren doppeltes Produkt

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2\omega = \cos i (-\varepsilon^2 \sin 2\Omega + \zeta^2 \sin 2\Omega + 2\varepsilon\zeta \cos 2\Omega)$$

mit der so geschriebenen Gl. 6):

$$-\frac{e^2}{p^2} \sin 2\omega = \cos i (-\beta \sin 2\Omega + \gamma \sin 2\Omega + 2\delta \cos 2\Omega)$$

durch Addition vereinigt, auf

$$(-\varepsilon^2 - \beta) \sin 2\Omega + (\zeta^2 + \gamma) \sin 2\Omega + (2\varepsilon\zeta + 2\delta) \cos 2\Omega = 0$$

führt, woraus:

$$\operatorname{tg} 2\Omega = -\frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\zeta^2 + \gamma - \varepsilon^2 - \beta}. \quad 10)$$

Die Differenz der Gleichungen 4) und 5)

$$-\frac{e^2}{p^2} \cos 2\omega = \beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + \delta \sin 2\Omega - (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - \delta \sin 2\Omega) \cos i^2$$

hinzugefügt zur Gleichung

$$\frac{e^2}{p^2} \cos 2\omega = (\varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega)^2 - (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega)^2 \cos i^2,$$

welche die Differenz der Quadrate von $7^a)$ und $8^a)$ ist, führt auf:

$$\cos i^2 = \frac{(\beta + \varepsilon^2)\cos\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\sin\Omega^2 + (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega}{(\beta + \varepsilon^2)\sin\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\cos\Omega^2 - (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega}. \qquad 11)$$

Von den *vier* Werten von Ω, welche 10) gibt, werden zwei dadurch ausgeschieden, daß die rechte Seite von 11) kleiner als 1 herauskommen muß. Es bleibt also, wie es sein muß, nur eine zweifache Lösung übrig.

Die rechte Seite der Gl. 5) kann so geschrieben werden:

$$\varkappa\left(\frac{\sin\omega^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2}\right) = \frac{\varkappa}{b^2} + \varkappa\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin\omega^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2}\sin\omega^2,$$

man hat also:

$$\frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2}\sin\omega^2 = (\beta\sin\Omega^2 + \gamma\cos\Omega^2 - \delta\sin 2\Omega)\cos i^2.$$

Wird hiezu das Quadrat von $8^a)$ addiert, so kommt:

$$\frac{1}{p^2} = ((\beta + \varepsilon^2)\sin\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\cos\Omega^2 - (\delta + \zeta\varepsilon)\sin 2\Omega))\cos i^2$$

oder nach Eintragung von 11)

$$\frac{1}{p^2} = (\beta + \varepsilon^2)\cos\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\sin\Omega^2 + (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega. \qquad 12)$$

Diese Gleichung gibt den Parameter p, worauf die in der Form

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= \quad p(\varepsilon\cos\Omega + \zeta\sin\Omega) \\ e\sin\omega &= -p(\varepsilon\sin\Omega - \zeta\cos\Omega)\cos i \end{aligned} \qquad 13)$$

geschriebenen Gleichungen $7^a)$ und $8^a)$ die Elemente e und ω liefern.

Man kann leicht ein Kriterium aufstellen, wodurch die aus 10) sich ergebenden unzulässigen Werte von Ω von vorneherein ausgeschieden werden können. Es muß nämlich der Zähler von 11), welcher identisch ist mit der rechten Seite von 12), notwendig positiv sein; also muß auch der Nenner positiv sein und überdies größer als der Zähler; dies giebt die Bedingung

$$(\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \zeta^2)\cos 2\Omega + 2(\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega < 0,$$

die sich, da nach 10)

$$(\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \zeta^2) = \frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\operatorname{tg} 2\Omega}$$

ist, sofort so schreiben läßt:

$$\frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\sin 2\Omega} < 0;$$

$\sin 2\Omega$ *muß also das Zeichen von* $-(\delta + \varepsilon\zeta)$ *haben.*

Man kann die abgeleiteten Formeln, die zur Ermittelung der fünf Elemente a, e, i, Ω, ω dienen, durch Einführung einiger Hilfsgrößen in bequemere Form bringen. Setzt man

$$\begin{aligned} \gamma + \zeta^2 &= \mu \\ \beta + \varepsilon^2 &= \nu \\ \delta + \zeta\varepsilon &= \lambda \end{aligned}$$

dann wird aus 10)

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{-2\lambda}{\mu - \nu}$$

($\sin 2\Omega$ hat das Zeichen von -2λ)

und aus 12)

$$\frac{1}{p^2} = \nu \cos\Omega^2 + \mu \sin\Omega^2 + \lambda \sin 2\Omega = A$$

oder

$$\frac{1}{p^2} = \tfrac{1}{2}(\nu + \mu) + \tfrac{1}{2}(\nu - \mu)\cos 2\Omega + \lambda \sin 2\Omega = A$$

und endlich aus 11)

$$\cos i^2 = \frac{\nu \cos\Omega^2 + \mu \sin\Omega^2 + \lambda \sin 2\Omega}{\nu \sin\Omega^2 + \mu \cos\Omega^2 - \lambda \sin 2\Omega} = \frac{A}{B}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} i^2 = \frac{1 - \cos i^2}{\cos i^2} = \frac{B - A}{A} = \frac{A + B}{A} - 2$$

also, da $A + B = \mu + \nu$ und $\frac{1}{A} = p^2$,

$$\operatorname{tg} i^2 = (\mu + \nu)p^2 - 2.$$

Die mittlere jährliche Bewegung und die Durchgangszeit durchs Periastron rechnet man hier ebenso wie in Nr. 194.

