

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Die Bahnbestimmung der Himmelskörper**

**Bauschinger, Julius**

**Leipzig, 1928**

Fünfter Teil. Die Bahnverbesserung

[urn:nbn:at:at-ubi:2-6413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:at:at-ubi:2-6413)

## Fünfter Teil.

### Die Bahnverbesserung.

#### Abschnitt XXVI.

#### Die Ausgleichungsrechnung.

**130. Aufgabe. Prinzip der kleinsten Quadratsumme.** Die Methoden der Ausgleichungsrechnung sollen hier nur soweit zur Darstellung gelangen, als sie für die Bahnverbesserung gebraucht werden.

Wenn eine Größe oder bekannte Verbindungen mehrerer Größen öfter beobachtet sind, als zu ihrer rein algebraischen Bestimmung nötig ist, dann werden infolge der unvermeidlichen, zufälligen Beobachtungsfehler zwischen den Gleichungen, welche den Zusammenhang der zu ermittelnden und der beobachteten Größen herstellen, Widersprüche entstehen, die durch keinerlei Annahme über die zu ermittelnden, überbestimmten Größen zu beseitigen sind; es ist Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus solchen Gleichungen durch eine strenge und einfache Analyse die Werte der Unbekannten so zu bestimmen, daß sie der Wahrheit möglichst nahe kommen. Ohne ein Prinzip, welches sich darüber ausspricht, wann diese letztere Bedingung als erfüllt angesehen wird, ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, und, soweit es sich um die Wahl des Prinzips handelt, ist also eine gewisse Willkür notwendig mit der Natur des Problems verbunden. Für die Wahl des Prinzips sind maßgebend: 1. daß dasselbe mit annehmbaren Anschauungen über die Natur der Beobachtungsfehler in Übereinstimmung stehe, 2. daß die aus ihm fließende Analyse eine einfache sei. Das Prinzip:

*»Die Unbekannten sind so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche ein Minimum werde«,*

genügt, wie die Durchführung zeigt, beiden Bedingungen und wird jetzt fast allgemein als Grundlage der Ausgleichung angenommen. Diese heißt daher häufig *»Methode der kleinsten Quadrate«*.

Analytisch formuliert sich die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung wie folgt: Sind  $l_i$  die Beobachtungsergebnisse für die gegebenen Verbindungen

$$A_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots \quad (i = 1 \text{ bis } n)$$

zwischen den  $m$  unbekannten Größen  $x, y, z, \dots$  ( $n > m$ ), so ist jenes Wertsystem anzugeben, für welches die Summe der Quadrate von  $A_i - l_i$  ein Minimum wird.  $A_i$  kann stets als linear angenommen werden; ist dies von Anfang an nicht der Fall, so stellt man die lineare Form durch Annahme von Näherungswerten und Entwicklung nach dem Taylorschen Satz für mehrere Variable her. Ist nur eine Unbekannte vorhanden, so hat man das Problem der Ausgleichung *direkter Beobachtungen*. Der allgemeine Fall wird als *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen* bezeichnet.

**131. Mittlerer Fehler. Gewicht.** Um verschiedene Beobachtungsreihen bezüglich ihrer Genauigkeit miteinander vergleichen zu können, führt man ein *Maß der Genauigkeit* ein. Man kann sich ein solches aus der Betrachtung der Fehler verschaffen. Dabei hat man zu unterscheiden zwischen den *wahren* Beobachtungsfehlern (die in der Regel unbekannt sind) und den Abweichungen der Beobachtungen von den mit den besten Werten der Unbekannten berechneten Werten  $A_i$ , den *scheinbaren* Fehlern. Sind  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  die wahren Fehler und wird mit  $|\mathcal{A}_i|$  der absolute Wert von  $\mathcal{A}_i$  bezeichnet, so ist

$$\frac{|\mathcal{A}_1|^q + |\mathcal{A}_2|^q + \dots + |\mathcal{A}_n|^q}{n}$$

ein Maß der Genauigkeit für jeden Wert von  $q > 0$ , in dem Sinne, daß eine Beobachtungsreihe um so genauer ist, je kleiner dieser Ausdruck ist. Da jeder Wert von  $q$  denselben Dienst leistet, beschränkt man sich auf die einfachsten Fälle:

$$q = 1: \frac{|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + \dots + |\mathcal{A}_n|}{n} = \vartheta = \text{durchschnittlicher Fehler}$$

$$q = 2: \frac{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2}{n} = \mu^2 = \text{Quadrat des mittleren Fehlers}$$

und gebraucht insbesondere den *mittleren Fehler*  $\mu$  als Maß der Genauigkeit. Das oben aufgestellte Prinzip der Ausgleichung kann dann so ausgesprochen werden: Es ist jenes System der Unbekannten zu ermitteln, für welches der mittlere Fehler der Reihe den kleinsten Wert annimmt. Da man mittels dieses Prinzips nicht die wahren Werte der Unbekannten kennen lernt, sondern nur die annehmbarsten, so bleiben auch die wahren Beobachtungsfehler unbekannt und die Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2}{n}}$$

kann also zur Bestimmung des mittleren Fehlers nicht dienen. Dagegen werden die scheinbaren Fehler bekannt und wir werden unten zeigen, wie diese zur Bestimmung von  $\mu$  benutzt werden können.

Um Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit bequem miteinander verbinden zu können, führt man den Begriff des *Gewichtes* ein, dessen einfachste Definition ist: *eine Beobachtung vom Gewichte  $p$  ist gleichwertig mit  $p$  Beobachtungen vom Gewichte 1.* Daraus wird sich unten der Zusammenhang zwischen Gewicht und mittlerem Fehler leicht ableiten lassen.

Wir werden uns im folgenden nachstehender von Gauß eingeführten Bezeichnung bedienen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= [a] \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= [aa] \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= [ab]. \end{aligned}$$

Wir besprechen jetzt die einzelnen Aufgaben der Ausgleichsrechnung und beginnen mit der einfachsten.

**132. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleichem Gewicht.** Ist eine zu ermittelnde Größe direkt durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$$

gemessen, so ist die Aufgabe, daraus den Wert  $x$  der Größe abzuleiten, der dem wahren Werte  $X$  möglichst nahe kommt;  $x$  wollen wir den »annehmbarsten« Wert der Unbekannten nennen und ihn nach dem oben aufgestellten Prinzip als denjenigen definieren, für welchen die Summe der Quadrate der Widersprüche ein Minimum wird. Weicht  $x$  von den einzelnen Messungen  $l_1, \dots, l_n$  um die Beträge  $\delta_1, \dots, \delta_n$  ab, in dem Sinne, daß die  $\delta$  die Verbesserungen sind, welche den  $l$  hinzugefügt werden müssen, damit diese unter sich und mit  $x$  identisch werden, so hat man die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} x = l_1 + \delta_1 & \text{oder} \quad \delta_1 = x - l_1 \\ x = l_2 + \delta_2 & \delta_2 = x - l_2 \\ \cdot & \cdot \\ x = l_n + \delta_n & \delta_n = x - l_n. \end{array}$$

Darin nennt man  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  die *scheinbaren Beobachtungsfehler*,  $l_1 + \delta_1, \dots, l_n + \delta_n$  die *ausgeglichenen Beobachtungswerte* und die letztangeschriebenen Gleichungen die *Fehlergleichungen*. Das aufgestellte Prinzip fordert, daß

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \cdots + (x - l_n)^2 = \text{Minimum}$$

sei oder also, daß:

$$(x - l_1) + (x - l_2) + \cdots + (x - l_n) = 0$$

sei. Daraus folgt:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

d. h. der *annehmbarste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel aus den Einzelmessungen*. Für die übrig bleibenden Fehler folgt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 0,$$

eine Gleichung, die zur Kontrolle dienen kann. Um den mittleren Fehler *einer* Messung  $l$  und den mittleren Fehler des Resultates  $x$  abzuleiten, lösen wir folgende allgemeine Aufgabe: Eine Größe  $f$  sei nicht direkt gemessen worden, sondern sei abhängig von den Größen  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , welche direkt gemessen sind; die mittleren Fehler der Messungen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  seien bzw.  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ . Man bestimme den mittleren Fehler von  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Es sei zuerst

$$f = a_1 x_1,$$



wo  $\alpha_1$  eine Konstante und  $x_1$  mit dem mittleren Fehler  $\mu_1$  gemessen ist. Sind  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  die bei den Messungen von  $x_1$  begangenen wahren Fehler, so wird:

$$\mu_1^2 = \frac{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2}{n}.$$

Wenn aber in  $x_1$  der Fehler  $\mathcal{A}$  begangen wurde, so wird  $f$  mit dem Fehler  $\alpha_1 \mathcal{A}$  behaftet sein und der mittlere Fehler von  $f$  wird also:

$$M^2 = \frac{\alpha_1^2 \mathcal{A}_1^2 + \alpha_1^2 \mathcal{A}_2^2 + \dots + \alpha_1^2 \mathcal{A}_n^2}{n} = \alpha_1^2 \mu_1^2.$$

Sei ferner

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

und sei  $x_1$  mit den Fehlern  $\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_2', \dots, \mathcal{A}_n'$

$$x_2 \gg \gg \gg \mathcal{A}_1'', \mathcal{A}_2'', \dots, \mathcal{A}_m''$$

gemessen, dann wird  $f$  folgende  $mn$  Fehler aufweisen:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 \mathcal{A}_1' + \alpha_2 \mathcal{A}_1'' & \alpha_1 \mathcal{A}_2' + \alpha_2 \mathcal{A}_1'' & \alpha_1 \mathcal{A}_n' + \alpha_2 \mathcal{A}_1'' \\ \alpha_1 \mathcal{A}_1' + \alpha_2 \mathcal{A}_2'' & \alpha_1 \mathcal{A}_2' + \alpha_2 \mathcal{A}_2'' & \alpha_1 \mathcal{A}_n' + \alpha_2 \mathcal{A}_2'' \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 \mathcal{A}_1' + \alpha_2 \mathcal{A}_m'' & \alpha_1 \mathcal{A}_2' + \alpha_2 \mathcal{A}_m'' & \alpha_1 \mathcal{A}_n' + \alpha_2 \mathcal{A}_m'' \end{array}$$

und der mittlere Fehler  $M$  von  $f$  wird also gefunden aus

$$M^2 = \frac{\text{Summe der Quadrate aller } mn \text{ Fehler}}{mn}$$

oder

$$mn M^2 = \alpha_1^2 m (\mathcal{A}_1'^2 + \mathcal{A}_2'^2 + \dots + \mathcal{A}_n'^2) + \alpha_2^2 n (\mathcal{A}_1''^2 + \mathcal{A}_2''^2 + \dots + \mathcal{A}_m''^2) + 2 \alpha_1 \alpha_2 \sum_{k=1}^m (\mathcal{A}_1' \mathcal{A}_k'' + \dots + \mathcal{A}_n' \mathcal{A}_k'').$$

Da nun

$$\frac{\mathcal{A}_1'^2 + \mathcal{A}_2'^2 + \dots + \mathcal{A}_n'^2}{n} = \mu_1^2, \quad \frac{\mathcal{A}_1''^2 + \mathcal{A}_2''^2 + \dots + \mathcal{A}_m''^2}{m} = \mu_2^2$$

und

$$\mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_2' + \dots + \mathcal{A}_n' = 0,$$

so folgt:

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2.$$

Nun kann man leicht weiter schließen; ist

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

so setze man

$$f = f_1 + \alpha_3 x_3$$

und hat hiervon dann als mittleren Fehler:

$$M^2 = M_1^2 + \alpha_3^2 \mu_3^2$$

oder

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \alpha_3^2 \mu_3^2.$$

Allgemein: Ist

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

und sind  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  die mittleren Fehler von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so ist der mittlere Fehler von  $f$  zu finden aus

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \mu_n^2.$$

Hat man endlich eine beliebige Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , so kann man nach dem letzten Satze verfahren, wenn die Messungsfehler als klein angenommen werden können. Setzt man nämlich

$$x_1 = l_1 + \lambda_1, \dots, x_m = l_m + \lambda_m,$$

wo die  $l$  gemessene, also genäherte, konstante Werte der  $x$  und somit die  $\lambda$  klein sind, so hat man

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(l_1, l_2, \dots, l_m) + \left( \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial l_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial l_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f}{\partial l_m} \right) + \dots$$

und nun wieder, wenn die höheren Potenzen von  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  vernachlässigt werden, die lineare Form, vermöge welcher wird:

$$M^2 = \mu_1^2 \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 + \mu_2^2 \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 + \dots + \mu_m^2 \left( \frac{\partial f}{\partial l_m} \right)^2.$$

Auf Grund dieses Satzes bestimmen wir den mittleren Fehler des annehmbarsten Wertes

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n},$$

den wir oben gefunden haben. Es wird hier

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$$

und daher, wenn  $\mu_1, \dots, \mu_n$  die mittleren Fehler der Messungen  $l_1, \dots, l_n$  sind:

$$M^2 = \left( \frac{1}{n} \right)^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2).$$

Sind die Messungen gleich genau, also

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu,$$

so wird

$$M^2 = \left( \frac{1}{n} \right)^2 n \mu^2$$

oder

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Um  $\mu$ , den mittleren Fehler *einer* Messung zu erhalten, haben wir bis jetzt:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2}{n}},$$

wo die  $\mathcal{A}$  die wahren Beobachtungsfehler sind. Bekannt sind uns nur die Abweichungen der Einzelmessungen vom annehmbarsten Resultat, nämlich von

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$$

oder die Größen

$$\delta_1 = L - l_1, \quad \delta_2 = L - l_2, \quad \dots \quad \delta_n = L - l_n,$$

während

$$\mathcal{A}_1 = X - l_1, \quad \mathcal{A}_2 = X - l_2, \quad \dots \quad \mathcal{A}_n = X - l_n$$

ist, wo  $X$  den wahren Wert darstellt. Setzt man  $X - L = S$ , so wird

$$\mathcal{A}_1 = \delta_1 + S, \quad \mathcal{A}_2 = \delta_2 + S, \quad \dots \quad \mathcal{A}_n = \delta_n + S$$

und daher

$$\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2) + 2S(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) + nS^2$$

oder, da  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 0$ :

$$\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 + nS^2.$$

$S$  ist völlig unbekannt; wir werden aber offenbar im allgemeinen am besten verfahren, wenn wir dafür den *mittleren* Wert nehmen, den es haben kann, oder wir werden es als sehr plausible Hypothese ansehen dürfen, wenn wir  $S$  gleich dem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels  $L$  setzen, also

$$S = \frac{\sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2}{n}}}{\sqrt{n}}$$

oder

$$nS^2 = \frac{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2}{n} = \mu^2.$$

Damit folgt:

$$A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 + \mu^2$$

und daher

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 + \mu^2}{n}}$$

oder

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{n-1}}.$$

Nach dieser Formel kann der mittlere Fehler *einer* Messung durch die scheinbaren Fehler oder die Abweichungen vom arithmetischen Mittel berechnet werden. Man hat dann auch Rücksicht darauf genommen, daß das arithmetische Mittel vom wahren

Wert der Unbekannten um den Betrag  $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$  abweichen kann.

*Zusammenstellung der Formeln für gleich genaue Messungen einer Größe.*

$l_1, l_2, \dots, l_n$  Messungen der Größe  $x$ .

Annehmbarster Wert von  $x$ :  $\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = L$ .

Einzelfehler:  $\delta_1 = L - l_1, \dots, \delta_n = L - l_n$ .

Mittlerer Fehler einer Messung:  $\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{n-1}}$ .

Mittlerer Fehler des Resultates:  $M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{n(n-1)}}$ .

### 133. Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedenem Gewicht.

Nach der oben gegebenen Definition von »Gewicht« ersetzt eine Messung oder ein Resultat vom Gewichte  $p$   $p$  Beobachtungen vom Gewicht 1. Ist also eine Größe  $x$   $p_1$  mal gemessen und hat jede Messung das Gewicht 1, so hat das arithmetische Mittel aus den  $p_1$  Messungen das Gewicht  $p_1$ . Wird dieselbe Größe noch  $p_2$  mal gemessen und hat wieder jede Messung das Gewicht 1, so hat das arithmetische Mittel aus den  $p_2$  Messungen das Gewicht  $p_2$ . Hat man also die Größe  $x$   $p_1 + p_2$  mal gemessen:

$$\begin{array}{ll} x = l_1 & x = l_{p_1+1} \\ x = l_2 & x = l_{p_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ x = l_{p_1} & x = l_{p_1+p_2} \end{array}$$

und daraus die Mittel gebildet:

$$L_1 = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_{p_1}}{p_1}, \quad L_2 = \frac{l_{p_1+1} + \cdots + l_{p_1+p_2}}{p_2}$$

denen die Gewichte bzw.  $p_1$  und  $p_2$  zukommen, wird der annehmbarste Wert von  $x$  aus allen Messungen nach Nr. 132

$$\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_{p_1} + l_{p_1+1} + \cdots + l_{p_1+p_2}}{p_1 + p_2} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2}{p_1 + p_2}.$$

Dies läßt sich sofort verallgemeinern: hat man  $n$  Resultate

$$\begin{array}{llll} x = L_1 & \text{mit den Gewichten} & p_1 \\ x = L_2 & \text{»} & \text{»} & p_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x = L_n & \text{»} & \text{»} & p_n \end{array}$$

so ist der annehmbarste Wert von  $x$  aus allen:

$$x = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_n L_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \quad 1)$$

Nennen wir  $\mu$  den mittleren Fehler einer Messung vom Gewichte 1, so wird der mittlere Fehler von  $L_1$  mit dem Gewichte  $p_1$ :

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}.$$

Daraus folgt:

$$p_1 = \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^2$$

und ebenso

$$p_2 = \left( \frac{\mu}{\mu_2} \right)^2$$

$$\vdots$$

$$p_n = \left( \frac{\mu}{\mu_n} \right)^2$$

d. h.

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \cdots : \frac{1}{\mu_n^2} \quad \text{oder:}$$

*Die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.*

Mit Hilfe dieses Satzes kann das Gewicht und der mittlere Fehler des annehmbarsten Wertes 1) gefunden werden. In der Tat wird letzterer gefunden aus:

$$M^2 = \frac{p_1^2 \mu_1^2 + p_2^2 \mu_2^2 + \cdots + p_n^2 \mu_n^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2},$$

wenn  $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$  die mittleren Fehler von  $L_1, L_2, \cdots, L_n$  sind. Ist ferner  $\mu$  der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, so wird

$$\mu_1^2 : \mu_2^2 : \cdots : \mu_n^2 : \mu^2 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \cdots : \frac{1}{p_n} : 1$$

oder

$$\mu^2 = p_1 \mu_1^2 = p_2 \mu_2^2 = \cdots = p_n \mu_n^2$$

mithin:

$$M^2 = \frac{\mu^2 (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} = \frac{\mu^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

oder

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}.$$

Nennt man  $P$  das Gewicht des Ausdruckes 1), so ist auch:

$$P = \left(\frac{\mu}{M}\right)^2$$

und somit

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

und

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}},$$

d. h. das Gewicht des Resultates ist gleich der Summe der Gewichte der Einzelresultate und der mittlere Fehler desselben ist gleich dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Gewicht des Resultates.

Es erübrigt noch, den mittleren Fehler der Gewichtseinheit  $\mu$  zu ermitteln. Ist  $\mu_1$  der mittlere Fehler von  $L_1$ , so ist  $\sqrt{p_1}\mu_1 = \mu$  der mittlere Fehler von  $\sqrt{p_1}L_1$ . Multipliziert man also die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} x = L_1 & \text{Gewicht } p_1 \\ x = L_2 & \text{» } p_2 \\ \cdot & \cdot \\ x = L_n & \text{» } p_n \end{array}$$

mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten, so haben die entstehenden Gleichungen

$$\begin{array}{l} \sqrt{p_1}x = \sqrt{p_1}L_1 \\ \sqrt{p_2}x = \sqrt{p_2}L_2 \\ \cdot \\ \sqrt{p_n}x = \sqrt{p_n}L_n \end{array}$$

alle als mittleren Fehler den der Gewichtseinheit, d. h. sie sind alle von derselben Genauigkeit und alle vom Gewichte 1. Weichen die  $L_1, L_2, \dots, L_n$  von

$$x = \frac{p_1 L_1 + \dots + p_n L_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

um bzw.  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  ab, so weichen die  $\sqrt{p_1}L_1, \dots, \sqrt{p_n}L_n$  um  $\sqrt{p_1}\delta_1, \dots, \sqrt{p_n}\delta_n$  von  $\sqrt{p_1}x, \dots, \sqrt{p_n}x$  ab und der mittlere Fehler einer der Gleichungen, der nach obigem identisch ist  $\mu$ , dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, wird also nach Nr. 132

$$\mu = \sqrt{\frac{p_1 \delta_1^2 + \dots + p_n \delta_n^2}{n - 1}}.$$

*Zusammenstellung der Formeln für direkte Messungen einer Größe von verschiedenem Gewicht.*

$L_1, L_2, \dots, L_n$  Bestimmungen einer Größe,

$p_1, p_2, \dots, p_n$  Gewichte der einzelnen Bestimmungen.

Annehmbarster Wert der Größe  $x = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + \dots + p_n L_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  Abweichungen der  $L_1, \dots, L_n$  von  $x$ .

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit  $\mu = \sqrt{\frac{p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \dots + p_n \delta_n^2}{n - 1}}.$

Mittlerer Fehler des Resultates  $x: M = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \dots + p_n}} = \frac{\mu}{\sqrt{P}}.$

Gewicht des Resultates:  $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$



Die Bedingung des Minimums erfordert:

$$\begin{aligned}\delta_1 \frac{d\delta_1}{dx} + \delta_2 \frac{d\delta_2}{dx} + \cdots + \delta_n \frac{d\delta_n}{dx} &= 0 \\ \delta_1 \frac{d\delta_1}{dy} + \delta_2 \frac{d\delta_2}{dy} + \cdots + \delta_n \frac{d\delta_n}{dy} &= 0 \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

Nun ist nach 2)

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_1}{dx} &= a_1, \quad \frac{d\delta_2}{dx} = a_2, \dots \\ \frac{d\delta_1}{dy} &= b_1, \quad \frac{d\delta_2}{dy} = b_2, \dots\end{aligned}$$

also werden die Bedingungen des Minimums

$$\begin{aligned}\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_n a_n &= 0 \quad \text{oder} \quad [\delta a] = 0 \\ \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_n b_n &= 0 \quad \text{oder} \quad [\delta b] = 0 \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

oder wenn nach 1) die Werte  $\delta_1, \delta_2, \dots$  eingetragen werden:

$$\begin{aligned}(a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1) a_1 + (a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2) a_2 + \cdots &= 0 \\ (a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1) b_1 + (a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2) b_2 + \cdots &= 0 \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

oder endlich, wenn ausmultipliziert wird:

$$\begin{aligned}[aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots &= [cl] \\ \dots &\dots\end{aligned} \tag{3}$$

( $m$  Gleichungen mit  $m$  Unbekannten).

Dies sind so viele Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind und aus ihnen geht also das vollständig bestimmte System  $x, y, z, \dots$  von der gewünschten Eigenschaft hervor. Man nennt die Gleichungen 3) die *Normalgleichungen*.

Wir wollen die bisher gemachte Voraussetzung, daß die  $l_1, \dots, l_n$  mit gleicher Genauigkeit gemessen seien, fallen lassen und annehmen, daß den Gl. 1) der Reihe nach die Gewichte  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zukommen. Die aufzustellende Bedingung wird dann nach der Definition des »Gewichtes«

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \cdots + p_n \delta_n^2 = \text{Minimum}$$

oder:

$$(\sqrt{p_1} \delta_1)^2 + (\sqrt{p_2} \delta_2)^2 + \cdots + (\sqrt{p_n} \delta_n)^2 = \text{Minimum}.$$

Daraus folgt, daß man die Gl. 1) ganz ebenso wie Gleichungen von gleichem Gewicht behandeln kann, wenn man sie vorher mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten multipliziert hat.

Die Gleichungen 1) werden dann:

$$\begin{aligned}\sqrt{p_1} a_1 x + \sqrt{p_1} b_1 y + \cdots &= \sqrt{p_1} l_1 \\ \dots &\dots \\ \sqrt{p_n} a_n x + \sqrt{p_n} b_n y + \cdots &= \sqrt{p_n} l_n\end{aligned} \tag{4}$$

und daher die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [aap]x + [abp]y + \dots &= [alp] \\ [bap]x + [bbp]y + \dots &= [blp] \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad 5)$$

wo allgemein:

$$[abp] = a_1 b_1 p_1 + a_2 b_2 p_2 + \dots + a_n b_n p_n.$$

Wir können daher im folgenden den einfacheren Fall von Gleichungen gleichen Gewichtes voraussetzen, da er durch eine einfache Operation sofort hergestellt werden kann; und zwar können wir dieses Gewicht als gleich 1 annehmen; denn wenn die ursprüngliche Gleichung mit dem Gewicht  $p_i$  nach Einsetzung der annehmbarsten Werte der Unbekannten den Restfehler  $\delta_i$  läßt, so läßt die mit  $\sqrt{p_i}$  multiplizierte Gleichung den Fehler  $\sqrt{p_i} \delta_i$ , und da sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der Fehler verhalten, so kommt der mit  $\sqrt{p_i}$  multiplizierten Gleichung das Gewicht 1 zu.

Die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung und des mittleren Fehlers jeder Unbekannten gelingt wie folgt. Die Algebra lehrt, daß die Auflösung der Normalgleichungen 3) die Unbekannten  $x_1, y_1, \dots$  in folgender Form liefert:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad 6)$$

Ist  $\mu$  der mittlere Fehler eines  $l$  vom Gewichte 1, so werden also nach dem in Nr. 132 bewiesenen allgemeinen Satz die mittleren Fehler der Unbekannten, die wir mit  $\mu_x, \mu_y, \dots$  bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sqrt{\mu^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)} = \mu \sqrt{[\alpha\alpha]} \\ \mu_y &= \sqrt{\mu^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2)} = \mu \sqrt{[\beta\beta]} \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad 7)$$

Wir werden nun zuerst zeigen, wie  $\mu$  bestimmt wird, und dann, wie die  $[\alpha\alpha]$ ,  $[\beta\beta]$  aus der Auflösung der Normalgleichungen sich ergeben. Es seien  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  die Restfehler, welche übrig bleiben, wenn die gefundenen Werte von  $x, y, z, \dots$  in die (eventuell auf gleiches Gewicht gebrachten) Bedingungsgleichungen 1) oder 4) eingetragen werden. Da diese Werte der Unbekannten nicht die wahren sind, so werden auch die übrig bleibenden Fehler nicht die wirklichen Beobachtungsfehler sein. Wir wollen die wahren Werte der Unbekannten mit  $X, Y, Z$  bezeichnen und die dann übrig bleibenden Fehler der Bedingungsgleichungen mit  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ . Dann ist nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\mathcal{A}\mathcal{A}]}{n}},$$

wo also:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + \dots \\ \mathcal{A}_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + \dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad X, Y, \dots \text{ wahre Werte,} \quad 8)$$

während nach 2)

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + \dots \\ \delta_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + \dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad x, y, \dots \text{ annehmbarste Werte.} \quad 9)$$



Multipliziert man 8) der Reihe nach mit  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  und addiert, so kommt:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = -[l\mathcal{A}] + X[a\mathcal{A}] + Y[b\mathcal{A}] + \dots \quad (10)$$

und ebenso folgt aus 9)

$$[\delta\delta] = -[l\delta] + x[a\delta] + y[b\delta] + \dots$$

Nun lauten die oben aufgestellten Bedingungen des Minimums:

$$[a\delta] = [b\delta] = \dots = 0,$$

also wird:

$$[\delta\delta] = -[l\delta]. \quad (11)$$

Ferner ergibt sich aus 8)

$$[\mathcal{A}\delta] = -[l\delta] + X[a\delta] + Y[b\delta] + \dots$$

oder

$$[\mathcal{A}\delta] = -[l\delta],$$

also ist

$$[\delta\delta] = [\mathcal{A}\delta]. \quad (12)$$

Endlich folgt aus 9)

$$[\delta\mathcal{A}] = -[l\mathcal{A}] + x[a\mathcal{A}] + y[b\mathcal{A}] + \dots$$

Wird dies mit 10) durch Subtraktion verbunden und 12) beachtet, so hat man:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = [\delta\delta] + [a\mathcal{A}](X - x) + [b\mathcal{A}](Y - y) + \dots \quad (13)$$

Die Differenzen  $X - x, Y - y, \dots$  sind völlig unbekannt; man muß also wieder eine Abschätzung ihrer Werte vornehmen, was wie folgt gelingt. Denkt man sich die wahren Werte  $X, Y, Z, \dots$  in die Bedingungsgleichungen eingetragen, so wird daraus

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y + \dots &= l_1 + \mathcal{A}_1 \\ a_2 X + b_2 Y + \dots &= l_2 + \mathcal{A}_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

und wenn man die Normalgleichungen bildet

$$\begin{aligned} [aa]X + [ab]Y + \dots &= [a, l + \mathcal{A}] \\ [ba]X + [bb]Y + \dots &= [b, l + \mathcal{A}], \\ &\dots \end{aligned}$$

so folgt durch deren Auflösung ebenso wie in 6)

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1(l_1 + \mathcal{A}_1) + \alpha_2(l_2 + \mathcal{A}_2) + \dots + \alpha_n(l_n + \mathcal{A}_n) \\ Y &= \beta_1(l_1 + \mathcal{A}_1) + \beta_2(l_2 + \mathcal{A}_2) + \dots + \beta_n(l_n + \mathcal{A}_n), \\ &\dots \end{aligned}$$

wo die  $\alpha, \beta, \dots$  dieselben Werte haben wie in den Ausdrücken 6) von  $x, y, z, \dots$

Also folgt:

$$X - x = [\alpha\mathcal{A}], \quad Y - y = [\beta\mathcal{A}], \dots$$

und der Ausdruck 13) kann also zunächst so geschrieben werden:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = [\delta\delta] + [a\mathcal{A}][\alpha\mathcal{A}] + [b\mathcal{A}][\beta\mathcal{A}] + \dots$$

Nun ist:

$$[a\mathcal{A}][\alpha\mathcal{A}] = (\alpha_1 a_1 \mathcal{A}_1^2 + \alpha_2 a_2 \mathcal{A}_2^2 + \dots + \alpha_n a_n \mathcal{A}_n^2) + \sum \alpha_i a_k \mathcal{A}_i \mathcal{A}_k;$$

die Summe kann man gleich Null setzen, da jedem Fehler  $+ \mathcal{A}_i$  ein Fehler  $- \mathcal{A}_i$  entsprechen wird; für den ersten Teil aber muß man Mittelwerte einführen. Der mittlere Wert von  $\mathcal{A}_i^2$  kann offenbar

$$\frac{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \dots + \mathcal{A}_n^2}{n} = \mu^2$$

geschätzt werden; ebenso der von  $\mathcal{A}_2^2, \dots, \mathcal{A}_n^2$ . Es wird also der mittlere Wert von

$$[a\mathcal{A}][\alpha\mathcal{A}] = \mu^2[\alpha a]$$

und ebenso wird im Mittel:

$$[b\mathcal{A}][\beta\mathcal{A}] = \mu^2[\beta b].$$

Dies gibt:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = [\delta\delta] + \mu^2([\alpha a] + [\beta b] + \dots) \quad 14)$$

( $m$  Glieder, wenn  $m$  die Anzahl der Unbekannten ist.)

Der Wert der Klammergröße wird zugleich mit einigen später gebrauchten Relationen wie folgt erhalten. Trägt man

$$x = [\alpha l], \quad y = [\beta l], \dots$$

in die Normalgleichungen ein, so entstehen die Identitäten:

$$\begin{aligned} [aa][\alpha l] + [ab][\beta l] + \dots &= [\alpha l] \\ [ba][\alpha l] + [bb][\beta l] + \dots &= [\beta l] \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von  $l_1, l_2, \dots, l_n$  in diesen  $m$  Gleichungen erhält man die  $m$  Gruppen von je  $n$  Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha_1[aa] + \beta_1[ab] + \dots &= a_1 \\ \alpha_2[aa] + \beta_2[ab] + \dots &= a_2 \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad \text{A.}$$

$n$  Gleichungen.

$$\begin{aligned} \alpha_1[ba] + \beta_1[bb] + \dots &= b_1 \\ \alpha_2[ba] + \beta_2[bb] + \dots &= b_2 \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad \text{B.}$$

$n$  Gleichungen.

$\dots$

$m$  Gruppen.

Multipliziert man die Gl. A. der Reihe nach mit  $a_1, a_2, \dots$  und addiert; dann die Gl. B. mit  $a_1, a_2, \dots$  und addiert usf., so kommen die  $m$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} [aa][\alpha a] + [ab][\beta a] + \dots &= [\alpha a] \\ [ba][\alpha a] + [bb][\beta a] + \dots &= [\alpha a] \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Nennt man

$$[\alpha a] - 1 = \xi, \quad [\beta a] = \eta, \dots,$$

so werden diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + \dots &= 0 \\ [ba]\xi + [bb]\eta + \dots &= 0, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

und da die Determinante

$$\begin{vmatrix} [aa], [ab], \dots \\ [ba], [bb], \dots \\ \dots \end{vmatrix},$$

welche auch die des Systems der Normalgleichungen ist, nicht verschwindet, so muß sein:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \dots$$

d. h.

$$[\alpha a] = 1, \quad [\beta a] = 0, \dots \quad 15)$$

Multipliziert man die Gl. A., B., ... mit  $b_1, b_2, \dots$ , so erhält man auf dieselbe Weise

$$[\beta a] = 0, \quad [\beta b] = 1, \dots \text{ usf.} \quad 15^a)$$

Multipliziert man die Gl. A. mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und addiert, ferner B. mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und addiert usf., so kommt:

$$\begin{aligned} [\alpha \alpha][aa] + [\beta \alpha][ba] + \dots &= [\alpha a] = 1 \\ [\alpha \alpha][ab] + [\beta \alpha][bb] + \dots &= [\beta a] = 0. \end{aligned} \quad 16)$$

Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man A., B., ... mit  $\beta_1, \beta_2, \dots$  multipliziert.

Multipliziert man endlich die Gl. 16) der Reihe nach mit  $\alpha_1, \beta_1, \dots$ , dann mit  $\alpha_2, \beta_2, \dots$  und addiert jedesmal, so erscheint mit Rücksicht auf A., B., ...

$$\begin{aligned} [\alpha \alpha]a_1 + [\beta \alpha]b_1 + \dots &= \alpha_1 \\ [\alpha \alpha]a_2 + [\beta \alpha]b_2 + \dots &= \alpha_2 \\ \dots \dots \dots \text{ usf.} \end{aligned} \quad 17)$$

Gehen wir jetzt auf 14) zurück, so wird daraus nach 15)

$$[AA] = [\delta \delta] + m\mu^2.$$

Da nun

$$\mu^2 = \frac{[AA]}{n},$$

so folgt

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta \delta]}{n - m}}. \quad 18)$$

Hierin sind die  $\delta$  die Restfehler von den auf gleiches Gewicht 1 gebrachten  $n$  Bedingungsgleichungen mit  $m$  Unbekannten. Ermittelt man, wie das häufig geschieht, die Restfehler  $\lambda$  der ursprünglichen Bedingungsgleichungen, welche die Gewichte  $p_1, \dots, p_n$  haben, so wird nach den obigen Überlegungen

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \lambda \lambda]}{n - m}}. \quad 18^a)$$

Ist  $m = 1$ , so erhält man die früher in Nr. 132, 133 aufgestellten Formeln für eine Unbekannte.

