

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Bahnbestimmung der Himmelskörper

Bauschinger, Julius

Leipzig, 1928

Sechster Teil. Theorie der speziellen Störungen

Sechster Teil.

Theorie der speziellen Störungen.

Abschnitt XXIX.

Mechanische Integration.

152. Bezeichnung. Vorbereitende Entwicklungen. Die Methoden zur Berechnung der speziellen Störungen, die in den folgenden Abschnitten dargestellt werden, haben zur Voraussetzung ein Integrationsverfahren, das unter dem Namen »mechanische Integration« bekannt ist; es soll daher eine kurze Darlegung desselben vorausgeschickt werden, jedoch mit Beschränkung auf die sogenannte Summenmethode, die hier allein in Betracht kommt; betreff der übrigen sei auf das Buch von *H. Bruns*, »Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens« verwiesen.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, von einer stetigen Funktion $f(t)$ das bestimmte Integral zwischen gegebenen Grenzen numerisch anzugeben, wenn die Funktion »tabuliert« ist, d. h. wenn für eine Anzahl gleichmäßig zwischen den Grenzen verteilter Werte des Arguments der Wert der Funktion berechnet vorliegt. Die Lösung macht ausschließlich von den Größen des Summen- und Differenzenschemas Gebrauch, das aus den tabulierten Funktionswerten gebildet werden kann und das in der Gauß-Enckeschen Bezeichnungsweise folgende Form annimmt:

| II. Summ. R. | I. Summ. R. | Funktion. | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. | IV. Diff. | V. Diff. |
|---------------------------|------------------------------------|-------------|----------------------------------|-------------------------|------------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ${}^{\text{II}}f(a - 2w)$ | ${}^{\text{I}}f(a - \frac{5}{2}w)$ | $f(a - 3w)$ | $f^{\text{I}}(a - \frac{5}{2}w)$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ${}^{\text{II}}f(a - w)$ | ${}^{\text{I}}f(a - \frac{3}{2}w)$ | $f(a - 2w)$ | $f^{\text{I}}(a - \frac{3}{2}w)$ | $f^{\text{II}}(a - 2w)$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ${}^{\text{II}}f(a)$ | ${}^{\text{I}}f(a - \frac{1}{2}w)$ | $f(a - w)$ | $f^{\text{I}}(a - \frac{1}{2}w)$ | $f^{\text{II}}(a - w)$ | $f^{\text{III}}(a - \frac{1}{2}w)$ | $f^{\text{IV}}(a - w)$ | ⋮ |
| ${}^{\text{II}}f(a + w)$ | ${}^{\text{I}}f(a + \frac{1}{2}w)$ | $f(a)$ | $f^{\text{I}}(a + \frac{1}{2}w)$ | $f^{\text{II}}(a)$ | $f^{\text{III}}(a - \frac{1}{2}w)$ | $f^{\text{IV}}(a)$ | $f^{\text{V}}(a - \frac{1}{2}w)$ |
| ${}^{\text{II}}f(a + 2w)$ | ${}^{\text{I}}f(a + \frac{3}{2}w)$ | $f(a + w)$ | $f^{\text{I}}(a + \frac{3}{2}w)$ | $f^{\text{II}}(a + w)$ | $f^{\text{III}}(a + \frac{3}{2}w)$ | $f^{\text{IV}}(a + w)$ | $f^{\text{V}}(a + \frac{1}{2}w)$ |
| ${}^{\text{II}}f(a + 3w)$ | ${}^{\text{I}}f(a + \frac{5}{2}w)$ | $f(a + 2w)$ | $f^{\text{I}}(a + \frac{5}{2}w)$ | $f^{\text{II}}(a + 2w)$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ${}^{\text{II}}f(a + 4w)$ | ${}^{\text{I}}f(a + \frac{7}{2}w)$ | $f(a + 3w)$ | $f^{\text{I}}(a + \frac{7}{2}w)$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Hierin ist mit a ein bestimmter Argumentwert, mit w das konstante Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Argumentwerten bezeichnet. Offenbar kann dann jeder

zuführen, eines Kunstgriffes, der rascher zum Ziel führt. Da nemlich jede Funktion zu denselben Koeffizienten führen muß, kann man sich einer bestimmten bedienen, für welche die analytische Entwicklung bekannt ist; dieselbe muß außerdem noch die Eigenschaft haben, daß weder Differenzen noch Differenzialquotienten jemals abbrechen. Eine solche Funktion ist die Exponentialfunktion, die wir mit \exp bezeichnen. Es wird dafür einerseits

$$f(a) = \exp a, \quad f_1(a) = \exp a, \quad f_2(a) = \exp a, \quad \dots$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} f^I(a + \frac{1}{2}w) &= \exp(a + w) - \exp a = \exp(a + \frac{1}{2}w) (\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w)) \\ f^I(a - \frac{1}{2}w) &= \exp a - \exp(a - w) = \exp(a - \frac{1}{2}w) (\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w)) \\ f^{II}(a) &= (\exp \frac{1}{2}w - \exp(-\frac{1}{2}w))(\exp(a + \frac{1}{2}w) - \exp(a - \frac{1}{2}w)) = \exp a (\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w))^2 \\ &\text{usf.} \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w) = u$$

so wird das Differenzenschema für die Exponentialfunktion:

| Funktion | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|----------------|----------------------------|-------------------|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\exp(a - 2w)$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\exp(a - w)$ | $u \exp(a - \frac{3}{2}w)$ | $u^2 \exp(a - w)$ | $u^3 \exp(a - \frac{1}{2}w)$ |
| $\exp a$ | $u \exp(a - \frac{1}{2}w)$ | $u^2 \exp a$ | $u^3 \exp(a + \frac{1}{2}w)$ 3) |
| $\exp(a + w)$ | $u \exp(a + \frac{1}{2}w)$ | $u^2 \exp(a + w)$ | |
| $\exp(a + 2w)$ | $u \exp(a + \frac{3}{2}w)$ | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Stellt man sich jetzt die Aufgabe, die $wf_1(a), w^2f_2(a), \dots$ durch diejenigen Größen des Schemas 1) auszudrücken, welche von einem durch $f(a)$ hindurchgelegten Horizontalstrich getroffen werden (gerade Differenzen) und durch das arithmetische Mittel derjenigen, zwischen welchen der Strich hindurchgeht (ungerade Differenzen), so hat man folgenden Ansatz zu machen:

$$\begin{aligned} wf_1(a) &= \alpha_1 f^I(a) + \beta_1 f^{II}(a) + \gamma_1 f^{III}(a) + \dots \\ w^2 f_2(a) &= \alpha_2 f^I(a) + \beta_2 f^{II}(a) + \gamma_2 f^{III}(a) + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

worin die $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die zu bestimmenden Zahlenkoeffizienten vorstellen.

Die erste Gleichung 4) wird, wenn an Stelle der Funktion f die Funktion \exp gesetzt wird:

$$\begin{aligned} w \exp a &= \alpha_1 u^{\frac{1}{2}} (\exp(\frac{1}{2}w) + \exp(-\frac{1}{2}w)) \exp a + \beta_1 u^2 \exp a \\ &\quad + \gamma_1 u^{\frac{3}{2}} (\exp(\frac{1}{2}w) + \exp(-\frac{1}{2}w)) \exp a + \dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} [\exp(\frac{1}{2}w) - \frac{1}{2}(\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w))]^2 &= 1 + \frac{1}{4}u^2 \\ [\exp(-\frac{1}{2}w) + \frac{1}{2}(\exp(\frac{1}{2}w) - \exp(-\frac{1}{2}w))]^2 &= 1 + \frac{1}{4}u^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \exp(\frac{1}{2}w) &= +\frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \\ \exp(-\frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \end{aligned}$$

und daher

$$\exp\left(\frac{1}{2}w\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}w^2}.$$

Mithin wird obige Entwicklung:

$$w = \alpha_1 u \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} + \beta_1 u^2 + \gamma_1 u^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} + \delta_1 u^4 + \dots$$

oder wenn darin:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} u^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} u^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^6} u^6 - \dots$$

eingetragen wird:

$$w = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 + \left(\gamma_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \alpha_1\right) u^3 + \delta_1 u^4 + \dots \tag{5}$$

Durch Differenziation von

$$\exp\left(\frac{1}{2}w\right) = \frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2}$$

folgt:

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}w\right) dw = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

oder nach kurzer Reduktion:

$$dw = \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^4}{2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{u^6}{2^6} + \dots\right) du$$

und Integration:

$$w = u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{u^3}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6} \frac{u^7}{2^6} + \dots \tag{6}$$

Die Vergleichung von 5) und 6) ergibt:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0$$

$$\gamma_1 + \frac{1}{8} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\delta_1 = 0 \quad \text{usf.}$$

Es wird also:

$$w f_1(a) = f^I(a) - \frac{1}{6} f^{III}(a) + \frac{1}{30} f^V(a) - \dots$$

In derselben Weise werden die weiteren Gleichungen 4) behandelt, worauf man folgende Zusammenstellung erhält:

$$\begin{aligned} w f_1(a) &= f^I(a) - \frac{1}{6} f^{III}(a) + \frac{1}{30} f^V(a) - \frac{1}{140} f^{VII}(a) + \dots \\ w^2 f_2(a) &= f^{II}(a) - \frac{1}{12} f^{IV}(a) + \frac{1}{90} f^{VI}(a) - \dots \\ w^3 f_3(a) &= f^{III}(a) - \frac{1}{4} f^V(a) + \frac{7}{120} f^{VII}(a) - \dots \\ w^4 f_4(a) &= f^{IV}(a) - \frac{1}{6} f^{VI}(a) + \dots \\ w^5 f_5(a) &= f^V(a) - \frac{1}{3} f^{VII}(a) + \dots \\ w^6 f_6(a) &= f^{VI}(a) + \dots \end{aligned} \tag{7}$$

153. Formeln für einfache Integrale. Um das Integral

$$\int f(t) dt$$

zwischen bestimmten Grenzen zu ermitteln, setzen wir wie oben

$$t = a + xw$$

und dann in

$$\int f(t) dt = w \int f(a + xw) dx \tag{8}$$

für $f(a + xw)$ die in voriger Nr. gewonnene Entwicklung; es kommt zuerst:

$$\int f(a + xw) dx = C + xf(a) + \frac{x^2}{2} wf_1(a) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^2 f_2(a) + \dots$$

und nach Substitution der Ausdrücke 7)

$$\begin{aligned} \int f(a + xw) dx = C + xf(a) + & \frac{x^2}{2} (f^I(a) - \frac{1}{6} f^{III}(a) + \frac{1}{30} f^V(a) - \dots) \\ & + \frac{x^3}{6} (f^{II}(a) - \frac{1}{12} f^{IV}(a) + \frac{1}{90} f^{VI}(a) - \dots) \\ & + \frac{x^4}{24} (f^{III}(a) - \frac{1}{4} f^V(a) + \dots) \\ & + \frac{x^5}{120} (f^{IV}(a) - \frac{1}{6} f^{VI}(a) + \dots) \\ & + \frac{x^6}{760} (f^V(a) + \dots) \\ & + \frac{x^7}{5040} (f^{VI}(a) + \dots), \end{aligned} \tag{9}$$

wobei wir uns auf die Differenzen 6. Ordnung beschränkt haben, über die man wohl nie hinausgeht. Die Wahl der Grenzen hat man in praxi meistens in der Hand und wird sie daher so treffen, daß möglichst einfache und konvergente Ausdrücke entstehen. Dies ist in nahezu gleicher Weise der Fall, ob man die Grenzen in den Anfang oder in die Mitte eines Intervalles w verlegt. Man hat zunächst nach einfacher Ausrechnung:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a + xw) dx = f(a) + \frac{1}{24} f^{II}(a) - \frac{17}{5760} f^{IV}(a) + \frac{367}{967680} f^{VI}(a) - \dots \tag{10}$$

und

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} f(a + xw) dx = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{8} f^I(a) + \frac{1}{48} f^{II}(a) - \frac{7}{384} f^{III}(a) - \frac{17}{11520} f^{IV}(a) + \frac{163}{46080} f^V(a) + \dots$$

Da $f^I(a) = \frac{1}{2} f^I(a + \frac{1}{2}w) + \frac{1}{2} f^I(a - \frac{1}{2}w)$

und $\frac{1}{2} f^{II}(a) = \frac{1}{2} f^I(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} f^I(a - \frac{1}{2}w),$

so folgt: $f^I(a) = f^I(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} f^{II}(a)$

und ebenso: $f^{III}(a) = f^{III}(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} f^{IV}(a)$

$f^V(a) = f^V(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} f^{VI}(a)$

Wird dies in die letzte Formel eingetragen, so wird daraus:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\frac{1}{2}} f(a + xw) dx = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{8} f^I(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{24} f^{II}(a) - \frac{7}{384} f^{III}(a + \frac{1}{2}w) + \frac{11}{1440} f^{IV}(a) + \\ + \frac{163}{46080} f^V(a + \frac{1}{2}w) - \frac{191}{120960} f^{VI}(a) - \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Da es offenbar gleichgültig ist, welches der Argumente wir als Ausgangsargument

a wählen, so folgt aus den Gl. 10) und 11) sofort, wenn mit i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet wird:

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx = f(a+iw) + \frac{1}{24} f''(a+iw) - \frac{17}{5760} f^{IV}(a+iw) + \frac{367}{967680} f^{VI}(a+iw) - \dots \quad 12)$$

$$\int_i^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx = \frac{1}{2} f(a+iw) + \frac{1}{8} f'(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{1}{24} f''(a+iw) - \frac{7}{384} f'''(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{1}{1440} f^{IV}(a+iw) + \frac{163}{46080} f^V(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{191}{120960} f^{VI}(a+iw) - \dots \quad 13)$$

Aus den Formeln 10)–13) lassen sich nun leicht die Integrale zwischen den unteren Grenzen $-\frac{1}{2}$ und 0 und den oberen i und $i + \frac{1}{2}$ bilden. Man hat zuerst

$$\int = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \dots + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$$

also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx = \sum_{n=0}^{n=i} f(a+nw) + \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{n=i} f''(a+nw) - \frac{17}{5760} \sum_{n=0}^{n=i} f^{IV}(a+nw) + \dots$$

Da nach der Entstehung der ersten Summenreihe und der Differenzreihen.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=i} f(a+nw) &= {}^1f(a+(i+\frac{1}{2})w) - {}^1f(a-\frac{1}{2}w) \\ \sum_{n=0}^{n=i} f''(a+nw) &= f''(a+(i+\frac{1}{2})w) - f''(a-\frac{1}{2}w) \\ \sum_{n=0}^{n=i} f^{IV}(a+nw) &= f^{IV}(a+(i+\frac{1}{2})w) - f^{IV}(a-\frac{1}{2}w) \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

so folgt, wenn das willkürliche Glied der ersten Summenreihe ${}^1f(a-\frac{1}{2}w)$ durch

$${}^1f(a-\frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24} f'(a-\frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f'''(a-\frac{1}{2}w) - \frac{367}{967680} f^V(a-\frac{1}{2}w) + \dots \quad 14)$$

bestimmt wird:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx = {}^1f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{1}{24} f'(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{17}{5760} f'''(a+(i+\frac{1}{2})w) + \text{I.} + \frac{367}{967680} f^V(a+(i+\frac{1}{2})w) - \dots$$

Nimmt man als obere Grenze i statt $i + \frac{1}{2}$, so erhält man wegen:

$$\int = \int_{-\frac{1}{2}}^i - \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$$

und mit Beachtung von

$$\begin{aligned} f(a+iw) &= {}^1f(a+(i+\frac{1}{2})w) - {}^1f(a+(i-\frac{1}{2})w) \\ f'(a+iw) &= f'(a+(i+\frac{1}{2})w) - f'(a+(i-\frac{1}{2})w) \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

die Formel:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^i f(a+xw) dx = {}^1f(a+iw) - \frac{1}{12} f'(a+iw) + \frac{11}{720} f'''(a+iw) - \frac{191}{60480} f^V(a+iw) + \dots \quad \text{II.}$$

Wird als untere Grenze 0 statt $-\frac{1}{2}$ genommen, so hat man von I. und II., welche die Bestimmung des willkürlichen Gliedes $I f(a - \frac{1}{2}w)$ nach 14) voraussetzen, in Abzug zu bringen:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw)dx = I f(a) - \frac{1}{12} f^I(a) + \frac{1}{720} f^{III}(a) - \frac{191}{60480} f^V(a) + \dots,$$

was am einfachsten dadurch geschieht, daß man diesen Betrag von $I f(a - \frac{1}{2}w)$ nach 14) abzieht, d. h. daß man $I f(a - \frac{1}{2}w)$ nicht nach 14), sondern durch

$$I f(a - \frac{1}{2}w) = I f(a) + \frac{1}{12} f^I(a) - \frac{1}{720} f^{III}(a) + \frac{191}{60480} f^V(a) - \dots$$

bestimmt; da aber

$$I f(a) = \frac{1}{2} I f(a - \frac{1}{2}w) + \frac{1}{2} I f(a + \frac{1}{2}w),$$

so wird

$$- I f(a) + I f(a - \frac{1}{2}w) = \frac{1}{2} I f(a - \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} I f(a + \frac{1}{2}w) = - \frac{1}{2} f(a),$$

und bei der unteren Grenze 0 ist also $I f(a - \frac{1}{2}w)$ durch

$$I f(a - \frac{1}{2}w) = - \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^I(a) - \frac{1}{720} f^{III}(a) + \frac{191}{60480} f^V(a) - \dots \quad 15)$$

zu bestimmen, worauf wird:

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)dx = I f(a + (i + \frac{1}{2})w) + \frac{1}{24} f^I(a + (i + \frac{1}{2})w) - \frac{17}{5760} f^{III}(a + (i + \frac{1}{2})w) + III. \\ + \frac{367}{967680} f^V(a + (i + \frac{1}{2})w) - \dots$$

$$\int_0^i f(a+xw)dx = I f(a+iw) - \frac{1}{12} f^I(a+iw) + \frac{1}{720} f^{III}(a+iw) - \frac{191}{60480} f^V(a+iw) + \dots \quad IV.$$

Werden die Formeln I.—IV. nach 8) noch mit w multipliziert, so ergibt sich das ursprünglich gesuchte Integral, für das wir die Formeln nochmals zusammenstellen:

Ist die untere Grenze des Integrales $a - \frac{1}{2}w$, so bilde man das erste Glied der ersten Summenreihe nach

$$I f(a - \frac{1}{2}w) = - \frac{1}{24} f^I(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \frac{1}{2}w) - \frac{367}{967680} f^V(a - \frac{1}{2}w) + \dots;$$

ist die untere Grenze a , so bilde man es durch

$$I f(a - \frac{1}{2}w) = - \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^I(a) - \frac{1}{720} f^{III}(a) + \frac{191}{60480} f^V(a) - \dots,$$

dann wird:

$$\int_{a-iw}^{a+iw} f(t)dt = w (I f(a+iw) - \frac{1}{12} f^I(a+iw) + \frac{1}{720} f^{III}(a+iw) - \frac{191}{60480} f^V(a+iw) + \dots),$$

$$\int_{a+(i+\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)dt = w (I f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{1}{24} f^I(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{17}{5760} f^{III}(a+(i+\frac{1}{2})w) + \\ + \frac{367}{967680} f^V(a+(i+\frac{1}{2})w) - \dots).$$

154. Formeln für Doppelintegrale. Um das Doppelintegral

$$\iint f(t) dt^2$$

zu bilden, setzen wir wieder $t = a + xw$, $dt^2 = w^2 dx^2$ und haben daher

$$\iint f(t) dt^2 = w^2 \iint f(a+xw) dx^2. \quad 16)$$

Nach 9) ist

$$\int f(a+xw) dx = C + xf(a) + \frac{1}{2}x^2\alpha + \frac{1}{6}x^3\beta + \frac{1}{24}x^4\gamma + \frac{1}{120}x^5\delta + \frac{1}{760}x^6\varepsilon + \dots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zur Abkürzung für bekannte Funktionen der Größen des Differenzenschemas gesetzt sind, deren Bedeutung durch Vergleich mit 9) ersichtlich ist. Ehe wir diesen Ausdruck ein zweitesmal integrieren, muß über die Konstante C eine Festsetzung gemacht werden; wir bestimmen sie zunächst so, daß das Integral für $x = -\frac{1}{2}$ verschwindet; es wird dann:

$$0 = C - \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{8}\alpha - \frac{1}{48}\beta + \dots = C - \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw) dx,$$

oder

$$C = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw) dx.$$

Wird dies oben eingetragen und nochmals integriert, so kommt:

$$\iint f(a+xw) dx^2 = C_1 + x \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw) dx + \frac{x^2}{2}f(a) + \frac{x^3}{6}\alpha + \frac{x^4}{24}\beta + \dots$$

und genommen zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$:

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw) dx + \frac{1}{24}\alpha + \frac{1}{1920}\gamma + \frac{1}{322560}\varepsilon + \dots$$

Wird hier nach II. (Seite 479)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+xw) dx = {}^1f(a) - \frac{1}{12}f^1(a) + \frac{1}{720}f^{\text{III}}(a) - \frac{1}{60480}f^{\text{V}}(a) + \dots$$

(welche Formel die Bestimmung des Summengliedes ${}^1f(a - \frac{1}{2}w)$ nach 14) voraussetzt) und ferner α, γ, \dots eingetragen, so folgt:

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx^2 = {}^1f(a) - \frac{1}{24}f^1(a) + \frac{1}{1920}f^{\text{III}}(a) - \frac{367}{193536}f^{\text{V}}(a) + \dots$$

und daher auch:

$$\iint_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx^2 = {}^1f(a+iw) - \frac{1}{24}f^1(a+iw) + \frac{1}{1920}f^{\text{III}}(a+iw) - \dots$$

Durch Summation folgt weiter:

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw) dx^2 = \sum_{n=0}^{n=i} {}^1f(a+nw) - \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{n=i} f^1(a+nw) + \frac{1}{1920} \sum_{n=0}^{n=i} f^{\text{III}}(a+nw) \dots$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} {}^I f(a) &= \frac{1}{2} {}^I f(a + \frac{1}{2} w) + \frac{1}{2} {}^I f(a - \frac{1}{2} w) = \frac{1}{2} {}^{II} f(a + w) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a - w) \\ {}^I f(a + w) &= \frac{1}{2} {}^I f(a + \frac{3}{2} w) + \frac{1}{2} {}^I f(a + \frac{1}{2} w) = \frac{1}{2} {}^{II} f(a + 2w) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a) \\ {}^I f(a + 2w) &= \frac{1}{2} {}^I f(a + \frac{5}{2} w) + \frac{1}{2} {}^I f(a + \frac{3}{2} w) = \frac{1}{2} {}^{II} f(a + 3w) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a + w) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$${}^I f(a + iw) = \frac{1}{2} {}^I f(a + (i + \frac{1}{2})w) + \frac{1}{2} {}^I f(a + (i - \frac{1}{2})w) = \frac{1}{2} {}^{II} f(a + (i + 1)w) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a + (i - 1)w),$$

also durch Summation:

$$\sum_{n=0}^{n=i} {}^I f(a + nw) = \frac{1}{2} {}^{II} f(a + (i + 1)w) + \frac{1}{2} {}^{II} f(a + iw) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a) - \frac{1}{2} {}^{II} f(a - w).$$

In derselben Weise findet man:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=i} f^I(a + nw) &= \frac{1}{2} f(a + (i + 1)w) + \frac{1}{2} f(a + iw) - \frac{1}{2} f(a) - \frac{1}{2} f(a - w) \\ \sum_{n=0}^{n=i} f^{III}(a + nw) &= \frac{1}{2} f^{II}(a + (i + 1)w) + \frac{1}{2} f^{II}(a + iw) - \frac{1}{2} f^{II}(a) - \frac{1}{2} f^{II}(a - w) \end{aligned}$$

usf.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} {}^{II} f(a) + {}^{II} f(a - w) &= 2 {}^{II} f(a) - {}^I f(a - \frac{1}{2} w) \\ f(a) + f(a - w) &= 2 f(a - w) + f^I(a - \frac{1}{2} w) \\ f^{II}(a) + f^{II}(a - w) &= 2 f^{II}(a - w) + f^{III}(a - \frac{1}{2} w) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß die Anwendung der Formel II) bereits voraussetzte, daß

$${}^I f(a - \frac{1}{2} w) = -\frac{1}{24} f^I(a - \frac{1}{2} w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \frac{1}{2} w) - \frac{367}{967680} f^V(a - \frac{1}{2} w) + \dots$$

und ferner, daß man das willkürliche Glied der zweiten Summenreihe durch

$${}^{II} f(a) = \frac{1}{24} f(a - w) - \frac{17}{5760} (2 f^{II}(a - w) + f^{II}(a)) + \frac{367}{967680} (3 f^{IV}(a - w) + 2 f^{IV}(a)) + \dots \quad (17)$$

bestimmen kann, so fallen nach der Zusammensetzung des Integrales aus den Summen die jeweils dritten und vierten Glieder weg und es bleibt folgender Ausdruck übrig:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i + \frac{1}{2}} f(a + xw) dx^2 = {}^{II} f(a + (i + \frac{1}{2})w) - \frac{1}{24} f(a + (i + \frac{1}{2})w) + \frac{17}{1920} f^{II}(a + (i + \frac{1}{2})w) - \frac{367}{193536} f^{IV}(a + (i + \frac{1}{2})w) + \dots$$

Um statt der oberen Grenze $i + \frac{1}{2}$ die Grenze i einzuführen, bilden wir nach der allgemeinen Formel:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a + xw) dx^2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a + xw) dx + \frac{1}{8} f(a) + \frac{1}{48} a + \frac{1}{384} \beta + \frac{1}{3840} \gamma + \frac{1}{46080} \delta + \dots$$

oder nach Substitution des oben abgeleiteten Wertes des rechtsstehenden Integrales und der $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a + xw) dx^2 = \frac{1}{2} {}^I f(a) + \frac{1}{8} f(a) - \frac{1}{48} f^I(a) + \frac{1}{384} f^{II}(a) + \frac{17}{3840} f^{III}(a) - \frac{1}{5120} f^{IV}(a) + \dots$$

Daraus folgt wieder:

$$\int_i^{i + \frac{1}{2}} f(a + xw) dx^2 = \frac{1}{2} {}^I f(a + iw) + \frac{1}{8} f(a + iw) - \frac{1}{48} f^I(a + iw) + \dots$$

Wird dies von V. abgezogen, so ergibt sich das gewünschte Integral:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\circ} \int f(a+xw) dx^2 = {}^{\text{II}}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+iw) + \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a+iw) - \dots \quad \text{VI.}$$

Will man von der unteren Grenze 0 ausgehen, so hat man von V. und VI. den aus VI. folgenden Betrag

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\circ} \int f(a+xw) dx^2 = {}^{\text{II}}f(a) + \frac{1}{12}f(a) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a) + \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a) - \dots$$

in Abzug zu bringen, was wieder am einfachsten durch entsprechende Bildung der Anfangsglieder der Summenreihen geschieht; das Anfangsglied der ersten Summenreihe ${}^{\text{I}}f(a - \frac{1}{2}w)$ ist nach 15) zu bilden und das Anfangsglied der zweiten Summenreihe ${}^{\text{II}}f(a)$ nach:

$${}^{\text{II}}f(a) = -\frac{1}{12}f(a) + \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a) - \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a) + \dots \quad 18)$$

Dann wird:

$$\int_{\circ}^{i+\frac{1}{2}} \int f(a+xw) dx^2 = {}^{\text{II}}f(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{1}{24}f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{17}{1920}f^{\text{II}}(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{367}{193536}f^{\text{IV}}(a+(i+\frac{1}{2})w) + \dots \quad \text{VII.}$$

$$\int_{\circ}^i \int f(a+xw) dx^2 = {}^{\text{II}}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+iw) + \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a+iw) \dots \quad \text{VIII.}$$

Um das ursprünglich gesuchte Doppelintegral zu erhalten, sind V.—VIII. noch mit w^2 zu multiplizieren. Wir stellen hierfür die Formeln nochmals zusammen, der Übersicht halber zugleich mit denen für das einfache Integral.

Ist die untere Grenze des Integrales a , dann bildet man die ersten Glieder der beiden Summenreihen nach den Formeln:

$$\begin{aligned} {}^{\text{I}}f(a - \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{12}f^{\text{I}}(a) - \frac{11}{720}f^{\text{III}}(a) + \frac{191}{60480}f^{\text{V}}(a) - \dots \\ {}^{\text{II}}f(a) &= -\frac{1}{12}f(a) + \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a) - \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a). \end{aligned}$$

Ist die untere Grenze des Integrales $a - \frac{w}{2}$, so bildet man die ersten Glieder der Summenreihen nach:

$$\begin{aligned} f(a - \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{24}f^{\text{I}}(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{\text{III}}(a - \frac{1}{2}w) - \frac{367}{967680}f^{\text{V}}(a - \frac{1}{2}w) + \dots \\ {}^{\text{II}}f(a) &= +\frac{1}{24}f(a-w) - \frac{17}{5760}(2f^{\text{II}}(a-w) + f^{\text{II}}(a)) + \frac{367}{967680}(3f^{\text{IV}}(a-w) + 2f^{\text{IV}}(a)) - \dots \end{aligned}$$

Dann wird:

$$\int_{a+iw}^{a+iw} f(t) dt = w({}^{\text{I}}f(a+iw) - \frac{1}{12}f^{\text{I}}(a+iw) + \frac{11}{720}f^{\text{III}}(a+iw) - \frac{191}{60480}f^{\text{V}}(a+iw) + \dots)$$

$$\int_{a+iw}^{a+iw} \int f(t) dt^2 = w^2({}^{\text{II}}f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+iw) + \frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a+iw) - \dots)$$

$$\int_{a+(i+\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t) dt = w({}^{\text{I}}f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{1}{24}f^{\text{I}}(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{17}{5760}f^{\text{III}}(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{367}{967680}f^{\text{V}}(a+(i+\frac{1}{2})w) - \dots)$$

$$\int_{a+(i+\frac{1}{2})w}^{a+(i+\frac{1}{2})w} \int f(t) dt^2 = w^2({}^{\text{II}}f(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{1}{24}f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \frac{17}{1920}f^{\text{II}}(a+(i+\frac{1}{2})w) - \frac{367}{193536}f^{\text{IV}}(a+(i+\frac{1}{2})w) + \dots)$$

Abschnitt XXX.

Berechnung der speziellen Störungen in den Elementen.

155. Einführung. Geschichtliche Bemerkungen. In den vorausgehenden Teilen haben wir die Annahme gemacht, daß die Bewegung der Körper, deren Bahnen wir untersuchten, durch *eine* Zentralkraft bestimmt wird, die im Mittelpunkt der Sonne ihren Sitz hat und nach dem Newtonschen Gesetz wirkt (Nr. 41); das Resultat war die Kegelschnittsbewegung, und darauf gegründet haben wir die Bestimmung der Bahnen aus geozentrischen Beobachtungen durchgeführt. Diese Annahme entspricht nun nur näherungsweise der Wahrheit, da auf jeden Körper des Sonnensystems alle übrigen ebenfalls nach dem Newtonschen Gesetz einwirken und seine Bahn modifizieren. Die dadurch hervorgebrachten Änderungen der reinen Kegelschnittsbewegung nennt man die *Störungen*. Da die Massen der störenden Körper klein sind, sind auch die Störungen klein und werden erst nach längeren Zeiträumen merkbar. In kurzen Zeiträumen, wie wir sie bisher bei der Bahnbestimmung vorausgesetzt haben, ist die Abweichung von der reinen Kegelschnittsbewegung eine so geringe, daß sie von den Beobachtungen nicht angezeigt werden kann und daher war es berechtigt die Bahnen mit Vernachlässigung der Störungen zu ermitteln. Wird aber ein Körper durch lange Zeiträume hindurch verfolgt, dann erweist es sich als unmöglich, seine Bewegung durch eine reine Kegelschnittsbewegung darzustellen und es muß dann, um Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung herzustellen, auf die Störungen Rücksicht genommen werden. Die Ermittlung der genauen Bahn setzt also die Kenntnis der Störungen voraus; umgekehrt aber kann man die Störungen ohne Kenntnis der Bahn nicht berechnen, da die Größe der Störungen von der gegenseitigen Entfernung der Gestirne abhängt. Daraus geht hervor, daß man das Problem nur auf dem Wege der sukzessiven Näherung lösen können, zu der der erste Schritt offenbar der bisher ausgeführte war, den vorhandenen Beobachtungen, die sich über einen beschränkten Zeitraum erstreckten, eine erste Bahn anzupassen. Der zweite Schritt wird sein, mittels dieser und der als bekannt vorausgesetzten Bewegung der störenden Körper die Störungen zu berechnen; der dritte, eine neue Bahn mit Rücksicht auf die Störungen abzuleiten. Mit dieser sind dann weiter die Störungen neu zu rechnen usf., bis keine Änderung in der Bahn und den Störungswerten mehr eintritt, worauf man Übereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen erwarten darf, falls die übrigen Grundlagen der Rechnung zutreffend sind. In diesem Teil soll nun zunächst die Berechnung der Störungen gezeigt werden, worauf sich ihre Verbindung mit der Bahnbestimmung leicht erledigen läßt.

Für die Berechnung der Störungen sind zweierlei Methoden in Gebrauch. Bei der einen werden analytische Ausdrücke für die Störungen aufgestellt, aus denen man diese entnehmen kann, wenn man für die Zeit oder Funktionen derselben den entsprechenden Wert substituiert; diese Methode, welche die der *absoluten Störungen*

genannt wird, ist nur unter besonders günstigen Verhältnissen anwendbar, wie sie im Sonnensystem nur bei den großen und der Mehrzahl der kleinen Planeten zu treffen; sie setzt bedeutende Rechnungen voraus und gestattet doch nicht in allen Fällen bis zur wünschenswerten Genauigkeit fortzuschreiten. Die zweite Methode, die der *speziellen Störungen*, verlangt zu ihrer Ausführung eine kontinuierliche Rechnung, die sich über den ganzen Zeitraum erstreckt, innerhalb dessen die Störungen wirken; d. h. man kann hiernach den Betrag einer Störung in einer späteren Zeit nur dadurch kennen lernen, daß man auch die Störungen in der ganzen Zwischenzeit berechnet. Diesem Nachteil, der bei langen Zeiträumen äußerst lästig sich geltend macht, stehen erhebliche Vorteile gegenüber: die Methode ist in allen Fällen anwendbar, den numerischen Rechnungen kann jede wünschenswerte Genauigkeit gegeben werden, die höheren Potenzen der Massen können so gut wie vollständig und ohne wesentliche Erhöhung der Arbeit berücksichtigt werden, die Rechnung ist kurz und einfach, wenn es sich um kleine Zeiträume handelt. Einen Einblick in den allgemeinen Mechanismus des Planetensystems gewähren nur die absoluten Störungen; die speziellen Störungen aber sind auf dem heutigen Stande der Analyse unentbehrlich, da man mit ihrer Hilfe allein die in der Praxis vorkommenden Fälle mit der notwendigen Schärfe und Kürze der Rechnung bewältigen kann. Für das Problem der Bahnbestimmung kommen nur die speziellen Störungen in Betracht, die deshalb hier allein zur Darstellung gelangen.

Der Erste, der von den speziellen Störungen Gebrauch machte, war *Clairaut* (*Theorie du mouvement des comètes*, 1760), indem er die Wiederkehr des Halleyschen Kometen für das Jahr 1759 vorausberechnete. Er berechnete die Störungen des Radiusvektors und der Umlaufzeit. Den nächsten Schritt tat *Lagrange* in der Abhandlung: *Sur les perturbations, que les comètes peuvent éprouver per l'action des planètes*, 1785 (*Oeuvres* Vol. VI), indem er die Variation der Konstanten, die für die absoluten Störungen sich bewährt hatte, auf die Berechnung der speziellen Störungen anwandte; die Methode ist reproduziert in Laplace, *Méc. céleste*, Vol. IV, Livre IX: *Sur les Comètes*, und ist von Anfang des 19. Jahrhunderts ab viel gebraucht worden. Selbständige Bearbeitungen hat sie erfahren durch *Bessel* (»Entwicklung einer allgemeinen Methode die Störungen der Kometen zu berechnen«, 1810, und »Beitrag zu den Störungsmethoden der Kometen« 1836, *Ges. Abh.* Band I) und *Encke* (»über die Berechnung der speziellen Störungen«, *Berliner Jahrbuch* für 1837/38). Als die Rückkehr des Halleyschen Kometen 1835 bevorstand, kamen die neuen Methoden zu umfangreichen Anwendungen (*Damoiseau*, *Pontécoulant*, *Rosenberger*). Für die kleinen Planeten hat zuerst *Gauß* spezielle Störungen berechnet, hierüber aber nichts veröffentlicht; er hat auch das Verdienst, die für die Methode unentbehrlichen Formeln der mechanischen Integration in eine geschmeidige Form gebracht zu haben; *Encke* hat sie veröffentlicht und weiter ausgebaut (*Berl. Jahrb.* 1837 und 1862). Als von der Mitte des 19. Jahrhunderts ab die Zahl der kleinen Planeten immer mehr wuchs, machte sich das Bedürfnis nach Methoden geltend, die eine kürzere Rechnung gestatteten; man erkannte, daß dies durch die Berechnung der Störungen von *drei* Koordinaten (statt von *sechs* Elementen) geleistet würde. *Bond*, *Encke*, *Hansen*, *Brünnow* u. a. haben in die Entwicklung dieser Methoden eingegriffen, die sich untereinander haupt-

sächlich in der Wahl der Koordinaten unterscheiden. *Bond* (On some applications of the Method of Mechanical Quadrature, Boston, Mem. of the American Academy Vol. IV 1849) und *Encke* (Über die Berechnung der speziellen Störungen, Denkschr. Berl. Ak. 1851, Astr. Nachr. Bd. 33, 34, Berl. Jahrb. für 1858) wählten rechtwinklige Koordinaten, *Hansen* (Über die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadratur, Astr. Nachr. Band 34) wählte Polarkoordinaten und zwar Radiusvektor, mittlere Länge und Breite, *Brünnow* (Astr. Nachr. Band 34) nimmt ebenfalls Polarkoordinaten, aber Radiusvektor, wahre Länge und Breite über der Bahn, *Tietjen* (Spezielle Störungen in Bezug auf Polarkoordinaten, Berl. Jahrb. für 1877/78) erreicht Vereinfachungen durch eine Verbindung der Hansenschen mit der Brünnowschen Methode. Endlich hat *Oppolzer* eine Verbindung der Variation der Konstanten mit der in Polarkoordinaten angegeben (*Entwicklung der Störungswerte in den Koordinaten durch die Variation entsprechend gewählter Konstanten, Denkschr. Wien. Ak. Band 46, 1883) und auch durch die rechnerische Ausbildung der übrigen Methoden nach der Richtung der größten Schärfe verdienstvoll gewirkt (Bahnbestimmung Band II).

Wir bringen im folgenden die drei hauptsächlichsten heute verwendeten Methoden zur Darstellung und beginnen mit der Variation der Konstanten.

156. Aufstellung der Grundgleichungen für die elliptischen Elemente.

Um die Bewegung eines Körpers zu untersuchen, auf den Kräfte einwirken, haben wir in Nr. 17 neben einem festen Koordinatensystem xyz ein bewegliches $\xi\eta\zeta$ eingeführt, das denselben Anfangspunkt hat, dessen ξ -Achse ständig mit dem Radiusvektor des bewegten Punktes zusammenfällt und das um die drei Achsen ξ, η, ζ Drehungen mit den Geschwindigkeiten $\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ ausführt. Für die Beschleunigungen des Körpers ergaben sich dann die Ausdrücke 12) (Seite 45), nämlich:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)^2 \right] \text{ in der } \xi\text{-Achse,} \\ & r \left[\frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{s}}{dt} \text{ in der } \eta\text{-Achse,} \\ & -r \left[\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} - \frac{d\mathbf{s}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \text{ in der } \zeta\text{-Achse.} \end{aligned} \quad 1)$$

Nennt man die Neigung der instantanen $\xi\eta$ -Ebene gegen die xy -Ebene: i , die Länge des Knotens, gezählt von der x -Achse: Ω und die Winkelentfernung der ξ -Achse (des Radiusvektors) vom Knoten: u , so ergeben die Gleichungen 6) (Seite 13), da hier:

$$\varphi = u, \quad \theta = i, \quad \psi = -\Omega$$

zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \cos u \frac{di}{dt} + \sin u \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= -\sin u \frac{di}{dt} + \cos u \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \frac{du}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \quad 2)$$

Kann der Körper als Punkt aufgefaßt werden, so genügen zur Fixierung seiner Lage drei Angaben: r , die Drehungsgeschwindigkeit der instantanen Ebene, in der er sich bewegt, um den Radiusvektor: $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ und die Drehungsgeschwindigkeit in dieser Ebene: $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$; die Drehungsgeschwindigkeit um die η -Achse kann also Null gesetzt werden. Damit wird aus den Beschleunigungen 1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)^2 \\ r \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)}{dt} \end{aligned} \quad 3)$$

und aus den Gl. 2) folgt:

$$\cos u \sin i \frac{d\Omega}{dt} = \sin u \frac{di}{dt} \quad 4)$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \cos u \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \sin u \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{d\mathbf{s}}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \quad 5)$$

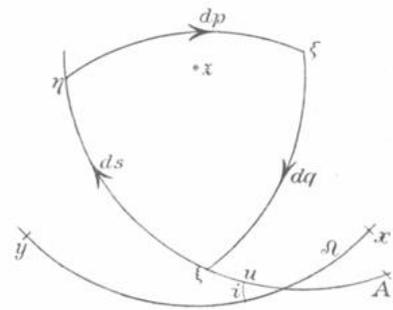


Fig. 58.