196. Zusammenstellung der Formeln für Berechnung einer Doppelsternbahn.

I. Für jede Beobachtung P, ϱ rechne man

$$x = \varrho \cos P, \qquad y = \varrho \sin P$$
$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0$$

und löse das System linearer Gleichungen mit den Unbekannten β, γ, δ, ε, ζ nach einem geeigneten Ausgleichungsverfahren auf.

II.
$$\mu = \gamma + \zeta^2$$
$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$
$$\lambda = \delta + \zeta\varepsilon.$$

III.
$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{-2\lambda}{\mu - \nu} \qquad (\sin 2\Omega \text{ hat das Zeichen von } -2\lambda)$$
$$\frac{1}{p^2} = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu) + \tfrac{1}{2}(\nu - \mu)\cos 2\Omega + \lambda \sin 2\Omega$$
$$\operatorname{tg} i^2 = (\mu + \nu)p^2 - 2.$$

IV.
$$e \sin\omega = p(-\varepsilon \sin\Omega + \zeta \cos\Omega)\cos i$$
$$e \cos\omega = p(\quad \varepsilon \cos\Omega + \zeta \sin\Omega)$$
$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

V. Für jede Beobachtung rechne man:

$$\operatorname{tg}(v+\omega) = \frac{\operatorname{tg}(P-\Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T}) = E - e\sin E$$

und bestimme aus dem ganzen System der letzten Gleichung die Elemente U und T.

197. Die Differenzialformeln der Bahnverbesserung. Hat man nach einer der im vorigen beschriebenen Methoden die Bahnelemente eines Doppelsternes aufgestellt, so wird man in der Regel nur dann Veranlassung zu einer Verbesserung derselben nehmen, wenn man Elemente wünscht, die den strengen Anforderungen einer Ausgleichung genügen. Für diese gegenwärtig noch seltenen Fälle wollen wir die Beziehungen zwischen den Differenzialen der beobachteten Koordinaten P und ϱ und den Differenzialen der Elemente aufstellen; betreff der Anwendung dieser Gleichungen können wir auf die allgemeinen Ausführungen in Nr. 140 verweisen.

Differenziert man die erste der Gleichungen 19) (Seite 622)

$$\operatorname{tg}(P-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega+v)$$
$$\varrho = r\cos(\omega+v)\sec(P-\Omega)$$

total, so kommt:

$$\frac{dP}{\cos(P-\Omega)^2} - \frac{d\Omega}{\cos(P-\Omega)^2} = -\sin i \operatorname{tg}(\omega+v)\, di + \frac{\cos i}{\cos(\omega+v)^2}d\omega + \frac{\cos i}{\cos(\omega+v)^2}dv$$

oder nach der zweiten:

$$dP = d\Omega - \frac{r}{\varrho}\sin i \sin(\omega+v)\cos(P-\Omega)\,di + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \cos i\, d\omega + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \cos i\, dv.$$

Wird hier (Gl. 15, Seite 440)

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\varphi\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) + \frac{a}{r}\cos\varphi\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)d\varphi$$

eingetragen, so erscheint schließlich:

$$\begin{aligned} dP = {} & d\Omega - \frac{r}{\varrho}\sin i\sin(\omega+v)\cos(P-\Omega)\,di + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\cos i\, d\omega \\ & + \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos i\cos\varphi\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) + \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sin E\cos i\left(\frac{r}{a}+\cos\varphi^2\right)d\varphi. \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Schreibt man die zweite der obigen Gleichungen unter Benutzung der ersten in der Form:

$$\varrho^2 = r^2\left(\cos(\omega+v)^2 + \cos i^2 \sin(\omega+v)^2\right)$$

und differenziert total, so kommt mit Beachtung von (Gl. 16 Seite 440)

$$dr = \frac{r}{a}\,da + a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) - a\cos\varphi\cos v\, d\varphi$$

nach leichter Reduktion:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} - \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\cdot d\omega - \sin(P-\Omega)^2\,\mathrm{tg}\,i\cdot di$$
$$+\left(\frac{a}{r}\right)^2(e\sin E - \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\cos\varphi)\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\,d\mathrm{T}) \qquad \text{II.}$$
$$-\left(\frac{a}{r}\right)^2\left((\cos E - e)\cos\varphi + \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\sin E\left(\frac{r}{a}+\cos\varphi^2\right)\right)d\varphi.$$

Die Gleichungen I. und II. geben die Bedingungsgleichungen zur Verbesserung der Elemente.

