universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Bahnbestimmung der Himmelskörper

Bauschinger, Julius

Leipzig, 1928

Vierter Teil. Die Methoden der ersten Bahnbestimmung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6413

Vierter Teil.

Die Methoden der ersten Bahnbestimmung.

Abschnitt XIX.

Die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen.

81. Feststellung des Problems. Nachdem wir in den vorhergehenden Abschnitten die wahren und die scheinbaren Bahnen der um die Sonne laufenden Himmelskörper für sich behandelt haben, wenden wir uns jetzt zu unserer Hauptaufgabe, aus den durch direkte Beobachtungen bekannt gewordenen scheinbaren Bahnen die wahren abzuleiten. Dies ist das eigentliche Problem der Bahnbestimmung, das aber sogleich näher präzisiert werden kann. Wir wissen, daß ein Kegelschnitt und die Bewegung in ihm durch sechs Stücke, die Bahnelemente, bestimmt ist (Nr. 71), und daß an die Bewegung die zwei Bedingungen geknüpft sind, daß die Flächengeschwindigkeit konstant und von ganz bestimmter, von den Elementen abhängiger Größe sei. Wir werden also, um die nötige Anzahl von Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten bilden zu können, mindestens acht Beobachtungsdaten zur Verfügung haben müssen. Diese werden durch drei vollständige Beobachtungen von Richtungen oder durch drei Punkte der scheinbaren Bahn mit ihren Zwischenzeiten geboten, da jede derselben zwei unabhängige, sphärische Koordinaten liefert. Das zu lösende Problem lautet also: *Aus drei von der Erde aus zu bestimmten Zeiten angestellten Richtungsbestimmungen eines Gestirnes seine wahre Bahn um die Sonne abzuleiten, unter den Voraussetzungen, daß diese ein Kegelschnitt mit dem einen Brennpunkt in der Sonne ist, und die Bewegung in ihm nach dem zweiten und dritten Keplerschen Gesetz erfolgt.*

Daß drei geozentrische Beobachtungen mit den zugehörigen beiden Zwischenzeiten zur Lösung des Problems ausreichen, aber auch nichts Überflüssiges enthalten, überlegt man leicht wie folgt: Die drei Beobachtungen legen drei von bestimmten Punkten, den Lagen der Erde, ausgehende Gerade in ihren Richtungen fest. Eine durch die Sonne gelegte, beliebige Ebene trifft die Geraden in drei Punkten. Durch diese kann im allgemeinen nur ein Kegelschnitt gelegt werden, dessen einer Brennpunkt die Sonne ist, und dessen Elemente also völlig bestimmt sind. Durch die Elemente kann man, wenn der bewegte Körper den Keplerschen Gesetzen folgen soll, die Zeiten berechnen, die er braucht, um vom ersten Punkt zum zweiten und vom

zweiten zum dritten zu gelangen. Nur wenn diese mit den beobachteten Zwischenzeiten übereinstimmen, hat man jene von den unendlich vielen Ebenen durch die Sonne getroffen, welche allen Bedingungen des Problems genügt. Umgekehrt werden die beiden Bedingungen von der Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Zwischenzeiten zur Fixierung der beiden Elemente dienen können, durch welche die Lage einer durch die Sonne gehenden Ebene festgelegt wird.

Diese Analyse weist den Weg, den die Lösung des Problems fast notwendig einschlagen muß; denn man sieht, daß alles auf die Bestimmung der genannten Ebene ankommt, und es bleibt nur die wichtige Entscheidung zu treffen, durch welche Stücke man die Ebene bestimmen, d. h. welche Unbekannte man in das Problem einführen will. Am nächsten bieten sich dar Knoten und Neigung oder geeignete Funktionen derselben, z. B.:

$$h = \operatorname{tg} i \cos \Omega , \qquad g = \operatorname{tg} i \sin \Omega ,$$

weil hierdurch die Bahnebene am unmittelbarsten bestimmt ist. Sodann die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen, wodurch die dritte von selbst gegeben ist, weil durch diese Größen die geozentrischen Polarkoordinaten durch die von den Beobachtungen nicht gebotenen dritten Stücke ergänzt werden. Endlich die heliozentrischen Distanzen, weil aus diesen, wie wir wissen, schließlich die Elemente zu bestimmen sind. Die Entscheidung hängt wesentlich von der Methode ab, durch die man zum Ziel gelangen will, nämlich ob man die Unbekannten durch *direkte* oder durch *indirekte* Rechnung ermittelt. Bei den direkten Methoden werden alle Unbekannten durch *eine* ausgedrückt und diese durch Auflösung einer Endgleichung bestimmt; bei den *indirekten* Methoden geht man von Näherungswerten der Unbekannten aus und variiert diese so lange, bis gewisse Endbedingungen erfüllt sind. Bei ersteren wird es also darauf ankommen, die Unbekannte so zu wählen, daß der Grad der Endgleichung ein möglichst niedriger ist, bei letzteren dagegen wird die Einfachheit der Hypothesenrechnung der ausschlaggebende Faktor sein. Die Entscheidung selbst kann also erst bei der Analyse getroffen werden, zu der wir uns nun wenden. Wir schicken zur Übersicht des Ganges voraus, daß die in letzter Linie gesuchten drei Punkte folgenden Bedingungen genügen müssen:

1. Sie müssen in einer Ebene mit der Sonne liegen.

2. Es ist ein Kegelschnitt durch sie zu legen, der seinen einen Brennpunkt in der Sonne hat.

3. Ist p der Parameter des Kegelschnittes, so müssen die Sektoren zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten Radiusvektor die Inhalte haben:

$$k(t_2 - t_1)\sqrt{p} \text{ und } k(t_3 - t_2)\sqrt{p} ,$$

wo t die Beobachtungszeiten, k die Konstante des Sonnensystems ist.

Die einfachste von diesen Bedingungen ist die der Ebene; sie ist daher unter allen Umständen zum Ausgangspunkt zu nehmen.

82. Bedingung der Ebene. Die Grundgleichungen. Sollen die drei durch ihre rechtwinkligen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ bestimmten Punkte in

einer Ebene mit dem Anfangspunkt liegen, so müssen sie einer Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = 0$$

genügen, d. h. es muß bestehen:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen ergeben nur dann von Null verschiedene Werte von A, B, C, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Diese Bedingung läßt sich zuerst in folgenden drei Formen schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 (y_2 z_3 - z_2 y_3) + y_1 (z_2 x_3 - x_2 z_3) + z_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) &= 0 \\ x_2 (y_3 z_1 - z_3 y_1) + y_2 (z_3 x_1 - x_3 z_1) + z_2 (x_3 y_1 - y_3 x_1) &= 0 \\ x_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2) + y_3 (z_1 x_2 - x_1 z_2) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich $y_2 z_3 - z_2 y_3$ die Projektion der doppelten Fläche des von den Punkten 2, 3 und dem Anfangspunkt gebildeten Dreiecks auf die yz-Ebene und ähnliches gilt von den übrigen Faktoren. Nennt man daher $[r_1 r_2]$, $[r_2 r_3]$, $[r_1 r_3]$ die doppelten Flächen der Dreiecke, die von den entsprechenden, nach den drei Punkten gezogenen Radienvektoren r_1, r_2, r_3 begrenzt werden, und nennt ferner α, β, γ die Winkel der Normale auf die Dreiecksflächen mit den Achsen, so wird aus obigen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} [r_2 r_3] (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma) &= 0 \\ - [r_1 r_3] (x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma) &= 0 \\ [r_1 r_2] (x_3 \cos\alpha + y_3 \cos\beta + z_3 \cos\gamma) &= 0 . \end{aligned}$$

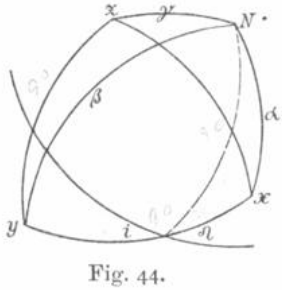

Fig. 44.

Führt man als Bestimmungsstücke der Ebene ihre Neigung i gegen die xy-Ebene und den Winkel Ω zwischen ihrer Schnittlinie mit der xy-Ebene und der x-Achse ein, so zeigt beifolgende Figur leicht, daß

$$\cos\alpha = \sin\Omega \sin i , \quad \cos\beta = -\cos\Omega \sin i , \quad \cos\gamma = \cos i ,$$

und die Bedingungen dafür, daß die drei Punkte in einer Ebene liegen, lassen sich also in folgender Form ansetzen:

$$\begin{aligned} x_1 \sin\Omega \sin i - y_1 \cos\Omega \sin i + z_1 \cos i &= 0 \\ x_2 \sin\Omega \sin i - y_2 \cos\Omega \sin i + z_2 \cos i &= 0 \\ x_3 \sin\Omega \sin i - y_3 \cos\Omega \sin i + z_3 \cos i &= 0 . \end{aligned} \qquad 1)$$

Man kann diese Gleichungen noch auf andere Art ableiten. Liegt der Punkt 1 in der durch i und Ω bestimmten Ebene in der Entfernung r_1 vom Anfangspunkt und

hat er das Argument der Breite u_1, so sind nach Seite 24 seine rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 (\cos u_1 \cos \Omega - \sin u_1 \sin \Omega \cos i) \\ y_1 &= r_1 (\cos u_1 \sin \Omega + \sin u_1 \cos \Omega \cos i) \\ z_1 &= r_1 \sin u_1 \sin i \end{aligned} \qquad (a)$$

woraus sich durch eine leicht ersichtliche Operation die erste Gleichung 1) ergibt usf.

Ehe wir die Gleichungen 1) weiter behandeln, wollen wir die oben aufgestellte Bedingung der Ebene: Determinante = 0 in einer zweiten Form schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 (y_2 z_3 - z_2 y_3) + x_2 (y_3 z_1 - z_3 y_1) + x_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2) &= 0 \\ y_1 (z_2 x_3 - x_2 z_3) + y_2 (z_3 x_1 - x_3 z_1) + y_3 (z_1 x_2 - x_1 z_2) &= 0 \\ z_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) + z_2 (x_3 y_1 - y_3 x_1) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) &= 0 , \end{aligned}$$

die nach Einsetzung der Dreiecksflächen in

$$\begin{aligned} [r_2 r_3] x_1 - [r_1 r_3] x_2 + [r_1 r_2] x_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] y_1 - [r_1 r_3] y_2 + [r_1 r_2] y_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] z_1 - [r_1 r_3] z_2 + [r_1 r_2] z_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

übergeht, wenn wir die gemeinsamen Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gleich weglassen. Auch diese Gleichungen kann man mittels (a) ableiten, denn man hat daraus nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} y_2 z_3 - z_2 y_3 &= \quad r_2 r_3 \sin (u_3 - u_2) \cos \Omega \sin i = - [r_2 r_3] \cos\beta \\ y_3 z_1 - z_3 y_1 &= - r_1 r_3 \sin (u_3 - u_1) \cos \Omega \sin i = + [r_1 r_3] \cos\beta \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 &= \quad r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1) \cos \Omega \sin i = - [r_1 r_2] \cos\beta . \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $-y_1$, $-y_2$, $-y_3$ und addiert, so erscheint sofort die zweite Gl. 2), und ebenso die dritte, wenn mit $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$ multipliziert wird. Behufs Erlangung der ersten Gleichung multipliziert man mit $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ und konstatiert das Verschwinden der linken Seiten nach Einsetzung von (a) und Beachtung des bekannten Satzes:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_1 \sin (u_3 - u_2) - \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_2 \sin (u_3 - u_1) + \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_3 \sin (u_2 - u_1) = 0 .$$

Noch einfacher ist es, von der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin a \sin (A + u_1) \\ x_2 &= r_2 \sin a \sin (A + u_2) \\ x_3 &= r_3 \sin a \sin (A + u_3) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

auszugehen. Multipliziert man nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\sin(u_3 - u_2)$, $-\sin(u_3 - u_1)$, $\sin(u_2 - u_1)$ und addiert, so erscheint wegen des eben zitierten Satzes

$$\frac{x_1}{r_1} \sin (u_3 - u_2) - \frac{x_2}{r_2} \sin (u_3 - u_1) + \frac{x_3}{r_3} \sin (u_2 - u_1) = 0$$

oder wenn mit $r_1 r_2 r_3$ multipliziert wird, die erste Gleichung 2).

Eine Entscheidung, welche der beiden Formen, 1) oder 2), als Bedingung der Ebene sich am vorteilhaftesten erweist, wollen wir jetzt noch nicht treffen, sondern

beide noch gemeinsam weiterführen. Es sind Polarkoordinaten statt der rechtwinkligen einzuführen, damit wir von unseren Beobachtungsdaten Gebrauch machen können. Wir nehmen zur xy-Ebene die Ekliptik, lassen die $+x$-Achse durch den Frühlingspunkt gehen, die $+y$Achse durch 90° Länge, die $+z$-Achse durch den Nordpol der Ekliptik. Zur Beobachtungszeit t möge gehören die geozentrische Länge des Gestirnes λ, die geozentrische Breite β und die geozentrische Distanz ϱ; zur selben Zeit sei die heliozentrische Länge der Erde L, ihre Breite Null und ihr Radiusvektor R. Dann gilt für alle drei Orte (Nr. 13):

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\beta \cos\lambda + R \cos L \\ y &= \varrho \cos\beta \sin\lambda + R \sin L \\ z &= \varrho \sin\beta . \end{aligned} \qquad 3)$$

Wird dies in die Gleichungen 1), die wir unter Einführung von

$$\operatorname{tg} i \sin\Omega = g , \qquad \operatorname{tg} i \cos\Omega = h$$

allgemein so schreiben:

$$z = hy - gx \qquad 1^a)$$

eingetragen, so erhalten wir sofort folgenden Ausdruck der geozentrischen Distanz

$$\varrho = \frac{h \sin L - g \cos L}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R ,$$

der nun seinerseits nach Einsetzung in 3) die folgenden Werte der rechtwinkligen Koordinaten liefert:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin\beta \cos L + h \cos\beta \sin(L - \lambda)}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R \\ y &= \frac{\sin\beta \sin L + g \cos\beta \sin(L - \lambda)}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R \\ z &= \frac{h \sin\beta \sin L - g \sin\beta \cos L}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R . \end{aligned}$$

Daraus kann noch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gebildet werden; und wenn man zwei Örter betrachtet, so erhält man r_1 und r_2 und wegen

$$\cos 2 f_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}$$

auch den Winkel $2 f_3$ zwischen beiden Radienvektoren, alles ausgedrückt durch die beiden Unbekannten h und g. Will man aber jetzt weiter gehen und die Bedingung der Ellipse bzw. Parabel und die Bedingung der Zwischenzeiten einführen, so stößt man auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir wissen, daß bei der Ellipse überhaupt kein geschlossener Ausdruck zwischen den Radienvektoren, dem eingeschlossenen Winkel und der Zwischenzeit existiert; hier wäre der eingeschlagene Weg also sofort zu verlassen, außer man bildet die Dreiecksflächen, womit man aber direkt auf die Gleichungen 2) verwiesen würde, welche dieselben von Anfang an enthalten. Aber auch bei der Parabel, wo man den geschlossenen Ausdruck (Seite 193)

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k (t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos f_3) \sqrt{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f_3}$$

besitzt und denselben für die beiden Zwischenzeiten $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_2$ aufstellen könnte, sieht man sofort, daß die beiden Gleichungen für h und g, die man auf diese direkte Weise erlangen kann, so kompliziert werden, daß an ihre Auflösung nicht zu denken ist. Es ist gut, sich die Schwierigkeiten, die dem einfachsten, direkten Wege entgegenstehen, vor Augen zu halten, um die Vorteile der Lösung durch sukzessive Näherung richtig schätzen zu lernen.

Gehen wir jetzt zur Form 2) der Ebenenbedingung und substituieren darin die Ausdrücke 3) der rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3]\,(\varrho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1) - [r_1 r_3]\,(\varrho_2 \cos\beta_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2) + \\
&\qquad + [r_1 r_2]\,(\varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3) = 0 \\
&[r_2 r_3]\,(\varrho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1) - [r_1 r_3]\,(\varrho_2 \cos\beta_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2) + \qquad 4) \\
&\qquad + [r_1 r_2]\,(\varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3) = 0 \\
&[r_2 r_3]\,\varrho_1 \sin\beta_1 \qquad\qquad - [r_1 r_3]\,\varrho_2 \sin\beta_2 + [r_1 r_2]\,\varrho_3 \sin\beta_3 = 0 .
\end{aligned}$$

Hier tritt uns der Vorteil entgegen, daß die auftretenden Verhältnisse der Dreiecksflächen, nämlich:

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]},$$

wie wir wissen (Nr. 52), durch Reihenentwicklungen nach den Potenzen der Zwischenzeiten ausgedrückt werden können, in denen, wenigstens in den ersten Gliedern, außer den bekannten Zwischenzeiten nur mehr der Radiusvektor r_2 auftritt; diese Entwicklungen gehen aus den Gesetzen der Planetenbewegung hervor, bringen also die Bedingungen der Ellipse und der Zwischenzeiten in die Gl. 4) herein. Es eröffnet sich also folgender Weg der Lösung: Durch Elimination von ϱ_1 und ϱ_3 aus den drei Gleichungen 4) kann ein Ausdruck für ϱ_2 gefunden werden, der außer von den Zwischenzeiten und den bekannten Koordinaten wenigstens in den ersten Gliedern nur mehr von r_2 abhängig ist. Da aber zwischen ϱ_2 und r_2 außerdem noch die rein geometrische Beziehung besteht, die sich aus dem Dreieck Sonne, Erde, Planet ergibt:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\delta_2 , \qquad 5)$$

wo δ_2 ein offenbar aus den geozentrischen Richtungen leicht zu ermittelnder Winkel ist, so hat man zwei verhältnismäßig einfache Gleichungen zwischen r_2 und ϱ_2, welche die Ermittlung beider gestatten. Dann aber erhält man aus 4) ϱ_1 und ϱ_3 und damit die vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten der drei Örter; aus diesen lassen sich r_1 und r_3, sowie die heliozentrischen Polarkoordinaten finden und schließlich die Elemente (Nr. 50, 58, 62). Wir führen noch an, daß die Gl. 5) sich auch durch Quadrieren und Addieren der Gl. 3) ergibt:

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(L_2 - \lambda_2), \qquad 5^a)$$

womit der Wert von $\cos\delta_2$ unmittelbar gegeben ist.

Nachdem wir die Überzeugung gewonnen haben, daß die weitere Behandlung von 4) zum Ziele führen muß, wenden wir uns zu einem eingehenderen Studium derselben, wobei wir die Dreiecksflächen als bekannte, die geozentrischen Distanzen ϱ als unbekannte Größen im Auge behalten wollen.

83. Allgemeine Diskussion der Grundgleichungen. Wir wollen die Gl. 4) durch Einführung anderer Koordinaten zugleich kürzer und allgemeiner schreiben. Nennt man a, b, c die Kosinus der Abstände eines Punktes der Sphäre von den Ecken des gleichseitigen und rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, welches durch die Durchstoßpunkte der Achsen unseres Systems mit der Sphäre gebildet wird, so hat man:

$$a = \cos\beta\cos\lambda, \qquad b = \cos\beta\sin\lambda, \qquad c = \sin\beta.$$

Gebraucht man die Buchstaben a, b, c für die geozentrischen Örter des Planeten, A, B, C für die Örter der Erde, so schreiben sich die Gl. 4) so:

$$\begin{aligned}
&[r_2r_3](a_1\varrho_1 + A_1R_1) - [r_1r_3](a_2\varrho_2 + A_2R_2) + [r_1r_2](a_3\varrho_3 + A_3R_3) = 0\\
&[r_2r_3](b_1\varrho_1 + B_1R_1) - [r_1r_3](b_2\varrho_2 + B_2R_2) + [r_1r_2](b_3\varrho_3 + B_3R_3) = 0\\
&[r_2r_3](c_1\varrho_1 + C_1R_1) - [r_1r_3](c_2\varrho_2 + C_2R_2) + [r_1r_2](c_3\varrho_3 + C_3R_3) = 0.
\end{aligned} \qquad 4^a)$$

Es macht nun in erster Linie keine Schwierigkeit, hieraus die drei geozentrischen Distanzen jede für sich zu ermitteln. Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren oder mit Benutzung der Determinanten findet man leicht:

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \frac{-[r_2r_3]R_1L_1 + [r_1r_3]R_2L_2 - [r_1r_2]R_3L_3}{[r_2r_3]K}\\
\varrho_2 &= \frac{-[r_2r_3]R_1M_1 + [r_1r_3]R_2M_2 - [r_1r_2]R_3M_3}{-[r_1r_3]K}\\
\varrho_3 &= \frac{-[r_2r_3]R_1N_1 + [r_1r_3]R_2N_2 - [r_1r_2]R_3N_3}{[r_1r_2]K},
\end{aligned} \qquad 6)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
K &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\\
L_1 &= A_1(b_2c_3 - b_3c_2) + B_1(c_2a_3 - c_3a_2) + C_1(a_2b_3 - a_3b_2)\\
M_1 &= A_1(b_3c_1 - b_1c_3) + B_1(c_3a_1 - c_1a_3) + C_1(a_3b_1 - a_1b_3)\\
N_1 &= A_1(b_1c_2 - b_2c_1) + B_1(c_1a_2 - c_2a_1) + C_1(a_1b_2 - a_2b_1)
\end{aligned} \qquad 7)$$

und die L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 hieraus folgen, wenn statt A_1, B_1, C_1 gesetzt wird A_2, B_2, C_2 bzw. A_3, B_3, C_3.

Die geometrische Bedeutung der K, L, M, N, ... ist, wie folgt, zu ermitteln. Das Quadrat von K läßt sich so schreiben:

$$\begin{aligned}
K^2 = {}& (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)\\
&+ 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)\\
&- (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)^2\\
&- (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)^2\\
&- (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß vermöge der Eigenschaften der Richtungskosinus

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) = \cos(12),$$

so sieht man, daß:

$$K^2 = 1 + 2\cos m_1\cos m_2\cos m_3 - \cos m_1^2 - \cos m_2^2 - \cos m_3^2,$$

wenn m_1, m_2, m_3 die Bogen größter Kreise sind, welche die drei Punkte 1, 2, 3 der Sphäre, die den geozentrischen Beobachtungen entsprechen, miteinander verbinden.

Nennt man noch μ_1, μ_2, μ_3 die drei Winkel des eben genannten sphärischen Dreieckes, so wird:

$$\cos m_3 = \cos m_1 \cos m_2 + \sin m_1 \sin m_2 \cos \mu_3$$

und die Substitution dieses Ausdruckes in K^2 führt auf:

$$K^2 = \sin m_1^2 \sin m_2^2 \sin \mu_3^2$$

oder

$$K = \pm \sin m_1 \sin m_2 \sin \mu_3. \qquad 8)$$

Das Zeichen richtet sich nach dem Drehungssinn, in dem das Dreieck umlaufen wird. Einem bestimmten Drehungssinn, d. h. einer bestimmten Reihenfolge der Punkte 1, 2, 3 kann das + Zeichen zugelegt werden. Ändert man die Reihenfolge der Punkte, so ist das Zeichen zu wechseln.

In derselben Weise findet man, daß auch

$$K = \pm \sin m_1 \sin m_3 \sin \mu_2 = \pm \sin m_2 \sin m_3 \sin \mu_1 .$$

Es ist dies, nebenbei bemerkt, der sechsfache Betrag des Inhalts desjenigen Tetraeders, das vom Mittelpunkt der Sphäre und den drei Punkten gebildet wird, wenn man den Radius der Sphäre gleich 1 setzt.

Wenn man in K statt der Koordinaten a_1, b_1, c_1 des ersten Planetenortes die des ersten Erdortes nimmt, so geht K in L_1 über. Nennt man die drei Erdörter I, II, III, so wird der Ausdruck von L_1 sich ebenso in den Stücken des Dreieckes I 2 3 bilden lassen, wie der von K in den Stücken von 1 2 3. Dasselbe gilt offenbar von allen übrigen L, M, N. Die zehn Koeffizienten in 6) stellen also einen und denselben Ausdruck in verschiedenen Dreiecken dar, und zwar erhält man diese folgendermaßen: Für die Koeffizienten von ϱ_1 verbinde man den ersten, zweiten, dritten Sonnenort mit 2, 3 usf. Man schließt aus dieser Darstellung, daß die Koeffizienten alle vom zugrunde gelegten Koordinatensystem unabhängig sind; ferner, was wichtiger ist, daß alle zu einem ϱ gehörigen Koeffizienten einen Faktor gemeinsam haben, nämlich den Sinus der entsprechenden Seite des Dreiecks 1 2 3.

Die Gl. 6) geben die geozentrischen Distanzen ϱ unabhängig voneinander; wenn man sie in die Gleichungen

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 + 2\varrho R \cos\beta \cos(L - \lambda)$$

oder in den jetzt benutzten Koordinaten, in

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 + 2\varrho R (aA + bB + cC)$$

eintragen wollte, so würde man, nach Einsetzung der Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, offenbar sofort wieder auf drei Gleichungen sehr hohen Grades geführt werden, deren simultane Behandlung unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten würde. Führt man, wie *Oppolzer*, Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen ein, welche die äußeren Radienvektoren enthalten, so muß man ϱ_1 und ϱ_3 für sich berechnen und dann r_1 und r_3, also von den aufgestellten Ausdrücken 6) Gebrauch machen, aber man sieht auch, daß hierdurch ohne wesentlichen Gewinn die Arbeit verdoppelt wird, und daß daher der oben skizzierte Weg der Lösung unter allen Umständen den Vorzug verdient. Wir werden daher auch den Oppolzerschen Weg nicht einschlagen. Dann aber gebraucht man von den drei Werten 6) nur den für ϱ_2,

während die für ϱ_1 und ϱ_3 durch zweckmäßigere zu ersetzen sein werden. Man kann nämlich ϱ_1 und ϱ_3, wie wir jetzt zeigen wollen, durch ϱ_2 mittelst kürzerer Rechnung erhalten, als wenn man sie direkt berechnet.