Es werde nun der Anfangspunkt der Koordinatensysteme in den Mittelpunkt der Sonne verlegt und dieser als Sitz einer Zentralkraft gedacht, die nach dem Newtonschen Gesetz wirkt. Die relative Beschleunigung längs des Radiusvektors r , welche diese in der Bewegung des Punktes hervorbringt, haben wir in Nr. 41 zu $-\frac{k^2(1+m)}{r^2}$ festgestellt, wenn wir die Sonnenmasse als Einheit einführen und demgemäß unter k die Gaußsche Konstante verstehen. Die Beschleunigungen in der η - und der ζ -Achse, welche von dieser Kraft herrühren, sind Null. Sollen außer der Sonnenanziehung auch die Anziehungen berücksichtigt werden, welche von den Planeten des Sonnensystems herrühren, so erhalten die Beschleunigungen längs der drei Achsen ξ, η, ζ Zusätze, die wir mit S, T, W bezeichnen und die Komponenten der störenden Kräfte nennen wollen. Indem wir uns die Aufstellung der Ausdrücke für dieselben für später vorbehalten, können wir jetzt als Beschleunigungen des bewegten Punktes in der Richtung des Radiusvektors: $-\frac{k^2(1+m)}{r^2} + S$, in der Richtung der η -Achse: T und in der Richtung der ζ -Achse: W hinstellen.

In Verbindung mit 3) resultieren also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= S \\ r \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \frac{1}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)}{dt} = T \\ r \frac{d\mathbf{s}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= W, \end{aligned} \quad 6)$$

deren Integration die den Ort des Punktes bestimmenden Stücke ergibt. Eine strenge Integration nach Einsetzung der komplizierten analytischen Ausdrücke für S, T, W ist nicht möglich. Man geht daher so vor, daß man zuerst die tatsächlich kleinen Größen S, T, W gleich Null setzt. Die dann entstehenden Gleichungen sind streng integrierbar, wie in den Nr. 41 ff. gezeigt worden ist. Das Resultat ist folgendes. Da aus der zweiten Gleichung sich

$$r^2 \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \text{const.}$$

ergibt, wenn r stets einen von Null verschiedenen Wert hat, so folgt aus der dritten

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

d. h. das Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ dreht sich um den Radiusvektor r nicht, die $\xi\eta$ -Ebene behält also die einmal eingenommene Lage bei und der Radiusvektor und damit der Punkt bewegen sich in dieser Ebene und zwar nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= 0 \\ r^2 \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \text{const.} = k\sqrt{1+m}\sqrt{p} \quad (\text{Seite 127}). \end{aligned} \quad 7)$$

Das Integral derselben ist für die elliptische Bewegung aus Nr. 44 zusammengestellt:

$$\begin{aligned} \mu^2 a^3 &= k^2(1+m) \\ E - e \sin E &= \mu(t - t_0) + M_0 \\ r \sin(s - \chi) &= a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \cos(s - \chi) &= a(\cos E - e) \end{aligned} \quad 8)$$

und enthält die vier unabhängigen Konstanten M_0, a, e, χ ; die Winkel s und χ , von denen letzterer die Lage des Perihels anzeigt, können von einer beliebigen Richtung in der Ebene $\xi\eta$ aus gezählt werden; wir wollen festsetzen, daß sie von einer Richtung A an gerechnet werden, die von der Knotenlinie aus um \mathcal{Q} in der $\xi\eta$ -Ebene nach rückwärts liegt. Nimmt man hierzu das aus 5) folgende Resultat, daß die Bestimmungsstücke der $\xi\eta$ -Ebene gegen die feste Fundamentelebene \mathcal{Q} und i Konstante werden, so hat man im ganzen sechs Konstante, durch welche die Bewegung des Körpers bestimmt ist. In der Tat werden die Polarkoordinaten l und b im System xyz aus folgenden Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} \cos b \sin(l - \mathcal{Q}) &= \cos i \sin(s - \mathcal{Q}) \\ \cos b \cos(l - \mathcal{Q}) &= \cos(s - \mathcal{Q}) \\ \sin b &= \sin i \sin(s - \mathcal{Q}). \end{aligned} \quad 9)$$

Die Gruppen 8) und 9) stellen das vollständige Integral der Gleichungen 6) dar unter der Voraussetzung, daß die störenden Kräfte Null sind, und ergeben für jede Zeit die Polarkoordinaten r, l, b .

Werden jetzt die störenden Kräfte S, T, W nicht als verschwindend angenommen, so stellen 8) und 9) die Integrale von 6) nicht mehr dar; nach einer unter dem Namen der Variation der Konstanten bekannten Methode der Integralrechnung kann man aber 8) und 9) noch als Integrale der vollständigen Gleichungen 6) betrachten, wenn man $M_0, a, e, \chi, \Omega, i$ nicht mehr als Konstante, sondern als Funktionen der Zeit einführt; mit anderen Worten, man kann die Bewegung nach wie vor als eine elliptische betrachten, aber als eine mit fortwährend wechselnden Elementen. Die hierzu nötige Bestimmung der Elemente als Funktionen der Zeit kann auf unendlich verschiedene Arten geschehen und es wird darauf ankommen, die zweckmäßigste herauszufinden.

Wir behandeln zuerst die beiden ersten Gleichungen 6), von denen die Bestimmung von s und r allein abhängt. Trägt man darin die aus 8) folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} r &= f(t, M_0, a, e, \chi) \\ s &= F(t, M_0, a, e, \chi) \end{aligned} \quad 10)$$

ein, so erhält man zur Bestimmung von M_0, a, e, χ als Funktionen der Zeit zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 + \frac{k^2 (1+m)}{f^2} &= S \\ \frac{1}{f} \frac{d \left(f^2 \frac{dF}{dt} \right)}{dt} &= T, \end{aligned} \quad 11)$$

die hierzu nicht ausreichen; man darf noch zwei Gleichungen hinzufügen, denen die Funktionen a, e, M_0, χ ebenfalls genügen sollen. In der Wahl dieser Gleichungen läßt man sich von folgender Überlegung leiten. Der gestörte und der ungestörte Ort r, s werden in jedem Zeitmoment durch dieselben Ausdrücke 8) oder 10) gegeben. Würde dies auch noch für die ersten Differenzialquotienten von r und s nach der Zeit der Fall sein, so würde hierdurch ein möglichstes Aneinanderschmiegen der gestörten und der ungestörten *Bewegung* herbeigeführt, d. h. der mit unveränderten Elementen gerechnete Ort würde auch noch im jeweils nächsten Zeitmoment den gestörten Ort darstellen. Wir führen daher als weitere Bedingung für die Bestimmung von M_0, a, e, χ als Funktionen der Zeit die ein, daß die ersten Differenzialquotienten von r und s in der gestörten Bewegung durch dieselben Ausdrücke gegeben seien wie in der ungestörten. Da in der gestörten Bewegung (mit variabeln Elementen)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial M_0} \frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial M_0} \frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} \end{aligned}$$

und in der ungestörten

$$\frac{dr}{dt} = \frac{df}{dt}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

so kommen beide überein, wenn

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial M_0} \frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial M_0} \frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

und dies sind die zwei Zusatzgleichungen. Aus den vier Gleichungen (11) und (12) sind M_0 , a , e , χ als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Dies kann man durch folgendes Verfahren rascher erreichen, als durch direkte Behandlung der Gl. (11) und (12).

Die Koordinaten r und s und ihre ersten Differenzialquotienten (Nr. 46 und Gl. 9) Seite 127)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} e \sin(s - \chi) \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{k\sqrt{p}\sqrt{1+m}}{r^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}p} (1 + e \cos(s - \chi))^2 \end{aligned} \quad (13)$$

sind nach den oben gemachten Festsetzungen in der gestörten Bewegung durch dieselben Ausdrücke gegeben wie in der ungestörten Bewegung. Die zweiten Differenzialquotienten dagegen haben in der elliptischen Bewegung den Wert

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= r \left(\frac{ds}{dt} \right) - \frac{k^2(1+m)}{r^2} \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{ds}{dt}, \end{aligned}$$

in der gestörten Bewegung aber treten nach 6) hierzu noch die Glieder S bzw. $\frac{1}{r} T$. Differenziert man also die Gl. (13) nach der Zeit, so werden die Unterschiede der entstehenden zweiten Differenzialquotienten linker Hand von ihren Werten in der elliptischen Bewegung: S bzw. $\frac{1}{r} T$ und rechter Hand werden die Unterschiede der Koordinaten und ihrer ersten Differenzialquotienten in beiden Bewegungen verschwinden, und nur die Unterschiede der Differenzialquotienten der Elemente übrig bleiben, welche in der elliptischen Bewegung Null, in der gestörten aber $\frac{da}{dt}$, ... sind.

Man erhält also:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} e \cos(s - \chi) \frac{d\chi}{dt} + \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} \sin(s - \chi) \frac{de}{dt} - \frac{1}{2} \frac{k\sqrt{1+m}}{p\sqrt{p}} e \sin(s - \chi) \frac{dp}{dt} \\ \frac{T}{r} &= \frac{1}{2} \frac{k\sqrt{1+m}}{r^2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

Stellt man die Gleichungen (13) so

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} \frac{dr}{dt} &= e \sin(s - \chi) \\ \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} r \frac{ds}{dt} &= e \cos(s - \chi) + 1, \end{aligned} \quad (13^a)$$

quadriert und addiert, so kommt:

$$\frac{1}{k^2(1+m)} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{p} [1 + e^2 + 2e \cos(s - \chi)] = \frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}$$

oder

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Wird diese Gleichung, die wir auch direkt aus Nr. 42 entnehmen konnten, nach den obigen Prinzipien differenziert, so erscheint:

$$2 \frac{dr}{dt} S + 2r^2 \frac{ds}{dt} \frac{T}{r} = k^2(1+m) \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt}$$

oder nach Substitution von 13)

$$\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \frac{2}{kV_{1+m}\sqrt{p}} e \sin(s - \chi) S + \frac{2\sqrt{p}}{kV_{1+m}r} T. \tag{15}$$

Man kann die Gl. 13^a) aber auch direkt der Differenziation unterwerfen, worauf sich ergibt:

$$\begin{aligned} -e \cos(s - \chi) \frac{d\chi}{dt} + \sin(s - \chi) \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} S + \frac{1}{2} \frac{1}{V\sqrt{p}kV_{1+m}} \frac{dr}{dt} \frac{dp}{dt} \\ e \sin(s - \chi) \frac{d\chi}{dt} + \cos(s - \chi) \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} T + \frac{1}{2} \frac{1}{V\sqrt{p}kV_{1+m}} r \frac{ds}{dt} \frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

oder mit Benutzung von 13) und der zweiten Gleichung in 14):

$$\begin{aligned} -e \cos(s - \chi) \frac{d\chi}{dt} + \sin(s - \chi) \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} S + \frac{r}{p} \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} e \sin(s - \chi) T \\ e \sin(s - \chi) \frac{d\chi}{dt} + \cos(s - \chi) \frac{de}{dt} &= 2 \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} T. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit $\frac{p}{r} = 1 + e \cos(s - \chi)$

$$\begin{aligned} e \frac{d\chi}{dt} &= - \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} \cos(s - \chi) S + \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} \sin(s - \chi) \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \\ e \frac{de}{dt} &= + \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} e \sin(s - \chi) S + \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) T. \end{aligned} \tag{16}$$

Diese letztere Gleichung kann man auch noch aus 14) und 15) ableiten, wenn man aus

$$p = a(1 - e^2)$$

entnimmt

$$2ae \frac{de}{dt} = (1 - e^2) \frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} S = (S), \quad \frac{\sqrt{p}}{kV_{1+m}} T = (T),$$

so haben wir jetzt folgende Differenzialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen p, a, χ, e :

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2r(T) \\
 \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} &= \frac{2e}{p} \sin(\mathbf{s} - \chi) (S) + \frac{2}{r} (T) \\
 e \frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\mathbf{s} - \chi) (S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin(\mathbf{s} - \chi) (T) \\
 e \frac{de}{dt} &= e \sin(\mathbf{s} - \chi) (S) + \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right) (T).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Durch $\frac{da}{dt}$ ist auch $\frac{d\mu}{dt}$ gegeben, indem aus

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{2} k V \sqrt{1+m} \frac{1}{V a a^2} \frac{da}{dt} = -\frac{3}{2} \mu a \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt},$$

also

$$\frac{d\mu}{dt} = -3 \frac{\mu a e}{p} \sin(\mathbf{s} - \chi) (S) - \frac{3\mu a}{r} (T). \tag{18}$$

Statt der Gleichung für e kann man auch die für den Exzentrizitätswinkel φ aufstellen, da $\cos \varphi d\varphi = de$ ist. Aus

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\mathbf{s} - \chi) \quad \text{und} \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos E$$

folgt

$$\frac{p}{r} - \frac{r}{a} = e (\cos(\mathbf{s} - \chi) + \cos E),$$

so daß man statt obiger Gl. für de auch setzen kann:

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \sin(\mathbf{s} - \chi) \cdot (S) + \cos(\mathbf{s} - \chi) \cdot (T) + \cos E \cdot (T), \tag{19}$$

wozu wegen $\frac{r}{p} \sin(\mathbf{s} - \chi) = \sec \varphi \sin E$ symmetrisch tritt:

$$\sin \varphi \frac{d\chi}{dt} = -\cos(\mathbf{s} - \chi) \cdot (S) + \sin(\mathbf{s} - \chi) \cdot (T) + \sec \varphi \sin E \cdot (T). \tag{20}$$

Um die Differenzialgleichung für M_0 zu ermitteln, geht man, wenn man nicht von 12) Gebrauch machen will, da dies auf eine ziemlich komplizierte Rechnung führt, direkt von

$$M = \mu(t - t_0) + M_0 = E - e \sin E$$

und

$$r = a - ae \cos E$$

aus, die nach den obigen Grundsätzen differenziert auf

$$\frac{dM}{dt} = \frac{r}{a} \frac{dE}{dt} - \sin E \frac{de}{dt}$$

und

$$0 = ae \sin E \frac{dE}{dt} - a \cos E \frac{de}{dt} + \frac{r}{a} \frac{da}{dt}$$

führen. Wird hieraus $\frac{dE}{dt}$ eliminiert, so kommt:

$$ae \sin E \frac{dM}{dt} = (r \cos E - ae \sin E^2) \frac{de}{dt} - \frac{r^2}{a^2} \frac{da}{dt}.$$

Nun ist nach 8)

$$ae \sin E = r \sin(s - \chi) \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$r \cos E - ae \sin E^2 = a \cos E - ae \cos E^2 - ae \sin E^2 = a(\cos E - e) = r \cos(s - \chi),$$

also folgt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \cotg(s - \chi) \frac{de}{dt} - \frac{r \sqrt{1 - e^2}}{e \sin(s - \chi)} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt}.$$

Werden hier $\frac{de}{dt}$ und $\frac{da}{dt}$ aus 19) und 17) eingetragen, so erhält man zuerst

$$\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dM}{dt} = \cos(s - \chi)(S) - \frac{2e}{p} r(S) + \frac{\cos(s - \chi)^2}{\sin(s - \chi)}(T) + \frac{\cos(s - \chi) \cos E}{\sin(s - \chi)}(T) - \frac{2}{\sin(s - \chi)}(T).$$

Nun ist nach 8) und $r = a - ae \cos E$:

$$r \cos(s - \chi) \cos E = a \cos E^2 - ae \cos E = r - a \sin E^2 = r - \frac{r^2}{p} \sin(s - \chi)^2,$$

also

$$\cos(s - \chi) \cos E = 1 - \frac{r}{p} \sin(s - \chi)^2.$$

Somit wird:

$$\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dM}{dt} = \cos(s - \chi)(S) - \sin(s - \chi) \left(1 + \frac{r}{p} \right) (T) - \frac{2e}{p} r(S),$$

oder nach 17)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dM}{dt} = -\frac{d\chi}{dt} - 2 \frac{r}{p}(S). \quad 21)$$

Nun folgt aus

$$M = M_0 + \mu(t - t_0)$$

die Beziehung

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{d\mu}{dt}, \quad 22)$$

wenn nämlich, wie in der eben beendeten Ableitung nur auf die Änderung von M , soweit sie von den Störungen herrührt, Rücksicht genommen wird. Man hat also durch Vergleichung mit 21)

$$\frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{1 - e^2} \frac{d\chi}{dt} - 2\sqrt{1 - e^2} \frac{r}{p}(S). \quad 23)$$

Ehe wir die jetzt aufgestellten Gleichungen für a , $e(\varphi)$, μ , χ , M_0 weiter behandeln, stellen wir die Gleichungen auf, welche die Bahnlage bestimmen. Die dritte Gleichung in 6) kann so geschrieben werden:

$$r^2 \frac{ds}{dt} \frac{dp}{dt} = rW,$$

und gibt, da nach 7) (Seite 488) in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung

$$r^2 \frac{ds}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{p}$$

ist:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{r}{k \sqrt{1+m} \sqrt{p}} W,$$

oder wenn analog (S) und (T) gesetzt wird

$$\frac{\sqrt{p}}{k \sqrt{1+m}} W = (W):$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{r}{p} (W). \quad 24)$$

Hierdurch ist die Drehungsgeschwindigkeit um die ξ -Achse (den Radiusvektor) und damit die Bahnlage bestimmt. Will man diese durch Knoten und Neigung kennen lernen, so wird nach 5) (Seite 487)

$$\frac{di}{dt} = \cos u \frac{r}{p} (W) \quad 25)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = \sin u \frac{r}{p} (W). \quad 26)$$

Wir haben bisher die Bewegung in der ξr -Ebene: ds und dr getrennt behandelt von der Drehung dieser Ebene um den Radiusvektor: $d\mathbf{p}$. Wir gehen nun an die Verbindung beider, wobei offenbar nur das Element χ in Betracht zu ziehen ist, das

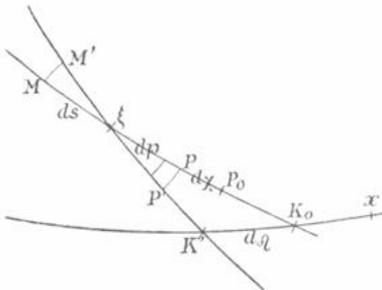


Fig. 59.

in einer von der Bahnlage abhängigen Weise gezählt wird, nämlich von der festen x -Achse bis zum Knoten und von da bis zum Perihel. Während bei unbewegter ξr -Ebene das Perihel von P_0 nach P geht, wird es durch die Drehung der Ebene um die ξ -Achse noch von P nach P' transferiert, wobei $\xi P = \xi P'$ ist. Durch die Gl. 16) wird nur die Verschiebung von P_0 nach P bestimmt. Um eine Gleichung aufzustellen, durch welche die ganze durch die Störungen bedingte Verschiebung des Perihels erhalten wird, nennen

wir $\pi + d\pi$ die Länge des Perihels, gemessen in der gedrehten Bahn, also den gebrochenen Bogen $xK' + K'P'$; stellt hierin $d\pi$ die Störung der Perihelslänge dar, so ist $\pi = xK_0 + K_0P_0$, also identisch mit dem bisherigen χ . Nun ist:

$$\begin{aligned} du &= K' M' - K_0 \xi = K' P' + P' \xi + ds - K_0 P_0 - d\chi - P \xi = \\ &= (K' P' + \Omega + d\Omega) - (K_0 P_0 + \Omega) - d\Omega + ds - d\chi \\ &= (\pi + d\pi) - \pi - d\Omega + ds - d\chi = d\pi - d\Omega + ds - d\chi \end{aligned}$$

und andererseits nach der letzten Gleichung 5)

$$du = ds - \cos i d\Omega$$

also folgt:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\chi}{dt} + (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt}. \quad (27)$$

Die Gleichung für den Abstand des Perihels vom Knoten ω läßt sich hieraus leicht bilden, da

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}.$$

Es wird:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\chi}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \quad (28)$$

Nachdem jetzt alle Differenzialgleichungen zur Berechnung der gestörten Elemente aufgestellt sind, ist nur noch zu besprechen, in welcher Weise die mittlere Anomalie

$$M = \mu(t - t_0) + M_0$$

in die Gleichungen 8) eingeführt werden muß, da die Zeit hier auch explizit auftritt. Die *vollständige* Differenziation von M gibt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{d\mu}{dt} + \mu;$$

wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt},$$

so folgt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \mu. \quad (29)$$

Das erste Glied rechts ist durch 23) bestimmt; das zweite Glied μ ist das variable Element, dessen Wert nach Integration von 18) erhalten wird.

Bei kleinen Exzentrizitäten wird $\frac{d\chi}{dt}$ wegen des Divisors e sehr groß, also auch nach 23) $\frac{d\bar{M}_0}{dt}$; es empfiehlt sich dann statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge L zu benutzen und statt des Elementes M_0 die mittlere Länge für die Epoche L_0 einzuführen. Diese Größen sind nämlich definiert durch

$$\begin{aligned} L &= M + \pi = M_0 + \mu(t - t_0) + \pi = L_0 + \mu(t - t_0) \\ L_0 &= M_0 + \pi \end{aligned}$$

und es wird daher

$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{dt} &= \frac{dM_0}{dt} + \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{dL_0}{dt} + \frac{d\mu}{dt}(t - t_0) + \mu, \end{aligned}$$

wenn wir gleich die Gesamtänderung mit der Zeit in L zusammennehmen.

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{dL_0}{dt} + \frac{d\mu}{dt}(t - t_0),$$

so wird

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \frac{d\pi}{dt}$$

oder nach 23) und 27)

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = (1 - \sqrt{1 - e^2}) \frac{d\chi}{dt} + (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} - 2\sqrt{1 - e^2} \frac{r}{p} (S)$$

oder

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cdot e \frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt} - 2 \cos \varphi \frac{r}{p} (S) \quad 30)$$

und dann

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \mu. \quad 31)$$

Infolge der Einführung der Elemente π und L_0 müssen auch die Formeln 8) in anderer Weise geschrieben werden. s wird ebenso wie χ von einer festen Richtung in der Bahn aus gezählt; führt man die Länge ν in der gedrehten Bahn ein, so wird sich ν von s um ebensoviele unterscheiden wie π von χ und es wird also $s - \chi = \nu - \pi = v =$ wahre Anomalie. In den Formeln 9) muß gesetzt werden:

$$s - \Omega = \nu - \Omega,$$

da nach der Herleitung derselben s darin die Länge in der gedrehten Bahn bedeutet. Das gesamte Integral für die Bewegung des gestörten Körpers ist also:

$$\begin{aligned} E - e \sin E &= M = L - \pi \\ r \sin(\nu - \pi) &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos(\nu - \pi) &= a(\cos E - e) \\ \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin(\nu - \Omega) \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos(\nu - \Omega) \\ \sin b &= \sin i \sin(\nu - \Omega) \end{aligned} \quad 32)$$

und die hierin auftretenden Größen sind zu bestimmen durch

$$\begin{aligned} e \frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin(\nu - \pi)(T) \\ \frac{d\bar{M}_0}{dt} &= -\cos \varphi \frac{d\chi}{dt} - 2 \cos \varphi \frac{r}{p} (S) \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \mu \end{aligned} \quad 33)$$

oder wenn statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge benutzt wird:

$$\begin{aligned} e \frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin(\nu - \pi)(T) \\ \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cdot e \frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt} - 2 \cos \varphi \frac{r}{p} (S) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \mu \end{aligned} \quad 34)$$

und in beiden Fällen weiter:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\pi}{dt} &= \frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\
 \frac{di}{dt} &= \cos(\nu - \Omega) \frac{r}{p} (W) \\
 \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \sin(\nu - \Omega) \frac{r}{p} (W) \\
 \frac{d\mu}{dt} &= -3 \frac{\mu a e}{p} \sin(\nu - \pi)(S) - \frac{3\mu a}{r} (T) \\
 \frac{de}{dt} &= \sin(\nu - \pi)(S) + \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) (T).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Um hier alles beisammen zu haben, seien noch die Varianten hinzugefügt:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2r (T) \\
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2 e}{p} \sin(\nu - \pi)(S) + \frac{2a^2}{r} (T) \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\chi}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\
 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \sin(\nu - \pi)(S) + (\cos(\nu - \pi) + \cos E)(T) \\
 \sin \varphi \frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + (\sin(\nu - \pi) + \sec \varphi \sin E)(T).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Die Verwertung dieser Formeln sei durch folgende Definition eingeleitet: *Unter einem oskulierenden Elementensystem für einen bestimmten Zeitmoment versteht man dasjenige System, durch welches Ort und Geschwindigkeit in diesem Moment wiedergegeben wird.* Durch ein solches System wird also in diesem Moment — der Oskulationsepoche — die Bewegung des Körpers dargestellt. Wären Störungen nicht vorhanden, so wäre dadurch die Bewegung überhaupt bestimmt; wirken dagegen störende Kräfte, so werden in dem der Oskulationsepoche folgenden Zeitmoment die Elemente Ort und Geschwindigkeit nicht mehr darstellen, wohl aber wird dies der Fall sein durch Elemente, die nach den eben aufgestellten Differenzialgleichungen als Funktionen der Zeit bestimmt sind, wenn darin der neue Zeitmoment eingetragen wird. Dies geht aus der Herleitung der Formeln unmittelbar hervor; denn man erhält durch sie oskulierende für den zweiten Zeitmoment. Schließt man so weiter, so kann man oskulierende Elemente für jeden beliebigen späteren oder früheren Zeitpunkt sich verschaffen. Den Unterschied zwischen den Endelementen und den Ausgangselementen nennt man die *Elementenstörungen* für die Zwischenzeit.

Die Integration der aufgestellten Differenzialgleichungen vollzieht man nach dem im vorigen Abschnitt auseinandergesetzten Verfahren der mechanischen Integration in folgender Weise. Es sei Ω ein beliebiges der Elemente $\Omega, i, \pi, L_0, \varphi, \mu$, dann wird das allgemeine Integral von

$$\frac{d\Omega}{dt} = f(t)$$

folgendes:

$$\varrho = \bar{\varrho} + \int f(t) dt = \bar{\varrho} + \int \frac{d\varrho}{dt} dt,$$

wo $\bar{\varrho}$ die Integrationskonstante ist. Ist t_0 die Oskulationsepoche der Ausgangselemente, t_1 die Epoche, für welche die Elemente gesucht werden, so hat man

$$\begin{aligned}\varrho_{t=t_0} &= \bar{\varrho} + \left(\int \frac{d\varrho}{dt} dt \right)_{t=t_0} \\ \varrho_{t=t_1} &= \bar{\varrho} + \left(\int \frac{d\varrho}{dt} dt \right)_{t=t_1}\end{aligned}$$

und daher die Elementenstörung von t_0 bis t_1 in ϱ :

$$\varrho_{t=t_1} - \varrho_{t=t_0} = \Delta \varrho = \left(\int \frac{d\varrho}{dt} dt \right)_{t=t_1} - \left(\int \frac{d\varrho}{dt} dt \right)_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varrho}{dt} dt. \quad 37)$$

Daraus folgt:

$$\varrho_{t=t_1} = \varrho_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varrho}{dt} dt,$$

wenn das oskulierende Element für die Epoche t_0 kurz mit ϱ_0 bezeichnet wird. Bei der Bildung des bestimmten Integrales $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varrho}{dt} dt$ nach den Formeln Seite 480 ist also in erster Linie darauf zu achten, daß die untere Grenze a bez. $a - \frac{w}{2}$ mit der Oskulationsepoche der vorgelegten Elemente zusammenfalle, weiter hat man nur die Differenzialquotienten $\frac{d\varrho}{dt}$ nach den Formeln 33) bis 35) in angemessenen Zeitintervallen w zu berechnen und deren Differenzen- und Summenschema zu bilden.

Die mittlere Anomalie bez. mittlere Länge bedürfen einer besonderen Behandlung. Aus

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \mu$$

folgt, da μ Funktion der Zeit ist, für die gestörte mittlere Länge der Epoche t_1 :

$$L_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dL}{dt} dt + L_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{L}_0}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} \mu dt + L_0,$$

wo die hinzugefügte Konstante offenbar die mittlere Länge für die Epoche t_0 bedeutet. Nun ist ferner

$$\mu = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt} dt + \mu_0,$$

also

$$L_1 = L_0 + \mu_0(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{L}_0}{dt} dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt} dt^2. \quad 38)$$

Ebenso:

$$M_1 = M_0 + \mu_0(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{M}_0}{dt} dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt} dt^2. \quad (39)$$

Bei diesen Elementen ist also eine doppelte Integration zu leisten. Es könnte befremden, daß man *sieben* Integrationen auszuführen hat, allein die eine überschüssige Integration steht dem eigentlichen Problem fern und wird nur zur Bequemlichkeit ausgeführt, um mit dem Element μ nicht von Intervall zu Intervall wechseln zu müssen. Das ist aber hier wegen der Multiplikation mit der Zeit nötig, während man nur Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt, wenn man sonst in den rechten Seiten der Gleichungen 35) die auftretenden Elemente konstant hält. Da $L_0 + \mu_0(t - t_0)$ und $M_0 + \mu_0(t - t_0)$ die ungestörte mittlere Länge bzw. Anomalie bedeuten, so stellen:

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{L}_0}{dt} dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt} dt^2 \quad (40)$$

$$\Delta M = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{M}_0}{dt} dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt} dt^2 \quad (41)$$

die Störungen in mittlerer Länge bzw. Anomalie dar.

Für die Berechnung ist es zweckmäßiger $\frac{d\bar{M}_0}{dt}$, $\frac{d\bar{L}_0}{dt}$ und $\frac{d\pi}{dt}$ nicht aus $\frac{d\chi}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ zusammensetzen, sondern sie direkt in den Komponenten (S), (T), (W) auszudrücken; man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}_0}{dt} &= \left(\cotg \varphi \cos(\nu - \pi) - 2 \frac{r}{p} \cos \varphi \right) (S) - \cotg \varphi \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin(\nu - \pi) (T) \\ \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= - \left(\tg \frac{1}{2} \varphi \cos(\nu - \pi) + 2 \frac{r}{p} \cos \varphi \right) (S) + \tg \frac{1}{2} \varphi \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin(\nu - \pi) (T) + \tg \frac{1}{2} i \frac{r}{p} \sin(\nu - \Omega) (W) \\ \frac{d\pi}{dt} &= - \frac{\cos(\nu - \pi)}{\sin \varphi} (S) + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin(\nu - \pi)}{\sin \varphi} (T) + \tg \frac{1}{2} i \frac{r}{p} \sin(\nu - \Omega) (W) \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\cos(\nu - \pi)}{\sin \varphi} (S) + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin(\nu - \pi)}{\sin \varphi} (T) - \cotg i \frac{r}{p} \sin(\nu - \Omega) (W). \end{aligned} \quad (42)$$

157. Berechnung der störenden Kräfte. Zur Aufstellung der Differenzialquotienten der Elemente bedarf man der Komponenten der störenden Kräfte S , T , W , welche unserer Seite 487 gemachten Voraussetzung gemäß längs der positiven Richtungen der Koordinatenachsen ξ , η , ζ des beweglichen Systems wirken. Wird der Anfangspunkt dieses Systems in den Mittelpunkt der Sonne gelegt, so werden die Koordinaten des gestörten Körpers P

$$\xi = r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \quad 1)$$

Indem wir zuerst nur *einen* störenden Körper in Betracht ziehen, bezeichnen wir dessen Koordinaten in demselben System mit ξ_1 , η_1 , ζ_1 , seine Entfernung von der

Sonne mit r_1 , seine Entfernung vom Körper P mit ϱ_1 und seine Masse mit m_1 ; die von ihm auf die Sonne ausgeübte Beschleunigung ist dann $\frac{k^2 m_1}{r_1^2}$ und wenn sie nach den drei Achsen zerlegt wird:

$$k^2 m_1 \frac{\xi_1}{r_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\eta_1}{r_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\zeta_1}{r_1^3};$$

ebenso ist seine Wirkung auf den Körper P gleich $\frac{k^2 m_1}{\varrho_1^2}$ und nach denselben Achsen zerlegt:

$$k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi}{\varrho_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\eta_1 - \eta}{\varrho_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{\varrho_1^3}.$$

Da wir die relative Bewegung von P um die Sonne suchen, haben wir die relative Beschleunigung der Masse m_1 auf P in Betracht zu ziehen, deren Komponenten S_1, T_1, W_1 also sein werden:

$$S_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\varrho_1^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right), \quad T_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\varrho_1^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right), \quad W_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\zeta_1 - \zeta}{\varrho_1^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right)$$

oder wenn

$$\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} = K_1$$

gesetzt und 1) beachtet wird:

$$S_1 = k^2 m_1 \left(\xi_1 K_1 - \frac{r}{\varrho_1^3} \right), \quad T_1 = k^2 m_1 \eta_1 K_1, \quad W_1 = k^2 m_1 \zeta_1 K_1. \quad 2)$$

Hierin sind noch zur Berechnung von ϱ_1 und ξ_1, η_1, ζ_1 die von den Jahrbüchern gebotenen Stücke einzuführen. Diese geben von den hier in Betracht kommenden großen

Planeten außer dem Radiusvektor r_1 die heliozentrische Länge und Breite λ_1 und β_1 bezogen auf die Ekliptik und den Frühlingspunkt. Ist wie früher u die Entfernung der ξ -Achse vom Knoten und nennt man $L_1 - u$ und B_1 die Polarkoordinaten des störenden Körpers J_1 im System $\xi\eta\zeta$, so wird

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned} \quad 3)$$

und L_1 und B_1 hängen mit λ_1 und β_1 durch folgende

aus dem Dreieck zwischen J_1, ζ und dem Pol der Ekliptik sich ergebenden Formeln zusammen:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos(\lambda_1 - \Omega) \cos \beta_1 \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin i \sin \beta_1 + \cos i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega) \\ \sin B_1 &= \cos i \sin \beta_1 - \sin i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega). \end{aligned} \quad 4)$$

Da ferner

$$\varrho_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2$$

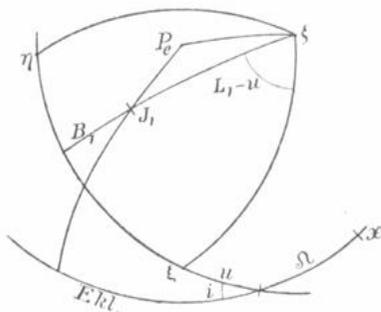


Fig. 60.

so ergibt sich ϱ_1 aus der Durchrechnung des Systems

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - r \\ \varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \varrho_1 \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1. \end{aligned} \quad 5)$$

Man hat also folgende Ausdrücke für die Komponenten der störenden Kraft, die von m_1 ausgeht:

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 m_1 \left(r_1 K_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - \frac{r}{\varrho_1^3} \right) \\ T_1 &= k^2 m_1 r_1 K_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ W_1 &= k^2 m_1 r_1 K_1 \sin B_1 \end{aligned} \quad 6)$$

worin

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

und ϱ_1 durch 5) berechnet wird.

Zieht man mehrere störende Körper in Betracht, so werden die Gesamtkomponenten $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$, $T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$, $W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$

Wir haben in den Schlußformeln der Nr. 156 (Seite 496—97) die Größen

$$(S) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} S, \quad (T) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} T, \quad (W) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} W$$

eingeführt; wenn man, um bei der Anwendung der Formeln der mechanischen Integration der schließlichen Multiplikation mit dem gewählten Intervall w überhoben zu sein, gleich den w -fachen Betrag von (S) , (T) , (W) rechnet, wenn man ferner, um die Störungsbeträge in den Elementen gleich in Sekunden zu erhalten, die Multiplikation mit 206 264.8 dadurch ausführt, daß man in den störenden Komponenten k'' ansetzt und wenn man endlich die stets unbekannte Masse $m = 0$ setzt, so werden die so modifizierten Ausdrücke der störenden Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{w(S)}{\sin 1''} &= \mathbf{S} = (k'' w m_1) \sqrt{p} \left(r_1 K_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - \frac{r}{\varrho_1^3} \right) \\ \frac{w(T)}{\sin 1''} &= \mathbf{T} = (k'' w m_1) \sqrt{p} r_1 K_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \frac{w(W)}{\sin 1''} &= \mathbf{W} = (k'' w m_1) \sqrt{p} r_1 K_1 \sin B_1 \\ K_1 &= \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \\ L_1, B_1, \varrho_1 &\text{ durch 4) und 5).} \end{aligned} \quad 7)$$

Die Faktoren $(k'' w m_1)$ sind für die großen Planeten und für die Intervalle $w = 20$ und 40 Tage in Taf. XXXXV zusammengestellt.

158. Zusammenstellung der Formeln. In der für die Anwendung geeignetsten Form zusammengestellt, werden die abgeleiteten Ausdrücke für die Berechnung der Störungen in den Elementen folgende.

Methode der Variation der Elemente für die Ellipse.

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad M &= L - \pi = M_0 + \mu(t - t_0) = L_0 - \pi + \mu(t - t_0) \\
 E - e'' \sin E &= M & e'' &= [5.314425] \sin \varphi \\
 r \sin v &= a \cos \varphi \sin E & \sqrt{a} &= \left(\frac{k''}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 r \cos v &= a(\cos E - \sin \varphi) & \log k'' &= 3.550007 \\
 u &= v + \omega = v + \pi - \varrho \\
 p &= a \cos \varphi^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - \varrho) \\
 \cos B_1 \sin L_1 &= \sin i \sin \beta_1 + \cos i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \varrho) \\
 \sin B_1 &= \cos i \sin \beta_1 - \sin i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \varrho) \\
 \varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - r = \xi_1 - r \\
 \varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) = \eta_1 \\
 \varrho_1 \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1 = \zeta_1.
 \end{aligned}$$

Es ist darauf zu achten, daß i , ϱ , λ_1 , β_1 sich auf Ekliptik und Äquinoktium derselben Epoche beziehen.

$$\begin{aligned}
 \text{III.} \quad K_1 &= \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \\
 \mathbf{S} &= (k'' w m_1) \sqrt{p} \left(\xi_1 K_1 - \frac{r}{\varrho_1^3} \right) \\
 \mathbf{T} &= (k'' w m_1) \sqrt{p} \eta_1 K_1 \\
 \mathbf{W} &= (k'' w m_1) \sqrt{p} \zeta_1 K_1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.} \quad w \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \mathbf{W} \\
 w \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \mathbf{W} \\
 w \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\sin v}{\cos \varphi} \mathbf{S} + \frac{1}{\cos \varphi} (\cos v + \cos E) \mathbf{T} \\
 w \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\cos v}{\sin \varphi} \mathbf{S} + \frac{1}{\sin \varphi} (\sin v + \sec \varphi \sin E) \mathbf{T} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \frac{r}{p} \sin u \mathbf{W} \\
 \text{oder} \quad w \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{\sin \varphi} \mathbf{S} + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{\sin \varphi} \mathbf{T} - \operatorname{cotg} i \frac{r}{p} \sin u \mathbf{W} \\
 w \frac{dL_0}{dt} &= -(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos v + 2 \frac{r}{p} \cos \varphi) \mathbf{S} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi (\sin v + \sec \varphi \sin E) \mathbf{T} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \frac{r}{p} \sin u \mathbf{W} \\
 \text{oder} \quad w \frac{dM_0}{dt} &= (\operatorname{cotg} \varphi \cos v - 2 \frac{r}{p} \cos \varphi) \mathbf{S} - \operatorname{cotg} \varphi \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v \mathbf{T} \\
 w^2 \frac{d\mu}{dt} &= -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{\sin \varphi}{p} \sin v \mathbf{S} - \frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{1}{r} \mathbf{T} \\
 w &= 20^d \log 3kw = 0.013733 \\
 w &= 40^d \log 3kw = 0.314763.
 \end{aligned}$$

In der letzten Formel wurde mit w^2 multipliziert, weil in μ eine doppelte Integration auszuführen ist; da auch das Resultat der ersten Integration zur Ermittlung von $\mathcal{L}\mu$ und $\mathcal{L}a$ gebraucht wird, hat man dabei zu beachten, daß dann obiger Ausdruck $w\mathcal{L}\mu$ ergibt.