198. Veränderliche Eigenbewegung. Man hat einige Sterne kennen gelernt, die einfach erscheinen, aber doch eine periodische Bewegung wahrnehmen lassen, indem ihre Eigenbewegung nicht rein proportional der Zeit fortschreitet, sondern ein periodisches Auf- und Abschwanken zeigt (*Veränderliche Eigenbewegung*). Zur Erklärung dieser Erscheinung hat *Bessel* die Hypothese herangezogen, daß sich in der Nähe dieser Sterne *dunkle* Begleiter befinden, dieselben also Doppelsternsysteme bilden, von denen nur die eine Komponente sichtbar ist. Diese Hypothese hat dadurch, daß bei einem dieser Sterne der Begleiter nachträglich aufgefunden wurde, sehr an Wahrscheinlichkeit gewonnen und es läßt sich auch kaum eine andere aufstellen. In der Verfolgung dieser Hypothese entsteht nun das Problem: *Man soll aus den absoluten Koordinaten eines Sternes mit veränderlicher Eigenbewegung die Bahn ableiten, die er um den Schwerpunkt des aus ihm selbst und einem dunklen Begleiter bestehenden Systems beschreibt.*

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem größten Kreise. Sind A_0 und D_0 seine Koordinaten zur Zeit t_0, μ und μ' die jährlichen Eigenbewegungen in diesen Koordinaten, so werden die Koordinaten des Schwerpunktes für die Zeit t:

$$A_0 + (t-t_0)\,\mu$$
$$D_0 + (t-t_0)\,\mu'.$$

Nennt man ferner ξ, η die rechtwinkligen *relativen* Koordinaten des sichtbaren Sternes in Bezug auf den Schwerpunkt, so werden die absoluten Koordinaten A und D des sichtbaren Sternes folgende Werte annehmen:

$$A = A_0 + (t-t_0)\,\mu + \eta\sec D_0$$
$$D = D_0 + (t-t_0)\,\mu' + \xi.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_0 + (t-t_0)\mu = a, \qquad D_0 + (t-t_0)\,\mu = d$$

so folgt daraus:

$$(A-a)\cos D_0 = \eta$$
$$(D-d) \qquad\quad = \xi.$$

Die A, D liegen für eine Reihe von Zeitepochen als beobachtete Größen vor, die a, d enthalten vier Unbekannte A_0, D_0, μ, μ', doch ist es leicht für sie aus langjährigen Beobachtungsreihen gute Näherungswerte aufzustellen, die eventuell durch Wiederholung des Verfahrens verbessert werden. Die ξ, η sind also für eine Reihe

von Epochen bekannt. Da sie nun der Gleichung der scheinbaren Ellipse genügen müssen, die der sichtbare Stern um den Schwerpunkt beschreibt, so hat man den Ansatz

$$\beta\xi^2 + \gamma\eta^2 + 2\delta\xi\eta + 2\varepsilon\xi + 2\zeta\eta - 1 = 0$$

und erhält, wenn er für jede Beobachtung aufgestellt wird, eine Reihe linearer Gleichungen mit den Unbekannten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Sind diese ermittelt, so ergeben sich daraus die Elemente a, e, i, Ω, ω der wahren Ellipse nach dem in Nr. 195 entwickelten Algorithmus. Für die Umlaufszeit hat man in der Periode der Differenzen $A - a$ und $D - d$ von vorneherein einen genügenden Näherungswert, doch kann man sie auch direkt zugleich mit der Durchgangszeit durchs Perihel ableiten. Aus den Formeln 19[a]) (Seite 622) folgt wegen

$$\varrho\cos P = \xi, \qquad \varrho\sin P = \eta:$$
$$r\sin(\omega + v) = (\eta\cos\Omega - \xi\sin\Omega)\sec i$$
$$r\cos(\omega + v) = \eta\sin\Omega + \xi\cos\Omega;$$

wird hieraus für jedes beobachtete $\xi\eta$ v berechnet, so hat man weiter

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

und schließlich eine Reihe von Bedingungsbegleichungen:

$$\frac{2\pi}{U}(t - \mathrm{T}) = E - e\sin E,$$

aus denen die Unbekannten $\frac{2\pi}{U}$ und $\frac{2\pi}{U}\mathrm{T}$ durch Ausgleichung zu ermitteln sind.

Auf diese Weise erhält man die Bahn, welche der sichtbare Stern um den Schwerpunkt des Systems beschreibt. Wünscht man eine Ephemeride des sichtbaren Sternes, so wird man folgende Formeln zur Verfügung haben, die sich leicht aus obigen ergeben:

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{U}(t - \mathrm{T})$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$
$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$\xi = r(\cos(\omega + v)\cos\Omega - \sin(\omega + v)\sin\Omega\cos i)$$
$$\eta = r(\cos(\omega + v)\sin\Omega + \sin(\omega + v)\cos\Omega\cos i)$$
$$A = A_0 + \mu(t - t_0) + \eta\sec D_0$$
$$D = D_0 + \mu'(t - t_0) + \xi$$

oder auch nach Berechnung von v und r:

$$\operatorname{tg}(P - \Omega) = \cos i\operatorname{tg}(\omega + v)$$
$$\varrho = r\frac{\cos(\omega + v)}{\cos(P - \Omega)}$$
$$\xi = \varrho\cos P$$
$$\eta = \varrho\sin P \quad \text{usf.}$$