Nachdem jetzt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit festgestellt ist, bedarf es, um die mittleren Fehler der Unbekannten zu bestimmen, nach den Formeln 7) nur mehr der Bestimmung von  $[\alpha \alpha], [\beta \beta], \dots$ , zu der wir nun übergehen. Wir verbinden dieselbe mit der Darlegung einer Methode, nach welcher das System der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + \dots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + \dots &= [bl] \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$



aus den Gleichungen I., II., III., . . . , so erhält man die Unbekannten  $A, B, C, \dots$  aus den Gl. (a), (b), (c), . . . Man zeigt leicht, daß die  $Q_{ik}$  ebenfalls ein symmetrisches System bilden, d. h. daß  $Q_{ik} = Q_{ki}$  ist. Multipliziert man z. B. die Gl. I. der Reihe nach mit  $Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \dots$ , addiert und gruppiert in anderer Weise, so folgt:

$$\begin{aligned} & ([aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + \dots)Q_{11} \\ & + ([ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + \dots)Q_{12} \\ & + ([ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} + \dots)Q_{13} \\ & + \dots = Q_{21} \end{aligned}$$

oder nach II.

$$Q_{12} = Q_{21}.$$

Daraus folgt, daß wenn man das System 19) auflöst, indem man für  $[aa], [ab], \dots$  die Zahlenwerte einsetzt, die  $P, R, S, \dots$  aber in diesen algebraischen Zeichen beibehält, sich die Unbekannten  $A, B, C, \dots$  in den Formen (a), (b), (c), . . . ergeben, womit gleichzeitig die Koeffizienten  $Q_{ik}$  als die Faktoren der  $P, R, S, \dots$  bekannt werden.

Setzt man  $P = [al], R = [bl], S = [cl], \dots$ , so geht das System 19) in das der ursprünglichen Normalgleichungen über und es wird  $x = A, y = B, z = C, \dots$  oder

$$\begin{aligned} x &= [al]Q_{11} + [bl]Q_{12} + [cl]Q_{13} + \dots \\ y &= [al]Q_{21} + [bl]Q_{22} + [cl]Q_{23} + \dots \\ z &= [al]Q_{31} + [bl]Q_{32} + [cl]Q_{33} + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad 20)$$

Daraus folgt die *Regel*: Man setzt für  $[aa], [ab], \dots$  ihre numerischen Werte, für  $[al], [bl], \dots$  aber unbestimmte Zeichen  $P, R, S, \dots$  und löst die Normalgleichungen auf; es erscheinen dann die Unbekannten in der Form

$$\begin{aligned} x &= PQ_{11} + RQ_{12} + SQ_{13} + \dots \\ y &= PQ_{21} + RQ_{22} + SQ_{23} + \dots \\ z &= PQ_{31} + RQ_{32} + SQ_{33} + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

ersetzt man hier  $P, Q, \dots$  durch  $[al], [bl], \dots$ , so hat man die Werte der Unbekannten. (*Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen.*) Gleichzeitig hat man die Koeffizienten  $Q_{ik}$  erlangt, die, wie jetzt gezeigt werden soll, zur Berechnung der mittleren Fehler dienen. Vergleicht man die Darstellung 20) der Unbekannten mit der früheren (Gl. 6) Seite 404), nämlich

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n \\ &\dots \end{aligned} \quad 21)$$

so erkennt man, daß:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13} + \dots \\ \alpha_2 &= a_2 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13} + \dots \\ \alpha_3 &= a_3 Q_{11} + b_3 Q_{12} + c_3 Q_{13} + \dots \\ &\dots \\ \beta_1 &= a_1 Q_{21} + b_1 Q_{22} + c_1 Q_{23} + \dots \\ \beta_2 &= a_2 Q_{21} + b_2 Q_{22} + c_2 Q_{23} + \dots \\ \beta_3 &= a_3 Q_{21} + b_3 Q_{22} + c_3 Q_{23} + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Daraus folgt aber:

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= [a\alpha]Q_{11} + [b\alpha]Q_{12} + [c\alpha]Q_{13} + \dots \\ [\beta\beta] &= [a\beta]Q_{21} + [b\beta]Q_{22} + [c\beta]Q_{23} + \dots \end{aligned}$$

oder nach 15) (Seite 407)

$$[\alpha\alpha] = Q_{11}, \quad [\beta\beta] = Q_{22}, \quad \dots \quad (22)$$

Man hat also nach 7) für die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{11}}, \quad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{22}}, \quad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{33}}, \quad \dots \quad (23)$$

worin die  $Q_{11}, Q_{22}, \dots$  durch die unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen bekannt geworden sind.

Nennt man  $p_x, p_y, \dots$  die *Gewichte* der Unbekannten, so ist

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad \dots$$

und daher

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}, \quad p_y = \frac{1}{Q_{22}}, \quad \dots \quad (24)$$

d. h. die Gewichte der Unbekannten sind die reziproken Werte der Koeffizienten  $Q_{11}, Q_{22}, \dots$

Die übrigen  $Q$  stehen gleichfalls in einer einfachen Beziehung zu den  $\alpha, \beta, \dots$ ; in der Tat folgt:

$$[\alpha\beta] = [a\beta]Q_{11} + [b\beta]Q_{12} + [c\beta]Q_{13} + \dots$$

oder

$$[\alpha\beta] = Q_{12}.$$

Ebenso

$$[\alpha\gamma] = Q_{13}, \quad [\beta\gamma] = Q_{23} \quad \text{usf.}$$

Multipliziert man die obigen Gleichungen für  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$  der Reihe nach mit den Restfehlern  $\delta_1, \delta_2, \dots$ , so erhält man vermöge der früher abgeleiteten Gleichungen  $[\delta a] = 0, [\delta b] = 0, \dots$ :

$$[\delta\alpha] = 0, \quad [\delta\beta] = 0, \quad [\delta\gamma] = 0, \quad \dots \quad (25)$$

die zur Kontrolle dienen können, wenn man sich die Mühe nimmt, die  $\alpha, \beta, \dots$  zu berechnen.

### 135. Der Gaußsche Algorithmus zur Auflösung der Normalgleichungen.

Die eben gegebene, theoretisch grundlegende Lösungsmethode der Normalgleichungen kann in praxi nur selten zur Anwendung kommen, da sie nur bequem ausführbar ist, wenn die Koeffizienten in den Normalgleichungen runde Zahlen und viele derselben gleich Null sind. Im allgemeinen Falle schlägt man folgendes von Gauß gegebene Eliminationsverfahren ein, das wir für vier Unbekannte in extenso ansetzen mit dem Bemerkung, daß es sich ohne weiteres auf beliebig viele Unbekannte ausdehnen läßt. Es seien die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t &= [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + [cd]t &= [cl] \\ [da]x + [db]y + [dc]z + [dd]t &= [dl]. \end{aligned} \quad 1)$$

Wird der aus der ersten folgende Wert von  $x$ :

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t + \frac{[al]}{[aa]}$$

in die drei übrigen eingetragen, so kommt:

$$\begin{aligned} \left([bb] - \frac{[ab][ba]}{[aa]}\right)y + \left([bc] - \frac{[ac][ba]}{[aa]}\right)z + \left([bd] - \frac{[ad][ba]}{[aa]}\right)t &= [bl] - \frac{[al][ba]}{[aa]} \\ \left([cb] - \frac{[ab][ca]}{[aa]}\right)y + \left([cc] - \frac{[ac][ca]}{[aa]}\right)z + \left([cd] - \frac{[ad][ca]}{[aa]}\right)t &= [cl] - \frac{[al][ca]}{[aa]} \\ \left([db] - \frac{[ab][da]}{[aa]}\right)y + \left([dc] - \frac{[ac][da]}{[aa]}\right)z + \left([dd] - \frac{[ad][da]}{[aa]}\right)t &= [dl] - \frac{[al][da]}{[aa]}. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich sofort, daß dieses System wieder ein symmetrisches ist. Setzt man es kurz so an:

$$\begin{aligned} [bb_1]y + [bc_1]z + [bd_1]t &= [bl_1] \\ [bc_1]y + [cc_1]z + [cd_1]t &= [cl_1] \\ [bd_1]y + [dc_1]z + [dd_1]t &= [dl_1] \end{aligned} \quad 2)$$

so ist die Bedeutung der Koeffizienten unmittelbar ersichtlich. Man kann auch leicht zeigen, daß die Koeffizienten der Diagonalreihe ebenfalls Quadratsummen sind, also sämtlich positiv sein müssen; in der Tat ist:

$$[bb_1] = [bb] - \frac{[ab][ba]}{[aa]} = \frac{[aa][bb] - [ab][ba]}{[aa]} = \left(\frac{a_1b_2 - b_1a_2}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \dots$$

Das System 2) wird nun genau so behandelt wie 1), d. h. man setzt

$$y = -\frac{[bc_1]}{[bb_1]}z - \frac{[bd_1]}{[bb_1]}t + \frac{[bl_1]}{[bb_1]}$$

in die beiden letzten Gleichungen ein, setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} [cc_1] - \frac{[bc_1][bc_1]}{[bb_1]} &= [cc_2], & [cl_1] - \frac{[bl_1][bc_1]}{[bb_1]} &= [cl_2] \\ [cd_1] - \frac{[bd_1][bc_1]}{[bb_1]} &= [cd_2], & [dl_1] - \frac{[bl_1][bd_1]}{[bb_1]} &= [dl_2] \\ [dd_1] - \frac{[bd_1][bd_1]}{[bb_1]} &= [dd_2], \end{aligned}$$

und erhält:

$$\begin{aligned} [cc_2]z + [cd_2]t &= [cl_2] \\ [cd_2]z + [dd_2]t &= [dl_2] \end{aligned} \quad 3)$$

wovon dasselbe gilt, wie von 2).

Wir fahren fort und tragen

$$z = -\frac{[cd_2]}{[cc_2]}t + \frac{[cl_2]}{[cc_2]}$$

in die letzte Gleichung ein, worauf, wenn

$$\begin{aligned} [dd_2] - \frac{[cd_2][cd_2]}{[cc_2]} &= [dd_3] \\ [dl_2] - \frac{[cl_2][cd_2]}{[cc_2]} &= [dl_3] \end{aligned}$$

gesetzt wird, erscheint:

$$[dd_3]t = [dl_3] \quad 4)$$

Stellt man die sukzessive erlangten Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t &= [al] \\ [bb_1]y + [bc_1]z + [bd_1]t &= [bl_1] \\ [cc_2]z + [cd_2]t &= [cl_2] \\ [dd_3]t &= [dl_3] \end{aligned} \quad 5)$$

so erkennt man, daß die letzte  $t$  ergibt, dann die vorletzte  $z$  usf. Man nennt die Gleichungen 5) die *Eliminationsgleichungen* oder in der bequemer Form:

$$\begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t &= \frac{[al]}{[aa]} \\ y + \frac{[bc_1]}{[bb_1]}z + \frac{[bd_1]}{[bb_1]}t &= \frac{[bl_1]}{[bb_1]} \\ z + \frac{[cd_2]}{[cc_2]}t &= \frac{[cl_2]}{[cc_2]} \\ t &= \frac{[dl_3]}{[dd_3]} \end{aligned} \quad 6)$$

die *reduzierten Normalgleichungen*. Die Koeffizienten derselben lassen sich durch ein ganz mechanisches Verfahren bilden, ohne daß man auf die angegebenen Formeln rekurrieren müßte. Wir werden dies unten an einem Beispiel auseinandersetzen.

Ein besonderes Verfahren zur Ermittlung der Unbekannten aus 6) abzuleiten, ist eigentlich kaum nötig, doch kann zuweilen die unabhängige Berechnung einer Unbekannten von Nutzen sein. Schreibt man 6) in der abgekürzten Form:

$$\begin{aligned} x + A_1y + B_1z + C_1t &= \chi_1 \\ y + B_2z + C_2t &= \chi_2 \\ z + C_3t &= \chi_3 \\ t &= \chi_4 \end{aligned} \quad 6^a)$$

und multipliziert diese Gleichungen der Reihe nach mit  $1, -A_1, -A_2, -A_3$ , wo  $A_2$  und  $A_3$  noch zu bestimmende Koeffizienten sind, und addiert, so wird:

$$x = \chi_1 - A_1\chi_2 - A_2\chi_3 - A_3\chi_4,$$

wenn man  $A_2$  und  $A_3$  so bestimmt, daß die Koeffizienten von  $z$  und  $t$  gleich Null werden, d. h. wenn man die Gleichungen

$$\begin{aligned} B_1 - A_1B_2 - A_2 &= 0 \\ C_1 - A_1C_2 - A_2C_3 - A_3 &= 0 \end{aligned}$$

befriedigt; dies gibt aber

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1 - A_1B_2 \\ A_3 &= C_1 - A_1C_2 - A_2C_3. \end{aligned} \quad 7)$$

Multipliziert man ebenso, um  $y$  zu finden, die drei letzten Gleichungen 6<sup>a</sup>) mit  $1, -B_2, -B_3$  und addiert, so wird

$$y = \chi_2 - B_2\chi_3 - B_3\chi_4,$$

wenn gesetzt wird

$$B_3 = C_2 - B_2C_3. \quad 8)$$

Endlich folgt aus den beiden letzten Gleichungen 6<sup>a</sup>)

$$z = \chi_3 - C_3\chi_4, \quad t = \chi_4.$$



Rechnet man also aus 7) und 8) die Koeffizienten  $A_2, A_3, B_3$ , so hat man folgende direkte, lineare Darstellung der Unbekannten in den  $\chi$ :

$$\begin{aligned} x &= \chi_1 - A_1 \chi_2 - A_2 \chi_3 - A_3 \chi_4 \\ y &= \chi_2 - B_2 \chi_3 - B_3 \chi_4 \\ z &= \chi_3 - C_3 \chi_4 \\ t &= \chi_4, \end{aligned} \quad 9)$$

woraus man sie in beliebiger Reihenfolge berechnen kann.

Wir kommen nun zur Berechnung der *Gewichte und der mittleren Fehler der Unbekannten*. Man muß hierzu  $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44}$  aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} + [ad]Q_{14} &= 1 \\ [ba]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} + [bd]Q_{14} &= 0 \\ [ca]Q_{11} + [cb]Q_{12} + [cc]Q_{13} + [cd]Q_{14} &= 0 \\ [da]Q_{11} + [db]Q_{12} + [dc]Q_{13} + [dd]Q_{14} &= 0 \end{aligned} \quad 10)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + [ad]Q_{24} &= 0 \\ [ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + [bd]Q_{24} &= 1 \\ [ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} + [cd]Q_{24} &= 0 \\ [da]Q_{21} + [db]Q_{22} + [dc]Q_{23} + [dd]Q_{24} &= 0 \end{aligned} \quad 11)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} + [ad]Q_{34} &= 0 \\ [ba]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} + [bd]Q_{34} &= 0 \\ [ca]Q_{31} + [cb]Q_{32} + [cc]Q_{33} + [cd]Q_{34} &= 1 \\ [da]Q_{31} + [db]Q_{32} + [dc]Q_{33} + [dd]Q_{34} &= 0 \end{aligned} \quad 12)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{41} + [ab]Q_{42} + [ac]Q_{43} + [ad]Q_{44} &= 0 \\ [ba]Q_{41} + [bb]Q_{42} + [bc]Q_{43} + [bd]Q_{44} &= 0 \\ [ca]Q_{41} + [cb]Q_{42} + [cc]Q_{43} + [cd]Q_{44} &= 0 \\ [da]Q_{41} + [db]Q_{42} + [dc]Q_{43} + [dd]Q_{44} &= 1 \end{aligned} \quad 13)$$

Wie man sieht, sind dies links genau dieselben Gleichungen wie die Normalgleichungen, nur rechts stehen andere Zahlenwerte; man kann sie also mit demselben Algorithmus auflösen wie diese, wenn man an Stelle der  $[bl_1], [cl_2], [dl_3], \dots$  die entsprechenden Werte einsetzt. Dadurch vereinfachen sich aber die Gleichungen wesentlich, mit Ausnahme von 10), welche ungeändert zur Ermittlung von  $Q_{11}$  herangezogen werden müssen. Dagegen führt die oben für die Normalgleichungen durchgeführte Rechnung, angewendet auf 11), unter Beachtung, daß hier

$$[al] = 0, \quad [bl] = 1, \quad [cl] = 0, \quad [dl] = 0,$$

also

$$[bl_1] = 1, \quad [cl_1] = 0, \quad [dl_1] = 0$$

wird, zu den Gleichungen (vgl. Gl. 2))

$$\begin{aligned} [bb_1]Q_{22} + [bc_1]Q_{23} + [bd_1]Q_{24} &= 1 \\ [bc_1]Q_{22} + [cc_1]Q_{23} + [cd_1]Q_{24} &= 0 \\ [bd_1]Q_{22} + [dc_1]Q_{23} + [dd_1]Q_{24} &= 0 \end{aligned} \quad 14)$$

woraus sich  $Q_{22}$  ergibt.

Ferner ist für die Gl. 12)

$$[al] = 0, \quad [bl] = 0, \quad [cl] = 1, \quad [dl] = 0,$$

also

$$\begin{aligned} [bl_1] &= 0, & [cl_2] &= 1 \\ [cl_1] &= 1, & [dl_2] &= 0 \\ [dl_1] &= 0 \end{aligned}$$

und daher nach 3):

$$\begin{aligned} [ce_2] Q_{33} + [cd_2] Q_{34} &= 1 \\ [cd_2] Q_{33} + [dd_2] Q_{34} &= 0, \end{aligned} \quad 15)$$

woraus sich  $Q_{33}$  findet.

Endlich ist für die Auflösung von 13) zu setzen:

$$[al] = 0, \quad [bl] = 0, \quad [cl] = 0, \quad [dl] = 1,$$

also

$$\begin{aligned} [bl_1] &= 0, & [cl_2] &= 0, & [dl_3] &= 1 \\ [cl_1] &= 0, & [dl_2] &= 1 \\ [dl_1] &= 1, \end{aligned}$$

so daß nach 4) kommt:

$$[dd_3] Q_{44} = 1, \quad 16)$$

wodurch  $Q_{44}$  gegeben ist. Die Gleichungen 10), 14), 15), 16) nennt man die *Gewichtsgleichungen*.

Aus 16) ersieht man, daß

$$Q_{44} = \frac{1}{[dd_3]}$$

und da  $Q_{44}$  der reziproke Wert des Gewichtes der Unbekannten  $t$  ist, so erkennt man, daß in der letzten Eliminationsgleichung

$$[dd_3]t = [dl_3]$$

der Koeffizient der Unbekannten ihr Gewicht ist. Hiernach könnte man die Gewichte der Unbekannten auch so erhalten, daß man eine nach der anderen an den Schluß stellt und die Gleichungen von neuem auflöst. In der Regel ist jedoch der Gebrauch der Gewichtsgleichungen kürzer, insbesondere wenn man die Auflösung derselben durch Hinzufügung entsprechender Kolumnen gleich mit der Auflösung der Normalgleichungen für die Unbekannten verbindet, wie an dem unten folgenden Beispiel gezeigt werden soll.

Hat man das Seite 412 beschriebene Verfahren zur Auflösung der Eliminationsgleichungen eingeschlagen, so kann man mit den dort zur Verwendung gelangten Koeffizienten  $A, B, C$  auch die Gewichte bestimmen, was sich oft kürzer stellt, namentlich wenn man nur auf das Gewicht einer bestimmten Unbekannten Wert legt. Vergleicht man  $[dd_3]t = [dl_3]$  mit  $[dd_3]Q_{44} = 1$ , so ersieht man, daß  $t$  in  $Q_{44}$  übergeht, wenn man 1 statt  $[dl_3]$  setzt; man hat also, wie bereits bekannt,

$$Q_{44} = \frac{1}{[dd_3]}.$$

Vergleicht man ferner die Gewichtsgleichungen

$$\begin{aligned} [ce_2] Q_{33} + [cd_2] Q_{34} &= 1 \\ [cd_2] Q_{33} + [dd_2] Q_{34} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} [cc2]x + [cd2]t &= [cl2] \\ [cd2]x + [dd2]t &= [dl2], \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} [cc2]x + [cd2]t &= [cl2] \\ [dd3]t &= [dl3], \end{aligned}$$

so sieht man, daß  $x$  und  $t$  in  $Q_{33}$  und  $Q_{34}$  übergehen, wenn man  $[cl2] = 1$ ,  $[dl2] = 0$  setzt. Da nun

$$[dl3] = [dl2] - \frac{[cl2][cd2]}{[cc2]},$$

so wird zu setzen sein:

$$[dl3] = -\frac{[cd2]}{[cc2]},$$

und daher wird:

$$\begin{aligned} Q_{33} + \frac{[cd2]}{[cc2]}Q_{34} &= \frac{1}{[cc2]} \\ Q_{34} &= -\frac{[cd2]}{[cc2][dd3]} \end{aligned}$$

oder nach der eingeführten Bezeichnung

$$\begin{aligned} Q_{33} + C_3 Q_{34} &= \frac{1}{[cc2]} \\ Q_{34} &= -\frac{C_3}{[dd3]}, \end{aligned}$$

woraus

$$Q_{33} = \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3^2}{[dd3]}.$$

So kann man fortfahren und hat dann folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} Q_{44} &= \frac{1}{[dd3]} \\ Q_{33} &= \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3^2}{[dd3]} \\ Q_{22} &= \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2^2}{[cc2]} + \frac{B_3^2}{[dd3]} \\ Q_{11} &= \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1^2}{[bb1]} + \frac{A_2^2}{[cc2]} + \frac{A_3^2}{[dd3]}. \end{aligned}$$

Hierin kann man sämtliche auftretenden Größen der Rechnung für die Unbekannten entnehmen.

**136. Der Gaußsche Satz über das Gewicht der Unbekannten.** Zur Begründung des oben durchgeführten Ausgleichungsverfahrens haben wir uns des Prinzips bedient, daß die Fehlerquadratsumme ein Minimum werden müsse. Gauß hat nun gezeigt, daß *die hieraus fließende Bestimmung der Unbekannten denselben das größte Gewicht verleiht oder daß bei derselben ihr mittlerer Fehler der denkbar kleinste wird.* Durch diesen Satz rückt das Verfahren offenbar in ein neues Licht; es wird unabhängig vom genannten Prinzip und erscheint lediglich als der Ausfluß der Forderung, das *beste* Ausgleichsverfahren zur Bestimmung der Unbekannten zu finden.



aus denen sich, da die  $A, B, \dots, z, \lambda, \dots$  unabhängig von den  $l$  sind, durch Gleichsetzung der Koeffizienten von  $l_1, l_2, \dots$  links und rechts ergibt:

$$\begin{array}{l|l} [Aa]z_1 + [Ab]\lambda_1 + \dots = A_1 & [Ba]z_1 + [Bb]\lambda_1 + \dots = B_1 \\ [Aa]z_2 + [Ab]\lambda_2 + \dots = A_2 & [Ba]z_2 + [Bb]\lambda_2 + \dots = B_2 \\ \dots & \dots \end{array} \quad \dots \quad 6)$$

Werden die Gleichungen dieser  $m$  Gruppen mit  $a_1, a_2, \dots$  multipliziert und addiert, so erscheinen die  $m$  Gleichungen:

$$\begin{array}{l} [Aa][za] + [Ab][\lambda a] + \dots = [Aa] \\ [Ba][za] + [Bb][\lambda a] + \dots = [Ba] \\ \dots \end{array}$$

Faßt man hierin  $[za], [\lambda a], \dots$  als Unbekannte auf, und löst auf, so kommt:

$$[za] = 1, \quad [\lambda a] = 0, \quad [\nu a] = 0, \quad \dots$$

denn die Determinante des Systems, welche auch die von 4) ist, ist notwendig von Null verschieden, wenn 4) überhaupt geeignet sein soll, die Unbekannten zu bestimmen. — Multipliziert man die Gruppen 6) mit  $b_1, b_2, \dots$ , so erhält man ebenso:

$$[zb] = 0, \quad [\lambda b] = 1, \quad [\nu b] = 0, \quad \dots$$

Wir haben also die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots = 1 \\ z_1 b_1 + z_2 b_2 + \dots = 0 \\ z_1 c_1 + z_2 c_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{array} \quad 7)$$

Für die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , welche durch die Methode der kleinsten Quadrate eingeführt werden (Gl. 3), haben wir früher die Gleichungen bewiesen (Seite 407)

$$\begin{array}{l} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots = 1 \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots = 0 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{array} \quad 8)$$

Durch Subtraktion folgt aus 7) und 8)

$$\begin{array}{l} (z_1 - \alpha_1)a_1 + (z_2 - \alpha_2)a_2 + \dots = 0 \\ (z_1 - \alpha_1)b_1 + (z_2 - \alpha_2)b_2 + \dots = 0 \\ (z_1 - \alpha_1)c_1 + (z_2 - \alpha_2)c_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{array}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit  $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \dots$  multipliziert und addiert, so ergibt sich:

$$(z_1 - \alpha_1)(a_1[\alpha\alpha] + b_1[\alpha\beta] + c_1[\alpha\gamma] + \dots) + (z_2 - \alpha_2)(a_2[\alpha\alpha] + b_2[\alpha\beta] + c_2[\alpha\gamma] + \dots) + \dots = 0$$

oder nach den Gl. 17) (Seite 407)

$$(z_1 - \alpha_1)\alpha_1 + (z_2 - \alpha_2)\alpha_2 + \dots = 0,$$

oder

$$2\alpha_1(\alpha_1 - z_1) + 2\alpha_2(\alpha_2 - z_2) + \dots = 0.$$

Nun ist

$$2\alpha(\alpha - z) = 2\alpha^2 - 2\alpha z = (\alpha - z)^2 + \alpha^2 - z^2,$$

also läßt sich die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$(\alpha_1 - z_1)^2 + (\alpha_2 - z_2)^2 + \dots + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots) - (z_1^2 + z_2^2 + \dots) = 0$$

oder

$$[zz] = [\alpha\alpha] + [\alpha - z, \alpha - z],$$

d. h. es ist immer:

$$[zz] > [\alpha\alpha].$$

Die nach der Methode der kleinsten Quadrate genommene Kombination gibt also unter allen möglichen den kleinsten Wert  $[zz]$  und folglich den Unbekannten das größte Gewicht oder den kleinsten mittleren Fehler.

**137. Bildung der Normalgleichungen. Kontrollmaßregeln.** Die praktische Ausführung der im vorigen begründeten Rechnungsmethoden erheischt eine streng systematische Anordnung und die Einführung einiger fortlaufenden Kontrollmaßregeln, da sonst bei dem Umfange, den die Rechnungen bei vielen Unbekannten und Bedingungsgleichungen annehmen, alle Übersicht und Sicherheit verloren ginge. Der Zuwachs an Arbeit, der dadurch entsteht, wird, wie jeder erfahrene Rechner weiß, reichlich aufgewogen durch das Gefühl der Sicherheit und durch die Schnelligkeit, mit der jeder begangene Fehler aufgefunden wird.

Eine erste wichtige Maßregel ist die *Homogenisierung* der vorgelegten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots = l_1 & \text{Gewicht } p_1 & \\ \alpha_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots = l_2 & \text{» } p_2 & \\ \dots & \text{» } \vdots & \\ \alpha_n \xi + b_n \eta + c_n \zeta + \dots = l_n & \text{» } p_n & \end{array} \quad 1)$$

(n Gleichungen mit m Unbekannten).

Nachdem diese Gleichungen nämlich, um auf gleiches Gewicht 1 gebracht zu werden, mit den Quadratwurzeln aus ihren respektiven Gewichten durchmultipliziert worden sind, sind die Koeffizienten der einzelnen Unbekannten meistens von sehr verschiedener Größenordnung geworden; dies macht sich bei der Bildung der  $[aa]$ ,  $[ab]$ ,  $\dots$  insofern unangenehm bemerkbar, als man, um die Genauigkeit einer bestimmten Dezimalstelle festzuhalten, verschiedene Hilfsmittel für die großen und für die kleinen Zahlen heranziehen muß. Der einfachste Weg, dem abzuweichen, ist die Einführung anderer Unbekannten, was am zweckmäßigsten wie folgt geschieht. Ist  $\alpha$  der größte von den Koeffizienten von  $\xi$ , nämlich

$$\alpha_1 \sqrt{p_1}, \quad \alpha_2 \sqrt{p_2}, \quad \dots \quad \alpha_n \sqrt{p_n},$$

ebenso  $\beta$  der größte von den Koeffizienten von  $\eta$ , nämlich

$$b_1 \sqrt{p_1}, \quad b_2 \sqrt{p_2}, \quad \dots \quad b_n \sqrt{p_n}$$

usf., so schreibe man die auf gleiches Gewicht gebrachten Bedingungsgleichungen so:

$$\begin{array}{l} \frac{\alpha_1 \sqrt{p_1}}{\alpha} (\alpha \xi) + \frac{b_1 \sqrt{p_1}}{\beta} (\beta \eta) + \dots = \frac{l_1 \sqrt{p_1}}{\lambda} \lambda \\ \frac{\alpha_2 \sqrt{p_2}}{\alpha} (\alpha \xi) + \frac{b_2 \sqrt{p_2}}{\beta} (\beta \eta) + \dots = \frac{l_2 \sqrt{p_2}}{\lambda} \lambda, \\ \dots \end{array}$$







wo  $m$  die Zahl der Unbekannten ist. Die Quadratbildung wird hierdurch mit Ausnahme der von  $l$  abhängigen Glieder vollständig kontrolliert. Man kann aber auch eine Gleichung aufstellen, wodurch die Koeffizienten der Normalgleichungen selbst geprüft werden. Wenn man nämlich die Relationen:

[illegible]

addiert, so kommt nach Anwendung der Formel 6) sofort:

$$2 \left\{ \begin{array}{l} [ab] + [ac] + [ad] + \dots \\ \quad + [bc] + [bd] + \dots \\ \quad \quad + [cd] + \dots \\ \quad \quad \quad + \dots \end{array} \right\} = [ss] - ([aa] + [bb] + [cc] + \dots). \quad (7)$$

Zur Anwendung dieser Formel braucht man nur  $[ss]$  zu berechnen.

Wenn man in die  $s$  auch die  $l$  aufnimmt, also setzt

$$s' = a + b + c + \dots + l, \quad 8)$$

so wird die Formel 7)

$$2 \left\{ \begin{array}{l} [ab] + [ac] + [ad] + \dots + [al] \\ \quad + [bc] + [bd] + \dots + [bl] \\ \quad \quad + [cd] + \dots + [cl] \\ \quad \quad \quad + \dots \end{array} \right\} = [s's'] - ([aa] + [bb] + \dots + [ll]) \quad (9)$$

und es werden dann auch die von  $l$  abhängigen Koeffizienten der Normalgleichung geprüft. Für die weiteren Kontrollrechnungen sind die nach 4<sup>a)</sup> definierten  $s$  etwas bequemer und es sollen daher diese beibehalten werden. Zur *vollständigen* Kontrolle der Normalgleichungen aber kann man auch dann ohne viel Mühe von 8) und 9) Gebrauch machen.

Wenn man die Normalgleichungen addiert, so erhält man die »Summengleichung«:

$$[sa]x + [sb]y + [sc]z + \cdots = [sl]. \quad \text{IO}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß wenn man diese gewissermaßen als letzte Normalgleichung mitführt und sie beim Eliminationsprozess ständig denselben Operationen unterwirft wie die Normalgleichungen selbst, dadurch auf jeder Stufe der Rechnung eine Kontrolle erlangt wird. In der Tat, schließt man 10) den Gl. 1) (Seite 410) an und eliminiert  $x$  auch aus ihr, so kommt:

$$\left([sb] - \frac{[ab][sa]}{[aa]}\right)y + \left([sc] - \frac{[ac][sa]}{[aa]}\right)z + \left([sd] - \frac{[ad][sa]}{[aa]}\right)t = [sl] - \frac{[al][sa]}{[aa]}$$

oder nach der dort eingeführten Bezeichnungsweise

$$[sb_1]y + [sc_1]x + [sd_1]t = [sl_1]$$

Man zeigt nun ohne weiteres, daß die Koeffizienten dieser Gleichung die Summen der entsprechenden Koeffizienten der drei anderen Gleichungen sind. In der Tat ist z. B.

$$\begin{aligned} [bb] - \frac{[ab][ba]}{[aa]} + [bc] - \frac{[ab][ca]}{[aa]} + [bd] - \frac{[ab][da]}{[aa]} \\ = [bb] + [bc] + [bd] - \frac{[ab]}{[aa]} \{[ba] + [ca] + [da]\} \\ = [ab] + [bb] + [bc] + [bd] - \frac{[ab]}{[aa]} \{[aa] + [ba] + [ca] + [da]\} \\ = [bs] - \frac{[ab]}{[aa]} [as] = [sb_1]. \end{aligned}$$

Dasselbe gilt für alle folgenden Eliminationen. Durch einfache Bildung der Summen und Vergleich mit den durch die Summengleichung gelieferten Resultaten hat man die Kontrolle, die auch stets anzeigt, wo ein begangener Fehler ungefähr liegt.

Eine andere Kontrolle besteht in der doppelten Berechnung der Fehlerquadratsumme  $[\delta\delta]$ . Man kann diese nämlich einmal direkt durch Einsetzung der annehmbarsten Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen und Bestimmung der übrigbleibenden Fehler berechnen, eine Operation, die man schon aus anderen Gründen niemals unterlassen wird, zweitens aber wird sie auch durch die Eliminationsrechnung selbst dargeboten. In der Tat, multipliziert man die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_1 x + b_1 y + \dots - l_1 \\ \delta_2 &= a_2 x + b_2 y + \dots - l_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

mit  $l_1, l_2, \dots$  und addiert, so wird:

$$[\delta l] = [la]x + [lb]y + \dots - [ll]$$

und multipliziert man sie mit  $\delta_1, \delta_2, \dots$  und addiert, so kommt:

$$[\delta\delta] = [\delta a]x + [\delta b]y + \dots - [\delta l]$$

oder da  $[\delta a] = [\delta b] = \dots = 0$  ist:

$$[\delta\delta] = -[\delta l];$$

somit hat man:

$$[\delta\delta] = [ll] - [la]x - [lb]y - \dots$$

Eliminiert man hier  $x$  durch

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \dots + \frac{[al]}{[aa]}$$

und dann  $y$  durch

$$y = -\frac{[bc_1]}{[bb_1]}z - \dots + \frac{[bl_1]}{[bb_1]}$$

dann  $z$  usf., so erhält man nach einfachen Reduktionen:

$$[\delta\delta] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl_1]^2}{[bb_1]} - \frac{[cl_2]^2}{[cc_2]} - \dots$$

oder, wenn wir ebenfalls die Gaußsche Abkürzung einführen:

$$[ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} = [ll_1]$$

$$[ll_1] - \frac{[bl_1]^2}{[bb_1]} = [ll_2]$$

$$\dots \dots \dots$$

schließlich:

$$[\delta\delta] = [ll_m] \quad 12)$$

wenn  $m$  die Anzahl der Unbekannten bedeutet. Die sämtlichen Koeffizienten in 11) können der Eliminationsrechnung entnommen werden; man kann durch Berechnung der einzelnen Glieder konstatieren, um welchen Betrag die ursprüngliche Quadratsumme  $[ll]$  durch jede einzelne Unbekannte reduziert wird, bis mit Ersetzung der letzten Unbekannten durch ihren Wert die definitive Fehlerquadratsumme übrig bleibt, die mit der direkt berechneten übereinstimmen muß.

**138. Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen.** In den Anwendungen der Ausgleichsrechnung auf die Bahnverbesserung tritt nicht selten der Fall ein, daß sich die Auflösung der Normalgleichungen nur mit großer Unsicherheit vollzieht. Man erkennt das Auftreten dieses Falles schon von vornherein daran, daß eine oder mehrere Normalgleichungen Vielfache einer anderen sind. Die Gleichungen sind dann nicht voneinander unabhängig und reichen somit zur Bestimmung aller Unbekannten nicht aus. Ist man nicht von vornherein hierauf aufmerksam geworden, so wird man bei der Bildung der Eliminationsgleichungen von selbst darauf geführt. Es werden dann nämlich, wie man leicht übersieht, die *ersten* Koeffizienten in den Eliminationsgleichungen sehr klein oder sogar negativ, während sie theoretisch positiv sein müssen. Die Bestimmung der betreffenden Unbekannten ist dann offenbar einer besonderen Unsicherheit unterworfen.