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen 4^a) zuerst ϱ_3, und dann ϱ_1, so kommt:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3](b_1 c_3 - b_3 c_1)\varrho_1 = [r_1 r_3](b_2 c_3 - b_3 c_2)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (B_1 c_3 - b_3 C_1) - [r_1 r_3] R_2 (B_2 c_3 - b_3 C_2) + [r_1 r_2] R_3 (B_3 c_3 - b_3 C_3)) \\
&[r_1 r_2](b_1 c_3 - b_3 c_1)\varrho_3 = [r_1 r_3](b_1 c_2 - b_2 c_1)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (C_1 b_1 - c_1 B_1) - [r_1 r_3] R_2 (C_2 b_1 - c_1 B_2) + [r_1 r_2] R_3 (C_3 b_1 - c_1 B_3)).
\end{aligned} \tag{9}$$

Dieser Gleichungen hat sich *Hansen* bei seiner Methode bedient. Behandelt man ebenso die beiden ersten Gleichungen, so erhält man in

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3](a_1 b_3 - a_3 b_1)\varrho_1 = [r_1 r_3](a_2 b_3 - a_3 b_2)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (A_1 b_3 - a_3 B_1) - [r_1 r_3] R_2 (A_2 b_3 - a_3 B_2) + [r_1 r_2] R_3 (A_3 b_3 - a_3 B_3)) \\
&[r_1 r_2](a_1 b_3 - a_3 b_1)\varrho_3 = [r_1 r_3](a_1 b_2 - a_2 b_1)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (B_1 a_1 - b_1 A_1) - [r_1 r_3] R_2 (B_2 a_1 - b_1 A_2) + [r_1 r_2] R_3 (B_3 a_1 - b_1 A_3))
\end{aligned} \tag{10}$$

die Gleichungen, welche *Encke* benutzt hat.

Man kann aber die hierin liegende Willkür vermeiden, wenn man aus allen drei Gleichungen 4^a) ϱ_3 bzw. ϱ_1 eliminiert; multipliziert man sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{ll}
b_3 C_3 - B_3 c_3 & \text{und} \quad b_1 C_1 - B_1 c_1 \\
c_3 A_3 - C_3 a_3 & \qquad\quad c_1 A_1 - C_1 a_1 \\
a_3 B_3 - A_3 b_3 & \qquad\quad a_1 B_1 - A_1 b_1,
\end{array}$$

so kommt nach der Addition:

$$\begin{aligned}
[r_2 r_3] M_3 \varrho_1 &= -[r_1 r_3] L_3 \varrho_2 + [r_2 r_3] R_1 F_3 + [r_1 r_3] R_2 E_3 \\
[r_1 r_2] M_1 \varrho_3 &= -[r_1 r_3] N_1 \varrho_2 + [r_1 r_2] R_3 F_1 + [r_1 r_3] R_2 G_1,
\end{aligned} \tag{11}$$

worin M_3, L_3, M_1, N_1 dieselbe Bedeutung haben wie in 7), die übrigen Abkürzungen aber durch

$$\begin{aligned}
F_1 &= a_1 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + b_1 (C_3 A_1 - C_1 A_3) + c_1 (A_3 B_1 - A_1 B_3) \\
G_1 &= a_1 (B_1 C_2 - B_2 C_1) + b_1 (C_1 A_2 - C_2 A_1) + c_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\
F_3 &= a_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + b_3 (C_3 A_1 - C_1 A_3) + c_3 (A_3 B_1 - A_1 B_3) \\
E_3 &= a_3 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + b_3 (C_2 A_3 - C_3 A_2) + c_3 (A_2 B_3 - A_3 B_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

erklärt sind und offenbar dieselbe geometrische Bedeutung haben wie jene, nur daß hier Dreiecke mit 2 Erdörtern und 1 Planetenort in Betracht kommen. —

Wir wollen endlich auch ϱ_2 aus den Gl. 4^a) eliminieren, wodurch eine Beziehung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 entsteht. Wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit $b_2 C_2 - B_2 c_2$, $c_2 A_2 - C_2 a_2$, $a_2 B_2 - A_2 b_2$ multipliziert und addiert, so erscheint:

$$[r_1 r_2] L_2 \varrho_3 = +[r_2 r_3] N_2 \varrho_1 - ([r_2 r_3] R_1 G_2 - [r_1 r_2] R_3 E_2) \tag{13}$$

wo

$$\begin{aligned}
G_2 &= a_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) + b_2 (C_1 A_2 - C_2 A_1) + c_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\
E_2 &= a_2 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + b_2 (C_2 A_3 - C_3 A_2) + c_2 (A_2 B_3 - A_3 B_2).
\end{aligned} \tag{14}$$

Diese Gleichung liegt der parabolischen Bahnbestimmung zugrunde. Man kann auch Beziehungen zwischen ϱ_1 und ϱ_3 benutzen, die durch Elimination von ϱ_2 aus zweien

von den Gleichungen 4[a]) hervorgehen; wir stellen sie mit dem Bemerken zusammen, daß 13) wohl immer vorzuziehen ist:

$$\begin{aligned}
&[r_2r_3](a_1b_2 - b_1a_2)\varrho_1 + [r_1r_2](b_2a_3 - a_2b_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(A_2b_2 - B_2a_2) + [r_2r_3]R_1(B_1a_2 - A_1b_2) + [r_1r_2]R_3(B_3a_2 - A_3b_2) \\
&[r_2r_3](a_1c_2 - c_1a_2)\varrho_1 + [r_1r_2](c_2a_3 - a_2c_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(A_2c_2 - C_2a_2) + [r_2r_3]R_1(C_1a_2 - A_1c_2) + [r_1r_2]R_3(C_3a_2 - A_3c_2) \qquad 14^{a}) \\
&[r_2r_3](b_1c_2 - c_1b_2)\varrho_1 + [r_1r_2](c_2b_3 - b_2c_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(B_2c_2 - C_2b_2) + [r_2r_3]R_1(C_1b_2 - B_1c_2) + [r_1r_2]R_3(C_3b_2 - B_3c_2).
\end{aligned}$$

Man könnte noch mehr Beziehungen zwischen den geozentrischen Distanzen aufstellen, wodurch auch die noch nicht zur Verwendung gekommenen E_1, F_2, G_3 zur Einführung gelangen. Man hat überhaupt zwanzig solcher Ausdrücke zwischen den 3 Planeten- und den 3 Erdörtern, wenn man nämlich den, den 3 Erdörtern entsprechenden und analog K gebildeten mitzählt, welcher Null ist, wenn die 3 Erdörter in einem größten Kreise angenommen werden. In der Bahnbestimmung werden diese Beziehungen nicht gebraucht.

Es ist nun die *Größenordnung* der eingeführten Ausdrücke K, L, M, N, E, F, G zu untersuchen, was vermöge des oben abgeleiteten allgemeinen Wertes 8) derselben leicht geschehen kann. Dabei wollen wir die Zwischenzeiten zwischen den geozentrischen Beobachtungen und alle während derselben von der Erde und vom Planeten beschriebenen Bogen als Größen erster Ordnung betrachten. Ist ABC irgend eines der zwanzig sphärischen Dreiecke, welche die drei Planetenörter und die drei Erdörter miteinander bilden, und sind a, b, c seine Seiten, α, β, γ seine Winkel, so ist der betreffende zugehörige Ausdruck nach 8) durch

$$J = \sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta$$

gegeben. Gehört einer der drei Punkte A, B, C zu den Erdörtern, die beiden anderen zu den Planetenörtern, oder umgekehrt, so kommt in J offenbar nur *eine* Größe erster Ordnung vor und es ist also J selbst von dieser Ordnung. Daraus folgt, daß *die 18 Größen L, M, N, E, F, G von der ersten Ordnung sind.* Eine Ausnahme hiervon tritt nur ein, wenn die drei Punkte des Dreiecks nahe in einem größten Kreis liegen, wenn also z. B. der durch den ersten und dritten Planetenort gelegte größte Kreis durch den mittleren Erdort hindurchgeht. Auf diese Ausnahmsfälle wird also später besonders zurückzukommen sein. Eine besondere Untersuchung erheischt die Größe K, welche dem von den drei Planetenörtern gebildeten Dreieck entstammt. Es muß die Größenordnung der sin der Winkel dieses Dreiecks festgestellt werden, wozu wir auf den Lambertschen Satz (Nr. 75) zurückgreifen. Es ist dort gezeigt, daß der Bogen G_2g zwischen dem zweiten Planetenort und dem Schnittpunkt der größten Kreise zwischen dem ersten und dritten Planetenort und dem zweiten Erdort und zweiten Planetenort, von der Ordnung der Pfeile der von der Erde und dem Planeten beschriebenen Kurven ist, also von der zweiten Ordnung. Da nun

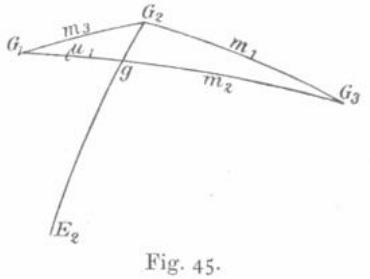

Fig. 45.

$$\sin\mu_1 = \sin G_1 g G_2 \frac{\sin G_2 g}{\sin m_3},$$

so folgt, daß $\sin\mu_1$ von der ersten Ordnung ist. Dasselbe gilt von den anderen Winkeln des Dreiecks $G_1 G_2 G_3$.

Die drei Faktoren von

$$K = \sin m_2 \sin m_3 \sin\mu_1$$

sind also von der ersten Ordnung und *folglich K von der dritten.*

84. Umformung der Ausdrücke für die geozentrischen Distanzen. Diese Ausdrücke sind nun auf die gemessenen Koordinaten zurückzuführen und zugleich in eine für die Rechnung möglichst bequeme Gestalt zu bringen. Es kann dies durch Einführung von Hilfsgrößen auf sehr verschiedene Weise geschehen; Gauß, Encke, Hansen, Klinkerfues, Weiss u. a. haben solche Umformungen angegeben. Dieselben ergeben sich alle aus unseren allgemeinen Formeln; wir wollen uns darauf beschränken, nur einige dieser Verfahren darzulegen und beginnen mit demjenigen, welches uns (auf einem anderen Wege, als Encke ihn eingeschlagen) auf die Enckeschen Formeln führen wird, welche zweifellos für den astronomischen Rechner die bequemsten sind. Wir nehmen zuerst den Ausdruck für ϱ_2 in 6) (Seite 258) vor und erinnern uns vor allem, daß M_1, M_2, M_3 und K einen Faktor erster Ordnung $\sin m_2$ gemeinsam haben, dessen Beseitigung wir am besten von vornherein besorgen. Es ist daher von den geometrischen Ausdrücken dieser Größen auszugehen. Nennt man d_1, d_2, d_3 die Bogen von dem ersten Planetenort nach dem ersten, zweiten, dritten Erdort (die stets kleiner als 180° angenommen werden dürfen) und Δ_1, Δ_2, Δ_3 ihre Winkel mit dem größten Kreis zwischen dem ersten und dritten Planetenort, so ist nach dem, was wir früher über die Bedeutung von M_1, M_2, M_3 feststellten, sofort:

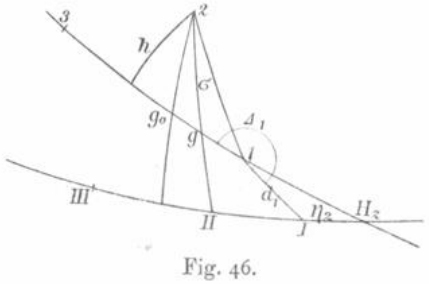

Fig. 46.

$$M_1 = +\sin m_2 \sin d_1 \sin\Delta_1, \qquad M_2 = +\sin m_2 \sin d_2 \sin\Delta_2,$$
$$M_3 = +\sin m_2 \sin d_3 \sin\Delta_3$$

und ebenso wird:

$$K = \sin m_2 \sin m_3 \sin\mu_1.$$

Nach Weglassung des Faktors $\sin m_2$ wird also die zweite Gleichung 6):

$$[r_1 r_3] \sin m_3 \sin\mu_1 \varrho_2 = +[r_2 r_3] R_1 \sin d_1 \sin\Delta_1 - [r_1 r_3] R_2 \sin d_2 \sin\Delta_2 + [r_1 r_2] R_3 \sin d_3 \sin\Delta_3. \qquad 15)$$

Um hier die Koordinaten einzuführen, sei H_2 die Länge des aufsteigenden Knotens des größten Kreises 13 (in der Richtung 1→3 genommen) auf der Ekliptik und η_2 seine Neigung gegen die Ekliptik, dann ist:

$$\begin{aligned} -\sin d_1 \sin\Delta_1 &= \sin\eta_2 \sin(L_1 - H_2) \\ -\sin d_2 \sin\Delta_2 &= \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2) \\ -\sin d_3 \sin\Delta_3 &= \sin\eta_2 \sin(L_3 - H_2). \end{aligned} \qquad 16)$$

Wird durch 2 der Breitenkreis gezogen und dessen Schnitt mit 13 g_0 genannt und die Breite von g_0 β_0, so ist der Bogen $g_0 2 = \beta_2 - \beta_0$ und daher

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \sin \widehat{1g_0 2}.$$

Nun ist

$$\sin \widehat{1g_0 2} = \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0},$$

folglich wird:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0} \qquad 17)$$

oder für die Rechnung sicherer:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_0) \cos \eta_2 \cos \beta_2 .$$

Trägt man 16) und 17) in 15) ein, so erscheint:

$$[r_1 r_3] \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \eta_2} \varrho_2 \cos \beta_2 = \qquad 18)$$
$$= -[r_2 r_3] R_1 \sin(L_1 - H_2) + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - H_2) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - H_2).$$

Ehe wir diese Gleichung weiter behandeln, stellen wir die Formeln zur Bestimmung der eingeführten Größen H_2, η_2, β_0 auf. Werden die Breitenkreise der Punkte 1 und 3 gezogen, so folgt sofort:

$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1$$
$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_3 ,$$

woraus (Nr. 69):

$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1$$
$$\operatorname{tg} \eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \qquad 19)$$

Kontrolle: $\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_3$.

Ferner ist ebenso:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_2 - H_2) . \qquad 20)$$

Damit sind alle Koeffizienten in 18) durch die beobachteten Koordinaten ausgedrückt.

Verbindet man den zweiten Planetenort mit dem zweiten Erdort durch einen größten Kreis und nennt dessen Schnittpunkt mit dem größten Kreis 13 g, so ist die Strecke $\overline{g2} = \sigma$ jener Bogen, den wir bei der Diskussion des Lambertschen Satzes kennen lernten und dessen Wichtigkeit wir hervorhoben. Wir haben statt seiner hier $\beta_2 - \beta_0$ eingeführt, weil sich dieses leichter berechnen läßt; es ist aber klar, daß wir auch σ hätten einführen können, denn man hat:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin \sigma \sin \widehat{1g2} .$$

Will man σ ermitteln, so wird man am einfachsten auf $\beta_2 - \beta_0$ zurückgreifen und folgende Formeln aufstellen:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0} = \sin \sigma \sin \widehat{1g2} ,$$

man muß dann nur noch $\sin \widehat{1g2}$ ermitteln, was mittels des Dreiecks $H_2 g II$ gelingt, in welchem zuerst noch der Winkel bei II zu ermitteln ist; nennt man ihn $180^\circ - w_2$ so ist

$$\operatorname{tg} w_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)},$$

und dann folgt schließlich:

$$\cos \widehat{1g2} = \cos w_2 \cos \eta_2 + \sin w_2 \sin \eta_2 \cos(L_2 - H_2).$$

Wir gehen hier nicht näher auf diese Formeln ein, weil wir gelegentlich der Hansenschen Methode (Nr. 89) darauf zurückzukommen haben.

Fällt man vom zweiten Planetenort das Lot h auf den größten Kreis 13, so wird:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin h;$$

fällt man desgleichen von den drei Erdörtern die Lote ν_1, ν_2, ν_3 auf 13, so sieht man, daß

$$-\sin d_1 \sin \Delta_1 = \sin \nu_1, \quad -\sin d_2 \sin \Delta_2 = \sin \nu_2, \quad -\sin d_3 \sin \Delta_3 = \sin \nu_3$$

und daß daher der Gleichung 15) folgende interessante Form gegeben werden kann:

$$[r_1 r_3] \sin h \varrho_2 = -[r_2 r_3] R_1 \sin \nu_1 + [r_1 r_3] R_2 \sin \nu_2 - [r_1 r_2] R_3 \sin \nu_3, \qquad 19)$$

die allerdings praktisch keinerlei Vorteile bietet. Daß die Gl. 6) für ϱ_1 und ϱ_3 sich auf dieselben Formen überführen lassen, wie 15), 18), 19), ist selbstverständlich; wir stellen sie nicht auf, weil die nachher zu entwickelnden Werte für ϱ_1 und ϱ_3 vorzuziehen sind.

Man kann 18) in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} \varrho_2 \cos\beta_2 = -\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} R_1 \sin(L_1 - H_2) - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} R_3 \sin(L_3 - H_2) + R_2 \sin(L_2 - H_2)$$

und hierin das letzte Glied durch einen anderen Ausdruck ersetzen. Wenn man nämlich die Identität

$$0 = \sin(L_3 - L_2) \sin(L_1 - H_2) + \sin(L_2 - L_1) \sin(L_3 - H_2) - \sin(L_3 - L_1) \sin(L_2 - H_2)$$

mit $R_1 R_2 R_3$ multipliziert und die doppelten Dreiecksflächen der Erdbahn mit $[R_1 R_2] \ldots$ bezeichnet, so erkennt man die Richtigkeit von

$$0 = \frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} R_1 \sin(L_1 - H_2) + \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} R_3 \sin(L_3 - H_2) - R_2 \sin(L_2 - H_2).$$

Die Vereinigung dieser Gleichung mit obiger für ϱ_2 gibt:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} \varrho_2 \cos\beta_2 = \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\right) R_1 \sin(L_1 - H_2) + \left(\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\right) R_3 \sin(L_3 - H_2). \quad 20)$$

Wir gehen nun zur Umwandlung der Gleichungen für ϱ_1 und ϱ_3 über; wie schon erwähnt, eignen sich zur Berechnung die direkten Ausdrücke 6) weniger als die durch ϱ_2, welche uns bis jetzt in den Formen 9), 10), 11) vorliegen. Dieselben müssen natürlich schließlich zu demselben Resultat führen, weshalb es genügen wird, die einfachste von ihnen umzuwandeln. Das scheint 11) zu sein. Die Koeffizienten M_3, L_3, F_3, E_3 der ersten Gleichung in 11) gehen aus den vier Dreiecken hervor, welche der Strecke $3\,III$ vom dritten Planetenort zum dritten Erdort anliegen, und die Koeffizienten M_1, L_1, F_1, G_1 der zweiten aus Dreiecken, welche der Strecke $1\,I$ anliegen. Die Sinus dieser Strecken sind also jeweils gemeinsamer Faktor und können weggelassen werden. Nennt man für einen Augenblick q_1, q_2, q_3 die Bogen vom dritten Erdort nach den drei Planetenörtern, Q_1, Q_2, Q_3 ihre Winkel mit der

Erdbahn, ferner k_1, k_2, k_3 die Bogen vom ersten Erdort nach den drei Planetenörtern, K_1, K_2, K_3 ihre Winkel mit der Erdbahn, so erscheint 11) sofort in der Form:

$$\begin{aligned}
[r_2 r_3] \sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)\varrho_1 &= \varrho_2 [r_1 r_3] \sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3) - \\
&\quad - [r_2 r_3] R_1 \sin(L_3 - L_1) \sin Q_3 + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_3 - L_2) \sin Q_3 \\
[r_1 r_2] \sin k_3 \sin(K_1 - K_3)\varrho_3 &= \varrho_2 [r_1 r_3] \sin k_2 \sin(K_1 - K_2) - \\
&\quad - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - L_1) \sin K_1 + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - L_1) \sin K_1 .
\end{aligned}$$

Hierbei war betreff des Zeichens zu beachten, daß die Dreiecke für L_3 und F_3 und die für N_1 und F_1 in der umgekehrten Richtung durchlaufen werden, wie die für M_3 und E_3, beziehungsweise für M_1 und G_1 und daß daher den betreffenden Ausdrücken das entgegengesetzte Zeichen zu geben war.

In die eben angesetzten Gleichungen lassen sich nun die Koordinaten sofort einführen; denn es ist:

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
\sin q_1 \sin Q_1 = \sin\beta_1 & \sin q_2 \sin Q_2 = \sin\beta_2 & \sin q_3 \sin Q_3 = \sin\beta_3 \\
\sin q_1 \cos Q_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_3) & \sin q_2 \cos Q_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_3) & \sin q_3 \cos Q_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3)
\end{array}\right\} \quad 21)$$

und

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
\sin k_1 \sin K_1 = \sin\beta_1 & \sin k_2 \sin K_2 = \sin\beta_2 & \sin k_3 \sin K_3 = \sin\beta_3 \\
\sin k_1 \cos K_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) & \sin k_2 \cos K_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_1) & \sin k_3 \cos K_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1)
\end{array}\right\}$$

und damit folgt nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned}
\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\varrho_1 &= \frac{\sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)}\varrho_2 + \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\right) R_1 \frac{\sin Q_3 \sin(L_3 - L_1)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} \\
\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\varrho_3 &= \frac{\sin k_2 \sin(K_1 - K_2)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)}\varrho_2 + \left(\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\right) R_3 \frac{\sin K_1 \sin(L_3 - L_1)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} .
\end{aligned} \quad 22)$$

Wenn man eine sogenannte logarithmische Form anstrebt, kann man diese Gleichungen in Verbindung mit 21) beibehalten. Im allgemeinen wird es sich aber empfehlen, die gemessenen Koordinaten direkt einzuführen. Man findet leicht mittels 21):

$$\begin{aligned}
\frac{\sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} &= \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3}{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} \\
\frac{\sin Q_3}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} &= \frac{\operatorname{tg}\beta_3}{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{1}{\cos\beta_1} \\
\frac{\sin k_2 \sin(K_1 - K_2)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} &= \frac{\sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_3} \\
\frac{\sin K_1}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} &= \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{1}{\cos\beta_3} .
\end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 \\
Z_3 &= \sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2 \\
D_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_3 - H_2) \\
D_3 &= \sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_1 - H_2)
\end{aligned} \quad 23)$$

und ferner

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1, \qquad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3$$
$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} = N_1, \qquad \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} = N_3 \tag{24}$$
$$\varrho_1 \cos\beta_1 = \overline{\varrho_1}, \qquad \varrho_2 \cos\beta_2 = \overline{\varrho_2}, \qquad \varrho_3 \cos\beta_3 = \overline{\varrho_3},$$

so erscheinen die Gleichungen für die geozentrischen »*kurtierten Distanzen*« $\overline{\varrho_1}, \overline{\varrho_2}, \overline{\varrho_3}$ in folgender Endgestalt, deren weitere Behandlung erst nach Einführung der Werte für n_1 und n_3 erfolgen kann:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}\,\overline{\varrho_2} = (N_1 - n_1)\,R_1 \sin(L_1 - H_2) + (N_3 - n_3)\,R_3 \sin(L_3 - H_2)$$
$$n_1\overline{\varrho_1} = \frac{Z_1}{D_1}\,\overline{\varrho_2} + (N_1 - n_1)\,R_1\,\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} \tag{25}$$
$$n_3\overline{\varrho_3} = \frac{Z_3}{D_3}\,\overline{\varrho_2} + (N_3 - n_3)\,R_3\,\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3}.$$

Wir führen noch eine Formel an, durch welche die Berechnung der $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ bequem und scharf kontrolliert werden kann. Die letzte Gleichung in 4) gibt nämlich unmittelbar:

$$n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2.$$

85. Die Gaußsche Gleichung. Wir haben die bisherigen Resultate ausschließlich durch die Bedingung der Ebene erhalten. Es kommt jetzt darauf an, die Bedingungen des Kegelschnitts und der Bewegung einzuführen, wofür der Boden insofern schon bereitet ist, als die Verhältnisse der Dreiecksflächen, bis jetzt rein geometrisch, in den Gleichungen 25) auftreten. Für diese sind die Werte zu substituieren, die sich aus der Theorie der Kegelschnittsbewegung ergeben. Wir haben sie S. 177, Gl. 17) in Reihenentwicklungen gegeben, die nach den Potenzen der Zwischenzeiten fortschreiten, und es fragt sich daher, wie viele Glieder derselben mindestens mitgenommen werden müssen, wenn auch nur ein genähert richtiges Resultat für $\overline{\varrho_2}$ mittels derselben zustande kommen soll. Wir haben diese Frage bereits Seite 177 entschieden, können aber auch durch Diskussion der ersten Gl. 25) zum selben Resultat gelangen. Der Koeffizient $\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}$ ging aus der Größe K, welche von der dritten Ordnung (Seite 262) ist, nach Weglassung eines Faktors erster Ordnung hervor, ist also von der zweiten Ordnung. Es müssen also auch auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder zweiter Ordnung vollzählig berücksichtigt sein, wenn nicht die Bestimmung von $\overline{\varrho_2}$ aus ihr einen Fehler nullter Ordnung aufweisen, also illusorisch sein soll. Es sind in n_1 und n_3 also die Glieder zweiter Ordnung, d. h. die zweiten Glieder der Reihenentwicklungen notwendig mitzunehmen; die dritten Glieder, die von der dritten Ordnung sind, können aber auch bereits nicht mehr von vorneherein berücksichtigt werden, da $\frac{dr_2}{d\tau}$ vor ermittelter Bahn völlig unbekannt ist. Ihre Vernachlässigung bei der ersten Näherung der Bestimmung von $\overline{\varrho_2}$ schadet aber auch nicht, da dieselbe in ϱ_2 nur einen Fehler erster Ordnung zur Folge hat, so daß für

$\overline{\varrho_2}$ ein wirklicher Näherungswert erhalten wird. Man erkennt aber nun auch leicht folgendes: Der bei der ersten Näherung gemachte Fehler wird um so kleiner ausfallen, je kleiner die Zwischenzeiten sind. Wünscht man also rasche Annäherung, so wird man bei ersten Bahnbestimmungen kleine Zwischenzeiten wählen müssen; bei großen Zwischenzeiten kann auch ein Fehler erster Ordnung recht Erhebliches geben, namentlich wenn $\frac{dr_2}{d\tau}$, welches von der Ordnung der Exzentrizität ist, nicht klein ist. Es gibt aber doch ein Mittel, auch bei beträchtlicheren Zwischenzeiten den Fehler der ersten Näherung herabzudrücken beziehungsweise nahe zu vernichten. Dasselbe ergibt sich sofort aus der Betrachtung des Gliedes dritter Ordnung in $n_1 + n_3$, nämlich (siehe Gl. 18) Seite 177)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\cdot\frac{dr_2}{d\tau}.$$

Dieses verschwindet, wenn die Zwischenzeiten τ_1 und τ_3 einander gleich sind. Wählt man also nahe gleiche Zwischenzeiten und richtet die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ so ein, daß $n_1 + n_3$ darin auftritt, so hat man das günstigste Resultat zu erwarten.