V. Läßt man die Oskulationsepoche auf $a - \frac{1}{2}w$ fallen, so berechne man obige $w \frac{di}{dt}, \dots$ für die Zeitmomente

$$a - 2w, \quad a - w, \quad a + w, \quad a + 2w, \quad \dots \quad a + nw,$$

bezeichne allgemein $w \frac{dQ}{dt} = f(a + iw)_{\mathcal{Q}}, \quad w^2 \frac{d\mu}{dt} = f(a + iw)_{\mu}, \quad \dots$, dann bilde man das Differenzen- und Schemaschema mit den Anfangsgliedern

$$\begin{aligned} {}^I f(a - \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{24} f^I(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \frac{1}{2}w) \\ {}^{II} f(a) &= +\frac{1}{24} f(a - w) - \frac{17}{5760} (2 f^{II}(a - w) + f^{II}(a)) \end{aligned}$$

und erhält schließlich für die Störungsbeträge bis zur Zeit $a + nw$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{Q} &= {}^I f(a + nw)_{\mathcal{Q}} - \frac{1}{12} f^I(a + nw)_{\mathcal{Q}} + \frac{11}{720} f^{III}(a + nw)_{\mathcal{Q}} - \dots \\ \mathcal{A}\mu &= {}^I f(a + nw)_{\mu} - \frac{1}{12} f^I(a + nw)_{\mu} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \mathcal{A}L &= \mathcal{A}L_0 + {}^{II} f(a + nw)_{\mu} + \frac{1}{12} f(a + nw)_{\mu} - \frac{1}{240} f^{II}(a + nw)_{\mu} + \dots \\ \mathcal{A}M &= \mathcal{A}M_0 + {}^{II} f(a + nw)_{\mu} + \frac{1}{12} f(a + nw)_{\mu} - \frac{1}{240} f^{II}(a + nw)_{\mu} + \dots \end{aligned}$$

und für die neuen oskulierenden Elemente

$$\begin{aligned} i &= i_0 + \mathcal{A}i, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \mathcal{A}\mathcal{Q}, \quad \dots, \quad L = L_0 + \mu_0(t - t_0) + \mathcal{A}L \\ M &= M_0 + \mu_0(t - t_0) + \mathcal{A}M. \end{aligned}$$

Zieht man eine Epoche von der Form $a + (n + \frac{1}{2})w$ vor, so wird hierfür:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{Q} &= {}^I f(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mathcal{Q}} + \frac{1}{24} f^I(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mathcal{Q}} - \frac{17}{5760} f^{III}(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mathcal{Q}} + \dots \\ \mathcal{A}L &= \mathcal{A}L_0 + {}^{II} f(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mu} - \frac{1}{24} f(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mu} + \frac{17}{1920} f^{II}(a + (n + \frac{1}{2})w)_{\mu} - \dots \end{aligned}$$

Bei der Bildung der Werte $f(a + iw)$ für die einzelnen Zeitmomente kann man in verschiedener Weise verfahren. Man kann die Koeffizienten der störenden Komponenten mit den *ungestörten* Werten der Elemente und der Koordinaten u, v, r berechnen und begeht dann einen Fehler *zweiter* Ordnung in bezug auf die störenden Massen; dieser Weg hat den Vorteil, daß einige Faktoren konstant bleiben und die Koordinaten des gestörten Körpers in einem Zuge vorweg gerechnet werden können; er hat aber den Nachteil, daß die Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, was sich bei längerer Störungsrechnung immerhin im unregelmäßigen Verlauf der Differenzen und in der geringeren Exaktheit der Störungswerte bemerkbar machen wird; schlägt man ihn ein, so wird man wenigstens die Vorsicht gebrauchen, die Elemente zur Berechnung der Koordinaten und der Faktoren von Zeit zu Zeit, etwa alle Jahre, zu wechseln, wobei freilich einige Diskontinuität in den Differenzen nicht zu vermeiden sein wird. Der zweite strenge Weg ist der, die Elemente von Intervall zu Intervall zu wechseln, die Koeffizienten also mit ihren gestörten Werten anzusetzen; er setzt voraus, daß man die Rechnung für jedes Intervall zu Ende führt, ehe man das nächste beginnt, und daß man die Integration für jedes Intervall ausführt. Diese Art der Rechnung, die insbesondere von *Oppolzer* empfohlen worden ist, während man früher sich mit dem einfacheren Weg begnügte, hat den Vorteil, daß die Störungen zweiter Ordnung streng berücksichtigt werden, und er ist auch bei zweckmäßiger Anlage der Rechnung nicht erheblich unbequemer als der andere; man sollte sich daher, wenigstens bei strengen Rechnungen, an ihn gewöhnen. Bei

provisorischen Störungsrechnungen, die etwa mit noch ungenügenden Elementen vorgenommen werden müssen, kann aber immerhin der erste Weg eingeschlagen werden.

159. Beispiel. Störungen von (221) Eos durch Jupiter. Auf den Seiten 505 bis 507 ist der Anfang einer Störungsrechnung vollständig mitgeteilt, um für eine zweckmäßige Anordnung der Rechnung ein Muster zu geben; es ist dabei angenommen, daß von Intervall zu Intervall die Elemente gewechselt werden sollen, daß also eine strenge Berücksichtigung der Störungen höherer Ordnung beabsichtigt ist. Auf einem ersten Blatt (I) sind alle auf den gestörten Planeten bezüglichen Rechnungen enthalten, auf Blatt II die sich auf den störenden Körper beziehenden zugleich mit der Berechnung der störenden Komponenten und der Differenzialquotienten der Elemente; auf Blatt III sind die Differenzen- und Summenreihen gebildet und in der jeweils letzten Kolonne die genäherten Werte der Integrale eingesetzt, wie sie zur Berechnung der Ausdrücke für das nächste Intervall gebraucht werden. Die strenge Integration braucht man nur für die neue Oskulationsepoche durchzuführen.

Die Ausgangselemente sind:

Epoche und Oskulation 1888 April 16.0 M. Z. B.

$$\begin{array}{l} M_0 = 239^\circ 23' 56''.9 \\ \omega = 187 \ 55 \ 11.5 \\ \Omega = 142 \ 38 \ 43.1 \\ i = 10 \ 50 \ 59.8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{array}} \right\} 1890.0$$

$$\begin{array}{l} \varphi = 5 \ 54 \ 3.5 \\ \mu = 679''.1421 \\ \log a = 0.478 \ 6973 \end{array}$$

woraus:

$$\begin{array}{l} \pi = 330^\circ 33' 54''.6 \\ L_0 = 209 \ 57 \ 51.5 \end{array}$$

Für die neue Oskulationsepoche 1888 Sept. 23.0 ergeben sich die Störungsbeträge in den Elementen folgendermaßen:

$$\begin{array}{l} \Delta i = -6''.339 + \frac{1}{24} 0''.894 = -6''.30 \\ \Delta \Omega = -111''.206 - \frac{1}{24} 6''.497 = -111''.48 = -1' 51''.48 \\ \Delta \varphi = -60''.447 - \frac{1}{24} 0''.010 = -60''.45 = -1' 0''.45 \\ \Delta \pi = -1042''.020 - \frac{1}{24} 14''.056 - \frac{17}{5760} 7'' = -1042''.63 = -17' 22''.63 \\ 40 \Delta \mu = -22''.7096 + \frac{1}{24} 0''.0382 = -22''.7080 \\ \Delta \mu = -0''.5677 \\ \Delta L_0 = -36''.907 - \frac{1}{24} 8''.450 = -37''.259 \\ \Delta \omega = \Delta \pi - \Delta \Omega = -15' 31''.15 \\ \Delta L = -37''.259 - 43''.275 + \frac{1}{24} 6''.274 + \frac{17}{1920} 0''.4 = -1' 20''.274. \end{array}$$

Ferner ist

$$\mu_0(t - t_0) = 679''.1421 \times 160 = 30^\circ 11' 2''.736.$$

(Fortsetzung Seite 508.)

Blatt I.

(221) Eos 1888 oh M. Z. B.

| Datum | März 27 | Mai 6 | Juni 15 | Juli 25 | Sept. 3 | Okt. 13 |
|---|--|--|--|---|---|--|
| μ | 679'.14 | 679'.14 | 678'.95 | 678'.82 | 678'.65 | 678'.50 |
| 1890.0 $\left\{ \begin{array}{l} L \\ \pi \\ Q \\ i \\ \varphi \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 206^{\circ}11'29'' \\ 330\ 33\ 55 \\ 142\ 38\ 43 \\ 10\ 51\ 0 \\ 5\ 54\ 3 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 213^{\circ}44'15'' \\ 330\ 33\ 55 \\ 142\ 38\ 43 \\ 10\ 51\ 0 \\ 5\ 54\ 3 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 221^{\circ}16'53'' \\ 330\ 28\ 22 \\ 142\ 38\ 13 \\ 10\ 50\ 57 \\ 5\ 53\ 41 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 228^{\circ}49'19'' \\ 330\ 24\ 9 \\ 142\ 37\ 44 \\ 10\ 50\ 55 \\ 5\ 53\ 26 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 236^{\circ}21'36'' \\ 330\ 19\ 3 \\ 142\ 37\ 11 \\ 10\ 50\ 54 \\ 5\ 53\ 10 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 243^{\circ}53'34'' \\ 330\ 13\ 55 \\ 142\ 36\ 30 \\ 10\ 50\ 54 \\ 5\ 52\ 55 \end{array} \right.$ |
| μ | 2.831 96 | 2.831 96 | 2.831 84 | 2.831 75 | 2.831 65 | 2.831 55 |
| $k' : \mu$ | 0.718 05 | 0.718 05 | 0.718 17 | 0.718 26 | 0.718 36 | 0.718 46 |
| \sqrt{a} | 0.239 35 | 0.239 35 | 0.239 39 | 0.239 42 | 0.239 45 | 0.239 49 |
| a | 0.478 70 | 0.478 70 | 0.478 78 | 0.478 84 | 0.478 91 | 0.478 98 |
| $\cos \varphi$ | 9.997 69 | 9.997 69 | 9.997 70 | 9.997 70 | 9.997 71 | 9.997 71 |
| $\sin \varphi$ | 9.012 02 | 9.012 02 | 9.011 57 | 9.011 27 | 9.010 94 | 9.010 64 |
| e'' | 4.326 45 | 4.326 45 | 4.326 00 | 4.325 70 | 4.325 36 | 4.325 06 |
| M | 235°37'34'' | 243°10'20'' | 250°48'31'' | 258°25'10'' | 266° 2'33'' | 273°39'39'' |
| E | 231 2 43 | 238 10 3 | 245 27 22 | 252 47 28 | 260 15 6 | 267 47 37 |
| $\sin E$ | 9.890 78 _n | 9.929 21 _n | 9.958 87 _n | 9.980 11 _n | 9.993 68 _n | 9.999 68 _n |
| $a \cos \varphi$ | 0.476 39 | 0.476 39 | 0.476 48 | 0.476 54 | 0.476 62 | 0.476 69 |
| $\cos E$ | 9.798 45 _n | 9.722 17 _n | 9.618 46 _n | 9.471 08 _n | 9.228 71 _n | 8.585 45 _n |
| $\cos E - \sin \varphi$ | 9.864 22 _n | 9.799 51 _n | 9.714 41 _n | 9.600 41 _n | 9.434 37 _n | 9.149 16 _n |
| $r \sin v$ | 0.367 17 _n | 0.405 60 _n | 0.435 35 _n | 0.456 65 _n | 0.470 30 _n | 0.476 37 _n |
| $r \cos v$ | 0.342 92 _n | 0.278 21 _n | 0.193 19 _n | 0.079 25 _n | 9.913 28 _n | 9.628 14 _n |
| v | 226°35'55'' | 233°17' 7'' | 240°12'19'' | 247°14'54'' | 254°30' 1'' | 261°55'39'' |
| ω | 187 55 12 | 187 55 12 | 187 50 9 | 187 46 25 | 187 41 52 | 187 37 25 |
| u | 54 31 7 | 61 12 19 | 68 2 28 | 75 1 19 | 82 11 53 | 89 33 4 |
| r | 0.505 90 | 0.501 63 | 0.496 77 | 0.491 83 | 0.486 39 | 0.480 70 |
| p | 0.474 08 | 0.474 08 | 0.474 18 | 0.474 24 | 0.474 33 | 0.474 40 |
| $\cos v$ | 9.837 02 _n | 9.776 58 _n | 9.696 26 _n | 9.587 42 _n | 9.426 89 _n | 9.147 45 _n |
| $\sin v$ | 9.861 27 _n | 9.903 97 _n | 9.938 42 _n | 9.964 82 _n | 9.983 91 _n | 9.995 67 _n |
| $\cos u$ | 9.763 76 | 9.682 76 | 9.572 81 | 9.412 37 | 9.132 74 | 7.894 01 |
| $\sin u$ | 9.910 79 | 9.942 68 | 9.967 29 | 9.984 99 | 9.995 96 | 9.999 99 |
| $r : p$ | 0.031 82 | 0.027 55 | 0.022 59 | 0.017 59 | 0.012 06 | 0.006 30 |
| $(r : p) \sin u$ | 9.942 61 | 9.970 23 | 9.989 88 | 0.002 58 | 0.008 02 | 0.006 29 |
| $\sin i$ | 9.274 71 | 9.274 71 | 9.274 68 | 9.274 65 | 9.274 64 | 9.274 64 |
| $\cos v + \cos E$ | 0.119 21 _n | 0.051 26 _n | 9.960 13 _n | 9.834 16 _n | 9.640 04 _n | 9.252 67 _n |
| $\sec \varphi \sin E$ | 9.893 09 _n | 9.931 52 _n | 9.961 17 _n | 9.982 41 _n | 9.995 97 _n | 0.001 97 _n |
| $\sin v + \sec \varphi \sin E$ | 0.178 50 _n | 0.219 00 _n | 0.250 97 _n | 0.274 73 _n | 0.291 01 _n | 0.299 86 _n |
| $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ | 8.712 15 | 8.712 15 | 8.711 69 | 8.711 39 | 8.711 06 | 8.710 75 |
| $2r : p$ | 0.332 85 | 0.328 58 | 0.323 62 | 0.318 62 | 0.313 09 | 0.307 33 |
| $(2r : p) \cos \varphi$ | 0.330 54 | 0.326 27 | 0.321 32 | 0.316 32 | 0.310 80 | 0.305 04 |
| $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos v$ | 8.549 17 _n | 8.488 73 _n | 8.407 95 _n | 8.298 81 _n | 8.137 95 _n | 7.858 20 _n |
| $\operatorname{tg} \frac{1}{2} i$ | 8.977 58 | 8.977 58 | 8.977 54 | 8.977 51 | 8.977 51 | 8.977 51 |
| $(-3kw) : \sqrt{a}$ | 0.075 41 _n | 0.075 41 _n | 0.075 37 _n | 0.075 34 _n | 0.075 31 _n | 0.075 27 _n |
| $\sin \varphi : p$ | 8.537 94 | 8.537 94 | 8.537 39 | 8.537 03 | 8.536 61 | 8.536 24 |
| $\{i : W\}$ | 9.795 58 | 9.710 31 | 9.595 40 | 9.429 96 | 9.144 80 | 7.900 31 |
| $\{Q : W\}$ | 0.667 90 | 0.695 52 | 0.715 20 | 0.727 93 | 0.733 38 | 0.731 65 |
| $\{\varphi : S\}$ | 9.863 58 _n | 9.906 28 _n | 9.940 72 _n | 9.967 12 _n | 9.986 20 _n | 9.997 96 _n |
| $\{\varphi : T\}$ | 0.121 52 _n | 0.053 57 _n | 9.962 43 _n | 9.836 46 _n | 9.642 33 _n | 9.254 96 _n |
| $\{\pi : S\}$ | 0.825 00 | 0.764 56 | 0.684 69 | 0.576 15 | 0.415 95 | 0.136 81 |
| $\{\pi : T\}$ | 1.166 48 _n | 1.206 98 _n | 1.239 40 _n | 1.263 46 _n | 1.280 07 _n | 1.289 22 _n |
| $\{\pi : W\}$ | 8.920 19 | 8.947 81 | 8.967 42 | 8.980 09 | 8.985 53 | 8.983 81 |
| $\{\bar{L}_0 : S\}$ | 0.323 30 _n | 0.319 91 _n | 0.315 99 _n | 0.312 13 _n | 0.307 87 _n | 0.303 48 _n |
| $\{\bar{L}_0 : T\}$ | 8.890 65 _n | 8.931 15 _n | 8.962 66 _n | 8.986 12 _n | 9.002 07 _n | 9.010 61 _n |
| $\{\mu : S\}$ | 8.474 62 | 8.517 32 | 8.551 18 | 8.577 19 | 8.595 83 | 8.607 18 |
| $\{\mu : T\}$ | 9.569 51 _n | 9.573 78 _n | 9.578 60 _n | 9.583 51 _n | 9.588 92 _n | 9.594 57 _n |
| \sqrt{p} | 0.237 04 | 0.237 04 | 0.237 09 | 0.237 12 | 0.237 16 | 0.237 20 |

Blatt II.

Jupiter 1888 ob M. Z. B.

| Datum | März 27 | Mai 6 | Juni 15 | Juli 25 | Sept. 3 | Okt. 13 | |
|--------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1890.0 | λ_1 | 237° 10' 45" | 240° 17' 32" | 243° 25' 5" | 246° 33' 25" | 249° 42' 36" | 252° 52' 40" |
| | ϱ | 142 38 43 | 142 38 43 | 142 38 13 | 142 37 44 | 142 37 11 | 142 36 30 |
| | β_1 | + 0 52 45.1 | + 0 49 30.6 | + 0 46 6.5 | + 0 42 33.2 | + 0 38 51.1 | + 0 35 1.1 |
| | $\lambda_1 - \varrho$ | 94 32 2 | 97 38 49 | 100 46 52 | 103 55 41 | 107 5 25 | 110 16 10 |
| | $\sin(\lambda_1 - \varrho)$ | 9.998 64 | 9.996 12 | 9.992 26 | 9.987 04 | 9.980 38 | 9.972 23 |
| | $\cos \beta_1$ | — 5 | — 5 | — 4 | — 3 | — 3 | — 2 |
| | $\cos(\lambda_1 - \varrho)$ | 8.897 89 _n | 9.124 08 _n | 9.271 97 _n | 9.381 48 _n | 9.468 17 _n | 9.539 63 _n |
| | i | 10° 51' 0" | 10° 51' 0" | 10° 50' 57" | 10° 50' 55" | 10° 50' 54" | 10° 50' 54" |
| | $\sin i$ | 9.274 71 | 9.274 71 | 9.274 68 | 9.274 65 | 9.274 64 | 9.274 64 |
| | $\sin \beta_1$ | 8.185 94 | 8.158 40 | 8.127 49 | 8.092 64 | 8.053 13 | 8.008 01 |
| | $\cos i$ | 9.992 17 | 9.992 17 | 9.992 17 | 9.992 17 | 9.992 17 | 9.992 17 |
| | $\sin i \sin \beta_1$ | 7.460 65 | 7.433 11 | 7.402 17 | 7.367 29 | 7.327 77 | 7.282 65 |
| | $\cos i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \varrho)$ | 9.990 76 | 9.988 24 | 9.984 39 | 9.979 18 | 9.972 52 | 9.964 38 |
| | $\cos B_1 \sin L_1$ | 9.992 04 | 9.989 44 | 9.985 52 | 9.980 24 | 9.973 50 | 9.965 29 |
| | $\cos B_1 \cos L_1$ | 8.897 84 _n | 9.124 03 _n | 9.271 93 _n | 9.381 45 _n | 9.468 14 _n | 9.539 61 _n |
| | $\cos i \sin \beta_1$ | 8.178 11 | 8.150 57 | 8.119 66 | 8.084 81 | 8.045 30 | 8.000 18 |
| | $-\sin i \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \varrho)$ | 9.273 30 _n | 9.270 78 _n | 9.266 90 _n | 9.261 66 _n | 9.254 99 _n | 9.246 85 _n |
| | $\sin B_1$ | 9.236 94 _n | 9.236 54 _n | 9.234 80 _n | 9.231 75 _n | 9.227 35 _n | 9.221 51 _n |
| | r_1 | 0.730 59 | 0.729 73 | 0.728 82 | 0.727 87 | 0.726 88 | 0.725 85 |
| | $\cos B_1$ | 9.993 44 | 9.993 44 | 9.993 51 | 9.993 59 | 9.993 72 | 9.993 90 |
| | L_1 | 94° 36' 9" | 97° 45' 47" | 100° 56' 41" | 104° 8' 17" | 107° 20' 46" | 110° 34' 6" |
| | $L_1 - u$ | 40 5 2 | 36 33 28 | 32 54 13 | 29 6 58 | 25 8 53 | 21 1 2 |
| | $\sin(L_1 - u)$ | 9.808 82 | 9.774 98 | 9.734 98 | 9.687 15 | 9.628 35 | 9.554 67 |
| | $r_1 \cos B_1$ | 0.724 03 | 0.723 17 | 0.722 33 | 0.721 46 | 0.720 60 | 0.719 75 |
| | $\cos(L_1 - u)$ | 9.883 72 | 9.904 85 | 9.924 06 | 9.941 33 | 9.956 75 | 9.970 10 |
| | $\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u)$ | 0.607 75 | 0.628 02 | 0.646 39 | 0.662 79 | 0.677 35 | 0.689 85 |
| | r | 0.505 90 | 0.501 63 | 0.496 77 | 0.491 83 | 0.486 39 | 0.480 70 |
| | $r_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u)$ | 0.532 85 | 0.498 15 | 0.457 31 | 0.408 61 | 0.348 95 | 0.274 42 |
| | $\xi_1 - r$ | 9.928 01 | 0.030 28 | 0.110 94 | 0.175 23 | 0.228 53 | 0.272 13 |
| | $\sin \theta$ | 9.987 00 | 9.976 18 | 9.959 88 | 9.936 23 | 9.901 45 | 9.850 63 |
| | $\xi_1 = r_1 \sin B_1 = \varrho_1 \sin \theta$ | 9.967 53 _n | 9.966 27 _n | 9.963 62 _n | 9.959 62 _n | 9.954 23 _n | 9.947 36 _n |
| | $\varrho_1 \cos \theta$ | 0.545 85 | 0.521 97 | 0.497 43 | 0.472 38 | 0.447 50 | 0.423 79 |
| | $\cos \theta$ | 9.985 37 | 9.983 82 | 9.982 17 | 9.980 43 | 9.978 69 | 9.977 06 |
| | $I : \varrho_1$ | 9.439 52 | 9.461 85 | 9.484 74 | 9.508 05 | 9.531 19 | 9.553 27 |
| | $I : \varrho_1^3$ | 8.318 56 | 8.385 55 | 8.454 22 | 8.524 15 | 8.593 57 | 8.659 81 |
| | $I : r_1^3$ | 7.808 23 | 7.810 81 | 7.813 54 | 7.816 39 | 7.819 36 | 7.822 45 |
| | K_1 | 8.158 17 | 8.251 11 | 8.341 42 | 8.429 42 | 8.513 60 | 8.591 56 |
| | $\xi_1 K_1$ | 8.765 92 | 8.879 13 | 8.987 81 | 9.092 21 | 9.190 95 | 9.281 41 |
| | $-r : \varrho_1^3$ | 8.824 46 _n | 8.887 18 _n | 8.950 99 _n | 9.015 98 _n | 9.079 96 _n | 9.140 51 _n |
| | $\xi_1 K_1 - r : \varrho_1^3$ | 7.925 16 _n | 7.151 18 _n | 7.897 89 _n | 8.298 98 | 8.544 13 | 8.723 98 |
| | $\eta_1 K_1$ | 8.691 02 | 8.749 26 | 8.798 73 | 8.838 03 | 8.862 55 | 8.865 98 |
| | $\zeta_1 K_1$ | 8.125 70 _n | 8.217 38 _n | 8.305 04 _n | 8.389 04 _n | 8.467 83 _n | 8.538 92 _n |
| | $k'' w m_1 \sqrt{p}$ | 2.369 01 | 2.369 01 | 2.369 06 | 2.369 09 | 2.369 13 | 2.369 17 |
| | S | 0.294 17 _n | 9.520 19 _n | 0.266 95 | 0.668 07 | 0.913 26 | 1.093 15 |
| | T | 1.060 03 | 1.118 27 | 1.167 79 | 1.207 12 | 1.231 68 | 1.235 15 |
| | W | 0.494 71 _n | 0.586 39 _n | 0.674 10 _n | 0.758 13 _n | 0.836 96 _n | 0.908 09 _n |
| | $di : dt$ | — 1'951 | — 1'980 | — 1'860 | — 1'542 | — 0'958 | — 0'064 |
| | $d\varrho : dt$ | — 14.542 | — 19.139 | — 24.508 | — 30.623 | — 37.128 | — 43.625 |
| | . | + 1.438 | + 0.267 | — 1.613 | — 4.317 | — 7.933 | — 12.334 |
| | . | — 15.190 | — 14.853 | — 13.496 | — 11.055 | — 7.482 | — 3.091 |
| | $d\varphi : dt$ | — 13.752 | — 14.586 | — 15.109 | — 15.372 | — 15.415 | — 15.425 |
| | . | — 13.157 | — 1.926 | + 8.946 | + 17.548 | + 21.341 | + 16.981 |
| | . | — 168.465 | — 211.470 | — 255.380 | — 295.515 | — 324.900 | — 334.480 |
| | . | — 0.260 | — 0.342 | — 0.438 | — 0.547 | — 0.664 | — 0.780 |
| | $d\pi : dt$ | — 181.882 | — 213.738 | — 246.872 | — 278.514 | — 304.223 | — 318.279 |
| | . | + 4.144 | + 0.692 | — 3.828 | — 9.554 | — 16.639 | — 24.925 |
| | . | — 0.893 | — 1.121 | — 1.350 | — 1.560 | — 1.713 | — 1.761 |
| | $dL_0 : dt$ | + 2.991 | — 0.771 | — 5.616 | — 11.661 | — 19.016 | — 27.466 |
| | . | — 0.0587 | — 0.0109 | + 0.0658 | + 0.1759 | + 0.3229 | + 0.5016 |
| | . | — 4.2613 | — 4.9210 | — 5.5769 | — 6.1749 | — 6.6160 | — 6.7565 |
| | $4\sigma d\mu : dt$ | — 4.3200 | — 4.9319 | — 5.5111 | — 5.9990 | — 6.2931 | — 6.2549 |

Blatt III.

i

Q

| 1888 | f^{II} | f^I | $\frac{di}{dt}$ | I_f | Δi | f^{II} | f^I | $\frac{dQ}{dt}$ | I_f | ΔQ |
|---------|----------|----------|-----------------|----------|------------|----------|---------|-----------------|-----------|------------|
| März 27 | | - 0'.029 | - 1''.951 | - 0'.001 | | | - 4.597 | - 14'.542 | + 0'.192 | |
| Mai 6 | + 0.091 | + 0.120 | - 1.980 | - 1.979 | | - 0.772 | - 5.369 | - 19.139 | - 18.947 | |
| Juni 15 | + 0.198 | + 0.318 | - 1.860 | - 3.839 | - 3" | - 0.746 | - 6.115 | - 24.508 | - 43.455 | - 30" |
| Juli 25 | + 0.266 | + 0.584 | - 1.542 | - 5.381 | - 5 | - 0.390 | - 6.505 | - 30.623 | - 74.078 | - 58 |
| Sept 3 | + 0.310 | + 0.894 | - 0.958 | - 6.339 | - 6 | + 0.008 | - 6.497 | - 37.128 | - 111.206 | - 92 |
| Okt. 13 | | | - 0.064 | - 6.403 | - 6 | | | - 43.625 | - 154.831 | - 133 |
| Nov. 22 | | | | | | | | | | |

φ

π

| 1888 | f^{II} | f^I | $\frac{d\varphi}{dt}$ | I_f | $\Delta\varphi$ | f^{II} | f^I | $\frac{d\pi}{dt}$ | I_f | $\Delta\pi$ |
|---------|----------|----------|-----------------------|----------|-----------------|----------|-----------|-------------------|------------|-------------|
| März 27 | | - 0'.834 | - 13''.752 | + 0'.035 | | | - 31'.846 | - 181''.882 | + 1''.327 | |
| Mai 6 | + 0.311 | - 0.523 | - 14.586 | - 14.551 | | - 1'.278 | - 33.134 | - 213.738 | - 212.411 | |
| Juni 15 | + 0.260 | - 0.263 | - 15.109 | - 29.660 | - 22" | + 1.492 | - 31.642 | - 246.872 | - 459.283 | - 333" |
| Juli 25 | + 0.220 | - 0.043 | - 15.372 | - 45.032 | - 37 | + 5.933 | - 25.709 | - 278.514 | - 737.797 | - 596 |
| Sept. 3 | + 0.033 | - 0.010 | - 15.415 | - 60.447 | - 53 | + 11.653 | - 14.056 | - 304.223 | - 1042.020 | - 888 |
| Okt. 13 | | | - 15.425 | - 75.872 | - 68 | | | - 318.279 | - 1360.299 | - 1200 |
| Nov. 22 | | | | | | | | | | |

L_0

| 1888 | f^{II} | f^I | $\frac{dL_0}{dt}$ | I_f | ΔL_0 | $\int\int$ | $L_0 + \mu_0(t-t_0)$ | L |
|---------|----------|-----------|-------------------|----------|--------------|------------|----------------------|--------------|
| März 27 | | + 3''.762 | + 2''.991 | + 0'.157 | | | 206° 11' 29" | |
| Mai 6 | - 1'.083 | - 4.845 | - 0.771 | - 0.614 | | | 213 44 15 | |
| Juni 15 | - 1.200 | - 6.045 | - 5.616 | - 6.230 | - 3" | - 5" | 221 17 1 | 221° 16' 53" |
| Juli 25 | - 1.310 | - 7.355 | - 11.661 | - 17.891 | - 12 | - 16 | 228 49 47 | 228 49 19 |
| Sept. 3 | - 1.095 | - 8.450 | - 19.016 | - 36.907 | - 27 | - 32 | 236 22 33 | 236 21 34 |
| Okt. 13 | | | - 27.466 | - 64.373 | - 50 | - 55 | 243 55 19 | 243 53 34 |
| Nov. 22 | | | | | | | 251 28 5 | |

μ

| 1888 | f^{II} | f^I | $40 \frac{d\mu}{dt}$ | I_f | II_f | $40 \Delta\mu$ | $\Delta\mu$ |
|---------|----------|-----------|----------------------|-----------|-----------|----------------|-------------|
| März 27 | | - 0'.6119 | - 4''.3200 | + 0'.0255 | | | |
| Mai 6 | + 327 | - 0.5792 | - 4.9319 | - 4.9064 | - 0'.1800 | | |
| Juni 15 | + 913 | - 0.4879 | - 5.5111 | - 10.4175 | - 5.0864 | - 7.62 | - 0'.19 |
| Juli 25 | + 1938 | - 0.2941 | - 5.9990 | - 16.4165 | - 15.5039 | - 13.38 | - 0.33 |
| Sept. 3 | + 3323 | + 0.0382 | - 6.2931 | - 22.7096 | - 31.9204 | - 19.54 | - 0.49 |
| Okt. 13 | | | - 6.2549 | - 28.9645 | - 54.6300 | - 25.84 | - 0.65 |
| Nov. 22 | | | | | - 83.5945 | | |

Die neuen oskulierenden Elemente werden also:

Epoche und Oskulation 1888 Sept. 23.0 M. Z. B.

$$\begin{aligned} L_0 &= 240^\circ 7' 34''.0 \\ \pi &= 330 16 32.0 \\ M_0 &= 269 51 2.0 \\ \omega &= 187 39 40.4 \\ \Omega &= 142 36 51.6 \\ i &= 10 50 53.5 \\ \varphi &= 5 53 3.0 \\ \mu &= 678''.5744 \\ \log a &= 0.478 9394 \\ \text{Äquin.} & 1890.0 \end{aligned}$$

160. Variation der Elemente bei Kometenbahnen. Die bisher aufgestellten Formeln für die Variationen der Elemente sind durchaus bequem in der Anwendung auf Bahnen kleiner Planeten und kurzperiodischer Kometen. Handelt es sich dagegen um parabolische und langperiodische Kometenbahnen, so ist es vorzuziehen, statt der Störungen der mittleren Bewegung (oder der großen Halbachse) und der mittleren Anomalie (oder mittleren Länge) die Störungen der Periheldistanz q und der Durchgangszeit durchs Perihel \bar{s} zu berechnen. Unter \bar{s} für eine gewisse Zeit t ist dann jener Zeitpunkt zu verstehen, zu welchem der Periheldurchgang stattfinden würde, wenn von der Zeit t an keine störenden Kräfte mehr auf den Kometen einwirken würden.

Um für q und \bar{s} die Differenzialgleichungen aufzustellen, gehen wir aus von

$$q = \frac{p}{1+e} = a(1-e),$$

woraus folgt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{1+e} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{(1+e)^2} \frac{de}{dt}$$

oder

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{1+e} \frac{dp}{dt} - \frac{q}{1+e} \frac{de}{dt}.$$

Wird hier $\frac{dp}{dt}$ aus 14) (Seite 490) und $\frac{de}{dt}$ aus 16) eingetragen, so ergibt sich zunächst:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2r\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} \frac{T}{1+e} - \frac{q}{1+e} \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} \sin v S - \frac{q}{1+e} \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) T$$

oder wenn man überall q einführt und wie früher

$$\frac{\sqrt{q(1+e)}}{k\sqrt{1+m}} S = (S), \quad \frac{\sqrt{q(1+e)}}{k\sqrt{1+m}} T = (T)$$

setzt:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{1+e} \sin v (S) + \left(\frac{2r}{1+e} - \frac{q}{1+e} \frac{1}{e} \left(\frac{q(1+e)}{r} - \frac{r(1-e)}{q} \right) \right) (T).$$

Wird im Klammerausdruck rechts

$$\frac{q(1+e)}{r} = 1 + e \cos v$$

eingetragen, so folgt leicht:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{1+e} \sin v (S) + \frac{4r \sin \frac{1}{2}v^2}{(1+e)^2} (1 + e \cos \frac{1}{2}v^2) (T)$$

oder nach Einführung der Seite 501 definierten **S**, **T**

$$w \frac{dq}{dt} = -\frac{q \sin v}{1+e} \mathbf{S} + \frac{4r \sin \frac{1}{2}v^2}{(1+e)^2} (1 + e \cos \frac{1}{2}v^2) \mathbf{T}. \quad (1)$$

Hieraus geht die Störung von q in Bogensekunden hervor und ist durch Multiplikation mit $\sin 1''$ in Linearmaß zu übertragen.

Um die Gleichung für \mathfrak{S} abzuleiten, setzen wir die mittlere Anomalie in der Gestalt an:

$$M = (t - \mathfrak{S})\mu,$$

woraus:

$$\mathfrak{S} = -\frac{M}{\mu} + t.$$

Wird dies vollständig nach der Zeit differenziert, so kommt:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{dM}{dt} + \frac{M}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} + 1$$

oder nach 29) (Seite 495):

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \frac{t - \mathfrak{S}}{\mu} \frac{d\mu}{dt}.$$

Wird weiter $\frac{d\bar{M}_0}{dt}$ aus 33) und $\frac{d\mu}{dt}$ aus 35) (Seite 497) eingetragen, so erscheint:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e} \cos v (S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e} \sin v (T) + \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\mu} \frac{r}{p} (S) \\ -\frac{3e(t-\mathfrak{S})}{1-e^2} \sin v (S) - \frac{3q(t-\mathfrak{S})}{1-e} \frac{1}{r} (T) \end{cases}$$

oder wenn **S** und **T** eingetragen und $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}}$ gesetzt wird:

$$w \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{2\sqrt{q}}{k(1-e)\sqrt{1+e}} \left(r - \frac{1+e}{2e} q \cos v - \frac{3}{2} \frac{k(t-\mathfrak{S})}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \mathbf{S} \quad (2)$$

$$+ \frac{2\sqrt{q}}{k(1-e)\sqrt{1+e}} \left(\frac{1+e}{2e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) q \sin v - \frac{3}{2} \frac{k(t-\mathfrak{S})}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} \right) \mathbf{T}.$$

Für die übrigen Elemente können die früheren Formeln beibehalten werden; doch ist es angezeigt, auch in ihnen die Periheldistanz einzuführen und die exzentrische Anomalie, die bei Bahnen dieser Art nicht gebraucht wird, zu beseitigen. Man erhält leicht:

$$w \frac{di}{dt} = \frac{r}{q(1+e)} \cos u \mathbf{W} \quad 3)$$

$$w \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{q(1+e)} \frac{\sin u}{\sin i} \mathbf{W} \quad 4)$$

$$w \frac{de}{dt} = \sin v \mathbf{S} + \frac{1}{e} \left(\frac{q(1+e)}{r} - \frac{r(1-e)}{q} \right) \mathbf{T} \quad 5)$$

$$w \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e} \mathbf{S} + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{q(1+e)} \right) \sin v \mathbf{T} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \sin u \frac{r}{q(1+e)} \mathbf{W}. \quad 6)$$

Mit einer Ausnahme sind diese Formeln durchaus zuverlässig und können auch unmittelbar dadurch, daß man $e = 1$ setzt, auf die Parabel angewendet werden. Die Ausnahme betrifft die Formel 2) für die Durchgangszeit durchs Perihel wegen des Divisors $1 - e$, der hier sehr klein wird und im Fall der Parabel verschwindet. Man muß daher die beiden Klammerausdrücke so umformen, daß der Faktor $(1 - e)$ aus ihnen heraustritt. Diese schwierige Aufgabe ist bereits in Nr. 146 (Seite 456 ff.) gelöst worden, denn nennt man obige Klammerausdrücke U' und V' und vergleicht sie mit den Seite 456 eingeführten Funktionen U und V , so findet man:

$$U' = U - \frac{1-e}{2e} q \cos v, \quad V' = V + \frac{1-e}{2e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) q \sin v.$$

Daß in beiden Problemen dieselben Ausdrücke auftreten, hat darin seinen Grund, daß diese in dr und rdv vorkommen. Für U und V erhält man aus den Seite 457 abgeleiteten Kombinationen derselben:

$$U = \frac{1}{2} r \sin v \frac{1-e}{1+e} \left(+ \cos \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v (1+m) + \cos \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v (1+n) \right)$$

$$V = \frac{1}{2} r \sin v \frac{1-e}{1+e} \left(- \sin \frac{1}{2} v^2 (1+m) + \cos \frac{1}{2} v^2 (1+n) \right),$$

worin:

$$m = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \frac{1}{\xi} \quad \xi \text{ und } \eta \text{ aus}$$

$$n = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1+e} \eta \quad \text{Taf. XXVII.}$$

Setzt man:

$$f \sin \left(F - \frac{1}{2} v \right) = + m \sin \frac{1}{2} v$$

$$f \cos \left(F - \frac{1}{2} v \right) = + n \cos \frac{1}{2} v,$$

so wird

$$U = \frac{1}{2} r \sin v \frac{1-e}{1+e} (\sin v + f \sin F)$$

$$V = \frac{1}{2} r \sin v \frac{1-e}{1+e} (\cos v + f \cos F)$$

und die Formel 2) läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$w \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{1+e}} \left[\frac{r \sin v}{1+e} (\sin v + f \sin F) - \frac{q \cos v}{e} \right] \mathbf{S}$$

$$+ \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{1+e}} \left[\frac{r \sin v}{1+e} (\cos v + f \cos F) + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{q \sin v}{e} \right] \mathbf{T}$$

oder nach kurzer Reduktion etwas einfacher:

$$w \frac{d\bar{\delta}}{dt} = \begin{cases} \frac{\sqrt{q} r}{k\sqrt{1+e}(1+e)} \left(\sin v \cdot f \sin F - \cos 2v - \frac{\cos v}{e} \right) \mathbf{S} \\ \frac{\sqrt{q} \sin v}{k\sqrt{1+e}} \left(\frac{r}{1+e} \cdot f \cos F + \frac{2q}{e} \right) \mathbf{T}. \end{cases} \quad 2a)$$

Rechnet man die Störungen unter Zugrundelegung einer parabolischen Bahn, wobei man dann Störungen zweiter Ordnung vernachlässigen muß, so nehmen die Formeln 1)–6) hierfür eine einfachere Gestalt an:

Formeln für die Parabel:

$$\begin{aligned} w \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{2}q \sin v \mathbf{S} + q \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^2 (1 + \cos \frac{1}{2}v^2) \mathbf{T} \\ w \frac{d\bar{\delta}}{dt} &= \frac{\sqrt{q}}{2k\sqrt{2}} r (f \sin F \sin v - \cos 2v - \cos v) \mathbf{S} + \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{2}} \sin v \left(f \cos F \cdot \frac{r}{2} + 2q \right) \mathbf{T} \\ w \frac{di}{dt} &= \frac{r}{2q} \cos u \mathbf{W} \\ w \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{2q} \frac{\sin u}{\sin i} \mathbf{W} \\ w \frac{de}{dt} &= \sin v \mathbf{S} + \frac{2q}{r} \mathbf{T} \\ w \frac{d\pi}{dt} &= -\cos v \mathbf{S} + \left(1 + \frac{r}{2q} \right) \sin v \mathbf{T} + \operatorname{tg} \frac{1}{2}i \sin u \frac{r}{2q} \mathbf{W} \\ &\quad \frac{r}{2q} = \frac{1}{2} \sec \frac{1}{2}v^2. \end{aligned}$$

Die Hilfsgrößen f und F gehen hier, da (Seite 495)

$$m = \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^2, \quad n = \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^4$$

wird, hervor aus:

$$\begin{aligned} f \sin \left(F - \frac{1}{2}v \right) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^2 \sin \frac{1}{2}v, \\ f \cos \left(F - \frac{1}{2}v \right) &= \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^4 \cos \frac{1}{2}v. \end{aligned}$$

Die Werte von q , T , e erhält man mit 206264.8 multipliziert, hat also zum Schluß noch mit dieser Zahl zu dividieren.

Die Störungen parabolischer und parabelnaher Bahnen durch die Variation der Elemente zu berechnen, ist im allgemeinen nicht zu empfehlen, da man fast immer rascher und sicherer zum Ziel kommt, wenn man die Störungen in den Koordinaten rechnet, nämlich für kurze Zeiten in den rechtwinkligen und für lange in den Polarkoordinaten (siehe Abschnitt XXXII und XXXI).