Theoretisch ist in einem solchen Falle natürlich nichts zu machen und die Unsicherheit ist ohne Hinzuziehung neuer Bedingungsgleichungen nicht zu beseitigen. Da aber die Unsicherheit der einen Unbekannten auch auf die Bestimmung der anderen rückwirkt, so wird man in praxi die unsicheren Unbekannten an das Ende der Normalgleichungen stellen und die Gleichungen dann soweit auflösen, bis die Unsicherheit eintritt. Die soweit erlangten Eliminationsgleichungen gestatten dann, die ersten Unbekannten durch die unsicheren auszudrücken und man kann nun weiter in verschiedener dem jeweiligen Fall angepaßter Weise verfahren. Entweder man verzichtet auf die Bestimmung der unsicheren Unbekannten ganz, d. h. man setzt sie Null und bestimmt demgemäß die anderen, oder man wartet weitere Beobachtungen ab, durch welche die unsicheren Unbekannten bestimmt werden und bestimmt dann die übrigen mittels der erlangten Gleichungen, oder man macht verschiedene Hypothesen über die unsicheren Unbekannten, untersucht für jede die Darstellung der Bedingungsgleichungen und wählt diejenige aus, die am plausibelsten erscheint. Will man mit dem vorgelegten Material die unsicheren Unbekannten wenigstens so gut es geht bestimmen, so vermeidet man die Unsicherheit der Rechnung am besten, wenn man folgendermaßen verfährt. Man setzt die sicheren Unbekannten als Funktionen

der unsicheren in die *Bedingungsgleichungen* ein, welche dann eine Reihe von Gleichungen *nur* zwischen den unsicheren Unbekannten darstellen werden; diese Gleichungen löst man dann von neuem nach der Methode der kleinsten Quadrate auf.

**139. Beispiel für die Durchführung einer Ausgleichung.** Wir behandeln folgende der Nr. 143 entnommenen Bedingungsgleichungen, die bereits durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten auf das gleiche Gewicht 1 gebracht sind (Koeffizienten in Logarithmen).

$$0.2071 dM_0 + 1.2517 d\mu + 9.5382 d\varphi + 0.3132 ds + 8.5183 dp + 9.5007 dq = 0.4172$$

|                     |                     |                     |                     |                     |                     |   |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---|---------------------|
| 0.0819              | 2.7248              | 0.3705 <sub>n</sub> | 0.1127              | 9.5517 <sub>n</sub> | 9.0942              | = | »                   |
| 0.2824              | 3.2408              | 0.0665 <sub>n</sub> | 0.1954              | 8.7700              | 9.1458              | = | 0.1651              |
| 0.0643              | 3.3223              | 9.9630              | 0.1459              | 8.5129              | 9.0688              | = | 1.2801 <sub>n</sub> |
| 0.2130              | 3.9817              | 0.0438 <sub>n</sub> | 0.2916              | 9.1566 <sub>n</sub> | 9.6371              | = | 2.0266 <sub>n</sub> |
| 9.4154 <sub>n</sub> | 0.4016 <sub>n</sub> | 8.7551 <sub>n</sub> | 9.5182 <sub>n</sub> | 9.3134              | 0.2958              | = | 9.1505 <sub>n</sub> |
| 9.4983 <sub>n</sub> | 2.0576 <sub>n</sub> | 9.7755              | 9.5444 <sub>n</sub> | 0.0928 <sub>n</sub> | 9.6354              | = | 0.4771              |
| 9.2598              | 2.2522              | 8.6151 <sub>n</sub> | 9.1656              | 9.7849 <sub>n</sub> | 0.1607 <sub>n</sub> | = | 0.6628              |
| 8.9457 <sub>n</sub> | 2.2011 <sub>n</sub> | 8.8680 <sub>n</sub> | 9.0266 <sub>n</sub> | 9.6305              | 0.1265              | = | 9.6020              |
| 9.5734 <sub>n</sub> | 3.3384 <sub>n</sub> | 9.2425              | 9.6550 <sub>n</sub> | 9.7885 <sub>n</sub> | 0.2690              | = | 1.4009              |

Um sie homogen zu machen, führen wir folgende Unbekannte ein

$$x = [0.2824] dM_0$$

$$y = [3.9817] d\mu$$

$$z = [0.3705] d\varphi$$

$$t = [0.3132] ds$$

$$u = [0.0928] dp$$

$$v = [0.2958] dq$$

und drücken die *l* statt in Sekunden in einer Einheit aus, deren log gleich 2.0266 ist. Die Gleichungen werden dann:

| <i>a</i>          | <i>b</i>          | <i>c</i>          | <i>d</i>          | <i>e</i>          | <i>f</i>          | <i>l</i>   | <i>s</i> |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------|----------|
| + 0.8408 <i>x</i> | + 0.0019 <i>y</i> | + 0.1471 <i>z</i> | + 1.0000 <i>t</i> | + 0.0266 <i>u</i> | + 0.1603 <i>v</i> | = + 0.0246 | + 2.1767 |
| + 0.6303          | + 0.0553          | — 1.0000          | + 0.6303          | — 0.2877          | + 0.0629          | = + 0.0000 | + 0.0911 |
| + 1.0000          | + 0.1816          | — 0.4964          | + 0.7624          | + 0.0476          | + 0.0708          | = + 0.0138 | + 1.5660 |
| + 0.6052          | + 0.2191          | + 0.3913          | + 0.6803          | + 0.0263          | + 0.0516          | = — 0.1793 | + 1.9738 |
| + 0.8524          | + 1.0000          | — 0.4713          | + 0.9515          | — 0.1158          | + 0.2194          | = — 1.0000 | + 2.4362 |
| — 0.1358          | — 0.0003          | — 0.0242          | — 0.1603          | + 0.1662          | + 1.0000          | = — 0.0013 | + 0.8456 |
| — 0.1644          | — 0.0119          | + 0.2541          | — 0.1703          | — 1.0000          | + 0.2186          | = + 0.0282 | — 0.8739 |
| + 0.0949          | + 0.0186          | — 0.0176          | + 0.0712          | — 0.4912          | — 0.7327          | = + 0.0433 | — 1.0568 |
| — 0.0461          | — 0.0166          | — 0.0314          | — 0.0517          | + 0.3449          | + 0.6772          | = + 0.0038 | + 0.8763 |
| — 0.1954          | — 0.2274          | + 0.0745          | — 0.2197          | — 0.4962          | + 0.9402          | = + 0.2368 | — 0.1240 |

## Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen.

(Nach Seite 419.)

| $aa$   | $bb$   | $cc$   | $dd$   | $ee$   | $ff$   | $ll$   | $ss$    | $(a+b)^2$        | $(a+c)^2$        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|------------------|------------------|
| 0.7070 | 0.0000 | 0.0216 | 1.0000 | 0.0007 | 0.0257 | 0.0006 | 4.7380  | 0.7101           | 0.9759           |
| 0.3973 | 0.0031 | 1.0000 | 0.3973 | 0.0827 | 0.0040 | 0.0000 | 0.0083  | 0.4700           | 0.1367           |
| 1.0000 | 0.0330 | 0.2464 | 0.5812 | 0.0023 | 0.0050 | 0.0002 | 2.4524  | 1.3962           | 0.2536           |
| 0.3662 | 0.0480 | 0.1531 | 0.4628 | 0.0007 | 0.0027 | 0.0321 | 3.8959  | 0.6795           | 0.9930           |
| 0.7266 | 1.0000 | 0.2221 | 0.9053 | 0.0134 | 0.0482 | 1.0000 | 5.9351  | 3.4314           | 0.1453           |
| 0.0184 | 0.0000 | 0.0006 | 0.0257 | 0.0277 | 1.0000 | 0.0000 | 0.7150  | 0.0185           | 0.0256           |
| 0.0270 | 0.0001 | 0.0645 | 0.0290 | 1.0000 | 0.0478 | 0.0008 | 0.7637  | 0.0311           | 0.0080           |
| 0.0090 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0050 | 0.2413 | 0.5368 | 0.0018 | 1.1168  | 0.0129           | 0.0060           |
| 0.0021 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0027 | 0.1189 | 0.4586 | 0.0000 | 0.7679  | 0.0039           | 0.0060           |
| 0.0382 | 0.0517 | 0.0055 | 0.0483 | 0.2462 | 0.8840 | 0.0561 | 0.0154  | 0.1787           | 0.0146           |
| 3.2918 | 1.1366 | 1.7151 | 3.4573 | 1.7339 | 3.0128 | 1.0916 | 20.4085 | 6.9323<br>4.4284 | 2.5647<br>5.0069 |

| $(a+d)^2$ | $(a+e)^2$ | $(a+f)^2$ | $(a+l)^2$ | $(b+c)^2$ | $(b+d)^2$ | $(b+e)^2$ | $(b+f)^2$ | $(b+l)^2$ | $(c+d)^2$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 3.3886    | 0.7524    | 1.0022    | 0.7489    | 0.0222    | 1.0038    | 0.0008    | 0.0263    | 0.0007    | 1.3158    |
| 1.5891    | 0.1174    | 0.4805    | 0.3973    | 0.8924    | 0.4700    | 0.0540    | 0.0140    | 0.0030    | 0.1367    |
| 3.1060    | 1.0975    | 1.1466    | 1.0278    | 0.0991    | 0.8911    | 0.0525    | 0.0637    | 0.0382    | 0.0708    |
| 1.6525    | 0.3988    | 0.4313    | 0.1814    | 0.3726    | 0.8089    | 0.0602    | 0.0732    | 0.0016    | 1.1483    |
| 3.2540    | 0.5426    | 1.1488    | 0.0218    | 0.2795    | 3.8084    | 0.7818    | 1.4870    | 0.0000    | 0.2306    |
| 0.0878    | 0.0009    | 0.7468    | 0.0188    | 0.0006    | 0.0258    | 0.0276    | 0.9994    | 0.0000    | 0.0340    |
| 0.1120    | 1.3558    | 0.0029    | 0.0186    | 0.0587    | 0.0332    | 1.0239    | 0.0427    | 0.0003    | 0.0071    |
| 0.0276    | 0.1570    | 0.4068    | 0.0191    | 0.0000    | 0.0081    | 0.2233    | 0.5099    | 0.0038    | 0.0029    |
| 0.0096    | 0.0893    | 0.3983    | 0.0018    | 0.0023    | 0.0047    | 0.1078    | 0.4364    | 0.0002    | 0.0069    |
| 0.1723    | 0.4783    | 0.5547    | 0.0017    | 0.0234    | 0.1999    | 0.5236    | 0.5081    | 0.0001    | 0.0211    |
| 13.3995   | 4.9900    | 6.3189    | 2.4372    | 1.7508    | 7.2539    | 2.8555    | 4.1607    | 0.0479    | 2.9742    |
| 6.7491    | 5.0257    | 6.3046    | 4.3834    | 2.8517    | 4.5939    | 2.8705    | 4.1494    | 2.2282    | 5.1724    |

| $(c+e)^2$ | $(c+f)^2$ | $(c+l)^2$ | $(d+e)^2$ | $(d+f)^2$ | $(d+l)^2$ | $(e+f)^2$ | $(e+l)^2$ | $(f+l)^2$ | $(s+l)^2$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.0302    | 0.0945    | 0.0295    | 1.0539    | 1.3463    | 1.0498    | 0.0350    | 0.0026    | 0.0342    | 4.8457    |
| 1.6581    | 0.8782    | 1.0000    | 0.1174    | 0.4805    | 0.3973    | 0.0505    | 0.0827    | 0.0040    | 0.0083    |
| 0.2013    | 0.1811    | 0.2329    | 0.6561    | 0.6942    | 0.6025    | 0.0140    | 0.0037    | 0.0072    | 2.4958    |
| 0.1744    | 0.1961    | 0.0449    | 0.4992    | 0.5357    | 0.2510    | 0.0061    | 0.0234    | 0.0163    | 3.2202    |
| 0.3447    | 0.0634    | 2.1647    | 0.6984    | 1.3710    | 0.0023    | 0.0108    | 1.2450    | 0.6094    | 2.0627    |
| 0.0202    | 0.9522    | 0.0007    | 0.0000    | 0.7051    | 0.0261    | 1.3601    | 0.0272    | 0.9974    | 0.7128    |
| 0.5563    | 0.2234    | 0.0797    | 1.3696    | 0.0023    | 0.0202    | 0.6106    | 0.9444    | 0.0609    | 0.7152    |
| 0.2589    | 0.5630    | 0.0007    | 0.1764    | 0.4375    | 0.0131    | 1.4980    | 0.2006    | 0.4753    | 1.0272    |
| 0.0983    | 0.4170    | 0.0008    | 0.0859    | 0.3913    | 0.0023    | 1.0447    | 0.1216    | 0.4638    | 0.7746    |
| 0.1778    | 1.0296    | 0.0970    | 0.5125    | 0.5191    | 0.0003    | 0.1971    | 0.0673    | 1.3853    | 0.0127    |
| 3.5202    | 4.5985    | 3.6509    | 5.1694    | 6.4830    | 2.3649    | 4.8269    | 2.7185    | 4.0538    | 15.8752   |
| 3.4490    | 4.7279    | 2.8067    | 5.1912    | 6.4701    | 4.5489    | 4.7467    | 2.8255    | 4.1044    |           |

Die Anwendung der Kontrollgleichung 6) (Seite 420) gibt:

$$20.4085 + 4 \times 14.3475 = 77.7985$$

und zeigt vollständige Übereinstimmung der beiden Seiten.

Die Produktsummen werden nach 4) (Seite 419)

$$\begin{aligned} [ab] &= +1.2519 \cdot [bc] = -0.5504 \cdot [cd] = -1.0991 \cdot [de] = -0.0109 \cdot [ef] = +0.0401 \cdot [fl] = -0.0253 \\ [ac] &= -1.2211 \cdot [bd] = +1.3300 \cdot [ce] = +0.0356 \cdot [df] = +0.0064 \cdot [el] = -0.0535 \\ [ad] &= +3.3252 \cdot [be] = -0.0075 \cdot [cf] = -0.0647 \cdot [dl] = -1.0920 \\ [ae] &= -0.0178 \cdot [bf] = +0.0056 \cdot [cl] = +0.4221 \\ [af] &= +0.0071 \cdot [bl] = -1.0961 \\ [al] &= -0.9731 \end{aligned}$$

Die Anwendung der Kontrollgleichung 7) (Seite 421) gibt für die doppelte Summe der von  $l$  unabhängigen Produktsummen  $+6.0609$  und für  $[ss] - [aa] - [bb] - \dots + 6.0610$ . Die von  $l$  abhängigen Glieder wurden durch 8) und 9) kontrolliert, wobei sich ebenfalls genügende Übereinstimmung ergab.

Die Normalgleichungen werden somit:

$$\begin{aligned} +3.2918x + 1.2519y - 1.2211z + 3.3252t - 0.0178u + 0.0071v &= -0.9731 \\ +1.2519 + 1.1366 - 0.5504 + 1.3300 - 0.0075 + 0.0056 &= -1.0901 \\ -1.2211 - 0.5504 + 1.7151 - 1.0991 + 0.0356 - 0.0647 &= +0.4221 \\ +3.3252 + 1.3300 - 1.0991 + 3.4573 - 0.0109 + 0.0064 &= -1.0920 \\ -0.0178 - 0.0075 + 0.0356 - 0.0109 + 1.7339 + 0.0401 &= -0.0535 \\ +0.0071 + 0.0056 - 0.0647 + 0.0064 + 0.0401 + 3.0128 &= -0.0253 \end{aligned}$$

Summengleichung:

$$\begin{aligned} +6.6371x + 3.1662y - 1.1846z + 7.0089t + 1.7734u + 3.0073v &= -2.8119 \\ [ll] &= +1.0916. \end{aligned}$$

Die Bildung der Eliminationsgleichungen ist auf den Seiten 428 und 429 durchgeführt und zwar zugleich für die Unbekannten und für ihre Gewichte; für letztere tritt, wie auf Seite 413 gezeigt ist, an Stelle der Kolumne  $l$  für die erste Unbekannte 1, 0, 0, 0, 0, 0, für die zweite 1, 0, 0, 0, 0, 0 usf. Die Zahlen werden in ein vorbereitetes Schema eingeschrieben, worauf sich der Prozeß ganz mechanisch und unter fortwährender Kontrolle vollzieht. Alle außerhalb der Diagonalreihen stehenden Koeffizienten erscheinen in doppelter Rechnung; wenn man auf die hierdurch gebotene Kontrolle verzichten will, kann man die betreffenden Zeilen leer lassen; die Resultate doppelt anzuschreiben, empfiehlt sich aber wegen leichterer Anwendung der Summengleichung. — Die mit  $N$  bezeichneten Zeilen enthalten die Zahlen der Normalgleichungen. Für die erste Normalgleichung schreibt man unter die Zahlen ihre Logarithmen und unter diese die mit dem Koeffizienten von  $x$  durchdividierte Gleichung, somit die erste Eliminationsgleichung, bezeichnet mit  $E$ . Nun schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papierstreifens die Logarithmen der Koeffizienten von  $x$  der übrigen Normalgleichungen und der Summengleichung, hält diese der Reihe nach über alle Logarithmen der Zeile  $E$ , bildet die Summe im Kopf, und schreibt die der Logarithmentafel entnommene zugehörige Zahl unter die entsprechenden

Koeffizienten der Zeilen  $N$ . Die Differenzen der untereinander stehenden Zahlen sind die Koeffizienten der fünf Gleichungen und der Summengleichung, aus denen  $x$  eliminiert ist, und die in derselben Weise, wie vorhin die Normalgleichungen, in die Rubriken der nächsten Gruppe eingetragen werden. Hier prüft man zuerst, ob die Summen der fünf untereinander stehenden Zahlen mit den entsprechenden Zahlen der Summengleichung übereinstimmen; wegen der Abrundungsfehler kann eine Abweichung um 1—2 Einheiten der letzten Stelle zugelassen werden; um aber ein weiteres Summieren der Fehler zu vermeiden, wird man gut tun, die wirklichen Summen weiter zu benutzen. Mit den erhaltenen 5 Gleichungen und der zugehörigen Summengleichung verfährt man genau so, wie zuerst mit den Normalgleichungen, und setzt dieses Verfahren fort, bis man nur mehr eine Gleichung mit einer Unbekannten hat. Die ersten Gleichungen in jeder Gruppe sind dann die Eliminationsgleichungen (im Schema mit  $E$  bezeichnet). Behufs Anwendung der Kontrollgleichung 12) (Seite 423) berechnet man  $[ll6]$  nach 11); man überzeugt sich leicht, daß die Größen

$$\frac{[al]^2}{[aa]}, \frac{[bl_1]^2}{[bb_1]}, \dots$$

unmittelbar dem Schema entnommen werden können, indem ihre Logarithmen die Summen der in der Kolumne  $l$  mit starken Vertikalstrichen angezeigten Zahlen sind. Hier wird:

$$[ll6] = +1.0916 - (0.2877 + 0.7849 + 0.0009 + 0.0152 + 0.0019 + 0.0001)$$

oder

$$[ll6] = +0.0009.$$

Die Fehlerquadratsumme geht also von 1.0916 auf 0.0009 herab, so daß die Ausgleichung eine bedeutende Verbesserung herbeiführen wird.

Die Eliminationsgleichungen für die Unbekannten werden:

$$\begin{array}{rclclcl} 0.00000x + 9.58014y + 9.56932_n z + 0.00439t + 7.73299_n u + 7.33383v & = & 9.47073_n \\ 0.00000 & 9.11463_n & 8.99571 & 7.025_n & 7.6425 & = 0.03746_n \\ & 0.00000 & 9.05781 & 8.36368 & 8.69307_n & = 8.41865_n \\ & & 0.00000 & 8.7132 & 8.8930 & = 9.65225_n \\ & & & 0.0000 & 8.3761 & = 8.5170_n \\ & & & & 0.0000 & = 7.7672_n \end{array}$$

Für die Gewichtsgleichungen tritt an Stelle der rechten Seiten dieser Gleichungen beziehungsweise:

| (x)                  | (y)                  | (z)                  | (t)     | (u)                 | (v)     |
|----------------------|----------------------|----------------------|---------|---------------------|---------|
| 9.48257              |                      |                      |         |                     |         |
| 9.76026 <sub>n</sub> | 0.18013              |                      |         |                     |         |
| 9.40996              | 9.01739              | 9.90278              |         |                     |         |
| 1.12603 <sub>n</sub> | 0.17857 <sub>n</sub> | 0.17972 <sub>n</sub> | 1.12205 |                     |         |
| 8.4576               | 7.3633               | 7.9967 <sub>n</sub>  | 8.4747  | 9.76123             |         |
| 8.4906               | 7.5551               | 8.2896               | 8.4082  | 7.8983 <sub>n</sub> | 9.52168 |



|   | $x$      | $y$                  | $z$                  | $t$                  | $u$                  | $v$                  | $l$                  |
|---|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| N | + 3.2918 | + 1.2519             | — 1.2211             | + 3.3252             | — 0.0178             | + 0.0071             | — 0.9731             |
| E | 0.51743  | 0.09757              | 0.08675 <sub>n</sub> | 0.52182              | 8.25042 <sub>n</sub> | 7.85126              | 9.98816 <sub>n</sub> |
|   | 0.00000  | 9.58014              | 9.56932 <sub>n</sub> | 0.00439              | 7.73299 <sub>n</sub> | 7.33383              | 9.47073 <sub>n</sub> |
| N | + 1.2519 | + 1.1366             | — 0.5504             | + 1.3300             | — 0.0075             | + 0.0056             | — 1.0901             |
|   | + 1.2519 | + 0.4761             | — 0.4644             | + 1.2646             | — 0.0068             | + 0.0027             | — 0.3701             |
| N | — 1.2211 | — 0.5504             | + 1.7151             | — 1.0991             | + 0.0356             | — 0.0647             | + 0.4221             |
|   | — 1.2211 | — 0.4644             | + 0.4530             | — 1.2335             | + 0.0066             | — 0.0026             | + 0.3610             |
| N | + 3.3252 | + 1.3300             | — 1.0991             | + 3.4573             | — 0.0109             | + 0.0064             | — 1.0920             |
|   | + 3.3252 | + 1.2646             | — 1.2335             | + 3.3590             | — 0.0180             | + 0.0072             | — 0.9830             |
| N | — 0.0178 | — 0.0075             | + 0.0356             | — 0.0109             | + 1.7339             | + 0.0401             | — 0.0535             |
|   | — 0.0178 | — 0.0068             | + 0.0066             | — 0.0180             | + 0.0001             | — 0.0000             | + 0.0053             |
| N | + 0.0071 | + 0.0056             | — 0.0647             | + 0.0064             | + 0.0401             | + 3.0128             | — 0.0253             |
|   | + 0.0071 | + 0.0027             | — 0.0026             | + 0.0072             | — 0.0000             | + 0.0000             | — 0.0021             |
| S | + 6.6371 | + 3.1662             | — 1.1846             | + 7.0089             | + 1.7734             | + 3.0073             | — 2.8119             |
|   | 0.82198  | + 2.5242             | — 2.4621             | + 6.7046             | — 0.0359             | + 0.0143             | — 1.9620             |
|   |          |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| E | + 0.6605 | — 0.0860             | + 0.0654             | — 0.0007             | + 0.0029             | — 0.7200             |                      |
|   | 9.81987  | 8.93450 <sub>n</sub> | 8.81558              | 6.845 <sub>n</sub>   | 7.4624               | 9.85733 <sub>n</sub> |                      |
|   | 0.00000  | 9.11463 <sub>n</sub> | 8.99571              | 7.025 <sub>n</sub>   | 7.6425               | 0.03746 <sub>n</sub> |                      |
|   | — 0.0860 | + 1.2621             | + 0.1344             | + 0.0290             | — 0.0621             | + 0.0611             |                      |
| S | — 0.0860 | + 0.0112             | — 0.0085             | + 0.0001             | — 0.0004             | + 0.0939             |                      |
|   | + 0.0654 | + 0.1344             | + 0.0983             | + 0.0071             | — 0.0008             | — 0.1090             |                      |
|   | + 0.0654 | — 0.0085             | + 0.0065             | — 0.0001             | + 0.0003             | — 0.0714             |                      |
|   | — 0.0007 | + 0.0290             | + 0.0071             | + 1.7338             | + 0.0401             | — 0.0588             |                      |
|   | — 0.0007 | + 0.0001             | — 0.0001             | + 0.0000             | — 0.0000             | + 0.0008             |                      |
|   | + 0.0029 | — 0.0621             | — 0.0008             | + 0.0401             | + 3.0128             | — 0.0232             |                      |
|   | + 0.0029 | — 0.0004             | + 0.0003             | — 0.0000             | + 0.0000             | — 0.0032             |                      |
|   | + 0.6421 | + 1.2774             | + 0.3044             | + 1.8093             | + 2.9929             | — 0.8499             |                      |
|   | 9.80760  | — 0.0836             | + 0.0636             | — 0.0007             | + 0.0028             | — 0.6999             |                      |
|   |          |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| E | + 1.2509 | + 0.1429             | + 0.0289             | — 0.0517             | — 0.0328             |                      |                      |
|   | 0.09722  | 9.15503              | 8.46090              | 8.79029 <sub>n</sub> | 8.51587 <sub>n</sub> |                      |                      |
|   | 0.00000  | 9.05781              | 8.36368              | 8.69307 <sub>n</sub> | 8.41865 <sub>n</sub> |                      |                      |
|   | + 0.1429 | + 0.0918             | + 0.0072             | — 0.0011             | — 0.0376             |                      |                      |
| S | + 0.1429 | + 0.0163             | + 0.0033             | — 0.0070             | — 0.0037             |                      |                      |
|   | + 0.0289 | + 0.0072             | + 1.7338             | + 0.0401             | — 0.0596             |                      |                      |
|   | + 0.0289 | + 0.0033             | + 0.0007             | — 0.0014             | — 0.0008             |                      |                      |
|   | — 0.0617 | — 0.0011             | + 0.0401             | + 3.0128             | + 0.0200             |                      |                      |
|   | — 0.0617 | — 0.0070             | — 0.0014             | + 0.0030             | — 0.0016             |                      |                      |
|   | + 1.3610 | + 0.2408             | + 1.8100             | + 2.9901             | — 0.1500             |                      |                      |
|   | 0.13386  | + 0.1555             | + 0.0314             | — 0.0671             | — 0.0357             |                      |                      |
|   |          |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| E | + 0.0755 | + 0.0039             | + 0.0059             | — 0.0339             |                      |                      |                      |
|   | 8.87795  | 7.5911               | 7.7709               | 8.53020 <sub>n</sub> |                      |                      |                      |
|   | 0.00000  | 8.7132               | 8.8930               | 9.65225 <sub>n</sub> |                      |                      |                      |
|   | + 0.0039 | + 1.7331             | + 0.0415             | — 0.0588             |                      |                      |                      |
| S | + 0.0039 | + 0.0002             | + 0.0003             | — 0.0018             |                      |                      |                      |
|   | + 0.0059 | + 0.0415             | + 3.0098             | — 0.0216             |                      |                      |                      |
|   | + 0.0059 | + 0.0003             | + 0.0005             | — 0.0026             |                      |                      |                      |
|   | + 0.0853 | + 1.7785             | + 3.0572             | — 0.1143             |                      |                      |                      |
| E | 8.93095  | + 0.0044             | + 0.0067             | — 0.0383             |                      |                      |                      |
|   | + 1.7329 | + 0.0412             | — 0.0570             |                      |                      |                      |                      |
|   | 0.23877  | 8.6149               | 8.7559 <sub>n</sub>  |                      |                      |                      |                      |
|   | 0.00000  | 8.3761               | 8.5170 <sub>n</sub>  |                      |                      |                      |                      |
| S | + 0.0412 | + 3.0093             | — 0.0190             |                      |                      |                      |                      |
|   | + 0.0412 | + 0.0010             | — 0.0014             |                      |                      |                      |                      |
|   | + 1.7741 | + 3.0505             | — 0.0760             |                      |                      |                      |                      |
|   | 0.24897  | + 0.0422             | — 0.0583             |                      |                      |                      |                      |
| E | + 3.0083 | — 0.0176             |                      |                      |                      |                      |                      |
|   | 0.47832  | 8.2455 <sub>n</sub>  |                      |                      |                      |                      |                      |
|   | 0.00000  | 7.7672 <sub>n</sub>  |                      |                      |                      |                      |                      |
|   | + 3.0083 | — 0.0177             |                      |                      |                      |                      |                      |



|                                                          |  |                                                          |  |                                                          |  |
|----------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------|--|
| (x)                                                      |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 1.0000<br>0.00000<br>9.48257                           |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 0.0000<br>+ 0.3803                                     |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 0.0000<br>- 0.3710                                     |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 0.0000<br>+ 1.0102                                     |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 0.0000<br>- 0.0054                                     |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 0.0000<br>+ 0.0022                                     |  |                                                          |  |                                                          |  |
| + 1.0000<br>+ 2.0163                                     |  | (y)                                                      |  |                                                          |  |
| - 0.3803<br>9.58013 <sub>n</sub><br>9.76026 <sub>n</sub> |  | + 1.0000<br>0.00000<br>0.18013                           |  |                                                          |  |
| + 0.3710<br>+ 0.0495                                     |  | + 0.0000<br>- 0.1302                                     |  |                                                          |  |
| - 1.0102<br>- 0.0377                                     |  | + 0.0000<br>+ 0.0990                                     |  |                                                          |  |
| + 0.0054<br>+ 0.0004                                     |  | + 0.0000<br>- 0.0011                                     |  |                                                          |  |
| - 0.0022<br>- 0.0017                                     |  | + 0.0000<br>+ 0.0044                                     |  |                                                          |  |
| - 1.0163<br>- 0.3697                                     |  | + 1.0000<br>+ 0.9721                                     |  | (z)                                                      |  |
| + 0.3215<br>9.50718<br>9.40996                           |  | + 0.1302<br>9.11461<br>9.01739                           |  | + 1.0000<br>0.00000<br>9.90278                           |  |
| - 0.9725<br>+ 0.0367                                     |  | - 0.0990<br>+ 0.0149                                     |  | + 0.0000<br>+ 0.1142                                     |  |
| + 0.0050<br>+ 0.0074                                     |  | + 0.0011<br>+ 0.0030                                     |  | + 0.0000<br>+ 0.0231                                     |  |
| - 0.0005<br>- 0.0159                                     |  | - 0.0044<br>- 0.0064                                     |  | + 0.0000<br>- 0.0493                                     |  |
| - 0.6465<br>+ 0.3498                                     |  | + 0.0279<br>+ 0.1417                                     |  | + 1.0000<br>+ 1.0880                                     |  |
|                                                          |  |                                                          |  | (d)                                                      |  |
| - 1.0092<br>0.00398 <sub>n</sub><br>1.12603 <sub>n</sub> |  | - 0.1139<br>9.05652 <sub>n</sub><br>0.17857 <sub>n</sub> |  | - 0.1142<br>9.05767 <sub>n</sub><br>0.17972 <sub>n</sub> |  |
| - 0.0024<br>- 0.0521                                     |  | - 0.0019<br>- 0.0059                                     |  | + 1.0000<br>0.00000<br>1.12205                           |  |
| + 0.0154<br>- 0.0789                                     |  | + 0.0020<br>- 0.0089                                     |  | + 0.0000<br>+ 0.0782                                     |  |
| - 0.9962<br>- 1.1402                                     |  | - 0.1138<br>- 0.1287                                     |  | + 0.0000<br>+ 1.1298                                     |  |
|                                                          |  |                                                          |  | (e)                                                      |  |
| + 0.0497<br>8.6964<br>8.4576                             |  | + 0.0040<br>7.6021<br>7.3633                             |  | - 0.0172<br>8.2355 <sub>n</sub><br>7.9967 <sub>n</sub>   |  |
| + 0.0943<br>+ 0.0012                                     |  | + 0.0109<br>+ 0.0001                                     |  | + 0.0517<br>8.7135<br>8.4747                             |  |
| + 0.1440<br>+ 0.0509                                     |  | + 0.0149<br>+ 0.0041                                     |  | + 0.0782<br>+ 0.0012<br>+ 0.0238                         |  |
|                                                          |  |                                                          |  | + 0.0000<br>+ 0.0000<br>+ 1.0238                         |  |
| + 0.0931<br>8.9689<br>8.4906                             |  | + 0.0108<br>8.0334<br>7.5551                             |  | + 0.0586<br>8.7679<br>8.2896                             |  |
| + 0.0931                                                 |  | + 0.0108                                                 |  | + 0.0770<br>8.8865<br>8.4082                             |  |
|                                                          |  |                                                          |  | - 0.0238<br>8.3766 <sub>n</sub><br>7.8983 <sub>n</sub>   |  |
|                                                          |  |                                                          |  | + 1.0000<br>0.00000<br>9.52168                           |  |
|                                                          |  |                                                          |  | + 1.0000                                                 |  |

Die sukzessive Auflösung ergibt:

|          |             |               |           |            |           |
|----------|-------------|---------------|-----------|------------|-----------|
| $\log v$ | $7.7672_n$  | $\log Q_{66}$ | $9.52168$ | $\log p_v$ | $0.47832$ |
| $\gg u$  | $8.5152_n$  | $\gg Q_{55}$  | $9.76137$ | $\gg p_u$  | $0.23863$ |
| $\gg t$  | $9.65016_n$ | $\gg Q_{44}$  | $0.12090$ | $\gg p_t$  | $9.87910$ |
| $\gg z$  | $8.40312$   | $\gg Q_{33}$  | $9.98835$ | $\gg p_z$  | $0.01165$ |
| $\gg y$  | $0.01809_n$ | $\gg Q_{22}$  | $0.23030$ | $\gg p_y$  | $9.76970$ |
| $\gg x$  | $9.74933$   | $\gg Q_{11}$  | $1.14923$ | $\gg p_x$  | $8.85077$ |

Zur Prüfung wird man die Unbekannten in eine der Normalgleichungen eintragen.

Die Rückkehr zu den ursprünglichen Unbekannten und zur Einheit von Bogen-  
sekunden wird vermittelt durch

$$dM_0 = [1.7442] x$$

$$du = [8.0449] y$$

$$d\varphi = [1.6561] z$$

$$ds = [1.7134] t$$

$$dp = [1.9338] u$$

$$dq = [1.7308] v$$

und gibt

$$dM_0 = + 31''.15 \quad [1.4935]$$

$$du = - 0''.01156 \quad [8.0630_n]$$

$$d\varphi = + 1''.15 \quad [0.0592]$$

$$ds = - 23''.10 \quad [1.3636_n]$$

$$dp = - 2''.81 \quad [0.4490_n]$$

$$dq = - 0.31 \quad [9.4980_n]$$

Die Eintragung der ermittelten Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen  
(Seite 424) führt zu folgender Darstellung

| $dM_0$      | $du$       | $d\varphi$ | $ds$        | $dp$       | $dq$       | $-l$       | $\sqrt{p}\delta$            | $p\delta^2$ |
|-------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|-----------------------------|-------------|
| $+ 50''.19$ | $- 0''.21$ | $+ 0''.40$ | $- 47''.51$ | $- 0''.09$ | $- 0''.10$ | $- 2''.61$ | $+ 0''.07$                  | $0.0049$    |
| $+ 37.62$   | $- 6.13$   | $- 2.69$   | $- 29.94$   | $+ 1.00$   | $- 0.04$   | $- 0.00$   | $- 0.18$                    | $0.0324$    |
| $+ 59.69$   | $- 20.13$  | $- 1.34$   | $- 36.22$   | $- 0.17$   | $- 0.04$   | $- 1.46$   | $+ 0.33$                    | $0.1089$    |
| $+ 36.12$   | $- 24.28$  | $+ 1.05$   | $- 32.32$   | $- 0.09$   | $- 0.03$   | $+ 19.06$  | $- 0.49$                    | $0.2401$    |
| $+ 50.88$   | $- 110.85$ | $- 1.27$   | $- 45.21$   | $+ 0.40$   | $- 0.14$   | $+ 106.32$ | $+ 0.13$                    | $0.0169$    |
| $- 8.11$    | $+ 0.03$   | $- 0.06$   | $+ 7.62$    | $- 0.58$   | $- 0.62$   | $+ 0.14$   | $- 1.58$                    | $2.4964$    |
| $- 9.81$    | $+ 1.32$   | $+ 0.68$   | $+ 8.09$    | $+ 3.48$   | $- 0.14$   | $- 3.00$   | $+ 0.62$                    | $0.3844$    |
| $+ 5.67$    | $- 2.07$   | $- 0.05$   | $- 3.38$    | $+ 1.71$   | $+ 0.46$   | $- 4.60$   | $- 2.26$                    | $5.1076$    |
| $- 2.75$    | $+ 1.84$   | $- 0.08$   | $+ 2.46$    | $- 1.20$   | $- 0.42$   | $- 0.40$   | $- 0.55$                    | $0.3025$    |
| $- 11.66$   | $+ 25.20$  | $+ 0.20$   | $+ 10.44$   | $+ 1.73$   | $- 0.58$   | $- 25.17$  | $+ 0.16$                    | $0.0256$    |
|             |            |            |             |            |            |            | $[\delta\delta p] = 8.7197$ |             |

Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 wird also

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{10-6}} = \pm 1''.4764.$$

Wird die Fehlerquadratsumme in der früher benutzten Einheit von [2.0266] Sekunden ausgedrückt, so wird sie 0.0008, was mit dem früher gefundenen Werte von [116] = 0.0009 in genügender Übereinstimmung ist.