Durch die Glieder zweiter Ordnung, die wie erwähnt, unter allen Umständen mitzunehmen sind, wird der Radiusvektor r_2 in die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ eingeführt. Man muß also eine zweite Relation zwischen $\overline{\varrho_2}$ und r_2 noch heranziehen. Diese bietet sich aber unmittelbar in der schon früher aufgestellten Gleichung 5[a]), nämlich

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - L_2)$$

dar, deren bequeme Verbindung mit 25) also anzustreben sein wird.

Diese Überlegungen führen zu folgender Behandlung der ersten Gleichung 25). Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\eta_2\sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0} &= a_1\\ a_1R_1\sin(L_1-H_2) &= c_1\\ a_1R_2\sin(L_2-H_2) &= c_2\\ a_1R_3\sin(L_3-H_2) &= c_3\end{aligned}\qquad 26)$$

und beachtet, daß vermöge der Identität

$$\sin(L_3-L_2)\sin(L_1-H_2)+\sin(L_2-L_1)\sin(L_3-H_2)=\sin(L_3-L_1)\sin(L_2-H_2):$$

$$N_1R_1\sin(L_1-H_2)+N_3R_3\sin(L_3-H_2)=\frac{R_2R_3\sin(L_3-L_2)}{R_1R_3\sin(L_3-L_1)}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{R_1R_2\sin(L_2-L_1)}{R_1R_3\sin(L_3-L_1)}R_3\sin(L_3-H_2)$$
$$=R_2\sin(L_2-H_2)$$

oder

$$c_1N_1 + c_3N_3 = c_2$$

ist, so ergibt sich zuerst

$$\varrho_2 = c_1(N_1-n_1) + c_3(N_3-n_3) \qquad 27)$$

und dann:

$$\varrho_2 = c_2 - (c_1n_1 + c_3n_3)\,, \qquad 28)$$

was wir auch noch kürzer hätten erhalten können, wenn wir von der ursprünglichen Form 18) ausgegangen wären. Der Gleichung 28) aber läßt sich folgende Form geben:

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3 \dfrac{n_3}{n_1}}{1 + \dfrac{n_3}{n_1}} (n_1 + n_3), \qquad 29)$$

in welche $\frac{n_3}{n_1}$ und $n_1 + n_3$ einzutragen sind, während die c als völlig bekannte Größen angesehen werden können. Hätte man die strengen Werte von $\frac{n_3}{n_1}$ und $n_1 + n_3$, so würde 29) den strengen Wert von ϱ_2 liefern; man hat aber anfangs nur Näherungen, nämlich nach Gl. 18) und 19) (Seite 177)

$$n_1 + n_3 = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3} + \cdots$$
$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \cdots \right).$$

Um nun die Gl. 29) für alle Näherungen gebrauchen zu können, setzen wir darin

$$n_1 + n_3 = 1 + \frac{Q}{2 r_2^3}, \qquad \frac{n_3}{n_1} = P,$$

worauf sie übergeht in

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + P c_3}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3} \right); \qquad 30)$$

dann hat man in erster Näherung:

$$Q = \tau_1 \tau_3, \qquad P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \qquad 31)$$

und für die weiteren:

$$Q = 2 (n_1 + n_3 - 1) r_2^3, \qquad P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad 32)$$

wo für n_1, n_3, r_2 die jeweils durch die vorausgegangene Näherung erhaltenen Werte zu substituieren sind. Diesen Weg haben *Gauß* und nach ihm *Hansen* eingeschlagen. Man sieht aber, daß dabei das Glied

$$- \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3}$$

in $\frac{n_3}{n_1}$ bei der ersten Näherung übergangen wird, ohne daß dies unbedingt notwendig wäre, da in $n_1 + n_3$ ein Glied gleicher Beschaffenheit mitgenommen wird. Es ist dieses Glied bei nahe gleichen Zwischenzeiten zwar klein und es tut seine Vernachlässigung der Näherungsmethode keinen Abbruch (wie gleich gezeigt werden soll), es ist aber doch vorzuziehen, dasselbe zu berücksichtigen, weil dadurch die erste Näherung unter allen Umständen näher an den wahren Wert von ϱ_2 herankommt. Wenn nun auch noch, wie *Encke* gezeigt hat, seine Mitnahme keine wesentliche Vermehrung der Rechnung bedingt, so liegt kein Anlaß vor, diese bei stark ungleichen Zwischenzeiten nicht unwesentliche Verbesserung nicht zu adoptieren. Daß das Glied die Näherungsmethode nicht beeinträchtigt, seine Vernachlässigung also in ϱ_2 nur einen Fehler erster Ordnung erzeugt, findet man leicht wie folgt. Setzt man in der ursprünglichen Form $c_1 n_1 + c_3 n_3$ die Werte von n_1 und n_3 ein, aus denen $n_1 + n_3$ und $\frac{n_3}{n_1}$

hervorgegangen sind, nämlich Gl. 17) (Seite 177), so erhält man unter Berücksichtigung von 26)

$$a_1\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{\tau_3}{\tau_2}R_3\sin(L_3-H_2)\right)+\frac{a_1\tau_1\tau_3}{6r_2^{\,3}\tau_2}\left((\tau_1+\tau_2)R_1\sin(L_1-H_2)+(\tau_3+\tau_2)R_3\sin(L_3-H_2)\right)$$

oder:

$$a_1\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{\tau_3}{\tau_2}R_3\sin(L_3-H_2)\right)\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)+\frac{a_1\tau_1\tau_3}{6r_2^{\,3}\tau_2}(\tau_1-\tau_3)\left(R_3\sin(L_3-H_2)-R_1\sin(L_1-H_2)\right).$$

Da aber

$$R_3\sin(L_3-H_2)-R_1\sin(L_1-H_2)=(R_3+R_1)\sin\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\cos\left(\tfrac{1}{2}(L_3+L_1)-H_2\right)+$$
$$+(R_3-R_1)\cos\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\sin\left(\tfrac{1}{2}(L_3+L_1)-H_2\right)$$

von der ersten Ordnung ist, so ist das ganze letzte Glied unter Berücksichtigung, daß $\frac{1}{a_1}$ von der zweiten Ordnung ist, von der ersten Ordnung und seine Weglassung bringt also in ϱ_2 einen Fehler erster Ordnung hervor, der überhaupt unvermeidlich ist. Nimmt man also nur das erste Glied, so wird

$$\varrho_2=c_2-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}c_1+\frac{\tau_3}{\tau_2}\tau_3\right)\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)=c_2-\frac{c_1+\frac{\tau_3}{\tau_1}c_3}{1+\frac{\tau_3}{\tau_1}}\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)$$

ein wirklicher Näherungswert. Vergleicht man dies aber mit 30), so sieht man, daß

$$Q=\tau_1\tau_3\,,\qquad P=\frac{\tau_3}{\tau_1}$$

diesen herbeiführt.

Wir rechnen nun zuerst mit der allgemeinen Gl. 30) weiter und behalten uns noch vor, welche Werte für P und Q in erster Näherung wir gebrauchen wollen. Die Werte 31) sind hierzu unter allen Umständen brauchbar, können aber durch genauere ersetzt werden; die Werte 32) dienen für alle späteren Näherungen. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\frac{c_1+c_3P}{1+P}&=c\\ c_2-c&=k\\ \tfrac{1}{2}cQ&=l,\end{aligned}\qquad 33)$$

so schreibt sich 30) in folgender einfacher Gestalt:

$$\varrho_2=k-\frac{l}{r_2^{\,3}},$$

die nun mit der zweiten Beziehung zwischen ϱ_2 und r_2:

$$r_2^{\,2}=R_2^{\,2}+\varrho_2^{\,2}+2R_2\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_2)$$

zu verbinden ist. Wir haben schon oben (Seite 257) gesehen, daß

$$\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_2)=\cos\delta_2$$

ist, wo δ_2 den Winkel an der Erde zwischen den Richtungen nach dem Planeten und dem der Sonne entgegengesetzten Punkt der Sphäre bedeutet. Da wir diesen

Winkel weiter beibehalten wollen, soll seine Berechnung gezeigt werden. Im nebenstehenden Dreieck hat man:

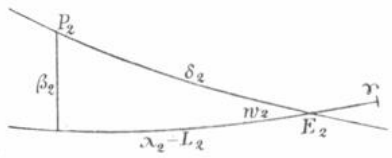

Fig. 47.

$$\begin{aligned} \sin w_2 \sin \delta_2 &= \sin \beta_2 \\ \cos w_2 \sin \delta_2 &= \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2) \\ \cos \delta_2 &= \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2) . \end{aligned} \tag{34}$$

Man kann $\sin \delta_2$ immer positiv annehmen, wenn man w_2 von 0° bis 360° laufen läßt.

Eliminiert man ϱ_2 aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_2 &= k - \frac{l}{r_2^3} \\ r_2^2 &= R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos \delta_2 , \end{aligned} \tag{35}$$

so entsteht eine Gleichung achten Grades in r_2, aus der dieses ermittelt werden muß. Wir haben dieselbe schon gelegentlich des Lambertschen Satzes abgeleitet; sie steht überhaupt im Mittelpunkt einer jeden Bahnbestimmungsmethode. Lambert*) scheint zuerst auf sie gestoßen zu sein, wenn auch in noch etwas unkorrekter Form. Lagrange**) hat sie zuerst völlig einwandfrei aufgestellt. Auch in der auf ganz anderen Grundlagen beruhenden Methode von Laplace***) tritt sie auf. Die Auflösung derselben auf eine höchst einfache Rechnung zurückzuführen, ist Gauß†) gelungen, weshalb sie häufig als Gaußsche Gleichung bezeichnet wird. Führt man in dem ebenen Dreieck zwischen Sonne, Erde und Planet noch den Winkel am Planeten ein: z, so wird:

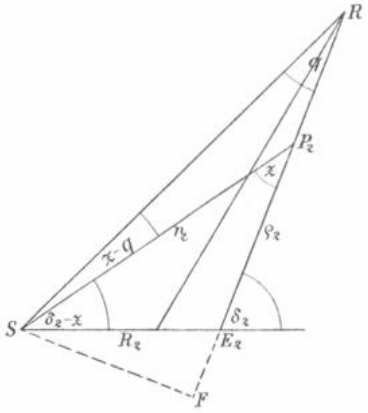

Fig. 48.

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z} , \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin (\delta_2 - z)}{\sin z} . \tag{36}$$

Trägt man letzteren Wert in die erste Gl. 35) ein:

$$\frac{R_2 \sin (\delta_2 - z)}{\sin z} - k + \frac{l}{r_2^3} = 0$$

und setzt

$$\begin{aligned} R_2 \sin \delta_2 &= \mu \sin q \\ R_2 \cos \delta_2 + k &= \mu \cos q , \end{aligned} \tag{37}$$

so wird daraus:

$$\frac{\mu \sin (z - q)}{\sin z} = \frac{l}{r_2^3}$$

---

*) *Lambert*, Orb. Com. 1761. Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 70.
**) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV. p. 469.
***) *Laplace*, Méc. cél. Vol. I, Livre II, No. 31.
†) *Gauß*, Theoria motus No. 141.

und wenn hier r_2 noch durch seinen obigen Wert 36) ersetzt wird:

$$\mu \sin(z - q) = \frac{l \sin z^4}{(R_2 \sin \delta_2)^3}.$$

Setzt man endlich zur Abkürzung

$$\frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} = m, \qquad 38)$$

so erscheint die Gleichung:

$$\sin(z - q) = m \sin z^4. \qquad 39)$$

Werden hierin m und q als bekannt angenommen, so kann z ermittelt werden; hierauf folgen r_2 und ϱ_2 durch die Gl. 36). — Die durch 37) eingeführten Hilfsgrößen μ und q besitzen eine merkwürdige geometrische Bedeutung, die wir leicht durch unsere Betrachtungen über den Lambertschen Satz (Seite 240) feststellen können, zugleich mit der Bedeutung der durch 33) definierten Größe k. Vergleichen wir nämlich die erste Gl. 35) mit der dort (Seite 240) abgeleiteten Gl. 4), so ersehen wir, daß die Größe k mit der auch dort so bezeichneten identisch ist, also wie dort gezeigt folgende geometrische Bedeutung besitzt. Wird auf der Linie $E_2 P_2$ der Punkt R, wo die Verbindungslinie der Sehnenschnittpunkte der Erd- und Planetenbahn hintrifft aufgesucht, so ist k die Entfernung dieses Punktes von E_2. Fällt man nun von S das Lot $SF = R_2 \sin \delta_2$ auf $E_2 R$ und verbindet R mit S, so wird $RF = k + R_2 \cos \delta_2$ und daher im Dreieck SFR:

$$R_2 \sin \delta_2 = SR \sin \widehat{SRF}$$

$$k + R_2 \cos \delta_2 = SR \cos \widehat{SRF},$$

d. h., wie die Vergleichung mit 37) zeigt, μ ist die Entfernung des Punktes R von der Sonne und q ist der Winkel bei R zwischen den Richtungen nach der Sonne und nach dem Planeten.

Bei der Auflösung der Gleichungen 37) kann man den Quadranten von q stets so wählen, daß μ das Zeichen von l hat; es wird dann m stets eine positive Größe.

Die *Auflösung der transzendenten Gl.* 39) nach z kann leicht durch Versuche bewerkstelligt werden, wozu es sich vor allem um die Beschaffung eines ersten Näherungswertes handelt. Hat man eine Kometenbahn zu bestimmen, so ist meist bereits eine parabolische Bahnbestimmung vorangegangen, durch die man genäherte Werte von r_2 oder ϱ_2 kennen gelernt hat; durch diese aber erhält man nach 36)

$$\sin z = \frac{R_2}{r_2} \sin \delta_2 = \frac{R_2}{\varrho_2} \sin(\delta_2 - z).$$

Ist dies nicht der Fall, so wird man wenigstens beachten, daß z kleiner als δ sein muß, da sonst ein negativer Wert von ϱ_2 sich ergäbe. Handelt es sich um einen kleinen Planeten in der Nähe der Opposition, so wird z kaum größer als 8°, $\sin z^4$ ist also klein und daher auch $\sin(z - q)$; daraus folgt, daß q ein Näherungswert von z sein wird und daß daher der aus

$$\sin(z - q) \mp m \sin q^4$$

sich ergebende Wert von z der Wahrheit schon ziemlich nahe kommen wird. Man kann dann mit logarithmischen Differenzen weiter operieren. Aus 39) folgt

$$\log m + 4\log\sin z - \log\sin(z-q) = 0;$$

hat man aber nur den Näherungswert z_1 eingetragen, so wird

$$\log m + 4\log\sin z_1 - \log\sin(z_1-q) = \Delta$$

sein. Nennt man

d die log. Differenz für 1″ Änderung von z_1 in $\sin z_1$
D - - - - - - - - $\sin(z_1-q)$,

dz die Korrektion von z_1, welche Δ zum Verschwinden bringt, so daß z_1+dz der wahre Wert wird, so ist offenbar

$$dz(4\,\mathrm{d}-\mathrm{D}) = -\Delta$$

die Bedingung dafür, daß z_1+dz der Gleichung genügt; also wird man z_1 um

$$dz = \frac{\Delta}{\mathrm{D}-4\,\mathrm{d}}$$

zu korrigieren haben. — *Tietjen* schlägt folgendes noch schneller fördernde Verfahren vor. Ist $q+dz$ der genaue Wert von z, so muß

$$\sin dz = m\sin(q+dz)^4$$

erfüllt sein; daraus folgt durch Entwicklung, daß genähert

$$dz = m\sin q^4 + 4m\sin q^3\cos q\,dz$$

oder

$$dz = \sin(z'-q) = \frac{m\sin q^4}{1-4m\sin q^4\operatorname{cotg} q} \qquad \text{(a)}$$

sein muß. Leitet man mit dem hieraus folgenden z' den weiteren Näherungswert z'' aus

$$\sin(z''-q) = m\sin z'^4 \qquad \text{(b)}$$

ab und notiert dabei wie oben die logarithmischen Differenzen d und D, so wird die Bedingung für den folgenden Näherungswert z''' nach dem Obigen:

$$z'''-z'' = \frac{\Delta}{\mathrm{D}-4d},$$

wo

$$\begin{aligned}\Delta &= \log m + 4\log\sin z'' - \log\sin(z''-q)\\ &= \log m + 4\log\sin z'' - \log m - 4\log\sin z'\\ &= 4\log\sin z'' - 4\log\sin z' = 4(z''-z')\,\mathrm{d}.\end{aligned}$$

Der nur selten einer weiteren Verbesserung bedürftige Wert z''' wird also aus

$$z''' = z'' + \frac{4\,\mathrm{d}}{\mathrm{D}-4\,\mathrm{d}}(z''-z') \qquad \text{(c)}$$

erhalten. Die Durchrechnung von (a), (b), (c) löst die Gl. 39).

Beispiel. Auflösung der Gleichung: $\sin(x - 5^\circ 56' 14''.4) = [1.304548] \sin x^4$. (Erste Methode.)

$\sin q$	9.014691		Δ	+ 1827	D − 4d = 752.0
$\sin q^4$	6.058764		dx	+ 2''.43	
m	1.304548		x_3	6° 4' 58''.79	
$\sin(x_1 - q)$	7.363312	D = 911.5	$\sin x_3$	9.025179	d = 19.8
$x_1 - q$	0° 7' 56''.14		$\sin x_3^4$	6.100716	
x_1	6 4 10.54		$m \sin x_3^4$	7.405264	
$\sin x_1$	9.024225	d = 19.8	$\sin(x_3 - q)$	7.405229	D = 828
$\sin x_1^4$	6.096900		Δ	+ 35	D − 4d = 749
$m \sin x_1^4$	7.401448		dx	+ 0''.04	
Δ	+ 38136	D − 4d = 832.3	x	6° 4' 58''.83.	
dx	+ 45''.82				
x_2	6° 4' 56''.36				
$\sin x_2$	9.025131	d = 19.8			
$\sin x_2^4$	6.100524				
$m \sin x_2^4$	7.405072				
$\sin(x_2 - q)$	7.403245	D = 831.2			

Ein Beispiel für die zweite Methode findet sich unten bei der vollständigen Durchführung einer Bahnbestimmung. Ein graphisches Verfahren für die Auflösung der Gaußschen Gleichung hat Radau angegeben (Bulletin Astr. T. II, S. 1, 1885).

86. Die Hypothesenrechnung. Wir haben uns oben überzeugt, daß man einen ersten Näherungswert von ϱ_2 und r_2 erhält, wenn man in den Formeln 33), 34), 37), 38), 39), 36), nämlich zusammengestellt:

$$\frac{c_1 + c_3 P}{1 + P} = c \qquad \sin w_2 \sin \delta_2 = \sin \beta_2$$
$$c_2 - c = k \qquad \cos w_2 \sin \delta_2 = \cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$$
$$\tfrac{1}{2} c Q = l \qquad \cos \delta_2 = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$

40)

$$\mu \sin q = R_2 \sin \delta_2 \qquad m = \frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3}$$
$$\mu \cos q = R_2 \cos \delta_2 + k$$
μ hat das Zeichen von l

$$\sin(x - q) = m \sin x^4$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin x}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - x)}{\sin x}$$

für P und Q in erster Näherung $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ bzw. $\tau_1 \tau_3$ nimmt. Dies ist der *Gauß*sche Weg. Man kann aber nach *Encke*, wie jetzt gezeigt werden soll, durch Einführung anderer Werte für k und l eine bessere Näherung für r_2 und ϱ_2 erlangen. Zu diesem Ende gehen wir von der oben abgeleiteten Form 27) der Grundgleichung aus, nämlich

$$\varrho_2 = c_1 (N_1 - n_1) + c_3 (N_3 - n_3) \qquad 27)$$

und substituieren darin für n_1 und n_2 die Entwicklungen 17) (Seite 177), soweit sie bekannt sind, nämlich

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{r_2^3} + \cdots\right), \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{r_2^3} + \cdots\right),$$

dann kommt:

$$\varrho_2 = c_1\left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + c_3\left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) - \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}\left(c_1\frac{\tau_2+\tau_1}{\tau_2} + c_3\frac{\tau_2+\tau_3}{\tau_2}\right);$$

wird also gesetzt:

$$\begin{gathered}\frac{\tau_1}{\tau_2} = n_1^0, \quad \frac{\tau_3}{\tau_2} = n_3^0, \quad \frac{\tau_1\tau_3}{6} = q^0 \\ c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0) = k^0 \\ q^0(1+n_1^0) = \nu_1, \quad q^0(1+n_3^0) = \nu_3 \\ c_1\nu_1 + c_3\nu_3 = l^0,\end{gathered} \tag{41}$$

so erscheint:

$$\varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2^3}$$

d. h. eine Gleichung von derselben Bildung wie 35). Setzt man also in 40) statt k und l die aus 41) hervorgehenden k^0 und l^0, so erhält man wie dort r_2 und ϱ_2, aber etwas genauer.

Die Durchführung der weiteren Näherungen gestaltet sich ganz gleich, ob man nach 40) oder nach 41) gerechnet hat. Man braucht genauere Werte von n_1 und n_3, die nur durch Berechnung der beiden äußeren Radienvektoren r_1 und r_3 erlangt werden können, ob man nun damit die Elemente berechnet und daraus $\frac{dr_2}{d\tau}$, das in den nicht berücksichtigten Entwicklungsgliedern von n_1 und n_3 auftritt, oder ob man die Verbesserung der Dreiecksflächen durch Ermittlung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck anstrebt. Wir zeigen daher zuerst, wie ϱ_1 und ϱ_3 und daraus r_1 und r_3 gefunden werden. Die beiden letzten Formeln in 25) haben hierzu eine bereits völlig genügende Form; setzt man zur Abkürzung die völlig bekannten Größen:

$$\begin{gathered}\frac{Z_1}{D_1} = M_1, \qquad \frac{Z_3}{D_3} = M_3 \\ R_1\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} = M_1', \qquad R_3\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3} = M_3'\end{gathered} \tag{42}$$

so folgt:

$$\begin{gathered}n_1\overline{\varrho_1} = M_1\overline{\varrho_2} + M_1'(N_1 - n_1) \\ n_3\overline{\varrho_3} = M_3\overline{\varrho_2} + M_3'(N_3 - n_3)\end{gathered} \tag{43}$$

Kontrolle: $n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$.

Hat man nach 40) gerechnet, so wird man hierin für n_1 und n_3, da jetzt r_2 bekannt ist, nach 32) nehmen können:

$$\begin{gathered}P = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \qquad Q = \tau_1\tau_3 \\ n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)\frac{1}{1+P}, \qquad n_3 = n_1 P.\end{gathered} \tag{44}$$

Hat man nach 41) gerechnet, so wird mittels der schon dort benutzten Hilfsgrößen:

$$n_1 = n_1^0 + \frac{\nu_1}{r_2^3}, \qquad n_3 = n_3^0 + \frac{\nu_3}{r_2^3}. \tag{45}$$

Die geozentrischen Koordinaten λ, β, ϱ sind jetzt für alle drei Örter in erster Näherung bekannt geworden. Daraus leitet man die heliozentrischen l, b, r leicht ab, am bequemsten mittels der Formeln 20) (Seite 32):

$$\begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \bar{\varrho}\cos(\lambda - L) + R \\ r\cos b\sin(l-L) &= \bar{\varrho}\sin(\lambda - L) \\ r\sin b &= \bar{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\beta\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Das hieraus neuerdings hervorgehende r_2 muß mit dem früher erhaltenen übereinstimmen, was aber keineswegs eine weitgehende Kontrolle ist. Durchgreifende Prüfungen werden sich bald darbieten. Wie man aus zwei heliozentrischen Örtern, als welche man hier am sichersten die beiden äußersten wählt, Knoten und Neigung der Bahnebene und dann die Argumente der Breite u bestimmt, haben wir schon in Nr. 69 behandelt und wollen hier nur die am häufigsten angewendeten Formeln zusammenstellen:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,i\sin(l_1 - \Omega) &= \mathrm{tg}\,b_1 \\ \mathrm{tg}\,i\cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\mathrm{tg}\,b_3 - \mathrm{tg}\,b_1\cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)} \\ \mathrm{tg}\,u_1 &= \mathrm{tg}(l_1 - \Omega)\sec i \\ \mathrm{tg}\,u_2 &= \mathrm{tg}(l_2 - \Omega)\sec i \\ \mathrm{tg}\,u_3 &= \mathrm{tg}(l_3 - \Omega)\sec i\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Da der mittlere Ort in der Bahnebene gelegen sein muß, so kann man die Prüfungsgleichung anwenden

$$\mathrm{tg}\,i\sin(l_2 - \Omega) = \mathrm{tg}\,b_2\,, \tag{48}$$

die von großer Wichtigkeit und durchgreifender Wirkung ist, da sie auch alle für die Bedingung der Ebene berechneten Hilfsgrößen kontrolliert. Die mittels der r und u gebildeten Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, nämlich:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \quad \text{und} \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \tag{49}$$

müssen mit den Werten 45) von n_1 bzw. n_3, welche der Hypothese zugrunde liegen, übereinstimmen, was eine weitere, gute Prüfung der bisherigen Rechnung gestattet.