161. Verfahren bei Bahnen von geringer Exzentrizität. Die Betrachtung der Formeln für $d\pi$ und dM_0 zeigt, daß bei nahe kreisförmigen Bahnen die Störungen in diesen Elementen wegen des Divisors $\sin q$ sehr bedeutende Werte annehmen müssen. Da kleine Exzentrizitäten bei den kleinen Planeten häufig vorkommen, haben wir deshalb schon $d\bar{L}_0$ statt $d\bar{M}_0$ eingeführt und dadurch in diesem Element den Mißstand beseitigt; bei $d\pi$ und natürlich ebenso bei $d\omega$ ist er aber

geblieben. Wird nun die Exzentrizität sehr klein, so ist es nicht weiter möglich, von der Formel für $d\pi$ Gebrauch zu machen, sondern es muß ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Das von *Tietjen* angegebene (siehe *P. V. Neugebauer* Diss. Breslau 1901) hat sich gut bewährt und besitzt auch, wenn es nicht unbedingt angewendet werden muß, einige Vorzüge gegenüber dem früher besprochenen. Es beruht auf der Anwendung von $(\sin \varphi \sin \chi)$ und $(\sin \varphi \cos \chi)^*$ als neuen Elementen, deren Störungen ermittelt werden. Schreibt man die Gleichungen von $d\chi$ und $d\varphi$ (Seite 497) in der Form:

$$w \sin \varphi \frac{d\chi}{dt} = -\cos v \mathbf{S} + (\sin v + \sec \varphi \sin E) \mathbf{T}$$

$$w \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \sin v \mathbf{S} + (\cos v + \cos E) \mathbf{T}$$

und verbindet sie durch leicht ersichtliche Operationen, so erscheint:

$$w \frac{d(\sin \varphi \sin \chi)}{dt} = -\cos(\chi + v) \mathbf{S} + \sin(\chi + v) \mathbf{T} + (\cos E \sin \chi + \sec \varphi \sin E \cos \chi) \mathbf{T}$$

$$w \frac{d(\sin \varphi \cos \chi)}{dt} = +\sin(\chi + v) \mathbf{S} + \cos(\chi + v) \mathbf{T} + (\cos E \cos \chi - \sec \varphi \sin E \sin \chi) \mathbf{T}.$$

Nun ist:

$$\sec \varphi \sin E = \frac{r}{p} \sin v$$

$$\cos E = \frac{r}{p} (\cos v + \sin \varphi)$$

also wird:

$$\cos E \sin \chi + \sec \varphi \sin E \cos \chi = \frac{r}{p} \sin(\chi + v) + \frac{r}{p} \sin \varphi \sin \chi$$

$$\cos E \cos \chi - \sec \varphi \sin E \sin \chi = \frac{r}{p} \cos(\chi + v) + \frac{r}{p} \sin \varphi \cos \chi,$$

und daher, wenn man die Elemente $\sin \varphi \sin \chi$ und $\sin \varphi \cos \chi$ mit Φ und Ψ bezeichnet und $\chi + v = \nu'$ setzt:

$$w \frac{d\Phi}{dt} = -\cos \nu' \mathbf{S} + \sin \nu' \left(1 + \frac{r}{p}\right) \mathbf{T} + \frac{r}{p} \Phi \mathbf{T}$$

$$w \frac{d\Psi}{dt} = +\sin \nu' \mathbf{S} + \cos \nu' \left(1 + \frac{r}{p}\right) \mathbf{T} + \frac{r}{p} \Psi \mathbf{T}. \quad 1)$$

Kann man sich auf Störungen erster Ordnung beschränken, so ist die Anwendung dieser Formeln überaus bequem, denn es wird dann erlaubt sein, rechter Hand π_0 statt χ , d. h. für ν' die Länge in der Bahn zu gebrauchen. Nach der Integration erhält man $\mathcal{A}\Phi$ und $\mathcal{A}\Psi$ und mittels dieser die üblichen Elemente π und q für die neue Oskulationsepoche durch folgendes Verfahren. Es ist, da $\chi_0 = \pi_0$ und $\mathcal{A}\Phi$ und $\mathcal{A}\Psi$ aus der Integration in Sekunden ausgedrückt hervorgehen:

$$\sin q \sin \chi = \sin q_0 \sin \pi_0 + \mathcal{A}\Phi \sin 1''$$

$$\sin q \cos \chi = \sin q_0 \cos \pi_0 + \mathcal{A}\Psi \sin 1'';$$

* *Tietjen* selbst bedient sich der Elemente $\sin \varphi \sin \omega$ und $\sin \varphi \cos \omega$, es wurden aber obige vorgezogen, weil bei ihnen der Einfluß der Störungen zweiter Ordnung ein geringerer ist.

entnimmt man die Hilfsgrößen n und N den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \mathcal{A}\Phi \cdot \sin i'' \\ n \cos N &= \mathcal{A}\Psi \cdot \sin i'' \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi \sin (\chi - \pi_0) &= n \sin (N - \pi_0) \\ \sin \varphi \cos (\chi - \pi_0) &= \sin \varphi_0 + n \cos (N - \pi_0) \end{aligned} \right\}$$

woraus $\mathcal{A}\chi = \chi - \pi_0$ und φ mit Sicherheit bestimmt werden können, wenn man siebenstellige Logarithmen benutzt und sich zur Ermittlung von $\sin \varphi_0 + n \cos (N - \pi_0)$ der Additionslogarithmen oder eines trigonometrischen Verfahrens bedient. Weiter wird nach Gl. 28) (Seite 495)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}\omega &= \mathcal{A}\chi - \cos i \mathcal{A}\Omega \\ \mathcal{A}\pi &= \mathcal{A}\chi + 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \mathcal{A}\Omega, \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

womit die Störungen der Elemente ω oder π bestimmt sind.

Da

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \sin \varphi \cos \chi \frac{d\chi}{dt} + \cos \varphi \sin \chi \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\sin \varphi \sin \chi \frac{d\chi}{dt} + \cos \varphi \cos \chi \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

so wird auch mit Vernachlässigung von Störungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \chi \cdot \mathcal{A}\chi + \cos \varphi \sin \chi \cdot \mathcal{A}\varphi &= \mathcal{A}\Phi = n'' \sin N \\ -\sin \varphi \sin \chi \cdot \mathcal{A}\chi + \cos \varphi \cos \chi \cdot \mathcal{A}\varphi &= \mathcal{A}\Psi = n'' \cos N \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cdot \mathcal{A}\varphi &= n'' \cos (N - \chi) \\ \sin \varphi \cdot \mathcal{A}\chi &= n'' \sin (N - \chi) \\ \mathcal{A}\omega &= \mathcal{A}\chi - \cos i \cdot \mathcal{A}\Omega. \end{aligned} \quad 4)$$

Hierin ist in erster Näherung $\chi = \pi_0$ zu setzen und in zweiter $\chi = \pi_0 + \mathcal{A}\chi$.

Will man Störungen höherer Ordnung nicht übergehen, so muß man für jedes Intervall $\mathcal{A}\chi$ aus 4) bestimmen und in 1) $\nu' = \pi_0 + \mathcal{A}\chi + \nu$ setzen, sowie natürlich in den letzten Gliedern die gestörten Werte von Φ und Ψ . Dieses Verfahren ist ziemlich umständlich und man wird daher in diesem Falle von den Gl. 1) nur Gebrauch machen, wenn es unbedingt geboten ist, d. h. bei sehr kleinen Exzentrizitäten, während man sonst die früheren Formeln vorziehen wird. Bei Beschränkung auf*Störungen erster Ordnung aber verdienen die Formeln 1) allgemein angewendet zu werden, da sie leichter zu berechnen sind als die früheren für $d\varphi$ und $d\pi$ oder $d\omega$.

Hat man $\mathcal{A}\chi$ nach der hier dargelegten Methode bestimmt, dann ist es auch nicht nötig, statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge einzuführen, denn man kann mittels $\mathcal{A}\chi$ für erstere einen hinlänglich sicheren Ausdruck aufstellen. Nach Gl. 33) (Seite 496) ist nämlich

$$w \frac{d\bar{M}_0}{dt} = -\cos \varphi w \frac{d\chi}{dt} - 2 \cos \varphi \frac{r}{p} \mathbf{S},$$

und daher

$$\mathcal{A}\bar{M}_0 = -\cos \varphi \mathcal{A}\chi - \int 2 \cos \varphi \frac{r}{p} \mathbf{S} dt. \quad 5)$$

Rechnet man also

$$w \frac{dM_0'}{dt} = -2 \cos \varphi \frac{r}{p} \mathbf{S},$$

so wird

$$\Delta \bar{M}_0 = + \Delta M_0' - \cos \varphi \Delta \chi$$

und

$$M = M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M_0' - \cos \varphi \Delta \chi + \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2.$$

Eine Zusammenstellung der Formeln geben wir am Schluß der nächsten Nummer.

162. Verfahren bei Bahnen von sehr geringer Neigung. Die Differenzialgleichung zur Bestimmung der gestörten Länge des Knotens

$$w \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} \mathbf{W}$$

wird bei sehr kleinen Neigungen in der Anwendung beschwerlich, da die Störungsbeträge rasch zu sehr erheblichen Beträgen anwachsen. Die nächstliegende Abhilfe ist die, die Elemente ω , i , Ω auf eine andere Fundamentalebene etwa den Äquator zu beziehen und nach Ausführung der Integration wieder auf die Ekliptik zurückzugehen. Man kann aber auch leicht eine Umformung der Gleichungen angeben, bei der dies vermieden werden kann. Führt man nämlich, wie bei der Bahnverbesserung (Seite 435) die durch

$$\begin{aligned} dv &= \sin \omega \sin i d\Omega + \cos \omega di \\ d\lambda &= \cos \omega \sin i d\Omega - \sin \omega di \\ d\chi &= \cos i d\Omega + d\omega \end{aligned} \quad 1)$$

definierten Differenziale ein (sie sind dort mit $d\mathbf{p}$, $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{s}$ bezeichnet, welche Buchstaben im gegenwärtigen Abschnitt bereits in anderer Bedeutung vorkommen), so erhält man dafür aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} w \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \mathbf{W} \\ w \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \mathbf{W} \end{aligned}$$

sofort:

$$\begin{aligned} w \frac{dv}{dt} &= \frac{r}{p} \cos v \mathbf{W} \\ w \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{r}{p} \sin v \mathbf{W}, \end{aligned} \quad 2)$$

aus denen die Störungsbeträge Δv und $\Delta \lambda$ ermittelt werden können. Dann geben die Gl. D. (Seite 443)

$$\begin{aligned} \Delta i &= \cos \omega \cdot \Delta v - \sin \omega \cdot \Delta \lambda \\ \sin i \cdot \Delta \Omega &= \sin \omega \cdot \Delta v + \cos \omega \cdot \Delta \lambda \end{aligned}$$

wobei allerdings nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt sind. Die dritte Gleichung in 1) ist uns schon Seite 495 Gl. 28) entgegengetreten und in der vorigen Nummer benutzt worden. Geometrisch bedeuten die $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, wie schon früher

auseinandergesetzt, die Drehungsgeschwindigkeiten um die Achsen eines Systems, dessen ξ -Achse durch das Perihel geht, dessen η -Achse in der Bahnebene in 90° wahrer Anomalie liegt und dessen ζ -Achse durch den Nordpol der Bahnebene geht.

Zum Schluß dieses Abschnittes sammeln wir die in den letzten Nummern erhaltenen Formeln mit dem Bemerkten, daß die Anwendung dieses Systems, welches sich an die Formelgruppen I.—III. Seite 502 anschließt, vor den Formeln IV. Seite 502 rechnerisch den Vorzug verdient, wenn es sich nur um Störungen erster Ordnung handelt, etwa mit der Modifikation, daß man die Formeln für i und Ω aus IV. beibehält, wenn die Neigung *nicht* sehr klein ist; außerdem bietet es den Vorteil, nicht zu versagen, wenn die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind.

$$\nu' = \pi + \nu$$

IV^a)

$$w \frac{d\Phi}{dt} = -\cos \nu' \cdot \mathbf{S} + \sin \nu' \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right) \mathbf{T} + \frac{r}{p} \sin \varphi \sin \pi \mathbf{T}$$

$$w \frac{d\mathcal{P}}{dt} = +\sin \nu' \cdot \mathbf{S} + \cos \nu' \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right) \mathbf{T} + \frac{r}{p} \sin \varphi \cos \pi \mathbf{T}$$

$$w \frac{dM_0'}{dt} = -2 \cos \varphi \frac{r}{p} \mathbf{S}$$

$$w \frac{d\nu}{dt} = \frac{r}{p} \cos \nu \cdot \mathbf{W}$$

$$w \frac{d\lambda}{dt} = \frac{r}{p} \sin \nu \cdot \mathbf{W}$$

$$w^2 \frac{d\mu}{dt} = -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{\sin \varphi}{p} \sin \nu \mathbf{S} - \frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{1}{r} \mathbf{T}$$

$$w = 20^d, \log 3kw = 0.013733$$

$$w = 40^d, \log 3kw = 0.314763$$

$$n \sin N = \mathcal{A}\Phi \sin i''$$

$$n \cos N = \mathcal{A}\mathcal{P} \sin i''$$

$$\sin \varphi_1 \sin(\chi - \pi_0) = n \sin(N - \pi_0)$$

$$\sin \varphi_1 \cos(\chi - \pi_0) = \sin \varphi_0 + n \cos(N - \pi_0)$$

$$\mathcal{A}\varphi = \varphi_1 - \varphi_0, \quad \mathcal{A}\chi = \chi - \pi_0$$

$$\mathcal{A}\omega = \mathcal{A}\chi - \cos i \mathcal{A}\Omega, \quad \mathcal{A}\pi = \mathcal{A}\chi + 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \mathcal{A}\Omega$$

$$M = M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \mathcal{A}M_0' - \cos \varphi \mathcal{A}\chi + \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2$$

$$\mathcal{A}i = \cos \omega \cdot \mathcal{A}\nu - \sin \omega \cdot \mathcal{A}\lambda$$

$$\sin i \mathcal{A}\Omega = \sin \omega \cdot \mathcal{A}\nu + \cos \omega \cdot \mathcal{A}\lambda$$

163. Variation hyperbolischer Elemente. Es kommen Fälle vor, wo man die Störungen hyperbolischer Elemente berechnen muß; zwar die wenigen wirklich konstatierten Hyperbelbahnen, welche von Kometen um die Sonne beschrieben werden, würden hierzu keinen Anlaß geben, da man bei ihnen entweder von den Formeln für die Parabel Gebrauch macht oder noch zweckmäßiger die Störungen in den Koordinaten rechnet; aber diejenigen kurzperiodischen Kometen, welche zeitweise in

die nächste Umgebung eines großen Planeten insbesondere des Jupiter kommen, beschreiben um diesen in der Regel Hyperbeln, deren Störungen durch die Sonne man berechnen muß, wenn man für die Dauer der Jupiternähe diesen als Hauptkörper und die Sonne als störenden einführt. Wir stellen die Formeln daher auch für die Hyperbel auf, behalten aber hier die Sonne als Hauptkörper bei und nehmen die Übertragung auf Jupiter erst später vor.

Die Bewegung in der Hyperbel von der reellen Halbachse $a = -a$ (a positiv) und der Exzentrizität $e = \sec \psi$ wird nach Nr. 60 durch folgende Formeln beschrieben:

$$\mu = \frac{\text{Mod. } k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Mod } e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}F) &= \mu(t - T) = N \\ r \sin(s - \chi) &= r \sin v = p \operatorname{cotg} \psi \operatorname{tg} F = a \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} F \\ r \cos(s - \chi) &= r \cos v = p \operatorname{cotg} \psi^2 (e - \sec F) = a(e - \sec F) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{cases} r = a(e \sec F - 1) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}F. \end{cases}$$

$t - T$ ist die seit dem Periheldurchgang verfllossene Zeit; der Winkel χ zeigt die Lage des Perihels an und wird wie s in der momentanen Bahnebene von einer Richtung an gerechnet, die von der Knotenlinie aus um Ω in der $\xi\eta$ -Ebene nach rückwärts liegt.

Für die Differenzialquotienten von r und s nach der Zeit hat man wie bei der Ellipse die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{V\bar{p}}{k} \frac{dr}{dt} &= e \sin(s - \chi) \\ \frac{V\bar{p}}{k} \frac{ds}{dt} &= e \cos(s - \chi) + 1 \end{aligned}$$

und erhält also wie dort (Seite 491)

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{V\bar{p}}{k} \frac{\cos(s - \chi)}{e} S + \frac{V\bar{p}}{k} \frac{\sin(s - \chi)}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \\ \frac{de}{dt} &= \frac{V\bar{p}}{k} \sin(s - \chi) S + \frac{V\bar{p}}{k} \left(\frac{r}{p} e \sin(s - \chi)^2 + 2 \cos(s - \chi)\right) T \end{aligned}$$

oder wenn wieder

$$\frac{V\bar{p}}{k} S = (S), \quad \frac{V\bar{p}}{k} T = (T)$$

gesetzt und in der zweiten Formel

$$\frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e \cos(s - \chi)} \quad \text{und} \quad \frac{e + \cos(s - \chi)}{1 + e \cos(s - \chi)} = \sec F \quad (\text{Seite 202})$$

beachtet wird:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\cos(s - \chi)}{e} (S) + \frac{\sin(s - \chi)}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) (T) \quad 1)$$

$$\frac{de}{dt} = \sin(s - \chi) (S) + (\cos(s - \chi) + \sec F) (T). \quad 2)$$

Ferner ergibt sich genau wie bei der Ellipse

$$-\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \frac{2e}{p} \sin(s - \chi)(S) + \frac{2}{r}(T) \quad 3)$$

und daraus

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{3\mu ae}{p} \sin(s - \chi)(S) + \frac{3\mu a}{r}(T). \quad 4)$$

Um endlich die Differenzialgleichung für N aufzustellen, gehen wir von den Gleichungen

$$N = \text{Mod } e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}F)$$

und

$$r = a(e \sec F - 1)$$

aus, die nach den für die Variation der Elemente geltenden Grundsätzen (Seite 490) differenziert auf die folgenden führen:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\text{Mod } e \frac{1}{\cos F^2} - \text{Mod } \frac{1}{\cos F} \right) \frac{dF}{dt} + \text{Mod } \operatorname{tg} F \frac{de}{dt} = \frac{\text{Mod } r}{\cos F} \frac{dF}{dt} + \text{Mod } \operatorname{tg} F \frac{de}{dt}$$

$$0 = ae \frac{\sin F}{\cos F^2} \frac{dF}{dt} + a \sec F \frac{de}{dt} + \frac{r}{a} \frac{da}{dt}.$$

Wird hieraus $\frac{dF}{dt}$ eliminiert, so folgt:

$$\frac{dN}{dt} = - \text{Mod } \frac{r}{a} \frac{r \cos F}{e \sin F} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} - \text{Mod} \left(\frac{r}{a} \frac{1}{e \sin F} - \operatorname{tg} F \right) \frac{de}{dt}$$

oder wenn

$$\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = - \frac{2}{3} \frac{1}{\mu a} \frac{d\mu}{dt}$$

eingetragen wird, nach einfacher Reduktion:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\text{Mod } r \sin \psi}{\mu a \sin v} \frac{d\mu}{dt} - \text{Mod } \sin \psi \operatorname{cotg} v \frac{de}{dt}. \quad 5)$$

Ersetzt man hier $d\mu$ und de durch 4) und 2) und beachtet, daß aus $r \cos v = a(e - \sec F)$ und $r = ae \sec F - a$ folgt:

$$\cos v \sec F = 1 - \frac{r}{p} \sin v^2,$$

so ergibt sich:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Mod } \sin \psi \left(\frac{2re}{p} - \cos v \right) (S) + \text{Mod } \sin \psi \sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) (T). \quad 6)$$

Man wird also etwas bequemer nach 5) rechnen unter Benutzung der vorher erhaltenen $d\mu$ und de oder noch besser nach:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Mod } \operatorname{tg} \psi \frac{d\chi}{dt} + \text{Mod } \operatorname{tg} \psi \frac{2r}{p} (S), \quad 7)$$

das sich durch Vergleichung von 6) mit 1) ergibt, und die vorherige Berechnung von $d\chi$ voraussetzt. Wird $N = \mu(t - T)$ vollständig nach der Zeit differenziert

$$\frac{dN}{dt} = (t - T) \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{dT}{dt} + \mu,$$

so sind die beiden ersten Glieder rechts durch die bisher aufgestellten Gleichungen 5), 6) oder 7) für den Bogen N gegeben und sollen kurz mit $\frac{d\mathbf{N}}{dt}$ bezeichnet werden, so daß also:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \text{Mod tg } \psi \frac{d\chi}{dt} + \text{Mod tg } \psi \frac{2r}{p} (S) \quad 8)$$

und dann

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mu$$

ist. Hierin stellt μ den durch Integration aus 4) gewonnenen Wert dar, muß also mit

$$\mu = \mu_0 + \int \frac{d\mu}{dt} dt$$

bewertet werden. Die Gesamtänderung des Bogens N wird hiernach:

$$\mu_0(t - T) + \int \frac{d\mathbf{N}}{dt} dt + \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2. \quad 9)$$

Die die Bahnlage bestimmenden Gleichungen bleiben natürlich dieselben, wie bei der Ellipse und ebenso wird wie dort die Ergänzung des Bogens χ zur Länge des Perihels gefunden.

Variation der Elemente für die Hyperbel.

$$\mathbf{S} = \frac{w(S)}{\sin i''}, \quad \mathbf{T} = \frac{w(T)}{\sin i''}, \quad \mathbf{W} = \frac{w(W)}{\sin i''}$$

$$w \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \mathbf{W}$$

$$w \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \mathbf{W}$$

$$w \frac{de}{dt} = \sin v \mathbf{S} + (\cos v + \sec E') \mathbf{T}$$

$$w \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\cos v}{e} \mathbf{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \mathbf{T}$$

$$w \frac{d\tau}{dt} = w \frac{d\chi}{dt} + \text{tg } \frac{1}{2} i \frac{r}{p} \sin u \mathbf{W}$$

$$w \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \text{Mod tg } \psi w \frac{d\chi}{dt} + \text{Mod tg } \psi \frac{2r}{p} \mathbf{S}$$

$$w^3 \frac{d\mu}{dt} = \frac{3\mu a e w}{p} \sin v \mathbf{S} + \frac{3\mu a w}{r} \mathbf{T}.$$

Abschnitt XXXI.

Berechnung der speziellen Störungen in den Polarkoordinaten.

164. Aufstellung der Grundgleichungen. Es ist, namentlich von *Hansen*, mit Nachdruck betont worden, daß die Berechnung der Störungen in den Polarkoordinaten entschiedene Vorteile gegenüber der Variation der Elemente besitze. An Gründen werden geltend gemacht, daß man Koordinatenstörungen nur *drei* gegen *sechs* bei den Elementen zu rechnen habe, daß die Koordinatenstörungen kleiner sind als die Elementenstörungen und daß infolge dessen auch die Störungen höherer Ordnung einen geringeren Einfluß bei ihnen haben, endlich daß das Verfahren wegen größerer Konvergenz der auftretenden Summationen eine höhere Genauigkeit besitze. Diese Gründe treffen zu, aber es steht ihnen ein Nachteil der Koordinatenstörungen gegenüber, der trotzdem der Variation der Elemente die größere Verwendbarkeit sichert, nämlich der, daß der Übergang von den Koordinaten- zu den Elementenstörungen nur durch langwierige und penible Rechnung zu erreichen ist; da aber oskulierende Elementensysteme für die Zwecke der Ephemeridenrechnung und der Bahnverbesserung immer die zweckmäßigste Grundlage bilden, so ist dieser Übergang nicht zu vermeiden. Bei der Methode der Variation der Elemente dagegen ist man ohne besondere Rechnung im Stande, die oskulierenden Elemente für jeden Zeitpunkt anzugeben. Aus diesem Grunde wird in der rechnerischen Praxis die Variation der Elemente bevorzugt mit Ausnahme von zwei Fällen, wo ihre Vorzüge nicht zur Geltung kommen und daher die zweifellos kürzere und bequemere Rechnung der Koordinatenstörungen eingeschlagen wird; nämlich 1) wenn ein sehr langer Zeitraum, in welchem keine Beobachtungen vorkommen, durch Störungsrechnung zu überbrücken ist, 2) wenn es sich um die Störungen eines langperiodischen Kometen während seiner Sichtbarkeitsdauer handelt; hier wird nämlich, wie wir schon Seite 511 erwähnt, die Variation der Elemente unbequem, während die Methode der Polarkoordinaten gerade die Störungen des Hauptelementes, der Durchgangszeit durch das Perihel, mit besonderer Einfachheit ergibt.

Den naturgemäßen Ausgangspunkt für die Ableitung der zugrunde zu legenden Differenzialgleichungen bilden auch hier wieder die Gleichungen (siehe Seite 488):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{k^2 (1+m)}{r^2} = S$$

$$\frac{1}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{ds}{dt} \right)}{dt} = T \quad 1)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = W,$$

in deren letzter wir statt der Drehung um den Radiusvektor (der ξ -Achse) die Beschleunigung längs der ζ -Achse direkt eingeführt haben. Es sei daran erinnert, daß s die Länge des gestörten Planeten in seiner instantanen Bahn bedeutet und daß S, T, W die Komponenten der störenden Kraft längs des Radiusvektors, senkrecht darauf in der instantanen Bahnebene, und senkrecht zu dieser letzteren sind. *Hansen* hat die beiden ersten Gleichungen, welche die Bewegung in der instantanen Bahnebene geben, beibehalten und statt der dritten eine andere eingeführt, welche die Störung in einer zur festen Bahnebene der Anfangsepoche senkrechten Achse gibt, woraus dann sofort die Breitenstörung in bezug auf die ungestörte Bahnebene folgt. Es haben aber *Brünnow* und dann *Tietjen* nachgewiesen, daß es rechnerisch zweckmäßiger ist, auch statt der Bewegung in der instantanen Ebene die in derselben festen, ungestörten Bahnebene zu betrachten. Wir wollen daher von vornherein das feste System einführen, um so mehr, als wir dadurch auf Gleichungen geführt werden, die den Gl. 1) ganz ähnlich sind und die die Anwendung der Hansenschen Analyse ebenso zulassen, wie diese.

In bezug auf ein im Raum festes Koordinatensystem xyz mit dem Anfangspunkt in der Sonne seien die Koordinaten des gestörten Körpers P : x, y, z , des störenden Körpers P_1 : x_1, y_1, z_1 , die Radienvektoren r und r_1 und die Entfernung zwischen P und P_1 : ϱ_1 , dann sind die von der Sonne bez. von P_1 herrührenden relativen Beschleunigungen von P :

$$-k^2(1+m)\frac{x}{r^3}, \quad -k^2(1+m)\frac{y}{r^3}, \quad -k^2(1+m)\frac{z}{r^3}$$

und

$$k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right), \quad k^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right), \quad k^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\varrho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right),$$

worin mit $1, m$ und m_1 die Massen von Sonne, P und P_1 bezeichnet sind. Die Komponenten der Gesamtbeschleunigung von P in bezug auf die Sonne sind also, wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} = K_1$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + k^2 m_1 \left(K_1 x_1 - \frac{x}{\varrho_1^3} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{y}{r^3} + k^2 m_1 \left(K_1 y_1 - \frac{y}{\varrho_1^3} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{z}{r^3} + k^2 m_1 \left(K_1 z_1 - \frac{z}{\varrho_1^3} \right). \end{aligned} \quad 2)$$

Um diese Gleichungen auf die Form 1) überzuführen, führen wir Polarkoordinaten ein; sind (r) die Projektion des Radiusvektors r auf die xy -Ebene und l der Winkel, den (r) mit der x -Achse bildet, ferner L_1 und B_1 Länge und Breite von P_1 , bezogen auf die xy -Ebene, so wird

$$\begin{aligned} x &= (r) \cos l, & x_1 &= r_1 \cos B_1 \cos L_1 \\ y &= (r) \sin l, & y_1 &= r_1 \cos B_1 \sin L_1 \\ & & z_1 &= r_1 \sin B_1, \end{aligned} \quad 3)$$

also:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (r)^2 \\
 xy_1 - yx_1 &= (r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\
 xx_1 + yy_1 &= (r) r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\
 dx &= d(r) \cos l - (r) \sin l dl = \frac{x}{(r)} d(r) - y dl \\
 dy &= d(r) \sin l + (r) \cos l dl = \frac{y}{(r)} d(r) + x dl \\
 xdy - ydx &= (r)^2 dl \\
 xdx + ydy &= (r) d(r) \\
 dx^2 + dy^2 &= d(r)^2 + (r)^2 dl^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Verbindet man nun die beiden ersten Gleichungen 2) durch die Operationen $x, +y$ und $-y, +x$, so erscheinen mit Beachtung von

$$x d^2 x + y d^2 y = d(x dx + y dy) - (dx^2 + dy^2)$$

und

$$x d^2 y - y d^2 x = d(x dy - y dx)$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left((r) \frac{d(r)}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d(r)}{dt}\right)^2 - (r)^2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 &= -k^2(1+m) \frac{(r)^2}{r^3} + k^2 m_1 \left(K_1(r) r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - \frac{(r)^2}{\varrho_1^3}\right) \\
 \frac{d\left((r)^2 \frac{dl}{dt}\right)}{dt} &= k^2 m_1 K_1(r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l)
 \end{aligned}$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{1}{(r)} k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\
 U_1 &= (r) k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\
 W_1 &= k^2 m_1 K_1 r_1 \sin B_1 \\
 w_1 &= k^2 m_1 \frac{1}{\varrho_1^3}
 \end{aligned} \tag{5}$$

und die dritte Gleichung 2) ungeändert hinzugenommen wird, nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2(r)}{dt^2} - (r) \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + k^2(1+m) \frac{(r)}{r^3} &= (r) R_1 - (r) w_1 \\
 \frac{d\left((r)^2 \frac{dl}{dt}\right)}{dt} &= U_1 \\
 \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{z}{r^3} &= W_1 - z w_1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Form 1) ist hier hergestellt bis auf den Umstand, daß in 6) noch der Radiusvektor r selbst auftritt, der mit (r) im Zusammenhange

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (r)^2 + z^2$$

steht, aber einfach beseitigt werden kann, wenn wir z als kleine Größe annehmen dürfen. Dies tritt aber ein, sobald wir die xy -Ebene mit der Bahnebene von P zusammenfallen lassen, die durch die oskulierenden Elemente der Anfangsepoche

gegeben ist; denn dann wird \varkappa die Störung in der Breite über der festen Bahnebene. Es wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= ((r)^2 + \varkappa^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(r)^3} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{(r)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{(r)^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\varkappa^2}{(r)^2} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\varkappa^2}{2(r)^2} + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} \frac{\varkappa^4}{2^2(r)^4} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\varkappa^6}{2^3(r)^6} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Reihe

$$f = 3 \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \dots \right)$$

hat *Encke* (Berl. Jahrb. für 1858) mit dem Argumente q tabuliert. Setzt man also

$$\frac{\varkappa^2}{2(r)^2} = q,$$

so wird

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r)^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\varkappa^2}{(r)^2} \frac{1}{3} f \right)$$

und f kann mit dem Argument q der genannten Tafel entnommen werden (siehe »Tafeln« Nr. XXVI). Die in 6) auftretenden Glieder mit r werden also:

$$\begin{aligned} \frac{(r)}{r^3} &= \frac{1}{(r)^2} - \frac{3}{2} (r) \frac{\varkappa^2}{(r)^5} \left(\frac{1}{3} f \right) \\ \frac{\varkappa}{r^3} &= \frac{\varkappa}{(r)^3} - \frac{3}{2} \frac{\varkappa^3}{(r)^5} \left(\frac{1}{3} f \right) \end{aligned}$$

und bei der Kleinheit der Breitenstörungen wird man hierin fast immer $\frac{1}{3} f = 1$ setzen dürfen. Wir setzen noch

$$\begin{aligned} R_1 - w_1 + \frac{3}{2} k^2 (1 + m) \frac{\varkappa^2}{(r)^5} \left(\frac{1}{3} f \right) &= H \\ w_1 + \frac{k^2 (1 + m)}{(r)^3} &= w \\ W_1 + \frac{3}{2} k^2 (1 + m) \frac{\varkappa^3}{(r)^5} \left(\frac{1}{3} f \right) &= W \end{aligned} \tag{7}$$

und erhalten dann statt 6):

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r)}{dt^2} - (r) \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{k^2 (1 + m)}{(r)^2} &= (r) H \\ \frac{d \left((r)^2 \frac{dl}{dt} \right)}{dt} &= U_1 \\ \frac{d^2 \varkappa}{dt^2} + w \varkappa &= W. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichungen sind völlig von der Form 1); der Unterschied zwischen beiden Systemen besteht darin, daß 1) die in der instantanen Bahnebene gezählten Koordinaten r und s , 8) aber die in einer festen Ebene gezählten Koordinaten (r) und l geben. Ehe wir die Gl. 8) weiter behandeln, sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man sie auch durch eine Koordinatentransformation aus 1) ableiten kann; die direkte Aufstellung wurde aber vorgezogen, weil sie gestattet sofort die günstigsten Rechnungsgrößen einzuführen.

Die letzte Gleichung in 8) enthält nur die Koordinate z und gibt also durch Integration direkt die Breitenstörungen; die beiden ersten enthalten die Koordinaten (r) und l noch gemischt und man wird daher eine Trennung derselben anstreben müssen. Dabei ist es von Vorteil auch noch eine Zerlegung des Bogens l in zwei Teile vorzunehmen, die einzelnen bestimmt werden. Zunächst gibt die Integration der zweiten Gleichung

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = k\sqrt{1+m} V\overline{p_0} + \int_{t_0}^t U_1 dt, \quad 9)$$

indem die Integrationskonstante gleich durch ihren Wert ersetzt wurde, der offenbar gleich ist dem Wert, den $(r)^2 \frac{dl}{dt}$ in der ungestörten Bewegung, also für $U_1 = 0$, annimmt; mit p_0 ist der für die die Anfangsepoche t_0 oskulierende Parameter bezeichnet. Wird nun l zerlegt:

$$l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega, \quad 10)$$

wo ω_0 eine Konstante, V und $\mathcal{A}\omega$ aber zunächst willkürlich zu wählende Bogen sind, so folgt:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (r)^2 \frac{dV}{dt} + (r)^2 \frac{d\mathcal{A}\omega}{dt}$$

und der Vergleich mit 9) zeigt, daß, wenn das eine Stück $\mathcal{A}\omega$ durch die Gleichung

$$(r)^2 \frac{d\mathcal{A}\omega}{dt} = \int_{t_0}^t U_1 dt \quad 11)$$

bestimmt wird, dann das andere V aus

$$(r)^2 \frac{dV}{dt} = k\sqrt{1+m} V\overline{p_0} \quad 12)$$

hervorgehen muß. Um gleich die Bedeutung der Bogen $\mathcal{A}\omega$ und V festzustellen, integrieren wir 9):

$$l = \int \frac{k\sqrt{1+m} V\overline{p_0}}{(r)^2} dt + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U_1 dt \cdot dt + \text{const.} \quad 13)$$

und haben die Konstante so zu bestimmen, daß bei Verschwinden der störenden Kraft der ungestörte Wert von l aus 13) hervorgeht. In der ungestörten Bewegung wird aber

$$\frac{k\sqrt{1+m} V\overline{p_0}}{(r)^2} = \frac{k\sqrt{1+m} V\overline{p_0}}{r_0^2} = \frac{dv_0}{dt} \quad \text{und} \quad U_1 = 0,$$

also

$$l_0 = v_0 + \text{const.},$$

wenn mit v_0 die ungestörte wahre Anomalie bezeichnet wird. Wird l_0 vom Schnitt der ungestörten Bahn mit der Ekliptik, also vom Knoten der oskulierenden Elemente für die Epoche t_0 ab gezählt, so stellt die Konstante den Abstand des Perihels vom Knoten dar. Bei der hierdurch definierten Lage der x -Achse wird also in 13) $\text{const.} = \omega_0$ und nach Substitution von 11) und 12)

$$l = V + \mathcal{A}\omega + \omega_0.$$

Es stellt also bei der Zerlegung 10) V die gestörte wahre Anomalie, gezählt in der festen xy -Ebene, ω_0 den Abstand des Perihels vom Knoten der ungestörten Bahn dar, und $\mathcal{A}\omega$, das nach 11) von der Ordnung der Störungen ist, kann als Störung des Perihelabstandes bezeichnet werden. $\mathcal{A}\omega$ können wir durch 11) bestimmen, da hierzu nur eine genäherte Kenntnis von (r) nötig ist. Dagegen muß V aus der Verbindung von 12) mit der ersten Gleichung in 8) hervorgehen und es muß dadurch zugleich (r) erhalten werden. Die Behandlung dieser Gleichungen in der ungestörten Bewegung führt bekanntlich auf das System

$$\begin{aligned}\bar{M} &= M_0 + \mu_0(t - t_0) = \bar{E} - \sin \varphi_0 \sin \bar{E} \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \bar{E} \\ r_0 \cos v_0 &= a_0 (\cos \bar{E} - \sin \varphi_0).\end{aligned}$$

Soll daraus statt der ungestörten wahren Anomalie v_0 die gestörte V hervorgehen, so muß man M um einen gewissen Betrag $\mathcal{A}M$ ändern; der damit erhaltene Radiusvektor $[r]$ wird sich von (r) nur um eine Größe von der Ordnung der Störungen unterscheiden, so daß etwa $(r) = [r](1 + \nu)$ angesetzt werden kann und ν von der Ordnung der Störungen sein wird. Es gehen somit V und (r) aus dem System

$$\begin{aligned}M &= M_0 + \mu_0(t - t_0) + \mathcal{A}M = E - \sin \varphi_0 \sin E \\ [r] \sin V &= a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\ [r] \cos V &= a_0 (\cos E - \sin \varphi_0) \\ (r) &= [r](1 + \nu)\end{aligned}\tag{14}$$

hervor und die Aufgabe ist darauf hingeführt, $\mathcal{A}M$ und ν zu bestimmen. Um hierfür Differenzialgleichungen zu erlangen, muß 14) zweimal differenziert und das Resultat mit den beiden ersten Gleichungen 8) verglichen werden. Wird der aus 14) folgende Wert des Radiusvektors

$$(r) = \frac{p_0(1 + \nu)}{1 + e_0 \cos V}$$

ein erstes Mal differenziert und 12) beachtet, so ergibt sich:

$$\frac{d(r)}{dt} = \frac{(r)}{1 + \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{kV\sqrt{1+m}Vp_0}{p_0(1 + \nu)} \sin \varphi_0 \sin V$$

und nach nochmaliger Differenziation, wenn wieder 12) und der oben erhaltene Wert von $d(r)$ eingetragen wird:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} = \frac{(r)}{1 + \nu} \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2} \frac{1}{1 + \nu} e_0 \cos V.$$

Setzt man hierin

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \nu} &= 1 - \frac{\nu}{1 + \nu} \\ e_0 \cos V &= \frac{p_0(1 + \nu)}{(r)} - 1,\end{aligned}$$

so folgt:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2} = \frac{(r)}{1 + \nu} \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2} \frac{\nu}{1 + \nu} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^3} p_0.$$

Die erste Gleichung 9) ins Quadrat erhoben gibt ferner:

$$(r)^4 \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = k^2 (1+m) p_0 + 2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0} \int U_1 dt \left\{ 1 + \frac{\int U_1 dt}{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}} \right\}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\int_{t_0}^{t_1} U_1 dt \cdot \left\{ 1 + \frac{\int U_1 dt}{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}} \right\} = \int U' dt \quad (15)$$

gesetzt wird:

$$(r) \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{k^2 (1+m)}{(r)^3} p_0 + \frac{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}}{(r)^3} \int U' dt;$$

subtrahiert man dies von obiger Gleichung und vergleicht das Resultat mit der ersten Gleichung 8), so folgt:

$$\frac{(r)}{1+\nu} \frac{d^2 \nu}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m)}{(r)^2} \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}}{(r)^3} \int U' dt = (r) H$$

oder nach Einführung der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}}{(r)^4} \int U' dt + H &= H' \\ \frac{k^2 (1+m)}{(r)^3} - H' &= h \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

die definitive Differenzialgleichung für ν :

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} + \nu h = H'. \quad (17)$$

Um zweitens die Gleichung für $\mathcal{A}M$ aufzustellen, differenzieren wir die erste Gleichung 14):

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d\mathcal{A}M}{dt} = \frac{[r]}{a_0} \frac{dE}{dt},$$

beachten, daß (Nr. 46):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{[r]} = \frac{[r]}{a_0 \cos \varphi_0} \frac{dV}{dt}$$

und erhalten:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{[r]^2} \left(\mu_0 + \frac{d\mathcal{A}M}{dt} \right)$$

oder, wenn $(r) = [r](1+\nu)$ und $a_0^{\frac{3}{2}} \mu_0 = k \sqrt{1+m}$, $\sqrt{a_0} \cos \varphi_0 = \sqrt{p_0}$ eingetragen wird:

$$(r)^2 \frac{dV}{dt} = (1+\nu)^2 \frac{k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}}{\mu_0} \left(\mu_0 + \frac{d\mathcal{A}M}{dt} \right).$$

Wird dies nun wieder mit dem Resultat des anderen Systems, nämlich mit der Gl. 12) verglichen, so folgt:

$$\frac{d\mathcal{A}M}{dt} = \frac{\mu_0}{(1+\nu)^2} - \mu_0$$

oder

$$\frac{d\mathcal{A}M}{dt} = -\mu_0 \left(1 - \frac{1}{(1+\nu)^2} \right) = -\mu_0 \nu \frac{2+\nu}{(1+\nu)^2};$$

also schließlich mit der Abkürzung:

$$\sigma = 2 \frac{1 + \frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{1}{1+\nu} \left(1 + \frac{1}{1+\nu} \right) \tag{18}$$

die definitive Differenzialgleichung für $\mathcal{A}M$

$$\frac{d\mathcal{A}M}{dt} = -\mu_0 \sigma \nu. \tag{19}$$

Das Problem, die gestörten Polarkoordinaten r, l, b zu ermitteln, ist jetzt auf die Lösung folgender Gleichungen hingeführt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{dt^2} + h\nu &= H' \\ \frac{d\mathcal{A}M}{dt} &= -\mu_0 \sigma \nu \\ \frac{d\mathcal{A}\omega}{dt} &= \frac{1}{(r)^2} \int U_1 dt \\ \frac{d^2x}{dt^2} + wx &= W. \end{aligned} \tag{20}$$

Sind hieraus $\nu, \mathcal{A}M, \mathcal{A}\omega$ und x gefunden, so wird:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0(t - t_0) + \mathcal{A}M = E - \sin \varphi_0 \sin E \\ [r] \sin V &= a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\ [r] \cos V &= a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0 \\ (r) &= [r](1 + \nu), \quad l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega \\ r^2 &= (r)^2 + x^2, \quad \sin b = \frac{x}{r}. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Polarkoordinaten ergeben sich also schließlich durch eine nahezu ebenso einfache Rechnung, wie bei der elliptischen Bewegung; der Übergang von den auf das feste System der xyz (der festen Bahnebene) bezogenen Koordinaten l und x auf die rechtwinkligen Äquatorkoordinaten wird unten gezeigt werden (Nr. 167 am Schluß).