Die mittleren Fehler der Unbekannten  $dM_0, \dots$  berechnen sich nach den Formeln 23) (Seite 410), wobei wir zu beachten haben, daß, wenn der eben abgeleitete Wert von  $\mu$  benutzt wird, die Verwandlung in Bogensekunden bereits geschehen ist und daß die oben angegebenen Gewichte sich auf die Unbekannten  $x, y, \dots$  beziehen. Ist

$$x = \alpha d\varphi \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{x}{\alpha}$$

so wird der mittlere Fehler von  $d\varphi$

$$\mu_\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{p_x} \alpha}.$$

Hiernach kommt für die mittleren Fehler der 6 Unbekannten  $dM_0, \dots$

$$\begin{aligned} dM_0 & \pm 2''89 \\ d\mu & \pm 0.00020 \\ d\varphi & \pm 0.62 \\ ds & \pm 0.82 \\ dp & \pm 0.91 \\ dq & \pm 0.43 \end{aligned}$$


---

## Abschnitt XXVII.

### Die Bahnverbesserung durch Variation der Elemente.

**140. Formulierung des Problems.** Durch die im vierten Teil auseinander-gesetzten Methoden wurden für einen zu untersuchenden Himmelskörper Bahnelemente erlangt, welche den drei ausgewählten Beobachtungen streng genügen. Da diese Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind, werden auch die erlangten Elemente noch nicht die wahren sein, und es werden infolgedessen die noch vorhandenen anderen Beobachtungen durch die Elemente um so weniger dargestellt werden, als sie ebenfalls mit Fehlern behaftet sind. Die genannten Methoden verlangen, daß die drei der Bahnbestimmung zugrunde gelegten Beobachtungen zeitlich nahe beisammen liegen; dadurch wird der Einfluß der Beobachtungsfehler auf diejenigen Teile der Bahn, die weit abstehenden Beobachtungen zugehören, ein bedeutender und es können sehr erhebliche Abweichungen der Bahn von den Beobachtungen zutage treten. Es entsteht daher die Aufgabe, die ersten Elemente zu verbessern; dies derart auszuführen, daß allen Beobachtungen streng genügt wird, ist unmöglich, da alle Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind; man muß sich vielmehr damit begnügen, ein solches Elementensystem aufzustellen, welches allen Beobachtungen so weit genügt, daß die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung als Beobachtungsfehler aufgefaßt werden können. Solcher Systeme gibt es unendlich viele und es entsteht daher die Aufgabe, aus ihnen das beste zu ermitteln. Nach der Theorie der Beobachtungsfehler und der Ausgleichungsrechnung (siehe Abschnitt XXVI) ist jenes System als das annehmbarste anzusehen, für welches die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler ein Minimum wird. Bezeichnen wir mit  $s$  den Fehler einer Beobachtung, so muß also werden

$$\sum s^2 = \text{Minimum.}$$

Sind  $\alpha, \delta$  die Koordinaten des beobachteten Ortes,  $\alpha + \Delta\alpha, \delta + \Delta\delta$  die Koordinaten des wahren Ortes, so wird:

$$s^2 = (\cos \delta \Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2$$

und die Bedingung wird daher

$$\sum (\cos \delta \Delta\alpha)^2 + \sum (\Delta\delta)^2 = \text{Minimum.}$$

Nehmen wir als wahren Ort, der uns ja an sich unbekannt sein muß, denjenigen an, der sich nachträglich durch die Rechnung mit dem annehmbarsten Elementensystem für die Beobachtungszeit ergibt, so werden die Fehler  $\cos \delta \Delta\alpha$  und  $\Delta\delta$  direkt die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung geben, und das zu lösende Problem kann jetzt so formuliert werden: Es ist jenes Elementensystem aufzustellen, für welches die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung ein Minimum wird.

Sind  $E_1, \dots, E_n$ , allgemein  $E_i$ , die vorgelegten Elemente, die zu verbessern sind, und  $E_i + dE_i$  diejenigen, welche der genannten Bedingung entsprechen, so daß  $dE_i$  die zu ermittelnden Unbekannten werden, ist ferner  $\alpha_B$  die beobachtete Koordinate,

$\alpha_R$  die mit dem System  $E_i$  gerechnete,  $\alpha_D$  die mit dem System  $E_i + dE_i$  gerechnete Koordinate, so lautet die Bedingung

$$\sum (\alpha_D - \alpha_R)^2 = \text{Min.}$$

oder

$$\sum [(\alpha_D - \alpha_R) - (\alpha_B - \alpha_R)]^2 = \text{Min.},$$

d. h. wenn die direkt angebbaren Größen  $\alpha_B - \alpha_R$  von den zu ermittelnden  $\alpha_D - \alpha_R$  abgezogen werden, so müssen Reste übrig bleiben deren Quadratsumme ein Minimum ist. Bezeichnet man diese Reste mit  $\delta$ , so wird

$$(\alpha_D - \alpha_R) - (\alpha_B - \alpha_R) = \delta$$

und es muß werden

$$\sum \delta^2 = \text{Min.}$$

Wenn  $\alpha_D - \alpha_R$  so klein ist, daß es als Differenzial aufgefaßt werden kann, macht seine Bildung keine Schwierigkeit; denn da die Koordinate  $\alpha$  als Funktion der Elemente  $E_1, \dots, E_6$  darstellbar ist:

$$\alpha = f(E_1, E_2, \dots, E_6),$$

so wird:

$$\alpha_D - \alpha_R = d\alpha = \frac{\partial f}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial f}{\partial E_2} dE_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial E_6} dE_6.$$

Es gibt also jede beobachtete Koordinate eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial E_2} dE_2 + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial E_6} dE_6 - (\alpha_B - \alpha_R) = \delta \quad 1)$$

und aus der Gesamtheit aller sind die Unbekannten  $dE_1, dE_2, \dots, dE_6$  nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung zu bestimmen. Sind die Elemente  $E_i$  so mangelhaft, daß die Korrekturen  $dE_1, \dots, dE_6$  nicht als Differenziale aufgefaßt werden können, so kann die lineare Form der Gl. 1), welche Bedingung für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung ist, nicht hergestellt werden und es muß also ein anderes Verfahren der Verbesserung eingeschlagen werden. Vielfach genügt es, mit den erlangten Elementen  $E_i + dE_i$  den Prozeß zu wiederholen.

Die Bildung der Differenzialquotienten  $\frac{d\alpha}{dE_i}$ , auf welche nach der Gl. 1) das Problem der Bahnverbesserung zurückgeführt ist, ist theoretisch leicht ausführbar, verlangt aber bei der praktischen Berechnung für jede einzelne Beobachtung eine nicht unerhebliche Arbeit. Das einfachste Mittel, diese abzukürzen, besteht in der Zusammenfassung mehrerer Beobachtungen in einen sogenannten »Normalort«; es wird dann auch die Anzahl der Gleichungen 1) eine geringere und dadurch ihre Behandlung mittels der Ausgleichungsrechnung abgekürzt. Behufs Bildung eines Normalortes nimmt man von einer ganzen Gruppe von zeitlich einander nahen Beobachtungen das Mittel aus allen  $\alpha_B - \alpha_R$  und läßt dasselbe als Ephemeridenkorrektur für das Mittel der zugehörigen Beobachtungszeiten gelten. Ist dann  $A_R$  der für die Zeit

$$T = \frac{t^{(1)} + t^{(2)} + \dots + t^{(n)}}{n}$$

geltende Ephemeridenort, also das Rechnungsergebnis, so wird

$$A_B = A_R + \frac{(\alpha_B^{(1)} - \alpha_R^{(1)}) + (\alpha_B^{(2)} - \alpha_R^{(2)}) + \cdots + (\alpha_B^{(n)} - \alpha_R^{(n)})}{n}$$

der fingierte beobachtete Ort für die Zeit  $T$  sein, der vermöge seiner Zusammensetzung aus  $n$  Beobachtungen natürlich eine erhöhte Genauigkeit besitzt. Dieses Verfahren setzt voraus, daß die  $\alpha_B - \alpha_R$  der Gruppe nur um Beträge von der Ordnung der Beobachtungsfehler voneinander abweichen oder wenigstens, daß der Gang ein der Zeit proportionaler sei. Je besser die zu korrigierenden Elemente bereits sind, auf desto größere Zeiträume wird dies zutreffen und mit desto weniger Normalorten hat man also zu operieren.

**141. Die Grundformeln der Bahnverbesserung.** Es sind die Beziehungen zwischen den Änderungen der geozentrischen Koordinaten einerseits und den Änderungen der Elemente andererseits aufzustellen. Da sich erstere auf ein geozentrisches, letztere auf ein heliozentrisches System beziehen, empfiehlt es sich, von rechtwinkligen Koordinaten Gebrauch zu machen und dann folgendermaßen zu verfahren: Man variiert den Planetenort im Raume und stellt die Beträge der Variationen nach den Achsen eines geozentrischen rechtwinkligen Systems auf, dessen Grundebene mit der der gemessenen Koordinaten zusammenfällt; desgleichen bildet man die Variationen nach den Achsen eines heliozentrischen Systems, das so gewählt wird, daß die genannten Variationen sich bequem durch die Variationen der Elemente ausdrücken lassen; beide Gruppen von Variationen werden schließlich auf die Achsen eines zweckmäßig gewählten Systems projiziert und müssen hier zu denselben Beträgen führen, wodurch Gleichungen zwischen den gewünschten Größen hergestellt sind; der Anfangspunkt dieses letzteren Systems kann im Mittelpunkt der Erde oder der Sonne gewählt werden, da die Lage der Erde gegen die Sonne als konstant anzusehen ist und nicht variiert wird.

Wir legen ein festes, vorläufig beliebiges Koordinatensystem  $xyz$  zugrunde, auf welches sich die geozentrischen Polarkoordinaten  $\varrho, \alpha, \delta$  beziehen; auf dasselbe System, parallel zu sich selbst nach dem Mittelpunkt der Sonne verschoben, beziehen sich auch die Elemente: Abstand des Perihels vom Knoten  $\omega$ , Länge des Knotens  $\Omega$  und Neigung der Bahnebene  $i$ .

Man hat nun *erstens* für den geozentrischen Ort  $A$  die geozentrischen rechtwinkligen Koordinaten:

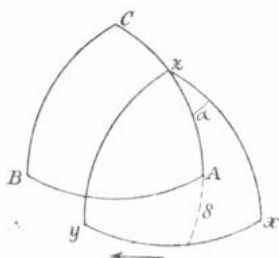


Fig. 55.

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \delta \cos \alpha \\ y &= \varrho \cos \delta \sin \alpha \\ z &= \varrho \sin \delta \end{aligned} \quad 1)$$

und wenn der Planetenort im Raume variiert wird, die entsprechenden Variationen des geozentrischen Ortes:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \delta \cos \alpha d\varrho - \varrho \cos \delta \sin \alpha d\alpha - \varrho \sin \delta \cos \alpha d\delta \\ dy &= \cos \delta \sin \alpha d\varrho + \varrho \cos \delta \cos \alpha d\alpha - \varrho \sin \delta \sin \alpha d\delta \\ dz &= \sin \delta d\varrho + \varrho \cos \delta d\delta \end{aligned} \quad 2)$$

Wird ein Koordinatensystem  $ABC$  eingeführt, dessen eine Achse durch  $A$  geht und dessen  $AC$ -Ebene die  $x$ -Achse des vorigen Systems enthält, und werden auf die Achsen dieses Systems die  $dx, dy, dz$  projiziert, so werden die Variationen erhalten:

$$\begin{aligned} dA &= \cos(Ax)dx + \cos(Ay)dy + \cos(Az)dz \\ dB &= \cos(Bx)dx + \cos(By)dy + \cos(Bz)dz \\ dC &= \cos(Cx)dx + \cos(Cy)dy + \cos(Cz)dz. \end{aligned} \quad 3)$$

Nun ist, wie man leicht der Figur 55 entnimmt:

$$\begin{aligned} \cos(Ax) &= \cos \delta \cos \alpha, & \cos(Ay) &= \cos \delta \sin \alpha, & \cos(Az) &= \sin \delta \\ \cos(Bx) &= -\sin \alpha, & \cos(By) &= \cos \alpha, & \cos(Bz) &= 0 \\ \cos(Cx) &= -\sin \delta \cos \alpha, & \cos(Cy) &= -\sin \delta \sin \alpha, & \cos(Cz) &= \cos \delta. \end{aligned}$$

Hiermit und mit den Werten 2) folgt aus 3)

$$\begin{aligned} dA &= d\varrho \\ dB &= \varrho \cos \delta d\alpha \\ dC &= \varrho d\delta. \end{aligned} \quad 4)$$

Um zweitens die Variationen des heliozentrischen Ortes durch die Änderungen der Elemente auszudrücken, bestimmen wir ein Koordinatensystem  $\xi\eta\zeta$  derart, daß die  $\xi\eta$ -Ebene mit der Bahnebene zusammenfällt, die  $\xi$ -Achse durch das Perihel, die  $\eta$ -Achse durch  $90^\circ$  der wahren Anomalie und die  $\zeta$ -Achse durch den Nordpol der Bahn geht. Der Bogen vom Knoten  $K$  der Bahn bis zur  $\xi$ -Achse ist dann  $\omega$  und der Bogen von der  $x$ -Achse bis  $K$  ist  $\Omega$ . Variiert man nun die Bestimmungsstücke der Bahn um die Beträge  $d\omega, d\Omega, di$ , so lassen sich diese nach den Darlegungen in Nr. 6 durch die Drehungen des Systems  $\xi\eta\zeta$  um die ursprüngliche Lage der Achsen  $\xi, \eta, \zeta$  ausdrücken. Bezeichnet man die Drehung um die  $\xi$ -Achse mit  $d\mathbf{p}$ , um die  $\eta$ -Achse mit  $d\mathbf{q}$ , um die  $\zeta$ -Achse mit  $d\mathbf{s}$ , so wird nach Gl. 6) (Seite 13), da hier

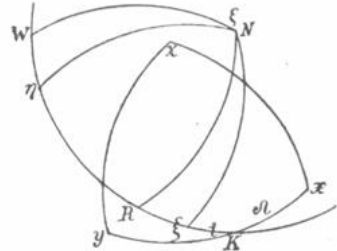


Fig. 56.

zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega, & \psi &= -\Omega, & \theta &= i \\ d\mathbf{p} &= \sin i \sin \omega d\Omega + \cos \omega di \\ d\mathbf{q} &= \sin i \cos \omega d\Omega - \sin \omega di \\ d\mathbf{s} &= \cos i d\Omega + d\omega. \end{aligned} \quad 5)$$

Sind  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten des Planetenortes in dem System  $\xi\eta\zeta$ , so erfahren diese durch die Drehungen nach den Gl. 8) (Seite 13) die Änderungen

$$\begin{aligned} d\xi &= -\eta d\mathbf{s} + \zeta d\mathbf{q} \\ d\eta &= -\zeta d\mathbf{p} + \xi d\mathbf{s} \\ d\zeta &= -\xi d\mathbf{q} + \eta d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad 6)$$

Bestimmt man den Planetenort durch seine Polarkoordinaten  $r, v, b$  im beweglichen System  $\xi\eta\zeta$ , wo  $r$  der Radiusvektor,  $v$  die wahre Anomalie,  $b$  die Breite über der Bahnebene bezeichnen, so wird

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos b \cos v \\ \eta &= r \cos b \sin v \\ \zeta &= r \sin b ;\end{aligned}$$

setzt man weiter fest, daß der Planetenort stets in der Bahnebene  $\xi\eta$  liegen soll, so wird ständig  $b = 0$  und daher

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos v \\ \eta &= r \sin v \\ \zeta &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Die Änderungen der die Koordinaten  $r$  und  $v$  bestimmenden Elemente bringen also in den  $\xi, \eta, \zeta$  die Änderungen

$$\begin{aligned}d\xi &= \cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dv \\ d\eta &= \sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dv \\ d\zeta &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

hervor. Die Gesamtänderung des Ortes, hervorgerufen durch die Variationen aller Elemente, ist die Summe von 6) und 8), nämlich

$$\begin{aligned}-\eta ds + \zeta dq + \cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dv \\ -\zeta dp + \xi ds + \sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dv \\ -\xi dq + \eta dp\end{aligned}$$

oder, wenn 7) eingetragen und zur Abkürzung

$$\begin{aligned}dv + ds &= dw \\ dp \sin v - dq \cos v &= dn\end{aligned}\tag{9}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dw \\ \sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dw \\ r dn.\end{aligned}\tag{10}$$

Diese Änderungen vereinfachen sich noch, wenn man statt des Systems  $\xi\eta\zeta$  ein anderes  $RWN$  einführt, das aus dem ersteren dadurch entsteht, daß man es um die  $\zeta$ -Achse um den Winkel  $v$  dreht. Die  $R$ -Achse geht dann ständig durch den Radiusvektor  $r$  oder durch den heliozentrischen Ort des Planeten, die  $W$ -Achse liegt in der variablen Bahnebene  $90^\circ$  vorwärts, die  $N$ -Achse ist der Nordpol der variablen Bahn. Da

$$\begin{aligned}R &= \xi \cos v + \eta \sin v \\ W &= -\xi \sin v + \eta \cos v \\ N &= \zeta\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}dR &= \cos v \cdot d\xi + \sin v \cdot d\eta \\ dW &= -\sin v \cdot d\xi + \cos v \cdot d\eta \\ dN &= d\zeta\end{aligned}$$

so werden die Änderungen 10) im neuen System:

$$dr, \quad r dw, \quad r dn.\tag{11}$$

Projiziert man diese auf die Achsen  $A, B, C$  (Seite 435), so ist die Summe der Projektionen auf jeder Achse gleich den früher aufgestellten  $dA, dB, dC$  (Gl. 4)) d. h. wir haben die Gleichungen:



$$\begin{aligned}
 dq &= \cos(AR)dr + \cos(AW)rdw + \cos(AN)rdn \\
 q \cos \delta da &= \cos(BR)dr + \cos(BW)rdw + \cos(BN)rdn \\
 q d\delta &= \cos(CR)dr + \cos(CW)rdw + \cos(CN)rdn
 \end{aligned}
 \tag{I.}$$

die wir als die Normalform der Bahnverbesserungsgleichungen bezeichnen können. Dieselbe hat zuerst *Clausen* (Crellesches Journ. Band VII, S. 108) und später *Radau* (Bull. Astr. T. V, 1888) eingeführt. Das System  $ABC$  ist durch das feste System  $xyz$  und durch den geozentrischen Ort  $A$  gegeben; das System  $RWN$  durch die Bahnebene und den heliozentrischen Ort  $R$ . Hieraus lassen sich die  $\cos(AR)$ , ... leicht ableiten. Ehe wir darauf eingehen und überhaupt I. auf eine gebrauchsfähige Form überführen, stellen wir noch eine zweite wichtige Grundform auf, die aus folgender Überlegung hervorgeht. Die Variationen  $dr$  und  $rdw$  des heliozentrischen Ortes im System  $RWN$  hängen nur von den Variationen derjenigen Elemente der Bahn ab, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen, die Variation  $rdn$  dagegen von den Variationen der Elemente, welche die Lage der Bahnebene angeben; wenn man in den Gleichungen I. erstere von der letzteren trennen könnte, hätte man die Möglichkeit, Bedingungsgleichungen mit nur vier Unbekannten statt 6 auflösen zu müssen; gleichzeitig eine Gleichung zu bilden, welche nur  $rdn$  enthält, gelingt natürlich nicht, da man unter allen Umständen dafür sorgen muß, daß das unbekannte  $dq$  in zweien von den Gleichungen I. nicht auftritt; dagegen hat man eine Bedingung noch frei; diese dazu zu verwenden, daß  $dr$  oder  $rdw$  verschwindet, bringt keinen Nutzen, da die vier elliptischen Elemente in beiden vorkommen; wenn man sie aber so wählt, daß der Faktor von  $rdn$  ein Maximum wird, so erhält man eine Gleichung, die zwar alle drei Größen  $rdn$ ,  $rdw$  und  $dr$  enthält, aber erstere mit einem so großen Faktor multipliziert, daß in vielen Fällen der Praxis die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen als nahe unabhängig von  $rdw$  und  $dr$  betrachtet und für sich aufgelöst werden können. Statt  $2n$  Gleichungen mit 6 Unbekannten, hat man dann zwei Gruppen von je  $n$  Gleichungen, deren erste nach 4, und deren zweite nach 2 Unbekannten aufgelöst werden kann, was ein wesentlicher Gewinn ist.

Um diesen Gedanken auszuführen, haben wir die  $dq$ ,  $q \cos \delta da$ ,  $q d\delta$  einerseits und die  $dr$ ,  $rdw$ ,  $rdn$  andererseits statt auf die Achsen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf andere Achsen zu projizieren, die folgenden Bedingungen entsprechen: aus zwei Gleichungen muß  $dq$  verschwinden und in der einen muß  $rdn$  den Faktor Null und in der anderen seinen größtmöglichen Wert haben. Wenn  $dq$  verschwinden soll, muß es mit  $\cos 90^\circ$  multipliziert sein d. h. die betreffenden Achsen müssen in der Ebene

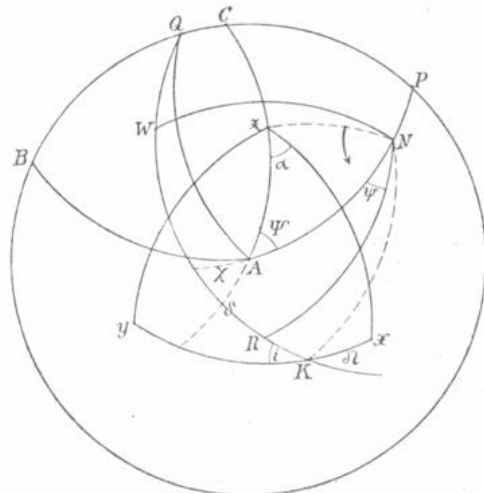


Fig. 57.

des Polkreises von  $A$  liegen, oder die erste Achse muß nach wie vor durch  $A$  gehen. Wenn ferner der Faktor von  $rdn$  verschwinden soll, so muß die zweite Achse auf

dem Polkreis von  $N$  liegen, d. h. sie muß durch den Schnitt  $Q$  der größten Kreise  $RW$  und  $BC$  gehen. Soll endlich der Faktor von  $rdn$  seinen größten Wert annehmen, so muß die betreffende Achse die kürzeste Entfernung von  $N$  haben, also auf dem größten Kreis  $AN$  liegen, somit in  $P$ . Daß  $QP = 90^\circ$ , folgt leicht aus den Sätzen Seite 2. Projizieren wir jetzt auf die Achsen des Systems  $AQP$ , so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\varrho &= dr \cos(AR) + rdw \cos(AW) + rdn \cos(AN) \\ \varrho \cos \delta d\alpha \cos(QB) + \varrho d\delta \cos(QC) &= dr \cos(QR) + rdw \cos(QW) \\ \varrho \cos \delta d\alpha \cos(PB) + \varrho d\delta \cos(PC) &= dr \cos(PR) + rdw \cos(PW) + rdn \cos(PN). \end{aligned} \quad \text{II.}$$

In den Gleichungen I. stehen links unmittelbar die Differenziale der geozentrischen Koordinaten in dem zugrunde gelegten festen System  $xyz$ ; in den Gl. II. ist dies nicht der Fall; man kann aber leicht zeigen, daß die linken Seiten von II. die Differenziale der geozentrischen Koordinaten in einem anderen Koordinatensystem sind. Nennt man nämlich  $\psi$  und  $\chi$  die Polarkoordinaten des geozentrischen Planetenortes  $A$  in dem durch die Bahnebene bestimmten Koordinatensystem  $RWN$ , so daß  $\psi$  vom größten Kreis  $RN$  aus in der Richtung der Bahnbewegung gezählt wird und  $\chi$  von der Ebene  $RW$  aus nach dem nördlichen Teil der Bahnebene positiv gerechnet wird, nennt man ferner  $\Psi$  den Positionswinkel des Deklinationskreises  $Ax$  in bezug auf den Breitenkreis  $AN$ , so wird im Dreieck  $ANx$ :

$$\begin{aligned} \text{Seite } xN &= i, & Ax &= 90^\circ - \delta, & AN &= 90^\circ - \chi \\ \text{Winkel } NAx &= \Psi, & ANx &= 90^\circ - \psi - \omega - v, & AxN &= 90^\circ - \varrho + \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

ferner:

$$QB = \Psi, \quad QC = 90^\circ - \Psi, \quad PB = 90^\circ + \Psi, \quad PC = \Psi. \quad (13)$$

Wendet man daher auf das Dreieck  $AxN$  die Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie an, indem man  $Nx$  konstant hält und nur den Punkt  $A$  variiert, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos \delta d\alpha &= -\sin \Psi d\chi + \cos \chi \cos \Psi d\psi \\ d\delta &= +\cos \Psi d\chi + \cos \chi \sin \Psi d\psi \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho \cos \delta d\alpha \cos \Psi + \varrho d\delta \sin \Psi &= \varrho \cos \chi d\psi \\ -\varrho \cos \delta d\alpha \sin \Psi + \varrho d\delta \cos \Psi &= \varrho d\chi. \end{aligned} \quad (14)$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen nach 13) mit den linken Seiten von II. identisch sind, so folgt für diese letzteren nach 14), daß sie die Differenziale der geozentrischen Koordinaten des Planetenortes  $A$  im System der Bahnebene  $RWN$  sind.

**142. Die Formeln der Bahnverbesserung, erste Methode.** Um die Gleichungen I. in eine gebrauchsfertige Form überzuführen, müssen wir beachten, daß die rein elliptischen Elemente in  $dr$  und in  $rdw$  auftreten, daß den Faktoren  $\cos(AR)$ ,  $\cos(AW)$ , ... also eine Form gegeben werden muß, welche die leichte Vereinigung beider ermöglicht, weiter daß die einzuführenden Hilfsgrößen sich bequem aus den gegebenen Stücken berechnen lassen müssen. Die sphärischen Koordinaten des Punktes  $N$  im System  $ABC$  besitzen diese Eigenschaften. Nennt man die Bogen

$$NA = a, \quad NB = b, \quad NC = c$$

und ihre Positionswinkel, gerechnet von  $Nx$  aus, bzw.

$$A, \quad B, \quad C,$$

so wird mit Beachtung, daß der sphärische Winkel  $\angle xNW =$  dem Bogen  $KR = \omega + v$  ist, im Dreieck  $NAR$ :

$$\cos(AR) = \sin a \sin(A + \omega + v),$$

im Dreieck  $NAW$ :

$$\cos(AW) = \sin a \cos(A + \omega + v)$$

usf. Damit gehen die Gl. I. über in:

$$\begin{aligned} d\varrho &= \sin a \sin(A + \omega + v) dr + \sin a \cos(A + \omega + v) rdw + \cos a \cdot rdn \\ \varrho \cos \delta d\alpha &= \sin b \sin(B + \omega + v) dr + \sin b \cos(B + \omega + v) rdw + \cos b \cdot rdn \quad \text{I}^a) \\ \varrho d\delta &= \sin c \sin(C + \omega + v) dr + \sin c \cos(C + \omega + v) rdw + \cos c \cdot rdn \end{aligned}$$

und haben offenbar die gewünschte Form. Die Hilfsgrößen  $A, B, C, a, b, c$  ergeben sich leicht aus den Dreiecken  $NxA, Nx B, Nx C$ , wofür die Formeln unten zusammengestellt werden sollen. Die in den Gl. I<sup>a</sup>. adoptierte Form hat zuerst *Schönfeld* benutzt (Astr. Nachr. Band 113, Seite 73, Gl. 19), doch ist er auf einem weniger allgemeinen Wege dazu gelangt.

In die Gl. I<sup>a</sup>. sind nun die Elemente einzuführen; hierzu sind zuerst die Differenziale  $dr$  und  $dv$  durch die Differenziale der Elemente auszudrücken; dabei ist zwischen elliptischen Bahnen von mäßiger Exzentrizität und parabelnahen und parabolischen Bahnen zu unterscheiden. Wir behandeln vorläufig nur die Ellipse und kommen auf die übrigen in Nr. 146 zurück.

Sind  $t_0, M_0, a, (p), \mu, \varphi$  Epoche, mittlere Anomalie der Epoche, große Halbachse, (Parameter), mittlere tägliche Bewegung und Exzentrizitätswinkel der zu verbessernden Bahn, so hat man folgende aus Nr. 44 gesammelte Formeln für die elliptische Bewegung:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mu &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \\ \text{(b)} \quad M &= M_0 + (t - t_0) \mu \\ \text{(c)} \quad E - \sin \varphi \sin E &= M \\ \text{(d)} \quad r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - \sin \varphi) \\ \text{(e)} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v &= \operatorname{tg} (45 + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \\ \text{(f)} \quad r &= a (1 - \sin \varphi \cos E) = \frac{p}{1 + \sin \varphi \cos v} \end{aligned}$$

Die Differenziation dieser Formeln gibt

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3} \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{3} \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} d\mu$$

$$d\frac{1}{a} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{a}}{k} d\mu$$

$$dM = dM_0 + (t - t_0) d\mu$$

$$(1 - \sin \varphi \cos E) dE - \cos \varphi \sin E d\varphi = dM$$

oder:

$$dE = \frac{a}{r} dM + \sin v \cdot d\varphi = \frac{a}{r} dM_0 + \frac{a}{r} (t - t_0) d\mu + \sin v \cdot d\varphi.$$

Wird (e) logarithmisch differenziert, so kommt:

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{dE}{\sin E}$$

oder

$$r dv = \frac{r \sin v}{\cos \varphi} d\varphi + a \cos \varphi dE,$$

oder nach Eintragung des Wertes von  $dE$

$$r dv = \frac{a^2 \cos \varphi}{r} dM_0 + \frac{a^2 \cos \varphi}{r} (t - t_0) d\mu + a \cos \varphi \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) d\varphi. \quad 15)$$

Aus der Differenziation von (f) folgt:

$$dr = \frac{r}{a} da + a \sin \varphi \sin E \cdot dE - a \cos \varphi \cos E \cdot d\varphi$$

oder wenn für  $\frac{da}{a}$  und  $dE$  ihre oben angegebenen Werte substituiert werden:

$$dr = a \operatorname{tg} \varphi \sin v dM_0 + \left( a \operatorname{tg} \varphi \sin v \cdot (t - t_0) - \frac{2}{3k} r a^{\frac{3}{2}} \right) d\mu - a \cos \varphi \cos v \cdot d\varphi. \quad 16)$$

In den Gl. I<sup>a</sup>. setzen wir ferner nach 9)

$$\begin{aligned} r dw &= r dv + r ds \\ r dn &= r \sin v \cdot d\mathbf{p} - r \cos v \cdot d\mathbf{q}, \end{aligned} \quad 17)$$

indem es Vorteile bietet, nach einem Vorschlag von Schönfeld die Differenziale  $d\mathbf{p}$ ,  $d\mathbf{q}$ ,  $ds$  (von ihm mit bezw.  $dv$ ,  $-d\lambda$ ,  $dx$  bezeichnet) als Unbekannte beizubehalten und erst zum Schluß mittels 5) auf die gewöhnlichen Elemente  $i$ ,  $\Omega$  und  $\omega$  überzugehen.

Die Eintragung von 15), 16), 17) in I<sup>a</sup>. führt in den Faktoren von  $dM_0$  und  $d\mu$  auf folgenden Ausdruck

$$\sin \mathbf{a} \left( \sin(\mathbf{A} + \omega + v) a \operatorname{tg} \varphi \sin v + \cos(\mathbf{A} + \omega + v) \frac{a^2}{r} \cos \varphi \right),$$

der sich leicht auf eine geschmeidigere Form bringen läßt:

$$\sin \mathbf{a} \cdot a \sec \varphi \left( \sin(\mathbf{A} + \omega + v) \sin \varphi \sin v + \cos(\mathbf{A} + \omega + v) \frac{p}{r} \right)$$

und wenn nach (f)  $\frac{p}{r} = 1 + \sin \varphi \cos v$  gesetzt wird:

$$\sin \mathbf{a} \cdot a \sec \varphi (\cos(\mathbf{A} + \omega + v) + \sin \varphi \cos(\mathbf{A} + \omega)).$$

Ebenso hat man für  $d\varphi$  den Faktor:

$$a \sin \mathbf{a} (\cos(\mathbf{A} + \omega + v) \cos \varphi \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) - \sin(\mathbf{A} + \omega + v) \cos \varphi \cos v),$$

der unter Anwendung von  $r \sin v = a \cos \varphi \sin E$  sofort in die einfache Form übergeht:

$$a \sin a (\sin E \cos(A + \omega + v) - \cos \varphi \sin(A + \omega)).$$

Die übrigen Faktoren bedürfen keiner Umgestaltung. Man erhält die symmetrischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} d\varrho &= \sin a (\cos(A + \omega + v) + \sin \varphi \cos(A + \omega)) a \sec \varphi dM_0 \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &+ \sin a (\cos(A + \omega + v) + \sin \varphi \cos(A + \omega)) a \sec \varphi (t - t_0) d\mu \\ &- \sin a \sin(A + \omega + v) \frac{2}{3k} a^{\frac{3}{2}} r d\mu \end{aligned} \right. \\ &\quad + \sin a (\sin E \cos(A + \omega + v) - \cos \varphi \sin(A + \omega)) a d\varphi \\ &\quad + \sin a \cos(A + \omega + v) r ds \\ &\quad + \cos a r \sin v dp \\ &\quad - \cos a r \cos v dq \\ \varrho \cos \delta da &= \sin b (\cos(B + \omega + v) + \sin \varphi \cos(B + \omega)) a \sec \varphi dM_0 \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &+ \sin b (\cos(B + \omega + v) + \sin \varphi \cos(B + \omega)) a \sec \varphi (t - t_0) d\mu \\ &- \sin b \sin(B + \omega + v) \frac{2}{3k} a^{\frac{3}{2}} r d\mu \end{aligned} \right. \\ &\quad + \sin b (\sin E \cos(B + \omega + v) - \cos \varphi \sin(B + \omega)) a d\varphi \\ &\quad + \sin b \cos(B + \omega + v) r ds \\ &\quad + \cos b r \sin v dp \\ &\quad - \cos b r \cos v dq \\ \varrho d\delta &= \sin c (\cos(C + \omega + v) + \sin \varphi \cos(C + \omega)) a \sec \varphi dM_0 \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &+ \sin c (\cos(C + \omega + v) + \sin \varphi \cos(C + \omega)) a \sec \varphi (t - t_0) d\mu \\ &- \sin c \sin(C + \omega + v) \frac{2}{3k} a^{\frac{3}{2}} r d\mu \end{aligned} \right. \\ &\quad + \sin c (\sin E \cos(C + \omega + v) - \cos \varphi \sin(C + \omega)) a d\varphi \\ &\quad + \sin c \cos(C + \omega + v) r ds \\ &\quad + \cos c r \sin v dp \\ &\quad - \cos c r \cos v dq. \end{aligned}$$

Die Einführung von Hilfswinkeln zur Vereinfachung dieser Gleichungen ist rechnerisch nicht vorteilhaft, dagegen empfehlen sich einige abkürzende Bezeichnungen. Bevor wir diese angeben und mit den definitiven Formeln zusammenstellen, wollen wir die Berechnung der  $A, B, C, a, b, c$  erläutern. In Dreieck  $NxA$  (Fig. 57, Seite 437) ist:

$$\text{Seite: } xN = i, \quad Ax = 90^\circ - \delta, \quad AN = a$$

$$\text{Winkel: } xNA = A, \quad AxN = 90^\circ - Q + \alpha$$

und daher

$$\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \delta \cos(\alpha - Q) \\ \sin a \cos A &= \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i \sin(\alpha - Q) \\ \cos a &= \sin \delta \cos i - \cos \delta \sin i \sin(\alpha - Q). \end{aligned}$$

Ähnlich folgen  $b, B, c, C$  aus den Dreiecken  $NxB$  und  $NxC$ .