Durch die Radienvektoren r_1, r_2, r_3, die von ihnen eingeschlossenen Winkel $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ und $u_3 - u_1$, und durch die Zwischenzeiten $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_3 - t_1$ kann man nach einer der in Nr. 49 für die Ellipse, in Nr. 57 für die Parabel und in Nr. 61 für die Hyperbel auseinandergesetzten Methoden die Verhältnisse Sektor durch Dreieck bestimmen. Zuvor wird man jedoch die Beobachtungszeiten für Planetenaberration korrigieren (Nr. 27), d. h. man wird statt t_1, t_2, t_3 benutzen:

$$t_1^0 = t_1 - A\varrho_1\,, \qquad t_2^0 = t_2 - A\varrho_2\,, \qquad t_3^0 = t_3 - A\varrho_3\,,$$

wo A die Lichtzeit ist. Hat man die t in Bruchteilen des Tages angesetzt, so wird $\log A = 7.76118_{-10}$. Es seien $y_1 = \frac{(23)}{[r_2 r_3]}$, $y_2 = \frac{(13)}{[r_1 r_3]}$ und $y_3 = \frac{(12)}{[r_1 r_2]}$ die Ver-

hältnisse Sektor durch Dreieck, dann wird, weil sich die Sektoren wie die Zwischenzeiten verhalten:

$$\begin{aligned}(n_1)_{II} &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_2}{y_1}\frac{(23)}{(13)} = \frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{t_3^0 - t_2^0}{t_3^0 - t_1^0}\\ (n_3)_{II} &= \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_2}{y_3}\frac{(12)}{(13)} = \frac{y_2}{y_3}\frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_1^0}.\end{aligned} \qquad 50)$$

Dieses sind die verbesserten Werte für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, mit denen nun die zweite Annäherung durchgeführt werden muß. Bedient man sich der Formel 40), so ist also darin zu setzen nach 32):

$$\begin{aligned}P &= \frac{(n_3)_{II}}{(n_1)_{II}} = \frac{y_1}{y_3}\frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_2^0} = \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}\\ Q &= 2\left((n_1)_{II} + (n_3)_{II} - 1\right) r_2^3 .\end{aligned}$$

Um Q einfacher zu schreiben, ziehen wir den Ausdruck 5[a]) (Seite 153) für den Parameter p heran, der in der hier benutzten Bezeichnung wie folgt lautet:

$$p = \frac{[r_2 r_3][r_1 r_2]}{n_1 + n_3 - 1}\,\frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)};$$

da nun

$$\begin{aligned}[r_2 r_3] &= \frac{(23)}{y_1} = \frac{k\sqrt{p}(t_3 - t_2)}{y_1} = \frac{\sqrt{p}\,\tau_1}{y_1}\\ [r_1 r_2] &= \frac{(12)}{y_3} = \frac{k\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{y_3} = \frac{\sqrt{p}\,\tau_3}{y_3},\end{aligned}$$

so folgt

$$[r_2 r_3][r_1 r_2] = \frac{p\,\tau_1\tau_3}{y_1 y_3}$$

und daher:

$$n_1 + n_3 - 1 = \frac{\tau_1\tau_3}{y_1 y_3}\,\frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}P &= \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}\\ Q &= \frac{\tau_1^0\tau_3^0}{y_1 y_3}\,\frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.\end{aligned} \qquad 51)$$

Hat man das Verfahren nach 41) eingeschlagen, so wird man in der zweiten Hypothese zunächst neu zu rechnen haben:

$$\frac{\tau_1^0}{\tau_2^0} = n_1^0, \qquad \frac{\tau_3^0}{\tau_2^0} = n_3^0.$$

Dann wird nach 50)

$$n_1 = \frac{y_2}{y_1} n_1^0, \qquad n_3 = \frac{y_2}{y_3} n_3^0,$$

oder

$$n_1 = n_1^0 + n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right), \qquad n_3 = n_3^0 + n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)$$

und wenn dies in

$$\varrho_2 = c_1(N_1 - n_1) + c_3(N_3 - n_3)$$

eingetragen wird:

$$\varrho_2 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0) - \frac{1}{r_2^3}\left(c_1 n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) r_2^3 + c_2 n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right) r_2^3\right).$$

Setzt man also neuerdings wie früher

$$k^0 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0),$$

aber nunmehr:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 = n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) r_2^3, \qquad \nu_3 = n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right) r_2^3 \\ c_1\nu_1 + c_3\nu_3 = l^0, \\ \varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2^3}, \end{aligned}\right\} \quad 52)$$

so wird wieder

und das Verfahren kann nun mit ungeänderten Formeln fortgesetzt werden.

Die Hypothesenrechnung kann als abgeschlossen betrachtet werden, wenn die bei der letzten Hypothese benutzten n_1 und n_3 sich durch

$$n_1^0 \cdot \frac{y_2}{y_1} \text{ und } n_3^0 \cdot \frac{y_2}{y_3}$$

wieder ergeben. Es sind dann die richtigen Werte der Verhältnisse der Dreiecksflächen benutzt worden. Eine zweite Hypothese muß man schon deshalb rechnen, weil bei der ersten die Zeiten nicht für Aberration korrigiert waren. Mehr als zwei Hypothesen sind aber nur in den Fällen erforderlich, wo es sich um große Zwischenzeiten oder um elliptische Kometenbahnen handelt.

Ist die Hypothesenrechnung abgeschlossen, so schreitet man zur *Elementenbestimmung*. Wir haben diese Aufgabe in Nr. 50 bereits vollständig behandelt und können uns daher hier darauf beschränken anzugeben, daß der Parameter p aus allen drei Zwischenzeiten ermittelt werden kann. Es ist nämlich:

$$\sqrt{p} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2) y_1}{\tau_1^0} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1) y_2}{\tau_2^0} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1) y_3}{\tau_3^0}$$

und diese drei Werte müssen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Rechnung übereinstimmen, was eine gute Kontrolle bietet. Bei geringen Abweichungen verdient natürlich der zweite Wert ein größeres Gewicht.

Eine durchgreifende Schlußkontrolle der ganzen Rechnung wird durch die Nachrechnung eines der geozentrischen Örter, am einfachsten des mittleren, geboten, wenn man direkt von den Elementen ausgeht und keine Größen der vorangegangenen Rechnung entnimmt. Man muß sich also folgender Formeln bedienen:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= M_0 + (t_2^0 - t_0)\mu \\ E_2 - e\sin E_2 &= M_2 \\ r_2\sin v_2 &= a\cos\varphi\sin E_2 \\ r_2\cos v_2 &= a(\cos E_2 - e) \\ u_2 &= v_2 + \omega \\ \varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Omega) &= r_2\cos u_2 - R_2\cos(L_2 - \Omega) \\ \varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - \Omega) &= r_2\sin u_2\cos i - R_2\sin(L_2 - \Omega) \\ \varrho_2\sin\beta_2 &= r_2\sin u_2\sin i. \end{aligned}\right\} \quad 53)$$

Mehr als eine Darstellung der drei Örter innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der benutzten Logarithmentafel kann die Methode nicht gewähren. Man kann die Elemente aber oft in weiten Grenzen variieren, ohne diese Darstellung zu gefährden.

87. Zusammenstellung der Formeln für eine erste Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. Zur Übersicht über die bisherigen Entwicklungen und zur Vorlage für die Rechnung stellen wir im folgenden die Bahnbestimmungsformeln zusammen. Die Koordinaten seien auf Ekliptik und Äquinoktium des Jahresanfanges reduziert, auch die Fixsternaberration sei in Abzug gebracht, da wir die Berücksichtigung der Aberration nach der ersten Methode in Nr. 27 voraussetzen. Parallaxe und Sonnenbreiten werden bei ersten Bahnbestimmungen zweckmäßig vernachlässigt; will man sie berücksichtigen, so kann dies nach Nr. 35 geschehen. Die Formeln sind selbstverständlich auch anwendbar, wenn bereits eine erste Bahnbestimmung vorausgegangen ist und eine zweite mit anderen Beobachtungen sich daran schließen soll. Die dann möglichen Modifikationen der Formeln und die Vorteile, die man aus der ersten Bestimmung ziehen kann, werden wir in Nr. 96 besprechen.

Daten:

	Des Planeten		Der Erde	
Beob. Z.	Länge	Breite	Länge	log Rad. vect.
t_1	λ_1	β_1	L_1	$\log R_1$
t_2	λ_2	β_2	L_2	$\log R_2$
t_3	λ_3	β_3	L_3	$\log R_3$

I. Lage des größten Kreises 1,3 und Abstand des Punktes 2.

$$\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_1$$

$$\operatorname{tg}\eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

Kontrolle: $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_3$

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_2 - H_2)$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}\eta_2 \sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}.$$

II. Zwischenzeiten.

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2)$$
$$\tau_2 = k(t_3 - t_1)$$
$$\tau_3 = k(t_2 - t_1)$$

$$\log k = 8.235\,5814_{-10}$$

$$q^0 = \frac{\tau_1 \tau_3}{6} \qquad \log\tfrac{1}{6} = 9.221\,8487_{-10}$$

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3^0 = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$\nu_1 = q^0(1 + n_1^0), \qquad \nu_3 = q^0(1 + n_3^0).$$

III. Erdbahn.

$$N_1 = \frac{R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}, \qquad N_3 = \frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}$$

$$c_1 = a_1 R_1 \sin(L_1 - H_2), \quad c_2 = a_1 R_2 \sin(L_2 - H_2), \quad c_3 = a_1 R_3 \sin(L_3 - H_2)$$

Kontrolle: $c_1 N_1 + c_3 N_3 = c_2$.

IV. Koeffizienten der Gaußschen Gleichung.

$$k^0 = c_1(N_1 - n_1{}^0) + c_3(N_3 - n_3{}^0)$$
$$l^0 = c_1\nu_1 + c_3\nu_3$$
$$\sin w_2 \sin\delta_2 = \sin\beta_2$$
$$\cos w_2 \sin\delta_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \qquad \delta < 180^\circ$$
$$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$
$$\mu \sin q = R_2 \sin\delta_2 \qquad \mu \text{ hat das Zeichen von } l^0$$
$$\mu \cos q = R_2 \cos\delta_2 + k^0$$
$$m = \frac{l^0}{\mu(R_2 \sin\delta_2)^3}.$$

V. Auflösung der Gaußschen Gleichung.

$$\sin(z - q) = m \sin z^4$$
$$\sin(z' - q) = \frac{m \sin q^4}{1 - 4m \sin q^4 \operatorname{cotg} q}$$
$$\sin(z'' - q) = m \sin z'^4$$

d log. Diff. für 1″ in $\sin z'$
D » » » » » $\sin(z'' - q)$

$$z''' = z'' + \frac{4\,\mathrm{d}}{\mathrm{D} - 4\,\mathrm{d}}(z'' - z').$$

VI. Mittlerer Ort.

$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad \overline{\varrho_2} = \varrho_2 \cos\beta_2$$

Kontrolle: $\varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2{}^3}$.

VII. Koeffizienten für die Gl. in ϱ_1 und ϱ_3.

$$n_1 = n_1{}^0 + \frac{\nu_1}{r_2{}^3}, \qquad n_3 = n_3{}^0 + \frac{\nu_3}{r_2{}^3}$$
$$Z_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$D_1 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_3 - H_2)$$
$$Z_3 = \sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2$$
$$D_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_1 - H_2)$$
$$M_1 = \frac{Z_1}{D_1}, \qquad M_3 = \frac{Z_3}{D_3}$$
$$M_1' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} R_1, \qquad M_3' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3} R_3.$$

VIII. Best. von ϱ_1 und ϱ_3.

$$n_1\overline{\varrho_1} = M_1\overline{\varrho_2} + M_1'(N_1 - n_1)$$
$$n_3\overline{\varrho_3} = M_3\overline{\varrho_2} + M_3'(N_3 - n_3)$$
Kontrolle: $n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$
$$\varrho_1 = \overline{\varrho_1}\sec\beta_1, \qquad \varrho_3 = \overline{\varrho_3}\sec\beta_3.$$

IX. Hel. Örter und Bahnlage.

$$r\cos b \sin(l - L) = \bar{\varrho}\sin(\lambda - L)$$
$$r\cos b \cos(l - L) = \bar{\varrho}\cos(\lambda - L) + R$$
$$r\sin b = \bar{\varrho}\operatorname{tg}\beta$$
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
Kontrolle: $\operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} b_2$.

X. $\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$ Bei Planeten: u im Quadranten von $l - \Omega$.
$\operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2 - \Omega)\sec i$ » Kometen: $u < 180^\circ$ wenn die Breite +
$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i$ » » $u > 180^\circ$ » » » —

Kontrolle: $\dfrac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} = n_1$, $\qquad \dfrac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} = n_3$.

XI. Verbesserung der Beobachtungszeiten für Aberration.

$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A$, $t_2^0 = t_2 - \varrho_2 A$, $t_3^0 = t_3 - \varrho_3 A$ $\quad \log A = 7.76118_{-10}$ in Einheiten des Tages

$k(t_3^0 - t_2^0) = \tau_1^0$, $k(t_3^0 - t_1^0) = \tau_2^0$, $k(t_2^0 - t_1^0) = \tau_3^0$

$\dfrac{\tau_1^0}{\tau_2^0} = n_1^0$, $\qquad \dfrac{\tau_3^0}{\tau_2^0} = n_3^0$.

XII. Sektor durch Dreieck.

Nach Hansen:

$$m_2 = \frac{\tau_2^{0\,2}}{(2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3})^3}$$

$$\sec\gamma_2 = \frac{r_1 + r_3}{2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3}}$$

$$l_2 = \tfrac{1}{2}(\sec\gamma_2 - 1)$$

$$h_2 = \frac{m_2}{\frac{5}{6} + l_2}$$

$$y_2 = 1 + \frac{\frac{10}{11}\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h}$$

$$1 + \tfrac{11}{9}h$$

$\log\frac{10}{11} = 9.958\,6073$
$\log\frac{11}{9} = 0.087\,1502$
$\log\frac{5}{6} = 9.920\,8188$

oder nach Encke:

$$\cos\gamma_2 = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{r_1 + r_3}$$

$$\Gamma_2 = \log\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}$$

(Γ_2 mit Argument $\log\sec\gamma_2$ aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen)

$$\eta_2 = \frac{\tau_2^{0\,2}}{k^2(r_1 + r_3)^3} \qquad \log k^2 = 6.471\,1629_{-10}$$

$$\log y_2 = a'\eta_2 + a''\eta_2 - b''\eta_2^2$$

$\log a' = 3.233\,8859$
$a'' = 3.614\,0972 - \Gamma_2$
$b'' = 0.034\,1076$,

wobei die siebente Dezimale als Einheit genommen ist. Bei großen Zwischenzeiten bedient man sich der Gaußschen Methode (Nr. 49). Ebenso werden y_1 und y_3 berechnet.

XIII. Zweite Hypothese.

$k^0 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0)$

$\nu_1 = n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right)r_2^3$, $\quad \nu_3 = n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)r_2^3$ } n_1^0 und n_3^0 aus XI.

$$l^0 = c_1\nu_1 + c_3\nu_3$$

$\mu\sin q = R_2\sin\delta_2$
$\mu\cos q = R_2\cos\delta_2 + k^0$ $\quad \mu$ hat das Zeichen von l^0

$$m = \frac{l^0}{\mu(R_2\sin\delta_2)^3}.$$

Die Formeln VII—XII werden von neuem durchgerechnet, wobei natürlich die Größen δ_2, M_1, M_3, M_1', M_3', N_1, N_3 der früheren Rechnung ungeändert entnommen werden können.

Die Hypothesenrechnung kann als abgeschlossen gelten, wenn $n_1{}^0\frac{y_2}{y_1}$ und $n_3{}^0\frac{y_2}{y_3}$ sich als identisch mit den bei der letzten Hypothese benutzten n_1 bzw. n_3 herausstellen. Bei kleinen Zwischenzeiten tritt dies häufig schon nach Durchrechnung von I—XII ein; dann ist eine zweite Hypothese überhaupt nicht nötig.

Berechnung der Elemente.

XIV. p, e, ω, a.

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2{}^0} y_2 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1{}^0} y_1 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3{}^0} y_3$$

$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1 , \qquad \frac{p}{r_3} - 1 = q_3$$

$$e\cos v_1 = q_1$$

$$e\sin v_1 = \frac{q_1\cos(u_3 - u_1) - q_3}{\sin(u_3 - u_1)}$$

$$e = \sin\varphi , \qquad a = p\sec\varphi^2$$

$$\omega = u_1 - v_1 ; \qquad v_2 = u_2 - \omega ; \qquad v_3 = u_3 - \omega$$

Kontrolle: $r_2 = \frac{p}{1 + e\cos v_2}$.

XV. M_0, μ.

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_1 - E_1) = \sqrt{\frac{r_1}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_1$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - E_3) = \sqrt{\frac{r_3}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_3$$

Kontrolle: $a\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(E_3 - E_1) = \sqrt{r_1 r_3}\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)$

$$M_1 = E_1 - (\sin\varphi)''\sin E_1$$
$$M_3 = E_3 - (\sin\varphi)''\sin E_3 \qquad \log(\sin\varphi)'' = \log\sin\varphi + 5.3144251$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3.5500066$$

Kontrolle: $\mu = \frac{M_3 - M_1}{t_3{}^0 - t_1{}^0}$.

Bei größeren Zwischenzeiten leitet man μ mittels dieser letzteren Formel ab und darauf a aus

$$a = \left(\frac{k''}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nennt man t_0 die Epoche, M_0 die zugehörige mittlere Anomalie, so wird

$$M_0 = M_1 + \mu(t_0 - t_1{}^0) = M_3 + \mu(t_0 - t_3{}^0) .$$

Knoten und Neigung werden bereits bei der Durchrechnung der letzten Hypothese erhalten.

Die zusammengestellten Elemente sind:

Epoche	t_0	
Mittlere Anomalie für die Epoche	M_0	
Abstand des Perihels vom Knoten	ω	Mittl. Äqu. und Ekliptik des Jahresanfanges
Länge des Knotens	Ω	
Neigung gegen die Ekliptik . . .	i	
Exzentrizitätswinkel	φ	
Mittlere tägliche Bewegung . . .	μ	
Log der halben großen Achse . .	$\log a$.	

XVI. Berechnung des mittleren Ortes nach den Formeln 53 (Seite 277).

88. Beispiel einer ersten Bahnbestimmung. Die folgenden Seiten enthalten ein nach den vorausgehenden Formeln durchgeführtes Beispiel und zwar ist jede bei der Rechnung zur Niederschrift gelangte Zahl mitgeteilt. Auch die Bedeutung jeder Zahl ist, so weit möglich, angegeben, damit man imstande sei, zu erkennen, wie die Rechnung möglichst übersichtlich anzulegen ist. Zugrunde gelegt sind die Heidelberger Beobachtungen des Planeten 1904 OA in Astr. Nachr. Band 165, S. 349; die Beobachtungszeiten wurden in Berliner Zeit und dann in Bruchteile des Tages verwandelt; die Örter beziehen sich auf das Äquinoktium des Jahresanfanges und sind von der Fixsternaberration befreit. Die Verwandlung der äquatorialen Koordinaten in ekliptikale ist Seite 22 durchgeführt. Die Erdörter sind aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert.

Planet (534) [1904 OA]

	1904		1904.0		1904.0		
t_1	Apr. 19.62201	λ_1	209° 52′ 35″.1	L_1	209° 34′ 6″.5	$\log R_1$	0.00 2167
t_2	35.47806	λ_2	206 39 3.9	L_2	224 58 10.5	» R_2	0.00 3924
t_3	49.46833	λ_3	204 26 33.6	L_3	238 28 22.0	» R_3	0.00 5255
				H_2	165 46 52.7	» a_1	1.90 0447
I. $\operatorname{tg}\beta_1$	8.89 0670	$\operatorname{tg}\beta_2$	8.87 2248	$\operatorname{tg}\beta_3$	8.84 3836	$(\lambda_3-\lambda_1)$	$-5°\,26'\,1''.5$
$\operatorname{tg}\eta_2\cos(\lambda_1-H_2)$	8.90 4390	$\operatorname{tg}\beta_0$	8.86 3958	$\operatorname{tg}\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1)$	8.88 8714	sin »	$8.97\,6326_n$
$\cos(\lambda_1-H_2)$	9.85 6237	$\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0$	7.14 8908	Sub.	9.03 6880	cos »	9.99 8044
$\operatorname{tg}\eta_2$	9.04 8153	$\operatorname{tg}\eta_2\sec\beta_2$	9.04 9355	Zähl.	$7.88\,0716_n$	$\operatorname{tg}\eta_2$	9.04 8153
λ_1-H_2	44° 5′ 42″.4	λ_2-H_2	40° 52′ 11″.2	λ_3-H_2	38° 39′ 40″.9	$\operatorname{tg}\eta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)$	$8.02\,4479_n$
sin »	9.84 2516	sin »	9.81 5805	sin »	9.79 5682		
II. t_3-t_2	1.14 5826	t_2-t_1	1.20 0195	t_3-t_1	1.47 4891	t_3-t_2	13.99 027
τ_1	9.38 1407	τ_3	9.43 5776	τ_2	9.71 0472	t_2-t_1	15.85 605
$n_1{}^0$	9.67 0935	$n_3{}^0$	9.72 5304	$\tau_1\,\tau_3$	8.81 7184	t_3-t_1	29.84 632
$1+n_1{}^0$	0.16 6946	$1+n_3{}^0$	0.18 5047	q^0	8.03 9033		
ν_1	0.20 5979	ν_3	8.22 4080				
III. L_3-L_2	13° 30′ 11″.5	L_2-L_1	15° 24′ 4″.0	L_3-L_1	28° 54′ 15″.5	L_1-H_2	43° 47′ 13″.8
sin »	9.36 8286	sin »	9.42 4187	sin »	9.68 4260	L_2-H_2	59 11 17.8
$R_2\,R_3$	0.00 9179	$R_1\,R_2$	0.00 6091	$R_1\,R_3$	0.00 7422	L_3-H_2	72 41 29.3
	9.37 7465		9.43 0278		9.69 1682	$\sin(L_1-H_2)$	9.84 0094
N_1	9.68 5783	N_3	9.73 8596			$\sin(L_2-H_2)$	9.93 3920
$N_1-n_1{}^0$	8.21 2255	$N_3-n_3{}^0$	8.21 7770			$\sin(L_3-H_2)$	9.97 9875
c_1	1.74 2708	c_3	1.88 5577	c_2	1.83 8291	$N_1\,c_1$	1.42 8491
						$N_3\,c_3$	1.62 4173

IV. $c_1\,(N_1-n_1^0)$	9.95 4963	$c_1\,\nu_1$	9.94 8687	$R_2\sin\delta_2$	9.51 1940	λ_2-L_2	$-18^\circ 19'\ 6''.6$
$c_3\,(N_3-n_3^0)$	0.10 3347	$c_3\,\nu_3$	0.10 9657	$(R_2\sin\delta_2)^3$	8.53 5820	$\sin(\ \ )$	$9.49\ 7343_n$
k^0	0.33 6492	l^0	0.33 7617	μ	0.49 7249	$\cos(\ \ )$	9.97 7414
$R_2\cos\delta_2$	9.98 0136	$\mu\,(R_2\sin\delta_2)^3$	9.03 3069	δ_2	$18^\circ 47'\ 28''.0$	$\cos\beta_2$	— 1202
$\mu\cos q$	0.49 4913	m	1.30 4548			$\sin w_2\sin\delta_2$	8.87 1046
$\mu\sin q$	9.51 1940	$\sin q'$	6.05 8764			$\cos w_2\sin\delta_2$	$9.49\ 6141_n$
$\cos q$	9.99 7664	$\operatorname{cotg} q$	0.98 2973			$\cos w_2$	$9.98\ 8125_n$
q	$5^\circ 56'\ 14''.4$	4	0.60 2060			$\sin\delta_2$	9.50 8016
$\sin q$	9.01 4691	Summe	8.94 8345			$\cos\delta_2$	9.97 6212

V. $m\sin q'$	7.36 3312	z'	$6^\circ 4'\ 56''.94$	z''	$6^\circ 4'\ 58''.65$		D 828
$1-\ldots\ldots$	9.95 9620	$\sin z'$	9.02 5142	Korr.	+ 0.18		4 d 79.2
$\sin(z'-q)$	7.40 3692	$\sin z'^4$	6.10 0568	z	6 4 58.83		D — 4 d 749
$z'-q$	$0^\circ 8'\ 42''.54$	$m\sin z'^4$	7.40 5116	$\sin z$	9.02 5179		
		$z''-q$	$0^\circ 8'\ 44''.25$	δ_2-z	$12^\circ 42'\ 29''.17$		$\frac{7.9}{749}1''.71=+0''.18$
				$\sin(\delta_2-z)$	9.34 2392		

VI. $R_2\sin(\delta_2-z)$	9.34 6316	r_2	0.48 6761	k^0	0.33 6492	λ_3-L_3	$-34^\circ\ 1'\ 48''.4$
ϱ_2	0.32 1137	r_2^3	1.46 0283	$l^0:r_2^3$	8.87 7334	λ_2-L_3	$-31\ 49\ 18.1$
$\overline{\varrho_2}$	0.31 9935			ϱ_2	0.32 1136	λ_2-L_1	$-\ 2\ 55\ 2.6$
						λ_1-L_1	$+\ 0\ 18\ 28.6$

VII. n_1^0	9.67 0935	n_3^0	9.72 5304	$\sin(\lambda_3-L_3)$	$9.74\ 7900_n$	$\sin(\lambda_2-L_1)$	$8.70\ 6684_n$
$\frac{\nu_1}{r_2^3}$	6.74 5696	$\frac{\nu_3}{r_2^3}$	6.76 3797	$\sin(\lambda_2-L_3)$	$9.72\ 2040_n$	$\sin(\lambda_1-L_1)$	7.73 0348
n_1	9.67 1451	n_3	9.72 5778		$8.62\ 0148_n$		$7.59\ 7354_n$
N_1	9.68 5783	N_3	9.73 8596		8.56 5876		$6.60\ 2596_n$
N_1-n_1	8.19 7171	N_3-n_3	8.20 2228	Z_1	$7.69\ 0086_n$	Z_3	$7.63\ 9227_n$
M_1'	$0.52\ 5909_n$	M_3'	0.71 5612	D_1	$8.00\ 4354_n$	D_3	$7.86\ 4573_n$
				M_1	9.68 5732	M_3	9.77 4654
				$\operatorname{tg}\beta_3\sin(L_3-L_1)$	8.52 8096	$\operatorname{tg}\beta_1\sin(L_3-L_1)$	8.57 4930
					$0.52\ 3742_n$		$0.71\ 0357_n$

VIII. $M_1\,\overline{\varrho_2}$	0.00 5667	$M_3\,\overline{\varrho_2}$	0.09 4589	$n_1\,\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1$	8.87 3068	$\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$	9.19 2183
$M_1'\,(N_1-n_1)$	$8.72\ 3080_n$	$M_3'\,(N_3-n_3)$	8.91 7840	$n_3\,\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3$	8.90 8508		
$n_1\,\overline{\varrho_1}$	9.98 2398	$n_3\,\overline{\varrho_3}$	0.06 4672	$\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$	9.19 2180	$\sec\beta_1$	0.00 1370
$\overline{\varrho_1}$	0.31 0947	$\overline{\varrho_3}$	0.33 8894			$\sec\beta_2$	0.00 1202
ϱ_1	0.31 2317	ϱ_3	0.33 9949			$\sec\beta_3$	0.00 1055