Ist der Begleiter auch optisch sichtbar, so kann seine Bahn um den Hauptstern angegeben werden, sobald *eine* Messung seiner Distanz vom Hauptstern gelungen ist. Denn ist ϱ die aus der Bahn um den Schwerpunkt sich ergebende Distanz des Hauptsternes vom Schwerpunkt, ϱ' die Distanz des Begleiters vom Hauptstern, m die Masse des Hauptsternes, m' die des Begleiters, so hat man nach der Definition des Schwerpunktes

$$m\varrho = m'(\varrho' - \varrho),$$

woraus das *Verhältnis der Massen* bekannt wird:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}.$$

Nennt man a' die große Halbachse der Bahn, welche der Begleiter um den Hauptstern beschreibt, so ist auch

$$\frac{a' - a}{a} = \frac{m}{m'}$$

woraus:

$$a' = a\left(1 + \frac{m}{m'}\right).$$

Die übrigen Elemente sind beiden Ellipsen gemeinsam (Nr. 190).

Ist die Parallaxe p'' des Systems bekannt, so läßt sich auch die *Summe der Massen* berechnen, ausgedrückt in Einheiten der Sonnenmasse; denn man hat nach 14) (Seite 619)

$$m + m' = \left(\frac{(a')''}{p''}\right)^3 \frac{1}{U^2}.$$

In diesem allerdings seltenen Falle werden also die Massen der Komponenten selbst berechenbar.

199. Bahnbestimmung aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius. Spektroskopische Beobachtungen der Linienverschiebung unter Anwendung des Dopplerschen Prinzips führen zur Kenntnis der linearen Geschwindigkeiten im Visionsradius, ausgedrückt in einem absoluten Maß, z. B. in Kilometern pro Sekunde. Es sind dies relative Geschwindigkeiten zur Erde, die aber leicht nach Abzug der Geschwindigkeit der Erde, gemessen in derselben Richtung, in Geschwindigkeiten der Gestirne relativ zur Sonne verwandelt werden können. Wir wollen, wie üblich, die Geschwindigkeit, welche den Körper von der Erde bez. Sonne wegführt, als positiv bezeichnen. Nennt man für die Beobachtungszeit $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ die Komponenten der Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, bezogen auf die rechtwinkligen Achsen des Äquatorealsystems (also Größen, die den Jahrbuchangaben unmittelbar entnommen werden können, wenn man den Tag und die astronomische Einheit als Einheiten einführt), so wird die Geschwindigkeit der Erde in der Achse des Visionsradius, die durch die Koordinaten α, δ des Gestirnes gegeben ist:

$$-(X'\cos\delta\cos\alpha + Y'\cos\delta\sin\alpha + Z'\sin\delta)\,\tfrac{149480976}{86400}$$ Kilometer pro Sekunde

und die Korrektion der gemessenen Geschwindigkeit, um sie auf die Sonne zu beziehen, wird also:

$+ [3.238072] (X' \cos\delta \cos\alpha + Y' \cos\delta \sin\alpha + Z' \sin\delta)$ Kilometer pro Sekunde (X', Y', Z' = Geschwindigkeiten der äquatorealen geozentrischen Sonnenkoordinaten für 1 Tag in astronomischen Einheiten).

Bei einer ganzen Reihe von Sternen, deren immer noch weitere bekannt werden, zeigen nun die Geschwindigkeiten im Visionsradius, bezogen auf die Sonne, ein periodisches Auf- und Abschwanken, das kaum anders zu erklären ist, als durch die Annahme, daß das Gestirn aus zwei sehr nahen Komponenten besteht, die sich umeinander und um ihren Schwerpunkt bewegen. Es entsteht dann die Aufgabe, aus den beobachteten Geschwindigkeiten soweit möglich die Bahnelemente dieses »spektroskopischen Doppelsternes« zu ermitteln.

Man muß zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die beobachtete Linienverschiebung als von *einer* Komponente oder von beiden herrührend anzunehmen ist. Im ersteren Fall, wo also die zweite Komponente als dunkel oder von verschwindender Lichtstärke angenommen wird, setzt sich die beobachtete Geschwindigkeit aus derjenigen des Schwerpunktes und aus der der ersten Komponente um den Schwerpunkt zusammen; im zweiten Fall stellt sie die relative Geschwindigkeit der beiden Körper dar. Man bekommt also im ersten Fall, nach Abzug der konstanten Geschwindigkeit des Schwerpunktes, die Bahn der hellen Komponente um diesen, im zweiten Fall die Bahn der Komponenten umeinander.