In die folgende Zusammenstellung nehmen wir nur die Formeln für  $\varrho \cos \delta da$  und  $\varrho d\delta$  auf, da die für  $d\varrho$  in praxi nicht gebraucht wird und im vorigen nur der Vollständigkeit und Symmetrie halber mitgeführt wurde.

*Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen von mäßiger Exzentrizität (Planeten und kurzperiodische Kometen). Erste Methode.*

$\omega$ ,  $i$  und  $\Omega$  beziehen sich auf dieselbe Grundebene und dasselbe Äquinoktium, wie die Koordinaten  $\alpha$  und  $\delta$ .

$$\begin{aligned}
 \sin \mathbf{b} \sin \mathbf{B} &= -\sin(\alpha - \Omega) \\
 \sin \mathbf{b} \cos \mathbf{B} &= +\cos i \cos(\alpha - \Omega) \\
 \cos \mathbf{b} &= -\sin i \cos(\alpha - \Omega) \\
 \sin \mathbf{c} \sin \mathbf{C} &= -\sin \delta \cos(\alpha - \Omega) \\
 \sin \mathbf{c} \cos \mathbf{C} &= +\sin i \cos \delta - \cos i \sin \delta \sin(\alpha - \Omega) \\
 \cos \mathbf{c} &= +\cos i \cos \delta + \sin i \sin \delta \sin(\alpha - \Omega) \\
 \sin \mathbf{b} \text{ und } \sin \mathbf{c} &\text{ sind positiv}
 \end{aligned}
 \tag{A.}$$

$$\begin{array}{ll}
 \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{b} \cos(\mathbf{B} + \omega + v) = F_c^\alpha & \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{c} \cos(\mathbf{C} + \omega + v) = F_c^\delta \\
 \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{b} \sin(\mathbf{B} + \omega + v) = F_s^\alpha & \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{c} \sin(\mathbf{C} + \omega + v) = F_s^\delta \\
 \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{b} \cos(\mathbf{B} + \omega) = G_c^\alpha & \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{c} \cos(\mathbf{C} + \omega) = G_c^\delta \\
 \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{b} \sin(\mathbf{B} + \omega) = G_s^\alpha & \frac{a}{\varrho} \sin \mathbf{c} \sin(\mathbf{C} + \omega) = G_s^\delta \\
 \frac{1}{\varrho} \cos \mathbf{b} \, r \cos v = H_c^\alpha & \frac{1}{\varrho} \cos \mathbf{c} \, r \cos v = H_c^\delta \\
 \frac{1}{\varrho} \cos \mathbf{b} \, r \sin v = H_s^\alpha & \frac{1}{\varrho} \cos \mathbf{c} \, r \sin v = H_s^\delta \\
 \frac{2}{3k} \sqrt{a} = K & \log \frac{2}{3k} = 1.58 \, 8327
 \end{array}
 \tag{B.}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \delta d\alpha &= (F_c^\alpha + \sin \varphi \cdot G_c^\alpha) \sec \varphi dM_0 \\
 &+ ((F_c^\alpha + \sin \varphi \cdot G_c^\alpha) \sec \varphi (t - t_0) - Kr F_s^\alpha) d\mu \\
 &+ (\sin E \cdot F_c^\alpha - \cos \varphi \cdot G_s^\alpha) d\varphi \\
 &+ F_c^\alpha \frac{r}{a} ds \\
 &+ H_s^\alpha dp \\
 &- H_c^\alpha dq \\
 d\delta &= (F_c^\delta + \sin \varphi \cdot G_c^\delta) \sec \varphi dM_0 \\
 &+ ((F_c^\delta + \sin \varphi \cdot G_c^\delta) \sec \varphi (t - t_0) - Kr F_s^\delta) d\mu \\
 &+ (\sin E \cdot F_c^\delta - \cos \varphi \cdot G_s^\delta) d\varphi \\
 &+ F_c^\delta \frac{r}{a} ds \\
 &+ H_s^\delta dp \\
 &- H_c^\delta dq.
 \end{aligned}
 \tag{C.}$$

Für  $\alpha$  und  $\delta$  nimmt man am besten die aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte;  $r \cos v$ ,  $r \sin v$ ,  $v$ ,  $\sin E$ ,  $\varrho$  sind der Ephemeridenrechnung zu entnehmen.

Von  $d\mathbf{p}$ ,  $d\mathbf{q}$ ,  $ds$  geht man mittels der Formeln 5) (Seite 435) auf die gewöhnlichen Bahnelemente  $d\omega$ ,  $d\Omega$ ,  $di$  über:

$$\begin{aligned} di &= \cos\omega d\mathbf{p} - \sin\omega d\mathbf{q} \\ \sin i d\Omega &= \sin\omega d\mathbf{p} + \cos\omega d\mathbf{q} \\ d(\Omega + \omega) &= ds + \operatorname{tg} \frac{1}{2}i \sin i d\Omega. \end{aligned} \quad \text{D.}$$

Da die  $d\mathbf{p}$ ,  $d\mathbf{q}$ ,  $ds$  ihrer Definition nach vom zugrunde gelegten Koordinatensystem unabhängig sind, dienen die Formeln D. zum Übergang auf jedes Grundsystem, Ekliptik oder Äquator. In der Regel hat man Ekliptikalelemente vorliegen; nimmt man, wie ebenfalls meist der Fall ist, für  $\alpha$  und  $\delta$  Rektaszension und Deklination, so muß man bei Durchrechnung von A. und B. sich natürlich der Äquatorealelemente bedienen. Mittels D. kann man dann aber gleich die Korrekturen der Ekliptikalelemente erhalten.

Die Gleichungen C. sind für jeden Normalort aufzustellen; für  $\cos\delta d\alpha$  und  $d\delta$  sind die Unterschiede Beobachtung — Rechnung zu setzen, die sich mit dem zur Verbesserung vorgelegten System  $E_i$  ergeben. Die Auflösung der Gleichungen erfolgt nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung (Abschnitt XXVI) und gibt die Korrekturen, die den Elementen  $E_i$  hinzuzufügen sind, um diejenigen Elemente zu erhalten, welche die Beobachtungen am annehmbarsten darstellen.

**143. Beispiel für eine Bahnverbesserung nach der ersten Methode.** Es sei die Aufgabe gestellt, das schon nahe richtige Elementensystem des Planeten (221) Eos:

Ep. und Osk. 1882 Februar 7.0 M. Z. Berlin

$$\begin{array}{ll} M_0 & 171^\circ 52' 22''.5 \\ \omega & 188 \ 54 \ 9.1 \\ \Omega & 142 \ 32 \ 46.1 \\ i & 10 \ 51 \ 14.7 \\ \varphi & 5 \ 57 \ 6.5 \\ \mu & 679''.8499 \\ \log a & 0.478 \ 3957 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ekl. und Äqu.} \\ 1880.0 \end{array}$$

so zu verbessern, daß es die folgenden beobachteten Normalörter möglichst gut darstellt:

Beobachtete Normalörter.

| Datum               | Äqu.   | $\alpha$        | $\delta$         | Gew. |
|---------------------|--------|-----------------|------------------|------|
| I. 1882 Febr. 11.5  | 1880.0 | 148° 56' 24''.0 | + 13° 27' 38''.8 | 2    |
| II. 1883 Mai 30.5   | 1880.0 | 212 35 51.7     | + 2 27 2.2       | 1    |
| III. 1884 Juli 22.5 | 1880.0 | 314 28 19.9     | — 12 48 44.8     | 1    |
| IV. 1887 Febr. 13.5 | 1890.0 | 130 6 59.5      | + 15 44 59.3     | 1    |
| V. 1898 März 16.5   | 1900.0 | 168 57 50.4     | + 12 9 1.1       | 2    |

Um zunächst die Differenzen Beobachtung — Rechnung zu bilden, werden die aus obigen Elementen (unter Berücksichtigung der Störungen, siehe Nr. 180) für die angegebenen Zeiten folgenden Örter *berechnet*; sie sind in nachstehender Tabelle zugleich mit den Differenzen gegen die Beobachtungen aufgeführt.

## Gerechnete Örter.

|      | Datum           | Äqu.   | $\alpha$       | $\delta$        | Beob. — Rech. |           |      |
|------|-----------------|--------|----------------|-----------------|---------------|-----------|------|
|      |                 |        |                |                 | $d\alpha$     | $d\delta$ | Gew. |
| I.   | 1882 Febr. 11.5 | 1880.0 | 148° 56' 22".1 | + 13° 27' 38".9 | + 1".9        | — 0".1    | 2    |
| II.  | 1883 Mai 30.5   | 1880.0 | 212 35 51.7    | + 2 26 59.2     | 0.0           | + 3.0     | 1    |
| III. | 1884 Juli 22.5  | 1880.0 | 314 28 18.4    | — 12 48 49.4    | + 1.5         | + 4.6     | 1    |
| IV.  | 1887 Febr. 13.5 | 1890.0 | 130 7 19.3     | + 15 44 58.9    | — 19.8        | + 0.4     | 1    |
| V.   | 1898 März 16.5  | 1900.0 | 168 59 7.3     | + 12 8 43.3     | — 76.9        | + 17.8    | 2    |

Die Berechnung der Koeffizienten der Bedingungsgleichungen erheischt die Kenntnis der auf den Äquator übertragenen Bahnelemente  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$ , die wir zusammen mit einigen Hilfsgrößen in folgender Tabelle zusammenstellen.

## Normalort.

|                      |          | I         | II         | III       | IV         | V          |
|----------------------|----------|-----------|------------|-----------|------------|------------|
| Äquator-<br>elemente | $\omega$ | 308° 0.45 | 307° 48.93 | 308° 6.85 | 307° 56.21 | 307° 44.38 |
|                      | $\Omega$ | 24 17.48  | 24 17.29   | 24 17.13  | 24 14.83   | 24 15.28   |
|                      | $i$      | 16 9.85   | 16 9.99    | 16 10.15  | 16 8.81    | 16 9.13    |
| Äqu.                 |          | 1880.0    | 1880.0     | 1880.0    | 1890.0     | 1900.0     |
| $\sin i$             |          | 9.44 465  | 9.44 472   | 9.44 479  | 9.44 420   | 9.44 434   |
| $\cos i$             |          | 9.98 248  | 9.98 248   | 9.98 247  | 9.98 252   | 9.98 251   |
| $a$                  |          | 0.47 840  | 0.47 861   | 0.47 874  | 0.47 850   | 0.47 946   |
| $\sin \varphi$       |          | 9.01 574  | 9.01 409   | 9.01 376  | 9.01 343   | 8.98 777   |
| $\cos \varphi$       |          | 9.99 765  | 9.99 767   | 9.99 768  | 9.99 768   | 9.99 794   |
| $K$                  |          | 1.82 753  | 1.82 763   | 1.82 770  | 1.82 758   | 1.82 806   |

Die folgende vollständige Berechnung der Koeffizienten bedarf keiner Erläuterung, außer daß die zuerst zusammengestellten heliozentrischen und geozentrischen Koordinaten unmittelbar den vorhandenen Ephemeridenrechnungen entnommen werden können.

$t_0 = 1882 \text{ Febr. } 7.0$

|                         |                 | I.                    | II.                   | III.                  | IV.                   | V.                    |
|-------------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $t - t_0$               |                 | + 4.5                 | + 477.5               | + 896.5               | + 1832.5              | + 5881.5              |
| $v$                     |                 | 174° 3.34             | 250° 46.37            | 337° 10.40            | 162° 17.77            | 198° 18.16            |
| $r$                     |                 | 0.52 097              | 0.48 898              | 0.43 462              | 0.51 878              | 0.51 739              |
| $r \sin v$              |                 | 9.53 618              | 0.46 405 <sub>n</sub> | 0.02 339 <sub>n</sub> | 0.00 179              | 0.01 437 <sub>n</sub> |
| $r \cos v$              |                 | 0.51 863 <sub>n</sub> | 0.00 659 <sub>n</sub> | 0.39 920              | 0.49 771 <sub>n</sub> | 0.49 485 <sub>n</sub> |
| $r : a$                 |                 | 0.05 778              | 0.01 037              | 9.95 588              | 0.04 028              | 0.03 793              |
| $\sin E$                |                 | 9.06 013              | 9.98 777 <sub>n</sub> | 9.54 698 <sub>n</sub> | 9.52 561              | 9.53 698 <sub>n</sub> |
| 1880.0                  | $\alpha$        | 148° 56.40            | 212° 35.86            | 314° 28.33            | 130° 7.00             | 168° 57.84            |
|                         | $\delta$        | + 13 27.65            | + 2 27.04             | — 12 48.75            | + 15 44.99            | + 12 9.02             |
|                         | $\varrho$       | 0.36 781              | 0.35 253              | 0.23 610              | 0.36 998              | 0.36 443              |
| $\sin \delta$           |                 | 9.36 694              | 8.63 113              | 9.34 588 <sub>n</sub> | 9.43 367              | 9.32 320              |
| $\cos \delta$           |                 | 9.98 790              | 9.99 960              | 9.98 905              | 9.98 338              | 9.99 016              |
| $\alpha - \Omega$       |                 | 124° 38.92            | 188° 18.57            | 290° 11.20            | 105 52.17             | 144° 42.56            |
| $\sin(\alpha - \Omega)$ |                 | 9.91 522              | 9.15 993 <sub>n</sub> | 9.97 247 <sub>n</sub> | 9.98 312              | 9.76 172              |
| $\cos(\alpha - \Omega)$ |                 | 9.75 476 <sub>n</sub> | 9.99 542 <sub>n</sub> | 9.53 792              | 9.43 687 <sub>n</sub> | 9.91 181 <sub>n</sub> |
| A.                      | $\sin b \sin B$ | 9.91 522 <sub>n</sub> | 9.15 993              | 9.97 247              | 9.98 312 <sub>n</sub> | 9.76 172 <sub>n</sub> |
|                         | $\sin b \cos B$ | 9.73 724 <sub>n</sub> | 9.97 790 <sub>n</sub> | 9.52 039              | 9.41 939 <sub>n</sub> | 9.89 432 <sub>n</sub> |
|                         | $\cos B$        | 9.74 274 <sub>n</sub> | 9.99 503 <sub>n</sub> | 9.52 240              | 9.42 065 <sub>n</sub> | 9.90 582 <sub>n</sub> |
| $B$                     |                 | 236° 25.50            | 171° 21.21            | 70° 33.05             | 254° 43.60            | 216° 23.15            |
| $\sin b$                |                 | 9.99 450              | 9.98 287              | 9.99 799              | 9.99 874              | 9.98 850              |
| $\cos b$                |                 | 9.19 941              | 9.44 014              | 8.98 271 <sub>n</sub> | 8.88 107              | 9.35 615              |



|                                              |                       |                       |                       |                       |                       |
|----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\sin i \cos \delta$                         | 9.43 255              | 9.44 432              | 9.43 384              | 9.42 758              | 9.43 450              |
| $-\cos i \sin \delta \sin(\alpha - \varrho)$ | 9.26 464 <sub>n</sub> | 7.77 354              | 9.30 082 <sub>n</sub> | 9.39 931 <sub>n</sub> | 9.06 743 <sub>n</sub> |
| $\sin c \sin C$                              | 9.12 170              | 8.62 655              | 8.88 380              | 8.87 054              | 9.23 501              |
| $\sin c \cos C$                              | 8.93 859              | 9.45 349              | 8.85 519              | 8.22 708              | 9.19 078              |
| $\cos C$                                     | 9.73 918              | 9.99 523              | 9.83 471              | 9.34 560              | 9.82 624              |
| $\cos i \cos \delta$                         | 9.97 038              | 9.98 208              | 9.97 152              | 9.96 590              | 9.97 267              |
| $\sin i \sin \delta \sin(\alpha - \varrho)$  | 8.72 681              | 7.23 578 <sub>n</sub> | 8.76 314              | 8.86 039              | 8.52 926              |
| $C$                                          | 56° 44.15             | 8° 28.34              | 46° 53.16             | 77° 11.76             | 47° 54.76             |
| $\sin c$                                     | 9.19 941              | 9.45 826              | 9.02 048              | 8.88 148              | 9.36 454              |
| $\cos c$                                     | 9.99 449              | 9.98 130              | 9.99 760              | 9.99 874              | 9.98 804              |
| B.                                           |                       |                       |                       |                       |                       |
| $a : \varrho$                                | 0.11 059              | 0.12 608              | 0.24 264              | 0.10 852              | 0.11 503              |
| $(a : \varrho) \sin b$                       | 0.10 509              | 0.10 895              | 0.24 063              | 0.10 726              | 0.10 353              |
| $B + \omega$                                 | 184° 25.95            | 119° 10.14            | 18° 39.90             | 202° 39.81            | 164° 7.53             |
| $B + \omega + v$                             | -1 30.71              | +9 56.51              | -4 9.70               | +4 57.58              | +2 25.69              |
| $\sin(B + \omega)$                           | 8.88 809 <sub>n</sub> | 9.94 111              | 9.50 519              | 9.58 582 <sub>n</sub> | 9.43 701              |
| $\cos(B + \omega)$                           | 9.99 870 <sub>n</sub> | 9.68 787 <sub>n</sub> | 9.97 653              | 9.96 510 <sub>n</sub> | 9.98 311 <sub>n</sub> |
| $\sin(B + \omega + v)$                       | 8.42 133 <sub>n</sub> | 9.23 716              | 8.86 076 <sub>n</sub> | 8.93 679              | 8.62 703              |
| $\cos(B + \omega + v)$                       | 9.99 985              | 9.99 343              | 9.99 885              | 9.99 837              | 9.99 961              |
| C.                                           |                       |                       |                       |                       |                       |
| $G_c^\alpha$                                 | 0.13 079 <sub>n</sub> | 9.79 682 <sub>n</sub> | 0.21 716              | 0.07 236 <sub>n</sub> | 0.08 664 <sub>n</sub> |
| $\sin \varphi G_c^\alpha$                    | 9.14 653 <sub>n</sub> | 8.81 091 <sub>n</sub> | 9.23 092              | 9.08 579 <sub>n</sub> | 9.07 441 <sub>n</sub> |
| $F_c^\alpha$                                 | 0.10 494              | 0.10 238              | 0.23 948              | 0.10 563              | 0.10 314              |
| $\Sigma$                                     | 0.05 430              | 0.07 959              | 0.28 010              | 0.06 202              | 0.06 046              |
| $\cos \delta d\alpha : dM_0$                 | 0.05 665              | 0.08 192              | 0.28 242              | 0.06 434              | 0.06 252              |
| $t - t_0$                                    | 0.65 321              | 2.67 897              | 2.95 255              | 3.26 304              | 3.76 949              |
| $F_s^\alpha$                                 | 8.52 642 <sub>n</sub> | 9.34 611              | 9.10 139 <sub>n</sub> | 9.04 405              | 8.73 056              |
| $-Kr$                                        | 2.34 850 <sub>n</sub> | 2.31 661 <sub>n</sub> | 2.26 232 <sub>n</sub> | 2.34 636 <sub>n</sub> | 2.34 545 <sub>n</sub> |
| $-Kr F_s^\alpha$                             | 0.87 492              | 1.66 272 <sub>n</sub> | 1.36 371              | 1.39 041 <sub>n</sub> | 1.07 601 <sub>n</sub> |
| $(\dots)(t - t_0)$                           | 0.70 986              | 2.76 089              | 3.23 497              | 3.32 738              | 3.83 201              |
| $\cos \delta d\alpha : d\mu$                 | 1.10 122              | 2.72 479              | 3.24 078              | 3.32 233              | 3.83 125              |
| $G_s^\alpha$                                 | 8.99 318 <sub>n</sub> | 0.05 006              | 9.74 582              | 9.69 308 <sub>n</sub> | 9.54 054              |
| $-\cos \varphi G_s^\alpha$                   | 8.99 083              | 0.04 773 <sub>n</sub> | 9.74 350 <sub>n</sub> | 9.69 076              | 9.53 848 <sub>n</sub> |
| $\sin E \cdot F_c^\alpha$                    | 9.16 507              | 0.09 015 <sub>n</sub> | 9.78 646 <sub>n</sub> | 9.63 124              | 6.64 012 <sub>n</sub> |
| $\cos \delta d\alpha : d\varphi$             | 9.38 766              | 0.37 049 <sub>n</sub> | 0.06 654 <sub>n</sub> | 9.96 305              | 9.89 330 <sub>n</sub> |
| $\cos \delta d\alpha : dS$                   | 0.16 272              | 0.11 275              | 0.19 536              | 0.14 591              | 0.14 107              |
| $\cos b : \varrho$                           | 8.83 160              | 9.08 761              | 8.74 661 <sub>n</sub> | 8.51 109              | 8.99 172              |
| $\cos \delta d\alpha : dP$                   | 8.36 778              | 9.55 166 <sub>n</sub> | 8.77 000              | 8.51 288              | 9.00 609 <sub>n</sub> |
| $\cos \delta d\alpha : dQ$                   | 9.35 023              | 9.09 420              | 9.14 581              | 9.00 880              | 9.48 657              |
| B.                                           |                       |                       |                       |                       |                       |
| $(a : \varrho) \sin c$                       | 9.31 000              | 9.58 434              | 9.26 312              | 8.99 000              | 9.47 957              |
| $C + \omega$                                 | +4° 44.60             | -43° 42.73            | -4° 59.99             | +25° 7.97             | -4° 20.86             |
| $C + \omega + v$                             | 178 47.94             | 207 3.64              | 332 10.41             | 187 25.74             | 193 57.30             |
| $\sin(C + \omega)$                           | 8.91 746              | 9.83 950 <sub>n</sub> | 8.94 029 <sub>n</sub> | 9.62 811              | 8.87 972 <sub>n</sub> |
| $\cos(C + \omega)$                           | 9.99 851              | 9.85 903              | 9.99 834              | 9.95 680              | 9.99 875              |
| $\sin(C + \omega + v)$                       | 8.32 139              | 9.65 795 <sub>n</sub> | 9.66 913 <sub>n</sub> | 9.11 159 <sub>n</sub> | 9.38 230 <sub>n</sub> |
| $\cos(C + \omega + v)$                       | 9.99 990 <sub>n</sub> | 9.94 965 <sub>n</sub> | 9.94 663 <sub>n</sub> | 9.99 634 <sub>n</sub> | 9.98 699              |
| C.                                           |                       |                       |                       |                       |                       |
| $G_c^\delta$                                 | 9.30 851              | 9.44 337              | 9.26 146              | 8.94 680              | 9.47 832              |
| $\sin \varphi G_c^\delta$                    | 8.32 425              | 8.45 746              | 8.27 522              | 7.96 023              | 8.46 609              |
| $F_c^\delta$                                 | 9.30 990 <sub>n</sub> | 9.53 399 <sub>n</sub> | 9.20 975              | 8.98 634 <sub>n</sub> | 9.46 656 <sub>n</sub> |
| $\Sigma$                                     | 9.26 253 <sub>n</sub> | 9.49 596 <sub>n</sub> | 9.25 752              | 8.94 339 <sub>n</sub> | 9.42 085 <sub>n</sub> |
| $d\delta : dM_0$                             | 9.26 488 <sub>n</sub> | 9.49 829 <sub>n</sub> | 9.25 984              | 8.94 571 <sub>n</sub> | 9.42 291 <sub>n</sub> |

|                       |                       |                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $F_s^0$               | 7.63 139              | 9.24 229 <sub>n</sub> | 8.93 225 <sub>n</sub> | 8.10 159 <sub>n</sub> | 8.86 187 <sub>n</sub> |
| $-Kr F_s^0$           | 9.97 989 <sub>n</sub> | 1.55 890              | 1.19 457              | 0.44 795              | 1.20 732              |
| $(\dots)(t-t_0)$      | 9.91 809 <sub>n</sub> | 2.17 726 <sub>n</sub> | 2.21 239              | 2.20 875 <sub>n</sub> | 3.19 240 <sub>n</sub> |
| $d\delta: d\mu$       | 0.25 112 <sub>n</sub> | 2.05 762 <sub>n</sub> | 2.25 219              | 2.20 115 <sub>n</sub> | 3.18 788 <sub>n</sub> |
| $G_s^0$               | 8.22 746              | 9.42 384 <sub>n</sub> | 8.20 341 <sub>n</sub> | 8.61 811              | 8.35 929 <sub>n</sub> |
| $-\cos \varphi G_s^0$ | 8.22 511 <sub>n</sub> | 9.42 151              | 8.20 109              | 8.61 579 <sub>n</sub> | 8.35 723              |
| $\sin E \cdot F_c^0$  | 8.37 003 <sub>n</sub> | 9.52 176              | 8.75 673 <sub>n</sub> | 8.51 195 <sub>n</sub> | 9.00 354              |
| $d\delta: d\varphi$   | 8.60 461 <sub>n</sub> | 9.77 555              | 8.61 514 <sub>n</sub> | 8.86 800 <sub>n</sub> | 9.09 195              |
| $d\delta: ds$         | 9.36 768 <sub>n</sub> | 9.54 436 <sub>n</sub> | 9.16 563              | 9.02 662 <sub>n</sub> | 9.50 449 <sub>n</sub> |
| $\cos c: q$           | 9.62 668              | 9.62 877              | 9.76 150              | 9.62 876              | 9.62 361              |
| $d\delta: dp$         | 9.16 286              | 0.09 282 <sub>n</sub> | 9.78 489 <sub>n</sub> | 9.63 055              | 9.63 798 <sub>n</sub> |
| $d\delta: dq$         | 0.14 531              | 9.63 536              | 0.16 070 <sub>n</sub> | 0.12 647              | 0.11 846              |
| $d\alpha$             | 0.27 88               | >                     | 0.17 61               | 1.29 67 <sub>n</sub>  | 1.88 59 <sub>n</sub>  |
| $\cos \delta d\alpha$ | 0.26 67               | >                     | 0.16 51               | 1.28 01 <sub>n</sub>  | 1.87 61 <sub>n</sub>  |
| $d\delta$             | 9.00 00 <sub>n</sub>  | 0.47 71               | 0.66 28               | 9.60 20               | 1.25 04               |

Die Bedingungsgleichungen werden somit (Koeffizienten in Logarithmen):

Gew.

|                     |        |                     |        |                     |            |                     |      |                     |      |                     |      |                       |   |
|---------------------|--------|---------------------|--------|---------------------|------------|---------------------|------|---------------------|------|---------------------|------|-----------------------|---|
| 0.0566              | $dM_0$ | +1.1012             | $d\mu$ | +9.3877             | $d\varphi$ | +0.1627             | $ds$ | +8.3678             | $dp$ | +9.3502             | $dq$ | = 0.2667              | 2 |
| 0.0819              |        | 2.7248              |        | 0.3705 <sub>n</sub> |            | 0.1127              |      | 9.5517 <sub>n</sub> |      | 9.0942              |      | = >                   | 1 |
| 0.2824              |        | 3.2408              |        | 0.0665 <sub>n</sub> |            | 0.1954              |      | 8.7700              |      | 9.1458              |      | = 0.1651              | 1 |
| 0.0643              |        | 3.3223              |        | 9.9630              |            | 0.1459              |      | 8.5129              |      | 9.0088              |      | = 1.2801 <sub>n</sub> | 1 |
| 0.0625              |        | 3.8312              |        | 9.8933 <sub>n</sub> |            | 0.1411              |      | 9.0061 <sub>n</sub> |      | 9.4866              |      | = 1.8761 <sub>n</sub> | 2 |
| 9.2649 <sub>n</sub> |        | 0.2511 <sub>n</sub> |        | 8.6046 <sub>n</sub> |            | 9.3677 <sub>n</sub> |      | 9.1629              |      | 0.1453              |      | = 9.0000 <sub>n</sub> | 2 |
| 9.4983 <sub>n</sub> |        | 2.0576 <sub>n</sub> |        | 9.7755              |            | 9.5444 <sub>n</sub> |      | 0.0928 <sub>n</sub> |      | 9.6354              |      | = 0.4771              | 1 |
| 9.2598              |        | 2.2522              |        | 8.6151 <sub>n</sub> |            | 9.1656              |      | 9.7849 <sub>n</sub> |      | 0.1607 <sub>n</sub> |      | = 0.6628              | 1 |
| 8.9457 <sub>n</sub> |        | 2.2011 <sub>n</sub> |        | 8.8680 <sub>n</sub> |            | 9.0266 <sub>n</sub> |      | 9.6305              |      | 0.1265              |      | = 9.6020              | 1 |
| 9.4229 <sub>n</sub> |        | 3.1879 <sub>n</sub> |        | 9.0920              |            | 9.5045 <sub>n</sub> |      | 9.6380 <sub>n</sub> |      | 0.1185              |      | = 1.2504              | 2 |

Ihre Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate haben wir in Nr. 139 als Beispiel einer Ausgleichung durchgeführt und können uns beschränken, die Resultate hier anzuführen:

$$\begin{aligned}
 dM_0 &= + 31''.15 & \pm 2''.89 \\
 d\mu &= - 0.01156 & \pm 0.00020 \\
 d\varphi &= + 1.15 & \pm 0.62 \\
 ds &= - 23.10 & \pm 0.82 \\
 dp &= - 2.81 & \pm 0.91 \\
 dq &= - 0.31 & \pm 0.43
 \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die linken Seiten der Bedingungsgleichungen eingetragen, dann stellen diese die Beträge dar, um welche sich die gerechneten Koordinaten ändern, wenn man statt der vorgelegten Elemente die korrigierten benutzt. Die Darstellung der Beobachtungen im Sinne Beobachtung — Rechnung durch die neuen Elemente wird also erhalten, wenn man die Seite 430 angegebenen  $\sqrt{p}\delta$  mit  $\sqrt{p}$  dividiert und ihr Zeichen umkehrt. Es kommt:

|      |            |      | Beob. — Rechn.        |           |
|------|------------|------|-----------------------|-----------|
|      |            |      | $\cos \delta d\alpha$ | $d\delta$ |
| I.   | 1882 Febr. | 11.5 | — 0.05                | + 1.12    |
| II.  | 1883 Mai   | 30.5 | + 0.18                | — 0.62    |
| III. | 1884 Juli  | 22.5 | — 0.33                | + 2.26    |
| IV.  | 1887 Febr. | 13.5 | + 0.49                | + 0.55    |
| V.   | 1898 März  | 16.5 | — 0.09                | — 0.11    |

Die Darstellung der Normalörter durch die neuen Elemente ist also eine recht befriedigende. Um das korrigierte Elementensystem in der gewöhnlichen Form aufstellen zu können, müssen noch die  $ds$ ,  $dp$ ,  $dq$  in die Korrekturen der Elemente  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$  verwandelt werden, was durch die Formeln D. Seite 443 erreicht wird.

Berechnung der Korrektur der Ekliptikalelemente:

$$\begin{array}{llll}
 \cos \omega & 9.9947_n & \sin i d\Omega & 9.8727 \\
 \sin \omega & 9.1896_n & \operatorname{tg} \frac{1}{2} i & 8.9777 \\
 dp & 0.4490_n & \sin i & 9.2749 \\
 dq & 9.4980_n & & \\
 di = + & 2.78 & - 0.05 & = + 2.73 \\
 \sin i d\Omega = + & 0.435 & + 0.311 & = + 0.746 \\
 d(\Omega + \omega) = - & 23.10 & + 0.07 & = - 23.03 \\
 d\Omega = & & & = + 3.96 \\
 d\omega = & & & = - 26.99
 \end{array}$$

Die verbesserten Elemente sind also:

(221) Eos.

Ep. und Osk. 1882 Februar 7.0 M. Z. Berlin.

$$\begin{array}{lcl}
 M_0 = 171^{\circ} 52' 53.65 & & \\
 \omega = 188 \ 53 \ 42.11 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \text{Ekl. und Äqu.} \\
 \Omega = 142 \ 32 \ 50.06 & & 1880.0 \\
 i = 10 \ 51 \ 17.43 & & \\
 q = 5 \ 57 \ 7.65 & & \\
 \mu = 679.83834 & & \\
 \log a = 0.4784007. & &
 \end{array}$$

**144. Die Formeln der Bahnverbesserung, zweite Methode.** Wir führen jetzt die Grundform II. (Seite 438) in eine für die Anwendung geeignete Gestalt über, was mittels der schon Seite 438 eingeführten Koordinaten  $\psi$  und  $\chi$  des geozentrischen Planetenortes  $A$  im System  $RWN$  der Bahnebene und mittels des Positionswinkels  $\varphi$  leicht gelingt. Aus den Dreiecken (Fig. 57, Seite 437)  $ANR$ ,  $ANW$ ;  $QNR$ ,  $QNW$ ;  $PNR$ ,  $PNW$  folgt:

$$\begin{array}{lcl}
 \cos(AR) = \cos \chi \cos \psi & \left| \begin{array}{l} \cos(QR) = -\sin \psi \\ \cos(QW) = \cos \psi \end{array} \right| & \left| \begin{array}{l} \cos(PR) = -\sin \chi \cos \psi \\ \cos(PW) = -\sin \chi \sin \psi \\ \cos(PN) = \cos \chi \end{array} \right.
 \end{array}$$

und daher wird aus II. in Verbindung mit 14)

$$\begin{aligned} d\varrho &= \cos\chi \cos\psi \cdot dr + \cos\chi \sin\psi \cdot rdw + \sin\chi \cdot rdn \\ \varrho \cos\chi d\psi &= -\sin\psi \cdot dr + \cos\psi \cdot rdw \\ \varrho d\chi &= -\sin\chi \cos\psi \cdot dr - \sin\chi \sin\psi \cdot rdw + \cos\chi \cdot rdn. \end{aligned} \quad \text{II}^a.$$

Dies sind mit den Modifikationen, welche durch die Einführung der Differenziale  $rdw$  und  $rdn$  bedingt sind, die Gleichungen, welche *Tietjen* (Berl. Jahrb. 1878) auf anderem Wege abgeleitet und seiner Methode der Bahnverbesserung zugrunde gelegt hat. Werden für die Differenziale  $dr$ ,  $rdw$ ,  $rdn$  die Ausdrücke 15), 16), 17) eingetragen, so kommen, wenn wir gleich dieselben Zusammenziehungen vornehmen wie Seite 440, die Formeln:

$$\begin{aligned} d\varrho &= \cos\chi (\sin\psi + \sin\varphi \sin(\psi + v)) a \sec\varphi dM_0 \\ &+ \cos\chi \left( [\sin\psi + \sin\varphi \sin(\psi + v)] \sec\varphi (t - t_0) - \cos\psi \frac{2}{3k} \sqrt{ar} \right) a d\mu \\ &+ \cos\chi (\sin E \sin\psi - \cos\varphi \cos(\psi + v)) a d\varphi \\ &+ \cos\chi \sin\psi r d\mathbf{s} \\ &+ \sin\chi r \sin v d\mathbf{p} \\ &- \sin\chi r \cos v d\mathbf{q} \\ \varrho \cos\chi d\psi &= (\cos\psi + \sin\varphi \cos(\psi + v)) a \sec\varphi dM_0 \\ &+ \left( [\cos\psi + \sin\varphi \cos(\psi + v)] \sec\varphi (t - t_0) + \sin\psi \frac{2}{3k} \sqrt{ar} \right) a d\mu \\ &+ (\sin E \cos\psi + \cos\varphi \sin(\psi + v)) a d\varphi \\ &+ \cos\psi r d\mathbf{s} \\ \varrho d\chi &= -\sin\chi (\sin\psi + \sin\varphi \sin(\psi + v)) a \sec\varphi dM_0 \\ &- \sin\chi \left( [\sin\psi + \sin\varphi \sin(\psi + v)] \sec\varphi (t - t_0) - \cos\psi \frac{2}{3k} \sqrt{ar} \right) a d\mu \\ &- \sin\chi (\sin E \sin\psi - \cos\varphi \cos(\psi + v)) a d\varphi \\ &- \sin\chi \sin\psi \cdot r d\mathbf{s} \\ &+ \cos\chi r \sin v d\mathbf{p} \\ &- \cos\chi r \cos v d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang der hier eingeführten Koordinaten  $\psi$  und  $\chi$  mit den direkt gegebenen  $\alpha$  und  $\delta$  ergibt sich aus dem Dreieck zwischen den Polen der beiden Systeme und dem Ort  $A$ , also  $NzA$ , dessen Stücke wir bereits in 12) (Seite 438) angegeben haben; dasselbe ergibt zugleich den Winkel  $\Psi$ , dessen man zur Überführung von  $\cos\delta d\alpha$  und  $d\delta$  in  $\cos\chi d\psi$  und  $d\chi$  bedarf. In der nachfolgenden Zusammenstellung aller Formeln führen wir wieder einige abkürzende Bezeichnungen ein und beschränken uns auf die Koordinaten  $d\psi$  und  $d\chi$ .

*Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen von mäßiger Excentricität (Planeten und kurzperiodische Kometen). Zweite Methode.*

$$\begin{aligned} \cos\chi \sin(\omega + v + \psi) &= \sin i \sin\delta + \cos i \cos\delta \sin(\alpha - \Omega) \\ \cos\chi \cos(\omega + v + \psi) &= \cos\delta \cos(\alpha - \Omega) \\ \cos\chi \sin\Psi &= \sin i \cos(\alpha - \Omega) \\ \cos\chi \cos\Psi &= \cos i \cos\delta + \sin i \sin\delta \sin(\alpha - \Omega) \\ \sin\chi &= \cos i \sin\delta - \sin i \cos\delta \sin(\alpha - \Omega) \\ \cos\chi &\text{ ist stets positiv.} \end{aligned} \quad \text{A.}$$

$$\begin{aligned}\cos \chi d\psi &= + \cos \mathcal{P} \cdot \cos \delta d\alpha + \sin \mathcal{P} \cdot d\delta \\ d\chi &= - \sin \mathcal{P} \cdot \cos \delta d\alpha + \cos \mathcal{P} \cdot d\delta\end{aligned}\quad \text{B.}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\varrho} \cos \psi = F_c &\quad \left| \quad \frac{a}{\varrho} \cos (v + \psi) = G_c \quad \left| \quad \frac{r}{\varrho} \cos v = H_c \quad \left| \quad \frac{2}{3k} \sqrt{a} = K \right. \\ \frac{a}{\varrho} \sin \psi = F_s &\quad \left| \quad \frac{a}{\varrho} \sin (v + \psi) = G_s \quad \left| \quad \frac{r}{\varrho} \sin v = H_s \quad \left| \quad \log \frac{2}{3k} = 1.588327 \right. \right.\end{aligned}\quad \text{C.}$$

$$\begin{aligned}\cos \chi d\psi &= (F_c + \sin \varphi G_c) \sec \varphi dM_0 \\ &\quad + ([F_c + \sin \varphi G_c] \sec \varphi (t - t_0) + KrF_s) d\mu \\ &\quad + (\sin E \cdot F_c + \cos \varphi G_s) d\varphi \\ &\quad + \frac{r}{a} F_c ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\chi &= \cos \chi H_s d\mathbf{p} \\ &\quad - \cos \chi H_c d\mathbf{q} \\ &\quad - \sin \chi (F_s + \sin \varphi G_s) \sec \varphi dM_0 \\ &\quad - \sin \chi ([F_s + \sin \varphi G_s] \sec \varphi (t - t_0) - KrF_c) d\mu \\ &\quad - \sin \chi (\sin E \cdot F_s - \cos \varphi G_c) d\varphi \\ &\quad - \sin \chi \frac{r}{a} F_s ds.\end{aligned}\quad \text{D.}$$

Der Übergang auf die Ekliptikal- oder Äquatorealelemente erfolgt wie oben (Seite 443):

$$\begin{aligned}di &= \cos \omega d\mathbf{p} - \sin \omega d\mathbf{q} \\ \sin i d\Omega &= \sin \omega d\mathbf{p} + \cos \omega d\mathbf{q} \\ d(\Omega + \omega) &= d\mathbf{s} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \sin i d\Omega.\end{aligned}\quad \text{E.}$$

Die Anwendung der Gleichungen D. als Bedingungsgleichungen der Bahnverbesserung verlangt zwar gegenüber den Formeln der ersten Methode (Nr. 142) die Umrechnung von  $\cos \delta d\alpha$  und  $d\delta$  in  $\cos \chi d\psi$  und  $d\chi$ , ist aber im übrigen wesentlich einfacher als diese. Nicht nur, daß die Faktoren sich leichter berechnen lassen, sondern es sind auch weniger, denn in  $\cos \chi d\psi$  fallen zwei Elemente ganz weg, womit, wenn  $n$  Normalörter auszugleichen sind, die Berechnung von  $2n$  Faktoren und die Bildung der zugehörigen Quadratsummen sich erübrigt. Wir haben ferner oben gesehen, daß der Faktor  $\cos \chi$  von  $d\mathbf{p}$  und  $d\mathbf{q}$  im Ausdruck von  $d\chi$  seinen Maximalwert hat;  $\sin \chi$ , der Faktor der übrigen vier Elemente, hat also seinen Minimalwert, der höchstens bis  $\sin \chi = \frac{r}{\varrho} \sin i$  steigen kann, also von der Ordnung der Bahnneigung gegen die

Ekliptik ist; da überdies die meisten dieser Glieder noch mit  $\sin \varphi$  oder  $\sin \psi$  multipliziert sind, letzteres aber in der Nähe der Opposition, in der die Normalörter meist beobachtet werden, klein wird (in der Opposition, bezogen auf die Bahnebene, wird  $\psi = 0$ ), so sind auch aus diesem Grunde die Faktoren der vier rein elliptischen Elemente in dem Ausdrücke von  $d\chi$  klein, können also mit verminderter Stellenzahl berechnet werden. Diese Sachlage kann aber nach einem Vorschlage von *Tietjen* noch in anderer Weise ausgenutzt werden. Offenbar beruht die Bestimmung der Unbekannten  $dM_0$ ,  $d\mu$ ,  $d\varphi$  und  $ds$  wesentlich auf den Gleichungen für  $\cos \chi d\psi$ ,

während die Gleichungen für  $d\chi$  hierzu wegen der Kleinheit der entsprechenden Faktoren nichts entscheidendes beitragen können; ferner sind umgekehrt die letzteren Gleichungen ausschließlich maßgebend für die Bestimmung von  $d\mathbf{p}$  und  $d\mathbf{q}$ , die hier überdies mit ihren Maximalfaktoren multipliziert sind. Daraus folgt, daß sich sehr nahe richtige Resultate ergeben müssen, wenn man zuerst das System der Bedingungsgleichungen  $\cos\chi d\psi = \dots$  mit den vier Unbekannten  $dM_0$ ,  $d\mu$ ,  $d\varphi$ ,  $ds$  auflöst, die erhaltenen Werte in die Gleichungen  $d\chi = \dots$  einsetzt und diese dann nach den Unbekannten  $d\mathbf{p}$  und  $d\mathbf{q}$  auflöst. Liegen  $n$  Normalörter vor, so hat man also statt  $2n$  Gleichungen mit 6 Unbekannten, zwei Systeme von je  $n$  Gleichungen und mit 4 bzw. 2 Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen.

**145. Beispiel einer Bahnbestimmung nach der zweiten Methode.** Wir behandeln die Verbesserung der Bahn des periodischen Kometen Brooks aus den drei Erscheinungen 1889/90, 1896/97, 1903/04. An Hilfszahlen werden folgende gebraucht, wenn wir Äquator und Äquinoktium 1900.0 als Fundamentalkoordinatensystem wählen:

|                                                                                     | Ersch. 1889.                                                           | Ersch. 1896.                                     | Ersch. 1903.                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Äquator 1900.0 $\left\{ \begin{array}{l} \omega \\ \Omega \\ i \end{array} \right.$ | $\omega \ 358^\circ 12.75$<br>$\Omega \ 3 \ 51.33$<br>$i \ 29 \ 16.70$ | $358^\circ 22.30$<br>$3 \ 50.45$<br>$29 \ 16.20$ | $358^\circ 14.92$<br>$3 \ 50.42$<br>$29 \ 16.36$ |
| $\sin i$                                                                            | 9.68937                                                                | 9.68924                                          | 9.68928                                          |
| $\cos i$                                                                            | 9.94064                                                                | 9.94068                                          | 9.94067                                          |
| $a$                                                                                 | 0.56639                                                                | 0.56737                                          | 0.56756                                          |
| $\sin \varphi$                                                                      | 9.67285                                                                | 9.67157                                          | 9.67190                                          |
| $\cos \varphi$                                                                      | 9.94559                                                                | 9.94594                                          | 9.94585                                          |
| $K = \frac{2}{3k} \sqrt{a}$                                                         | 1.87153                                                                | 1.87201                                          | 1.87211                                          |

Wir geben die vollständige Berechnung der Koeffizienten der Bedingungsgleichungen für fünf Normalörter (die bei der definitiven Bearbeitung des Kometen benutzten übrigen Normalörter sind hier weggelassen). Die Zahlen der ersten Abteilung konnten den vorausgegangenen Ephemeridenrechnungen entnommen werden.

| $t_0 = 1889 \text{ Sept. } 30.5$                                       |                           |                               |                                |                             |                               |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
|                                                                        | 1889 Aug. 21.5            | 1890 Febr. 5.5                | 1896 Aug. 4.5                  | 1897 Jan. 7.5               | 1903 Aug. 19.5                |
| $t - t_0$                                                              | -40                       | +128                          | +2500                          | +2656                       | +5070                         |
| $r$                                                                    | $342^\circ 39.90$         | $51^\circ 27.85$              | $321^\circ 55.55$              | $27^\circ 20.75$            | $-44^\circ 27.90$             |
| $r$                                                                    | 0.29 636                  | 0.34 585                      | 0.32 266                       | 0.30 787                    | 0.33 370                      |
| $r \sin v$                                                             | 9.77 052 <sub>n</sub>     | 0.23 918                      | 0.11 272 <sub>n</sub>          | 9.97 003                    | 0.17 909 <sub>n</sub>         |
| $r \cos v$                                                             | 0.27 617                  | 0.14 034                      | 0.21 875                       | 0.25 641                    | 0.18 720                      |
| 1900.0 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \delta \end{array} \right.$ | $2^\circ 7.90$<br>-6 3.22 | $24^\circ 55.37$<br>+13 54.35 | $339^\circ 16.18$<br>-18 37.37 | $0^\circ 55.51$<br>-1 38.77 | $315^\circ 26.90$<br>-27 6.98 |
| $\varrho$                                                              | 0.01 790                  | 0.36 837                      | 0.05 297                       | 0.31 797                    | 0.06 904                      |
| $\sin \delta$                                                          | 9.02 309 <sub>n</sub>     | 9.38 080                      | 9.50 425 <sub>n</sub>          | 8.45 832                    | 9.65 877 <sub>n</sub>         |
| $\cos \delta$                                                          | 9.99 757                  | 9.98 708                      | 9.97 664                       | 9.99 982                    | 9.94 943                      |
| $r : a$                                                                | 9.72 997                  | 9.77 946                      | 9.75 529                       | 9.74 050                    | 9.76 614                      |
| $\sin E$                                                               | 9.25 855 <sub>n</sub>     | 9.72 721                      | 9.59 941 <sub>n</sub>          | 9.45 672                    | 9.66 567 <sub>n</sub>         |

|    |                                                   |                    |                    |                    |                    |                    |
|----|---------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A. | $\alpha - Q$                                      | $-1^{\circ}43.43$  | $+21^{\circ}4.04$  | $335^{\circ}25.73$ | $-2^{\circ}54.94$  | $311^{\circ}36.48$ |
|    | $\sin(\alpha - Q)$                                | $8.47\ 831_n$      | $9.55\ 565$        | $9.61\ 891_n$      | $8.70\ 643_n$      | $9.87\ 373_n$      |
|    | $\cos(\alpha - Q)$                                | $9.99\ 981$        | $9.96\ 996$        | $9.95\ 877$        | $9.99\ 944$        | $9.82\ 219$        |
|    | $\sin i \sin \delta$                              | $8.71\ 246_n$      | $9.07\ 017$        | $9.19\ 349_n$      | $8.14\ 756$        | $9.34\ 805_n$      |
|    | $\sin i \cos \delta$                              | $9.68\ 694$        | $9.67\ 645$        | $9.66\ 588$        | $9.68\ 906$        | $9.63\ 871$        |
|    | $\cos i \cos \delta$                              | $9.93\ 821$        | $9.92\ 772$        | $9.91\ 732$        | $9.94\ 050$        | $9.89\ 010$        |
|    | $\cos i \sin \delta$                              | $8.96\ 373_n$      | $9.32\ 144$        | $9.44\ 493_n$      | $8.39\ 900$        | $9.59\ 944_n$      |
|    | $\sin i \sin \delta \sin(\alpha - Q)$             | $7.19\ 077$        | $8.62\ 582$        | $8.81\ 240$        | $6.85\ 399_n$      | $9.22\ 178$        |
|    | $\cos \chi \sin \psi$                             | $9.68\ 918$        | $9.65\ 933$        | $9.64\ 801$        | $9.68\ 868$        | $9.51\ 147$        |
|    | $\cos \chi \cos \psi$                             | $9.93\ 899$        | $9.94\ 886$        | $9.95\ 016$        | $9.94\ 015$        | $9.97\ 454$        |
|    | $\cos \psi$                                       | $9.94\ 029$        | $9.94\ 919$        | $9.95\ 177$        | $9.94\ 069$        | $9.97\ 567$        |
|    | $\psi$                                            | $+29^{\circ}21.70$ | $+27^{\circ}10.61$ | $+26^{\circ}30.36$ | $+29^{\circ}16.07$ | $+18^{\circ}59.90$ |
|    | $\sin \psi$                                       | $9.69\ 048$        | $9.65\ 967$        | $9.64\ 962$        | $9.68\ 922$        | $9.51\ 250$        |
|    | $-\sin i \cos \delta \sin(\alpha - Q)$            | $8.16\ 525$        | $9.23\ 210_n$      | $9.28\ 479$        | $8.39\ 549$        | $9.51\ 244$        |
|    | $\sin \chi$                                       | $8.88\ 850_n$      | $8.59\ 079$        | $8.93\ 403_n$      | $8.69\ 828$        | $8.85\ 839_n$      |
|    | $\cos i \cos \delta \sin(\alpha - Q)$             | $8.41\ 652_n$      | $9.48\ 337$        | $9.53\ 623_n$      | $8.64\ 693_n$      | $9.76\ 383_n$      |
|    | $\cos \chi \sin(\omega + v + \psi)$               | $8.89\ 025_n$      | $9.62\ 519$        | $9.69\ 886_n$      | $8.48\ 155_n$      | $9.90\ 493_n$      |
|    | $\cos \chi \cos(\omega + v + \psi)$               | $9.99\ 738$        | $9.95\ 704$        | $9.93\ 541$        | $9.99\ 926$        | $9.77\ 162$        |
|    | $\cos(\omega + v + \psi)$                         | $9.99\ 868$        | $9.95\ 736$        | $9.93\ 703$        | $9.99\ 980$        | $9.77\ 276$        |
|    | $\omega + v + \psi$                               | $+4^{\circ}28.08$  | $+24^{\circ}58.43$ | $-30^{\circ}6.90$  | $-1^{\circ}44.33$  | $-53^{\circ}39.52$ |
|    | $\cos \chi$                                       | $9.99\ 870$        | $9.99\ 967$        | $9.99\ 839$        | $9.99\ 946$        | $9.99\ 887$        |
| C. | $v + \psi$                                        | $-2^{\circ}40.83$  | $+26^{\circ}45.68$ | $-28^{\circ}29.15$ | $-0^{\circ}6.58$   | $-51^{\circ}54.44$ |
|    | $\psi$                                            | $+14\ 39.27$       | $-24\ 42.17$       | $+9\ 35.30$        | $-27\ 27.33$       | $-7\ 26.54$        |
|    | $\cos \psi$                                       | $9.98\ 564$        | $9.95\ 832$        | $9.99\ 389$        | $9.94\ 811$        | $9.99\ 632$        |
|    | $\sin \psi$                                       | $9.40\ 310$        | $9.62\ 109_n$      | $9.22\ 159$        | $9.66\ 376_n$      | $9.11\ 333_n$      |
|    | $\cos(v + \psi)$                                  | $9.99\ 952$        | $9.95\ 080$        | $9.94\ 396$        | $0.00\ 000$        | $9.79\ 024$        |
|    | $\sin(v + \psi)$                                  | $8.66\ 994_n$      | $9.65\ 348$        | $9.67\ 846_n$      | $7.282_n$          | $9.89\ 598_n$      |
|    | $\alpha : \varrho$                                | $0.54\ 849$        | $0.19\ 802$        | $9.51\ 440$        | $0.24\ 940$        | $0.49\ 852$        |
| D. | $G_c$                                             | $0.54\ 801$        | $0.14\ 882$        | $0.45\ 836$        | $0.24\ 940$        | $0.28\ 876$        |
|    | $F_c$                                             | $0.53\ 413$        | $0.15\ 634$        | $0.50\ 829$        | $0.19\ 751$        | $0.49\ 484$        |
|    | $G_c \sin \varphi$                                | $0.22\ 086$        | $9.82\ 167$        | $0.12\ 993$        | $9.92\ 097$        | $9.96\ 066$        |
|    | $F_c + G_c \sin \varphi$                          | $0.70\ 618$        | $0.32\ 151$        | $0.66\ 010$        | $0.38\ 192$        | $0.60\ 620$        |
|    | $\cos \chi d\psi : dM_0$                          | $0.76\ 059$        | $0.37\ 592$        | $0.71\ 416$        | $0.43\ 598$        | $0.66\ 035$        |
|    | $G_s$                                             | $9.21\ 843_n$      | $9.85\ 150$        | $0.19\ 286_n$      | $7.531_n$          | $0.39\ 450_n$      |
|    | $F_s$                                             | $9.95\ 159$        | $9.81\ 911_n$      | $9.73\ 599$        | $9.91\ 316_n$      | $9.61\ 185_n$      |
|    | $G_s \sin \varphi$                                | $8.89\ 128_n$      | $9.52\ 435$        | $9.86\ 443_n$      | $7.203_n$          | $0.06\ 640_n$      |
|    | $F_s + G_s \sin \varphi$                          | $9.91\ 204$        | $9.51\ 172_n$      | $9.27\ 272_n$      | $9.91\ 401_n$      | $0.19\ 710_n$      |
|    | $\sec \varphi (F_s + G_s \sin \varphi)$           | $9.96\ 645$        | $9\ 56\ 613_n$     | $9.32\ 678_n$      | $9.96\ 807_n$      | $0.25\ 125_n$      |
|    | $d\chi : dM_0$                                    | $8.85\ 495$        | $8.15\ 692$        | $8.26\ 081_n$      | $8.66\ 635$        | $9.10\ 964_n$      |
|    | $K \cdot r$                                       | $2.16\ 789$        | $2.21\ 738$        | $2.19\ 467$        | $2.17\ 988$        | $2.20\ 581$        |
|    | $(F_c + G_c \sin \varphi) \sec \varphi (t - t_0)$ | $2.36\ 265_n$      | $2.48\ 313$        | $4.11\ 210$        | $3.86\ 021$        | $4.36\ 536$        |
|    | $K \cdot r F_s$                                   | $2.11\ 948$        | $2.03\ 649_n$      | $1.93\ 066$        | $2.09\ 304_n$      | $1.81\ 766_n$      |
|    | $\cos \chi d\psi : d\mu$                          | $1.99\ 485_n$      | $2.29\ 095$        | $4.11\ 495$        | $3.85\ 272$        | $4.36\ 411$        |
|    | $(F_s + G_s \sin \varphi) \sec \varphi (t - t_0)$ | $1.56\ 851_n$      | $1.67\ 334_n$      | $2.72\ 472_n$      | $3.39\ 230_n$      | $3.95\ 626_n$      |
|    | $-K \cdot r F_c$                                  | $2.70\ 202_n$      | $2.37\ 372_n$      | $2.70\ 296_n$      | $2.37\ 739_n$      | $2.70\ 065_n$      |
|    | Summe                                             | $2.73\ 284_n$      | $2.45\ 267_n$      | $3.01\ 521_n$      | $3.43\ 235_n$      | $3.97\ 972_n$      |
|    | $d\chi : d\mu$                                    | $1.62\ 134_n$      | $1.04\ 346$        | $1.94\ 924_n$      | $2.13\ 063$        | $2.83\ 811_n$      |
|    | $F_c \sin E$                                      | $9.79\ 268_n$      | $9.88\ 355$        | $0.10\ 770_n$      | $9.65\ 423$        | $0.16\ 051_n$      |
|    | $G_s \cos \varphi$                                | $9.16\ 402_n$      | $9.79\ 709$        | $0.13\ 880_n$      | $7.477_n$          | $0.34\ 035_n$      |
|    | $\cos \chi d\psi : d\varphi$                      | $9.88\ 440_n$      | $0.14\ 350$        | $0.42\ 456_n$      | $9.65\ 133$        | $0.56\ 070_n$      |
|    | $F_s \sin E$                                      | $9.21\ 014_n$      | $9.54\ 632_n$      | $9.33\ 540_n$      | $9.36\ 988_n$      | $9.27\ 752$        |
|    | $-G \cos \varphi$                                 | $0.49\ 360_n$      | $0.09\ 441_n$      | $0.40\ 430_n$      | $0.19\ 534_n$      | $0.23\ 461_n$      |
|    | $(F_s \sin E - G_c \cos \varphi)$                 | $0.51\ 565_n$      | $0.20\ 266_n$      | $0.43\ 986_n$      | $0.25\ 584_n$      | $0.18\ 381_n$      |
|    | $d\chi : d\varphi$                                | $9.40\ 415_n$      | $8.79\ 345$        | $9.37\ 389_n$      | $8.95\ 412$        | $9.04\ 220_n$      |

|                        |                       |                       |                       |                       |                       |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\cos \chi d\psi : ds$ | 0.26 410              | 9.93 580              | 0.26 358              | 9.93 801              | 0.26 094              |
| $(r : a) F_s$          | 9.68 156              | 9.59 857 <sub>n</sub> | 9.49 128              | 9.65 366 <sub>n</sub> | 9.37 799 <sub>n</sub> |
| $d\chi : ds$           | 8.57 006              | 8.18 936              | 8.42 531              | 8.35 194              | 8.23 638 <sub>n</sub> |
| $H_c$                  | 0.25 827              | 9.77 197              | 0.16 578              | 9.93 844              | 0.11 816 <sub>n</sub> |
| $d\chi : dq$           | 0.25 697 <sub>n</sub> | 9.77 164 <sub>n</sub> | 0.16 417 <sub>n</sub> | 9.93 790 <sub>n</sub> | 0.11 703 <sub>n</sub> |
| $H_s$                  | 9.75 262 <sub>n</sub> | 9.87 081              | 0.05 975 <sub>n</sub> | 9.65 206              | 0.11 005 <sub>n</sub> |
| $d\chi : dp$           | 9.75 132 <sub>n</sub> | 9.87 048              | 0.05 814 <sub>n</sub> | 9.65 152              | 0.10 892 <sub>n</sub> |

Hieraus zieht man folgende Bedingungsgleichungen, deren Koeffizienten in Logarithmen angesetzt sind:

$$\begin{aligned}
 \cos \chi_1 \Delta \psi_1 &= 0.76059 \quad \Delta M_0 + 8.99485_n (1000 \Delta \mu) + 9.88440_n \Delta \varphi + 0.26410 \Delta s \\
 \cos \chi_2 \Delta \psi_2 &= 0.37592 \quad 9.29095 \quad 0.14350 \quad 9.93580 \\
 \cos \chi_3 \Delta \psi_3 &= 0.71416 \quad 1.11495 \quad 0.42456_n \quad 0.26358 \\
 \cos \chi_4 \Delta \psi_4 &= 0.43598 \quad 0.85272 \quad 9.65133 \quad 9.93801 \\
 \cos \chi_5 \Delta \psi_5 &= 0.66035 \quad 1.36411 \quad 0.56070_n \quad 0.26094 \\
 \Delta \chi_1 &= 8.85495 \quad \Delta M_0 + 8.62134_n (1000 \Delta \mu) + 9.40415_n \Delta \varphi + 8.57006 \Delta s + 0.25697_n \Delta q + 9.75132_n \Delta p \\
 \Delta \chi_2 &= 8.15692 \quad 8.04346 \quad 8.79345 \quad 8.18936 \quad 9.77164_n \quad 9.87048 \\
 \Delta \chi_3 &= 8.26081_n \quad 8.94924_n \quad 9.37389_n \quad 8.42531 \quad 0.16417_n \quad 0.05814_n \\
 \Delta \chi_4 &= 8.66635 \quad 9.13063 \quad 8.95412 \quad 8.35194 \quad 9.93790_n \quad 9.65152 \\
 \Delta \chi_5 &= 9.10964_n \quad 9.83811_n \quad 9.04220_n \quad 8.23638_n \quad 0.11703_n \quad 0.10892_n
 \end{aligned}$$

Für die  $\cos \chi \Delta \psi$  und  $\Delta \chi$  sind ihre nach den Formeln B. berechneten Zahlenwerte einzutragen und dann die Auflösung zu bewerkstelligen. Da wir hierfür schon Beispiele gegeben haben, soll sie hier nicht durchgeführt werden. Es sei nur noch bemerkt, daß es im vorliegenden Fall offenbar ausreicht, die  $\Delta M_0$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta s$  aus den Gleichungen für  $\cos \chi \Delta \psi$  allein zu bestimmen und dann mit Benutzung dieser Werte die  $\Delta q$  und  $\Delta p$  aus den Gleichungen für  $\Delta \chi$ .

**146. Verbesserung von parabelnahen und parabolischen Bahnen.** Bei Bahnen dieser Art bedient man sich bekanntlich zur Berechnung der heliozentrischen Örter anderer Elemente, als bei der Ellipse von mäßiger Exzentrizität; man gebraucht nämlich statt  $M_0$ ,  $\mu$ ,  $e$  die Stücke:

$T$  = Durchgangszeit durchs Perihel,

$q$  = Periheldistanz,

$a$  = große Halbachse (bei der Parabel =  $\infty$ ).

Es ist daher notwendig, in den Bedingungsgleichungen der Bahnverbesserung die Differenziale dieser Elemente einzuführen; statt  $a$  könnte man neben  $q$  die Exzentrizität  $e$  wählen, ersteres ist aber vorzuziehen, weil man dann durch die Ausgleichungsrechnung direkt das Gewicht von  $a$ , also auch das der Umlaufszeit bestimmen kann, was häufig von Interesse ist. Da  $q$ ,  $e$ ,  $a$  durch

$$\begin{aligned}
 q &= a(1 - e) & \text{Ellipse} \\
 q &= a(e - 1) & \text{Hyperbel}
 \end{aligned}$$

zusammenhängen, so ist durch  $q$  und  $a$  auch die Exzentrizität bestimmt.

Wir stellen  $rdv$  und  $dr$  durch  $dT$ ,  $dq$ ,  $da$  dar und zwar zuerst für die Ellipse. Aus

$$M = \mu(t - T)$$

folgt



und aus

$$dM = d\mu(t - T) - \mu dT,$$

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt:

$$d\mu = -\frac{3}{2} \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \frac{da}{a}; \quad (a)$$

somit wird

$$dM = -\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} dT - \frac{3}{2} \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T) \frac{da}{a}. \quad (b)$$

Ferner folgt aus:

$$q = a(1 - e)$$

$$dq = (1 - e)da - ade$$

und daher

$$ade = q \frac{da}{a} - dq. \quad (c)$$

Nun haben wir oben (Seite 440) bereits gefunden:

$$r dv = \frac{a^2 \cos \varphi}{r} dM + a \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) de$$

$$dr = a \operatorname{tg} \varphi \sin v dM - \frac{2}{3k} r a^{\frac{3}{2}} d\mu - a \cos v de;$$

die Eintragung von (a), (b), (c) führt also auf:

$$r dv = -\frac{\sqrt{p}}{r} k dT - \frac{3}{2} k \frac{\sqrt{p}}{r} (t - T) \frac{da}{a} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) q \frac{da}{a} - \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) dq$$

$$dr = -\frac{ke \sin v}{\sqrt{p}} dT - \frac{3}{2} \frac{ke \sin v}{\sqrt{p}} (t - T) \frac{da}{a} + r \frac{da}{a} - q \cos v \frac{da}{a} + \cos v dq$$

oder:

$$r dv = -\frac{p}{r} \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left( q \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) - \frac{3k}{2} \frac{t - T}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} \right) \frac{da}{a} - \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) dq$$

$$dr = -e \sin v \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left( r - q \cos v - \frac{3k}{2} \frac{t - T}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \frac{da}{a} + \cos v dq.$$

Um die entsprechenden Ausdrücke für die Hyperbel abzuleiten, stellen wir zunächst aus Nr. 60 folgende die Bewegung in dieser Kurve beschreibenden Formeln zusammen:

$$e = \sec \psi, \quad p = a \operatorname{tg} \psi^2, \quad q = \frac{p}{e + 1} = a(e - 1)$$

$$N = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T) = e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \cotg \frac{1}{2} \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

$$r = a(e \sec F - 1) = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$r \sin v = a \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} F$$

$$r \cos v = a(e - \sec F),$$

wo  $a$  den absoluten Wert der großen Halbachse bedeutet und der auftretende  $\log$  ein natürlicher ist. Durch Differenziation erhält man hieraus:

$$de = \operatorname{tg} \psi \sec \psi d\psi$$

$$dN = -\frac{k}{a^2} dT - \frac{3k(t-T)}{2a^2} \frac{da}{a}$$

$$dN = \operatorname{tg} F de + \frac{e}{\cos F^2} dF - \frac{dF}{\cos F}$$

$$dN = \operatorname{tg} F de + \frac{1}{\cos F} (e \sec F - 1) dF$$

$$dF = \frac{a \cos F}{r} dN - \sec \psi \sin v \cos F d\psi$$

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{dF}{\sin F} - \frac{d\psi}{\sin \psi}$$

$$dr = \frac{r}{a} da + a \sec F \operatorname{tg} \psi \sec \psi d\psi + a \sec \psi \operatorname{tg} F \sec F dF$$

$$dq = (e - 1) da + a de$$

$$ade = -q \frac{da}{a} + dq.$$

Wird nun alles in  $dr$  und  $dv$  eingetragen, so kommt nach einfacher Reduktion:

$$r dv = -\frac{p}{r} \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left( q \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)p}{\sqrt{p}} \frac{1}{r} \right) \frac{da}{a} - \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) dq$$

$$dr = -e \sin v \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left( r - q \cos v - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \frac{da}{a} + \cos v dq,$$

d. h. man hat für die Hyperbel genau dieselben Ausdrücke wie für die Ellipse.

Die Differenziale  $ds$ ,  $dp$ ,  $dq$  behalten wir auch hier bei, so daß wir nun nach den Grundformeln I<sup>a</sup>. (Seite 439) die Beziehungen zwischen  $\cos \delta da$ ,  $d\delta$  einerseits und  $dT$ ,  $dq$ ,  $da$ ,  $ds$ ,  $dp$ ,  $dq$  andererseits und zwar gleichlautend für Ellipse und Hyperbel zusammenstellen können:

$$q \cos \delta da = -\sin b (\cos(B + \omega + v) + e \cos(B + \omega)) \frac{k dT}{\sqrt{p}}$$

$$- \sin b \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(B + \omega + v) - \sin(B + \omega) \right) dq$$

$$+ \sin b \left[ \left( r - q \cos v - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \sin(B + \omega + v) + \left[ q \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)p}{\sqrt{p}} \frac{1}{r} \right] \cos(B + \omega + v) \right] \frac{da}{a}$$

$$+ \sin b \cos(B + \omega + v) r ds$$

$$+ \cos b r \sin v dp$$

$$- \cos b r \cos v dq$$

$$q d\delta = -\sin c (\cos(C + \omega + v) + e \cos(C + \omega)) \frac{k dT}{\sqrt{p}}$$

$$- \sin c \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(C + \omega + v) - \sin(C + \omega) \right) dq$$

$$+ \sin c \left[ \left( r - q \cos v - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \sin(C + \omega + v) + \left[ q \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)p}{\sqrt{p}} \frac{1}{r} \right] \cos(C + \omega + v) \right] \frac{da}{a}$$

$$+ \sin c \cos(C + \omega + v) r ds$$

$$+ \cos c r \sin v dp$$

$$- \cos c r \cos v dq.$$

Von den hier auftretenden Koeffizienten verursachen nur die von  $da$  Schwierigkeiten, zu deren Überwindung verschiedene Verfahren\*) in Vorschlag gebracht wurden. Handelt es sich um eine bestimmte, bereits vorliegende Ellipse oder Hyperbel, die verbessert werden soll, so ist allerdings eine weitere Umformung kaum nötig, denn man sieht leicht, daß der Koeffizient von  $\sin b \frac{da}{a}$  folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$q \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(\mathbf{B} + \omega + v) - \sin(\mathbf{B} + \omega) \right) - \frac{3}{2} \frac{k}{\sqrt{p}} (t - T) (\cos(\mathbf{B} + \omega + v) + e \cos(\mathbf{B} + \omega)) + r \sin(\mathbf{B} + \omega + v),$$

daß hier also dieselben Faktoren auftreten, wie in den Koeffizienten von  $dT$  und  $dq$ , die man ohnehin berechnen muß. Führt man einige abkürzende Bezeichnungen ein, so ergibt sich dann folgende

*Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen und Hyperbeln.*

$\omega, i, Q$  beziehen sich auf dieselbe Grundebene und dasselbe Äquinoktium wie  $\alpha$  und  $\delta$ .

$$\begin{array}{l|l} \sin b \sin B = -\sin(\alpha - Q) & \sin c \sin C = -\sin \delta \cos(\alpha - Q) \\ \sin b \cos B = +\cos i \cos(\alpha - Q) & \sin c \cos C = +\sin i \cos \delta - \cos i \sin \delta \sin(\alpha - Q) \\ \cos b = -\sin i \cos(\alpha - Q) & \cos c = +\cos i \cos \delta + \sin i \sin \delta \sin(\alpha - Q) \end{array}$$

$\sin b$  und  $\sin c$  sind positiv.

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{q} \sin b (\cos(\mathbf{B} + \omega + v) + e \cos(\mathbf{B} + \omega)) = G^\alpha & \frac{1}{q} \sin c (\cos(\mathbf{C} + \omega + v) + e \cos(\mathbf{C} + \omega)) = G^\delta \\ \frac{1}{q} \sin b \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(\mathbf{B} + \omega + v) - \sin(\mathbf{B} + \omega) \right) = D^\alpha & \frac{1}{q} \sin c \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(\mathbf{C} + \omega + v) - \sin(\mathbf{C} + \omega) \right) = D^\delta \\ \frac{r}{q} \sin b \sin(\mathbf{B} + \omega + v) = F^\alpha & \frac{r}{q} \sin c \sin(\mathbf{C} + \omega + v) = F^\delta \\ \frac{r}{q} \sin b \cos(\mathbf{B} + \omega + v) = K^\alpha & \frac{r}{q} \sin c \cos(\mathbf{C} + \omega + v) = K^\delta \\ \frac{r}{q} \cos b \sin v = P^\alpha & \frac{r}{q} \cos c \sin v = P^\delta \\ \frac{r}{q} \cos b \cos v = Q^\alpha & \frac{r}{q} \cos c \cos v = Q^\delta \\ \cos \delta d\alpha = -G^\alpha \frac{k'' dT}{\sqrt{p}} & d\delta = -G^\delta \frac{k'' dT}{\sqrt{p}} \\ -D^\alpha dq & -D^\delta dq \\ + \left( q D^\alpha + \frac{3}{2} \frac{k}{\sqrt{p}} (t - T) G^\alpha + F^\alpha \right) \frac{da}{a} & + \left( q D^\delta + \frac{3}{2} \frac{k}{\sqrt{p}} (t - T) G^\delta + F^\delta \right) \frac{da}{a} \\ + K^\alpha ds & + K^\delta ds \\ + P^\alpha dp & + P^\delta dp \\ - Q^\alpha dq & - Q^\delta dq \end{array}$$

$$\log k'' = 3.55 \ 0006$$

$$\log \frac{3}{2} k = 8.41 \ 1673.$$

\*) Oppolzer, Monatsberichte Akad. Berlin 1878. Weiß, Sitzungsber. Akad. Wien 1881. Schönfeld, Astr. Nachr. Bd. 113, S. 87.

Statt  $\frac{da}{a}$  kann man auch  $-ad\frac{1}{a}$  schreiben.