IX. λ_1-L_1	$+0^\circ 18'\ 28''.6$	λ_2-L_2	$-18^\circ 19'\ 6''.6$	λ_3-L_3	$-34^\circ 1'\ 48''.4$	l_1	$209^\circ 46'\ 30''.0$
$\sin$ »	7.73 0348	$\sin$ »	$9.49\ 7343_n$	$\sin$ »	$9.74\ 7900_n$	l_2	$212\ 35\ 36.7$
$\cos$ »	9.99 9994	$\cos$ »	9.97 7414	$\cos$ »	9.91 8420	l_3	$215\ 3\ 44.2$
$\overline{\varrho_1}\cos$ »	0.31 0941	$\overline{\varrho_2}\cos$ »	0.29 7349	$\overline{\varrho_3}\cos$ »	0.25 7314	Ω	$93\ 35\ 42.6$
R_1	0.00 2167	R_2	0.00 3924	R_3	0.00 5255		
$r_1\cos b_1\sin(l_1-L_1)$	$8.04\ 1295$	$r_2\cos b_2\sin(l_2-L_2)$	$9.81\ 7278_n$	$r_3\cos b_3\sin(l_3-L_3)$	$0.08\ 6794_n$	l_3-l_1	$5\ 17\ 14.2$
$r_1\cos b_1\cos(l_1-L_1)$	0.48 4467	$r_2\cos b_2\cos(l_2-L_2)$	0.47 5990	$r_3\cos b_3\cos(l_3-L_3)$	0.45 0350	$\cos(l_3-l_1)$	9.99 8148
$\cos(l_1-L_1)$	9.99 9997	$\cos(l_2-L_2)$	9.98 9789	$\cos(l_3-L_3)$	9.96 2693	$l_1-\Omega$	$116^\circ 10'\ 47''.4$
$\operatorname{tg}(l_1-L_1)$	7.55 6828	$\operatorname{tg}(l_2-L_2)$	$9.34\ 1288_n$	$\operatorname{tg}(l_3-L_3)$	$9.63\ 6444_n$	$l_2-\Omega$	$118\ 59\ 54.1$
l_1-L_1	$+0^\circ 12'\ 23''.5$	l_2-L_2	$-12^\circ 22'\ 33''.8$	l_3-L_3	$-23^\circ 24'\ 37''.8$	$l_3-\Omega$	$121\ 28\ 1.6$
$r_1\sin b_1$	9.20 1617	$r_2\sin b_2$	9.19 2183	$r_3\sin b_3$	9.18 2730		
$r_1\cos b_1$	0.48 4470	$r_2\cos b_2$	0.48 6201	$r_3\cos b_3$	0.48 7657	r_1	0.48 5059
$\cos b_1$	9.99 9411	$\cos b_2$	9.99 9440	$\cos b_3$	9.99 9468	r_2	0.48 6761
$\operatorname{tg} b_1$	8.71 7147	$\operatorname{tg} b_2$	8.70 5982	$\operatorname{tg} b_3$	9.69 5073	r_3	0.48 8189
$\operatorname{tg} i\cos(l_1-\Omega)$	$8.40\ 8780_n$			$\operatorname{tg} b_1\cos(l_3-l_1)$	8.71 5295		
$\cos(l_1-\Omega)$	$9.64\ 4626_n$	$\sin(l_2-\Omega)$	9.94 1826	Zähl.	$7.37\ 3273_n$	i	$3^\circ 19'\ 29''.9$
$\operatorname{tg}(l_1-\Omega)$	$0.30\ 8367_n$	$\operatorname{tg} b_2$	8.70 5980	$\sin(l_3-l_1)$	8.96 4493	$\sec i$	0.00 0732
$\operatorname{tg} i$	8.76 4154					$\sin i$	8.76 3422

X.								
$\operatorname{tg}(l_1-\Omega)$	0.30 8367$_n$	$\operatorname{tg}(l_2-\Omega)$	0.25 6278$_n$	$\operatorname{tg}(l_3-\Omega)$	0.21 3240$_n$	u_1	116° 8′ 29″.8
$\operatorname{tg} u_1$	0.30 9099$_n$	$\operatorname{tg} u_2$	0.25 7010$_n$	$\operatorname{tg} u_3$	0.21 3972$_n$	u_2	118 57 26.8
$\sin(u_3-u_2)$	8.63 3854	$\sin(u_2-u_1)$	8.69 1309	$\sin(u_3-u_1)$	8.96 4102	u_3	121 25 26.8
$r_2\,r_3$	0.97 4950	$r_1\,r_2$	0.97 1820	$r_1\,r_3$	0.97 3248	u_3-u_2	2 28 0.0
$r_2\,r_3\sin(u_3-u_2)$	9.60 8804	$r_1\,r_2\sin(u_2-u_1)$	9.66 3129	$r_1\,r_3\sin(u_3-u_1)$	9.93 7350	u_2-u_1	2 48 57.0
(n_1)	9.67 1454	(n_3)	9.72 5779			u_3-u_1	5 16 57.0

XI.							
$\varrho_1 A$	8.07 350	$\varrho_2 A$	8.08 232	$\varrho_3 A$	8.10 113	t_1^0	Apr. 19.61017
	0.01 184		0.01 209		0.01 262	t_2^0	» 35.46597
$t_3^0-t_2^0$	13.98 074	$t_2^0-t_1^0$	15.85 580	$t_3^0-t_1^0$	29.84 554	t_3^0	» 49.45571
	1.14 5810		1.20 0188		1.47 4880		
τ_1^0	9.38 1391	τ_3^0	9.43 5769	τ_2^0	9.71 0461	n_1^0	9.67 0930
$\tau_1^{0\,2}$	8.76 2782	$\tau_3^{0\,2}$	8.87 1538	$\tau_2^{0\,2}$	9.42 0922	n_3^0	9.72 5308

XII. (Sektor durch Dreieck mit dem Kettenbruch.)

$2\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)$	0.30 0929		0.30 0900		0.30 0568		
$\sqrt{r_2\,r_3}$	0.48 7475		0.48 5910		0.48 6620	$\frac{1}{2}(u_3-u_2)$	1° 14′ 0″.0
Σ	0.78 8404		0.78 6810		0.78 7188	$\frac{1}{2}(u_2-u_1)$	1 24 28.5
r_2+r_3	0.78 8506		0.78 6941		0.78 7657	$\frac{1}{2}(u_3-u_1)$	2 38 28.5
$\sec\gamma_1$	0.00 0102		0.00 0131		0.00 0469		
l_1	6.070		6.180		6.733	$\frac{y_2}{y_1}$	0.00 0517
Σ^3	2.36 5212		2.36 0430		2.36 1564		
m_1	6.39 7570		6.51 1108		7.05 9358	$\frac{y_2}{y_3}$	0.00 0474
$\frac{5}{6}+l_1$	9.92 0880		9.92 0998		9.92 1100		
h	6.47 6690		6.59 0110		7.13 8258		
$\frac{1}{9}h$	6.56 3840		6.67 7260		7.22 5408	$n_1^0\,\frac{y_2}{y_1}$	9.67 1447
	6.56 3824		6.67 7053		7.22 4680		
y_1-1	6.52 2431		6.63 5660		7.18 3287	$n_3^0\,\frac{y_2}{y_3}$	9.72 5782
y_1	0.00 0145	y_3	0.00 0188	y_2	0.00 0662		

XIV.							
	0.22 7413		0.22 7360		0.22 6889	p	0.45 5104
$\sqrt{p}$	0.22 7558	$\sqrt{p}$	0.22 7548	$\sqrt{p}$	0.22 7551	v_1	131° 17′ 36″.0
$\frac{p}{r_1}$	9.97 0045	$\cos v_2$	9.84 2627$_n$	$\frac{p}{r_3}$	9.96 6915	v_2	134 6 33.0
						v_3	136 34 33.0
$e\cos v_1=q_1$	8.82 3795$_n$	$e\cos v_2$	8.84 6935$_n$	q_3	8.86 5415$_n$		
$e\sin v_1$	8.88 0145	$1+e\cos v_2$	9.96 8344	$q_1\cos(u_3-u_1)$	8.82 1947$_n$	ω	−15 9 6.2
$\sin v_1$	9.87 5837	r_2	0.48 6760	Zähl.	7.84 4247	φ	5 47 47.7
$\operatorname{tg} v_1$	0.05 6350$_n$					$\frac{1}{2}\varphi$	2 53 53.85
$\sin\varphi=e$	9.00 4308	a	0.45 9556	$(\sin\varphi)''$	4.31 8733		
$\cos\varphi$	9.99 7774	$a\cos\varphi$	0.45 7330	k''	3.55 0007		
$\cos\varphi^2$	9.99 5548	a^3	1.37 8668	$a^{\frac{3}{2}}$	0.68 9334		

XV.							
$\sqrt{\frac{r_1}{p}}$	0.01 4977	$\sqrt{\frac{r_3}{p}}$	0.01 6543	$\frac{1}{2}(E_3-E_1)$	2° 49′ 32″.51		*Elemente*
$\sin v_1$	9.87 5837	$\sin v_3$	9.83 7205	sin »	8.69 2827	t_0	1904 Mai 19.5
$\sin\frac{1}{2}\varphi$	8.70 3834	$\sin\frac{1}{2}\varphi$	8.70 3834	$a\cos\varphi\sin$ »	9.15 0157	M_0	128° 10′ 32″.6
$\sin\frac{1}{2}(v_1-E_1)$	8.59 4648	$\sin\frac{1}{2}(v_3-E_3)$	8.55 7582	$\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)$	8.66 3533	ω	344 50 53.8
v_1-E_1	4° 30′ 26″.15	v_3-E_3	4° 8′ 18″.13	$\sqrt{r_1\,r_3}$	0.48 6624	Ω	93 35 42.6
E_1	126 47 9.85	E_3	132 26 14.87	$\sqrt{r_1 r_3}\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)$	9.15 0157	i	3 19 29.9
$\sin E_1$	9.90 3566	$\sin E_3$	9.86 8065	M_3-M_1	6° 0′ 54″.7	φ	5 47 47.7
$e''\sin E_1$	4.22 2299	$e''\sin E_3$	4.18 6798	»	4.33 5552	μ	725″.560
	4° 38′ 4″.0		4° 16′ 14″.4	$t_3^0-t_1^0$	1.47 4880	$\log a$	0.45 9556
M_1	122 9 5.8	M_3	128 10 0.5	μ	2.86 0672	Aequ.	1904.0
			+32.1	+ 0.04 429	8.64 6306		

XVI.

	$-$ 14.03403	$\sin E_2$	9.88 5563	u_2	118° 57′ 26″.8	$L_2 - \Omega$	131° 22′ 27″.9
$t_0 - t_2^0$	1.14 7182$_n$	$\cos E_2$	9.80 6195$_n$	$\sin u_2$	9.94 1998	sin »	9.87 5297
$(t_0 - t_2^0)\,\mu$	4.00 7854$_n$	$\sin\varphi$	9.00 4308	$\cos u_2$	9.68 4989$_n$	cos »	9.82 0186$_n$
	$-$ 2° 49′ 42″.5	$\cos E_2 - e$	9.86 9830$_n$	$r_2 \sin u_2$	0.42 8757	R_2	0.00 3924
M_2	125 20 50.1	$r_2 \sin v_2$	0.34 2893	$r_2 \sin u_2 \cos i$	0.42 8025	$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega)$	0.28 3777
E_2	129 47 36.6	$r_2 \cos v_2$	0.32 9386$_n$	$R_2 \sin(L_2 - \Omega)$	9.87 9221	$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - \Omega)$	9.91 2805$_n$
		$\cos v_2$	9.84 2627$_n$	$r_2 \cos u_2$	0.17 1748$_n$	$\sin(\lambda_2 - \Omega)$	9.96 3846
		$\operatorname{tg} v_2$	0.01 3507$_n$	$R_2 \cos(L_2 - \Omega)$	9.82 4110$_n$	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \Omega)$	0.37 0972$_n$
		v_2	134° 6′ 33″.0	$\varrho_2 \sin\beta_2$	9.19 2179	$\lambda_2 - \Omega$	113° 3′ 21″.0
		r_2	0.48 6759	$\varrho_2 \cos\beta_2$	0.31 9931	λ_2	206 39 3.6
				$\cos\beta_2$	9.99 8798		
				$\operatorname{tg}\beta_2$	8.87 2248	B — R	$d\lambda$ + 0″.3
				ϱ_2	0.32 1133		$d\beta$ 0.0

Die Darstellung des mittleren geozentrischen Ortes ist also eine so vollkommene, als man es bei sechsstelliger Rechnung erwarten kann.

Betreff der Kontrolle in X. ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Wenn die Winkel $u_3 - u_2, \ldots$ klein sind, wird die Kontrolle nicht immer bis auf zwei bis drei Einheiten der letzten Stelle stimmen, auch wenn die Rechnung korrekt geführt ist. Es rührt dies davon her, daß schon wenige Hundertel Sekunden Fehler in $u_3 - u_2, \ldots$ stark auf

$$n_1 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}, \qquad n_3 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \tag{*}$$

einwirken. Man wird daher feststellen, ob man durch eine zulässige Korrektion der unverbürgten Zehntel und Hundertel Sekunden in u_1, u_2, u_3 die Mißstimmung wegschaffen kann; in diesem Fall wird die Rechnung richtig sein und man kann mit den korrigierten Werten weiterrechnen. Bezeichnet man die logarithmische Differenz für 1″ bei $\log\sin(u_3 - u_2)$ und $\log\sin(u_2 - u_1)$ beziehungsweise mit d_1 und d_3, bezeichnet ferner mit n_1' und n_3' die aus (*) folgenden Werte, so muß man diese mit den früheren in Übereinstimmung bringen können, wenn man setzt:

$$\delta u = \frac{(\log n_1 - \log n_1') - (\log n_3 - \log n_3')}{2(d_1 + d_3)}$$

und in (*) statt u_1, u_2, u_3 die Werte anwendet: $u_1 + \delta u$, $u_2 - \delta u$, $u_3 + \delta u$, wobei δu bei sechsstelliger Rechnung den Wert 0″.2 nicht erheblich übersteigen darf. Im obigen Beispiel sind nur die korrigierten Werte aufgenommen.

Eine zweite Hypothese brauchte, wie das bei so kleinen Zwischenzeiten die Regel ist, nicht gerechnet zu werden, da die verwendeten Werte der Dreiecksflächen nur unbedeutend von den korrekten abweichen.

89. Die Hansensche Analyse. Die im vorigen auseinandergesetzte Methode der Bahnbestimmung geht in der zugrunde liegenden Idee auf *Gauß*, in der Art der Formelstellung aber, (von der Ableitung und einigen Modifikationen abgesehen) auf *Encke* zurück. Auch *Hansen**) hat die Gaußsche Methode transformiert und ist zu einigen Entwicklungen gelangt, die hier nicht übergangen werden dürfen, wenn

*) *Hansen*, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Ostwalds Klassiker Nr. 141.

sie auch an Kürze der Rechnung den Enckeschen Formeln nachstehen. Wir wollen nur das Wesentliche herausgreifen, und dieses unmittelbar an unsere früheren Entwicklungen anschließen; die nachstehenden Formeln reproduzieren also weder der Ableitung noch dem Inhalt nach die Hansenschen, aber sie geben seine Idee wieder und sind einfacher als diese. Die erste Gleichung in 25) (Seite 266) stellen wir so:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}\varrho_2=-R_1\sin(L_1-H_2)n_1-R_3\sin(L_3-H_2)n_3+N_1R_1\sin(L_1-H_2)+N_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

und setzen:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}&=K\\ -R_1\sin(L_1-H_2)&=A\\ -R_3\sin(L_3-H_2)&=B\\ -N_1R_1\sin(L_1-H_2)-N_3R_3\sin(L_3-H_2)=-R_2\sin(L_2-H_2)&=C,\end{aligned}\qquad 1)$$

dann wird daraus:

$$K\varrho_2=An_1+Bn_3-C, \qquad 2)$$

welche der Form nach die von Hansen zugrunde gelegte Gleichung ist. Die Hansenschen K, A, B, C enthalten aber noch einen gemeinsamen Faktor $(\sin m_2)$, der hier bereits weggelassen ist. Die Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen n_1 und n_3 durch die Zwischenzeiten geschieht hier in folgender Weise. Wird in den Formeln 17) (Seite 177) gesetzt:

$$P=\frac{\tau_3}{\tau_1}, \qquad Q=\tau_1\tau_3,$$

so wird daraus nach kurzer Reduktion:

$$\begin{aligned}n_1&=\frac{1}{1+P}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}+\frac{Q(P-1)}{6r_2^3}+\tau_1\frac{Q(P^2-1)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}+\tau_1\frac{QP}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}\right)\\ n_3&=\frac{1}{1+P}\left(P+\frac{QP}{2r_2^3}-\frac{Q(P-1)}{6r_2^3}+\tau_1\frac{Q(P^2-1)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}-\tau_1\frac{QP}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}\right).\end{aligned}$$

Substituiert man diese Ausdrücke in 2) und setzt zur Abkürzung:

$$Q'=Q\left(1+\frac{(A-B)(P-1)}{3(A+BP)}+\tau_1\frac{(A+B)(P^2-1)}{2(A+BP)}\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}+\tau_1\frac{(A-B)P}{2(A+BP)}\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}\right),$$

so wird diese Gleichung:

$$\left((A-C)+P(B-C)-K(P+1)\varrho_2\cos\beta_2\right)r_2^3+\tfrac{1}{2}Q'(A+BP)=0.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß $Q'=Q$ ein zulässiger Näherungswert ist. In der Tat ist das zweite Glied in $Q':Q$ von der ersten Ordnung, da $A-B$, wie wir Seite 269 nachwiesen, von der ersten Ordnung ist; das dritte Glied ist ebenfalls erster Ordnung wegen des Faktors τ_1; das vierte Glied ist zweiter Ordnung. Setzt man also in erster Näherung $Q'=Q$, so wird die Fundamentalgleichung

$$\left((A-C)+P(B-C)-K(P+1)\varrho_2\cos\beta_2\right)r_2^3+\tfrac{1}{2}Q(A+BP)=0$$

oder umgestellt:

$$\frac{A+BP}{P+1}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}\right)=K\varrho_2\cos\beta_2+C. \qquad 3)$$

Diese Gleichung gibt für $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1 \tau_3$ einen Näherungswert von ϱ_2 oder r_2; es läßt sich aber gleich zeigen, daß sie auch fort und fort genauere Werte dieser Größen zu geben imstande ist, wenn man P und Q entsprechend ändert. Denn vergleicht man 3) mit der strengen Gleichung 2), die so geschrieben werden kann:

$$An_1 + Bn_3 = K\varrho_2 \cos\beta_2 + C,$$

so sieht man, daß beide Gleichungen identisch werden, wenn man

$$n_1 = \frac{1}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)$$
$$n_3 = \frac{P}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)$$

setzt. Hieraus aber folgt:

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2r_2^3 (n_1 + n_3 - 1). \tag{4}$$

Bestimmt man also P und Q in erster Näherung durch $\tau_3 : \tau_1$ bzw. $\tau_1 \tau_3$, in allen weiteren aber durch 4), indem man für n_1 und n_3 die durch die vorausgehenden Näherungen bekannt gewordenen Werte setzt, so erhält man nacheinander genauere Werte der Unbekannten durch Auflösung einer und derselben Gleichung 3).

Die beiden Unbekannten r_2 und ϱ_2, die in 3) noch auftreten, werden durch Einführung desselben Winkels z, den wir schon früher kennen lernten, auf *eine* zurückgeführt. Wird

$$\varrho_2 = R_2 \frac{\sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad r_2 = R_2 \frac{\sin\delta_2}{\sin z}$$

in die so gestellte Gl. 3):

$$\frac{Q}{2r_2^3} = \frac{K(P+1)}{A+BP}\varrho_2 \cos\beta_2 + \frac{C(P+1)}{A+BP} - 1$$

eingetragen, so kommt zunächst

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP}\left(K \cos\beta_2 R_2 \sin(\delta_2 - z) + C \sin z\right) - \sin z$$

und wenn man

$$\begin{aligned} -KR_2 \cos\beta_2 \sin\delta_2 &= S\sin\sigma \\ C - KR_2 \cos\beta_2 \cos\delta_2 &= S\cos\sigma \end{aligned} \tag{5}$$

setzt, weiter:

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP} S \sin(z - \sigma) - \sin z$$

und wenn schließlich noch Ω und q durch

$$\begin{aligned} \frac{P+1}{A+BP} S \sin\sigma &= \Omega \sin q \\ \frac{P+1}{A+BP} S \cos\sigma - 1 &= \Omega \cos q \end{aligned} \tag{6}$$

bestimmt werden und

$$\frac{Q}{2\Omega(R_2 \sin\delta_2)^3} = m \tag{7}$$

gesetzt wird, die Gaußsche Gleichung:

$$m \sin z^4 = \sin(z - q). \qquad 8)$$

Es macht keine Schwierigkeit, die Bedeutung von σ festzustellen und zugleich seine Berechnung zu erleichtern. Zunächst folgt aus 5)

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = C\cos\delta_2 - KR_2\cos\beta_2$$
$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = C\sin\delta_2;$$

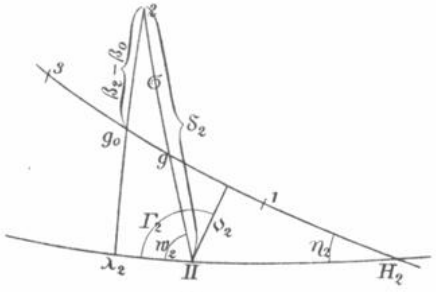

Fig. 49.

weiter ist nach 1) (Seite 286) und Fig. 49:

$$K = \frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} = \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\cos\beta_2\cos\beta_0\operatorname{tg}\eta_2} =$$
$$= \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)\sin 1\widehat{g_0}2}{\cos\beta_2\sin\eta_2} = \frac{\sin\overline{g2}\sin 1\widehat{g}2}{\cos\beta_2\sin\eta_2} =$$
$$= \frac{\sin\overline{g2}\sin(L_2 - H_2)}{\cos\beta_2\sin(\delta_2 - \overline{g2})}$$
$$C = -R_2\sin(L_2 - H_2),$$

also wird daraus

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\left(\cos\delta_2 + \frac{\sin\overline{g2}}{\sin(\delta_2 - \overline{g2})}\right)$$

oder

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2\operatorname{cotg}(\delta_2 - \overline{g2}); \qquad *)$$

ferner:

$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2$$

und durch Division:

$$\operatorname{tg}(\delta_2 - \sigma) = \operatorname{tg}(\delta_2 - \overline{g2}).$$

Daraus folgt, daß σ identisch ist mit dem Bogen $\overline{g2}$, auf den wir gelegentlich des Lambertschen Satzes (Nr. 75) stießen und den wir auch Seite 263 schon behandelt haben. Auch die Hansensche Analyse enthält also, wie von vorneherein zu erwarten war, diese Größe. Die Gl. *) läßt sich sofort umformen; fällt man nämlich vom zweiten Erdort ein Lot ν_2 auf den durch den ersten und dritten Planetenort gelegten größten Kreis und nennt dessen Neigung gegen die Ekliptik Γ_2, so ist:

$$\begin{aligned} \cos\nu_2\sin\Gamma_2 &= \cos\eta_2 \\ \cos\nu_2\cos\Gamma_2 &= -\sin\eta_2\cos(L_2 - H_2) \\ \sin\nu_2 &= \sin\eta_2\sin(L_2 - H_2) \end{aligned} \qquad 9)$$

(ν_2 kann man zwischen -90° und $+90^\circ$ annehmen),

woraus ν_2 und Γ_2 berechnet werden können. Dann aber wird

$$\operatorname{cotg}(\delta_2 - \sigma) = \frac{\cos(\Gamma_2 - w_2)}{\operatorname{tg}\nu_2}$$

und die beiden Gleichungen zur Berechnung von S und σ stellen sich also jetzt so:

$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2$$
$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2\cos(\Gamma_2 - w_2)\operatorname{cotg}\nu_2$$

oder

$$S'\sin(\delta_2 - \sigma) = \sin\nu_2$$
$$S'\cos(\delta_2 - \sigma) = \cos(\Gamma_2 - w_2)\cos\nu_2$$
$$S = -R_2\sin(L_2 - H_2)\frac{\sin\delta_2}{\sin\nu_2}\cdot S' \qquad 10)$$
$$\delta_2 - \sigma < 180^\circ.$$

Die Einführung der Hilfsgrößen Γ_2 und ν_2 bietet den Vorteil, daß man mittels derselben auch leicht den Winkel berechnen kann, den der größte Kreis zwischen dem zweiten Planetenort und dem zweiten Erdort bildet mit dem größten Kreis durch den ersten und dritten Planetenort. Nennt man diesen Winkel x, so findet sich nämlich sofort:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{cotg}(\Gamma_2 - w_2)}{\cos(\delta_2 - \sigma)}. \qquad 11)$$

Dieser Winkel spielt, wie wir später sehen werden, für die Beurteilung der Sicherheit einer Bahnbestimmung eine wichtige Rolle.