Bezogen auf ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sonne und der x-Achse zusammenfallend mit dem Visionsradius seien ζ und ζ' die in dieser Achse gemessenen Koordinaten der beiden Massen m und m', Z die Koordinate ihres Schwerpunktes; dann folgt aus

$$(m + m')\, Z = m\zeta + m'\zeta'$$

leicht:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{m'}{m + m'} \frac{d(\zeta - \zeta')}{dt}$$

oder wenn $\zeta - \zeta' = x$ gesetzt wird:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{m'}{m + m'} \frac{dx}{dt}. \qquad 1)$$

Im ersten Fall wird $\frac{d\zeta}{dt}$ beobachtet, das sich hiernach zusammensetzt aus der konstanten Geschwindigkeit des Schwerpunktes und aus der rein periodischen des Körpers m um den Schwerpunkt; im zweiten Fall wird nur das rein periodische $\frac{dx}{dt}$ beobachtet, welches die Geschwindigkeit von m in bezug auf m' darstellt, und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bleibt hier demnach unbekannt.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die beiden Fälle ganz gleichartig behandelt werden können. Legt man im ersten die $\xi\eta$-Ebene eines Systems durch den Schwerpunkt senkrecht zum Visionsradius, die ξ-Achse durch den aufsteigenden Knoten der Bahn auf dieser Ebene, zählt von der ξ-Achse aus die Längen in der Bewegungsrichtung auf die $+\eta$-Achse zu, nimmt endlich die $+\zeta$-Achse in der Fortsetzung des Visionsradius über das Gestirn hinaus, so hat man nach Nr. 110 Gl. (a) und (b)

$$\zeta = r \sin(\omega + v) \sin i$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{f}{\sqrt{a_1 (1 - e^2)}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega) \sin i,$$

wenn mit f die für die Bewegung um den Schwerpunkt maßgebende Attraktionskonstante bezeichnet wird; diese ist aber nach Gl. 3a) (Seite 616)

$$f = k \frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m + m'} \qquad \begin{matrix} (k = \text{Gaußsche Konstante; } m, m' \\ \text{in Teilen der Sonnenmasse}) \end{matrix}$$

und man hat ferner (U = Umlaufszeit, μ = mittlere tägliche Bewegung)

$$\frac{2\pi}{U} a_1^{\frac{3}{2}} = \mu a_1^{\frac{3}{2}} = k \frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m + m'},$$

so daß nun mit Beachtung von $\zeta = \xi - Z$ nach 1) geschrieben werden kann:

$$\frac{m'}{m + m'} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\mu a_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega). \qquad 2)$$

Das Integral hierüber zwischen den Grenzen t und $t + U$ ist Null, da die $\frac{dx}{dt}$ rein periodisch verlaufen; also gibt 1), da $\frac{dZ}{dt}$ eine Konstante ist:

$$U \frac{dZ}{dt} = \int_t^{t+U} \frac{d\xi}{dt} dt. \qquad 2a)$$

Bestimmt man hieraus durch mechanische Integration oder graphisch (mit Planimeter oder Millimeterpapier) $\frac{dZ}{dt}$ und bringt es von allen beobachteten $\frac{d\xi}{dt}$ in Abzug, so erhält man die $\frac{d\zeta}{dt}$, aus denen mittels 2) die Bahn zu ermitteln ist, wie nachher zu zeigen sein wird.

Im zweiten Fall legen wir das Achsensystem xyz durch den Körper m' parallel zum vorigen; dann wird, da die Bewegung von m um m' in einer ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipse erfolgt, wie die von m um den Schwerpunkt, ebenso wie vorhin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f}{\sqrt{a(1 - e^2)}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega) \sin i,$$

wo aber jetzt nach Gl. 5) (Seite 616)

$$f = k\sqrt{m + m'}$$

und

$$\frac{2\pi}{U} a^{\frac{3}{2}} = \mu a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{m + m'}$$

zu setzen ist; es wird also:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega). \qquad 3)$$

Da nach Seite 616

$$a_1 = \frac{m'}{m + m'} a,$$

so ist 3) identisch mit 2) und der Zusammenhang der Elemente mit den Größen $\frac{d\eta}{dt}$ bez. $\frac{dx}{dt}$ ist derselbe.

Wenn wir demgemäß jetzt die Gl. 3) allein weiter behandeln, so ist in erster Linie zu konstatieren, daß dieselbe das Element Ω nicht enthält, daß dasselbe also notwendig unbestimmt bleibt; ferner daß a und i sich nicht trennen lassen, daß also nur die Kombination $a \sin i$ bestimmt werden kann; endlich daß man hier ebenso wie bei den visuellen Doppelsternen die Umlaufszeit bez. μ direkt aus den Beobachtungen ableitet, was hier, wo in der Regel viele Umläufe zur Verfügung stehen, keinerlei Schwierigkeit macht. Es bleiben somit nur die Elemente

$$a \sin i,\ e,\ \omega,\ T \text{ (Durchgangszeit durchs Periastron)}$$

zu bestimmen, was nach der von *Lehmann-Filhés* ausgearbeiteten Methode (Astr. Nachr. Bd. 136, S. 17) in folgender Weise geleistet wird.

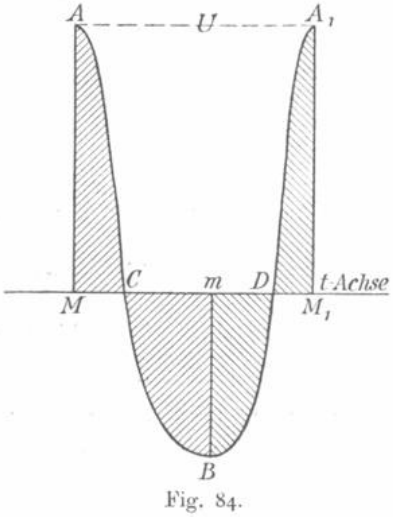

Fig. 84.