165. Berechnung der eingeführten Größen. Wir haben im Laufe der Entwicklungen eine Reihe von Größen eingeführt, deren Berechnung jetzt gezeigt werden muß; zunächst kommen folgende in Betracht:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \\ R_1 &= \frac{1}{(r)} k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) \\ U_1 &= (r) k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \\ W_1 &= k^2 m_1 K_1 r_1 \sin B_1 \\ w_1 &= k^2 m_1 \frac{1}{\varrho_1^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

denen sich natürlich für einen zweiten, dritten, . . . störenden Planeten entsprechende Glieder anreihen, die schließlich alle zu summieren sind; wir wollen der Einfachheit der Schreibweise halber es bei R_1, U_1, W_1, w_1 belassen, statt $\sum R_i, \dots$ zu schreiben.

Die Distanz ϱ_1 ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \\ &= (r_1 \cos B_1 \cos L_1 - (r) \cos l)^2 + (r_1 \cos B_1 \sin L_1 - (r) \sin l)^2 + (r_1 \sin B_1 - z)^2 \\ &= r_1^2 + (r)^2 - 2(r)r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) + z^2 - 2r_1 z \sin B_1,\end{aligned}$$

man wird also am bequemsten nach den Formeln

$$\begin{aligned}\varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - (r) \\ \varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \\ \varrho_1 \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1 - z\end{aligned}\tag{2}$$

rechnen, deren Quadratsumme den obigen Ausdruck gibt.

Da alle Größen 1) mit der störenden Masse m_1 multipliziert sind, wird man zu ihrer Berechnung genäherte Werte der Koordinaten (r) und l benutzen dürfen, die man sich leicht verschaffen kann; zu Beginn der Rechnung kann man die Störungen von (r) und l direkt Null setzen, und im weiteren Verlauf der Rechnung wird man die in

$$M = M_0 + \mu_0 t + \mathcal{A}M, \quad (r) = [r](1 + \nu), \quad l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega$$

vorkommenden Störungswerte mit hinreichender Sicherheit extrapolieren können. Beabsichtigt man nur Störungen erster Ordnung zu berücksichtigen, was häufig für mehrere Jahre genügt, dann kann man 1) mit den elliptischen Werten von r und l aufstellen, wodurch die Rechnung an Annehmlichkeit erheblich gewinnt.

Die Koordinaten L_1 und B_1 des störenden Körpers beziehen sich auf die ungestörte Bahnebene des gestörten Planeten und zwar wird L_1 vom Knoten dieser letzteren mit der Ekliptik ab gezählt, da wir durch diesen die x -Achse gelegt haben; in den Ephemeriden findet man die heliozentrischen Längen und Breiten bezogen auf die Ekliptik: λ_1, β_1 ; es ist also der Zusammenhang zwischen L_1, B_1 und λ_1, β_1 zu ermitteln. Aus dem Dreieck zwischen dem Pol der ungestörten Bahn, dem Pol der Ekliptik und dem Ort des störenden Körpers findet man:

$$\begin{aligned}\cos B_1 \sin L_1 &= \sin i_0 \sin \beta_1 + \cos i_0 \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega_0) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega_0) \\ \sin B_1 &= \cos i_0 \sin \beta_1 - \sin i_0 \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega_0),\end{aligned}\tag{3}$$

bei deren Anwendung man darauf zu sehen hat, daß λ_1, β_1 und Ω_0, i_0 sich auf dieselbe Ekliptik und dasselbe Äquinoktium beziehen. Die Berechnung von L_1 und B_1 läßt sich aber nicht unwesentlich vereinfachen, wenn die Ephemeriden der störenden Körper in einer gewissen Form gegeben werden, die auch tatsächlich seit 1880 auf einen Vorschlag *Oppolzers* hin im Berliner Jahrbuch angenommen ist. Man macht nämlich von dem Umstande Gebrauch, daß der störende Körper sich nie weit von einer bestimmten mittleren Lage seiner Bahnebene, gegeben durch i_1 und Ω_1 , entfernen wird, daß also seine Breite B_0 über dieser Ebene eine kleine Größe sein wird. Geben die Ephemeriden diese Breite B_0 und die Länge L_0 in der Bahn $i_1 \Omega_1$ — die angeführt sein muß —, so gestaltet sich die Berechnung von L_1 und B_1 aus L_0 und B_0 folgendermaßen. Zunächst kann ein für allemal die gegenseitige Lage der beiden Bahnebenen $\Omega_0 i_0$ des gestörten und $\Omega_1 i_1$ des störenden Körpers berechnet werden.

Aus dem von diesen Bahnen und der Ekliptik gebildeten Knotendreieck $\varrho_0 \varrho_1 O$ folgt nämlich in der Bezeichnung der Fig. 61:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\varphi + \psi) &= \sin \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \sin \frac{1}{2} (i_1 + i_0) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\varphi + \psi) &= \cos \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \sin \frac{1}{2} (i_1 - i_0) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\varphi - \psi) &= \sin \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \cos \frac{1}{2} (i_1 + i_0) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi) &= \cos \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i_0) \end{aligned} \tag{4}$$

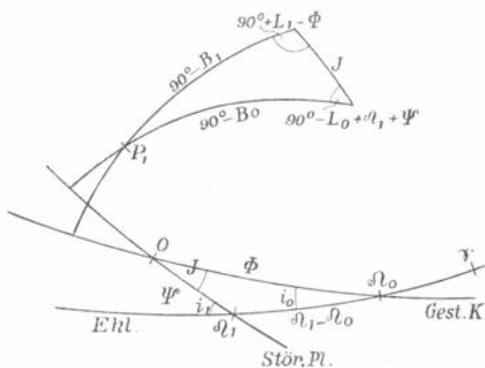


Fig. 61.

woraus die Größen J , φ , ψ sich ergeben. Da L_1 von ϱ_0 , L_0 aber vom Frühlingspunkt aus gezählt wird, folgt weiter aus dem Dreieck zwischen dem Ort P_1 des störenden Körpers und den Polen der beiden Bahnen:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \sin(L_1 - \varphi) &= \\ \cos B_0 \sin(L_0 - \varrho_1 - \psi) \cos J - \sin B_0 \sin J \\ \cos B_1 \cos(L_1 - \varphi) &= \cos B_0 \cos(L_0 - \varrho_1 - \psi) \\ \sin B_1 &= \cos B_0 \sin(L_0 - \varrho_1 - \psi) \sin J \\ &\quad + \sin B_0 \cos J. \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit von B_0 kann man immer $\cos B_0 = 1$ und $\sin B_0 = B_0 \sin 1''$ setzen, so daß schließlich kommt:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \sin(L_1 - \varphi) &= \sin(L_0 - \varrho_1 - \psi) \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \cos B_1 \cos(L_1 - \varphi) &= \cos(L_0 - \varrho_1 - \psi) \\ \sin B_1 &= \sin(L_0 - \varrho_1 - \psi) \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J; \end{aligned} \tag{5}$$

die kleinen zweiten Glieder rechts wird man in vielen Fällen übergehen können. Die Gleichungen 5) sind einfacher aufzulösen als 3), vorausgesetzt, daß die Angaben L_0 , B_0 gemacht sind, so daß sich die in der Regel nur für jedes Jahrzehnt einmal vorzunehmende Berechnung der Größen φ , ψ , J durch 4) lohnt.

Aus den Größen 1) setzen sich die in den Differenzialgleichungen auftretenden Koeffizienten in folgender Weise zusammen:

$$\begin{aligned} R_1 - w_1 + \frac{3}{2} k^2 (1 + m) \frac{x^2}{(r)^5} \frac{1}{3} f &= H \\ w_1 + \frac{k^2 (1 + m)}{(r)^3} &= w \\ W_1 + \frac{3}{2} k^2 (1 + m) \frac{x^3}{(r)^5} \frac{1}{3} f &= W \\ \int U_1 dt \cdot \left\{ 1 + \frac{\int U_1 dt}{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}} \right\} &= \int U dt \\ \frac{2k \sqrt{1+m} \sqrt{p_0}}{(r)^4} \int U dt + H &= H' \\ \frac{k^2 (1 + m)}{(r)^3} - H' &= h \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \nu} \left(1 + \frac{1}{1 + \nu} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Betreff der Berechnung dieser Ausdrücke ist nur zur bemerken, daß das dritte Glied in H nur selten, das zweite Glied in W wohl niemals einen nennenswerten Betrag liefern werden und daß man darin immer $\frac{1}{3}f = 1$ wird setzen dürfen und den Wert von x extrapolieren muß.

166. Ausführung der Integration. Die aufzulösenden Differenzialgleichungen 20) (Seite 526) sind von den Formen:

$$\frac{dx}{dt} = Q, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = P - px,$$

deren erste keiner weiteren Erläuterung bedarf, als daß x für die Zeit der Oskulation der vorgelegten Elemente verschwinden muß, da es hier die Störungsbeträge $\mathcal{A}M$ bzw. $\mathcal{A}\omega$ darstellt. Man wird also die Funktion Q in einem angemessenen Zeitintervall w (für einen kleinen Planeten und Jupiter reicht $w = 40$ Tage fast immer aus) tabulieren und dann die Formeln des Abschnittes XXIX zur Anwendung bringen; die ganze Rechnung ist direkt. Bei der zweiten Form dagegen hat man das Doppelintegral

$$x = \iint (P - px) dt^2$$

zu bilden, was die Berechnung von

$$f(a + iw) = P - px = P - p \iint f(a + iw) dt^2,$$

also die zu ermittelnde Funktion $f(a + iw)$ als bekannt voraussetzt; man wird also nur durch eine indirekte Rechnung zum Ziel kommen, die sich aber leicht in eine fast völlig direkte verwandeln läßt. In der hier bequemsten Integralformel ($w = 1$ gesetzt)

$$x = \iint_{a+iw} f(a+iw) dt^2 = {}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12}f'(a+iw) - \frac{1}{240}f''(a+iw) + \dots$$

kann man ${}^{II}f(a+iw)$ als genau bekannt ansehen, da die bis zum Argument $f(a+(i-1)w)$ geführte Rechnung bereits zur Kenntnis von ${}^{II}f(a+iw)$ geführt hat, ferner wird man das Glied $-\frac{1}{240}f''(a+iw)$ stets genau genug durch Extrapolation erhalten; es kommt also nur noch auf $\frac{1}{12}f'(a+iw)$ an, das man zwar auch durch Extrapolation bilden könnte, aber ebenso leicht und sicherer durch folgende direkte Rechnung berücksichtigt. Es wird:

$$x = ({}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12}P - \frac{1}{12}px - \frac{1}{240}f''(a+iw) + \dots)$$

oder

$$(1 + \frac{1}{12}p)x = {}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12}P - \frac{1}{240}f''(a+iw) = S_x,$$

wo S_x als völlig bekannte Größe zu betrachten ist, und somit:

$$px = \frac{P}{1 + \frac{1}{12}p} S_x.$$

Mit diesem Wert läßt sich $f(a+iw) = P - px$ direkt rechnen.

Das gewählte Intervall w führt man als Zeiteinheit ein, d. h. man setzt in allen Formeln $(wk)^2$ statt k^2 ; in den Integralformeln ist dann $w = 1$ zu setzen, wie wir eben schon getan haben. Um ferner das Anschreiben vieler Nullen zu ersparen,

empfiehlt es sich, alles in Einheiten der siebenten Dezimale des Radius auszudrücken. Dies geschieht durch Multiplikation mit 10^7 , die am einfachsten zugleich mit der von $(wk)^2$ ausgeführt wird; in den noch mit m_1 multiplizierten Gliedern hat man dann den Faktor $(wk)^2 10^7 \cdot m_1$, den man für $w = 20$ und 40 in Taf. XXXXV für alle großen Planeten angegeben findet.

167. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Psi) = \sin \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \sin \frac{1}{2} (i_1 + i_0) \\
 & \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Psi) = \cos \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \sin \frac{1}{2} (i_1 - i_0) \\
 & \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Psi) = \sin \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \cos \frac{1}{2} (i_1 + i_0) \\
 & \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Psi) = \cos \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_0) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i_0).
 \end{aligned}$$

ϱ_1 und i_1 sind am Fuß der Ephemeriden für die heliozentrischen Örter der großen Planeten im Berliner Jahrbuch angegeben; ϱ_0 und i_0 muß man auf dasselbe Äquinoktium beziehen, wie diese.

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad & \cos B_1 \sin (L_1 - \Phi) = \sin (L_0 - \varrho_1 - \Psi) \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\
 & \cos B_1 \cos (L_1 - \Phi) = \cos (L_0 - \varrho_1 - \Psi) \\
 & \sin B_1 = \sin (L_0 - \varrho_1 - \Psi) \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J.
 \end{aligned}$$

L_0 und B_0 sind als Länge in der Bahn und Breite über derselben im Berliner Jahrbuch angegeben.

Statt nach I. und II. kann man auch nach den Formeln 3) (Seite 527) rechnen, für welche die Länge und Breite λ_1, β_1 , bezogen auf die Ekliptik, ebenfalls dem Berliner Jahrbuch entnommen werden können.

$$\begin{aligned}
 \text{III.} \quad & M = M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \mathcal{A}M = E - \sin \varphi_0'' \sin E \\
 & [r] \sin V = a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\
 & [r] \cos V = a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0 \\
 & (r) = [r](1 + \nu), \quad l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.} \quad & \varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta = r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - (r) = \xi_1 - (r) \\
 & \varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta = r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) = \eta_1 \\
 & \varrho_1 \sin \vartheta = r_1 \sin B_1 - z = \zeta_1 - z \\
 & K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}.
 \end{aligned}$$

V. $(kw)^2 m_1 10^7 = g_1$ aus Tafel XXXXV.

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 &= g_1 K_1 \frac{\xi_1}{(r)} \\
 U_1 &= g_1 K_1 (r) \eta_1 \\
 W_1 &= g_1 K_1 \zeta_1 \\
 w_1 &= g_1 \frac{1}{\varrho_1^3}
 \end{aligned} \right\} \text{in Einheiten der 7. Dezimale.}$$

Werden mehrere störende Planeten berücksichtigt, so hat man diese Werte für jeden einzelnen zu bilden und dann alle zu summieren; die Summe tritt in die weiteren Rechnungen ein.

- VI. Wenn die Breitenstörungen anfangen, merklicher zu werden, was jedenfalls erst in einem späteren Stadium der Rechnung eintritt, hat man

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(wk)^2 10^7 &= c \\ w = 20, \quad \log c &= 6.2493 \\ w = 40, \quad \log c &= 6.8514 \\ \Delta R &= c \frac{x^2}{(r)^5} \\ \Delta W &= c \frac{x^3}{(r)^5} \end{aligned}$$

zu rechnen, wo x die Summe der Breitenstörungen bedeutet.

$$\begin{aligned} H &= R_1 - w_1 + \Delta R \\ W &= W_1 + \Delta W. \end{aligned}$$

- VII. Mit den Werten U_1 bilde man $\int U_1 dt$ nach

$$\begin{aligned} If(a - \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{24}f^I(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f^{III}(a - \frac{1}{2}w) - \dots \\ \int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} U_1 dt &= If(a + iw) - \frac{1}{12}f^I(a + iw) + \frac{11}{720}f^{III}(a + iw) \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} \int U' dt &= \int U_1 dt \cdot \left\{ 1 + \frac{\int U_1 dt}{2(wk) 10^7 V p_0} \right\} \\ \log 2(wk) 10^7 &= \begin{cases} 6.8376414, & w = 20 \\ 7.1386714, & w = 40. \end{cases} \end{aligned}$$

- VIII.

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{2(wk) \sqrt{p_0}}{(r)^4} \int U' dt \\ \log 2(wk) &= \begin{cases} 9.8376414, & w = 20 \\ 0.1386714, & w = 40 \end{cases} \\ H' &= H + \Delta H, \quad w = w_1 + \frac{(wk)^2 10^7}{(r)^3} \\ h &= \frac{(wk)^2 10^7}{(r)^3} - H' \\ \log (wk)^2 10^7 &= \begin{cases} 6.0732228, & w = 20 \\ 6.6752828, & w = 40. \end{cases} \end{aligned}$$

- IX.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} &= H' - h v \quad (\text{Auflösung nach Nr. 166}) \\ \frac{dAM}{dt} &= -(w\mu_0) \frac{v}{1+v} \left(1 + \frac{1}{1+v} \right) \\ \frac{dAw}{dt} &= \frac{1}{(r)^2} \frac{206264''8}{10^7} \int U_1 dt \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= W - wx, \quad \log \frac{206264''8}{10^7} = 8.314425. \end{aligned}$$

In die Gleichung für $\mathcal{A}M$ ist μ_0 in Sekunden einzutragen, dann erscheint auch $\mathcal{A}M$ in dieser Einheit; ν , welches aus der ersten Gleichung in Einheiten der siebenten Dezimale hervorgeht, ist natürlich erst durch 10^7 zu dividieren. z ergibt sich aus der letzten Gleichung ebenfalls in Einheiten der 7. Dezimale.

$$\begin{aligned} \text{X.} \quad M_0 + \mu_0(t - t_0) + \mathcal{A}M &= E - (\sin \varphi_0)'' \sin E \\ [r] \sin V &= a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\ [r] \cos V &= a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0 \\ (r) &= [r](1 + \nu) \\ r &= (r)^2 + z^2 \\ l &= V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega \\ \sin b &= \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Sind r , l , z gefunden, von denen l in der ungestörten Bahn vom Knoten ab gerechnet wird, dann vollzieht sich die Berechnung des gestörten *geozentrischen* Ortes oder allgemeiner die Berechnung einer Ephemeride am einfachsten durch Berechnung der rechtwinkligen Äquatorkoordinaten, für die man nach den Formeln 12) (Seite 29) sofort hat:

$$\begin{aligned} x' &= (r) \sin a \sin(A + l) + z \cos a \\ y' &= (r) \sin b \sin(B + l) + z \cos b \\ z' &= (r) \sin c \sin(C + l) + z \cos c. \end{aligned}$$

Hierin sind A , B , ... die auch sonst bei der Ephemeridenrechnung benutzten Gaußschen Konstanten, die mit den konstanten Elementen Ω_0 , i_0 zu berechnen sind (Gl. 1, Seite 230).

168. Übergang von den Störungen in den Polarkoordinaten auf Elementenstörungen. Es ist ein Vorzug der Störungen in den Polarkoordinaten, daß sie nur langsam anwachsen, aber schließlich stellt sich doch die Notwendigkeit ein, ein neues oskulierendes Elementensystem den Rechnungen zugrunde zu legen. Es entsteht daher die Aufgabe, aus den ermittelten Störungen in den Polarkoordinaten solche in den Elementen herzustellen oder oskulierende Elemente für eine neue Oskulationsepoche zu bilden. Auch sonst kann die Kenntnis des neuen Systems von Interesse sein. Die Aufgabe läßt sich auf zwei Wegen lösen, entweder indem man die Elemente direkt aus den Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten für die neue Oskulationsepoche berechnet, oder indem man die Unterschiede der neuen Elemente von den früheren durch die ermittelten Störungsbeträge ausdrückt. Der erstere Weg ist der kürzere, aber weniger genaue, weshalb meist der letztere eingeschlagen werden muß.

Wir bezeichnen die ursprünglichen Elemente für die Zeit t_0 wie bisher mit a_0 , e_0 , ..., die für die neue Oskulationsepoche t mit a , e , ... und setzen voraus, daß die Störungsrechnung uns mit folgenden Größen, geltend für t , bekannt gemacht hat:

$$\mathcal{A}M, \quad \mathcal{A}\omega, \quad \nu, \quad \frac{d\nu}{dt}, \quad z, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \int_{t_0}^t U_1 dt,$$

also auch mit

$$(r) = [r](1 + \nu) \quad \text{und} \quad \frac{d(r)}{dt} = \frac{(kw)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin \varphi_0 \sin V}{1 + \nu} + [r] \frac{d\nu}{dt}$$

Die Gleichung 9) (Seite 523)

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (wk) \sqrt{p_0} + \int U_1 dt \tag{1}$$

ist offenbar geeignet, zum Parameter p zu führen, wenn es gelingt, statt der in der ungestörten Bahnebene gezählten Länge l die Länge in der gestörten Bahn einzuführen. Bezeichnet man die gegenseitige Neigung der beiden Bahnen mit J und die Bogen von ihren Knoten mit der Ekliptik bis zum gegenseitigen Schnitt N (dem aufsteigenden Knoten der gestörten auf der ungestörten Bahn) mit K_0 und K , so wird in dem bei F rechtwinkligen Dreieck NP (Fig. 62) $NP = l - K_0$, $FP = b$ und daher

$$\text{tg } J \sin(l - K_0) = \text{tg } b = \frac{z}{(r)}$$

Durch Differenziation folgt hieraus, da nach Gl. 4) (Seite 487) bei oskulierenden Elementen

$$\cos NP \sin J \frac{dK_0}{dt} - \sin NP \frac{dJ}{dt} = 0$$

oder:

$$\cos(l - K_0) \sin J \frac{dK_0}{dt} - \frac{\sin(l - K_0)}{\cos J} \frac{dJ}{dt} = 0$$

ist, also J und K_0 konstant gehalten werden können:

$$\text{tg } J \cos(l - K_0) = \frac{(r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt}}{(r)^2 \frac{dl}{dt}}$$

Wird hier 1) substituiert, so hat man die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{tg } J \sin(l - K_0) &= \frac{z}{(r)} \\ \text{tg } J \cos(l - K_0) &= \frac{(r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt}}{(wk) \sqrt{p_0} + \int U_1 dt} \end{aligned} \tag{2}$$

in denen rechts alles bekannt ist, aus denen also J und K_0 hervorgehen, da $l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega$ ist. Nennt man die Länge in der gestörten Bahn von N aus gezählt $u = NP$, so ist

$$\text{tg } u = \text{tg}(l - K_0) \sec J$$

oder

$$u = l - K_0 + \text{tg}^2 \frac{J}{2} \sin 2(l - K_0) + \dots = l - K_0 + \mathcal{A}u. \tag{3}$$

Das Flächenteilchen $r^2 \frac{du}{dt} = (wk) \sqrt{p}$ auf die ungestörte Bahnebene projiziert gibt $(r)^2 \frac{dl}{dt}$, also hat man:

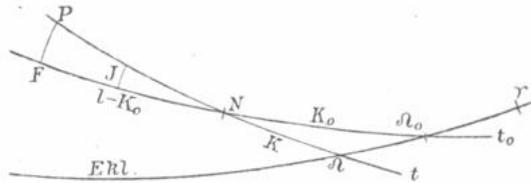


Fig. 62.

$$(wk) V\bar{p} = (r)^2 \frac{dl}{dt} \sec J = ((wk) V\bar{p}_0 + \int U_1 dt) \sec J \quad 4)$$

woraus p berechnet werden kann. Es ist aber vorzuziehen, die Differenz

$$\mathcal{A}(V\bar{p}) = V\bar{p} - V\bar{p}_0$$

zu berechnen, für die man aus 4) sofort erhält, wenn $\sec J = 1 + 2 \sin \frac{1}{2} J^2 \sec J$ gesetzt wird:

$$\mathcal{A}V\bar{p} = \left(\frac{1}{(wk)} \int U_1 dt + 2V\bar{p}_0 \sin \frac{1}{2} J^2 \right) \sec J. \quad 5)$$

Den Unterschied der Parameter selbst erhält man hieraus, wenn man $V\bar{p} - V\bar{p}_0 = \mathcal{A}V\bar{p}$ mit $V\bar{p} + V\bar{p}_0$ multipliziert:

$$\mathcal{A}p = p - p_0 = \mathcal{A}V\bar{p} (2V\bar{p}_0 + \mathcal{A}V\bar{p}). \quad 6)$$

Wir gehen nun zur Exzentrizität über. Für den gestörten Ort gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e \sin v &= \frac{V\bar{p}}{(kw)} \frac{dr}{dt} \\ e \cos v &= \frac{p}{r} - 1; \end{aligned} \quad 7)$$

substituiert man darin

$$\begin{aligned} r^2 &= (r)^2 + z^2 \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{(r)}{r} \frac{d(r)}{dt} + \frac{z}{r} \frac{dz}{dt}, \end{aligned} \quad 8)$$

so hat man alle Mittel, um e und v zu bestimmen, doch empfiehlt es sich auch hier die Differenzen zu rechnen. Aus 7) folgt, wenn der ungestörte Radiusvektor und sein Differenzialquotient für die Zeit t mit r_0 und $\frac{dr_0}{dt}$ bezeichnet und ferner die Differenzen

$$r - r_0 = \mathcal{A}r \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} = \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

eingeführt werden:

$$\begin{aligned} e \sin v &= \frac{V\bar{p}_0 + \mathcal{A}V\bar{p}_0}{(wk)} \left(\frac{dr_0}{dt} + \mathcal{A}\frac{dr}{dt} \right) = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{wk} \left(\mathcal{A}V\bar{p} \frac{dr_0}{dt} + V\bar{p} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right) \\ e \cos v &= \frac{p_0}{r_0} - 1 + \left(\frac{p}{r} - \frac{p_0}{r_0} \right) = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} (p_0 + \mathcal{A}p - \frac{r}{r_0} p_0) \\ &= e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} (\mathcal{A}p + \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}r); \end{aligned}$$

setzt man also

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= e_0 \sin v_0 \frac{(wk)}{V\bar{p}_0} \\ \frac{1}{wk} \left(\mathcal{A}V\bar{p} \frac{dr_0}{dt} + V\bar{p} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right) &= n \sin N \\ \frac{1}{r} (\mathcal{A}p + \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}r) &= n \cos N \end{aligned} \quad 9)$$

so wird:

$$\begin{aligned} e \sin v &= e_0 \sin v_0 + n \sin N \\ e \cos v &= e_0 \cos v_0 + n \cos N \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} e \sin(v - v_0) &= n \sin(N - v_0) \\ e \cos(v - v_0) &= e_0 + n \cos(N - v_0). \end{aligned} \quad 10)$$

Hieraus folgt $v - v_0$ und durch Quadrieren und Addieren

$$e^2 - e_0^2 = 2e_0 n \cos(N - v_0) + n^2. \quad 11)$$

Führt man $\sin \varphi_0 = e_0$, $\sin \varphi = e$ ein, so wird:

$$e^2 - e_0^2 = \sin(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0)$$

also

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{e^2 - e_0^2}{\sin(\varphi + \varphi_0)}, \quad 12)$$

was mit zwei Näherungen aufgelöst wird.

Zur Berechnung von φ braucht man $\Delta r = r - r_0$ und $\Delta \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}$, deren Ausdrücke nun aufzustellen sind. In der ungestörten bzw. gestörten Bewegung hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_0 + \mu_0(t - t_0) &= E_0 - e_0 \sin E_0 \\ M_0 + \Delta M + \mu_0(t - t_0) &= E - e_0 \sin E, \end{aligned}$$

mithin

$$\Delta M = (E - E_0) - 2e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \cos \frac{1}{2}(E + E_0)$$

oder, wenn das Verhältnis des \sin zum Bogen

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(E - E_0)}{\frac{1}{2}(E - E_0)} = \beta$$

(den Logarithmentafeln zu entnehmen) gesetzt wird:

$$E - E_0 = \frac{\Delta M}{1 - e_0 \beta \cos \frac{1}{2}(E + E_0)}. \quad 13)$$

Ebenso hat man

$$\begin{aligned} r_0 &= a_0(1 - e_0 \cos E_0) \\ [r] &= a_0(1 - e_0 \cos E), \end{aligned}$$

woraus

$$[r] - r_0 = 2a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \cos \frac{1}{2}(E + E_0). \quad 14)$$

Endlich ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{[r]} \sin \frac{1}{2}V &= \sqrt{a_0(1 + e_0)} \sin \frac{1}{2}E & \sqrt{r_0} \sin \frac{1}{2}v_0 &= \sqrt{a_0(1 + e_0)} \sin \frac{1}{2}E_0 \\ \sqrt{[r]} \cos \frac{1}{2}V &= \sqrt{a_0(1 - e_0)} \cos \frac{1}{2}E & \sqrt{r_0} \cos \frac{1}{2}v_0 &= \sqrt{a_0(1 - e_0)} \cos \frac{1}{2}E_0 \end{aligned}$$

woraus:

$$\sin \frac{1}{2}(V - v_0) = \frac{1}{\sqrt{r_0}[r]} a_0 \cos \varphi_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0). \quad 15)$$

Dies vorausgesetzt folgt aus $(r) = r \cos b$:

$$r = (r) \left(1 + \frac{2 \sin \frac{1}{2}b^2}{\cos b} \right)$$

oder

$$r - (r) = z(r) \frac{\sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} \quad (16)$$

und b kann hierin durch

$$\operatorname{tg} b = \frac{z}{(r)} \quad (17)$$

als bekannt angesehen werden. Endlich ist

$$(r) - [r] = [r]v. \quad (18)$$

Setzt man also $\Delta r = r - r_0$ aus $(r - (r)) + ((r) - [r]) + ([r] - r_0)$ d. h. aus 16), 18), 14) zusammen, so folgt:

$$\Delta r = r - r_0 = z(r) \frac{\sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} + [r]v + 2a_0 e_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \cos \frac{1}{2} (E + E_0), \quad (19)$$

worin b und $E - E_0$ durch 17) und 13) gegeben sind.Um $\mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right)$ zu erhalten, substituieren wir in 8)

$$\begin{aligned} (r) &= r \cos b, & z &= r \sin b \\ \frac{d(r)}{dt} &= \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin \varphi_0 \sin V}{1+v} + [r] \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

so daß kommt:

$$\sec b \frac{dr}{dt} = \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin \varphi_0 \sin V}{1+v} + [r] \frac{dv}{dt} + \operatorname{tg} b \frac{dz}{dt}.$$

Wird hiervon

$$\sec b \frac{dr_0}{dt} = \frac{(wk) \sin \varphi_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}} + \frac{z \sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} \frac{(wk) \sin \varphi_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}$$

subtrahiert, so folgt nach geringer Reduktion:

$$\sec b \left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} \right) = [r] \frac{dv}{dt} + \frac{wk \sin \varphi_0}{\sqrt{p_0}} \left(\frac{\sin V - \sin v_0}{1+v} - \sin v_0 \left(\frac{v}{1+v} + \frac{2 \sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} \right) \right) + \operatorname{tg} b \frac{dz}{dt},$$

oder

$$\mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{\cos b}{1+v} \left((r) \frac{dv}{dt} + \frac{(wk) \sin \varphi_0}{\sqrt{p_0}} \left(2 \sin \frac{1}{2} (V - v_0) \cos \frac{1}{2} (V + v_0) - \sin v_0 \frac{v + 2 \sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} \right) + \frac{z}{[r]} \frac{dz}{dt} \right). \quad (20)$$

Zur Ermittlung der großen Halbachse hat man

$$a - a_0 = \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p_0}{1 - e_0^2} = \frac{p - p_0}{1 - e^2} + p_0 \left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{1 - e_0^2} \right) = \frac{\Delta p + a_0 (e^2 - e_0^2)}{1 - e^2}$$

oder

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{\Delta p + a_0 (e^2 - e_0^2)}{p_0 - a_0 (e^2 - e_0^2)}. \quad (21)$$

Daraus kann man $\Delta \mu = \mu - \mu_0$ berechnen; es ist:

$$\mu = \mu_0 + \Delta \mu = k a^{-\frac{3}{2}} = k (a_0 + \Delta a)^{-\frac{3}{2}} = k a_0^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\Delta a}{a_0} \right)^{-\frac{3}{2}};$$

wird also

$$\frac{\Delta a}{2 a_0} = q$$

gesetzt, so folgt nach der Entwicklung Seite 522:

$$\mu = \mu_0 (1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots)$$

oder

$$\Delta\mu = -\mu_0 q f \tag{22}$$

(f mit Arg. q aus Taf. XXVI).

Die mittlere Anomalie für die Epoche t berechnet man am einfachsten mit Hilfe der durch 10) bekannt gewordenen wahren Anomalie v . Aus der Formel (VII. Seite 138)

$$\sin \frac{1}{2}(v - E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v \tag{23}$$

folgt E , und dann M mit genügender Genauigkeit aus:

$$M = E - \sin \varphi \sin E. \tag{24}$$

Auch aus 13) kann E zu diesem Zwecke entnommen werden.

Um endlich noch $i - i_0$, $\varrho - \varrho_0$, $\omega - \omega_0$ zu bestimmen, bedienen wir uns der bereits durch 2) und 3) bekannten Stücke J , K_0 und u und entnehmen aus dem Knotendreieck $\varrho_0 \varrho N$ (Fig. 62), die Seite ϱN mit K bezeichnend, nach den Napier'schen Analogien (Seite 9):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(K + (\varrho - \varrho_0)) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(i_0 - J)}{\cos \frac{1}{2}(i_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0 \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(K - (\varrho - \varrho_0)) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(i_0 - J)}{\sin \frac{1}{2}(i_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0, \end{aligned} \tag{25}$$

woraus $\varrho - \varrho_0$ und K , und dann:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i_0) = \frac{\cos \frac{1}{2}(K + K_0)}{\cos \frac{1}{2}(K - K_0)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \tag{26}$$

woraus $i - i_0$ hervorgehen. Endlich ist:

$$l_0 = v_0 + \omega_0, \quad l = V + \omega_0 + \Delta\omega,$$

also

$$l - l_0 = V - v_0 + \Delta\omega \tag{27}$$

und

$$\omega_0 = l_0 - v_0, \quad \omega = u + K - v = l - K_0 + \Delta u + K - v,$$

also

$$\omega - \omega_0 = (l - l_0) + (K - K_0) + \Delta u - (v - v_0)$$

oder nach 27)

$$\omega - \omega_0 = (K - K_0) + \Delta u + \Delta\omega + (V - v_0) - (v - v_0); \tag{28}$$

hier sind Δu , $V - v_0$, $v - v_0$ bzw. den Formeln 3), 15), 10) zu entnehmen.

169. Zusammenstellung der Formeln für den Übergang von den Störungen in Polarkoordinaten zu den Elementenstörungen.

I. Man berechne für die neue Oskulationsepoche t :

$$\begin{array}{l|l} M_0 + \mu_0(t - t_0) = E_0 - \sin \varphi_0 \sin E_0 & M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M = E - \sin \varphi_0 \sin E \\ r_0 \sin v_0 = a_0 \cos \varphi_0 \sin E_0 & [r] \sin V = a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\ r_0 \cos v_0 = a_0 \cos E_0 - a_0 \sin \varphi_0 & [r] \cos V = a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (r) &= [r](1 + \nu), & \frac{d(r)}{dt} &= \frac{(kw)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin \varphi_0 \sin V}{1 + \nu} + [r] \frac{d\nu}{dt}, & \operatorname{tg} b &= \frac{z}{(r)}. \\ r &= (r) \sec b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad & \operatorname{tg} J \sin(l - K_0) = \frac{x}{(r)} \\
 & \operatorname{tg} J \cos(l - K_0) = \frac{(r) \frac{dx}{dt} - x \frac{d(r)}{dt}}{(wk) \sqrt{p_0} + \int U_1 dt} \\
 & l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega \\
 & \mathcal{A}u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \sin 2(l - K_0) \text{ 206264''8.}
 \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \mathcal{A}\sqrt{p} = \left(\frac{1}{(wk)} \int U_1 dt + 2 \sqrt{p_0} \sin \frac{1}{2} J^2 \right) \sec J$$

$$p - p_0 = \mathcal{A}p = \mathcal{A}\sqrt{p} (2\sqrt{p_0} + \mathcal{A}\sqrt{p})$$

$$\log \beta = S - 4.685\,5749 -_{10}$$

(S ist die am Fuß der Logarithmentafeln angegebene Größe zur Berechnung der sin kleiner Bogen)

$$E - E_0 = \frac{\mathcal{A}M}{1 - \beta \sin \varphi_0 \cos \frac{1}{2}(E + E_0)}$$

$$\sin \frac{1}{2}(V - v_0) = \frac{1}{\sqrt{r_0[r]}} a_0 \cos \varphi_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0)$$

$$\mathcal{A}r = r - r_0 = [r] \frac{\nu + 2 \sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} + 2 a_0 e_0 \cos \frac{1}{2}(E + E_0) \sin \frac{1}{2}(E - E_0)$$

$$\mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{\cos b}{1 + \nu} \left((r) \frac{d\nu}{dt} + \frac{(wk) \sin \varphi_0}{\sqrt{p_0}} \left[2 \sin \frac{1}{2}(V - v_0) \cos \frac{1}{2}(V + v_0) - \sin v_0 \frac{\nu + 2 \sin \frac{1}{2} b^2}{\cos b} \right] + \frac{x}{[r]} \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\text{IV.} \quad n \sin N = \frac{1}{wk} \left(\mathcal{A}\sqrt{p} \frac{dr_0}{dt} + \sqrt{p} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right), \quad \frac{dr_0}{dt} = e_0 \sin v_0 \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}}$$

$$n \cos N = \frac{1}{r} \left(\mathcal{A}p + \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}r \right)$$

$$\left. \begin{aligned}
 e \sin(v - v_0) &= n \sin(N - v_0) \\
 e \cos(v - v_0) &= e_0 + n \cos(N - v_0)
 \end{aligned} \right\} \text{ hieraus } v - v_0$$

$$e^2 - e_0^2 = 2 e_0 n \cos(N - v_0) + n^2$$

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{e^2 - e_0^2}{\sin(\varphi + \varphi_0)}.$$

$$\text{V.} \quad q = \frac{a - a_0}{2 a_0} = \frac{\mathcal{A}p + a_0(e^2 - e_0^2)}{2(p_0 - a_0(e^2 - e_0^2))}$$

$$\mu - \mu_0 = -\mu_0 q f \quad (f \text{ aus Taf. XXVI})$$

$$\sin \frac{1}{2}(v - E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v$$

$$M = E - \sin \varphi \sin E.$$

$$\text{VI.} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(K + (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0)) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\dot{i}_0 - J)}{\cos \frac{1}{2}(\dot{i}_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(K - (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0)) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\dot{i}_0 - J)}{\sin \frac{1}{2}(\dot{i}_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\dot{i} - \dot{i}_0) = \frac{\cos \frac{1}{2}(K + K_0)}{\cos \frac{1}{2}(K - K_0)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J$$

$$\omega - \omega_0 = K - K_0 + \mathcal{A}u + \mathcal{A}\omega + (V - v_0) - (v - v_0).$$

Abschnitt XXXII.

Berechnung der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten.

170. Grundgleichungen der Enckeschen Methode. Diese Methode berechnet die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten durch fast unmittelbare Verwendung der in diesen Koordinaten aufgestellten allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Planeten. Bezeichnen x, y, z die Koordinaten des gestörten, x_1, y_1, z_1 die des störenden Planeten, dann r und r_1 die beiden Radienvektoren von der Sonne aus und ϱ_1 die gegenseitige Entfernung der beiden Körper, m und m_1 ihre Massen in Teilen der Sonnenmasse, so sind die genannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} k^2 (1 + m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} k^2 (1 + m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} k^2 (1 + m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\varrho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right). \end{aligned} \quad 1)$$

Das Summenzeichen soll andeuten, daß die daneben stehenden Ausdrücke für jeden in Rechnung gezogenen störenden Planeten aufzustellen und dann zu summieren sind. Bezeichnen ferner x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der ungestörten Bewegung, wie sie sich gestalten würde, wenn keine störenden Massen vorhanden wären, so gelten für diese die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{x_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{y_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{z_0}{r_0^3} &= 0, \end{aligned} \quad 2)$$

deren Integration die Kegelschnittsbewegung gibt; durch die vorhandenen oskulierenden Elemente lassen sich die x_0, y_0, z_0 für jede Zeit finden. Bezeichnen endlich ξ, η, ζ die Unterschiede zwischen den gestörten und den ungestörten Koordinaten oder wie wir uns ausdrücken können, die Störungen in den Koordinaten, so wird wegen $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0, \zeta = z - z_0$:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$$

u. s. f.

und daher nach Eintragung der Gl. 1) und 2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\rho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\rho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\rho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} \right) \end{aligned} \quad 3)$$

worin

$$\begin{aligned} r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ \rho_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2. \end{aligned}$$

Dies sind die Differenzialgleichungen für die Störungsbeträge ξ, η, ζ , die den Koordinaten x_0, y_0, z_0 hinzuzufügen sind, um die gestörten Werte derselben zu erhalten; sie bilden die Grundlage für deren Berechnung und sind hierzu nur noch kleinen Umformungen zu unterwerfen.

Analysiert man die beiden Glieder, aus denen sich die rechten Seiten von 3) zusammensetzen, so bemerkt man zunächst, daß in beiden x, y, z , also auch die zu ermittelnden Größen ξ, η, ζ selbst auftreten; es besteht aber zwischen beiden der wesentliche Unterschied, daß die ersten mit den Faktoren m_1 multipliziert sind, die anderen aber nicht; da nun ξ, η, ζ selbst von der Ordnung der kleinen Größen m_1 sind, so begeht man nur einen Fehler zweiter Ordnung in bezug auf die Massen, wenn man in den ersten Gliedern statt x, y, z die ungestörten Werte x_0, y_0, z_0 setzt, die ebenso wie die x_1, y_1, z_1 als bekannt angenommen werden können; diese ersten Glieder können also bis auf Glieder zweiter Ordnung direkt berechnet werden und werden daher die direkten Glieder genannt; es wird später gezeigt werden, wie man in ihnen ohne besondere Mühe auch die Glieder zweiter, . . . Ordnung aufnehmen kann.