Nachdem wir die Berechnung der mittleren geozentrischen Distanz ϱ_2 auf die Gaußsche Gl. 8) hingeführt haben, gehen wir nun zur Aufstellung der Ausdrücke für die beiden äußeren ϱ_1 und ϱ_3 über. Auch hier können wir, um zu den Hansenschen Formen zu gelangen, an die Gl. 25) anschließen. Diese können folgendermaßen geschrieben werden:

$$\overline{\varrho_1} = \frac{1}{n_1 D_1}(Z_1 \varrho_2 \cos\beta_2 + R_2 \sin(L_3 - L_2) \operatorname{tg}\beta_3) - \frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$\overline{\varrho_3} = \frac{1}{n_3 D_3}(Z_3 \varrho_2 \cos\beta_2 + R_2 \sin(L_2 - L_1) \operatorname{tg}\beta_1) - \frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1,$$

indem man einfach N_1 und N_3 durch ihre Werte ersetzt. Hansen führt nun, abweichend von unserem früheren Vorgehen, auch hier den Winkel z ein, indem er ϱ_2 und R_2 durch 36) (Seite 270)

$$\varrho_2 = r_2 \frac{\sin(\delta_2 - z)}{\sin\delta_2}, \qquad R_2 = r_2 \frac{\sin z}{\sin\delta_2}$$

ersetzt. Werden die Größen W_1, w_1; W_3, w_3 definiert durch:

$$\begin{aligned} W_1 \sin w_1 &= Z_1 \cos\beta_2 \\ W_1 \cos w_1 &= \{Z_1 \cos\beta_2 \cos\delta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\}\frac{1}{\sin\delta_2} \\ W_3 \sin w_3 &= Z_3 \cos\beta_2 \\ W_3 \cos w_3 &= \{Z_3 \cos\beta_2 \cos\delta_2 - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\}\frac{1}{\sin\delta_2}, \end{aligned} \qquad 12)$$

so ergibt sich:

$$\overline{\varrho_1} = \frac{r_2 W_1}{n_1 D_1}\sin(w_1 - z) - \frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$\overline{\varrho_3} = \frac{r_2 W_3}{n_3 D_3}\sin(w_3 - z) - \frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3 \\ l_3 &= -\frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 \\ V_1 &= \frac{r_2}{n_1}, \qquad V_3 = \frac{r_2}{n_3} \\ U_1 &= \frac{W_1}{D_1}, \qquad U_3 = \frac{W_3}{D_3}, \end{aligned} \qquad 13)$$

so gehen die vorstehenden Ausdrücke über in:

$$\begin{aligned} \overline{\varrho_1} &= U_1 V_1 \sin(w_1 - z) + l_1 \\ \overline{\varrho_3} &= U_3 V_3 \sin(w_3 - z) + l_3. \end{aligned} \qquad 14)$$

Hier sind diejenigen Größen, die von den Annahmen über P und Q abhängen, nämlich V_1, V_3 und z getrennt von denen, welche für alle Hypothesen dieselben bleiben, nämlich U_1, U_3, l_1, l_3.

In welcher Weise z von P und Q abhängig ist, ist bereits entwickelt; die Ausdrücke von V_1 und V_3 in ihnen ergeben sich leicht wie folgt. Verbindet man die oben (Seite 287) aufgestellten strengen Werte von n_1 und n_3, nämlich

$$n_1 = \frac{1}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right), \qquad n_3 = Pn_1$$

mit der Gleichung (Seite 287)

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP} S \sin(z-\sigma) - \sin z,$$

die so geschrieben werden kann:

$$\frac{P+1}{1 + \frac{Q}{2r_2^3}} = \frac{(A+BP)\sin z}{S\sin(z-\sigma)},$$

und mit

$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z},$$

so ergibt sich:

$$V_1 = \frac{A+BP}{S} \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin(z-\sigma)}, \qquad V_3 = \frac{V_1}{P}. \tag{15}$$

Die Berechnung der Größen W_1, w_1, W_3, w_3 aus 12) läßt sich noch etwas vereinfachen. Zunächst findet man:

$$\begin{aligned}
W_1 \sin(w_1 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\\
W_1 \cos(w_1 - \delta_2) &= \{Z_1 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\cos\delta_2\} \frac{1}{\sin\delta_2}\\
W_3 \sin(w_3 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\\
W_3 \cos(w_3 - \delta_2) &= \{Z_3 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\cos\delta_2\} \frac{1}{\sin\delta_2},
\end{aligned}$$

und wenn man für Z_1 und Z_3 ihre Werte aus 23) (Seite 265) einträgt und die Gleichungen 34) (Seite 270) beachtet:

$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = (\sin(\lambda_3 - L_3)\sin\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\cos\delta_2)\frac{1}{\sin\delta_2}$$

oder

$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = \sin(\lambda_3 - L_3)\sin w_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2)\cos w_2$$

und ebenso:

$$W_3 \cos(w_3 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)\cos w_2 - \sin(\lambda_1 - L_1)\sin w_2.$$

Bestimmt man also die Hilfsgrößen H_1, h_1, H_3, h_3 aus

$$\begin{aligned}
H_1 \sin h_1 &= \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2) \quad | \quad H_3 \sin h_3 = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)\\
H_1 \cos h_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3) \quad | \quad H_3 \cos h_3 = \sin(\lambda_1 - L_1),
\end{aligned} \tag{16}$$

so gehen die Gl. 12) schließlich über in

$$\begin{aligned}
W_1 \sin(w_1 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\\
W_1 \cos(w_1 - \delta_2) &= H_1 \sin(w_2 - h_1)\\
W_3 \sin(w_3 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\\
W_3 \cos(w_3 - \delta_2) &= -H_3 \sin(w_2 - h_3).
\end{aligned} \tag{17}$$

Die Hypothesenrechnung gestaltet sich wie bei der früher besprochenen Methode. Nachdem man in der ersten Näherung $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$ und $Q = \tau_1 \tau_3$ benutzt und damit die heliozentrischen Örter und die Verhältnisse Sektor durch Dreieck ermittelt hat, treten hierfür in den folgenden Näherungen die Werte 4) oder wie wir schon in Gl. 51) (Seite 276) gezeigt haben, die folgenden Ausdrücke ein:

$$P = \frac{y_1}{y_3} \frac{{\tau_3}^0}{{\tau_1}^0}$$

$$Q = \frac{{\tau_1}^0 {\tau_3}^0}{y_1 y_3} \frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)} .$$

Die Berechnung der Elemente kann nach einer jeden der in Nr. 50 mitgeteilten Methoden geschehen. Hansen selbst zieht die Methode der Theoria motus vor. Wir begnügen uns, in der folgenden Zusammenstellung die Formeln aufzuführen.

90. Zusammenstellung der Formeln für die Hansensche Methode. Betreff der Daten gilt dasselbe wie Seite 278. Wir trennen die Formeln in solche, die für alle Hypothesen dieselben bleiben, also nur einmal berechnet zu werden brauchen und in solche, die für jede Näherung wiederholt werden müssen.

A. Von der Hypothese unabhängige Ausdrücke.

I. $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_1$

$$\operatorname{tg}\eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

Kontrolle: $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_3$.

II. $A = -R_1 \sin(L_1 - H_2)$
$B = -R_3 \sin(L_3 - H_2)$
$C = -R_2 \sin(L_2 - H_2)$
$D_1 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(L_3 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$
$D_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(L_1 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$.

III. $\sin w_2 \sin\delta_2 = \sin\beta_2$
$\cos w_2 \sin\delta_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$
$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$
$\sin\delta_2$ positiv.

IV. $\cos\nu_2 \sin\Gamma_2 = \cos\eta_2$
$\cos\nu_2 \cos\Gamma_2 = -\sin\eta_2 \cos(L_2 - H_2)$
$\sin\nu_2 = \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2)$
$-90^\circ < \nu_2 < +90^\circ$.

V. $S' \sin(\delta_2 - \sigma) = \sin\nu_2$
$S' \cos(\delta_2 - \sigma) = \cos\nu_2 \cos(\Gamma_2 - w_2)$
$S = C \cdot \frac{\sin\delta_2}{\sin\nu_2} S'$
$\sin(\delta_2 - \sigma)$ positiv.

VI. $H_1 \sin h_1 = \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2)$ | $H_3 \sin h_3 = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)$
$H_1 \cos h_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)$ | $H_3 \cos h_3 = \sin(\lambda_1 - L_1)$.

VII.
$$W_1 \sin(w_1 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)$$
$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = H_1 \sin(w_2 - h_1)$$
$$W_3 \sin(w_3 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)$$
$$W_3 \cos(w_3 - \delta_2) = -H_3 \sin(w_2 - h_3).$$

VIII.
$$l_1 = -\frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$l_3 = -\frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1$$
$$U_1 = \frac{W_1}{D_1}, \qquad U_3 = \frac{W_3}{D_3}.$$

B. Hypothesenrechnung.

In erster Näherung: $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1\tau_3$. In jeder folgenden:

$$P = \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^{\,0}}{\tau_1^{\,0}}$$
$$Q = \frac{\tau_1^{\,0}\tau_3^{\,0}}{y_1 y_3}\,\frac{r_2^{\,2}}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.$$

Die Hypothesenrechnung ist beendet, wenn P und Q sich nicht mehr ändern.

IX.
$$\Omega \sin q = \frac{P+1}{A+BP} S \sin\sigma$$
$$\Omega \cos q = \frac{P+1}{A+BP} S \cos\sigma - 1$$
$$m = \frac{Q}{2\,\Omega\,(R_2 \sin\delta_2)^3}$$
$$m \sin z^4 = \sin(z - q).$$

X.
$$V_1 = \frac{A+BP}{S}\,\frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin(z-\sigma)}, \qquad V_3 = \frac{V_1}{P}$$
$$\overline{\varrho_1} = U_1 V_1 \sin(w_1 - z) + l_1$$
$$\overline{\varrho_3} = U_3 V_3 \sin(w_3 - z) + l_3$$
$$\text{Kontrolle: } \frac{\tau_1}{\tau_2}\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = (\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2)\colon\left(1 + \frac{Q}{2\,r_2^{\,3}}\right)$$
$$\varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad \overline{\varrho_2} = \varrho_2 \cos\beta_2$$
$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z}.$$

XI.
$$\left.\begin{aligned} r\cos b \sin(l - L) &= \overline{\varrho}\sin(\lambda - L) \\ r\cos b \cos(l - L) &= \overline{\varrho}\cos(\lambda - L) + R \\ r \sin b \qquad\quad &= \overline{\varrho}\operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \text{ für alle drei Örter.}$$

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
$$\text{Kontrolle: } \operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} b_2.$$

XII.
$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i.$$

XIII.
$$\varrho_1 = \overline{\varrho_1}\sec\beta_1, \qquad \varrho_3 = \overline{\varrho_3}\sec\beta_3$$
$$t_1^{\,0} = t_1 - \varrho_1 A, \quad t_2^{\,0} = t_2 - \varrho_2 A, \quad t_3^{\,0} = t_3 - \varrho_3 A \qquad \log A = 7.76\,118_{-10}$$
$$k(t_3^{\,0} - t_2^{\,0}) = \tau_1^{\,0}, \quad k(t_3^{\,0} - t_1^{\,0}) = \tau_2^{\,0}, \quad k(t_2^{\,0} - t_1^{\,0}) = \tau_3^{\,0} \qquad \text{in Einheiten des Tages.}$$

XIV. Berechnung von Sektor durch Dreieck:
$$m_2 = \frac{\tau_2^{\,0\,2}}{(2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3})^3}$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega_2) = \sqrt[4]{\frac{r_3}{r_1}}$$
$$\operatorname{tg} q_2 = \frac{\operatorname{tg} 2\omega_2}{\sin\frac{1}{4}(u_3 - u_1)}$$
$$l_2 = \sin\tfrac{1}{4}(u_3 - u_1)^2 \sec\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)\sec q_2^{\,2}$$
$$h_2 = \frac{m_2}{\frac{5}{6} + l_2}$$
$$y_2 = 1 + \tfrac{10}{11}\cdot\frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{\cdots\cdots}}}$$

$\log\frac{5}{6}$	9.920 8188
$\frac{10}{11}$	9.958 6073
$\frac{11}{9}$	0.087 1502 .

C. Berechnung der Elemente:

XV.
$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2^{\,0}} y_2$$
$$f_2 = \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}g_2 = \sqrt{\frac{m_2}{y_2^{\,2}} - l_2}$$
$$M\sin\tfrac{1}{2}(F - G) = \cos\tfrac{1}{2}(f_2 + g_2)\operatorname{tg} 2\omega_2$$
$$M\cos\tfrac{1}{2}(F - G) = \sin\tfrac{1}{2}(f_2 + g_2)\sec 2\omega_2$$
$$N\sin\tfrac{1}{2}(F + G) = \cos\tfrac{1}{2}(f_2 - g_2)\operatorname{tg} 2\omega_2$$
$$N\cos\tfrac{1}{2}(F + G) = \sin\tfrac{1}{2}(f_2 - g_2)\sec 2\omega_2$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{N}{M}; \qquad R = \frac{M}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{N}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$
$$a = \frac{R^2\sqrt{r_1 r_3}}{\sin g_2^{\,2}} = p\sec\varphi^2$$
$$v_1 = F - f_2, \qquad v_3 = F + f_2$$
$$\omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3$$
$$E_1 = G - g_2, \qquad E_3 = G + g_2$$
$$M_1 = E_1 - e\sin E_1, \qquad M_3 = E_3 - e\sin E_3$$
$$\frac{M_3 - M_1}{t_3^{\,0} - t_1^{\,0}} = \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

91. Beispiel. Wir wollen auch die letztbesprochene Methode durch ein Beispiel erläutern und wählen den Planeten (433) Eros in seiner Entdeckungsopposition. Die zugrunde gelegten Beobachtungen haben wir in Nr. 35 behandelt und die Parallaxe durch Berechnung des locus fictus berücksichtigt. Die Örter sind nur von Fixsternaberration befreit.

Planet (433) Eros.

1898 M. Z. B.

t_1	Aug. 15.52 508
t_2	26.42 229
t_3	37.40 094

1898.0

λ_1	321° 28′ 2″.4
λ_2	316 49 9.2
λ_3	312 57 17.5

1898.0

L_1	323° 5′ 31″.7
L_2	333 35 57.9
L_3	344 13 51.5
H_2	165 24 47.8

R_1	0.00 5221
R_2	0.00 4228
R_3	0.00 3109

I.	$\operatorname{tg}\beta_1$	9.16 8994	$\operatorname{tg}\beta_2$	9.24 3957	$\operatorname{tg}\beta_3$	9.29 0324	$\lambda_3-\lambda_1$	$-8^\circ 30' 44''.9$
		$9.52\ 1514_n$	$\cos\beta_2$	9.99 3422		9.16 4184	sin »	9.17 0334$_n$
		$9.96\ 0912_n$	L_1-H_2	$157^\circ 40' 43''.9$		8.69 1848	cos »	9.99 5190
		$9.64\ 7480_n$	L_2-H_2	168 11 10.1			L_3-L_2	$10^\circ 37' 53''.6$
	λ_1-H_2	$156^\circ 3' 14''.6$	L_3-H_2	178 49 3.7	λ_3-H_2	147 32 29.7	L_2-L_1	10 30 26.2
	$\operatorname{tg}\eta_2$	9.56 0602	$\operatorname{tg}\eta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)$	8.73 0936$_n$	sin »	9.72 9721	L_3-L_1	21 8 19.8
II.	$\sin(L_1-H_2)$	9.57 9552	$\sin(L_3-H_2)$	8.31 4577	$\sin(L_2-H_2)$	9.31 1188	D_1	7.04 5513$_n$
	A	9.58 4773$_n$	B	8.31 7686$_n$	C	9.31 5416$_n$	D_3	8.31 0488$_n$
III.	$\sin w_2\sin\delta_2$	9.23 7379	IV. $\cos\nu_2\sin\Gamma_2$	9.97 3040	V. Γ_2-w_2	$-78^\circ 18' 47''.3$	λ_2-L_2	$-16^\circ 46' 48''.7$
	$\cos w_2\sin\delta_2$	9.45 3870$_n$	$\cos\nu_2\cos\Gamma_2$	9.52 4344	cos »	9.30 6560	sin »	9.46 0448$_n$
	$\cos w_2$	9.93 1800$_n$	$\sin\Gamma_2$	9.97 4105	$S'\sin(\delta_2-\sigma)$	8.84 4830	cos »	9.98 1102
	$\operatorname{tg} w_2$	9.78 3509$_n$	$\operatorname{tg}\Gamma_2$	0.44 8696	$S'\cos($ » $)$	9.30 5495		
	w_2	$148^\circ 43' 24''.6$	Γ_2	$70^\circ 24' 37''.3$	cos »	9.97 5419	$\sin(L_2-H_2)$	9.31 1188
	$\sin\delta_2$	9.52 2070	$\sin\nu_2$	8.84 4830	tg »	9.53 9335	$\cos($ » $)$	9.99 0702$_n$
	$\cos\delta_2$	9.97 4524	$\cos\nu_2$	9.99 8935	$\delta_2-\sigma$	$19^\circ 5' 46''.2$	$\sin\eta_2$	9.53 3642
	$\operatorname{tg}\delta_2$	9.54 7546	$\operatorname{tg}\nu_2$	8.84 5895	S'	9.33 0076		
	δ_2	$19^\circ 26' 0''.9$	ν_2	$4^\circ 0' 41''.4$		0.67 7240	λ_3-L_3	$-31^\circ 16' 34''.0$
	σ	0 20 14.7	$\sin\sigma$	7.77 0042		9.31 5416$_n$	λ_1-L_1	— 1 37 29.3
			$\cos\sigma$	9.99 9993	S	9.32 2732$_n$		
VI.	$H_1\sin h_1$	9.28 2805	$H_3\sin h_3$	9.16 1650	$\sin(L_3-L_2)$	9.26 5979	$\cos(L_3-L_2)$	9.99 2481
	$H_1\cos h_1$	9.71 5304$_n$	$H_3\cos h_3$	8.45 2620$_n$	$\sin(L_2-L_1)$	9.26 0931	$\cos(L_2-L_1)$	9.99 2656
	$\cos h_1$	9.97 2223$_n$	$\sin h_3$	9.99 1862	$\sin(L_3-L_1)$	9.55 7061		
	$\operatorname{tg} h_1$	9.56 7501$_n$	$\operatorname{tg} h_3$	0.70 9030$_n$				
	h_1	$159^\circ 43' 32''.2$	h_3	$101^\circ 3' 26''.7$	w_2-h_1	$-11^\circ 0' 7''.6$	$\sin(w_2-h_1)$	9.28 0681$_n$
	H_1	9.74 3081	H_3	9.16 9788	w_2-h_3	$+47\ 39\ 57.9$	$\sin(w_2-h_3)$	9.86 8781
VII.					VIII.			
	$W_1\sin(w_1-\delta_2)$	8.55 6303	$W_3\sin(w_3-\delta_2)$	8.42 9925	$-\frac{R_1}{D_1}$	2.95 9708	$-\frac{R_3}{D_3}$	1.69 2621
	$W_1\cos($ » $)$	9.02 3762$_n$	$W_3\cos($ » $)$	9.03 8569$_n$		8.84 7385		8.72 6055
	cos »	9.97 6136$_n$	cos »	9.98 7217$_n$	l_1	1.80 7093	l_3	0.41 8676
	tg »	9.53 2541$_n$	tg »	9.39 1356$_n$				
	$w_1-\delta_2$	$161^\circ 10' 45''.2$	$w_3-\delta_2$	$166^\circ 10' 0''.4$	t_3-t_2 10.97 865	1.04 0549	τ_1	9.27 6130
	W_1	9.04 7626	W_3	9.05 1352	t_2-t_1 10.89 721	1.03 7315	τ_3	9.27 2896
	U_1	2.00 2113$_n$	U_3	0.74 0864$_n$	t_3-t_1 21.87 586	1.33 9965	τ_2	9.57 5546

I. Hypothese.

IX.	P	9.99 6766	$\Omega\sin q$	7.78 4715	m	1.12 6497	$R_2\sin\delta_2$	9.52 6298
	BP	8.31 4452$_n$	$\Omega\cos q$	8.53 5880	$\sin\varkappa$	9.28 5114	$\varkappa$	$11^\circ 6' 59''.1$
	A	9.58 4773$_n$	$\cos q$	9.99 3275	$\sin\varkappa^4$	7.14 0456		
	$A+BP$	9.60 7475$_n$	q	$10^\circ 3' 24''.9$	$m\sin\varkappa^4$	8.26 6953		
	$P+1$	0.29 9416	$\operatorname{tg} q$	9.24 8835	$\varkappa-q$	$1^\circ 3' 34''.2$		
	$\frac{P+1}{A+BP}$	0.69 1941$_n$	Ω	8.54 2605	$\sin(\varkappa-q)$	8.26 6953		
	$S\cos\sigma$	9.32 2725$_n$	$2\,\Omega$	8.84 3635				
		0.01 4666	$(R_2\sin\delta_2)^3$	8.57 8894				
	$S\sin\sigma$	7.09 2774$_n$		7.42 2529				
			Q	8.54 9026				

X.								
$\delta_2 - z$	$8^\circ 19' 1''.8$	$z - \sigma$	$10^\circ 46' 44''.4$	w_1	$180^\circ 36' 46''.1$	w_3	$185^\circ 36' 1''.3$
$\sin(\delta_2 - z)$	9.16 0327	$\sin(z - \sigma)$	9.27 1891	$w_1 - z$	169 29 47.0	$w_3 - z$	174 29 2.2
$R_2 \sin(\delta_2 - z)$	9.16 4555	$(A + BP) : S$	0.28 4743	$\sin(\ \ »\ \ )$	9.26 0781	$\sin(\ \ »\ \ )$	8.98 2835
ϱ_2	9.87 9441	$R_2 \sin \delta_2 : \sin(z - \sigma)$	0.25 4407	$U_1 V_1$	$2.54\ 1263_n$	$U_3 V_3$	$1.28\ 3248_n$
$\overline{\varrho_2}$	9.87 2863	V_1	0.53 9150		$1.80\ 2044_n$		$0.26\ 6083_n$
r_2	0.24 1184	V_3	0.54 2384	l_1	1.80 7093	l_3	0.41 8676
$\overline{\varrho_2} \operatorname{tg} \beta_2$	9.11 6820	r_2^3	0.72 3552	$\overline{\varrho_1}$	9.86 9964	$\overline{\varrho_3}$	9.89 0363
	9.11 5370	$2\, r_2^3$	1.02 4582	$\overline{\varrho_1} \operatorname{tg} \beta_1$	9.03 8958	$\overline{\varrho_3} \operatorname{tg} \beta_3$	9.18 0687
				$\frac{\tau_1}{\tau_2}$	9.70 0584	$\frac{\tau_3}{\tau_2}$	9.69 7350
		$Q : 2\, r_2^3$	7.52 4444				
		$1 + \frac{Q}{2\, r_2^3}$	0.00 1450	Σ	8.73 9542	Σ	8.87 8037
					9.11 5317		0.23 7280

Da sich $\overline{\varrho_1}$ nur unsicher bestimmt, kann keine bessere Übereinstimmung erwartet werden.

XI.							
$\lambda_1 - L_1$	$-1^\circ 37' 29''.3$	$\lambda_2 - L_2$	$-16^\circ 46' 48''.7$	$\lambda_3 - L_3$	$-31^\circ 16' 34''.0$	l_1	$322^\circ 24' 18''.9$
sin »	$8.45\ 2620_n$	sin »	$9.46\ 0448_n$	sin »	$9.71\ 5304_n$	l_2	326 28 39.1
cos »	9.99 9825	cos »	9.98 1102	cos »	9.93 1801	l_3	330 39 44.0
$\overline{\varrho_1}$	9.86 9964	$\overline{\varrho_2}$	9.87 2863	$\overline{\varrho_3}$	9.89 0363	Ω	303 40 48.2
	9.86 9789		9.85 3965		9.82 2164	$l_3 - l_1$	8 15 25.1
R_1	0.00 5221	R_2	0.00 4228	R_3	0.00 3109	cos »	9.99 5474
	$8.32\ 2584_n$		$9.33\ 3311_n$		$9.60\ 5667_n$	sin »	9.15 7194
	0.24 3793		0.23 6593		0.22 3023	$\operatorname{tg} b_3$	8.94 5370
cos	9.99 9969	cos	9.99 6636	cos	9.98 7706		8.79 0608
$\operatorname{tg}(l_1 - L_1)$	$8.07\ 8791_n$	$\operatorname{tg}(l_2 - L_2)$	$9.09\ 6718_n$	$\operatorname{tg}(l_3 - L_3)$	$9.38\ 2644_n$		8.42 2165
$l_1 - L_1$	$-0^\circ 41' 12''.8$	$l_2 - L_2$	$-7^\circ 7' 18''.8$	$l_3 - L_3$	$-13^\circ 34' 7''.5$	$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega)$	8.79 5134
$r_1 \sin b_1$	9.03 8958	$r_2 \sin b_2$	9.11 6820	$r_3 \sin b_3$	9.18 0687	$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega)$	9.26 4971
$r_1 \cos b_1$	0.24 3824	$r_2 \cos b_2$	0.23 9957	$r_3 \cos b_3$	0.23 5317	$\cos(l_1 - \Omega)$	9.97 6382
$\cos b_1$	9.99 9157	$\cos b_2$	9.99 8772	$\cos b_3$	9.99 8318	$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.53 0163
$\operatorname{tg} b_1$	8.79 5134	$\operatorname{tg} b_2$	8.87 6863	$\operatorname{tg} b_3$	8.94 5370	$l_1 - \Omega$	$18^\circ 43' 30''.7$
r_1	0.24 4667	r_2	0.24 1185	r_3	0.23 6999	$\operatorname{tg} i$	9.28 8589
						i	$10^\circ 59' 54''.4$
XII. $\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.53 0163	$\operatorname{tg}(l_2 - \Omega)$	9.62 3569	$\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)$	9.70 6832	$\sec i$	0.00 8051
$\operatorname{tg} u_1$	9.53 8214	$\operatorname{tg} u_2$	9.63 1620	$\operatorname{tg} u_3$	9.71 4883		
u_1	$19^\circ 3' 1''.8$	u_2	$23^\circ 10' 45''.6$	u_3	$27^\circ 24' 50''.4$	$l_1 - \Omega$	$18^\circ 43' 30''.7$
						$l_2 - \Omega$	22 47 50.9
XIII. ϱ_1	9.87 4642	ϱ_2	9.87 9441	ϱ_3	9.89 8478	$l_3 - \Omega$	26 58 55.8
$\varrho_1 A$	+ 0.00 432	$\varrho_2 A$	+ 0.00 437	$\varrho_3 A$	+ 0.00 457	$\sin(l_2 - \Omega)$	9.58 8243
t_1^0	Aug. 15.52 076	t_2^0	26.41 792	t_3^0	37.39 637		
						$u_3 - u_2$	$4^\circ 14' 4''.8$
XIV. Sektor durch Dreieck.						$u_2 - u_1$	4 7 43.8
	(23)	(12)				$u_3 - u_1$	8 21 48.6
$2 \cos \frac{1}{2}(\ \ \ \ )$	0.30 0734	0.30 0748		$\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}$	9.99 6772		
$\sqrt{\ \ \ \ \ \ }$	0.23 9092	0.24 2926		$\frac{y_1}{y_3}$	0.00 0020	$t_3^0 - t_2^0$	10.97 845
$(\ldots)$	0.53 9826	0.54 3674				$t_2^0 - t_1^0$	10.89 716
$(\ \ \ )^3$	1.61 9478	1.63 1022		P	9.99 6792	$t_3^0 - t_1^0$	21.87 561
r^{02}	8.55 2244	8.54 5788		r_2^2	0.48 2370	$t_3^0 - t_2^0$	1.04 0541
m	6 93 2766	6.91 4766		$r_1 r_3$	0.48 1666	$t_2^0 - t_1^0$	1.03 7313
$r + r$	0.54 0127	0.54 3960			0.00 0704	$t_3^0 - t_1^0$	1.33 9960
$\sec \gamma$	0.00 0301	0.00 0286			9.99 8264	τ_1^0	9.27 6122
	6.84 14	6.8187			0.00 2440	τ_3^0	9.27 2894
l	6.54 04	6.5177		$\tau_1^0 \tau_3^0$	8.54 9016	τ_2^0	9.57 5541
$\frac{5}{6} + l$	9.92 1000	9.92 0991		$y_1 y_3$	0.00 0970		
h	7.01 1766	6.99 3775			8.54 8046	$\frac{1}{2}(u_3 - u_2)$	$2^\circ 7' 2''.4$
$\frac{1}{9} h$	7.09 8916	7.08 0925		Q	8.55 0486	$\frac{1}{2}(u_2 - u_1)$	2 3 51.9
	0.00 0544	522				$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	4 10 54.3
	7.09 8372	7.08 0403					
	7.05 6979	7.03 9010					
y	0.00 0495	0.00 0475					

Mit den Werten $\log P = 9.996792$, $\log Q = 8.550486$ wurde in derselben Weise eine zweite Hypothese durchgerechnet, von der wir hier nur die Resultate zusammenstellen:

$\overline{\varrho_1}$	9.870672	r_1	0.244968	u_1	19° 0′ 56.″6	Ω	303° 42′ 55.″5
$\overline{\varrho_2}$	9.873613	r_2	0.241505	u_2	23 8 18.3	i	11 1 42.7
$\overline{\varrho_3}$	9.891185	r_3	0.237357	u_3	27 21 55.9		

y_1	0.000494	P	9.996792
y_3	0.000474	Q	8.550464.