Bei der Unsicherheit der Beobachtungen wäre es müßige Arbeit, wollte man die Elemente aus vier Beobachtungen ableiten; man wird vielmehr unter Zuziehung sämtlicher Beobachtungen ein graphisches Verfahren einschlagen, indem man zunächst zu den Abszissen der Zeit als Ordinaten die $\frac{dx}{dt}$ aufträgt, nachdem man sie sämtlich mittels der bekannten Umlaufszeit auf einen Umlauf reduziert hat. Man erhält dann eine Kurve von der nebenstehenden Form (Fig. 84), deren Eigenschaften leicht zu diskutieren sind. Nach 3) hat die Kurve ein Maximum für $\omega + v = 0°$ (Punkt A) und ein Minimum für $\omega + v = 180°$ (Punkt B); die Punkte A und B zeigen also die Geschwindigkeiten beim Durchgang durch den aufsteigenden bez. absteigenden Knoten an. Die Kurvenzweige AB und BA_1 schneiden die Abszissenachse in den Punkten C und D, welche die Zeiten anzeigen, wo die Geschwindigkeiten Null sind oder wo der Körper sich parallel zur Knotenlinie bewegt. Die zu diesen Punkten gehörigen $\omega + v$ ergeben sich nach 3) aus

$$\begin{aligned} \cos(\omega + v_1) &= -e\cos\omega \\ \cos(\omega + v_2) &= -e\cos\omega \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} \cos(\omega + v_2) &= \cos(\omega + v_1) \\ \sin(\omega + v_2) &= -\sin(\omega + v_1) \end{aligned} \qquad 4)$$

wird. C liegt auf dem Wege vom aufsteigenden zum absteigenden, D auf dem Wege

vom absteigenden zum aufsteigenden Knoten, bei $\omega + v_1$ ist also der $\sin(\omega + v)$ positiv, bei $\omega + v_2$ aber negativ. Nennt man die

den Punkten	A	C	B	D	A_1
entsprechenden Zeiten	t_M	t_1	t_m	t_2	$t_M + U_2$

so werden die z-Koordinaten der beiden den Punkten C und D entsprechenden Punkte der Bahn:

$$z_1 = +\int_{t_M}^{t_1} \frac{dz}{dt}\,dt = -\int_{t_1}^{t_m} \frac{dz}{dt}\,dt = r_1 \sin(\omega + v_1)\sin i$$
$$z_2 = +\int_{t_m}^{t_2} \frac{dz}{dt}\,dt = -\int_{t_2}^{t_M+U} \frac{dz}{dt}\,dt = r_2 \sin(\omega + v_2)\sin i. \qquad 5)$$

Die Werte dieser Integrale kann man der Zeichnung entnehmen entweder mittels des Planimeters oder, wenn man Millimeterpapier benutzt hat, durch Abzählung der kleinen Quadrate; die Einheit, in der sie ausgedrückt werden, ist nicht von Belang, da im weiteren nur das Verhältnis $z_1 : z_2$ vorkommt; z_1 ist notwendig positiv, z_2 negativ. Die Größen z_1 und z_2 sind also bekannt; nimmt man dazu die Ordinaten der Punkte A und B, die wir in Kilometern ausgedrückt mit A und $-B$ bezeichnen wollen und die gleichfalls der Zeichnung entnommen werden können, so hat man alle Mittel, um die bestimmbaren Elemente zu berechnen. Die Gleichungen hierfür lassen sich unmittelbar hinschreiben. In der Tat folgt aus 3):

$$A = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e\cos\omega)$$
$$B = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}(1 - e\cos\omega);$$

also

$$\frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = \tfrac{1}{2}(A+B) \qquad 6)$$

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B} \qquad 7)$$

und allgemein

$$\frac{dz}{dt} = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos(\omega+v) + \tfrac{1}{2}(A-B). \qquad 8)$$

Diese letzte Gleichung empfiehlt sich zur Ephemeridenrechnung. Weiter gibt 5) mit Beachtung von 4):

$$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1+e\cos v_2}{1+e\cos v_1} = \frac{1+e\cos(\omega+v_2)\cos\omega + e\sin(\omega+v_2)\sin\omega}{1+e\cos(\omega+v_1)\cos\omega + e\sin(\omega+v_1)\sin\omega}$$
$$= \frac{\sin(\omega+v_1)^2 - e\sin(\omega+v_1)\sin\omega}{\sin(\omega+v_1)^2 + e\sin(\omega+v_1)\sin\omega} = \frac{\sin(\omega+v_1) - e\sin\omega}{\sin(\omega+v_1) + e\sin\omega}$$

woraus:

$$e\sin\omega = \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}\sin(\omega+v_1).$$

Nun folgt aus 8), da für $\omega + v = \omega + v_1$ $\dfrac{dz}{dt} = 0$ ist:

$$\cos(\omega + v_1) = -\frac{A-B}{A+B}$$

und daher

$$\sin(\omega + v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}.$$

Somit wird schließlich

$$e\sin\omega = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\,\frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}. \qquad 9)$$

Aus den Gl. 7) und 9) kann e und ω berechnet werden, worauf die Gl. 6) $a\sin i$ ergibt und die Durchgangszeit durchs Periastron T folgendermaßen gefunden wird. Da für sie $v = 0$ ist, so wird das zu T gehörige $\dfrac{dz}{dt}$ nach 3) und 6)