Die zweiten Glieder verlangen dagegen zu ihrer Berechnung eine *genaue* Kenntnis der ξ, η, ζ ; eine direkte Berechnung derselben ist also nicht möglich, wohl aber führt eine indirekte in der Regel rasch zum Ziel: man verschafft sich zuerst genäherte Werte von ξ, η, ζ , wie solche durch die nachher auseinanderzusetzende Integrationsmethode sich von selbst darbieten, setzt diese ein und erhält durch Integration Werte von ξ, η, ζ , die nun an Stelle der ersteren treten, worauf die Integration wiederholt wird. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich die ξ, η, ζ nicht mehr ändern. Man nennt diese Glieder die indirekten.

Bei den indirekten Gliedern tritt noch die weitere Schwierigkeit auf, daß sie Differenzen zweier nahe gleich großen Zahlen sind, so daß man zu ihrer scharfen Berechnung Tafeln von einer höheren Stellenzahl benötigte, um sie scharf rechnen zu können; dieser Mißstand wird durch folgende Umformung beseitigt. Es ist:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{x - \xi}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left(x \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) - \xi \right)$$

und die Schwierigkeit ist jetzt auf den allen drei Koordinaten gemeinsamen Faktor $1 - \frac{r_0^3}{r^3}$ geworfen. Nun ist aber weiter:

$r^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2 = r_0^2 + (2x_0 + \xi)\xi + (2y_0 + \eta)\eta + (2z_0 + \zeta)\zeta$,
also

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2}{r_0^2} \left((x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta \right).$$

Setzt man also

$$q = \frac{1}{r_0^2} \left((x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta \right), \quad 4)$$

so wird

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2q$$

und

$$\begin{aligned} \frac{r_0^3}{r^3} &= (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots \\ &= 1 - q \left\{ 3 \left(1 - \frac{5}{2}q + \frac{35}{6}q^2 - \frac{35 \cdot 5}{24}q^3 + \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

oder wenn die Reihe $\{\dots\}$ mit f bezeichnet wird:

$$\frac{r_0^3}{r^3} = 1 - qf.$$

Die Reihe f kann mit dem Argument q leicht tabuliert werden, was zuerst von *Encke* (Astr. Nachr. Band 34, S. 355; Berl. Jahrb. 1858) ausgeführt wurde. Siehe Tafeln Nr. XXVI. Es wird also jetzt:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (qfx - \xi)$$

und die Grundgleichungen gehen in folgende über, die der Integration unterworfen werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\rho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) + \frac{k^2}{r_0^3} (fqx - \xi) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\rho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) + \frac{k^2}{r_0^3} (fqq - \eta) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\rho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) + \frac{k^2}{r_0^3} (fqz - \zeta). \end{aligned} \quad 5)$$

171. Ausführung der Integration. Um die Gl. 5) zu integrieren, berechnet man für eine Reihe äquidistanter zwischen die gegebene und die neue Oskulations-epoche eingeschobener Zeitpunkte die rechten Seiten. Dies ist möglich, denn die x_1, y_1, z_1 können aus den Angaben der Jahrbücher, die x_0, y_0, z_0 aus den gegebenen oskulierenden Elementen gefunden werden und weiter wird sich gleich zeigen, daß man, abgesehen vom Anfang des Verfahrens, durch die Rechnung für einen bestimmten Zeitmoment bereits einen genäherten Wert von ξ, η, ζ für den nächsten erhält. Mit diesen Näherungswerten $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ kann man in den direkten Gliedern sogleich die Störungen höherer Ordnung soviel wie vollständig mitnehmen, indem man setzt: $x_1 - x = x_1 - (x_0 + \bar{\xi})$, \dots , und die indirekten Glieder fast direkt ansetzen, indem man zuerst q aus 4) rechnet, damit f aus der Tafel entnimmt und $x = x_0 + \bar{\xi}$, \dots $\xi = \bar{\xi}$, \dots setzt. Eine Wiederholung der Rechnung genügt, falls sich der Unterschied zwischen den Näherungswerten $\bar{\xi}, \dots$ und den durch Integration erlangten,

genaueren als zu groß herausstellt. Am Anfang des Verfahrens wird unter Umständen eine mehrfache Wiederholung der Rechnung nötig sein, falls die Näherungswerte $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, von denen man ausgehen muß, trotz der Nähe der Oskulationsepoche zu fehlerhaft sein sollten. Man erhält auf diese Weise für eine Reihe äquidistanter Zeitmomente die Werte $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \dots$, aus denen durch die Formeln der mechanischen Integration die ξ, η, ζ hervorgehen. Die für den vorliegenden Fall zweckmäßigste Formel ist, wenn $\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{t=a+iw} = f(a+iw)$ gesetzt wird:

$$\xi = \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+nw} f(t) dt^2 = w^2 \left({}^{II}f(a+nw) + \frac{1}{12}f(a+nw) - \frac{1}{240}f''(a+nw) + \dots \right),$$

wobei die ersten Glieder der Summenreihen nach

$$\begin{aligned} {}^I f\left(a - \frac{1}{2}w\right) &= -\frac{1}{24}f'(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) + \dots \\ {}^{II} f(a) &= +\frac{1}{24}f'(a-w) - \frac{17}{5760}(2f''(a-w) + f''(a)) + \dots \end{aligned}$$

anzusetzen sind. ξ verschwindet hiernach für $t = a - \frac{1}{2}w$ und es ist also die Einteilung der Zeit so zu treffen, daß die Oskulationsepoche mit $t_0 = a - \frac{1}{2}w$ zusammenfällt.

Wenn die Berechnung der Funktionswerte bis einschließlich $f(a+iw)$ fortgeschritten ist, so ist dadurch, wie der Anblick des Schemas Seite 474 lehrt, ${}^{II}f(a+(i+1)w)$ bekannt geworden; dies ist aber das Hauptglied in dem Ausdrucke von ξ für die Zeit $a+(i+1)w$, welcher lautet:

$$\xi_{a+(i+1)w} = w^2 \left({}^{II}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \frac{1}{240}f''(a+(i+1)w) - \dots \right).$$

Beachtet man, daß $f(a+(i+1)w)$ und $f''(a+(i+1)w)$, die mit kleinen Faktoren multipliziert sind, hinreichend genau durch Extrapolation ermittelt werden können, so ist ersichtlich, daß nach Abschluß der Rechnung für $a+iw$ bereits ein guter Näherungswert von ξ für $a+(i+1)w$ von selbst dargeboten wird, mit dem in der oben auseinandergesetzten Weise die Berechnung der direkten und indirekten Glieder erfolgen kann.

Oppolzer hat das Verfahren in folgendes Schema gebracht, welches eine indirekte Rechnung fast ganz ausschließt. Wir nehmen an, die Rechnung sei bis zum Argument $a+iw$ vollendet und man beginne mit $f(a+(i+1)w)$. Um die Multiplikation mit w^2 am Schluß zu ersparen, rechnen wir gleich $w^2 f(a+iw)$, was am einfachsten geschieht, wenn überall $w^2 k^2$ statt k^2 genommen oder w als Zeiteinheit eingeführt wird. Setzt man dann zur Abkürzung die direkt zu berechnenden Glieder

$$\begin{aligned} \sum w^2 k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{q_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) &= \sum (X) \\ \frac{w^2 k^2}{r_0^3} &= h, \end{aligned}$$

so wird aus der ersten Gleichung 5)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum (X) + h f q x - h \xi. \tag{6}$$

Nun ist

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{\text{II}}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w)$$

oder

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{\text{II}}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{a+(i+1)w} - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w)$$

oder nach Eintragung der eben erhaltenen Gleichung

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{\text{II}}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}\sum(X) + \frac{1}{12}hfqx - \frac{1}{12}h\xi - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w).$$

Fassen wir die Glieder rechts, die direkt anzusetzen sind, nämlich ${}^{\text{II}}f(a+(i+1)w)$, $\frac{1}{12}\sum(X)$ und $\frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w)$ (letzteres weil kleine Fehler in der Extrapolation durch den Faktor 1:240 vernichtet werden) unter einer Bezeichnung zusammen:

$$S_x = {}^{\text{II}}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}\sum(X) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w),$$

so wird

$$\xi(1+\frac{1}{12}h) = S_x + \frac{1}{12}hfqx. \quad 7)$$

In dem Ausdrücke 4) von q kann man die $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$ durch extrapolierte Werte dieser Größen ersetzen, da sie nochmals mit ξ , η , ζ multipliziert werden; die ξ , η , ζ selbst werden durch 7) gegeben. Setzt man also zur Abkürzung die direkt zu berechnenden Größen

$$\alpha = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^2(1 + \frac{1}{12}h)}, \quad \beta = \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^2(1 + \frac{1}{12}h)}, \quad \gamma = \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^2(1 + \frac{1}{12}h)}, \quad 8)$$

so wird aus 4)

$$q = \alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z + \frac{1}{12}hfq(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

oder

$$q = \frac{\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z}{1 - \frac{1}{12}hf(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \quad 9)$$

Hiermit läßt sich ein genauer Wert von q berechnen, denn die auf der rechten Seite noch auftretende, nicht direkt bekannte Größe f läßt sich wegen ihres einfachen Ganges leicht extrapolieren, wenn man es nicht vorzieht den ganzen Nenner zu extrapolieren.

Ferner folgt aus der Verbindung der Gleichungen 6) und 7)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum(X) + hfqx - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h}(S_x + \frac{1}{12}hfqx)$$

oder wenn

$$\frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} = h' \quad 10)$$

gesetzt wird:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum(X) + h'(fqx - S_x). \quad 11)$$

Da q durch 9) bekannt geworden ist, gibt dies einen direkt berechenbaren Wert von

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{a+(i+1)w} = f(a+(i+1)w),$$

worauf ξ für dasselbe Argument aus

$$\xi = {}^{\text{II}}f(a+(i+1)w) + \frac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \frac{1}{240}f^{\text{II}}(a+(i+1)w) \quad 12)$$

folgt.

Diese Vorschriften setzen voraus, daß die Rechnung bereits im Gang ist; es ist also noch zu zeigen, wie man beim *Beginn* derselben zu verfahren hat, wenn man ${}^{II}f(a + iw)$ noch nicht kennt. Man rechnet für die vier die Oskulationsepoche $a - \frac{1}{2}w$ symmetrisch einschließenden Zeitpunkte $a - 2w$, $a - w$, a und $a + w$ nach 5) die Ausdrücke $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$, indem man in den direkten Gliedern $\xi = 0$ setzt, was in der Nähe der Oskulationsepoche *nie* einen Fehler veranlassen kann, und indem man die indirekten Glieder ganz vernachlässigt. Mit den vier Werten bildet man die Differenzen- und Summenreihen und gelangt nach Integration zu genäherten Werten von ξ , mit denen die Rechnung wiederholt wird, nachdem man sie in die indirekten Glieder eingeführt hat. Dies wird so lange fortgesetzt, bis die ξ sich nicht mehr ändern, worauf diese als die strengen Werte betrachtet werden können. Daran schließt sich dann das oben auseinandergesetzte direkte Verfahren für die weiteren Zeitpunkte. Die ersten Näherungsrechnungen führt man zweckmäßig auf einem Nebenblatt aus.

172. Berechnung der Koordinaten. In der Regel wird die Störungsrechnung in einem Koordinatensystem ausgeführt, dessen xy -Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt und dessen x -Achse durch den Frühlingspunkt geht. Die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1 der störenden Planeten muß man dann aus den Ekliptikal-Polarkoordinaten r_1, λ_1, β_1 , die in den Jahrbüchern gegeben werden, durch

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 \\y_1 &= r_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 \\z_1 &= r_1 \sin \beta_1\end{aligned}$$

berechnen, wobei darauf zu sehen ist, daß das Äquinoktium, auf das sich die vorgelegten Elemente beziehen, in Übereinstimmung gebracht werde mit dem von λ_1 und β_1 oder umgekehrt. Das Berliner Jahrbuch gibt die λ_1, β_1 bezogen auf das Äquinoktium des benachbarten Jahrzehnts; auf dieses wird man also zweckmäßig die Elemente übertragen und erreicht dadurch den Vorteil, daß man im Laufe einer Rechnung das Äquinoktium in der Regel nicht zu wechseln braucht. Die rechtwinkligen Jupiterkoordinaten von 1770—1830 findet man in Publikation VI der Astronomischen Gesellschaft fertig berechnet vor; ebenso für 1830—1865 von Jupiter und den übrigen in Betracht kommenden Planeten in der Publikation I. Die älteren Jahrgänge des Berliner Jahrbuches geben bis 1867 neben dem Radiusvektor die heliozentrische Länge und Breite, bezogen auf das *wahre* Äquinoktium; diese muß man also vorher auf das *mittlere* Äquinoktium übertragen, das man der Rechnung überhaupt zugrunde legt. Das Berliner Jahrbuch für 1868—1870 gibt die rechtwinkligen Koordinaten direkt und noch die Glieder, die vom gestörten Planeten unabhängig sind. Vom Jahrgang 1871 an ist die oben erwähnte Einrichtung getroffen.

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des gestörten Planeten müssen aus den gegebenen Elementen der Anfangsepoche berechnet werden, wofür man nach Nr. 44 bzw. Nr. 55 und nach den Formeln 10) (Seite 27) hat:

Ellipse:

$$\begin{aligned} M_0 + \mu_0(t - t_0) &= E - \sin \varphi_0 \sin E \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \cos \varphi_0 \sin E \\ r_0 \cos v_0 &= a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

Parabel:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0^3 &= \frac{k(t - T)}{\sqrt{2} q_0^{\frac{3}{2}}} \\ & \text{(Barkersche Tafel)} \end{aligned}$$

$$r_0 = \frac{q_0}{\cos \frac{1}{2} v_0^2}$$

$$u_0 = v_0 + \omega_0$$

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 (\cos u_0 \cos \varrho_0 - \sin u_0 \sin \varrho_0 \cos i_0) \\ y_0 &= r_0 (\cos u_0 \sin \varrho_0 + \sin u_0 \cos \varrho_0 \cos i_0) \\ z_0 &= r_0 \sin u_0 \sin i_0 \end{aligned}$$

oder mit Einführung der Gaußschen Konstanten für die Ekliptik

$$\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \varrho_0 & \left| \quad \sin b \sin B &= \sin \varrho_0 \right. \\ \sin a \cos A &= -\cos i_0 \sin \varrho_0 & \left| \quad \sin b \cos B &= \cos i_0 \cos \varrho_0 \right. \\ x_0 &= r_0 \sin a \sin(A + u_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin(B + u_0) \\ z_0 &= r_0 \sin i_0 \sin u_0. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der gegenseitigen Entfernung ϱ_1 der beiden Planeten aus

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

rechnet man am besten das System durch:

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta &= x_1 - x \\ \varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta &= y_1 - y \\ \varrho_1 \sin \vartheta &= z_1 - z. \end{aligned}$$

Es sind noch einige Bemerkungen über die praktische Ausführung der ganzen Rechnung zu machen. Eine allgemeine Regel, wie groß das Intervall w zu wählen sei, läßt sich namentlich bei Anwendung der Methode auf Kometen nicht geben. Man wird nur im Auge behalten müssen, daß die mechanische Integration stets mit Sicherheit ausführbar sei, daß also die Differenzen der Funktionswerte regelmäßig laufen. Das ist gerade bei den rechtwinkligen Koordinaten häufig nicht der Fall, weshalb man sich hüten muß, das Intervall zu groß zu nehmen. Bei kleinen Planeten, bei denen aber die Methode kaum mehr angewendet wird, kann außer in bedeutender Jupitersnähe $w = 40$ Tage gesetzt werden. Bei Kometen, die nur in einer Erscheinung sichtbar waren, wird die Methode wegen der Kürze und Übersichtlichkeit der Rechnung mit besonderem Vorteil angewendet, doch ist dann das Intervall von 20 Tagen oder nach Umständen noch ein kürzeres anzuraten. — Das Intervall w führt man als Zeiteinheit ein, d. h. man setzt $(wk)^2$ statt k^2 , dann fällt in der Formel für mechanische Integration der Faktor w^2 weg. Ferner rechnet man meist in Einheiten der 7. Dezimale der astronomischen Einheit, d. h. man rechnet die mit 10^7 multiplizierten Störungen; den dann auftretenden Faktor $(wk)^2 10^7 m_1$ findet man in Taf. XXXXV für $w = 20$ und $w = 40$ und für alle Planeten; in den nicht mit m_1 multiplizierten Gliedern hat man:

| | |
|----------|---------------|
| | $\log (wk)^2$ |
| $w = 10$ | 8.47 1163 |
| 20 | 9.07 3223 |
| 40 | 9.67 5283. |

Zur Ausführung der Rechnung genügen meist sechsstellige Logarithmentafeln.

Die Verwertung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten ist eine ungemein einfache, besonders wenn es sich um die Aufstellung einer Ephemeride der gestörten geozentrischen Örter handelt. Da diese nämlich (Nr. 72) durch Benutzung der aus den Elementen berechneten ungestörten heliozentrischen Äquatorealkoordinaten $x_0 = r_0 \sin a \sin(A + \omega + v)$, . . . entsteht, so kann man diesen die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten unmittelbar hinzufügen, wenn man diese nur vorher ebenfalls auf den Äquator bezogen hat. Die Umwandlung der Ekliptikalstörungen $\xi \eta \zeta$ in äquatoreale $\xi' \eta' \zeta'$ aber vollzieht sich nach den Formeln (Nr. 10)

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \\ \eta' &= \eta \cos \varepsilon - \zeta \sin \varepsilon \\ \zeta' &= \eta \sin \varepsilon + \zeta \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet. Die gestörte, geozentrische Rektaszension und Deklination geht dann hervor aus

$$\begin{aligned}\varrho \cos \delta \cos \alpha &= x_0 + X + \xi' \\ \varrho \cos \delta \sin \alpha &= y_0 + Y + \eta' \\ \varrho \sin \delta &= z_0 + Z + \zeta',\end{aligned}$$

wo X, Y, Z die Äquatorealkoordinaten der Sonne sind.

Man kann auch die Änderungen der ungestörten geozentrischen Rektaszension und Deklination infolge der Störungen durch $\xi' \eta' \zeta'$ ausdrücken. Durch Differenziation der letzten Gleichungen erhält man nach leichter Umwandlung:

$$\begin{aligned}\varrho \cos \delta d\alpha &= -\sin \alpha \xi' + \cos \alpha \eta' \\ \varrho d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha \xi' - \sin \delta \sin \alpha \eta' + \cos \delta \zeta'.\end{aligned}$$

Die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten haben den Nachteil ziemlich rasch stark anzuwachsen, sie überhaupt größer erscheinen zu lassen, als sie sind, was außer der Unannehmlichkeit des Operierens mit großen Zahlen auch Unsicherheit der Rechnung herbeiführt. Diesem Übelstand kann nur dadurch entgegengetreten werden, daß man zu neuen oskulierenden Elementen übergeht, von deren Oskulationsepoche aus man die Störungsrechnung von vorne beginnt. Die Aufgabe, neue Elemente aufzustellen, haben wir bereits in Nr. 110 gelöst, indem dort gezeigt ist, wie aus den rechtwinkligen Koordinaten eines Ortes und ihren ersten Differenzialquotienten die Bahn ermittelt wird. Es sind dort die Elemente direkt aus $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ abgeleitet; sicherer ist es offenbar, durch die ermittelten Störungsbeträge $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ selbst die Zuwächse der früheren Elemente darzustellen. Auch diese Aufgabe werden wir an anderer Stelle in einem anderen Zusammenhange lösen (Nr. 178), hier aber darauf verzichten, da der genannte Übergang auf neue oskulierende Ele-

mente nur selten ausgeführt wird. Da dieser nämlich erhebliche Rechenarbeit verursacht, durch welche die sonstige Kürze und Annehmlichkeit der Rechnung nach der Enckeschen Methode fast völlig kompensiert wird, so wird man von der Anwendung dieser Methode überhaupt absehen, wenn ein solcher Übergang in Aussicht steht. Tatsächlich ist die Methode nur für kürzere Zeiträume zu empfehlen, etwa für die Erscheinung eines Kometen, wo sie allerdings unschätzbare Dienste leistet, da sie auf Bahnen jeder Form gleich gut anwendbar ist.

173. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten.

| | | |
|----|---|--|
| I. | Ellipse $M_0 + \mu_0(t - t_0) = E - \sin \varphi_0 \sin E$ $r_0 \sin v_0 = a_0 \cos \varphi_0 \sin E$ $r_0 \cos v_0 = a_0 \cos E - a_0 \sin \varphi_0$ | Parabel $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0^3 = \frac{k(t - T)}{\sqrt{2} q_0^{\frac{3}{2}}}$ $r_0 = \frac{q_0}{\cos \frac{1}{2} v_0^2}$ |
|----|---|--|

$$u_0 = v_0 + \omega_0$$

| | |
|---|--|
| $\sin a \sin A = \cos \Omega_0$ | $\sin b \sin B = \sin \Omega_0$ |
| $\sin a \cos A = -\cos i_0 \sin \Omega_0$ | $\sin b \cos B = \cos i_0 \cos \Omega_0$ |

$$x_0 = r_0 \sin a \sin(A + u_0)$$

$$y_0 = r_0 \sin b \sin(B + u_0)$$

$$z_0 = r_0 \sin i_0 \sin u_0.$$

| | |
|-----|---|
| II. | $x_1 = r_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1$ $y_1 = r_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1$ $z_1 = r_1 \sin \beta_1.$ |
|-----|---|

| | | | |
|------|---|--------------------------------------|----------------------------------|
| III. | $h = \frac{w^2 k^2}{r_0^3},$ | $h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h},$ | $n = r_0^2 (1 + \frac{1}{12} h)$ |
| | $\log (wk)^2$ | | |
| | $w = 10 \quad 8.47 \ 1163$ $\quad \quad \quad 20 \quad 9.07 \ 3223$ $\quad \quad \quad 40 \quad 9.67 \ 5283.$ | | |

IV. Für die vier die Oskulationsepoche $a - \frac{1}{2} w$ einschließenden Zeitmomente $a - 2w, a - w, a, a + w$ rechnet man in erster Näherung:

$$q_1 \cos \vartheta \cos \theta = x_1 - x_0$$

$$q_1 \cos \vartheta \sin \theta = y_1 - y_0$$

$$q_1 \sin \vartheta = z_1 - z_0$$

| | | | | |
|--|---|--|---|-------------------------------------|
| $f_x(a + iw) = \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x_0}{q_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) + \dots$ $f_y(a + iw) = \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y_0}{q_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) + \dots$ $f_z(a + iw) = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z_0}{q_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) + \dots$ | } | entsprechende Glieder für alle in Betracht kommenden störenden Planeten. | = | $\sum(X)$ $\sum(Y)$ $\sum(Z)$ |
| $10^7 (wk)^2 m_1, \dots$ aus Taf. XXXXV. | | | | |

$$\begin{aligned} I f(a - \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{24} f^I(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \frac{1}{2}w) - \dots \\ II f(a) &= \frac{1}{24} f(a - w) - \frac{17}{5760} (2 f^{II}(a - w) + f^{II}(a)) + \dots \\ \xi &= II f(a + iw) + \frac{1}{12} f(a + iw) - \frac{1}{240} f^{II}(a + iw) \\ &\text{Ebenso für } \eta \text{ und } \zeta. \end{aligned}$$

V. Die weiteren Näherungen für die genannten vier Zeitmomente und sodann die ganze Fortsetzung der Rechnung erfolgen nach:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{n}, & S_x &= II f_x(a + iw) + \frac{1}{12} \sum (X) - \frac{1}{240} f^{II}_x(a + iw) \\ \beta &= \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{n}, & S_y &= II f_y(a + iw) + \frac{1}{12} \sum (Y) - \frac{1}{240} f^{II}_y(a + iw) \\ \gamma &= \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{n}, & S_z &= II f_z(a + iw) + \frac{1}{12} \sum (Z) - \frac{1}{240} f^{II}_z(a + iw) \\ q &= \frac{\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z}{1 - \frac{1}{12} h f(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \end{aligned}$$

f mit Arg. q aus Taf. XXVI

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= f_x(a + iw) = \sum (X) + h'(f q x - S_x) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= f_y(a + iw) = \sum (Y) + h'(f q y - S_y) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= f_z(a + iw) = \sum (Z) + h'(f q z - S_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{a+iw} &= II f(a + iw) + \frac{1}{12} f(a + iw) - \frac{1}{240} f^{II}(a + iw) + \dots \\ &\text{Ebenso } \eta \text{ und } \zeta. \end{aligned}$$

VI. $\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta \cos \varepsilon - \zeta \sin \varepsilon, \quad \zeta' = \eta \sin \varepsilon + \zeta \cos \varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_0 + X + \xi' \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_0 + Y + \eta' \\ \rho \sin \delta &= z_0 + Z + \zeta' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta d\alpha &= -\sin \alpha \xi' + \cos \alpha \eta' \\ \rho d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha \xi' - \sin \delta \sin \alpha \eta' + \cos \delta \zeta' \\ \alpha &= \alpha_0 + d\alpha, \quad \delta = \delta_0 + d\delta. \end{aligned}$$

174. Beispiel für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. Wir wählen die Berechnung der Störungen des periodischen Kometen Brooks durch Jupiter und Saturn während seiner Erscheinung im Jahre 1896. Die Elemente sind auf Ekliptik und Äquinoktium des benachbarten Jahrzehnts 1900.0 übertragen worden, um die Angaben des Berliner Jahrbuchs für die Koordinaten der störenden Planeten ungeändert benutzen zu können, und lauten:

Komet 1896 VI.

Oskulationsepoche 1896 Okt. 11.0 M. Z. Berlin

Epoche 1896 Nov. 4.5 M. Z. Berlin

$$M_0 = 0^\circ 2' 38''.12$$

$$\omega = 343 47 42.27$$

$$\Omega = 18 4 21.13$$

$$i = 6 3 35.40$$

$$\varphi = 27 59 51.29$$

$$u = 499''.9894$$

$$\log a = 0.567 3639$$

Eklptik und Äquinoktium 1900.0

Rechtwinklige Eklptikalkoordinaten:

$$x_0 = r_0 [9.999 7679] \sin(107^\circ 58' 41''.03 + u_0)$$

$$y_0 = r_0 [9.997 8018] \sin(18 10 2.77 + u_0)$$

$$z_0 = r_0 [9.023 5281] \sin u_0$$

$$\log a \cos \varphi \quad 0.51 3309$$

$$\log a \sin \varphi \quad 0.23 8939$$

$$\log (\sin \varphi)'' \quad 4.98 6000$$

Wir wählen ein 40-tägiges Intervall und berechnen zunächst für die vier Zeitmomente 1896 Aug. 12.0, Sept. 21.0, Okt. 31.0, Dez. 10.0, welche die Oskulationsepoche symmetrisch einschließen, in erster Näherung nach den Formeln I.—IV. die Störungswerte ξ , η , ζ ; bis auf die Integration kann alles in definitiver Weise geschehen und im eigentlichen Schema (Blatt 1, 2, 3 Seite 550 ff.) eingetragen werden, diese selbst aber führt man zuerst auf einem Nebenblatt aus:

| | II_f | I_f | $\Sigma(X)$ | f^I | f^{II} | $\frac{1}{12} \Sigma(X)$ | $\xi = S_x$ |
|----------|---------|----------|-------------|--------|----------|--------------------------|---------------|
| $a - 2w$ | + 55.05 | - 108.66 | + 55.68 | | | + 4.64 | + 59.69 |
| $a - w$ | + 2.07 | - 52.98 | + 53.13 | - 2.55 | - 1.03 | + 4.43 | + 6.50 |
| a | + 2.22 | + 0.15 | + 49.55 | - 3.58 | - 1.02 | + 4.13 | + 6.35 |
| $a + w$ | + 51.92 | + 49.70 | + 44.95 | - 4.60 | | + 3.75 | + 55.67 |
| | | + 94.65 | | | | | |
| | II_f | I_f | $\Sigma(Y)$ | f^I | f^{II} | $\frac{1}{12} \Sigma(Y)$ | $\eta = S_y$ |
| $a - 2w$ | - 48.23 | + 94.24 | - 47.91 | | | - 3.99 | - 52.22 |
| $a - w$ | - 1.90 | + 46.33 | - 46.36 | + 1.55 | - 0.80 | - 3.86 | - 5.76 |
| a | - 1.93 | - 0.03 | - 45.61 | + 0.75 | - 0.97 | - 3.80 | - 5.73 |
| $a + w$ | - 47.57 | - 45.64 | - 45.83 | - 0.22 | | - 3.82 | - 51.39 |
| | | - 91.47 | | | | | |
| | II_f | I_f | $\Sigma(Z)$ | f^I | f^{II} | $\frac{1}{12} \Sigma(Z)$ | $\zeta = S_z$ |
| $a - 2w$ | - 0.12 | - 0.47 | + 0.56 | | | + 0.05 | - 0.07 |
| $a - w$ | - 0.03 | + 0.09 | - 0.06 | - 0.62 | - 0.09 | 0.00 | - 0.03 |
| a | 0.00 | + 0.03 | - 0.77 | - 0.71 | - 0.09 | - 0.06 | - 0.06 |
| $a + w$ | - 0.74 | - 0.74 | - 1.57 | - 0.80 | | - 0.14 | - 0.88 |
| | | - 2.31 | | | | | |

(Fortsetzung Seite 554 unten.)

Blatt 1^a.

Komet.

| | 1896 | Aug. 12.0 | Sept. 21.0 | Okt. 31.0 | Dez. 10.0 | Dez. 50.0 |
|------|--|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| I. | M | 348° 18' 29".0 | 353° 51' 48".6 | 359° 25' 8".2 | 4° 58' 27".7 | 10° 31' 47".3 |
| | E | 338 24 43.2 | 348 30 7.9 | 358 54 17.7 | 9 20 20.5 | 19 30 52.3 |
| | $\sin E$ | 9.56 5765 _n | 9.29 9574 _n | 8.28 1298 _n | 9.21 0254 | 9.52 3806 |
| | $\cos E$ | 9.96 8415 | 9.99 1196 | 9.99 9920 | 9.99 4205 | 9.97 4307 |
| | $r_0 \sin v_0$ | 0.07 9074 | 9.81 2883 _n | 8.79 4607 _n | 9.72 3563 | 0.03 7115 |
| | $r_0 \cos v_0$ | 0.23 0519 | 0.27 5359 | 0.29 1952 | 0.28 1116 | 0.24 2337 |
| | $\cos v_0$ | 9.91 2264 | 9.97 5612 | 9.99 9780 | 9.98 3949 | 9.92 8704 |
| | v_0 | 324° 47' 36".4 | 340° 58' 39".3 | 358° 10' 39".5 | 15° 28' 53".8 | 31° 56' 24".3 |
| | r_0 | 0.31 8255 | 0.29 9747 | 0.29 2172 | 0.29 7167 | 0.31 3633 |
| | $A + \omega + v_0$ | 56° 33' 59".7 | 72° 45' 2".6 | 89° 57' 2".8 | 107° 15' 17".1 | 123° 42' 47".6 |
| | $\sin(A + \omega + v_0)$ | 9.92 1441 | 9.98 0014 | 0.00 0000 | 9.98 0001 | 9.92 0032 |
| | $\log x_0$ | 0.23 9463 | 0.27 9528 | 0.29 1939 | 0.27 6935 | 0.23 3432 |
| | x_0 | + 1.73 563 | + 1.90 339 | + 1.95 857 | + 1.89 206 | + 1.71 172 |
| | $B + \omega + v_0$ | 326° 45' 21".4 | 342° 56' 24".2 | 0° 8' 24".5 | 17° 26' 38".8 | 33° 54' 9".3 |
| | $\sin(B + \omega + v_0)$ | 9.73 8945 _n | 9.46 7418 _n | 7.38 8436 | 9.47 6796 | 9.74 6465 |
| | $\log y_0$ | 0.05 5002 _n | 9.76 4967 _n | 7.67 8410 | 9.77 1765 | 0.05 7900 |
| | y_0 | - 1.13 502 | - 0.58 206 | + 0.00 477 | + 0.59 124 | + 1.14 262 |
| | $C + \omega + v_0$ | 308° 35' 18".7 | 324° 46' 21".6 | 341° 58' 21".8 | 359° 16' 36".1 | 15° 44' 6".6 |
| | $\sin(C + \omega + v_0)$ | 9.89 3010 _n | 9.76 1042 _n | 9.49 0618 _n | 8.10 1187 _n | 9.43 3276 |
| | $\log z_0$ | 9.23 4793 _n | 9.08 4317 _n | 8.80 6318 _n | 7.42 1882 _n | 8.77 0437 |
| | z_0 | - 0.17 171 | - 0.12 143 | - 0.06 402 | - 0.00 264 | + 0.05 894 |
| III. | r_0^2 | 0.63 6510 | 0.59 9494 | 0.58 4344 | 0.59 4334 | 0.62 7266 |
| | r_0^3 | 0.95 4765 | 0.89 9241 | 0.87 6516 | 0.89 1501 | 0.94 0899 |
| | h | 8.72 0518 | 8.77 6042 | 8.79 8767 | 8.78 3782 | 8.73 4384 |
| | $\frac{1}{12}h$ | 7.64 1337 | 7.69 6861 | 7.71 9586 | 7.70 4601 | 7.65 5203 |
| | $1 + \frac{1}{12}h$ | 0.00 1898 | 0.00 2156 | 0.00 2271 | 0.00 2194 | 0.00 1959 |
| | h' | 8.71 8620 | 8.77 3886 | 8.79 6496 | 8.78 1588 | 8.73 2425 |
| | n | 0.63 8408 | 0.60 1650 | 0.58 6615 | 0.59 6528 | 0.62 9225 |
| V. | α | 9.60 105 | 9.67 788 | 9.70 532 | 9.68 041 | 9.60 421 |
| | S_x | 1.77 590 | 0.81 291 | 0.80 277 | 1.74 562 | 2.18 971 |
| | αS_x | 1.37 695 | 0.49 079 | 0.50 809 | 1.42 603 | 1.79 392 |
| | β | 9.41 659 _n | 9.16 332 _n | 7.09 180 | 9.17 524 | 9.42 868 |
| | S_y | 1.71 784 _n | 0.76 402 _n | 0.75 815 _n | 1.71 088 _n | 2.13 688 _n |
| | βS_y | 1.13 443 | 9.92 374 | 7.84 995 _n | 0.88 612 _n | 1.56 550 _n |
| | γ | 8.59 638 _n | 8.48 267 _n | 8.21 971 _n | 6.82 535 _n | 8.14 121 |
| | S_z | 8.845 _n | 8.477 _n | 8.778 _n | 9.94 45 _n | 0.51 455 |
| | γS_z | 7.441 | 6.960 | 6.998 | 6.770 | 8.65 576 |
| | αS_x | + 23.82 | + 3.10 | + 3.22 | + 26.67 | + 62.22 |
| | βS_y | + 13.62 | + 0.84 | - 0.01 | - 7.69 | - 36.78 |
| | γS_z | + 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | + 0.05 |
| | Zähler | + 37.44 | + 3.94 | + 3.21 | + 18.98 | + 25.49 |
| | $\log \dots$ | 1.5733 | 0.5955 | 0.5065 | 1.2783 | 1.4064 |
| | αx | + 0.693 | + 0.907 | + 0.994 | + 0.906 | + 0.688 |
| | βy | + 0.296 | + 0.085 | + 0.000 | + 0.088 | + 0.307 |
| | γz | + 0.007 | + 0.004 | + 0.001 | + 0.000 | + 0.000 |
| | Summe | + 0.996 | + 0.996 | + 0.995 | + 0.994 | + 0.995 |
| | $\log(\dots)$ | 9.9983 | 9.9983 | 9.9978 | 9.9974 | 9.9978 |
| | $\frac{1}{12}h(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ | 7.6396 | 7.6952 | 7.7174 | 7.7020 | 7.6530 |
| | f | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 |
| | \log Nenner | 8.1167 | 8.1723 | 8.1945 | 8.1791 | 8.1301 |
| | \log q | 9.9943 | 9.9935 | 9.9931 | 9.9934 | 9.9941 |
| | $\log g$ | 1.5790 | 0.6020 | 0.5134 | 1.2849 | 1.4123 |
| | Taf. XXVI $\log f$ | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 | 0.4771 |
| | f/q | 2.0561 | 1.0791 | 0.9905 | 1.7620 | 1.8894 |

Blatt 1b.

Komet.

| 1896 | Aug. 12.0 | Sept. 21.0 | Okt. 31.0 | Dez. 10.0 | Dez. 50.0 |
|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| fqx | 2.2956 | 1.3586 | 1.2824 | 2.0389 | 2.1228 |
| Zahl | + 197.50 | + 22.84 | + 19.16 | + 109.37 | + 132.68 |
| $-S_x$ | - 59.69 | - 6.50 | - 6.35 | - 55.67 | - 154.78 |
| $fqx - S_x$ | + 137.81 | + 16.34 | + 12.81 | + 53.70 | - 22.10 |
| $\log(fqx - S_x)$ | 2.1392 | 1.2133 | 1.1075 | 1.7300 | 1.3444 _n |
| $h'(fqx - S_x)$ | 0.8578 | 9.9872 | 9.9040 | 0.5115 | 0.0768 _n |
| Zahl | + 7.21 | + 0.97 | + 0.80 | + 3.25 | - 1.19 |
| $\Sigma(X)$ | + 55.68 | + 53.13 | + 49.55 | + 44.95 | + 39.44 |
| $d^2\xi$ | + 62.89 | + 54.10 | + 50.35 | + 48.20 | + 38.25 |
| fyy | 2.1111 _n | 0.8441 _n | 8.6689 | 1.5338 | 1.9473 |
| Zahl | - 129.15 | - 6.98 | + 0.05 | + 34.19 | + 88.58 |
| $-S_y$ | + 52.22 | + 5.76 | + 5.73 | + 51.39 | + 137.05 |
| $fyy - S_y$ | - 76.93 | - 1.22 | + 5.78 | + 85.58 | + 225.63 |
| $\log(fyy - S_y)$ | 1.8851 _n | 0.0864 _n | 0.7619 | 1.9324 | 2.3534 |
| $h'(fyy - S_y)$ | 0.6047 _n | 8.8603 _n | 9.5584 | 0.7140 | 1.0858 |
| Zahl | - 4.02 | - 0.07 | + 0.36 | + 5.18 | + 12.18 |
| $\Sigma(Y)$ | - 47.91 | - 46.36 | - 45.61 | - 45.83 | - 47.17 |
| $d^2\eta$ | - 51.93 | - 46.43 | - 45.25 | - 40.65 | - 34.99 |
| fqx | 1.2909 _n | 0.1634 _n | 9.7968 _n | 9.1839 _n | 0.6598 |
| Zahl | - 19.54 | - 1.46 | - 0.63 | - 0.15 | + 4.57 |
| $-S_z$ | + 0.07 | + 0.03 | + 0.06 | + 0.88 | + 3.27 |
| $fqx - S_z$ | - 19.47 | - 1.43 | - 0.57 | + 0.73 | + 7.84 |
| $\log(fqx - S_z)$ | 1.2894 _n | 0.1553 _n | 9.7559 _n | 9.8633 | 0.8943 |
| $h'(fqx - S_z)$ | 0.0080 _n | 8.9292 _n | 8.5524 _n | 8.6449 | 9.6267 |
| Zahl | - 1.02 | - 0.08 | - 0.04 | + 0.04 | + 0.42 |
| $\Sigma(Z)$ | + 0.56 | - 0.06 | - 0.77 | - 1.57 | - 2.49 |
| $d^2\zeta$ | - 0.46 | - 0.14 | - 0.81 | - 1.53 | - 2.07 |

Berechnung der Störungen in geoz. A.R. und Dekl.

| | | | | | |
|---|---|---|---|--|--|
| VII. Dez. η | 1.7243 _n | 0.778 _n | 0.778 _n | 1.6990 _n | 2.1335 _n |
| 9.6000 $\eta \sin \varepsilon$ | - 21 | - 2 | - 2 | - 20 | - 54 |
| 9.9625 $\eta \cos \varepsilon$ | - 49 | - 6 | - 6 | - 46 | - 125 |
| VII. Dez. ζ | > | > | > | 0.000 _n | 0.477 _n |
| $\zeta \sin \varepsilon$ | 0 | 0 | 0 | 0 | - 1 |
| $\zeta \cos \varepsilon$ | 0 | 0 | 0 | - 1 | - 3 |
| VII. Dez. $\left\{ \begin{array}{l} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} + 61 \\ - 49 \\ - 21 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} + 7 \\ - 6 \\ - 2 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} + 6 \\ - 6 \\ - 2 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} + 57 \\ - 46 \\ - 21 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} + 155 \\ - 124 \\ - 57 \end{array} \right.$ |
| Aus der Ephem. $\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \delta \\ \cos \delta \\ \log \rho \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.5662n \\ 9.9683 \\ 9.5097n \\ 9.9760 \\ 0.0363 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.6655n \\ 9.9476 \\ 9.4975n \\ 9.9774 \\ 0.0292 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.6175n \\ 9.9591 \\ 9.3568n \\ 9.9885 \\ 0.1254 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.2967n \\ 9.9913 \\ 8.941n \\ 9.9983 \\ 0.2418 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.0346 \\ 9.9974 \\ 8.880 \\ 9.9988 \\ 0.3463 \end{array} \right.$ |
| $\log \xi' \left. \begin{array}{l} \text{in Se-} \\ \text{> } \eta' \\ \text{> } \zeta' \end{array} \right\}$ Kunden | $\left\{ \begin{array}{l} 0.0998 \\ 0.0046n \\ 9.6366n \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.1595 \\ 9.0926n \\ 8.6154n \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9.0926 \\ 9.0926n \\ 8.6154n \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 0.0703 \\ 9.9772n \\ 9.6366n \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 0.5048 \\ 0.4078n \\ 0.0703n \end{array} \right.$ |
| $d\alpha''$ | - 0'.47 | - 0'.04 | - 0'.05 | - 0'.40 | - 1'.31 |
| $d\delta''$ | + 0.08 | + 0.02 | 0.00 | - 0.18 | - 0.63 |

Blatt 2.