Da die Schlußwerte von P und Q mit den Ausgangswerten fast völlig übereinstimmen, wurde die Hypothesenrechnung für abgeschlossen angenommen und zur Elementenberechnung geschritten.

XIV. Sektor : Dreieck (13)		XV.					
		$2f_2$	8° 20′ 59.″3	$M\sin\frac{1}{2}(F-G)$	7.640221$_n$	$\frac{1}{2}\varphi$	6° 33′ 15.″5
f_2	4° 10′ 29.″65	$\sin 2f_2$	9.162015	$M\cos$ »	8.908508	φ	13 6 31.0
$2\cos f_2$	0.299876	$r_1 r_3$	0.482325	$\cos$ »	9.999370	R	8.911986
$\sqrt{r_1 r_3}$	0.241162	y_2	0.001936	tg »	8.731713$_n$	R^2	7.823973
( )	0.541038		9.646276			$\sqrt{r_1 r_3}$	0.241162
( )^3	1.623114	r_2^0	9.575541	$N\sin\frac{1}{2}(F+G)$	7.641635$_n$		8.065135
r_2^{02}	9.151082	$\sqrt{p}$	0.070735	$N\cos$ »	7.915215$_n$	$\sin g_2^2$	7.900728
m_2	7.527968	p	0.141470	$\cos$ »	9.945772$_n$	a	0.164407
				tg »	9.726420	$\cos\varphi$	9.988534
$r_3 : r_1$	9.992389	$m_2 : y_2^2$	7.524096			$\cos\varphi^2$	9.977068
$\mathrm{tg}(45°+\omega_2)$	9.998097	l_2	7.130190	$\frac{1}{2}(F+G)$	208° 2′ 26.″9	ω	178° 14′ 9.″4
ω_2	−0° 7′ 31.″9		0.169347	$\frac{1}{2}(F-G)$	−3 5 10.1	$\sin\varphi$	9.355639
$2\omega_2$	−0 15 3.8		7.299537	F	204 57 16.8	$\sin\varphi''$	4.670064
$\mathrm{tg}\,2\omega_2$	7.641650$_n$	$\sin\frac{1}{2}g_2$	8.649768	f_2	4 10 29.6	$\sin E_1$	9.641987$_n$
$\sin\frac{1}{2}f_2$	8.561398	$\frac{1}{2}g_2$	2° 33′ 31.″66	G	211 7 37.0	$\sin E_3$	9.771759$_n$
$\mathrm{tg}\,q_2$	9.080252$_n$	$\frac{1}{2}f_2$	2 5 14.82	g_2	5 7 3.3		+5° 41′ 54.″0
$\sec q_2^2$	0.006240	$\frac{1}{2}(f_2+g_2)$	+4 38 46.48				+7 40 58.1
$\sin\frac{1}{2}f_2^2$	7.122796	$\frac{1}{2}(f_2-g_2)$	−0 28 16.84	r_1	200 46 47.2	M_1	211 42 27.7
$\sec f_2$	0.001154			r_3	209 7 46.4	M_3	223 55 38.4
l_2	7.130190	$\sin\frac{1}{2}(f_2+g_2)$	8.908504	E_1	206 0 33.7	M_3-M_1	12 13 10.7
$\frac{5}{6}+l_2$	9.921522	$\cos$ (»)	9.998571	E_3	216 14 40.3		4.643361
h_2	7.606446					$t_3^0-t_1^0$	1.339960
$\frac{1}{9}l\,h_2$	7.693596	$\sin\frac{1}{2}(f_2-g_2)$	7.915211$_n$	N	7.969443	μ	3.303401
	0.002129	$\cos$ (»)	9.999985	M	8.909138	k''	3.550007
	7.691467			$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$	9.060305	$a^{\frac{3}{2}}$	0.246610
	7.650074	$\mathrm{tg}\,2\omega_2$	7.641650$_n$	$\cos$ »	9.997152	μ	3.303397
y_2	0.001936	$\sec 2\omega_2$	0.000004	$\sin$ »	9.057456		
y_2^2	0.003872						

Elemente:

1898 August 15.5

M_0	211° 41′ 46.″0	
ω	178 14 9.4	1898.0
Ω	303 42 55.5	1898.0
i	11 1 42.7	1898.0
φ	13 6 31.0	
μ	2010.″94	
$\log a$	0.164407.	

Die Nachrechnung des mittleren Ortes ergab: Beob. — Rech. $d\lambda = +0.''2$, $d\beta = -0.''3$.

92. Eine andere Form der Hypothesenrechnung. Bei den bisher besprochenen auf Gauß zurückgehenden Methoden wurde die Hypothesenrechnung auf die Größen P und Q aufgebaut, deren strenge Ausdrücke

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2(n_1 + n_3 - 1) r_2^3$$

sind; *W. Fabritius**) hat vorgeschlagen, sie direkt auf die Größen n_1 und n_3 selbst zu gründen, da dieses die einzigen Unbekannten des Problems wären, für die sich von vorneherein, wenigstens bei kleinen Zwischenzeiten ein annehmbarer Näherungswert angeben lasse, nämlich:

$$(n_1) = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}, \qquad (n_3) = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

Seine Analyse bietet so viel des Neuen, daß wir sie wenigstens in den wesentlichen Punkten hier zur Darstellung bringen wollen; dabei knüpfen wir wieder möglichst an früheres an und ändern die Ableitungen, womit wir aber die Vorzüge der originellen Darstellung von Fabritius selbst keineswegs verkennen wollen. Der durchzuführende Gedanke ist der: Durch n_1 und n_3 zunächst ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, dann r_1, r_2, r_3 und die von diesen eingeschlossenen Winkel, endlich y_1, y_2 und y_3 auszudrücken; da diese letzteren

$$n_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\frac{y_2}{y_1}, \qquad n_3 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\frac{y_2}{y_3}$$

ergeben, so hat man neue Werte von n_1 und n_3, mit denen das Verfahren zu wiederholen ist, bis sie sich nicht mehr ändern. Außerdem muß man einen ersten Näherungswert von n_1 und n_3 beschaffen.

Um ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 durch n_1 und n_3 auszudrücken, wollen wir uns der Gleichungen 25) (Seite 266) bedienen, welche bequemer und sicherer sind, als die von Fabritius benutzten, welch' letztere sich unmittelbar aus 6) (Seite 258) ergeben, wenn man darin die Koordinaten λ, β, L einführt. Aus den ϱ ergeben sich sofort die r durch die Gleichung (Seite 257):

$$r^2 = R^2 + 2R\varrho\cos\delta + \varrho^2, \quad \text{wo} \quad \cos\delta = \cos\beta\cos(\lambda - L),$$

die man für die rechnerische Ausführung so schreiben:

$$r^2 = (R\cos\delta + \varrho)^2 + R^2\sin\delta^2$$

und durch Einführung des Hilfswinkels ϑ aus:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{R\cos\delta + \varrho}{R\sin\delta} \\ r &= R\sin\delta\sec\vartheta \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

in

überführen wird.

Um die von den Radienvektoren r_1, r_2, r_3 gebildeten Winkel durch diese selbst und durch n_1 und n_3 auszudrücken, ziehen wir durch den Endpunkt des mittlereren Radiusvektors r_2 Parallele zu den äußeren und nennen die Abstände ihrer Schnittpunkte mit diesen von der Sonne x_1 und x_3; dann hat man in dem von den

*) *Fabritius*, Über die Berechnung der richtigen Distanzen durch sukzessive Annäherungen in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Örtern. Kiew 1877. Im Auszug Astr. Nachr. Bd. 90, S. 217.

Seiten r_2, x_1, x_3 gebildeten Dreieck die drei Winkel, um deren Darstellung es sich handelt; es ist nämlich

$$(r_2 x_3) = (r_2 r_3) = 2f_1\,; \qquad (x_1 r_2) = (r_1 r_2) = 2f_3$$
$$(x_1 x_3) = 180^\circ - (r_1 r_3) = 180^\circ - 2f_2\,.$$

Die Seiten x_1 und x_3 lassen sich aber sofort durch n_1 und n_3 ausdrücken; denn es ist:

$$x_1 \sin 2f_2 = r_2 \sin 2f_1\,,$$

also:

$$x_1 = \frac{r_3 r_2 \sin 2f_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2}\, r_1 = n_1 r_1$$

und ebenso:

$$x_3 = \frac{r_1 r_2 \sin 2f_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = n_3 r_3\,.$$

Wir haben jetzt ein Dreieck mit den Seiten

$$n_1 r_1\,, \qquad r_2\,, \qquad n_3 r_3\,,$$

denen beziehungsweise die Winkel

$$2f_1\,,\ 180^\circ - 2f_2\,,\ 2f_3$$

gegenüber liegen; daraus kann man eine ganze Reihe eleganter Beziehungen ableiten. Wir beschränken uns darauf folgende anzuführen. Wird

$$\tfrac{1}{2}(n_1 r_1 + r_2 + n_3 r_3) = \sigma$$

gesetzt, so folgt:

$$\sin f_1^2 = \frac{(\sigma - n_3 r_3)(\sigma - r_2)}{r_2 r_3 n_3}\,, \qquad \cos f_1^2 = \frac{\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{r_2 r_3 n_3}$$
$$\sin f_2^2 = \frac{\sigma(\sigma - r_2)}{r_1 r_3 n_1 n_3}\,, \qquad \cos f_2^2 = \frac{(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - r_3 n_3)}{r_1 r_3 n_1 n_3} \qquad 2)$$
$$\sin f_3^2 = \frac{(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)}{r_1 r_2 n_1}\,, \qquad \cos f_3^2 = \frac{\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{r_1 r_2 n_1}$$

und daraus:

$$\sin 2f_1 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_2 r_3 n_3} = \frac{r_1}{r_2}\, n_1 \sin 2f_2$$
$$\sin 2f_2 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_3 n_1 n_3} \qquad 3)$$
$$\sin 2f_3 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_2 n_1} = \frac{r_3}{r_2}\, n_3 \sin 2f_2\,.$$

Diese genügen, um die Ausdrücke für die Verhältnisse der Sektoren zu den Dreiecken aus den Radienvektoren, den zwischenliegenden Winkeln und den Zwischenzeiten aufzustellen. Wenn wir uns der Gaußschen Formeln bedienen, erreichen wir den Vorteil, die Winkel selbst eliminieren zu können. Man braucht (Nr. 49) für die Berechnung von y_1:

$$\sec\gamma_1 = \frac{r_2 + r_3}{2\cos f_1 \sqrt{r_2 r_3}}$$
$$l_1 = \tfrac{1}{2}(\sec\gamma_1 - 1)$$
$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2\cos f_1 \sqrt{r_2 r_3})^3} = \frac{\tau_1^2}{(r_2 + r_3)^3 \cos\gamma_1^3}\,;$$

sind diese Größen ermittelt, so ergibt sich y_1 aus den Gleichungen

$$y_1^2 = \frac{m_1}{l_1 + \sin\frac{1}{2}g_1^2}$$

$$y_1^3 - y_1^2 = m_1 \frac{2g_1 - \sin 2g_1}{\sin g_1^3}$$

entweder durch Versuche (bei sehr großen Zwischenzeiten) oder durch die Gaußschen Tafeln (Taf. XIX und XX). Nun ist nach 2)

$$\cos\gamma_1^2 = \frac{4\cos f_1^2 r_2 r_3}{(r_2 + r_3)^2} = \frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3 (r_2 + r_3)^2}$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{r_2 + r_3}{\sqrt{\frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3}}} - 1\right), & m_1 &= \frac{\tau_1^2}{\left(\frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3}\right)^{\frac{3}{2}}}. \\ l_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_3}{\sqrt{\frac{4(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - n_3 r_3)}{n_1 n_3}}} - 1\right), & m_2 &= \frac{\tau_2^2}{\left(\frac{4(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - n_3 r_3)}{n_1 n_3}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ l_3 &= \frac{1}{2}\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{\frac{4\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{n_1}}}, & m_3 &= \frac{\tau_3^2}{\left(\frac{4\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{n_1}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Hieraus ermittelt man l und m und dann y, indem nur die r, τ und n als bekannt vorausgesetzt werden. Sind die anfangs gewählten n_1 und n_3 die richtigen, so müssen die Gleichungen bestehen

$$n_1 \frac{y_1}{y_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3 \frac{y_3}{y_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

und diese bilden also das Kriterium für die Richtigkeit der Hypothese. Sind die Gleichungen nicht erfüllt, so hat man n_1 und n_3 so lange zu variieren, bis dies eintritt. Um dieses Variieren in systematischer Weise vorzunehmen, könnte man als Ausgangswerte für die nächste Hypothese

$$n_1 = \frac{y_2}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3 = \frac{y_2}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_2}$$

nehmen; es lassen sich aber, wie wir jetzt zeigen wollen, zweckmäßigere angeben, aus denen y_2 eliminiert ist, so daß dieses für die Hypothesenrechnung gar nicht berechnet zu werden braucht. Ist p der Parameter des Kegelschnittes, so stellen (Nr. 44) $\sqrt{p}\,\tau_1$, $\sqrt{p}\,\tau_2$, $\sqrt{p}\,\tau_3$ die doppelten Flächen der Sektoren vor, und es ist also

$$\sqrt{p} = \frac{y_1[r_2 r_3]}{\tau_1} = \frac{y_2[r_1 r_3]}{\tau_2} = \frac{y_3[r_1 r_2]}{\tau_3};$$

daraus folgt:

$$y_1 n_1 \frac{\tau_2}{\tau_1} = y_2$$

$$y_3 n_3 \frac{\tau_2}{\tau_3} = y_2$$

oder:

$$y_2 = \frac{(n_1 + n_3)\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 y_3 = \frac{S\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 y_3 , \qquad (a)$$

wenn zur Abkürzung $S = n_1 + n_3$ gesetzt wird. Nun hat man weiter nach der Formel 5^b) (Seite 153)

$$p = \frac{r_1 n_1 - r_2 + r_3 n_3}{n_1 + n_3 - 1} = \frac{2(\sigma - r_2)}{S - 1} \qquad (b)$$

und nach 3) (Seite 298)

$$[r_1 r_3] = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{n_1 n_3} . \qquad (c)$$

Werden also (a) (b) (c) in

$$\sqrt{p} = \frac{y_2 [r_1 r_3]}{\tau_2}$$

eingetragen, so folgt:

$$\frac{\sqrt{2(\sigma - r_2)}}{\sqrt{S-1}} = 2 \frac{S\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} \frac{y_1 y_3}{\tau_2} \frac{\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{n_1 n_3}$$

oder mit Beachtung von

$$\frac{S^2}{n_1 n_3} = \frac{n_1}{n_3} + \frac{n_3}{n_1} + 2 = \frac{y_3}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_1} + 2 = \frac{(\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1)^2}{\tau_1 \tau_3 y_1 y_3} :$$

$$\frac{S}{\sqrt{S-1}} = \frac{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1}{\tau_1 \tau_3} \sqrt{2\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - n_3 r_3)} .$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung mit A bezeichnet, so findet sich:

$$S = \tfrac{1}{2} A \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2} A)^2 - A} , \qquad 5)$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem es sich um heliozentrische Winkel kleiner oder größer als 180° handelt.

Durch S lassen sich nun n_1 und n_3 leicht ausdrücken, denn nach (a) hat man:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{y_2}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_3 \tau_1 \\ n_3 &= \frac{y_2}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 \tau_3 . \end{aligned} \qquad 6)$$

Der entscheidende Vorteil, den die Einführung von S und damit die Elimination von y_2 gebracht hat, ist der, daß aus den Formeln jetzt der Faktor $\sigma - r_2$ verschwunden ist, der als kleine Größe sich aus der Differenz zweier großen Zahlen nur mit großer Unsicherheit bestimmt.

Der Kreis der Operationen ist jetzt völlig geschlossen; mit Annahmen für n_1 und n_3 wird der Reihe nach berechnet

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$	aus Gl. 25) (Seite 266)
r_1, r_2, r_3	aus Gl. 1)
l_1, l_3, m_1, m_3	aus Gl. 4)
y_1, y_3	aus den Gaußschen Tafeln
S	aus Gl. 5)
n_1, n_3	aus Gl. 6).

Mit den letzteren Werten von n_1 und n_3 wird die Rechnung wiederholt, bis Anfangs- und Schlußwerte übereinstimmen.

Um einen ersten Näherungswert für n_1 und n_3 zu erhalten, bilden wir zwei Gleichungen zwischen S und r_2; als erste nehmen wir (etwas einfacher aber nicht ungenauer als bei Fabritius) nach Seite 177:

$$S = n_1 + n_3 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3}$$

und eine zweite erhalten wir durch Verbindung der Gl. 28) (Seite 267), nämlich:

$$\varrho_2 = c_2 - c_1 n_1 - c_3 n_3$$

mit Gl. 5) (Seite 257), nämlich:

$$\varrho_2 = R_2 \cos\delta_2 \mp \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin\delta_2^2}.$$

Erstere kann man so schreiben:

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2}(n_1 + n_3) - \frac{c_1 - c_3}{2}(n_1 - n_3)$$

oder

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2} S - \frac{c_1 - c_3}{2}(n_1 - n_3);$$

da nun (Seite 269) $c_1 - c_3$ von der ersten Ordnung ist und nach Seite 177

$$n_1 - n_3 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{6 r_2^3}\right),$$

so begeht man nur einen Fehler dritter Ordnung, wenn man im Ausdruck für ϱ_2 setzt

$$n_1 - n_3 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}.$$

Geschieht dies und setzt man dann die beiden Ausdrücke von ϱ_2 einander gleich, so kommt:

$$r_2^2 = R_2^2 \sin\delta_2^2 + \left(c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2} S - \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\frac{c_1 - c_3}{2} - R_2 \cos\delta_2\right)^2,$$

oder wenn man die konstante Größe K_0 aus

$$K_0 = c_2 - \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\frac{c_1 - c_3}{2} - R_2 \cos\delta_2$$

ermittelt:

$$\sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin\delta_2^2} = K_0 - \frac{c_1 + c_3}{2} S.$$

Nimmt man dazu

$$S = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3},$$

so hat man die zwei Gleichungen, aus denen durch sukzessive Versuche S und r_2 zu finden sind. Wie man sieht, wird hierdurch die Gaußsche Gleichung umgangen.

Berechnet man noch Näherungswerte für y_1 und y_3 aus: (Gl. 16) Seite 177)

$$y_1 = \frac{\tau_1 \sqrt{p}}{[r_2 r_3]} = 1 + \frac{\tau_1^2}{6 r_2^3}$$

und

$$y_3 = \frac{\tau_3 \sqrt{p}}{[r_1 r_2]} = 1 + \frac{\tau_3^2}{6 r_2^3},$$

so hat man schließlich nach 6) (Seite 300) für n_1 und n_3:

$$n_1 = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_3 \tau_1$$
$$n_3 = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 \tau_3 ,$$

mit denen man die erste Hypothese beginnt.

94. Die Ausdrücke von Fabritius für die Exzentrizität und die Perihel-distanz. Fabritius hat die Exzentrizität und die wahren Anomalien durch die drei Radienvektoren und die n_1 und n_3 dargestellt, wie uns ein ähnlicher Ausdruck für den Parameter schon in Gl. 5[b]) (Seite 153) entgegengetreten ist. Wir fügen diese Formeln erst hier ein (statt in Nr. 48), da sie die in Nr. 93 eingeführten Größen voraussetzen. Aus

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v_1}, \qquad r_2 = \frac{p}{1 + e\cos v_2}, \qquad r_3 = \frac{p}{1 + e\cos v_3}$$

folgt leicht:

$$(r_2 - r_3) = (r_3\cos v_3 - r_2\cos v_2)e$$
$$(r_3 - r_1) = (r_1\cos v_1 - r_3\cos v_3)e$$
$$(r_1 - r_2) = (r_2\cos v_2 - r_1\cos v_1)e .$$

Wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit $r_1\sin v_1$, $r_2\sin v_2$, $r_3\sin v_3$ und sodann mit $r_1\cos v_1$, $r_2\cos v_2$, $r_3\cos v_3$ multipliziert und addiert werden, ergeben sich die zwei Relationen:

$$r_1(r_2 - r_3)\sin v_1 - r_2(r_1 - r_3)\sin v_2 + r_3(r_1 - r_2)\sin v_3 = e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])$$
$$r_1(r_2 - r_3)\cos v_1 - r_2(r_1 - r_3)\cos v_2 + r_3(r_1 - r_2)\cos v_3 = 0 ,$$

die man sofort, wenn ψ ein beliebiger Winkel ist, symmetrischer so schreiben kann:

$$e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])\cos\psi = r_1(r_2 - r_3)\sin(v_1 - \psi) - r_2(r_1 - r_3)\sin(v_2 - \psi) + r_3(r_1 - r_2)\sin(v_3 - \psi)$$

$$e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])\sin\psi = r_1(r_2 - r_3)\cos(v_1 - \psi) - r_2(r_1 - r_3)\cos(v_2 - \psi) + r_3(r_1 - r_2)\cos(v_3 - \psi) .$$

Wird nun quadriert und addiert, so kommt nach leichter Reduktion:

$$e^2([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])^2 = 4r_2r_3(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_3 - v_2)^2 - 4r_3r_1(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)^2 + 4r_1r_2(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)^2,$$

und wenn die Gl. 2) (Seite 298) eingeführt werden:

$$\frac{e^2}{4}([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])^2 = \frac{(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)}{n_3}(\sigma - n_3r_3)(\sigma - r_2) - \frac{(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)}{n_1n_3}\sigma(\sigma - r_2) + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)}{n_1}(\sigma - n_1r_1)(\sigma - r_2),$$

oder wenn beachtet wird, daß nach 3):

$$[r_1r_3]^2 = (r_1r_3\sin 2f_2)^2 = \frac{4\sigma(\sigma - n_1r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3r_3)}{n_1^2n_3^2} :$$

$$e^2(n_1 + n_3 - 1)^2 = n_1^2n_3^2\left(\frac{(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)}{n_3\sigma(\sigma - n_1r_1)} - \frac{(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)}{n_1n_3(\sigma - n_1r_1)(\sigma - n_3r_3)} + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)}{n_1\sigma(\sigma - n_3r_3)}\right)$$

oder

$$e^2(n_1+n_3-1)^2 = \frac{n_1 n_3 (r_1-r_3)(r_1-r_2)(r_2-r_3)}{\sigma(\sigma-n_1 r_1)(\sigma-n_3 r_3)}\left(\frac{(\sigma-n_3 r_3)n_1}{(r_2-r_3)} - \frac{\sigma}{(r_1-r_3)} + \frac{(\sigma-n_1 r_1)n_3}{(r_1-r_2)}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(\sigma-n_3 r_3)n_1}{r_2-r_3} = \varkappa, \qquad \frac{\sigma}{r_1-r_3} = \lambda, \qquad \frac{(\sigma-n_1 r_1)n_3}{r_1-r_2} = \nu,$$

so wird:

$$e^2(n_1+n_3-1)^2 = \frac{\varkappa-\lambda+\nu}{\varkappa\lambda\nu} n_1^2 n_3^2$$

oder

$$e = \frac{n_1 n_3}{n_1+n_3-1}\sqrt{\frac{\varkappa-\lambda+\nu}{\varkappa\lambda\nu}}.$$

Dividiert man obige Gleichungen für $e([r_1 r_2]+[r_2 r_3]-[r_1 r_3])\sin\psi$ und $e(\cdots)\cos\psi$ durcheinander, so entsteht

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r_1(r_2-r_3)\cos(v_1-\psi) - r_2(r_1-r_3)\cos(v_2-\psi) + r_3(r_1-r_2)\cos(v_3-\psi)}{r_1(r_2-r_3)\sin(v_1-\psi) - r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-\psi) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-\psi)},$$

und wenn man der Reihe nach $\psi = v_1, v_2, v_3$ setzt:

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{r_1(r_2-r_3) - r_2(r_1-r_3)\cos(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\cos(v_3-v_2)}{-r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-v_1)}$$

. . . . . .

oder

$$\operatorname{tg} v_1 = 2\,\frac{(r_1-r_3)r_2\sin\frac{1}{2}(v_2-v_1)^2 - r_3(r_1-r_2)\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)^2}{-r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-v_1)}.$$

Trägt man hier 2) und 3) ein, so hat man die gewünschten Formen; aus $u_1-v_1, \ldots$ ergeben sich schließlich drei Werte der Periheldistanz, die übereinstimmen müssen.

Selbstverständlich besitzen diese Ausdrücke nur theoretisches Interesse, da sie sich aus inneren und äußeren Gründen für die Rechnung nicht eignen.