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_T = \tfrac{1}{2}(A+B)(1+e)\cos\omega$$

oder nach 8)

$$= \tfrac{1}{2}(A+B)\cos\omega + \tfrac{1}{2}(A-B). \qquad 10)$$

Zu dem hieraus folgenden Wert von $\dfrac{dz}{dt}$ sucht man in der Zeichnung die Abszisse, welche T sein wird. Auf welchem der Kurvenzweige AB oder BA_1 der Punkt, welcher dem Periastron entspricht, anzunehmen ist, kann leicht dadurch entschieden werden, daß in den Punkten

	A	B	A_1
$\omega + v =$	0°	180°	360°

ist; da man ω kennt, sieht man sofort, wo $v = 0$ wird. Dieses Verfahren wird ungenau, wenn das Periastron in der Nähe eines der Maximalpunkte A, B, A_1 der Kurve liegt. Man geht dann besser von den Zeiten t_1 bzw. t_2 aus, für welche $\dfrac{dz}{dt} = 0$ wird und für welche man die wahre Anomalie auch kennt; diese wird nämlich

$$\text{für } t_1 \text{ aus: } \sin(\omega + v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}, \quad \cos(\omega + v_1) = -\frac{A-B}{A+B}$$

$$\text{und für } t_2 \text{ aus: } \sin(\omega + v_2) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}, \quad \cos(\omega + v_2) = -\frac{A-B}{A+B}$$

gefunden, worauf zu rechnen ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$t_1 - T = \frac{E_1 - e\sin E_1}{\mu} \qquad t_2 - T = \frac{E_2 - e\sin E_2}{\mu}.$$

Zusammenstellung der Formeln.

$$\mu = \frac{2\pi}{U} \qquad (U \text{ in Tagen})$$

$$\left.\begin{aligned} e\sin\omega &= \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\,\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} \\ e\cos\omega &= \frac{A-B}{A+B} \end{aligned}\right\} \quad A,\ B \text{ in Kilometern pro Sekunde}$$

$$a\sin i = \tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu}\,86400$$

$$\sin(\omega+v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \qquad \sin(\omega+v_2) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

$$\cos(\omega+v_1) = -\frac{A-B}{A+B} \qquad \cos(\omega+v_2) = -\frac{A-B}{A+B}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$T = t_1 - \frac{E_1 - e\sin E_1}{\mu} \qquad T = t_2 - \frac{E_2 - e\sin E_2}{\mu}$$

(E_1, E_2 in Teilen des Radius).

Statt die letzten Formeln anzuwenden, kann man in geeigneten Fällen auch die Abszisse aufsuchen, die zur Ordinate

$$\tfrac{1}{2}(A+B)(1+e)\cos\omega = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos\omega + \tfrac{1}{2}(A-B)$$

gehört; diese gibt ebenfalls T.

Eine andere Methode der Elementenbestimmung hat *Schwarzschild* angegeben (Astr. Nachr. Bd. 152, S. 65). Das Periastron und das Apastron liegen um die halbe Umlaufszeit auseinander; ferner ist nach 8)

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{dz}{dt} - \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos(\omega+v);$$

d. h. verschiebt man in der Zeichnung Fig. 84 die Abszissenachse um den Betrag $\frac{1}{2}(A-B)$ nach oben, so werden die entstehenden Ordinaten $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ rein periodisch und haben die Eigenschaft, daß sie im Periastron den entgegengesetzt gleichen Wert haben wie im Apastron. Sucht man also im neuen Koordinatensystem diejenigen Punkte der Kurve auf, welche gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten haben und deren Abszissen um $\frac{1}{2}U$ verschieden sind, so sind dies die dem Periastron und Apastron entsprechenden Punkte. Man braucht zur praktischen Ausführung die Kurve nur ein zweites Mal auf Pauspapier zu zeichnen, um die neue Abszissenachse umzuklappen und um $\frac{1}{2}U$ zu verschieben. Die zum Periastron gehörige Abszisse gibt T, die Ordinate ist $\frac{1}{2}(A+B)\cos\omega$, so daß ω ebenfalls bekannt wird. Hierauf geben die Gl. 6) und 7), nämlich

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B} \quad \text{und} \quad a\sin i = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu}(A+B)$$

die Elemente e und $a\sin i$.

Die mechanische Quadratur kommt bei dieser Methode nur gelegentlich der Bestimmung von $\frac{dZ}{dt}$ nach 2[a]) (Seite 643) zur Anwendung, wenn es sich um eine Bewegung um den Schwerpunkt handelt. Sie läßt sich auch hier vermeiden, doch wird dann die Bestimmung der Exzentrizität komplizierter. Es muß in dieser Hinsicht auf die zitierte Abhandlung verwiesen werden, welche auch das erforderliche tabellarische Hilfsmittel enthält.