Jupiter.

| 1896 | Aug. 12.0 | Sept. 21.0 | Okt. 31.0 | Dez. 10.0 | Dez. 50.0 | |
|------------|---|--|---|--|---|---|
| II. 1900.0 | $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \beta_1 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 140^\circ 8' 9''.7 \\ + 0 51 15.0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 143^\circ 16' 9''.5 \\ + 0 54 25.8 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 146^\circ 23' 22''.7 \\ + 0 57 26.0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 149^\circ 29' 51''.7 \\ + 1 0 15.4 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 152^\circ 35' 39''.3 \\ + 1 2 53.5 \end{array} \right.$ |
| | $\cos \beta_1$ | 9.99 995 | 9.99 995 | 9.99 994 | 9.99 993 | 9.99 993 |
| | $\cos \lambda_1$ | 9.88 512 _n | 9.90 388 _n | 9.92 055 _n | 9.93 531 _n | 9.94 830 _n |
| | r_1 | 0.72 830 | 0.72 923 | 0.73 011 | 0.73 095 | 0.73 173 |
| | $\sin \lambda_1$ | 9.80 684 | 9.77 674 | 9.74 315 | 9.70 550 | 9.66 303 |
| | $\sin \beta_1$ | 8.17 340 | 8.19 954 | 8.22 287 | 8.24 371 | 8.26 230 |
| | $\log x_1$ | 0.61 337 _n | 0.63 306 _n | 0.65 060 _n | 0.66 619 _n | 0.67 996 _n |
| | $> y_1$ | 0.53 509 | 0.50 592 | 0.47 320 | 0.43 638 | 0.39 469 |
| | $> x_1$ | 8.90 170 | 8.92 877 | 8.95 298 | 8.97 466 | 8.99 403 |
| | x_1 | - 4.1055 | - 4.2960 | - 4.4730 | - 4.6365 | - 4.7859 |
| | y_1 | + 3.4284 | + 3.2057 | + 2.9731 | + 2.7314 | + 2.4814 |
| | x_1 | + 0.0797 | + 0.0849 | + 0.0897 | + 0.0943 | + 0.0986 |
| | r_1^3 | 2.18 490 | 2.18 769 | 2.19 033 | 2.19 285 | 2.19 519 |
| | $x_0 + \xi$ | + 1.7356 | + 1.9034 | + 1.9586 | + 1.8921 | + 1.7117 |
| | $y_0 + \eta$ | - 1.1350 | - 0.5821 | + 0.0048 | + 0.5912 | + 1.1426 |
| | $x_0 + \zeta$ | - 0.1717 | - 0.1214 | - 0.0640 | - 0.0026 | + 0.0589 |
| | $x_1 - x_0 - \xi$ | - 5.8411 | - 6.1994 | - 6.4316 | - 6.5286 | - 6.4976 |
| | $y_1 - y_0 - \eta$ | + 4.5634 | + 3.7878 | + 2.9683 | + 2.1402 | + 1.3388 |
| | $x_1 - x_0 - \zeta$ | + 0.2514 | + 0.2063 | - 0.1537 | + 0.0969 | + 0.0397 |
| IV. | $q_1 \cos \vartheta \cos \theta$ | 0.76 650 _n | 0.79 235 _n | 0.80 832 _n | 0.81 482 _n | 0.81 275 _n |
| | $q_1 \cos \vartheta \sin \theta$ | 0.65 929 | 0.57 839 | 0.47 250 | 0 33 045 | 0.12 672 |
| | $\sin \theta$ | 9.78 933 | 9.71 716 | 9.62 225 | 9.49 347 | 9.30 494 |
| | $q_1 \cos \vartheta$ | 0.86 996 | 0.86 123 | 0.85 025 | 0.83 698 | 0.82 178 |
| | $q_1 \sin \vartheta$ | 9.40 037 | 9.31 450 | 9.18 667 | 8.98 632 | 8.59 879 |
| | $\cos \vartheta$ | 9.99 975 | 9.99 982 | 9.99 990 | 9.99 996 | 9.99 999 |
| | q_1 | 0.87 021 | 0.86 141 | 0.85 035 | 0.83 702 | 0.82 179 |
| | q_1^3 | 2.61 063 | 2.58 423 | 2.55 105 | 2.51 106 | 2.46 537 |
| | $(x_1 - x_0 - \xi) : q_1^3$ | 8.15 587 _n | 8.20 813 _n | 8.25 727 _n | 8.30 376 _n | 8.34 738 _n |
| | $(y_1 - y_0 - \eta) : q_1^3$ | 8.04 866 | 7.99 416 | 7.92 145 | 7.81 939 | 7.66 135 |
| | $(x_1 - x_0 - \zeta) : q_1^3$ | 6.78 974 | 6.73 027 | 6.63 562 | 6.47 526 | 6.13 342 |
| | $x_1 : r_1^3$ | 8.42 847 _n | 8.44 537 _n | 8.46 027 _n | 8.47 334 _n | 8.48 477 _n |
| | $y_1 : r_1^3$ | 8.35 019 | 8.31 823 | 8.28 287 | 8.24 353 | 8.19 950 |
| | $x_1 : r_1^3$ | 6.71 680 | 6.74 108 | 6.76 265 | 6.78 181 | 6.79 884 |
| | | + 121.24 | + 126.05 | + 130.45 | + 134.44 | + 138.03 |
| | | - 64.72 | - 72.99 | - 81.73 | - 90.96 | - 100.57 |
| | (X) | + 56.52 | + 53.06 | + 48.72 | + 43.48 | + 37.46 |
| | | - 101.25 | - 94.07 | - 86.70 | - 79.20 | - 71.57 |
| | | + 50.56 | + 44.60 | + 37.73 | + 29.82 | + 20.73 |
| | (Y) | - 50.69 | - 49.47 | - 48.97 | - 49.38 | - 50.84 |
| | | - 2.35 | - 2.49 | - 2.62 | - 2.73 | - 2.84 |
| | | + 2.78 | + 2.43 | + 1.95 | + 1.35 | + 0.61 |
| | (Z) | + 0.43 | - 0.06 | - 0.67 | - 1.38 | - 2.23 |

Blatt 3.

Saturn.

| 1896 | | Aug. 12.0 | Sept. 21.0 | Okt. 31.0 | Dez. 10.0 | Dez. 50.0 |
|------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| II. | 1900.0 $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \beta_1 \end{array} \right.$ | 228° 54' 54" | 230° 9' 14" | 231° 23' 25" | 232° 37' 30" | 233° 51' 28" |
| | | + 2 14 11 | + 2 12 43 | + 2 11 13 | + 2 9 38 | + 2 8 1 |
| | cos β_1 | 9.99 967 | 9.99 967 | 9.99 968 | 9.99 969 | 9.99 970 |
| | cos λ_1 | 9.81 768 _n | 9.80 668 _n | 9.79 519 | 9.78 321 _n | 9.77 070 _n |
| | r_1 | 0.99 614 | 0.99 650 | 0.99 686 | 0.99 721 | 0.99 754 |
| | sin λ_1 | 9.87 722 _n | 9.88 523 _n | 9.89 288 _n | 9.90 019 _n | 9.90 717 _n |
| | sin β_1 | 8.59 130 | 8.58 657 | 8.58 159 | 8.57 636 | 8.57 088 |
| | log x_1 | 0.81 349 _n | 0.80 285 _n | 0.79 173 _n | 0.78 011 _n | 0.76 794 _n |
| | log y_1 | 0.87 303 _n | 0.88 140 _n | 0.88 942 _n | 0.89 709 _n | 0.90 441 _n |
| | log x_1 | 9.58 744 | 0.58 307 | 9.57 845 | 9.57 357 | 9.56 842 |
| | x_1 | - 6.5087 | - 6.3511 | - 6.1906 | - 6.0271 | - 5.8606 |
| | y_1 | - 7.4650 | - 7.6103 | - 7.7522 | - 7.8902 | - 8.0243 |
| | x_1^3 | + 0.3868 | + 0.3829 | + 0.3788 | + 0.3746 | + 0.3702 |
| | r_1^3 | 2.98 842 | 2.98 950 | 2.99 058 | 2.99 163 | 2.99 262 |
| | $x_0 + \xi$ | + 1.7356 | + 1.9034 | + 1.9586 | + 1.8921 | + 1.7117 |
| | $y_0 + \eta$ | - 1.1350 | - 0.5821 | + 0.0048 | + 0.5912 | + 1.1426 |
| | $x_0 + \zeta$ | - 0.1717 | - 0.1214 | - 0.0640 | - 0.0026 | + 0.0589 |
| | $x_1 - x_0 - \xi$ | - 8.2443 | - 8.2545 | - 8.1492 | - 7.9192 | - 7.5723 |
| | $y_1 - y_0 - \eta$ | - 6.3300 | - 7.0282 | - 7.7570 | - 8.4814 | - 9.1669 |
| | $x_1 - x_0 - \zeta$ | + 0.5585 | + 0.5043 | + 0.4428 | + 0.3772 | + 0.3113 |
| III. | $\varrho_1 \cos \vartheta \cos \theta$ | 0.91 615 _n | 0.91 669 _n | 0.91 111 _n | 0.89 868 _n | 0.87 923 _n |
| | $\varrho_1 \cos \vartheta \sin \theta$ | 0.80 140 _n | 0.84 684 _n | 0.88 969 _n | 0.92 845 _n | 0.96 223 _n |
| | sin θ | 9.78 461 _n | 9.81 177 _n | 9.83 851 _n | 9.86 386 _n | 9.88 704 _n |
| | $\varrho_1 \cos \vartheta$ | 1.01 679 | 1.03 507 | 1.05 118 | 1.06 459 | 1.07 519 |
| | $\varrho_1 \sin \vartheta$ | 9.74 702 | 9.70 269 | 9.64 621 | 9.57 657 | 9.49 318 |
| | cos ϑ | 9.99 937 | 9.99 953 | 9.99 967 | 9.99 977 | 9.99 985 |
| | ϱ_1 | 1.01 742 | 1.03 554 | 1.05 151 | 1.06 482 | 1.07 534 |
| | ϱ_1^3 | 3.05 226 | 3.10 662 | 3.15 453 | 3.19 446 | 3.22 602 |
| | $(x_1 - x_0 - \xi) : \varrho_1^3$ | 7.86 389 _n | 7.81 007 _n | 7.75 657 _n | 7.70 422 _n | 7.65 321 _n |
| | $(y_1 - y_0 - \eta) : \varrho_1^3$ | 7.74 914 _n | 7.74 022 _n | 7.73 516 _n | 7.73 399 _n | 7.73 621 _n |
| | $(x_1 - x_0 - \zeta) : \varrho_1^3$ | 6.69 476 | 6.59 607 | 6.49 168 | 6.38 211 | 6.26 716 |
| | $x_1 : r_1^3$ | 7.82 507 _n | 7.81 335 _n | 7.80 115 _n | 7.78 848 _n | 7.77 532 _n |
| | $y_1 : r_1^3$ | 7.88 461 _n | 7.89 190 _n | 7.89 884 _n | 7.90 546 _n | 7.91 179 _n |
| | $x_1 : r_1^3$ | 6.59 902 | 6.59 357 | 6.58 787 | 6.58 194 | 6.57 580 |
| | | + 9.04 | + 8.80 | + 8.55 | + 8.31 | + 8.06 |
| | | - 9.88 | - 8.73 | - 7.72 | - 6.84 | - 6.08 |
| | (X) | - 0.84 | + 0.07 | + 0.83 | + 1.47 | + 1.98 |
| | | + 10.37 | + 10.54 | + 10.71 | + 10.88 | + 11.04 |
| | | - 7.59 | - 7.43 | - 7.35 | - 7.33 | - 7.37 |
| | (Y) | + 2.78 | + 3.11 | + 3.36 | + 3.55 | + 3.67 |
| | | - 0.54 | - 0.53 | - 0.52 | - 0.52 | - 0.51 |
| | | + 0.67 | + 0.53 | + 0.42 | + 0.33 | + 0.25 |
| | (Z) | + 0.13 | 0.00 | - 0.10 | - 0.19 | - 0.26 |

Blatt 4.

X

| | f^{II} | f^I | $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ | $I f$ | $II f$ | $\frac{1}{12} \Sigma(X)$ | $-\frac{1}{240} f^{II}$ | S_x | ξ (VII. Dez.) |
|-----------|----------|--------|------------------------|----------|----------|--------------------------|-------------------------|----------|-------------------|
| Aug. 12 | | | - 62.89 | - 116.72 | + 56 01 | + 4.64 | | + 59.69 | + 61 |
| Sept. 21 | + 5.04 | - 8.79 | + 54.10 | - 53.93 | + 2.08 | + 4.43 | - 0.02 | + 6.50 | + 7 |
| a Okt. 31 | + 1.60 | - 3.75 | + 50.35 | + 0.17 | + 2.25 | + 4.13 | - 0.01 | + 6.35 | + 6 |
| Dez. 10 | - 7 80 | - 2.15 | + 48.20 | + 50.52 | + 52.77 | + 3.75 | | + 55.67 | + 57 |
| Dez. 50 | | - 9.95 | + 38.25 | + 98.72 | + 151.49 | + 3.29 | | + 154.78 | + 155 |
| | | | | + 136.97 | + 288.46 | | | | |

Y

| | f^{II} | f^I | $\frac{d^2 \eta}{dt^2}$ | $I f$ | $II f$ | $\frac{1}{12} \Sigma(Y)$ | $-\frac{1}{240} f^{II}$ | S_y | η (VII. Dez.) |
|-----------|----------|--------|-------------------------|----------|----------|--------------------------|-------------------------|----------|--------------------|
| Aug. 12 | | | - 51.93 | + 98.33 | - 48.28 | - 3.99 | | - 52.22 | - 53 |
| Sept. 21 | - 4.32 | + 5.50 | - 46.43 | + 46.40 | - 1.88 | - 3.86 | | - 5.76 | - 6 |
| a Okt. 31 | + 3.42 | + 1.18 | - 45.25 | - 0.03 | - 1.91 | - 3.80 | | - 5.73 | - 6 |
| Dez. 10 | + 1.06 | + 4.60 | - 40.65 | - 45.28 | - 47.19 | - 3.82 | | - 51.39 | - 50 |
| Dez. 50 | | + 5.66 | - 34.99 | - 85.93 | - 133.12 | - 3.93 | | - 137.05 | - 136 |
| | | | | - 120.92 | - 254.04 | | | | |

Z

| | f^{II} | f^I | $\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ | $I f$ | $II f$ | $\frac{1}{12} \Sigma(Z)$ | $-\frac{1}{240} f^{II}$ | S_z | ζ (VII. Dez.) |
|-----------|----------|--------|--------------------------|--------|--------|--------------------------|-------------------------|--------|---------------------|
| Aug. 12 | | | - 0.46 | + 0.63 | - 0.20 | + 0.05 | | - 0.07 | 0 |
| Sept. 21 | - 0.99 | + 0.32 | - 0.14 | + 0.17 | - 0.03 | 0.00 | | - 0.03 | 0 |
| a Okt. 31 | - 0.05 | - 0.67 | - 0.81 | + 0.03 | + 0.03 | - 0.06 | | - 0.06 | 0 |
| Dez. 10 | + 0.18 | - 0.72 | - 1.53 | - 0.78 | - 0.75 | - 0.14 | | - 0.88 | - 1 |
| Dez. 50 | | - 0.54 | - 2.07 | - 2.31 | - 3.06 | - 0.21 | | - 3.27 | - 3 |
| | | | | - 4.38 | - 7.44 | | | | |

und setzt dann mit den erhaltenen, genäherten Werten ξ, η, ζ die Rechnung nach V. auf dem Blatt 1 fort. Sind die strengen Werte von $\frac{d^2 \xi}{dt^2}, \dots$ erlangt, so wird die endgültige Integration auf Blatt 4 bewerkstelligt; auf diesem führt man zweckmäßig auch die Berechnung von S_x, S_y, S_z aus.

Um den Raum nicht über Gebühr in Anspruch zu nehmen, ist hier die Rechnung nur für die fünf ersten Intervalle durchgeführt, die Fortsetzung nach vor- oder rückwärts vollzieht sich ganz schematisch ohne jede Schwierigkeit.

Abschnitt XXXIII.

Spezielle Störungen bei Kometenbahnen.

175. Kometenstörungen in den Polarkoordinaten. Während bei den kleinen Planeten die Erfahrung immer mehr zu dem Ergebnis führt, daß die Variation der Elemente zur Berechnung der speziellen Störungen die größten Vorteile bietet, und die anderen Methoden kaum mehr zur Anwendung gelangen, läßt sich ein ähnlich allgemeiner Satz für die Kometen infolge der verschiedenen dabei auftretenden Verhältnisse nicht aufstellen. Bei *kurzperiodischen* Kometen (Jupitergruppe), wo die wahre Anomalie noch mittels der exzentrischen gerechnet wird, liegen die Bedingungen ganz ähnlich wie bei den kleinen Planeten und es wird daher auch hier die Variation der Elemente den Vorrang behaupten. Bei den Kometen von längerer Periode kann man durch Einführung anderer Elemente (siehe Nr. 159) zwar die Methode noch anwenden, aber sie wird um so lästiger, je mehr die Bahn sich der Parabel nähert; kann man direkt eine Parabel zugrunde legen und verzichtet man auf die Störungen höherer Ordnung, so bleibt die Rechnung zwar noch einfach genug; ist dies aber nicht der Fall, so ist entschieden zu empfehlen, die Störungsrechnung in den Koordinaten vorzunehmen, und zwar in den rechtwinkligen, wenn es sich nur um Störungen während *einer* Erscheinung handelt, und in den Polarkoordinaten, wenn es gilt, mehrere Erscheinungen miteinander zu verbinden. Die erstere Methode bedarf hierbei keiner Modifikation; ihr Vorzug, Kürze und Übersichtlichkeit der Rechnung kommt voll zur Geltung, ihr Nachteil, starkes Anwachsen der Störungen, kann außer in Ausnahmefällen nicht auftreten. Bei Anwendung der letzteren Methode dagegen auf langperiodische Kometen, muß man an den Gleichungen eine kleine Änderung vornehmen, die nun besprochen werden soll. Man bedient sich nämlich bei solchen Kometen der mittleren Anomalie *nicht* und es muß daher die Differenzialgleichung für die Störung in dieser durch eine andere ersetzt werden. Die drei übrigen Gleichungen jedoch für v , $\Delta\omega$ und z bleiben ungeändert fortbestehen (Abschnitt XXXI).

Bei langperiodischen Kometen wird die wahre Anomalie aus der seit dem Periheldurchgang verflissenen *Zeit* berechnet; es liegt daher nahe, die Differenzialgleichung für den Betrag der *Zeit* aufzustellen, um welchen zu einem bestimmten Zeitmoment die genannte *Zeit* korrigiert werden muß, damit mit derselben statt der ungestörten wahren Anomalie v_0 die gestörte V (berechnet mit den konstanten Elementen \mathfrak{S}_0 und q_0) enthalten werde. Nennt man diese Korrektion gewissermaßen die »Störung der *Zeit*« und bezeichnet sie mit Δt , so hat man offenbar:

$$\Delta M = \mu_0 \Delta t$$

und daher statt der Gleichung

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -\mu_0 \sigma v$$

die andere:

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\sigma\nu, \quad \left(\sigma = \frac{1}{1+\nu} \left(1 + \frac{1}{1+\nu} \right) \right),$$

die auch unmittelbar für die Parabel verwendbar ist.

Die aus der Integration dieser Gleichung hervorgehenden Δt geben für jeden Zeitmoment t den zugehörigen $t + \Delta t$, mittels dessen unter Anwendung von q_0 und $\bar{\sigma}_0$ sich nach den Methoden Nr. 64 V und $[r]$ ergeben, worauf wie früher (Seite 526):

$$\begin{aligned} (r) &= [r](1 + \nu), & l &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\ r^2 &= (r)^2 + x^2, & \sin b &= \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

Für die Parabel hat man natürlich einfach

$$\begin{aligned} \frac{V\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} V + \frac{V\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} V^3 &= \frac{t + \Delta t - \bar{\sigma}_0}{q_0^{\frac{3}{2}}} \\ [r] &= \frac{q_0}{\cos \frac{1}{2} V^2} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Bei langperiodischen Kometen ist es von Interesse, die »Störung der Durchgangszeit durchs Perihel« für den Moment des neuen Periheldurchganges kennen zu lernen. Da

$$t + \Delta t - \bar{\sigma}_0 = t - (\bar{\sigma}_0 - \Delta t)$$

in jedem Augenblick t die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit darstellt, so ist $-\Delta t$ die Störung der Durchgangszeit durchs Perihel für jeden Moment t . Wird $(\Delta t)'$ durch Interpolation für jenen Zeitmoment t' bestimmt, für den $V = 360^\circ$ wird, so stellt $-(\Delta t)'$ die Störung der Durchgangszeit durchs Perihel für den ganzen Umlauf dar. Der neue Periheldurchgang findet zur Zeit t' statt und liegt um $-(\Delta t)'$ später als jener, der statthaben würde, wenn keine Störungen vorhanden wären; die gestörte Umlaufszeit wird $t' - \bar{\sigma}_0$, während die ungestörte sich zu $t' + (\Delta t)' - \bar{\sigma}_0$ stellen würde.

Ist ein langperiodischer Komet nur in *einer* Erscheinung beobachtet, so ist die große Halbachse seiner Bahn beträchtlich unsicher, sonach auch seine mittlere tägliche Bewegung und die Umlaufszeit. Die Zeit seiner Wiederkehr zur Sonnennähe kann also nur roh vorausberechnet werden, zumal da auch die Störungsbeträge erheblichen Fehlern unterworfen sein können. Um seine Aufsuchung durch Ephemeriden zu erleichtern bleibt dann nichts übrig, als die Durchgangszeit durchs Perihel zu variieren und für jede Annahme eine geozentrische Ephemeride zu rechnen. Innerhalb der Grenzen aller Ephemeriden muß dann gesucht werden und die erste Beobachtung entscheidet, welche Annahme für $\bar{\sigma}_0$ die richtigere war.

176. Störungen der Kometen in unmittelbarer Nähe der großen Planeten.

Die Berechnung der speziellen Störungen nach jeder der im vorigen auseinandergesetzten Methoden führt zu bedeutenden Schwierigkeiten, wenn der gestörte Körper in die unmittelbare Nähe des störenden Körpers gelangt. Dieser Fall tritt besonders ein bei Kometen, deren Aphel in der Nähe der Jupiterbahn liegt. Es ist dann ein Verfahren einzuschlagen, das von Laplace (Méc. céle. Livre IX, Chap. II) entwickelt

wurde, und darin besteht, daß Jupiter als Hauptkörper und die Sonne als störender Körper eingeführt wird.

In bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sonne liegt, seien

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen,

x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Jupiter;

ferner seien in Bezug auf ein zum ersten paralleles System, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Jupiter liegt,

ξ, η, ζ die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen.

Sind endlich r und r_1 die Entfernungen des Kometen und des Jupiter von der Sonne, ρ die Entfernung Jupiter—Komet, 1 die Masse der Sonne, m_1 die Masse des Jupiter, so hat man für die Bewegung der beiden Körper in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne die bekannten Gleichungen, bei denen angenommen ist, daß außer Sonne, Jupiter und Komet kein weiterer Körper vorhanden ist und daß die Masse des Kometen Null ist:

für den Kometen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\rho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) \end{aligned} \quad 1)$$

für Jupiter:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= 0. \end{aligned} \quad 2)$$

Setzt man in 1)

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

und subtrahiert davon die Gl. 2), so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{\rho^3} &= k^2 \left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{\rho^3} &= k^2 \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{\rho^3} &= k^2 \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right). \end{aligned} \quad 3)$$

Die Gleichungen 1) geben die *heliozentrische* Bewegung des Kometen unter dem Einfluß der Hauptkraft Attraktion der Sonne: R , und der störenden Kraft des Jupiter: F ; die Ausdrücke dieser Kräfte sind

$$R = k^2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6}} = \frac{k^2}{r^2};$$

$$F = k^2 m_1 \sqrt{\left(\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right)^2 + \left(\frac{z_1 - z}{\rho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right)^2}.$$

Die Gleichungen 3) stellen ebenso die *jovixentrische* Bewegung des Kometen dar unter dem Einfluß der Hauptkraft Attraktion des Jupiter R_1 und der störenden Kraft der Sonne F_1 , und die Ausdrücke für diese Kräfte werden:

$$R_1 = \frac{k^2 m_1}{\varrho^2}, \quad F_1 = k^2 \sqrt{\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3}\right)^2}.$$

Es fragt sich nun in erster Linie, *von welcher Lage des Kometen an ist es zweckmäßig, den Jupiter als Hauptkörper, die Sonne als störenden Körper zu betrachten.*

Hierfür maßgebend ist das Verhältnis der störenden Kraft zur Hauptkraft $\frac{F}{R}$ und es wird die Wahl des Hauptkörpers so zu treffen sein, daß dieses Verhältnis kleiner wird, als wenn man den andern Körper als Hauptkörper gewählt hätte. Ist

$$\frac{F}{R} < \frac{F_1}{R_1} \quad \text{so wird man die Sonne}$$

und ist

$$\frac{F}{R} > \frac{F_1}{R_1}, \quad \text{so wird man den Jupiter}$$

als Hauptkörper wählen. Die Grenze wird also gegeben sein durch

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}; \quad 4)$$

wird die durch diese Gleichung definierte Fläche vom Kometen überschritten, so ist es zweckmäßiger auf den Jupiter als Hauptkörper überzugehen.

Die Diskussion dieser Fläche gehört nicht hierher; es sei betreff derselben auf Tisserand, *Mécanique céleste* Tome IV. p. 198 verwiesen und nur als Resultat angeführt, daß ihre Gleichung in Polarkoordinaten ϱ und θ in Bezug auf Jupiter als Ausgangspunkt, sehr nahe durch

$$\varrho = r_1 \left(\frac{m_1^2}{\sqrt{1 + 3 \cos \theta^2}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

wiedergegeben wird. Es ist dies eine Rotationsfläche, deren Polarhalbachse ($\theta = 0^\circ$) in r_1 liegt und den Wert

$$\varrho_p = r_1 \sqrt[5]{\frac{m_1^2}{2}}$$

hat und deren Äquatorealhalbachse ($\theta = 90^\circ$) senkrecht dazu liegt und den Wert

$$\varrho_a = r_1 \sqrt[5]{m_1^2}$$

annimmt. Da das Verhältnis der beiden Achsen gleich $\sqrt[5]{2} = 1.15 \dots$ ist, so ist die Fläche nahe eine Kugel vom Radius $r_1 \sqrt[5]{m_1^2}$. Laplace nennt sie die Wirkungssphäre des Planeten (*sphère d'activité*). Nach Tisserand hat sie für die verschiedenen Planeten folgende Radien in astronomischen Einheiten:

| | | | |
|--------|-------|---------|--------|
| Merkur | 0.001 | Jupiter | 0.322 |
| Venus | 0.004 | Saturn | 0.363 |
| Erde | 0.006 | Uranus | 0.339 |
| Mars | 0.004 | Neptun | 0.576. |

Solange der Komet außerhalb dieser Sphären sich befindet, behält man die Sonne als Hauptkörper bei; dringt er aber in sie ein, so ist es vorteilhafter, den Planeten als Hauptkörper und die Sonne als störenden einzuführen. Da die Sphären klein sind, verweilt der Komet in der Regel nur kurze Zeit innerhalb derselben und es ist oft gestattet, die Störungen durch die Sonne während dieser kurzen Zeit ganz zu vernachlässigen. Ist dies nicht der Fall, so werden die Störungen nach einer der besprochenen Methoden ermittelt, worüber unten noch einiges zu sagen ist. Beim Austritt aus der Sphäre wird auf die Sonne als Hauptkörper zurückgegangen und werden die Störungen durch den Planeten berechnet, wie vorher.

Um den Kometen während seines Aufenthaltes in der Wirkungssphäre verfolgen zu können, stellt sich die Aufgabe: *seine Bahn in bezug auf den neuen Hauptkörper zu ermitteln.*

Hiezu berechnet man für einen runden Zeitpunkt, welcher demjenigen nahe ist, für den $\varrho = r_1 \sqrt{m_1}^2$ wird (also für Jupiter etwa $\frac{1}{3}$ der astronomischen Einheit) die heliozentrischen Koordinaten x, y, z und ihre Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, erstere nach den bekannten Ausdrücken, letztere am einfachsten nach den Formeln für die mechanische Differenziation, indem man als Einheit der Zeit den Tag nimmt. Für dieselbe Zeit berechnet man aus den Angaben der astronomischen Jahrbücher die heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten $x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ des Jupiter. Dann hat man offenbar in den Größen

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_1, & \eta &= y - y_1, & \zeta &= z - z_1 \\ \xi' &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, & \eta' &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}, & \zeta' &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \end{aligned}$$

die relativen Koordinaten und ihre Geschwindigkeiten des Kometen in bezug auf den Jupiter als Zentralkörper. Aus diesen sechs Größen aber lassen sich, wie wir in Nr. 110 gezeigt haben, die Elemente des Kegelschnittes berechnen, den der Komet um den Jupiter beschreibt. Die Gleichungen für seine ungestörte Bewegung werden nach 3)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{\varrho^3} &= 0, \end{aligned}$$

es ist also in den dortigen Formeln allenthalben $k^2 m_1$ statt k^2 , d. h. die anziehende Kraft des Jupiter in der Distanz ϱ statt der der Sonne zu setzen. Alle Einheiten bleiben dieselben, insbesondere ist m_1 in Einheiten der Sonnenmasse auszudrücken. Wir stellen die Formeln aus Nr. 110 zusammen mit dem Bemerkten, daß wir hier natürlich die Ekliptik als Grundebene beibehalten und daß mit Ω, i, \dots die jovienzentrischen Elemente bezeichnet sind.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sqrt{m_1} k \sqrt{p} \sin i \sin \Omega = \eta \zeta' - \zeta \eta' \\ & \sqrt{m_1} k \sqrt{p} \sin i \cos \Omega = \xi \zeta' - \zeta \xi' \\ & \sqrt{m_1} k \sqrt{p} \cos i = \xi \eta' - \eta \xi'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{m_1} k q} (\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta') \\ & e \cos v = \frac{p}{q} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad q \sin u = -\xi \sin \Omega \sec i + \eta \cos \Omega \sec i = \frac{\zeta}{\sin i}$$

$$\begin{aligned} \text{IV.} \quad & q \cos u = \xi \cos \Omega + \eta \sin \Omega \\ & a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad \omega = u - v. \end{aligned}$$

V. Ellipse.

Hyperbel.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

$$M = E - e' \sin E,$$

$$\mu = \frac{k \operatorname{Mod.} \sqrt{m_1}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mu = \frac{k'' \sqrt{m_1}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mu (t - T) = \operatorname{Mod.} e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} F + 45^\circ \right).$$

Parabel.

$$q = \frac{1}{2} p$$

$$t - T = q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_1} k} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \right).$$

Betreff einer Auswahl von Kontrollen sei auf Nr. 110 verwiesen.

Mit den erlangten Elementen kann der Weg des Kometen durch die Wirkungssphäre verfolgt werden; ist der Aufenthalt in ihr ein längerer, so wird man die Sonnenstörungen nicht übergehen dürfen. Deren Berechnung erfolgt ganz nach den gewöhnlichen Methoden; man wird nur zu beachten haben, daß als störende Masse die Sonnenmasse = 1 einzuführen ist und daß die Koordinaten der Sonne in bezug auf Jupiter gleich $180^\circ + \lambda$ und $-\beta$ werden, wenn λ und β die Koordinaten von Jupiter in bezug auf die Sonne sind. Am meisten wird sich die Anwendung der Methode der Variation der Elemente empfehlen, da bei den anderen Methoden die Berechnung der indirekten Glieder wegen der Kleinheit von q Schwierigkeiten verursacht. Die jovizentrischen Bahnen sind meist Hyperbeln; wir haben daher in Nr. 163 die Formeln für die Variation hyperbolischer Elemente entwickelt und haben betreffs ihrer Anwendung auf den vorliegenden Fall nur auf die oben gemachten Bemerkungen über die Berechnung der störenden Komponenten hinzuweisen.

Beim Austritt aus der Wirkungssphäre geht man wieder auf die Sonne als Hauptkörper zurück, was mit entsprechender Vertauschung der Größen nach denselben Formeln bewerkstelligt wird, wie beim Eintritt.

Beim Durchgang eines Kometen durch die Wirkungssphäre des Jupiter können seine Bahnelemente eine vollständige Umänderung erfahren, so zwar, daß sie jenen vor der Annäherung nicht einmal mehr ähnlich sind. Es wäre unter diesen Umständen sehr schwierig, die Identität eines Kometen in zwei Erscheinungen festzustellen, zwischen denen der Komet eine Jupiternähe passiert hat, wenn man nicht ein Kriterium hätte, mittels dessen erkannt werden kann, ob zwei Elementensysteme einem und demselben Körper angehören können. Ein solches Kriterium hat *Tisserand* aus einem Integral von *Jacobi* abgeleitet*). Es kann wie folgt mit elementaren Hilfsmitteln abgeleitet werden**). Berücksichtigt man nur die Störungen durch Jupiter (Masse m_1 , Koordinaten x_1, y_1, z_1), so werden die Bewegungsgleichungen des Kometen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \frac{x}{r^3} + k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\rho^3} - k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}$$

.

Nach Multiplikation mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und Addition folgt daraus:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) \\ &+ \frac{k^2 m_1}{\rho^3} \left((x_1 - x) \frac{dx}{dt} + (y_1 - y) \frac{dy}{dt} + (z_1 - z) \frac{dz}{dt} \right) \\ &- \frac{k^2 m_1}{r_1^3} \left(x_1 \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy}{dt} + z_1 \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

Nennt man V die Geschwindigkeit des Kometen, so ist

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

und daher

$$V \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2};$$

ferner ist

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt},$$

und

$$(x_1 - x) \frac{dx}{dt} + (y_1 - y) \frac{dy}{dt} + (z_1 - z) \frac{dz}{dt} = -\rho \frac{d\rho}{dt} + (x_1 - x) \frac{dx_1}{dt} + (y_1 - y) \frac{dy_1}{dt} + (z_1 - z) \frac{dz_1}{dt};$$

also gibt obige Gleichung:

$$V \frac{dV}{dt} = -\frac{k^2}{r^2} \frac{dr}{dt} - \frac{k^2 m_1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{k^2 m_1}{\rho^3} \left((x_1 - x) \frac{dx_1}{dt} + \dots \right) - \frac{k^2 m_1}{r_1^3} \left(x_1 \frac{dx}{dt} + \dots \right),$$

und wenn integriert wird:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\rho} + 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{\rho^3} \left((x_1 - x) \frac{dx_1}{dt} + \dots \right) - 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{r_1^3} \left(x_1 \frac{dx}{dt} + \dots \right). \quad (a)$$

*) *Méc. céleste*, Tome IV, p. 203.

**) *Seeliger*, *Astr. Nachr.* Band 124, p. 209.

Nimmt man nun an, daß Jupiter sich in einer Kreisbahn um die Sonne bewege und daß die Ebene derselben als xy -Ebene gewählt werde, so wird

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 \cos \mu_1 t, & \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 \mu_1 \\y_1 &= a_1 \sin \mu_1 t, & \frac{dy_1}{dt} &= +x_1 \mu_1 \\x_1 &= 0, & \frac{dx_1}{dt} &= 0\end{aligned}$$

und daher das erste Integral in (a):

$$2k^2 m_1 \mu_1 \int \frac{dt}{\varrho^3} (xy_1 - yx_1).$$

Weiter folgt aus den beiden ersten Grundgleichungen:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 m_1 (xy_1 - yx_1) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

und nach Integration:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = k^2 m_1 \int \frac{dt}{\varrho^3} (xy_1 - yx_1) - k^2 m_1 \int \frac{dt}{r_1^3} (xy_1 - yx_1);$$

also wird man (a) folgendermaßen schreiben können:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) - \frac{2k^2 m_1}{a_1^3} \int \left(x \frac{dx_1}{dt} + y \frac{dy_1}{dt} + x_1 \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy}{dt} \right) dt$$

oder wenn $x \frac{dx_1}{dt} + y \frac{dy_1}{dt} + x_1 \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy}{dt} = -\varrho \frac{d\varrho}{dt} + r \frac{dr}{dt}$ beachtet und das Integral ausgeführt wird:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + \frac{k^2 m_1}{a_1^3} (\varrho^2 - r^2).$$

Nennt man a und p große Halbachse und Parameter der Kometenbahn, i ihre Neigung gegen die Jupiterbahnebene, so wird

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = kV\bar{p} \cos i$$

und

$$V^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

also folgt aus obiger Gleichung endlich:

$$2C + \frac{k^2}{a} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 kV\bar{p} \cos i + \frac{k^2 m_1}{a_1^3} (\varrho^2 - r^2) = 0. \quad (b)$$

Legt man nun um den Mittelpunkt des Jupiter eine Kugel mit dem Radius ϱ und stellt für die beiden Punkte, in denen der Komet in diese Kugel ein- und austritt, die Gleichung (b) auf, indem man die Elemente beim Eintritt mit dem Index e , beim Austritt mit dem Index a bezeichnet, so kommt:

$$\begin{aligned}2C + \frac{k^2}{a_e} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 kV\bar{p}_e \cos i_e + \frac{k^2 m_1}{a_1^3} (\varrho^2 - r_e^2) &= 0 \\2C + \frac{k^2}{a_a} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 kV\bar{p}_a \cos i_a + \frac{k^2 m_1}{a_1^3} (\varrho^2 - r_a^2) &= 0\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{k^2}{a_e} + 2\mu_1 k \sqrt{p_e} \cos i_e = \frac{k^2}{a_a} + 2\mu_1 k \sqrt{p_a} \cos i_a + \frac{k^2 m_1}{a_1^3} (r_e^2 - r_a^2).$$

Das letzte Glied rechts wird stets sehr klein sein; läßt man es weg und setzt außerdem

$$\mu_1 = \frac{k}{a_1^{\frac{3}{2}}},$$

so erscheint das gesuchte Kriterium:

$$\frac{1}{a_e} + \frac{2\sqrt{p_e}}{a_1^{\frac{3}{2}}} \cos i_e = \frac{1}{a_a} + \frac{2\sqrt{p_a}}{a_1^{\frac{3}{2}}} \cos i_a.$$

Vergleicht man die Elemente a, p, i zweier Kometenerscheinungen durch diese Formel, so kann man sofort entscheiden, ob dieselben einem und demselben Körper, der in der Zwischenzeit die Jupitersnähe passiert hat, angehören oder nicht. *Callandreau* nennt den Ausdruck

$$\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{p}}{a_1^{\frac{3}{2}}} \cos i$$

die *Invariante* des Kometen.

Interessante Beispiele für die in dieser Nummer gegebenen Entwicklungen sind die Bearbeitungen des Lexellschen Kometen von *Leverrier* (Annales de l'Obs. de Paris T. I), des Wolfschen Kometen von *Lehmann-Filhés* (Astr. Nachr. Band 124) und des Brooksschen Kometen von *C. L. Poor* (Contr. from the Observatory of Columbia University New York No. 22, Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. XV).

177. Kometenstörungen bei sehr weiter Entfernung des störenden Körpers.

Wenn ein Komet sich weit von den störenden Planeten entfernt, so werden die Störungen naturgemäß sehr klein und wenn der Planet sich rasch um die Sonne bewegt, wie das bei den inneren der Fall ist, so wechseln die Störungen zudem periodisch das Zeichen, so daß das Schlußresultat einer sehr langen Rechnung nahezu Null ist. Diese also ziemlich vergeblich zu führende Rechnung ist noch um so lästiger, als bei der raschen Bewegung des störenden Körpers das Intervall *klein* gewählt werden muß, wenn die Integration nicht alle Sicherheit verlieren soll. Diesem Übelstand begegnet man nach einer Bemerkung von *Bessel* am geschicktesten dadurch, daß man das ursprüngliche Elementensystem, das sich auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht, auf den Schwerpunkt des Systems: Sonne und störender Planet, überträgt. Der Grund hierfür liegt in folgendem. Bezogen auf ein System mit beliebigem *festem* Anfangspunkt, seien X, Y, Z die Koordinaten der Sonne, X', Y', Z' die des Planeten, dann ist vermöge der Anziehung der Sonne auf den Planeten

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X'}{dt^2} + k^2 \frac{X' - X}{\rho^3} &= 0 \\ \frac{d^2 Y'}{dt^2} + k^2 \frac{Y' - Y}{\rho^3} &= 0 \\ \frac{d^2 Z'}{dt^2} + k^2 \frac{Z' - Z}{\rho^3} &= 0 \end{aligned}$$

und vermöge der Anziehung des Planeten auf die Sonne, wenn die Masse des Planeten m' ist:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} + k^2 m' \frac{X - X'}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + k^2 m' \frac{Y - Y'}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + k^2 m' \frac{Z - Z'}{\varrho^3} &= 0,\end{aligned}$$

wo

$$\varrho^2 = (X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2.$$

Für die *relative* Bewegung des Planeten zur Sonne ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2(X' - X)}{dt^2} + k^2(1 + m') \frac{X' - X}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2(Y' - Y)}{dt^2} + k^2(1 + m') \frac{Y' - Y}{\varrho^3} &= 0 \\ \frac{d^2(Z' - Z)}{dt^2} + k^2(1 + m') \frac{Z' - Z}{\varrho^3} &= 0.\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt des Systems Sonne und Planet liegt auf der Verbindungslinie beider und hat die Koordinaten X_0, Y_0, Z_0 ; letztere sind bestimmt durch:

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{X}{1 + m'} + \frac{m'}{1 + m'} X' \\ Y_0 &= \frac{Y}{1 + m'} + \frac{m'}{1 + m'} Y' \\ Z_0 &= \frac{Z}{1 + m'} + \frac{m'}{1 + m'} Z'.\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar mit Bezug auf die vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X_0}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 Y_0}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 Z_0}{dt^2} &= 0\end{aligned}$$

d. h. auf den Schwerpunkt wirkt eine Kraft, welche durch relative Anziehung zweier Körper hervorgebracht werden könnte, *nicht* ein. Er bleibt also entweder in Ruhe oder er bewegt sich auf einer geraden Linie gleichförmig, was zur Folge hat, daß er in bezug auf die *relative* Bewegung der zwei Körper als ruhend betrachtet werden kann. — Es läßt sich nun zeigen, daß die periodischen Störungen, welche bei einer auf den Sonnenmittelpunkt bezogenen Bahn starke, abwechselnd positive und negative Schwankungen haben, bei einer auf den Schwerpunkt bezogenen Bahn nur einen sehr geringen Gesamtbetrag geben, so gering, daß man in vielen Fällen ihn ganz vernachlässigen kann.