Werden wie gewöhnlich  $\cos\delta d\alpha$  und  $d\delta$  in Bogensekunden angesetzt, so ergeben sich auch  $dq$ ,  $da$  bzw.  $d\frac{1}{a}$  in dieser Einheit; um sie in Längenmaß zu erhalten, muß man sie also noch mit  $\sin 1''$  multiplizieren;  $dT$  erscheint in Tagen, wenn der damit multiplizierte Faktor  $k$  in Sekunden angesetzt wird, wie in obiger Übersicht bereits angegeben.

Der hier supponierte Fall tritt in praxi nur selten ein, sondern meist ist die Aufgabe die, aus *einer parabolischen Bahn durch das Verbesserungsverfahren eine parabelnahe Bahn abzuleiten*, was offenbar dadurch geschehen kann, daß man die Verbesserung der Exzentrizität  $e$  der Parabel zu ermitteln strebt; fällt diese nach der negativen Seite aus, so hat man eine parabelnahe Ellipse und wenn nach der positiven eine parabelnahe Hyperbel. Obige Formeln gelten nun zwar auch für den Grenzfall, die Parabel; aber ob man nun  $da$  beibehält, oder  $de$  durch

$$\frac{da}{a} = \frac{de}{1-e} + \frac{dq}{q}$$

eingeführt, immer erhält man den Koeffizienten von  $da$  oder  $de$  in unbestimmter Form. Diese zu beseitigen ist das Ziel der oben zitierten Arbeiten. Wir werden hier die Schönfeldsche Umformung vorführen, für deren Anwendung in der Tafelsammlung die Tafeln XXVII–XXIX aufgenommen sind. Offenbar kommt alles darauf an, aus dem Koeffizienten von  $da$  den Faktor  $(1-e)$  herauszuziehen, was uns wegen

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2 = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$$

gelingen wird, wenn wir die *halbe* wahre Anomalie einzuführen suchen; auch *der* Umstand, daß in den Koeffizienten von  $dT$  und  $dq$  die halbe wahre Anomalie auftritt, sobald  $e = 1$  darin gesetzt wird, weist darauf hin, auch in  $da$  ihre Einführung zu unternehmen.

Setzt man

$$\begin{aligned} r - q \cos v - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v &= U \\ q \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} &= V \end{aligned}$$

so wird der Koeffizient von  $\frac{\sin \mathbf{b}}{e} \frac{da}{a}$ :

$$U \sin (\mathbf{B} + \omega + v) + V \cos (\mathbf{B} + \omega + v),$$

wofür wir schreiben:

$\sin (\mathbf{B} + \omega + \frac{1}{2}v) [\cos \frac{1}{2}v \cdot U - \sin \frac{1}{2}v \cdot V] + \cos (\mathbf{B} + \omega + \frac{1}{2}v) [\sin \frac{1}{2}v \cdot U + \cos \frac{1}{2}v \cdot V]$   
und nun zuerst die  $[\dots]$  entwickeln. Es ist dabei zwischen Ellipse und Hyperbel zu unterscheiden.

In der *Ellipse* hat man folgende Relationen, die wir vorweg angeben, um nachher nicht die Entwicklungen unterbrechen zu müssen:

$$\begin{array}{l|l}
 p = q(1+e) & \frac{k(t-T)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}} (1-e)^{\frac{3}{2}} = E - e \sin E \\
 \frac{p}{r} = 1+e \cos v & \frac{k(t-T)}{2q^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1+e} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} E^2 + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3}{1+e} \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} \\
 \frac{r-q}{r \sin^{\frac{1}{2}} v^2} = \frac{2e}{1+e} = 1 - \frac{1-e}{1+e} & \frac{q}{r} \sec^{\frac{1}{2}} v^2 = \sec^{\frac{1}{2}} E^2. \\
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v &
 \end{array}$$

Somit wird:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2} v \cdot U - \sin \frac{1}{2} v \cdot V &= (r-q) \cos \frac{1}{2} v - \frac{r \sin v}{1+e} \sin \frac{1}{2} v + \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} (1-e) \sin \frac{1}{2} v \\
 &= -r \sin v \sin \frac{1}{2} v \cdot \frac{1-e}{1+e} + \frac{3}{2} r \sin v \sin \frac{1}{2} v \frac{1-e}{1+e} + \frac{3}{2} r \sin v \sin \frac{1}{2} v \frac{1-e \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3}
 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{1}{2} v \cdot U - \sin \frac{1}{2} v \cdot V = \frac{1}{2} r \sin v \sin \frac{1}{2} v \frac{1-e}{1+e} \left( 1 + \frac{3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} \right)$$

und:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{1}{2} v \cdot U + \cos \frac{1}{2} v \cdot V &= (r+q) \sin \frac{1}{2} v + \frac{r \sin v}{1+e} \cos \frac{1}{2} v - \frac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} (1+e) \cos \frac{1}{2} v \\
 &= \frac{1}{2} r \sin v \cos \frac{1}{2} v \left( \sec^{\frac{1}{2}} v^2 + \sec^{\frac{1}{2}} E^2 + \frac{2}{1+e} - 3 - \frac{3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} \right)
 \end{aligned}$$

oder wenn  $\frac{2}{1+e} = 1 + \frac{1-e}{1+e}$  und  $\sec^{\frac{1}{2}} v^2 - 1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$  beachtet wird:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{1}{2} v \cdot U + \cos \frac{1}{2} v \cdot V &= \frac{1}{2} r \sin v \cos \frac{1}{2} v \left( \frac{1-e}{1+e} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 - \frac{3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} r \sin v \cos \frac{1}{2} v \frac{1-e}{1+e} \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2} \left( 1 - \frac{3}{1+e} \sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\sec^{\frac{1}{2}} E^2 \frac{E - \sin E}{4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^3} = \frac{1}{3} - S,$$

so wird:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2} v \cdot U - \sin \frac{1}{2} v \cdot V &= \frac{1}{2} r \sin v \sin \frac{1}{2} v \frac{1-e}{1+e} \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} (1-3S) \right) \\
 \sin \frac{1}{2} v \cdot U + \cos \frac{1}{2} v \cdot V &= \frac{1}{2} r \sin v \cos \frac{1}{2} v \frac{1-e}{1+e} \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1+e} \frac{3S}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2} \right).
 \end{aligned}$$

Für  $S$  ist leicht eine Reihenentwicklung aufzustellen; setzt man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2 = \tau,$$

so wird nach Seite 212

$$E - \sin E = 2\sqrt{\tau} \left( \frac{2}{3}\tau - \frac{4}{5}\tau^2 + \frac{6}{7}\tau^3 - \dots \right)$$

und daher:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} - S &= (1+\tau) \frac{E - \sin E}{4\tau\sqrt{\tau}} = \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\tau + \frac{3}{7}\tau^2 - \dots \right) (1+\tau) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{\tau}{3 \cdot 5} + \frac{\tau^2}{5 \cdot 7} - \frac{\tau^3}{7 \cdot 9} + \dots
 \end{aligned}$$

oder:

$$S = \frac{\tau}{3 \cdot 5} - \frac{\tau^2}{5 \cdot 7} + \frac{\tau^3}{7 \cdot 9} - \dots$$

Wichtiger aber ist, daß man es sofort mit dem Gaußschen Argument

$$A = \frac{15(E - \sin E)}{9E + \sin E},$$

dessen man zur Berechnung der wahren Anomalie bedarf (Nr. 64), in Verbindung bringen kann. Da nach Seite 212

$$r = \frac{A}{1 - \frac{4}{5}A + C}$$

so wird

$$1 - 3S = \frac{1 - \frac{4}{5}A + C}{1 - \frac{3}{5}A} = \frac{1}{\xi}$$

$$3S = \frac{\frac{1}{5}A - C}{1 - \frac{3}{5}A}$$

$$\frac{3S}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2} = \frac{1 - \frac{4}{5}A + C}{1 - \frac{3}{5}A} \left( \frac{1}{5} - \frac{C}{A} \right) = \frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{5} - \frac{C}{A} \right) = \eta.$$

$\xi$  und  $\eta$  kann man hiernach mit dem Argument  $A$  tabulieren, wie in Taf. XXVII geschehen ist. Hat man sich des Argumentes  $A$  zur Bildung der wahren Anomalie nicht bedient, so wird man  $r$  aus

$$r = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$$

berechnen und kann dann derselben Tafel die Hilfsgrößen  $\xi$  und  $\eta$  entnehmen, wenn die Tafel zu jedem Wert von  $A$  auch den von  $r$  gibt; dies ist in Taf. XXVII ebenfalls geschehen ( $r$  ist dort mit  $\vartheta$  bezeichnet).

Setzt man jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1 + e} (1 - 3S) = m = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1 + e} \cdot \frac{1}{\xi} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1 + e} \frac{3S}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2} = n = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1 + e} \eta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \xi \text{ und } \eta \text{ mit Arg. } A \text{ oder } r \\ \text{aus Taf. XXVII} \end{array}$$

so wird:

$$\cos \frac{1}{2} v \cdot U - \sin \frac{1}{2} v \cdot V = \frac{1}{2} r \sin v \sin \frac{1}{2} v \frac{1 - e}{1 + e} (1 + m)$$

$$\sin \frac{1}{2} v \cdot U + \cos \frac{1}{2} v \cdot V = \frac{1}{2} r \sin v \cos \frac{1}{2} v \frac{1 - e}{1 + e} (1 + n)$$

und die Vereinigung dieser beiden zum Koeffizienten von  $da$  kann nun unmittelbar ausgeführt werden. In der folgenden Übersicht haben wir statt  $\frac{da}{a}$  eingeführt  $d \frac{1}{a}$ , weil dies für die Rechnung Vorteile bietet; es ist:

$$\frac{1 - e}{1 + e} \frac{da}{a} = - \frac{q}{1 + e} d \frac{1}{a}.$$

Man könnte auch das Differenzial  $de$  durch

$$\frac{1 - e}{1 + e} \frac{da}{a} = \frac{de}{1 + e} + \frac{1 - e}{1 + e} \frac{dq}{q}$$

eingeführen, doch ist dies, wie schon erwähnt, nicht zweckmäßig.

## Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für parabelnahe Ellipsen.

b, B, c, C, wie Seite 455.

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+e} \frac{1}{\xi} \\ n &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1+e} \eta \end{aligned} \right\} \xi \text{ und } \eta \text{ mit Arg. } A \text{ oder } \tau \text{ aus Taf. XXVII}$$

$$l \sin(L - \frac{1}{2}v) = -m \sin \frac{1}{2}v$$

$$l \cos(L - \frac{1}{2}v) = +n \cos \frac{1}{2}v$$

$$\frac{1}{q} \sin b (\cos(B + \omega + v) + e \cos(B + \omega)) = G^a$$

$$\frac{1}{q} \sin b \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(B + \omega + v) - \sin(B + \omega) \right) = D^a$$

$$\frac{r}{q} \sin b (l \cos(B + \omega + L) + \cos(B + \omega)) = N^a$$

$$\frac{r}{q} \sin b \cos(B + \omega + v) = K^a$$

$$\frac{r}{q} \cos b \sin v = P^a$$

$$\frac{r}{q} \cos b \cos v = Q^a$$

$$\frac{1}{q} \sin c (\cos(C + \omega + v) + e \cos(C + \omega)) = G^d$$

$$\frac{1}{q} \sin c \left( \frac{r}{p} \sin v \cos(C + \omega + v) - \sin(C + \omega) \right) = D^d$$

$$\frac{r}{q} \sin c (l \cos(C + \omega + L) + \cos(C + \omega)) = N^d$$

$$\frac{r}{q} \sin c \cos(C + \omega + v) = K^d$$

$$\frac{r}{q} \cos c \sin v = P^d$$

$$\frac{r}{q} \cos c \cos v = Q^d$$

$$\begin{aligned} \cos \delta d\alpha &= -G^a \frac{k'' dT}{Vp} \\ &\quad - D^a dq \\ &\quad - \frac{q}{2(1+e)} \sin v N^a d\frac{1}{a} \\ &\quad + K^a ds \\ &\quad + P^a dp \\ &\quad - Q^a dq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\delta &= -G^d \frac{k'' dT}{Vp} \\ &\quad - D^d dq \\ &\quad - \frac{q}{2(1+e)} \sin v N^d d\frac{1}{a} \\ &\quad + K^d ds \\ &\quad + P^d dp \\ &\quad - Q^d dq \end{aligned}$$

$$\log k'' 3.550006.$$

Die hieraus hervorgehenden  $dq$  und  $d\frac{1}{a}$  sind mit  $\sin 1''$  zu multiplizieren, um sie in Längenmaß zu erhalten;  $dT$  erscheint in Tagen.

Den Fall der *Hyperbel* zu behandeln, können wir unterlassen, da die Entwicklungen ganz analog denen der Ellipse sind, und da zu verbessernde Hyperbeln in praxi kaum vorkommen dürften. Die Schlußformeln werden dieselben, nur treten an Stelle von  $\xi$  und  $\eta$  andere Funktionen, die in Taf. XXVIII tabuliert sind.

Wir gehen nun in dem Seite 456 auseinandergesetzten Sinne zum Falle der *Parabel* über. Setzt man in den Formeln für die Ellipse (oder Hyperbel)  $e = 1$ , so wird:

$$\xi = 1, \eta = \frac{1}{5}, m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2, n = \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4, Vp = \sqrt{2} Vq = \sqrt{2} Vr \cos \frac{1}{2} v, \frac{r}{p} \sin v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

$$\frac{1}{Vp} (\cos(B + \omega + v) + e \cos(B + \omega)) = \frac{\sqrt{2}}{Vr} \cos(B + \omega + \frac{1}{2}v)$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{p} \sin v \cos(\mathbf{B} + \omega + v) - \sin(\mathbf{B} + \omega) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cos(\mathbf{B} + \omega + v) - \sin(\mathbf{B} + \omega) \\
&= \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v} (\cos(\mathbf{B} + \omega + \frac{1}{2} v) \sin v - \sin(\mathbf{B} + \omega + \frac{1}{2} v)) \\
&= -\frac{1}{\cos \frac{1}{2} v} (j \sin(\mathbf{B} + \omega + J)),
\end{aligned}$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
j \sin(J - \frac{1}{2} v) &= -\sin v \\
j \cos(J - \frac{1}{2} v) &= 1, \\
l \sin(L - \frac{1}{2} v) &= -\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \sin \frac{1}{2} v & \left| \begin{array}{l} l \sin L = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v - \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v \\ l \cos L = +\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \sin \frac{1}{2} v^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v^3 \end{array} \right. \\
l \cos(L - \frac{1}{2} v) &= +\frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v \\
\frac{\sin v}{2} (l \cos(\mathbf{B} + \omega + L) + \cos(\mathbf{B} + \omega)) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} [\cos(\mathbf{B} + \omega) (\cos \frac{1}{2} v^3 + \sin \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v) \\
&\quad - \sin(\mathbf{B} + \omega) (-\sin \frac{1}{2} v^3 \cos \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2} v^5)].
\end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{1}{2} v^3 + \sin \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2} v^4 \cos \frac{1}{2} v &= h_1 \cos H \\
-\sin \frac{1}{2} v^3 \cos \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2} v^5 &= h_1 \sin H
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
h_1 \sin(H - \frac{1}{2} v) &= -\frac{1}{2} \sin v \\
h_1 \cos(H - \frac{1}{2} v) &= \cos \frac{1}{2} v^4 + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2} v^4
\end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{\sin v}{2} (l \cos(\mathbf{B} + \omega + L) + \cos(\mathbf{B} + \omega)) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} h_1 \cos(\mathbf{B} + \omega + H).$$

Endlich ist

$$-\frac{q}{1+e} d \frac{1}{a} = \frac{1}{2} de.$$

Wird dies in die Formeln für die Ellipse eingetragen, so erhält man folgende

*Zusammenstellung der Formeln für die Bahnverbesserung der Parabel.*

**b, B, c, C** wie Seite 455.

$$\begin{aligned}
j \sin(J - \frac{1}{2} v) &= -\sin v & \left| \begin{array}{l} h_1 \sin(H - \frac{1}{2} v) = -\frac{1}{2} \sin v \\ h_1 \cos(H - \frac{1}{2} v) = \cos \frac{1}{2} v^4 + \frac{1}{5} \sin v^4 \end{array} \right. \\
j \cos(J - \frac{1}{2} v) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\alpha &= -\frac{\sin \mathbf{b}}{q} \cos(\mathbf{B} + \omega + \frac{1}{2} v) \frac{\sqrt{2} k''}{\sqrt{r}} dT \\
&+ \frac{\sin \mathbf{b}}{q} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v} j \sin(\mathbf{B} + \omega + J) dq \\
&+ \frac{\sin \mathbf{b}}{q} \frac{r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} h_1 \cos(\mathbf{B} + \omega + H) \frac{1}{2} de \\
&+ \frac{r}{q} \sin \mathbf{b} \cos(\mathbf{B} + \omega + v) ds \\
&+ \frac{r}{q} \cos \mathbf{b} \sin v dp \\
&- \frac{r}{q} \cos \mathbf{b} \cos v dq
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
d\delta = & -\frac{\sin c}{\varrho} \cos(C + \omega + \tfrac{1}{2}v) \frac{\sqrt{2}k''}{\sqrt{r}} dT \\
& + \frac{\sin c}{\varrho} \frac{1}{\cos \frac{1}{2}v} j \sin(C + \omega + J) dq \\
& + \frac{\sin c}{\varrho} \frac{r \operatorname{tg} \frac{1}{2}v}{\cos \frac{1}{2}v} h_1 \cos(C + \omega + H) \tfrac{1}{2} de \\
& + \frac{r}{\varrho} \sin c \cos(C + \omega + v) ds \\
& + \frac{r}{\varrho} \cos c \sin v dp \\
& - \frac{r}{\varrho} \cos c \cos v dq \\
& \log \sqrt{2} k'' = 3.700522.
\end{aligned}$$

Die Größen  $j$ ,  $J$ ,  $h_1$ ,  $H$  können mit dem Argument  $v$  tabuliert werden; dies ist in der Schönfeldschen Tafel Nr. XXIX ausgeführt.  $dT$  ergibt sich in Tagen; die ermittelten  $dq$  und  $de$  müssen mit  $\sin 1''$  multipliziert werden, um in Längenmaß zu erscheinen. Betreff des Überganges von  $dp$ ,  $dq$ ,  $ds$  auf  $di$ ,  $d\Omega$ ,  $d\omega$  sehe man Seite 443.

Erstrebt man nur eine Verbesserung der rein parabolischen Elemente, indem die Beobachtungen auf das Vorhandensein einer von 1 verschiedenen Exzentrizität nicht hinweisen, so bleiben die Glieder mit  $de$  weg.

## Abschnitt XXVIII.

## Die Bahnverbesserung durch die Variation der geozentrischen Distanzen.

**147. Formulierung des Problems.** Bei den im vorigen Abschnitt besprochenen Methoden der Bahnverbesserung wurden die Verbesserungen der *Elemente* durch die Unterschiede der Beobachtung von dem durch Rechnung mit dem vorgelegten Elementensystem erhaltenen geozentrischen Ort ausgedrückt. Hierzu mußten die Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen aufgestellt werden und es mußte ein linearer Zusammenhang zwischen den Differenzialen angenommen werden, damit die Ausgleichungsrechnung Anwendung finden konnte. Ersteres ist rechnerisch mühsam, letzteres ist oft in praxi nicht der Fall, wenn die Ausgangselemente noch zu mangelhaft sind; das würde zu einer Wiederholung der ohnehin langen Rechnung zwingen. Gewöhnlich verfügt man bei einer solchen Sachlage auch nur über eine kleine Anzahl von Beobachtungen, so daß sich ein strenges Ausgleichungsverfahren nicht lohnt. Da tritt nun eine Methode der Bahnverbesserung in die Lücke, bekannt unter dem Namen der *Variation der geozentrischen Distanzen*, die bei geringerer Arbeit wenn auch nicht definitive so doch brauchbare Resultate liefert. Wir haben sie schon in Nr. 98 kennen gelernt und wollen sie nun unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachten.

Ein Elementensystem geht aus zwei vollständigen heliozentrischen Örtern  $a_1, d_1, r_1, a_3, d_3, r_3$  hervor, die sich ihrerseits aus zwei vollständigen geozentrischen Örtern  $\alpha_1 \delta_1 \varrho_1, \alpha_3 \delta_3 \varrho_3$  ergeben; von den letzteren sechs Koordinaten sind  $\alpha_1, \delta_1, \alpha_3, \delta_3$  durch die Beobachtung gegeben,  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  müssen durch die Bahnbestimmung geliefert werden. Ein bereits bekanntes zur Verbesserung vorgelegtes Elementensystem liefert bestimmte Werte von  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  und zeigt verglichen mit den einzelnen vorhandenen Beobachtungen  $\alpha_1 \delta_1, \alpha_3 \delta_3$  und  $\alpha_i \delta_i$  Abweichungen  $\cos \delta_1 d\alpha_1, d\delta_1, \cos \delta_3 d\alpha_3, d\delta_3, \cos \delta_i d\alpha_i, d\delta_i$ , die abgesehen von den zufälligen Beobachtungsfehlern nur davon herrühren können, daß mit den geozentrischen Distanzen  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  noch nicht die richtigen getroffen sind. Es stellt sich also die allgemeine Aufgabe, jene Korrekturen  $d\varrho_1$  und  $d\varrho_3$  von  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  zu ermitteln, durch welche die genannten Abweichungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate auf ihr Minimum reduziert werden. Hierzu muß man die Differenzialquotienten

$$\frac{\cos \delta d\alpha}{d\varrho_1}, \quad \frac{d\delta}{d\varrho_1}, \quad \frac{\cos \delta d\alpha}{d\varrho_3}, \quad \frac{d\delta}{d\varrho_3}$$

aufstellen. Dies kann auf empirischem Wege geschehen, indem man die Distanzen willkürlich variiert und damit Elementensysteme und deren Abweichungen von den Beobachtungen rechnet — ein in praxi wirksames, selten fehlschlagendes Mittel, das wir bereits in Nr. 98 auseinandergesetzt haben. Man kann hierfür aber auch analytische Ausdrücke aufstellen, welche wenn streng entwickelt allerdings weitläufig

sind, aber zu rechnerisch brauchbaren sich gestalten, wenn man Entwicklungen nach den Potenzen der Zwischenzeiten zulassen kann. Handelt es sich um die Darstellung aller Beobachtungen, die einer Opposition angehören, durch eine Bahn, so wird diese Annahme fast immer zutreffen und auf diesen häufigen Fall sollen also die folgenden Entwicklungen berechnet sein.

**148. Aufstellung der Grundgleichungen.** Wenn das vorgelegte Elementensystem aus  $\alpha_1 \delta_1 \varrho_1$ ,  $\alpha_3 \delta_3 \varrho_3$  selbst berechnet ist, so werden  $\cos \delta_1 d\alpha_1$ ,  $d\delta_1$ ,  $\cos \delta_3 d\alpha_3$ ,  $d\delta_3$  gleich Null; hierdurch ergibt sich einige Vereinfachung, die wir aber nicht von Anfang an einführen wollen, wenn sie auch in der Regel vorhanden ist und jedenfalls herbeigeführt werden kann; sie wird sich als Spezialfall leicht aus den allgemeinen Formeln abziehen lassen.

Nach den Grundformeln I. (Seite 437) kann man ansetzen:

$$\begin{aligned} d\varrho_1 &= \cos \mathfrak{A}_1 dr_1 + \cos \mathfrak{B}_1 r_1 dw_1 + \cos \mathfrak{C}_1 r_1 dn_1 \\ \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 &= \cos \mathfrak{F}_1 dr_1 + \cos \mathfrak{G}_1 r_1 dw_1 + \cos \mathfrak{H}_1 r_1 dn_1 \\ \varrho_1 d\delta_1 &= \cos \mathfrak{L}_1 dr_1 + \cos \mathfrak{M}_1 r_1 dw_1 + \cos \mathfrak{N}_1 r_1 dn_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\varrho_3 &= \cos \mathfrak{A}_3 dr_3 + \cos \mathfrak{B}_3 r_3 dw_3 + \cos \mathfrak{C}_3 r_3 dn_3 \\ \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 &= \cos \mathfrak{F}_3 dr_3 + \cos \mathfrak{G}_3 r_3 dw_3 + \cos \mathfrak{H}_3 r_3 dn_3 \\ \varrho_3 d\delta_3 &= \cos \mathfrak{L}_3 dr_3 + \cos \mathfrak{M}_3 r_3 dw_3 + \cos \mathfrak{N}_3 r_3 dn_3 \end{aligned}$$

1)

und hieraus folgt umgekehrt:

$$\begin{aligned} dr_1 &= \cos \mathfrak{A}_1 d\varrho_1 + \cos \mathfrak{F}_1 \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 + \cos \mathfrak{L}_1 \varrho_1 d\delta_1 \\ r_1 dw_1 &= \cos \mathfrak{B}_1 d\varrho_1 + \cos \mathfrak{G}_1 \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 + \cos \mathfrak{M}_1 \varrho_1 d\delta_1 \\ r_1 dn_1 &= \cos \mathfrak{C}_1 d\varrho_1 + \cos \mathfrak{H}_1 \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 + \cos \mathfrak{N}_1 \varrho_1 d\delta_1 \\ dr_3 &= \cos \mathfrak{A}_3 d\varrho_3 + \cos \mathfrak{F}_3 \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 + \cos \mathfrak{L}_3 \varrho_3 d\delta_3 \\ r_3 dw_3 &= \cos \mathfrak{B}_3 d\varrho_3 + \cos \mathfrak{G}_3 \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 + \cos \mathfrak{M}_3 \varrho_3 d\delta_3 \\ r_3 dn_3 &= \cos \mathfrak{C}_3 d\varrho_3 + \cos \mathfrak{H}_3 \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 + \cos \mathfrak{N}_3 \varrho_3 d\delta_3; \end{aligned}$$

2)

man hat ferner für jede weitere Beobachtung  $i$ :

$$\begin{aligned} d\varrho_i &= \cos \mathfrak{A}_i dr_i + \cos \mathfrak{B}_i r_i dw_i + \cos \mathfrak{C}_i r_i dn_i \\ \varrho_i \cos \delta_i d\alpha_i &= \cos \mathfrak{F}_i dr_i + \cos \mathfrak{G}_i r_i dw_i + \cos \mathfrak{H}_i r_i dn_i \\ \varrho_i d\delta_i &= \cos \mathfrak{L}_i dr_i + \cos \mathfrak{M}_i r_i dw_i + \cos \mathfrak{N}_i r_i dn_i. \end{aligned}$$

3)

Die Bedeutung der als bekannt anzusehenden Größen  $\cos \mathfrak{A}_1, \dots$  ergibt sich leicht durch Vergleichung mit den bei Ableitung der Grundformeln gemachten Festsetzungen.

Wenn es gelingt  $dr_i$ ,  $r_i dw_i$ ,  $r_i dn_i$  durch  $dr_1$ ,  $r_1 dw_1$ ,  $r_1 dn_1$  und  $dr_3$ ,  $r_3 dw_3$ ,  $r_3 dn_3$  auszudrücken, so geben die Gl. 3) in Verbindung mit 2) offenbar Beziehungen zwischen  $d\varrho_i$ ,  $\varrho_i \cos \delta_i d\alpha_i$ ,  $\varrho_i d\delta_i$  einerseits und  $d\varrho_1$ ,  $\varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1$ ,  $\varrho_1 d\delta_1$  und  $d\varrho_3$ ,  $\varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3$ ,  $\varrho_3 d\delta_3$  andererseits, aus denen  $d\varrho_i$  und  $d\varrho_3$  und überdies  $d\varrho_i$  bestimmt werden können, wenn  $\cos \delta_i d\alpha_i$ ,  $d\delta_i$  als bekannt angenommen werden; oder anders ausgedrückt, man erhält die Differenzialquotienten

$$\frac{\cos \delta_i d\alpha_i}{d\varrho_1}, \quad \frac{d\delta_i}{d\varrho_1}, \quad \frac{\cos \delta_i d\alpha_i}{d\varrho_3}, \quad \frac{d\delta_i}{d\varrho_3}.$$

Wir wenden uns daher zunächst der erstgenannten Aufgabe zu.

Im Koordinatensystem  $R_i W_i N_i$  (siehe Seite 436) lautet die Bedingung dafür, daß die drei Punkte 1, 3,  $i$  in einer Ebene mit der Sonne liegen (nach Seite 255)

$$\begin{aligned} [r_1 r_3] R_i &= [r_1 r_3] R_1 + [r_1 r_i] R_3 \\ [r_1 r_3] W_i &= [r_1 r_3] W_1 + [r_1 r_i] W_3 \\ [r_1 r_3] N_i &= [r_1 r_3] N_1 + [r_1 r_i] N_3 \end{aligned}$$

oder wenn die Verhältnisse der Dreiecksflächen

$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_3]} = q_1, \quad \frac{[r_1 r_i]}{[r_1 r_3]} = q_3$$

genannt werden:

$$R_i = q_1 R_1 + q_3 R_3, \quad W_i = q_1 W_1 + q_3 W_3, \quad N_i = q_1 N_1 + q_3 N_3. \quad 4)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dR_i &= dr_i, & dW_i &= r_i dw_i, & dN_i &= r_i dn_i \\ dR_1 &= \cos(v_i - v_1) dr_1 + \sin(v_i - v_1) r_1 dw_1 \\ dW_1 &= -\sin(v_i - v_1) dr_1 + \cos(v_i - v_1) r_1 dw_1 \\ dN_1 &= r_1 dn_1 \end{aligned}$$

usf.

Differenziert man also 4), so kommt:

$$\begin{aligned} dr_i &= q_1 \cos(v_i - v_1) dr_1 + q_1 \sin(v_i - v_1) r_1 dw_1 + q_3 \cos(v_i - v_3) dr_3 + \\ &\quad + q_3 \sin(v_i - v_3) r_3 dw_3 + r_1 \cos(v_i - v_1) dq_1 + r_3 \cos(v_i - v_3) dq_3 \\ r_i dw_i &= -q_1 \sin(v_i - v_1) dr_1 + q_1 \cos(v_i - v_1) r_1 dw_1 - q_3 \sin(v_i - v_3) dr_3 + \\ &\quad + q_3 \cos(v_i - v_3) r_3 dw_3 - r_1 \sin(v_i - v_1) dq_1 - r_3 \sin(v_i - v_3) dq_3 \\ r_i dn_i &= q_1 r_1 dn_1 + q_3 r_3 dn_3. \end{aligned} \quad 5)$$

Werden diese Ausdrücke, nachdem in ihnen  $dr_1, r_1 dw_1, \dots$  durch die 2) ersetzt sind, in 3) eingetragen, so lassen die Faktoren von  $dq_1, \cos \delta_1 d\alpha_1, d\delta_1, \dots$  sofort eine einfache Deutung zu. Es wird z. B. der Faktor von  $q_1 dq_1$  in dem Ausdruck von  $dq_i$

$$\begin{aligned} &\cos \mathfrak{A}_i \cos \mathfrak{A}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos \mathfrak{B}_i \cos \mathfrak{B}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos \mathfrak{C}_i \cos \mathfrak{C}_1 \\ &+ \cos \mathfrak{A}_i \cos \mathfrak{B}_1 \sin(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{B}_i \cos \mathfrak{A}_1 \sin(v_i - v_1); \end{aligned}$$

transformiert man die  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$  auf das System der  $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_i$ , was durch eine Drehung um die Achse der Bahnebene um den Winkel  $v_i - v_1$  geschieht, so wird

$$\begin{aligned} \cos \mathfrak{A}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos \mathfrak{B}_1 \sin(v_i - v_1) &= \cos \mathfrak{A}_1' \\ \cos \mathfrak{B}_1 \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{A}_1 \sin(v_i - v_1) &= \cos \mathfrak{B}_1' \\ \cos \mathfrak{C}_1 &= \cos \mathfrak{C}_1' \end{aligned}$$

und daher der obige Ausdruck gleich

$$\cos \mathfrak{A}_i \cos \mathfrak{A}_1' + \cos \mathfrak{B}_i \cos \mathfrak{B}_1' + \cos \mathfrak{C}_i \cos \mathfrak{C}_1' = \cos(A_i A_1),$$

d. h. der Faktor von  $q_1 dq_1$  ist gleich dem  $\cos$  des Winkels zwischen den Punkten  $A_i$  und  $A_1$ . Man erhält so:

$$\begin{aligned}
d\rho_i &= \cos(A_i A_1) q_1 d\rho_1 + \cos(A_i A_3) q_3 d\rho_3 \\
&+ \cos(A_i B_1) q_1 \varrho_1 \cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos(A_i B_3) q_3 \varrho_3 \cos\delta_3 d\alpha_3 \\
&+ \cos(A_i C_1) q_1 \varrho_1 d\delta_1 + \cos(A_i C_3) q_3 \varrho_3 d\delta_3 \\
&+ r_1 (\cos\mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_1) - \cos\mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_1)) dq_1 + r_3 (\cos\mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_3) - \cos\mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_3)) dq_3 \\
\varrho_i \cos\delta_i d\alpha_i &= \cos(B_i A_1) q_1 d\rho_1 + \cos(B_i A_3) q_3 d\rho_3 \\
&+ \cos(B_i B_1) q_1 \varrho_1 \cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos(B_i B_3) q_3 \varrho_3 \cos\delta_3 d\alpha_3 \\
&+ \cos(B_i C_1) q_1 \varrho_1 d\delta_1 + \cos(B_i C_3) q_3 \varrho_3 d\delta_3 \\
&+ r_1 (\cos\mathfrak{F}_i \cos(v_i - v_1) - \cos\mathfrak{G}_i \sin(v_i - v_1)) dq_1 + r_3 (\cos\mathfrak{F}_i \cos(v_i - v_3) - \cos\mathfrak{G}_i \sin(v_i - v_3)) dq_3 \\
\varrho_i d\delta_i &= \cos(C_i A_1) q_1 d\rho_1 + \cos(C_i A_3) q_3 d\rho_3 \\
&+ \cos(C_i B_1) q_1 \varrho_1 \cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos(C_i B_3) q_3 \varrho_3 \cos\delta_3 d\alpha_3 \\
&+ \cos(C_i C_1) q_1 \varrho_1 d\delta_1 + \cos(C_i C_3) q_3 \varrho_3 d\delta_3 \\
&+ r_1 (\cos\mathfrak{L}_i \cos(v_i - v_1) - \cos\mathfrak{M}_i \sin(v_i - v_1)) dq_1 + r_3 (\cos\mathfrak{L}_i \cos(v_i - v_3) - \cos\mathfrak{M}_i \sin(v_i - v_3)) dq_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die  $\cos(A_i A_1), \dots$  lassen sich aus Dreiecken, deren Ecken  $A_i, A_1$  und  $\varkappa, \dots$  sind, durch bekannte Größen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\cos(A_i A_1) &= \sin\delta_i \sin\delta_1 + \cos\delta_i \cos\delta_1 \cos(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(A_i B_1) &= \cos\delta_i \sin(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(A_i C_1) &= \sin\delta_i \cos\delta_1 - \cos\delta_i \sin\delta_1 \cos(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(B_i A_1) &= -\cos\delta_1 \sin(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(B_i B_1) &= \cos(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(B_i C_1) &= \sin\delta_1 \sin(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(C_i A_1) &= \cos\delta_i \sin\delta_1 - \sin\delta_i \cos\delta_1 \cos(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(C_i B_1) &= -\sin\delta_i \sin(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(C_i C_1) &= \cos\delta_i \cos\delta_1 + \sin\delta_i \sin\delta_1 \cos(\alpha_i - \alpha_1) \\
\cos(A_i A_3) &= \sin\delta_i \sin\delta_3 + \cos\delta_i \cos\delta_3 \cos(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(A_i B_3) &= \cos\delta_i \sin(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(A_i C_3) &= \sin\delta_i \cos\delta_3 - \cos\delta_i \sin\delta_3 \cos(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(B_i A_3) &= -\cos\delta_3 \sin(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(B_i B_3) &= \cos(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(B_i C_3) &= \sin\delta_3 \sin(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(C_i A_3) &= \cos\delta_i \sin\delta_3 - \sin\delta_i \cos\delta_3 \cos(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(C_i B_3) &= -\sin\delta_i \sin(\alpha_i - \alpha_3) \\
\cos(C_i C_3) &= \cos\delta_i \cos\delta_3 + \sin\delta_i \sin\delta_3 \cos(\alpha_i - \alpha_3).
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Faktoren von  $dq_1$  und  $dq_3$  findet man, da nach Seite 439

$$\begin{aligned}
\cos\mathfrak{A}_i &= \sin a_i \sin(\mathbf{A}_i + \omega + v_i) \\
\cos\mathfrak{B}_i &= \sin a_i \cos(\mathbf{A}_i + \omega + v_i) \\
\cos\mathfrak{F}_i &= \sin b_i \sin(\mathbf{B}_i + \omega + v_i) \\
\cos\mathfrak{G}_i &= \sin b_i \cos(\mathbf{B}_i + \omega + v_i) \\
\cos\mathfrak{L}_i &= \sin c_i \sin(\mathbf{C}_i + \omega + v_i) \\
\cos\mathfrak{M}_i &= \sin c_i \cos(\mathbf{C}_i + \omega + v_i)
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Seite 441 aufgestellten Ausdrücke für  $\sin a_i \sin \mathbf{A}_i, \dots$  folgendermaßen:

$$r_1 (\cos \mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_1)) = r_1 \sin a_i \sin(\mathbf{A}_i + \omega + v_1) \\ = r_1 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - \mathcal{Q}) \cos(\omega + v_1) + r_1 (\sin \delta_i \sin i + \cos \delta_i \cos i \sin(\alpha_i - \mathcal{Q})) \sin(\omega + v_1).$$