Zwischen den Massen des Systems und den Bahnelementen bestehen Beziehungen, die sich leicht aufstellen lassen. Bei einer Bahn des sichtbaren Körpers m um den Schwerpunkt von m und m' hat man nach Seite 643

$$\frac{2\pi}{U}\, a_1^{\frac{3}{2}} = k\,\frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m+m'};$$

also wenn nach Seite 645

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{\sqrt{1-e^2}\;U}{2\pi}\,\frac{1}{\sin i}$$

eingetragen wird:

$$\sin i^3\,\frac{m'^3}{(m+m')^2} = \frac{U}{2\pi k^2}\left(\tfrac{1}{2}(A+B)\right)^3\left(\sqrt{1-e^2}\right)^3.$$

Bei einer Bahn der einen Komponente um die andere wird nach Seite 643

$$\frac{2\pi}{U}\, a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{m+m'},$$

also ebenso:

$$\sin i^3\,(m+m') = \frac{U}{2\pi k^2}\left(\tfrac{1}{2}(A+B)\right)^3\left(\sqrt{1-e^2}\right)^3.$$

Bei einer Anwendung dieser Formeln, die allerdings wegen der Unkenntnis von i immer problematisch bleibt, ist zu beachten, daß falls für k die ungeänderte Gaußsche Konstante benutzt wird, U in Tagen und die Geschwindigkeiten A und B in astronomischen Einheiten und für einen Tag als Zeiteinheit auszudrücken sind.

Formel für die Bahnverbesserung. Hat man sehr viele Beobachtungen zur Verfügung und diese in eine beschränkte Zahl von Normalwerten zusammengefaßt, so kann es sich empfehlen, das graphische Verfahren zu verlassen und eine Verbesserung der vorhandenen Bahn durch Rechnung anzustreben. Die hierzu nötige Beziehung zwischen dem Differenzial von $\frac{dz}{dt}$ und den Differenzialen der Elemente erhält man leicht durch Differenziation der Gleichung 3) Seite 643, welche, wenn

$$\frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = K$$

gesetzt wird, sofort ergibt:

$$d\,\frac{dz}{dt} = (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\,dK + K\cos\omega\cdot de - K(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\,d\omega - K\sin(\omega+v)\,dv.$$

Wird hier der bekannte Wert von dv eingetragen, so folgt nach leichter Reduktion:

$$d\frac{dz}{dt} = (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\,dK + K\left(\cos\omega - \frac{\sin(\omega+v)\sin v}{1-e^2}(2+e\cos v)\right)de$$
$$- K(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\,d\omega + K\frac{\sin(\omega+v)(1+e\cos v)}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\mu\,dT-(t-T)\,d\mu).$$

Nachdem mittels der hiernach aufgestellten Bedingungsgleichungen dK, de, $d\omega$, $d\mu$, dT erhalten und dann die verbesserten Werte K, e, ... aufgestellt sind, folgt der verbesserte Wert von $a\sin i$ aus

$$a\sin i = \frac{\sqrt{1-e^2}\,K}{\mu}.$$

Kann eine Doppelsternbahn sowohl aus visuellen als aus spektroskopischen Beobachtungen abgeleitet werden, so ergeben sich hieraus wichtige Folgerungen. Zunächst kann durch das Zeichen von $\frac{dz}{dt}$ im Knoten die Zweideutigkeit in der Bestimmung des Knotens oder der Neigung (Seite 621) gehoben werden. Sodann erhält man zwei Werte für die große Halbachse, den einen in Sekunden a'' aus der visuellen Bahn, den andern in astronomischen Einheiten oder Kilometern a aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius. Daraus ergibt sich erstens die Parallaxe p'' durch

$$p'' = \frac{a''}{a},$$

wenn a in astronomischen Einheiten ausgedrückt ist, und zweitens die Summe der beiden Massen, ausgedrückt in Einheiten der Sonnenmasse durch (Seite 618)

$$m+m' = \frac{a^3}{U^2}\,\frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{\mu^2 a^3}{k^2}$$

(U und μ bezogen auf den Tag als Zeiteinheit).

200. Bahnbestimmung aus photometrischen Beobachtungen. Photometrische Beobachtungen veränderlicher Sterne, insbesondere solcher vom Algoltypus, haben zu der Hypothese geführt, daß die Veränderlichkeit durch die Bewegung zweier verschieden heller und verschieden großer Körper umeinander hervorgerufen wird, die zeitweise nebeneinander stehen (Maxima), zeitweise sich zum Teil verfinstern (Minima). Die hieraus sich ergebende Aufgabe, *aus der Lichtkurve die Bahn zu ermitteln*, kann unter Hinzunahme einiger weiterer Hypothesen wenigstens durch sukzessive Versuche gelöst werden. Der Zusammenhang zwischen den Größen-, Formen- und Helligkeitsverhältnissen der Körper und den Elementen der elliptischen Bahn einerseits und der Lichtkurve andererseits ist aber ein so komplizierter, daß man eine allgemeine

Theorie wohl kaum aufstellen kann, sondern die Lösung von Fall zu Fall den vorliegenden Verhältnissen anpassen muß. Es kann daher hier nur auf die Spezialarbeiten verwiesen werden:

Harting, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Persei, 1889.
Myers, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Lyrae, 1896.
Hartwig, Der veränderliche Stern vom Algoltypus Z Herculis, 1900.
Dunér, Calcul des éléments elliptiques de l'orbite du système stellaire de l'étoile variable Y Cygni, 1900.