In der Tat, es seien:

| | |
|--------------------------|---|
| x, y, z, r | die Koordinaten des Kometen bezogen auf den Sonnenmittelpunkt |
| x', y', z', r' | » » Planeten » » » » |
| x_0, y_0, z_0, r_0 | » » Kometen » » » Schwerpunkt |
| x'_0, y'_0, z'_0, r'_0 | » » Planeten » » » » |

Da nach der Definition des Schwerpunktes:

$$x' - x_0' = m' x_0', \quad y' - y_0' = m' y_0', \quad z' - z_0' = m' z_0'$$

so folgt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + m' x_0', & x' &= x_0' (1 + m') \\ y &= y_0 + m' y_0', & y' &= y_0' (1 + m') \\ z &= z_0 + m' z_0', & z' &= z_0' (1 + m') \\ r &= r_0 (1 + m'). \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichungen für die gestörte Bewegung des Kometen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{x' - x}{Q^3} - \frac{x}{r'^3} \right), \text{ usw.}$$

kann man damit schreiben:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + m' \frac{d^2 x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0 + m' x_0'}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{x_0' - x_0}{Q^3} - \frac{x_0' + m' x_0'}{r'^3} \right)$$

und die hierin vorkommenden Glieder

$$m' \left(\frac{d^2 x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0' + m' x_0'}{r'^3} \right)$$

kann man ersetzen durch:

$$m' \left(\frac{d^2 x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0'}{r_0'^3} \frac{1}{(1 + m')^2} \right).$$

Daraus ist ersichtlich, daß letztere bis auf Größen 2. Ordnung in bezug auf m' verschwinden, wenn der störende Planet in elliptischer Bewegung angenommen wird; sie können also vernachlässigt werden. Die übrigen Glieder lassen sich so zusammenfassen:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{(1 + m') k^2 x_0}{r_0^3} + k^2 (x_0 + m' x_0') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) = k^2 m' (x_0' - x_0) \left(\frac{1}{Q^3} - \frac{1}{r_0^3} \right).$$

Die beiden ersten Glieder links sind die, welche eine rein elliptische Bewegung um den Schwerpunkt ergeben würden, wenn man in demselben sich die Masse $1 + m'$ vereinigt denkt. Die anderen Glieder der Gleichung stellen die störenden Kräfte dar; von ihnen ist jenes, welches den Faktor $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}$ hat, sehr klein, weil der Unterschied zwischen r und r_0 nie groß sein kann; setzt man

$$r = r_0 + \varepsilon,$$

so wird:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} = \frac{r_0^3 - r^3}{r^3 r_0^3} = \frac{(r_0 - r)(r_0^2 + r r_0 + r^2)}{r^3 r_0^3} = \frac{(r_0^2 - r^2)(r_0^2 + r r_0 + r^2)}{(r_0 + r) r^3 r_0^3}$$

oder

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} = (r_0'^2 - r^2) \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{r_0^5} - \frac{15}{4} \frac{\varepsilon}{r_0^6} + \frac{55}{8} \frac{\varepsilon^2}{r_0^7} - \dots \right\}.$$

Ist V der Winkel, den ϱ mit r' oder r_0' einschließt, so wird:

$$r^2 = \varrho^2 + r'^2 - 2\varrho r' \cos V$$

oder

$$r^2 = \varrho^2 + (1 + m')^2 r_0'^2 - 2\varrho r_0' (1 + m') \cos V,$$

ebenso:

$$r_0'^2 = \varrho^2 + r_0'^2 - 2\varrho r_0' \cos V;$$

folglich

$$r^2 - (1 + m') r_0'^2 = -m' \varrho^2 + m' (m' + 1) r_0'^2$$

oder

$$r^2 - r_0'^2 = m' (r_0'^2 - \varrho^2 + (m' + 1) r_0'^2) = m' E.$$

Andererseits ist

$$r^2 - r_0'^2 = (r - r_0) (r + r_0) = \varepsilon (2r_0 + \varepsilon) = 2r_0 \varepsilon + \varepsilon^2$$

also

$$2r_0 \varepsilon + \varepsilon^2 = m' E$$

woraus

$$\varepsilon = \frac{m' E}{2r_0} - \frac{1}{8} \frac{m'^2 E^2}{r_0^3}.$$

Wird also gesetzt

$$E = r_0'^2 - \varrho^2 + (m' + 1) r_0'^2,$$

so folgt nach leichter Umrechnung:

$$k^2 (x_0 + m' x_0') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) = -k^2 (x_0 + m' x_0') m' E \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{r_0^5} - \frac{15}{8} m' \frac{E}{r_0^7} + \dots \right\}$$

oder wenn die Glieder mit m'^2 weggelassen werden:

$$k^2 (x_0 + m' x_0') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) = -k^2 x_0 m' E \frac{3}{2} \frac{1}{r_0^5}.$$

Wird dies jetzt in die Hauptgleichungen substituiert, so gehen diese über in:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{(1 + m') k^2}{r_0^3} x_0 = k^2 m' (x_0' - x_0) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) + \frac{k^2 m'}{r_0^5} \frac{3}{2} E x_0, \text{ usw.}$$

Da E mit m' multipliziert ist, so kann man zur Berechnung von E auch verwenden

$$E = r_0'^2 + r_0'^2 - \varrho^2 = 2r_0 r_0' \cos V',$$

wo V' der Winkel zwischen r_0 und r_0' ist.

Zu der durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{(1 + m') k^2}{r_0^3} x_0 = 0, \text{ usw.}$$

bestimmten elliptischen Bewegung um den Schwerpunkt des Systems kommen also noch Störungsglieder hinzu, die von den rechtsstehenden störenden Kräften abhängen. Führen wir zur bequemen Berechnung dieser letzteren das Koordinatensystem derart ein, daß wir die X -Achse durch r_0 legen, die Y -Achse in der Bahnebene des Kometen und senkrecht zur X -Achse, die Z -Achse senkrecht zur Bahnebene und

nennen wir die Komponenten der störenden Kraft in diesem System R, S, W , so werden diese, da

$$\begin{aligned}x_0 &= r_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad E = 2r_0 r_0' \cos V' = 2r_0 x_0' \\ R &= k^2 m' (x_0' - r_0) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) + \frac{3k^2 m' x_0'}{r_0^3}, \\ S &= k^2 m' y_0' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \\ W &= k^2 m' z_0' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right).\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ist nun der große Vorzug, den die Betrachtung der Bewegung um den *Schwerpunkt* gewährt, sofort herauszulesen. Man erkennt, daß derjenige Teil der störenden Kraft, der r'^3 im Nenner hat, der also bei sonnennahen Planeten den Hauptteil der störenden Kraft ausmacht und der wegen der raschen Bewegung fortwährend das Zeichen wechselt, nämlich

$$-k^2 m' \frac{x'}{r'^3}, \quad -k^2 m' \frac{y'}{r'^3}, \quad -k^2 m' \frac{z'}{r'^3}$$

in Wegfall gekommen ist. Ist zudem der Komet sehr weit entfernt und der störende Planet ein sonnennaher, so werden sich ϱ und r_0 nicht sehr voneinander unterscheiden und daher die störenden Kräfte wegen des Faktors $\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right)$ auch sehr klein werden, so daß sie unter Umständen für längere Zeiträume (Komet im Aphel) unberücksichtigt bleiben können.

Damit ist nachgewiesen, daß der *Übergang auf den Schwerpunkt* bedeutende Vorteile darbietet und es ist jetzt zu zeigen, wie er ausgeführt wird.

Die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen x, y, z und ihre Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, bezogen auf den Sonnenmittelpunkt gehen, sobald sie auf den Schwerpunkt bezogen werden, über in $x_0, y_0, z_0, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$; die Unterschiede sind:

$$\begin{aligned}\delta x &= x_0 - x = -m' x_0' = -\frac{m'}{1+m'} x' \\ \delta y &= y_0 - y = -m' y_0' = -\frac{m'}{1+m'} y' \\ \delta z &= z_0 - z = -m' z_0' = -\frac{m'}{1+m'} z' \\ \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dx'}{dt} \\ \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) &= \frac{dy_0}{dt} - \frac{dy}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dy'}{dt} \\ \delta \left(\frac{dz}{dt} \right) &= \frac{dz_0}{dt} - \frac{dz}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dz'}{dt}.\end{aligned}$$

Außerdem geht k^2 beim Wechsel des Attraktionszentrums über in $k^2(1 + m')$ und der Unterschied $\delta(k^2)$ wird $m'k^2$ oder

$$2k\delta k = m'k^2$$

oder

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{2} m'.$$

Diese Unterschiede sind also sofort angebar und damit auch die $x_0, y_0, z_0, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$. Aus diesen letzteren aber kann man das zugehörige Elementensystem nach den Formeln der Nr. 110 sofort ableiten; man hat nur zu setzen $k^2(1 + m')$ statt k^2 .

Diese Art der Lösung der Aufgabe ist aber hier wenig zweckmäßig, da die $\delta x, \dots$ naturgemäß kleine Größen sind und daher auch die auf den Schwerpunkt bezogenen Elemente nur wenig von jenen, die auf den Sonnenmittelpunkt sich beziehen, abweichen werden. Es ist sicherer, die Differenzen der Elemente direkt durch die Differenzen der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten auszudrücken. Diese Aufgabe, die auch zu lösen ist, wenn man bei der Encke'schen Methode, spezielle Störungen zu berechnen, auf neue oskulierende Elemente, die den gestörten Koordinaten

$$x + \delta x, \dots, \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dx}{dt}, \dots$$

entsprechen, übergehen will, soll in der nächsten Nummer im Anschluß an die von *Encke* im Berl. Jahrb. für 1858 gegebenen Entwicklungen behandelt werden.

178. Übertragung der Elemente vom Sonnenmittelpunkt auf den Schwerpunkt von Sonne und störendem Planeten. Der Zusammenhang zwischen den Differenzialen der Elemente und den Differenzialen von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ muß sich durch Differenziation der Ausdrücke ergeben, die zwischen den Elementen und den rechtwinkligen Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten bestehen. Diese sind nach Nr. 110:

$$M = E - e \sin E$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \quad 1)$$

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos v$$

$$\begin{aligned} x &= r (\cos(\omega + v) \cos \varOmega - \sin(\omega + v) \sin \varOmega \cos i) \\ y &= r (\cos(\omega + v) \sin \varOmega + \sin(\omega + v) \cos \varOmega \cos i) \\ z &= r \sin(\omega + v) \sin i. \end{aligned} \quad 2)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{p}} ((\sin(v + \omega) + e \sin \omega) \cos \varOmega + (\cos(v + \omega) + e \cos \omega) \sin \varOmega \cos i)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{p}} ((\sin(v + \omega) + e \sin \omega) \sin \varOmega - (\cos(v + \omega) + e \cos \omega) \cos \varOmega \cos i) \quad 3)$$

$$\frac{dz}{dt} = +\frac{k}{\sqrt{p}} (\cos(v + \omega) + e \cos \omega) \sin i.$$

Setzt man die Richtungscosinus des Systems xyz gegen das durch Ort und Bahn des Kometen bestimmte System ($u = \omega + v$)

$$\begin{aligned}
 \cos u \cos \varrho - \sin u \sin \varrho \cos i &= \cos \alpha_1 \\
 \cos u \sin \varrho + \sin u \cos \varrho \cos i &= \cos \alpha_2 \\
 \sin u \sin i &= \cos \alpha_3 \\
 -\sin u \cos \varrho - \cos u \sin \varrho \cos i &= \cos \beta_1 \\
 -\sin u \sin \varrho + \cos u \cos \varrho \cos i &= \cos \beta_2 \\
 \cos u \sin i &= \cos \beta_3 \\
 \sin \varrho \sin i &= \cos \gamma_1 \\
 -\cos \varrho \sin i &= \cos \gamma_2 \\
 \cos i &= \cos \gamma_3
 \end{aligned} \tag{4}$$

und führt gleich hier die weiterhin gebrauchten und völlig bekannten Größen

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 \delta x + \cos \alpha_2 \delta y + \cos \alpha_3 \delta z &= M^0 \\
 \cos \beta_1 \delta x + \cos \beta_2 \delta y + \cos \beta_3 \delta z &= N^0 \\
 \cos \gamma_1 \delta x + \cos \gamma_2 \delta y + \cos \gamma_3 \delta z &= P^0 \\
 \cos \alpha_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \alpha_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \alpha_3 \delta \frac{dz}{dt} &= M' \\
 \cos \beta_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \beta_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \beta_3 \delta \frac{dz}{dt} &= N' \\
 \cos \gamma_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \gamma_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \gamma_3 \delta \frac{dz}{dt} &= P'
 \end{aligned} \tag{5}$$

ein, so wird zunächst:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \alpha_1 \\
 y &= r \cos \alpha_2 \\
 z &= r \cos \alpha_3.
 \end{aligned} \tag{2^a)$$

Schreibt man weiter in 3)

$$\sin u + e \sin \omega = \sin u (1 + e \cos v) - \cos u \cdot e \sin v = \frac{p}{r} \sin u - e \sin v \cdot \cos u$$

$$\cos u + e \cos \omega = \cos u (1 + e \cos v) + \sin u \cdot e \sin v = \frac{p}{r} \cos u + e \sin v \cdot \sin u,$$

so wird daraus:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_1 + e \sin v \cdot \cos \alpha_1 \right) \\
 \frac{dy}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_2 + e \sin v \cdot \cos \alpha_2 \right) \\
 \frac{dz}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_3 + e \sin v \cdot \cos \alpha_3 \right).
 \end{aligned} \tag{3^a)$$

Aus 2^{a)} und 3^{a)} folgt dann mit Beachtung der Formeln in Nr. 2:

$$x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} \cos \gamma_1 + \frac{dy}{dt} \cos \gamma_2 + \frac{dz}{dt} \cos \gamma_3 = 0 \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= k \sqrt{p} \cos \gamma_1 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= k \sqrt{p} \cos \gamma_2 \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{p} \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

und aus den letzten drei Formeln durch Quadrieren und Addieren:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) - \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2 = k^2 p. \quad 9)$$

Endlich gibt die bekannte Formel

$$V^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

sofort:

$$\frac{k^2}{a} = \frac{2k^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right). \quad 10)$$

Differenziert man nun z^a total, so kommt

$$\begin{aligned} \delta x &= \cos \alpha_1 \delta r + r \delta \cos \alpha_1 \\ \delta y &= \cos \alpha_2 \delta r + r \delta \cos \alpha_2 \\ \delta z &= \cos \alpha_3 \delta r + r \delta \cos \alpha_3 \end{aligned}$$

und hieraus nach den Formeln in Nr. 6, die auch im folgenden fortwährend zur Anwendung gelangen:

$$\begin{aligned} \delta r &= M^0 \\ r \delta s &= N^0 \\ -r \delta q &= P^0. \end{aligned} \quad 11)$$

Statt die Gleichungen 3^a) zu differenzieren, behandeln wir die an ihre Stelle getretenen 6), 7), 9) und 10); die totale Differenziation von 6) und 7) ergibt:

$$-r \delta q = P^0$$

$$\frac{dx}{dt} (\cos \alpha_1 \delta q - \cos \beta_1 \delta p) + \frac{dy}{dt} (\cos \alpha_2 \delta q - \cos \beta_2 \delta p) + \frac{dz}{dt} (\cos \alpha_3 \delta q - \cos \beta_3 \delta p) = -P',$$

wovon die erste bereits in 11) vorkommt, die zweite aber nach Substitution der Werte von 3^a) in:

$$\frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \delta p - e \sin v \delta q \right) = P'$$

übergeht. Dies gibt nach Eintragung von δq aus 11):

$$\delta p = \frac{r}{k \sqrt{p}} P' - \frac{e \sin v}{p} P^0. \quad 12)$$

Bei den Differenziationen von 9) und 10) treten einige Differenziale auf, die wir vorweg ableiten. Nach 10) ist:

$$\delta (x^2 + y^2 + z^2) = \delta (r^2) = 2r \delta r = 2r M^0; \quad 13)$$

ferner folgt aus 2^a) direkt:

$$x \delta \frac{dx}{dt} + y \delta \frac{dy}{dt} + z \delta \frac{dz}{dt} = r M' \quad 14)$$

und ebenso aus 3^a)

$$\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z = \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} N^0 + e \sin v \cdot M^0 \right) \quad 15)$$

$$\frac{dx}{dt} \delta \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \delta \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \delta \frac{dz}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} N' + e \sin v \cdot M' \right). \quad 16)$$

Also hat man:

$$\delta \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) = \frac{2k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} N' + e \sin v \cdot M' \right) \quad 17)$$

und

$$\delta \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2 = 2 \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) \left[\frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} N^0 + e \sin v M^0 \right) + r M' \right]$$

oder mit Rücksicht auf

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = r \frac{dr}{dt} = r \frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v:$$

$$\delta \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2}{p} \left(r e^2 \sin^2 v M^0 + p e \sin v N^0 + \frac{\sqrt{p}}{k} r^2 e \sin v M' \right). \quad 18)$$

Die Differenzierung von 9) ergibt nun:

$$k^2 \delta p = 2k^2 \sqrt{p} \delta \sqrt{p} =$$

$$\delta(x^2 + y^2 + z^2) \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \dots \right) + (x^2 + y^2 + z^2) \delta \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \dots \right) - \delta \left(x \frac{dx}{dt} + \dots \right)^2,$$

also mit Beachtung von

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \dots = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{k^2}{p} (1 + 2 e \cos v + e^2),$$

ferner von 13), 17) und 18) nach leichter Reduktion:

$$\delta \sqrt{p} = \frac{\sqrt{p}}{r} M^0 - \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} N^0 + \frac{r}{k} N'. \quad \text{I.}$$

Desgleichen gibt die Differenzierung von 10)

$$k^2 \delta \frac{1}{a} = -\frac{2k^2}{r^2} \delta r - \delta \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \dots \right),$$

also nach 11) und 17)

$$\delta \frac{1}{a} = -\frac{2}{r^2} M^0 - \frac{2 e \sin v}{k \sqrt{p}} M' - \frac{2 \sqrt{p}}{rk} N'. \quad \text{II.}$$

Da aus $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ folgt: $\delta \mu = \frac{3}{2} \mu a \delta \frac{1}{a}$, so ist weiter

$$\delta \mu = -\frac{3 \mu a}{r^2} M^0 - \frac{3 e \sin v}{k \sqrt{p}} \mu a M' - \frac{3 \sqrt{p}}{rk} \mu a N' \quad \text{III.}$$

und da $p = a(1 - e^2)$ ergibt: $\delta p = (1 - e^2) \delta a - 2ae \delta e$ oder

$$\delta e = \frac{1 - e^2}{2ae} \delta a - \frac{\delta p}{2ae} = -\frac{p}{2e} \delta \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{p}}{ae} \delta \sqrt{p},$$

so hat man auch nach einfacher Zusammenziehung:

$$\delta e = \frac{e + \cos v}{r} M^0 + \frac{\sin v}{a} N^0 + \frac{\sqrt{p}}{k} \sin v M^0 + \frac{\sqrt{p}}{k} (\cos v + \cos E) N^0 \quad \text{IV.}$$

($E =$ exzentrische Anomalie).

Wir gehen nun zur Verwertung der Gleichungen 11) und 12) über; im vorliegenden Fall ist nach den Gl. 6) (Seite 13), da $\varphi = u$, $\psi = -\Omega$, $\theta = i$ zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p} &= \sin u \sin i \delta \Omega + \cos u \delta i \\ \delta \mathbf{q} &= \cos u \sin i \delta \Omega - \sin u \delta i \\ \delta \mathbf{s} &= \delta u + \cos i \delta \Omega \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \delta i &= \cos u \delta \mathbf{p} - \sin u \delta \mathbf{q} \\ \sin i \delta \Omega &= \sin u \delta \mathbf{p} + \cos u \delta \mathbf{q} \\ \delta u &= \delta \mathbf{s} - \cos i \delta \Omega \end{aligned}$$

oder nach 11) und 12)

$$\begin{aligned} \delta i &= \left(\frac{r}{k\sqrt{p}} P' - \frac{e \sin v}{p} P^0 \right) \cos u + \frac{P^0}{r} \sin u \\ \sin i \delta \Omega &= \left(\frac{r}{k\sqrt{p}} P' - \frac{e \sin v}{p} P^0 \right) \sin u - \frac{P^0}{r} \cos u \\ \delta u &= \frac{1}{r} N^0 - \cos i \delta \Omega \end{aligned} \quad \text{19)}$$

oder endlich, wenn $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ beachtet wird:

$$\delta i = \frac{\sin u + e \sin \omega}{p} P^0 + \frac{r \cos u}{k\sqrt{p}} P' \quad \text{V.}$$

$$\sin i \delta \Omega = -\frac{\cos u + e \cos \omega}{p} P^0 + \frac{r \sin u}{k\sqrt{p}} P'. \quad \text{VI.}$$

Um $\delta \omega$ und δM zu erlangen, muß das Differenzial der Gleichungen 1) gebildet werden. Die Gleichung

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos(u - \omega)$$

gibt:

$$\frac{1}{r} \delta p - \frac{p}{r^2} \delta r = \cos(u - \omega) \delta e - e \sin(u - \omega) \delta u + e \sin(u - \omega) \delta \omega$$

oder

$$\delta \omega = \frac{2\sqrt{p}}{re \sin v} \delta \sqrt{p} - \frac{p}{r^2 e \sin v} \delta r - \frac{\cos v}{e \sin v} \delta e + \delta u.$$

Werden hier die Ausdrücke I., 11), IV. und 19) eingetragen, so kommt nach einiger Reduktion:

$$\delta \omega = \frac{\sin v}{re} M^0 - \frac{\cos E}{re} N^0 - \frac{\sqrt{p} \cos v}{ke} M' + \frac{(r+p) \sin v}{ke\sqrt{p}} N' - \cos i \delta \Omega. \quad \text{VII.}$$

Aus den Gleichungen

$$M = E - e \sin E$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$$

folgt

$$\delta M = \frac{r}{a} \delta E - \frac{r \sin v}{a \sqrt{1 - e^2}} \delta e$$

und durch logarithmische Differenziation der zweiten:

$$\frac{\delta v}{\sin v} = \frac{\delta \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\delta E}{\sin E} = \frac{\delta e}{\cos \varphi^2} + \frac{a \cos \varphi}{r \sin v} \delta E$$

oder

$$\delta E = \frac{r}{a \cos \varphi} \delta v - \frac{r \sin v}{a \cos \varphi^3} \delta e.$$

Dies in δM eingetragen führt auf

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} (\delta u - \delta \omega) - \frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^3} \left(1 + \frac{p}{r}\right) \delta e$$

oder nach Eintragung von 19), VII. und IV.:

$$\delta M = - \left(\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) \sin v M^0 + \frac{\cos v}{a \operatorname{tg} \varphi} N^0 - \frac{1}{k \sqrt{a}} \left(2r - \frac{p \cos v}{e} \right) M' - \frac{\sqrt{p} \sin v}{k \operatorname{tg} \varphi} \left(1 + \frac{r}{p} \right) N'. \text{ VIII.}$$

In der bis jetzt angegebenen Weise sind die Formeln I.—VIII. zu verwenden, wenn lediglich eine Änderung der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten vorliegt, also etwa bei der Umwandlung von Koordinatenstörungen in Elementenstörungen, wie sie bei der Enckeschen Methode behufs Erlangung neuer oskulierender Elemente vorzunehmen ist. Bei der Übertragung der Elemente auf den Schwerpunkt eines Systems kommt noch ein weiterer Punkt in Frage, nämlich die Änderung der Anziehungskraft, die im System des Mittelpunkts der Sonne gleich k^2 , im System des Schwerpunktes von Sonne und Planet aber gleich $k^2(1 + m')$ anzusetzen ist. Man hat also in diesem Falle noch ein δk einzuführen und den früheren Formeln hinzuzufügen; es ist schon Seite 568 angegeben, daß

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{2} m'.$$

Die Formel I. ging hervor aus 9); hierin muß man nun setzen

$$\delta (pk^2) = 2k^2 \sqrt{p} \delta \sqrt{p} + 2pk \delta k$$

d. h. man muß dem Ausdruck I. für $\delta \sqrt{p}$ hinzufügen

$$- \sqrt{p} \frac{\delta k}{k}. \tag{I^a}$$

Die Formel II. ging hervor aus 10), welches so geschrieben werden kann

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{k^2};$$

daraus ist ersichtlich, daß II. den Zusatz erheischt

$$\frac{2V^2}{k^3} \delta k = 2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\delta k}{k}. \tag{II^a}$$

Aus $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ folgt $\delta\mu = \frac{3}{2}\mu a \delta\frac{1}{a} + \mu \frac{\delta k}{k}$; es ist also zu III. im ganzen hinzuzufügen:

$$\left(\frac{3}{2}\mu a^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) + \mu\right) \frac{\delta k}{k} = \left(\frac{6a}{r} - 2\right)\mu \frac{\delta k}{k}. \quad \text{III}^a.$$

Vermöge der Zusammensetzung von δe aus $\delta\frac{1}{a}$ und $\delta\sqrt{p}$ folgt als Zusatz von IV.:

$$\left(-\frac{p}{2e}^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) + \frac{V\bar{p}}{ae}V\bar{p}\right) \frac{\delta k}{k} = -2(\cos v + e) \frac{\delta k}{k} = -\frac{2p \cos E}{r} \frac{\delta k}{k}. \quad \text{IV}^a.$$

In den Formeln 6) und 7), aus denen δi und $\delta\Omega$ hervorgingen, kommt k nicht vor, die Ausdrücke V. und VI. erheischen also keinen Zusatz. Ebenso geht daraus hervor, daß δr und δu keinen Zusatz erfordern, so daß der Zusatz von $\delta\omega$ in Formel VII. sich lediglich aus den von $\delta\sqrt{p}$ und δe herrührenden Inkrementen zusammensetzt; diese geben:

$$\left(-\frac{2V\bar{p}}{r e \sin v}V\bar{p} + \frac{2 \cos v}{e \sin v}p \frac{\cos E}{r}\right) \frac{\delta k}{k} = -\frac{2}{e} \sin v \frac{\delta k}{k}. \quad \text{VII}^a.$$

Der Zusatz von δM endlich setzt sich aus dem von $\delta\omega$ und δe zusammen und wird nach einiger Reduktion:

$$+ \left(\frac{\cotg \varphi}{r} + \frac{\tg \varphi}{a}\right) 2r \sin v \frac{\delta k}{k}. \quad \text{VIII}^a.$$

Wir stellen zum Schluß die vollständigen Formeln für die Übertragung eines Elementensystems vom Mittelpunkt der Sonne auf den Schwerpunkt von Sonne und störender Planet zusammen. Sind m', x', y', z' Masse und Koordinaten des störenden Planeten, so rechne man zuerst

$$\delta x = -\frac{m'}{1+m'}x', \dots, \quad \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{m'}{1+m'}\frac{dx'}{dt}, \dots,$$

sodann die sechs Größen $M^0, N^0, P^0, M', N', P'$ aus den Gl. 5) (Seite 569); dann wird:

$$\begin{aligned} \delta\mu &= -\frac{3\mu a}{r^2}M^0 - \frac{e \sin v}{V\bar{p}}3\mu a \frac{M'}{k} - \frac{V\bar{p}}{r}3\mu a \frac{N'}{k} + \left(\frac{6a}{r} - 2\right)\mu \frac{\delta k}{k} \\ \delta e &= \frac{e + \cos v}{r}M^0 + \frac{\sin v}{a}N^0 + V\bar{p} \sin v \frac{M'}{k} + V\bar{p}(\cos v + \cos E) \frac{N'}{k} - \frac{2p \cos E}{r} \frac{\delta k}{k} \\ \delta i &= \frac{\sin u + e \sin \omega}{p}P^0 + \frac{r \cos u}{V\bar{p}} \frac{P'}{k} \\ \delta\Omega &= -\frac{\cos u + e \cos \omega}{p \sin i}P^0 + \frac{r \sin u}{V\bar{p} \sin i} \frac{P'}{k} \\ \delta\omega &= \frac{\sin v}{re}M^0 - \frac{\cos E}{re}N^0 - \frac{V\bar{p} \cos v}{e} \frac{M'}{k} + \frac{(r+p) \sin v}{e V\bar{p}} \frac{N'}{k} - \cos i \delta\Omega - \frac{2 \sin v}{e} \frac{\delta k}{k} \\ \delta M &= -\left(\frac{\cotg \varphi}{r} + \frac{\tg \varphi}{a}\right) \sin v \cdot M^0 + \frac{\cos v}{a \tg \varphi}N^0 - \frac{1}{V\bar{a}}\left(2r - \frac{p \cos v}{e}\right) \frac{M'}{k} - \frac{V\bar{p} \sin v}{\tg \varphi} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{N'}{k} \\ &\quad + \left(\frac{\cotg \varphi}{r} + \frac{\tg \varphi}{a}\right) 2r \sin v \frac{\delta k}{k}. \end{aligned}$$

Sind $\delta x, \dots, \delta \frac{dx}{dt}, \dots$ die Störungsbeträge in den rechtwinkligen Koordinaten bei einer nach der Enckeschen Methode geführten Störungsrechnung, so kann man die ihnen entsprechenden Inkremente der oskulierenden Elemente nach denselben Formeln rechnen, nur fallen dann die mit $\frac{\delta k}{k}$ multiplizierten Glieder weg.

Um ein auf den Schwerpunkt bezogenes Elementensystem wieder auf den Mittelpunkt der Sonne zurückzuführen, eine Operation, die man vornehmen muß, wenn der Komet sich dem störenden Körper wieder nähert, hat man obige Formeln mit entgegengesetzten Zeichen zu benutzen.

Die obigen Rechenvorschriften entbehren noch der wünschenswerten Kontrollen. Es lassen sich wirklich durchgreifende auch kaum aufstellen, so daß man, um größere Fehler zu vermeiden, gut tun wird, die Elemente auch direkt aus den variierten Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten zu berechnen. Weiter hat man nur die Möglichkeit, die Formel

$$r \cos u \cdot \sin i \delta \Omega - r \sin u \cdot \delta i = -P^0$$

anzuwenden, und etwa auch $\delta V\bar{p}$ und $\delta \frac{1}{a}$ nach I. und II. zu rechnen und nachzusehen, ob die Gleichungen

$$\delta e = -\frac{p}{2e} \delta \frac{1}{a} - \frac{V\bar{p}}{ae} \delta V\bar{p}$$

$$\delta \mu = \frac{3\mu a}{2} \delta \frac{1}{a} + \mu \frac{\delta k}{k}$$

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} \left(\frac{1}{r} N^0 - \cos i \delta \Omega - \delta \omega \right) - \frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^3} \left(1 + \frac{p}{r} \right) \delta e$$

befriedigt werden.

Abschnitt XXXIV.

Die definitive Bahn.

179. Begriff und Bestimmung der definitiven Bahn. Die definitive Bahn ist der Abschluß des Näherungsprozesses, den die Aufgabe, die Bewegungen der Himmelskörper zu beschreiben, zu ihrer Lösung erheischt. Man versteht darunter dasjenige oskulierende Elementensystem, welches nach Anbringung der jeweiligen Störungsbeträge die Gesamtheit der vorhandenen Beobachtungen am besten darstellt. Seine Bildung ist durch die schon früher gegebenen Erläuterungen (Nr. 140, 155) vorgeschrieben und braucht hier nur mehr in Kürze zusammengefaßt zu werden. Notwendige Voraussetzung ist ein genähert richtiges Elementensystem, mittels dessen man für den ganzen von den Beobachtungen bedeckten Zeitraum die Störungen durch die großen Planeten mit hinlänglicher Genauigkeit berechnen kann; hinlänglich ist diese Genauigkeit dann, wenn die Störungsbeträge, berechnet mit dem definitiven System, sich nicht wesentlich anders ergeben würden, als mit dem vorläufigen. Das genäherte System kann ferner dazu benutzt werden, die Beobachtungen zu Normalörtern zusammenzufassen, indem die Ephemeridenkorrekturen zeitlich nahe gelegener Beobachtungen zu Mitteln vereinigt und diese zum Ephemeridenort für das Mittel der Beobachtungszeiten hinzugefügt werden; übrigens können die einzelnen Normalörter auch mittels verschiedener, etwa schon früher erhaltener provisorischer Elemente gebildet werden, wenn diese nur genau genug sind, um für einen beschränkten Zeitraum die Bewegung des Himmelskörpers ohne systematischen Fehler darzustellen. Das genäherte System einschließlich der Störungen wird endlich mit allen Normalörtern verglichen und durch eine der im Abschnitt XXVII auseinandergesetzten Bahnverbesserungsmethoden unter Zugrundelegung eines plausiblen Ausgleichungsprinzips — in der Regel wird das der kleinsten Fehlerquadratsumme genommen — zur definitiven Bahn verbessert.

Die Berücksichtigung der Störungen kann entweder dadurch geschehen, daß man direkt gestörte Örter rechnet und diese dann mit den Beobachtungen vergleicht, oder dadurch, daß man die Beobachtungen von den Störungen befreit und die reduzierten Örter mit der aus dem vorhandenen Elementensystem hervorgehenden Ephemeride vergleicht. Der letztere Weg setzt voraus, daß die Umwandlung der Elementenstörungen bzw. der Störungen der heliozentrischen Koordinaten in die Störungen der geozentrischen Koordinaten leicht und sicher bewerkstelligt werden kann. Es wird dies in der Regel nur dann der Fall sein, wenn die Störungsbeträge *klein* sind, so daß man mit Differenzialformeln ausreicht, und wenn man die nötigen Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen bzw. heliozentrischen Koordinaten entweder ohnehin berechnen muß oder leicht bilden kann. Klein genug sind die Störungen meist nur, wenn es sich um kleinere Zeiträume handelt, also etwa um die Erscheinung eines nichtperiodischen Kometen. Die genannten Differenzial-

quotienten nach den *Elementen* braucht man für die Zeiten der Normalörter ohnehin für die Bahnverbesserung. Treffen beide Umstände zusammen, so ist es vorzuziehen, diesen Weg einzuschlagen, da man dann die ganze Ephemeride mit *einem* Elementensystem rechnen kann. Auch die genannten Differenzialquotienten nach den rechtwinkligen Koordinaten sind nach den Formeln Seite 546 so leicht zu bilden, daß man von der Methode Gebrauch machen kann. Hat man aber die Störungen in den Polarkoordinaten gerechnet, so werden die nötigen Differenzialquotienten weder anderweitig gebraucht, noch sind sie leicht zu rechnen; hier wird man also von diesem Wege um so mehr absehen, als sich die Ephemeridenrechnung dann auch für die gestörten Örter sehr einfach gestaltet (Seite 532).

Bei langen Zeiträumen schlägt man den oben angegebenen ersten Weg ein d. h. man rechnet die gestörten Örter. Hat man die Störungen durch die Variation der Elemente berechnet, so stellt man für die Zeit jedes Normalortes das oskulierende Elementensystem auf und berechnet daraus den Ort; hat man die Störungen in den Koordinaten gerechnet, so fügt man diese auf die Seite 532 bzw. 546 angegebene Weise bei der Ephemeridenrechnung hinzu.

180. Beispiel. (221) Eos. Um die Berücksichtigung der Störungen bei definitiven Bahnbestimmungen an einem Beispiel zu erläutern, soll die in Nr. 143 bereits durchgeführte Rechnung mit den hierhergehörigen Ergänzungen versehen werden. Die Störungsrechnung nach der Methode der Variation der Elemente ergibt folgende Störungsbeträge zwischen den einzelnen Oskulationsepochen:

| | ΔM | $\Delta \omega$ | $\Delta \Omega$ | Δi | $\Delta \varphi$ | $\Delta \mu$ |
|--------------------------------------|------------|-----------------|-----------------|------------|------------------|--------------|
| Von 1882 Febr. 7.0 bis 1883 Mai 13.0 | +10'40".1 | -11'19".4 | - 31".2 | - 7".2 | -1'22".0 | -0".5007 |
| > 1883 Mai 13.0 > 1884 Juli 6.0 | + 9 44.9 | -11 48.6 | - 27.5 | + 1.9 | -0 16.1 | -0.3131 |
| > 1883 Mai 13.0 > 1887 Febr. 1.0 | +29 34.4 | -32 25.0 | - 58.0 | + 5.7 | -0 32.6 | +0.2632 |
| > 1887 Febr. 1.0 > 1888 Apr. 16.0 | +16 41.0 | -15 5.1 | - 44.7 | - 9.6 | -1 10.4 | -0.4591 |
| > 1888 Apr. 16.0 > 1889 Juni 30.0 | +30 47.3 | -34 29.5 | -428.2 | +19.6 | -3 26.3 | -0.9051 |
| > 1889 Juni 30.0 > 1894 Juni 4.0 | - 7 6.5 | +23 27.8 | -109.8 | + 8.1 | -7 50.6 | +0.1382 |
| > 1894 Juni 4.0 > 1898 März 15.0 | -11 44.5 | +15 53.4 | - 35.4 | -21.1 | -7 59.0 | -1.0206 |

Zu bemerken ist hierbei nur, daß Jupiter und Saturn als störende Körper berücksichtigt sind und daß unter ΔM der Gesamtbetrag der Störung in mittlerer Anomalie zusammengefaßt ist. Hiermit ergibt sich folgendes System von oskulierenden Elementen:

| | I | II | III | IV |
|--------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| Ep. und Osk. | 1882 Febr. 7.0 | 1883 Mai 13.0 | 1884 Juli 6.0 | 1887 Febr. 1.0 |
| M | 171°52'22".5 | 258°55'13".5 | 338°20'25".1 | 156° 3'22".8 |
| ω | 188 54 9.1 | 188 42 49.7 | 188 31 1.1 | 188 10 37.7 |
| Ω | 142 32 46.1 | 142 32 14.9 | 142 31 47.5 | 142 39 26.6 |
| i | 10 51 14.7 | 10 51 7.5 | 10 51 9.4 | 10 51 9.1 |
| φ | 5 57 6.5 | 5 55 44.5 | 5 55 28.4 | 5 55 11.9 |
| μ | 679".8499 | 679".3492 | 679".0361 | 679".6124 |
| $\log a$ | 0.478 3957 | 0.478 6090 | 0.478 7425 | 0.478 4969 |
| Äqu. | 1880.0 | 1880.0 | 1880.0 | 1890.0 |
| t | 0 | + 460 | + 880 | + 1820 |

| | V | VI | VII | VIII |
|--------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| Ep. und Osk. | 1888 Apr. 16.0 | 1889 Juni 30.0 | 1894 Juni 4.0 | 1898 März 15.0 |
| M | 239°23'53".2 | 322°55' 8".0 | 301°55'28".3 | 201°46'37".0 |
| ω | 187 55 32.6 | 187 21 3.1 | 187 44 43.9 | 188 0 37.3 |
| Ω | 142 38 41.9 | 142 31 33.7 | 142 37 53.7 | 142 37 18.3 |
| i | 10 50 59.5 | 10 51 19.1 | 10 51 23.1 | 10 51 2.0 |
| φ | 5 54 1.5 | 5 50 35.2 | 5 42 44.6 | 5 34 45.6 |
| μ | 679".1533 | 678".2482 | 678".3864 | 677".3658 |
| $\log a$ | — | — | — | 0.479 4555 |
| Äqu. | 1890.0 | 1890.0 | 1900.0 | 1900.0 |
| t | + 2260 | + 2700 | + 4500 | + 5880 |

| | $\Delta\omega$ | $\Delta\Omega$ | Δi |
|----------------------------------|----------------|----------------|------------|
| Präzession von 1880.0 bis 1890.0 | + 13".0 | + 8' 9".7 | - 4".1 |
| » 1890.0 » 1900.0 | + 13.0 | + 8 9.8 | - 4.1 |

Mit den Elementen I, II, III, IV, VIII sind für die Zeiten der beobachteten Normalörter die geozentrischen Koordinaten gerechnet und in der in Nr. 143 ausführlich angegebenen Weise zur Ermittlung der definitiven Bahn verwendet worden.