Führt man hier die heliozentrischen Koordinaten  $a_i$  und  $d_i$  durch

$$\cos(\omega + v_1) = \cos d_1 \cos(a_1 - \mathcal{Q}) \\ \sin(\omega + v_1) = \frac{\sin d_1}{\sin i} = \frac{\cos d_1 \sin(a_1 - \mathcal{Q})}{\cos i}$$

ein, so kommt:

$$r_1 (\cos \mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_1)) = r_1 (\cos d_1 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - a_1) + \sin d_1 \sin \delta_i)$$

und ähnlich die übrigen. Alles zusammengestellt gibt:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_1)) &= r_1 (\cos d_1 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - a_1) + \sin d_1 \sin \delta_i) = f_1^2 \\ r_1 (\cos \mathfrak{F}_i \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{G}_i \sin(v_i - v_1)) &= -r_1 \cos d_1 \sin(\alpha_i - a_1) = f_1^a \\ r_1 (\cos \mathfrak{L}_i \cos(v_i - v_1) - \cos \mathfrak{M}_i \sin(v_i - v_1)) &= -r_1 (\cos d_1 \sin \delta_i \cos(\alpha_i - a_1) - \sin d_1 \cos \delta_i) = f_1^b \\ r_3 (\cos \mathfrak{A}_i \cos(v_i - v_3) - \cos \mathfrak{B}_i \sin(v_i - v_3)) &= r_3 (\cos d_3 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - a_3) + \sin d_3 \sin \delta_i) = f_3^2 \\ r_3 (\cos \mathfrak{F}_i \cos(v_i - v_3) - \cos \mathfrak{G}_i \sin(v_i - v_3)) &= -r_3 \cos d_3 \sin(\alpha_i - a_3) = f_3^a \\ r_3 (\cos \mathfrak{L}_i \cos(v_i - v_3) - \cos \mathfrak{M}_i \sin(v_i - v_3)) &= -r_3 (\cos d_3 \sin \delta_i \cos(\alpha_i - a_3) - \sin d_3 \cos \delta_i) = f_3^b. \end{aligned} \quad 8)$$

**149. Die Differenziale der Verhältnisse der Dreiecksflächen.** Gelingt es jetzt noch für  $q_1$ ,  $q_3$ ,  $dq_1$ ,  $dq_3$  geeignete Ausdrücke aufzustellen, so lösen die Gleichungen 6) in Verbindung mit 7) und 8) das Problem. Dabei darf man nicht die geometrischen Werte einführen, da sonst die Gl. 5) Identitäten werden, sondern man muß dynamische aus den Gesetzen der Planetenbewegung folgende Ausdrücke heranziehen. Für  $q_1$  und  $q_3$  selbst wird man entweder nehmen

$$q_1 = \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_{13}}{y_{13}} \cdot \frac{\tau_{13}}{\tau_{13}}, \quad q_3 = \frac{[r_1 r_i]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_{13}}{y_{1i}} \cdot \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}, \quad 9)$$

wo die  $y$  die Verhältnisse: Sektor durch Dreieck, die  $\tau$  die mit  $k$  multiplizierten Zwischenzeiten sind und zwar mit ihren Zeichen, so daß z. B.  $\tau_{13} = (t_3 - t_1)k = -\tau_{31} = -(t_1 - t_3)k$  bedeutet, und die  $y$  je nach der Größe der Zwischenzeiten durch das Gaußsche, Enckesche oder Hansenschen Verfahren ermitteln (Nr. 49, 57); oder man benutzt die Reihenentwicklungen (Nr. 52):

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\tau_{13}}{\tau_{13}} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_{13}^2 - \tau_{13}^2}{r_i^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_{1i}(\tau_{1i}^2 + \tau_{13}\tau_{1i} - \tau_{13}^2)}{r_i^4} \frac{\sin \varphi \sin v_i}{Vp} + \dots \right) \\ q_3 &= \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_{13}^2 - \tau_{1i}^2}{r_i^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_{13}(\tau_{13}^2 + \tau_{13}\tau_{1i} - \tau_{1i}^2)}{r_i^4} \frac{\sin \varphi \sin v_i}{Vp} + \dots \right) \end{aligned} \quad 10)$$

oder endlich man bedient sich der Gibbsschen Formeln (Nr. 53)

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{A_1 \left( 1 + \frac{B_1}{r_i^3} \right)}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}}, & q_3 &= \frac{A_3 \left( 1 + \frac{B_3}{r_i^3} \right)}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} \\ A_1 &= \frac{\tau_{13}}{\tau_{1i} + \tau_{13}} = \frac{\tau_{13}}{\tau_{13}}, & A_3 &= \frac{\tau_{1i}}{\tau_{1i} + \tau_{13}} = \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}} \end{aligned} \quad 11)$$

$$B_1 = \frac{1}{12} (-\tau_{13}^2 + \tau_{1i}\tau_{13} + \tau_{1i}^2), \quad B_i = \frac{1}{12} (\tau_{13}^2 + 3\tau_{1i}\tau_{13} + \tau_{1i}^2), \quad B_3 = \frac{1}{12} (\tau_{13}^2 + \tau_{1i}\tau_{13} - \tau_{1i}^2)$$

beziehungsweise für die Rechnung bequemer:

$$B_1 = \frac{1}{12}(x_{1i}x_{i3} + x_{13}(x_{4i} - x_{i3})), \quad B_i = \frac{1}{12}(x_{1i}x_{i3} + x_{13}^2), \quad B_3 = \frac{1}{12}(x_{4i}x_{i3} - x_{13}(x_{1i} - x_{i3})).$$

Die Differenziale  $dq_1$  und  $dq_3$  sind im Verhältnis zu den Änderungen der Elemente oder der Koordinaten klein, Unsicherheiten in ihrer Bestimmung fallen also nicht stark ins Gewicht.

Sind die Zwischenzeiten klein, so geht man am einfachsten von den Gl. 9) aus, indem man für die  $y$  die Enckesche Reihenentwicklung (Nr. 49) benutzt (Tietjen, Berl. Jahrb. 1878). Man erhält streng durch logarithmische Differenziation:

$$\frac{dq_1}{q_1} = d \log y_{13} - d \log y_{i3}$$

$$\frac{dq_3}{q_3} = d \log y_{13} - d \log y_{4i}.$$

Da nun nach Nr. 49

$$\log y_{13} = \frac{4}{3} \frac{x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^3} + \dots$$

und die kleinen höheren Glieder als konstant betrachtet werden können, so folgt:

$$d \log y_{13} = -4 \frac{x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} (dr_1 + dr_3)$$

und ähnlich für die übrigen. Damit kommt:

$$\frac{dq_1}{q_1} = -4 \frac{x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} (dr_1 + dr_3) + 4 \frac{x_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4} (dr_i + dr_3)$$

$$\frac{dq_3}{q_3} = -4 \frac{x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} (dr_1 + dr_3) + 4 \frac{x_{4i}^2}{(r_1 + r_i)^4} (dr_1 + dr_i),$$

woraus nun noch  $dr_i$  zu beseitigen ist. Nach Gl. 2) in Nr. 54 hat man mit Vernachlässigung von Gliedern 3. Ordnung:

$$x_{i3}r_1 + x_{1i}r_3 = x_{13}r_i,$$

also:

$$dr_i = \frac{x_{i3}}{x_{13}} dr_1 + \frac{x_{4i}}{x_{13}} dr_3.$$

Dies oben eingetragen führt auf:

$$\frac{dq_1}{q_1} = \left( -\frac{4x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4x_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4} \right) dr_1 + \left( -\frac{4x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4x_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4} \left( 1 + \frac{x_{1i}}{x_{13}} \right) \right) dr_3$$

$$\frac{dq_3}{q_3} = \left( -\frac{4x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4x_{4i}^2}{(r_1 + r_i)^4} \left( 1 + \frac{x_{i3}}{x_{13}} \right) \right) dr_1 + \left( -\frac{4x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4x_{4i}^2}{(r_1 + r_i)^4} \right) dr_3$$

oder

$$dq_1 = a_{11} dr_1 + a_{13} dr_3$$

$$dq_3 = a_{31} dr_1 + a_{33} dr_3$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \frac{4x_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} &= \sigma_1, & a_{11} &= \left( -\sigma_1 + \frac{x_{i3}}{x_{13}} \sigma_1 \right) q_1 \\ \frac{4x_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4} &= \sigma_i, & a_{13} &= \left( -\sigma_i + \left( 1 + \frac{x_{1i}}{x_{13}} \right) \sigma_i \right) q_1 \\ \frac{4x_{4i}^2}{(r_1 + r_i)^4} &= \sigma_3, & a_{31} &= \left( -\sigma_i + \left( 1 + \frac{x_{i3}}{x_{13}} \right) \sigma_3 \right) q_3 \\ & & a_{33} &= \left( -\sigma_i + \frac{x_{4i}}{x_{13}} \sigma_3 \right) q_3. \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Diese Formeln sind hinreichend für Zwischenzeiten, wie sie etwa bei *einer* Erscheinung eines kleinen Planeten vorkommen; für länger beobachtete Kometen und Planeten muß man genauere zu erlangen suchen. Aus den Gibbsschen Formeln 11) folgt:

$$q_1 q_3 = A_1 A_3 \frac{\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)}{\left(1 - \frac{B_i}{r_i^3}\right)^2}$$

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{A_1}{A_3} \frac{1 + \frac{B_1}{r_1^3}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}}.$$

Wird dies logarithmisch differenziert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{q_1} + \frac{dq_3}{q_3} &= -3 \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} r_1 dr_1 - 3 \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} r_3 dr_3 - 6 \frac{\frac{B_i}{r_i^5}}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_i dr_i \\ \frac{dq_1}{q_1} - \frac{dq_3}{q_3} &= -3 \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} r_1 dr_1 + 3 \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} r_3 dr_3. \end{aligned}$$

Um  $r_i dr_i$  zu bilden, haben wir zwischen parabolischen und elliptischen Bahnen zu unterscheiden. Im Fall der Parabel ergibt die Differenziation der Gl. 2) in Nr. 59:

$$A_1 r_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) dr_1 + A_3 r_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) dr_3 - r_i \left(1 - \frac{B_i}{r_i^3}\right) dr_i = 0$$

oder:

$$r_i dr_i = q_1 r_1 dr_1 + q_3 r_3 dr_3,$$

eine Relation, die bis auf Größen vierter Ordnung inklusive genau ist. Wird dies in die erste obiger Gleichungen eingetragen, so wird sie:

$$\frac{dq_1}{q_1} + \frac{dq_3}{q_3} = -3 \left( \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_1}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} \right) r_1 dr_1 - 3 \left( \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_3}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} \right) r_3 dr_3$$

und in Verbindung mit der zweiten Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{q_1} &= -3 \left( \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_1}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} \right) r_1 dr_1 - 3 \cdot \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_3}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_3 dr_3 \\ \frac{dq_3}{q_3} &= -3 \cdot \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_1}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_1 dr_1 - 3 \left( \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_3}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} \right) r_3 dr_3. \end{aligned}$$



Setzt man die leicht zu berechnenden Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{r_1^2} \frac{\frac{B_1}{r_1^3}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} &= a_1, & \frac{3}{r_3^2} \frac{\frac{B_3}{r_3^3}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} &= a_3, & \frac{3}{r_i^2} \frac{\frac{B_i}{r_i^3}}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} &= a_i \end{aligned} \right\}$$

so ist einfach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{q_1} &= -(a_1 + a_i q_1) r_1 dr_1 - a_i q_3 r_3 dr_3 \\ \frac{dq_3}{q_3} &= -a_i q_1 r_1 dr_1 - (a_3 + a_i q_3) r_3 dr_3 \end{aligned} \right\} \text{13) [Parabel]}$$

Setzt man noch

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(a_1 + a_i q_1) r_1 q_1 \\ a_{13} &= -a_i q_1 q_3 r_3 \\ a_{31} &= -a_i q_1 q_3 r_1 \\ a_{33} &= -(a_3 + a_i q_3) r_3 q_3, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} dq_1 &= a_{11} dr_1 + a_{13} dr_3 \\ dq_3 &= a_{31} dr_1 + a_{33} dr_3. \end{aligned}$$

Im Falle der Ellipse führt der bisher eingeschlagene Weg nicht zum Ziel; man kann aber in folgender Weise vorgehen. Ganz ähnlich, wie die Gl. 26) (Seite 183) leitet man folgende beide ab:

$$\begin{aligned} &\left( r_{13}^2 + r_{13} r_{1i} + r_{1i}^2 - \frac{r_{13}^2 r_{1i}^2}{6 r_1^3} \right) q_1 - \left( r_{i3}^2 + 3 r_{i3} r_{1i} + r_{1i}^2 + \frac{r_{13}^2 r_{i3}^2}{6 r_1^3} \right) q_3 = r_{i3}^2 + r_{1i} r_{i3} - r_{1i}^2 - \frac{r_{i3}^2 r_{1i}^2}{6 r_1^3} \\ & - \left( r_{i3}^2 + 3 r_{i3} r_{1i} + r_{1i}^2 + \frac{r_{13}^2 r_{1i}^2}{6 r_3^3} \right) q_1 + \left( r_{i3}^2 + r_{i3} r_{13} + r_{13}^2 - \frac{r_{13}^2 r_{i3}^2}{6 r_3^3} \right) q_3 = r_{1i}^2 + r_{1i} r_{i3} - r_{i3}^2 - \frac{r_{i3}^2 r_{1i}^2}{6 r_3^3}. \end{aligned}$$

Die halbe Summe bzw. Differenz derselben ergibt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3} = \sigma, \quad \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_3^3} = \delta$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{r_{1i}}{r_{i3}} \left( 1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma \right) q_1 + \frac{r_{i3}}{r_{1i}} \left( 1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma \right) q_3 &= 1 - \frac{r_{1i} r_{i3}}{12} \sigma \\ \left( 1 + \frac{r_{1i}}{r_{13}} - \frac{r_{1i}^2}{12} \delta \right) q_1 - \left( 1 + \frac{r_{i3}}{r_{13}} + \frac{r_{i3}^2}{12} \delta \right) q_3 &= \frac{r_{i3} - r_{1i}}{r_{13}} - \frac{r_{i3}^2 r_{1i}^2}{12 r_{13}^2} \delta. \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Durch Differenziation folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{r_{1i}}{r_{i3}} \left( 1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma \right) dq_1 + \frac{r_{i3}}{r_{1i}} \left( 1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma \right) dq_3 &= \frac{1}{12} r_{13}^2 \left( \frac{r_{1i}}{r_{i3}} q_1 + \frac{r_{i3}}{r_{1i}} q_3 - \frac{r_{1i} r_{i3}}{r_{13}^2} \right) d\sigma \\ \left( 1 + \frac{r_{1i}}{r_{13}} - \frac{r_{1i}^2}{12} \delta \right) dq_1 - \left( 1 + \frac{r_{i3}}{r_{13}} + \frac{r_{i3}^2}{12} \delta \right) dq_3 &= \frac{1}{12} r_{1i} r_{i3} \left( \frac{r_{1i}}{r_{i3}} q_1 + \frac{r_{i3}}{r_{1i}} q_3 - \frac{r_{i3} r_{1i}}{r_{13}^2} \right) d\delta. \end{aligned}$$

Der rechts auftretende gemeinsame Faktor wird aber nach (a)

$$\frac{r_{1i}}{r_{i3}} q_1 + \frac{r_{i3}}{r_{1i}} q_3 - \frac{r_{1i} r_{i3}}{r_{13}^2} = \frac{r_{1i}^2 + r_{1i} r_{i3} + r_{i3}^2}{r_{13}^2 \left( 1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma \right)} = \frac{1 - \frac{r_{1i} r_{i3}}{r_{13}^2}}{1 - \frac{r_{13}^2}{12} \sigma}$$

und die Determinante der beiden Gleichungen ist:

$$-\left(1 - \frac{x_{13}^2}{12}\sigma\right) \frac{x_{1i}^2 + x_{4i}x_{13} + x_{13}^2}{x_{1i}x_{13}} = \left(1 - \frac{x_{13}^2}{12}\sigma\right) \left(1 - \frac{x_{13}^2}{x_{1i}x_{13}}\right),$$

so daß die Elimination von  $dq_1$  und  $dq_3$  leicht ergibt:

$$\begin{aligned} -\frac{\left(1 - \frac{x_{13}^2}{12}\sigma\right)^2}{x_{1i}x_{13}} dq_1 &= \left[1 + \frac{x_{13}}{x_{13}} + \left(\frac{x_{13}}{x_{13}}\right)^2 - \frac{x_{13}^2}{6r_3^3}\right] \frac{dr_1}{4r_1^4} + \left[1 + \frac{x_{13}}{x_{13}} - \left(\frac{x_{13}}{x_{13}}\right)^2 + \frac{x_{13}^2}{6r_4^3}\right] \frac{dr_3}{4r_3^4} \\ -\frac{\left(1 - \frac{x_{13}^2}{12}\sigma\right)^2}{x_{1i}x_{13}} dq_3 &= \left[1 + \frac{x_{1i}}{x_{13}} - \left(\frac{x_{1i}}{x_{13}}\right)^2 + \frac{x_{1i}^2}{6r_3^3}\right] \frac{dr_1}{4r_1^4} + \left[1 + \frac{x_{1i}}{x_{13}} + \left(\frac{x_{1i}}{x_{13}}\right)^2 - \frac{x_{1i}^2}{6r_1^3}\right] \frac{dr_3}{4r_3^4}. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3} &= \sigma \\ \frac{x_{1i}x_{13}}{\left(1 - \frac{x_{13}^2}{12}\sigma\right)^2} &= \mu, \quad \frac{\mu}{4r_1^4} = \mu_1, \quad \frac{\mu}{4r_3^4} = \mu_3 \\ \frac{x_{13}}{x_{13}} &= A_1, \quad \frac{x_{1i}}{x_{13}} = A_3 \\ 1 - \frac{x_{13}^2}{6r_1^3} &= \nu_1, \quad 1 - \frac{x_{13}^2}{6r_3^3} = \nu_3 \end{aligned} \right\} 14) \text{ [Ellipse]}$$

so hat man kurz:

$$\begin{aligned} dq_1 &= -\mu_1(1 + A_1 + A_1^2\nu_3)dr_1 - \mu_3(1 + A_1 - A_1^2\nu_1)dr_3 \\ dq_3 &= -\mu_1(1 + A_3 - A_3^2\nu_3)dr_1 - \mu_3(1 + A_3 + A_3^2\nu_1)dr_3 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} dq_1 &= a_{11}dr_1 + a_{13}dr_3 \\ dq_3 &= a_{31}dr_1 + a_{33}dr_3. \end{aligned}$$

**150. Zusammenstellung der Formeln.** Nachdem man für kleine Zwischenzeiten aus 12), für größere aus 13) bez. 14) die Koeffizienten  $a_{11}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{33}$  bestimmt hat, folgt weiter nach 2)

$$\begin{aligned} dq_1 &= a_{11}(\cos \mathfrak{A}_1 d\varrho_1 + \cos \mathfrak{F}_1 \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 + \cos \mathfrak{L}_1 \varrho_1 d\delta_1) + a_{13}(\cos \mathfrak{A}_3 d\varrho_3 + \cos \mathfrak{F}_3 \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 + \cos \mathfrak{L}_3 \varrho_3 d\delta_3) \\ dq_3 &= a_{31}(\cos \mathfrak{A}_1 d\varrho_1 + \cos \mathfrak{F}_1 \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 + \cos \mathfrak{L}_1 \varrho_1 d\delta_1) + a_{33}(\cos \mathfrak{A}_3 d\varrho_3 + \cos \mathfrak{F}_3 \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 + \cos \mathfrak{L}_3 \varrho_3 d\delta_3) \end{aligned}$$

und wenn dies in 6) eingetragen wird, folgende Endformeln:

$$\begin{aligned} f_1^q a_{11} + f_3^q a_{31} &= m_1^q, & f_1^q a_{13} + f_3^q a_{33} &= m_3^q \\ f_1^a a_{11} + f_3^a a_{31} &= m_1^a, & f_1^a a_{13} + f_3^a a_{33} &= m_3^a \\ f_1^\delta a_{11} + f_3^\delta a_{31} &= m_1^\delta, & f_1^\delta a_{13} + f_3^\delta a_{33} &= m_3^\delta \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} d\varrho_i &= (q_1 \cos(A_i A_1) + m_1^q \cos \mathfrak{A}_1) d\varrho_1 & + (q_3 \cos(A_i A_3) + m_3^q \cos \mathfrak{A}_3) d\varrho_3 \\ &+ (q_1 \cos(A_i B_1) + m_1^q \cos \mathfrak{F}_1) \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 & + (q_3 \cos(A_i B_3) + m_3^q \cos \mathfrak{F}_3) \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 \\ &+ (q_1 \cos(A_i C_1) + m_1^q \cos \mathfrak{L}_1) \varrho_1 d\delta_1 & + (q_3 \cos(A_i C_3) + m_3^q \cos \mathfrak{L}_3) \varrho_3 d\delta_3 \\ \varrho_i \cos \delta_i d\alpha_i &= (q_1 \cos(B_i A_1) + m_1^a \cos \mathfrak{A}_1) d\varrho_1 & + (q_3 \cos(B_i A_3) + m_3^a \cos \mathfrak{A}_3) d\varrho_3 \\ &+ (q_1 \cos(B_i B_1) + m_1^a \cos \mathfrak{F}_1) \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 & + (q_3 \cos(B_i B_3) + m_3^a \cos \mathfrak{F}_3) \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 \\ &+ (q_1 \cos(B_i C_1) + m_1^a \cos \mathfrak{L}_1) \varrho_1 d\delta_1 & + (q_3 \cos(B_i C_3) + m_3^a \cos \mathfrak{L}_3) \varrho_3 d\delta_3 \\ \varrho_i d\delta_i &= (q_1 \cos(C_i A_1) + m_1^\delta \cos \mathfrak{A}_1) d\varrho_1 & + (q_3 \cos(C_i A_3) + m_3^\delta \cos \mathfrak{A}_3) d\varrho_3 \\ &+ (q_1 \cos(C_i B_1) + m_1^\delta \cos \mathfrak{F}_1) \varrho_1 \cos \delta_1 d\alpha_1 & + (q_3 \cos(C_i B_3) + m_3^\delta \cos \mathfrak{F}_3) \varrho_3 \cos \delta_3 d\alpha_3 \\ &+ (q_1 \cos(C_i C_1) + m_1^\delta \cos \mathfrak{L}_1) \varrho_1 d\delta_1 & + (q_3 \cos(C_i C_3) + m_3^\delta \cos \mathfrak{L}_3) \varrho_3 d\delta_3. \end{aligned} \right\} 15)$$

Es ist noch die Berechnung der  $\cos \mathfrak{U}_i$ , ... zu zeigen. Aus

$$\cos \mathfrak{U}_i = \sin a_i \sin (\mathbf{A}_i + \omega + v_i)$$

in Verbindung mit den  $a_i$  und  $\mathbf{A}_i$  bestimmenden Formeln Seite 441 und nach Einführung der heliozentrischen Koordinaten  $a_i, d_i$  durch die Formeln Seite 466 folgt:

$$\begin{aligned} \cos \mathfrak{U}_i &= \cos(\alpha_i - \varrho) \cos \delta_i \cos(\omega + v_i) + (\sin \delta_i \sin i + \cos \delta_i \cos i \sin(\alpha_i - \varrho)) \sin(\omega + v_i) \\ &= \cos(\alpha_i - \varrho) \cos \delta_i \cos d_i \cos(\alpha_i - \varrho) + \sin \delta_i \sin d_i + \cos \delta_i \cos d_i \sin(\alpha_i - \varrho) \sin(\alpha_i - \varrho) \\ &= \sin \delta_i \sin d_i + \cos \delta_i \cos d_i \cos(\alpha_i - a_i). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die anderen und alles zusammengestellt gibt:

$$\left. \begin{aligned} \cos \mathfrak{U}_1 &= \cos \delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_1 - a_1) + \sin \delta_1 \sin d_1 \\ \cos \mathfrak{F}_1 &= -\cos d_1 \sin(\alpha_1 - a_1) \\ \cos \mathfrak{Q}_1 &= -(\cos d_1 \sin \delta_1 \cos(\alpha_1 - a_1) - \sin d_1 \cos \delta_1) \\ \cos \mathfrak{U}_3 &= \cos \delta_3 \cos d_3 \cos(\alpha_3 - a_3) + \sin \delta_3 \sin d_3 \\ \cos \mathfrak{F}_3 &= -\cos d_3 \sin(\alpha_3 - a_3) \\ \cos \mathfrak{Q}_3 &= -(\cos d_3 \sin \delta_3 \cos(\alpha_3 - a_3) - \sin d_3 \cos \delta_3) \end{aligned} \right\} \quad 16)$$

Wie schon oben erwähnt, trägt die Benutzung eines Elementensystems, welches den Beobachtungen 1 und 3 streng genügt, wesentlich zur Vereinfachung der Formeln bei. Da man also in praxi meistens diesen Fall herbeiführen wird, wollen wir für ihn die Formeln besonders zusammenstellen:

$$\left. \begin{aligned} q_i \cos \delta_i d\alpha_i &= (q_1 \cos(B_i A_1) + m_1^\alpha \cos \mathfrak{U}_1) d\varrho_1 + (q_3 \cos(B_i A_3) + m_3^\alpha \cos \mathfrak{U}_3) d\varrho_3 \\ q_i d\delta_i &= (q_1 \cos(C_i A_1) + m_1^\delta \cos \mathfrak{U}_1) d\varrho_1 + (q_3 \cos(C_i A_3) + m_3^\delta \cos \mathfrak{U}_3) d\varrho_3 \\ \cos(B_i A_1) &= -\cos \delta_1 \sin(\alpha_i - a_1) \\ \cos(C_i A_1) &= \cos \delta_1 \sin d_1 - \sin \delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_i - a_1) \\ \cos(B_i A_3) &= -\cos \delta_3 \sin(\alpha_i - a_3) \\ \cos(C_i A_3) &= \cos \delta_3 \sin d_3 - \sin \delta_3 \cos d_3 \cos(\alpha_i - a_3) \\ f_1^\alpha &= -r_1 \cos d_1 \sin(\alpha_i - a_1) \\ f_1^\delta &= r_1 (\cos \delta_1 \sin d_1 - \sin \delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_i - a_1)) \\ f_3^\alpha &= -r_3 \cos d_3 \sin(\alpha_i - a_3) \\ f_3^\delta &= r_3 (\cos \delta_3 \sin d_3 - \sin \delta_3 \cos d_3 \cos(\alpha_i - a_3)) \\ dq_1 &= a_{11} dr_1 + a_{13} dr_3 \\ dq_3 &= a_{31} dr_1 + a_{33} dr_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &a_{11} \dots \text{aus 12) oder 13) bzw. 14)} \\ &m_1^\alpha = f_1^\alpha a_{11} + f_3^\alpha a_{31} \\ &m_1^\delta = f_1^\delta a_{11} + f_3^\delta a_{31} \\ &m_3^\alpha = f_1^\alpha a_{13} + f_3^\alpha a_{33} \\ &m_3^\delta = f_1^\delta a_{13} + f_3^\delta a_{33} \\ &\cos \mathfrak{U}_1 = \sin \delta_1 \sin d_1 + \cos \delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_1 - a_1) \\ &\cos \mathfrak{U}_3 = \sin \delta_3 \sin d_3 + \cos \delta_3 \cos d_3 \cos(\alpha_3 - a_3). \end{aligned} \quad 17)$$

Gleichungspaare 17) kann man so viele aufstellen, als man neben den Beobachtungen 1 und 3 noch Beobachtungen  $i$  mit dem aus 1 und 3 bestimmten Elementensystem verglichen hat. Aus der Gesamtheit aller ermittelt man  $d\varrho_1$  und  $d\varrho_3$  und dann schließlich mit

$$\alpha_i, \delta_i, \varrho_1 + d\varrho_1, \quad \alpha_3, \delta_3, \varrho_3 + d\varrho_3$$

die verbesserten Elemente. Es kann sich manchmal empfehlen, die verbesserten Elemente aus den Örtern 1 und  $i$  zu berechnen, wozu man  $dq_i$  gebraucht. Man hat hierfür:

$$\begin{aligned} dq_i &= (q_1 \cos(A_i A_1) + m_1^o \cos \mathfrak{A}_1) dq_1 + (q_3 \cos(A_i A_3) + m_3^o \cos \mathfrak{A}_3) dq_3 \\ f_1^o &= r_1 (\cos d_1 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - \alpha_1) + \sin d_1 \sin \delta_i) \\ f_3^o &= r_3 (\cos d_3 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - \alpha_3) + \sin d_3 \sin \delta_i) \\ m_1^o &= f_1^o a_{11} + f_3^o a_{31} \\ m_3^o &= f_1^o a_{13} + f_3^o a_{33}, \end{aligned}$$

Es sei noch hervorgehoben, daß die obigen Formeln für jedes Koordinatensystem Gültigkeit haben, daß man also unter  $\alpha$ ,  $\delta$ , ... sowohl Rektaszensionen, Deklinationen, ... als Längen, Breiten, ... verstehen kann.

**151. Beispiel für die Variation der Distanzen.** Zur Erläuterung der Formeln 17) wählen wir die Verbesserung folgenden Elementensystems von (434) *Hungaria*

$$t_0 = 1898 \text{ Sept. } 15.5 \text{ m. Z. Berlin}$$

$$M_0 = 49^\circ 51' 23''.8$$

$$\omega = 122 \ 59 \ 34.7$$

$$\Omega = 174 \ 36 \ 33.0$$

$$i = 22 \ 30 \ 33.5$$

$$q = 4 \ 14 \ 48.9$$

$$\mu = 1308''.445$$

$$\log a = 0.28 \ 8834$$

welches aus 3 Beobachtungen von 1898 Sept. 15.5, Okt. 10.5 und Nov. 12.5 hervorgegangen ist, diese Örter vollständig darstellt, von einer späteren Beobachtung von 1899 Jan. 6.3 aber folgende Abweichungen

$$\cos \delta_i d\alpha_i = +12''.4, \quad d\delta_i = -3''.0 \quad (\text{B.} - \text{R.})$$

aufweist. Mit  $\alpha$  und  $\delta$  sind hier Längen und Breiten bezeichnet; es ist überhaupt das System der Ekliptik zugrunde gelegt, da dann aus der Bahnrechnung eine Anzahl von Größen direkt herübergenommen werden kann. Diese Größen seien zuerst zusammengestellt, alles auf Ekliptik und Äquinoktium 1900.0 bezogen

|                                  | $\alpha$               | $\sin \delta$         | $\cos \delta$ | $a$                    | $\sin d$              | $\cos d$ | $q$      | $r$      |
|----------------------------------|------------------------|-----------------------|---------------|------------------------|-----------------------|----------|----------|----------|
| $t_1 = 1898 \text{ Sept. } 15.5$ | $355^\circ 56' 11''.0$ | 7.593062              | 9.999997      | $354^\circ 24' 36''.8$ | 7.255408              | 9.999999 | 9.931500 | 0.269154 |
| $t_3 = 1898 \text{ Nov. } 12.5$  | $347 \ 22 \ 49.0$      | 9.342122 <sub>n</sub> | 9.989243      | $15 \ 17 \ 21.2$       | 9.159796 <sub>n</sub> | 9.995420 | 0.098122 | 0.280448 |
| $t_i = 1898 \text{ Dez. } 37.3$  | $4 \ 8 \ 59.7$         | 9.423061 <sub>n</sub> | 9.984201      | —                      | —                     | —        | 0.279564 | 0.291673 |

Für die Zeit  $t_i$  sind hier die mit den Elementen gerechneten Koordinaten angegeben, während die Beobachtung geliefert hatte:

$$\alpha = 4^\circ 9' 12''.6, \quad \delta = -15^\circ 21' 39''.8.$$

Mit

$$\begin{aligned} r_{13} &= 9.999009 \\ r_{1i} &= 0.287890 \\ r_{i3} &= 9.974362_n \end{aligned}$$

findet man nach den Gibbsschen Formeln 11)

|       |                       |       |                       |       |                       |
|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|
| $B_1$ | 8.940904              | $A_1$ | 9.975353 <sub>n</sub> | $q_1$ | 9.977222 <sub>n</sub> |
| $B_3$ | 9.593439 <sub>n</sub> | $A_3$ | 0.288881              | $q_3$ | 0.259636              |
| $B_i$ | 8.841837 <sub>n</sub> |       |                       |       |                       |

und dann nach 14)

|                       |                     |                       |                     |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| $a_{11}$              | 8.5723              | $a_{31}$              | 8.4789 <sub>n</sub> |
| $a_{13}$              | 8.4709 <sub>n</sub> | $a_{33}$              | 9.3815              |
| Ferner:               |                     |                       |                     |
| $f_1^a$               | 9.4975 <sub>n</sub> | $f_3^a$               | 9.5619              |
| $f_1^b$               | 9.6888              | $f_3^b$               | 9.3518              |
| $m_1^a$               | 8.3565 <sub>n</sub> | $m_3^a$               | 8.9871              |
| $m_1^b$               | 8.0596              | $m_3^b$               | 8.5985              |
| $\cos \mathfrak{A}_1$ | 9.9998              | $\cos \mathfrak{A}_3$ | 9.9468              |
| $\cos(B_i A_1)$       | 9.1549 <sub>n</sub> | $\cos(B_i A_3)$       | 9.4494 <sub>n</sub> |
| $\cos(C_i A_1)$       | 9.4564              | $\cos(C_i A_3)$       | 8.5483              |

und schließlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} [8.7729] d\varrho_1 + [9.3497_n] d\varrho_3 &= [5.7790] \\ [9.1353_n] d\varrho_1 + [8.7177] d\varrho_3 &= [5.1627_n], \end{aligned}$$

worin die rechten Seiten in Teilen des Radius angesetzt sind. Die Auflösung ergibt:

$$d\varrho_1 = [4.624], \quad d\varrho_3 = [6.4275_n]$$

oder

$$d \log \varrho_1 = +0.000002, \quad d \log \varrho_3 = -0.000093$$

Mit den Distanzen  $\log \varrho_1 = 9.931502$ ,  $\log \varrho_3 = 0.098029$  erhält man die Elemente:

|               |                 |
|---------------|-----------------|
| $t_0$         | 1898 Sept. 15.5 |
| $M$           | 48° 43' 44".2   |
| $\omega$      | 123 9 32.3      |
| $\mathcal{Q}$ | 174 39 33.3     |
| $i$           | 22 30 14.1      |
| $\varphi$     | 4 13 52.9       |
| $\mu$         | 1308".470       |
| $\log a$      | 0.28 8828       |

welche für Dez. 37.3 ergeben:

$$\alpha_i \quad 4^\circ 9' 13''.0, \quad \delta_i \quad -15^\circ 21' 39''.4 \quad \log \varrho_i \quad 0.279440$$

so daß jetzt mit der Beobachtung eine für sechsstellige Rechnung mehr als genügende Übereinstimmung erreicht ist.