94. Bahnbestimmung mit Benutzung der Gibbsschen Formeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen. In Nr. 53 haben wir die von *Gibbs* abgeleiteten Ausdrücke für n_1 und n_3 kennen gelernt, die wir hier in folgender Form benutzen wollen:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{\mu_1}{r_1^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}, \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{\mu_3}{r_3^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}, \qquad 1)$$

$$\mu_1 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2(\tau_3-\tau_1)), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3+\tau_2^2), \quad \mu_3 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3 - \tau_2(\tau_3-\tau_1)).$$

Diese sind bis auf Größen vierter Ordnung inkl., ja bei gleichen Zwischenzeiten bis auf Größen fünfter Ordnung inkl. genau, gehen also erheblich über die Genauigkeit der von Gauß benutzten Ausdrücke hinaus. Es lag nahe, sie für die Bahnbestimmung zu verwerten und Gibbs selbst hat eine Methode hierzu ausgearbeitet. Diese ist aber umständlich und leidet an dem Fehler, daß sie nicht gestattet, die Näherungen bis zur vollständigen Darstellung der Beobachtungen fortzusetzen, sondern nur soweit, als dies mittels 1) möglich ist. Später haben *R. Vogel* (Astr. Nachr. Bd. 129,

S. 37) und *W. Fabritius* (Astr. Nachr. Bd. 128, S. 225) eine sich fast von selbst darbietende Methode, die Gibbsschen Formeln zu verwerten, angegeben, die von den genannten Mängeln frei ist und nun in Kürze nach der Formulierung des ersteren dargestellt werden möge.

Schreibt man die Grundformeln 25) (Seite 266) in der Gestalt:

$$\overline{\varrho_2} = a_1 n_1 - a_2 + a_3 n_3 ,$$
$$\overline{\varrho_1} = \frac{1}{n_1}(b_1 \overline{\varrho_2} + b_3) - b_2 , \qquad \overline{\varrho_3} = \frac{1}{n_3}(c_1 \overline{\varrho_2} + c_3) - c_2 , \tag{2}$$

wo man sich die Zusammensetzung der Koeffizienten a, b, c unmittelbar ableiten kann, und drückt die Distanzen und Radienvektoren durch die Gaußschen Winkel x_1, x_2, x_3 aus, welche in den Dreiecken Sonne, Erde, Gestirn an dem letzteren gebildet werden, so schreiben sich die Gleichungen für $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ sofort in folgender einfacher Form:

$$\operatorname{cotg} x_1 = \frac{1}{n_1}(p_1 \operatorname{cotg} x_2 + q_1) + m_1$$
$$\operatorname{cotg} x_3 = \frac{1}{n_3}(p_3 \operatorname{cotg} x_2 + q_3) + m_3 , \tag{3}$$

wo die Koeffizienten p, q, m nur von gegebenen Größen abhängen und in allen Hypothesen unverändert bleiben. Ebenso führt die Einsetzung der Winkel x in die Ausdrücke 1) auf:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_1 \sin x_1^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3}\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_3 \sin x_3^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3}\right), \tag{4}$$

wo offenbar

$$\frac{\mu_1}{(R_1 \sin \delta_1)^3} = \nu_1 , \qquad \frac{\mu_2}{(R_2 \sin \delta_2)^3} = \nu_2 , \qquad \frac{\mu_3}{(R_3 \sin \delta_3)^3} = \nu_3$$

gesetzt ist. Damit geht die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ in

$$\operatorname{cotg} x_2 = d_1 \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_1 \sin x_1^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3} + d_3 \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_3 \sin x_3^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3} - d_2 \tag{5}$$

über, wo wieder d_1, d_2, d_3 sich nur aus bekannten Größen zusammensetzen. Die Gleichungen 3) und 5) sind nun durch sukzessive Annäherung aufzulösen, wobei man mit einem Näherungswert von x_2 den Anfang machen wird. Außerdem braucht man Näherungswerte von n_1 und n_3. Setzt man aber in 1) $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2$, so folgt

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\mu_2 + \mu_1}{(R_2 \sin \delta_2)^3} \sin x_2^3\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{(R_2 \sin \delta_2)^3} \sin x_2^3\right) \tag{6}$$

und wenn dies in die erste Gleichung 2) eingetragen wird, ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$\alpha \operatorname{cotg} x_2 + \beta = \sin x_2^3 \tag{7}$$

die durch Versuche aufzulösen ist. Der Wert von x_2 hieraus liefert durch 3) und 6) x_1 und x_3 und damit die Mittel, 5) aufzulösen, worauf durch 4) und 3) genauere x_1 und x_3 folgen usf.

Die auf diese Weise gefundenen x_1, x_2, x_3 führen zu den Radienvektoren und Distanzen, mit denen die Größen der zweiten Hypothese berechnet werden können. Es kann dies in folgender Weise geschehen. Durch die bekannten Ausdrücke (Seite 276)

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{r_3}{r_1}\,\frac{y_1}{y_3} = P, \qquad n_1 + n_3 = 1 + \frac{q}{r_1 r_2 r_3}$$

$$q = \frac{r_1 r_3}{y_1 y_3}\,\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}$$

wird man auf:

$$n_1 = \frac{1}{1+P}(1 + C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3), \qquad n_3 = \frac{P}{1+P}(1 + C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3)$$

geführt, wo die Größe

$$C_2 = \frac{q}{R_1 \sin\delta_1 \cdot R_2 \sin\delta_2 \cdot R_3 \sin\delta_3}$$

bedeutet. Damit geht die erste Gleichung 2) in die Form

$$A_2 \operatorname{cotg} x_2 + B_2 = C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \qquad 8)$$

über, die nun ihrerseits die Verhältnisse n_1 und n_3 so zu schreiben gestattet:

$$n_1 = \frac{1}{1+P}(1 + B_2 + A_2 \operatorname{cotg} x_2), \qquad n_3 = P n_1. \qquad 9)$$

Es sind in der zweiten Hypothese also die Gleichungen 3) und 8) unter Benutzung der Ausdrücke 9) für die Verhältnisse n_1 und n_3 aufzulösen, was sich einfacher gestaltet, als in der ersten Hypothese, da n_1 und n_3 nur mehr von x_2 abhängen.

95. Die Formeln von E. Weiß. Man erhält eine für die Rechnung zwar etwas umständlichere, aber durch Symmetrie ausgezeichnete Form der Grundgleichungen, wenn man die Gl. 6) (Seite 258) zusammen so umformt, wie wir bisher nur die zweite behandelt haben. Nennt man, wie Seite 262, H_1, H_2, H_3 die Längen der aufsteigenden Knoten der größten Kreise durch die geozentrischen Planetenörter: 23, 13, 12 und η_1, η_2, η_3 ihre Neigungen gegen die Ekliptik, so wird entweder vermöge der geometrischen Bedeutung der Koeffizienten L, M, N oder vermöge ihrer Ausdrücke 7) (Seite 258) leicht erhalten:

$$\begin{aligned}
K n_1 \varrho_1 &= -n_1 R_1 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_1 - H_1) + R_2 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_2 - H_1) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_3 - H_1) \\
K \varrho_2 &= -n_1 R_1 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_1 - H_2) + R_2 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_3 - H_2) \\
K n_3 \varrho_3 &= -n_1 R_1 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_1 - H_3) + R_2 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_2 - H_3) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_3 - H_3)
\end{aligned}$$

wo wie früher die Bogen $23 = m_1$, $13 = m_2$, $12 = m_3$ gesetzt sind. Für K ergeben sich folgende drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_2 K &= \sin m_1 \sin m_3 \sin\eta_1 \sin\eta_3 \sin(H_3 - H_1) \\
\sin\beta_3 K &= \sin m_1 \sin m_2 \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin(H_2 - H_1) \\
\sin\beta_1 K &= \sin m_2 \sin m_3 \sin\eta_2 \sin\eta_3 \sin(H_3 - H_2),
\end{aligned}$$

welche oben eingetragen zu den Gleichungen:

$$n_1\varrho_1\cdot\frac{\sin m_3\,\sin\eta_3\,\sin(H_3-H_1)}{\sin\beta_2} = -n_1R_1\sin(L_1-H_1)+R_2\sin(L_2-H_1)-n_3R_3\sin(L_3-H_1)$$

$$\varrho_2\cdot\frac{\sin m_1\sin\eta_1\sin m_3\sin\eta_3}{\sin m_2\,\sin\eta_2\,\sin\beta_2}\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_2)+R_2\sin(L_2-H_2)-n_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

$$n_3\varrho_3\cdot\frac{\sin m_1\,\sin\eta_1\,\sin(H_3-H_1)}{\sin\beta_2} = -n_1R_1\sin(L_1-H_3)+R_2\sin(L_2-H_3)-n_3R_3\sin(L_3-H_3)$$

führen. Um die Größen m, η, H einfach zu berechnen, hat man folgendes Verfahren: Ist Q_1 der aufsteigende Knoten des größten Kreises 23 auf der Ekliptik, so wird:

$$\begin{aligned}\sin\eta_1\,\sin(Q_1\,2) &= \sin\beta_2\\ \cos(Q_1\,2) &= \cos\beta_2\,\cos(\lambda_2-H_1)\\ \sin\eta_1\,\sin(Q_1\,3) &= \sin\beta_3\\ \cos(Q_1\,3) &= \cos\beta_3\,\cos(\lambda_3-H_1)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, da $Q_1\,3 - Q_1\,2 = m_1$:

$$\sin\eta_1\,\sin m_1 = \cos\beta_2\,\sin\beta_3\,\cos(\lambda_2-H_1) - \sin\beta_2\,\cos\beta_3\,\cos(\lambda_3-H_1)$$

oder

$$\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3} = \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3\,\cos(\lambda_2-H_1) - \cos(\lambda_3-H_1)\,.$$

Wird dies einmal mit $\sin(\lambda_2-H_1)$, dann mit $\cos(\lambda_2-H_1)$ multipliziert und

$$\operatorname{tg}\eta_1\,\sin(\lambda_2-H_1) = \operatorname{tg}\beta_2\,,\qquad \operatorname{tg}\eta_1\,\sin(\lambda_3-H_1) = \operatorname{tg}\beta_3$$

beachtet, so kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3}\sin(\lambda_2-H_1) &= \sin(\lambda_3-\lambda_2)\\ \frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3}\cos(\lambda_2-H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_2)\,.\end{aligned}$$

Hieraus kann man $\sin\eta_1\,\sin m_1$ und H_1 und aus ähnlichen Gleichungen die $\sin\eta_2\,\sin m_2$ usf. berechnen, die für die Koeffizienten der Fundamentalgleichungen gebraucht werden. Wir führen zur Abkürzung

$$\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3} = h_1\,,\qquad \frac{\sin\eta_2\,\sin m_2}{\sin\beta_1\,\cos\beta_3} = h_2\,,\qquad \frac{\sin\eta_3\,\sin m_3}{\sin\beta_2\,\cos\beta_1} = h_3$$

ein, dann berechnen sich die h, H aus:

$$\begin{aligned}h_1\sin(\lambda_2-H_1) &= \sin(\lambda_3-\lambda_2)\\ h_1\cos(\lambda_2-H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_2)\\ h_2\sin(\lambda_1-H_2) &= \sin(\lambda_3-\lambda_1)\\ h_2\cos(\lambda_1-H_2) &= \operatorname{cotg}\beta_1\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_1)\\ h_3\sin(\lambda_2-H_3) &= \sin(\lambda_2-\lambda_1)\\ h_3\cos(\lambda_2-H_3) &= -\operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_1+\cos(\lambda_2-\lambda_1)\,.\end{aligned}\qquad 1)$$

Kontrolle: $h_1h_3\sin(H_3-H_1) = h_1h_2\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{cotg}\beta_3\sin(H_2-H_1) = h_2h_3\sin(H_3-H_2)$

und die Grundgleichungen werden:

$$n_1\varrho_1h_3\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_1)+R_2\sin(L_2-H_1)-n_3R_3\sin(L_3-H_1)$$

$$\varrho_2\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1h_3}{h_2}\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_2)+R_2\sin(L_2-H_2)-n_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

$$n_3\varrho_3h_1\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_3)+R_2\sin(L_2-H_3)-n_3R_3\sin(L_3-H_3)$$

wo mit $\bar{\varrho}$ die kurtierten Distanzen bezeichnet sind. Vermöge der Gleichung (Seite 267):

$$N_1 R_1 \sin(L_1 - H) - R_2 \sin(L_2 - H) + N_3 R_3 \sin(L_3 - H) = 0$$

kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} n_1 \bar{\varrho}_1 h_3 \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_1) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_1) \\ \bar{\varrho}_2 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \frac{h_1 h_3}{h_2} \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_2) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_2) \quad 2) \\ n_3 \bar{\varrho}_3 h_1 \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_3) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_3) . \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen, welche *E. Weiß* seinen Untersuchungen über Bahnbestimmung zugrunde gelegt hat*). Wir können die lehrreichen Ergebnisse derselben hier nicht eingehend verfolgen, sondern wollen nur auf den Gl. 2) eine einfache Bahnbestimmungsmethode aufbauen, wobei wir einige der nützlichen Kunstgriffe von Weiß kennen lernen werden. Wir werden bei dieser Methode, die für kleine Planeten bei 30—40tägiger Zwischenzeit noch gute Resultate liefert, ein kleines, von Weiß überschlagsweise mitgenommenes Glied zunächst weglassen und erst zum Schluß einführen, wenn wir seine Begründung gegeben haben; auf die genaueren Formeln einzugehen soll hier unterlassen werden, da die Methode dann den früher mitgeteilten wohl nachsteht.

Wird in 2) nach den Formeln Seite 177 eingetragen:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{r_2^3}\right), \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{r_2^3}\right) \\ N_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{R_2^3}\right), \qquad N_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{R_2^3}\right), \end{aligned}$$

so kommt, wenn

$$\mu_1 = \tfrac{1}{6}(\tau_1+\tau_2)\tau_3, \qquad \mu_3 = \tfrac{1}{6}(\tau_2+\tau_3)\tau_1 \qquad 3)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\bar{\varrho}_1 h_3 \sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_1)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_1)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right) \\ \bar{\varrho}_2 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1 h_3}{h_2}\sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_2)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_2)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right) \quad 4) \\ \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\bar{\varrho}_3 h_1 \sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_3)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_3)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right). \end{aligned}$$

Die drei Klammerausdrücke rechts lassen sich leicht auf eine einfachere Berechnung hinführen. Berechnet man g und G aus:

$$\begin{aligned} g\sin G &= (\tau_1+\tau_2) R_1 \sin L_1 + (\tau_2+\tau_3) R_3 \sin L_3 \\ g\cos G &= (\tau_1+\tau_2) R_1 \cos L_1 + (\tau_2+\tau_3) R_3 \cos L_3 \end{aligned}$$

oder besser aus:

$$\begin{aligned} g\sin(G-L_1) &= (\tau_2+\tau_3) R_3 \sin(L_3-L_1) \\ g\cos(G-L_1) &= (\tau_2+\tau_3) R_3 \cos(L_3-L_1) + (\tau_1+\tau_2) R_1 \end{aligned}$$

so wird allgemein:

$$R_1 \sin(L_1 - H)(\tau_1+\tau_2) + R_3 \sin(L_3 - H)(\tau_2+\tau_3) = g\sin(G-H)$$

*) Über die Best. der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beob. Denkschr. Akad. Wien 60.Bd. 1893.

und daher obige Gleichungen, wenn noch der gemeinsame Faktor

$$\frac{g}{6\sin(H_1 - H_3)} = \gamma \tag{5}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right) h_3 \overline{\varrho_1} &= \tau_3 \gamma \sin(H_1 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\
\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1 h_3}{h_2}\overline{\varrho_2} &= \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2}\gamma \sin(H_2 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \qquad 4^{a)} \\
\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right) h_1 \overline{\varrho_3} &= \tau_1 \gamma \sin(H_3 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}$$

Führt man die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{\tau_3}{h_3}\gamma \sin(H_1 - G) \\
W_2 &= \frac{\tau_1}{h_1}\cdot\frac{\tau_3}{h_3}\cdot\frac{h_2}{\tau_2}\gamma\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2}\sin(H_2 - G) \qquad 6) \\
W_3 &= \frac{\tau_1}{h_1}\gamma \sin(H_3 - G),
\end{aligned}$$

so wird schließlich:

$$\begin{aligned}
\varrho_2 &= W_2\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\
\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\overline{\varrho_1} &= W_1\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \qquad 7) \\
\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\overline{\varrho_3} &= W_3\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}$$

Weiß empfiehlt die erste Gleichung in Verbindung mit:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2\cos\delta_2$$

durch Versuche aufzulösen und nicht auf die Gaußsche Gleichung überzugehen. Man kann diese Versuche in der Tat rasch erledigen, wenn man folgende Umformung vornimmt:

$$r_2^2 = (R_2\cos\delta_2 + \varrho_2)^2 + R_2^2\sin\delta_2^2$$

oder, wenn

$$R_2\cos\delta_2 = f, \qquad R_2\sin\delta_2 = B$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r_2}{B}\right)^2 &= \left(\frac{\varrho_2 + f}{B}\right)^2 + 1 \\
\frac{\varrho_2 + f}{B} &= \operatorname{tg}\vartheta \\
r_2 &= B\sec\vartheta.
\end{aligned}$$

Man beginnt mit einem Näherungswert von r_2 und rechnet aus der ersten Gl. 7) ϱ_2, damit wieder r_2 aus:

$$\frac{\varrho_2 + f}{B} = \operatorname{tg}\vartheta, \qquad r_2 = B\sec\vartheta$$

und so fort, bis keine Änderung mehr eintritt. Bei kleinen Planeten ist ein brauchbarer Näherungswert von $\log r_2$ 0.400000 oder $\log\frac{1}{r_2^3} = 8.800000_{-10}$. Ist r_2 ge-

funden, so ergeben die beiden letzten Gleichungen in 7) $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ und daraus folgen die heliozentrischen Örter und die Elemente in der gewöhnlichen Weise.

Die Einfachheit obiger Formeln wurde hauptsächlich dadurch erzielt, daß wir auch für die Erdbahn die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch ihre Ausdrücke in den Zwischenzeiten ersetzt haben, statt die bekannten, strengen Werte zu nehmen. Der dadurch eingeführte Fehler ist aber nicht unerheblich und muß noch, wenigstens genähert, beseitigt werden. Es ist nämlich zwar das mit dem Differenzialquotienten des Radiusvektors nach der Zeit multiplizierte Glied in den Entwicklungen 17) (Seite 177) wegen der Kleinheit der Exzentrizität der Erdbahn durchaus zu vernachlässigen, aber das folgende in 17) nicht angegebene Glied vierter Ordnung wird für die Erde, wo der Faktor $\frac{1}{R_2^6}$ nicht verkleinernd wirkt, nicht ohne Einfluß. Dieses Glied lautet, wie man leicht durch Ausrechnung findet:

$$N_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\cdots + \frac{7\tau_2^4 - 10\tau_1^2\tau_2^2 + 3\tau_1^4}{360R_2^6} + \cdots\right)$$
$$N_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(\cdots + \frac{7\tau_2^4 - 10\tau_2^2\tau_3^2 + 3\tau_3^4}{360R_2^6} + \cdots\right)$$

oder:

$$\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\frac{(\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)}{360R_2^6} \quad \text{bez.} \quad \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\frac{(\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)}{360R_2^6}.$$

In den Gleichungen 4) treten also rechts die Glieder:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}(R_1\sin(L_1-H)(\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)+R_3\sin(L_3-H)(\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2))\frac{1}{60R_2^6}$$

oder wenn

$$g'\sin G' = (\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)R_1\sin L_1 + (\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)R_3\sin L_3$$
$$g'\cos G' = (\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)R_1\cos L_1 + (\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)R_3\cos L_3$$

gesetzt wird, die Glieder:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}g'\sin(G'-H)\frac{1}{60R_2^6}$$

hinzu. Nun findet man leicht:

$$g'\sin G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin G + \tfrac{3}{4}(\tau_3-\tau_1)((\tau_1+\tau_2)(\tau_2+2\tau_1)R_1\sin L_1 - (\tau_2+\tau_3)(\tau_2+2\tau_3)R_3\sin L_3)$$
$$g'\cos G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\cos G + \tfrac{3}{4}(\tau_3-\tau_1)((\tau_1+\tau_2)(\tau_2+2\tau_1)R_1\cos L_1 - (\tau_2+\tau_3)(\tau_2+2\tau_3)R_3\cos L_3)$$

oder wenn die zweiten Glieder, die offenbar von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden:

$$g'\sin G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin G$$
$$g'\cos G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\cos G$$
$$g'\sin(G'-H) = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin(G-H).$$

Also werden die Zusatzglieder rund:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}g\sin(G-H)\frac{\frac{1}{10}\tau_2^2}{R_2^3},$$

so daß ihre Berücksichtigung einfach dadurch geschehen kann, daß man in 7) statt $\frac{1}{R_2^3}$ nimmt $\frac{1+\frac{1}{10}\tau_2^2}{R_2^3}$.

Wir stellen die Formeln bis zur Berechnung der heliozentrischen Örter zusammen:

Daten, wie Seite 278.

I.
$$\tau_1 = k(t_3 - t_2),\quad \tau_2 = k(t_3 - t_1),\quad \tau_3 = k(t_2 - t_1)$$
$$\log k = 8.23\,5581$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{6}(\tau_1 + \tau_2)\tau_3,\quad \mu_3 = \tfrac{1}{6}(\tau_2 + \tau_3)\tau_1.$$

II.
$$g \sin(G - L_1) = (\tau_2 + \tau_3) R_3 \sin(L_3 - L_1)$$
$$g \cos(G - L_1) = (\tau_2 + \tau_3) R_3 \cos(L_3 - L_1) + (\tau_1 + \tau_2) R_1.$$

III.
$$h_1 \sin(H_1 - \lambda_2) = \sin(\lambda_2 - \lambda_3)$$
$$h_1 \cos(H_1 - \lambda_2) = \operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_2 - \lambda_3)$$
$$h_2 \sin(H_2 - \lambda_1) = \sin(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$h_2 \cos(H_2 - \lambda_1) = \operatorname{cotg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$h_3 \sin(H_3 - \lambda_2) = \sin(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$h_3 \cos(H_3 - \lambda_2) = -\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_1 + \cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Kontrollen:
$$h_1 \sin(H_1 - H_3) = h_2 \sin(H_2 - H_3)$$
$$h_3 \operatorname{tg}\beta_3 \sin(H_1 - H_3) = h_2 \operatorname{tg}\beta_1 \sin(H_1 - H_2).$$

IV.
$$\gamma = \frac{g}{6 \sin(H_1 - H_3)}$$
$$W_2 = \frac{\tau_1}{h_1}\frac{\tau_3}{h_3}\frac{h_2}{\tau_2}\gamma \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2} \sin(H_2 - G)$$
$$W_1 = \frac{\tau_3}{h_3}\gamma \sin(H_1 - G)$$
$$W_3 = \frac{\tau_1}{h_1}\gamma \sin(H_3 - G).$$

V.
$$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2),\quad \delta_2 < 180^\circ$$
$$R_2 \cos\delta_2 = f,\quad R_2 \sin\delta_2 = B.$$

VI.
$$\varrho_2 = W_2\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$
$$\frac{\varrho_2 + f}{B} = \operatorname{tg}\vartheta;\quad r_2 = B\sec\vartheta.$$

VII.
$$\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\varrho_1 = W_1\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$
$$\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\varrho_3 = W_3\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

96. Verfahren, wenn Näherungen vorliegen. Wenn eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unternommen wird, nachdem bereits eine provisorische vorausgegangen war, kann man von den Resultaten dieser letzteren in mehr oder minder großem Umfang Gebrauch machen, um die neue Rechnung zugleich zu sichern und zu erleichtern. Wir werden das allgemeinste Verfahren auseinandersetzen, bemerken aber, daß man je nach dem vorliegenden Fall eine Auswahl treffen kann.

Um nicht auf drei einzelne Beobachtungen angewiesen zu sein, berechnet man mit den vorliegenden Elementen eine Ephemeride wahrer Örter und vergleicht damit alle Beobachtungen, die in der Nähe von drei gut verteilten Zeitepochen t_1, t_2, t_3 liegen. Dabei wird man die Beobachtungen von Parallaxe befreien und der Aberration nach Nr. 27,2 Rechnung tragen. Die Mittel der Ephemeridenkorrektionen für t_1, t_2, t_3 bringt man an die Ephemeridenörter für t_1, t_2, t_3 an und hat so drei »Normalörter«, befreit von Parallaxe und Aberration, erlangt, die dann noch auf ein gemeinsames Äquinoktium zu übertragen sind. Diese Normalörter legt man der neuen Bahnbestimmung zugrunde. Reicht das Beobachtungsmaterial zur Bildung von solchen nicht aus, so wählt man drei gute Beobachtungen und befreit sie von Aberration, Parallaxe, Präzession und Nutation.

Nach Verwandlung in Länge und Breite berücksichtigt man die Sonnenbreiten nach Nr. 34.

Der wesentliche Unterschied gegen das Verfahren, das man einschlagen muß, wenn von einer Bahn noch nichts bekannt ist, besteht nun darin, daß man von vornherein für die Verhältnisse der Dreiecksflächen genauere Werte einführen kann, beziehungsweise daß man die Verhältnisse Sektor durch Dreieck auch mittels wenig genauer Elemente mit großer Sicherheit bilden kann. Rechnet man nach der Gauß-Enckeschen Methode (siehe die Formelübersicht Seite 278), so wird man sich aus den vorhandenen Elementen für die drei Beobachtungszeiten die Radienvektoren r_1, r_2, r_3 und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $v_3 - v_2 = 2f_1, \ldots$ ableiten und daraus nach XII. die Verhältnisse Sektor durch Dreieck y_1, y_2, y_3 berechnen. Dann kann man nach Durchrechnung von I. und III., sowie von

$$n_1^{\,0} = \frac{r_1}{r_2}, \quad n_3^{\,0} = \frac{r_3}{r_2}$$

sofort die Koeffizienten der Gaußschen Gleichung nach XIII. bilden und weiter nach V. bis XII. in der gewöhnlichen Weise rechnen, nur wird man natürlich die Beobachtungszeiten nicht mehr für Aberration korrigieren oder doch nur um die Unterschiede, welche sich aus der Verschiedenheit der früheren und der neu erhaltenen ϱ ergeben. Bei Bahnbestimmungen dieser Art wird es sich meistens um größere Zwischenzeiten handeln, es ist dann zur Berechnung der y das Gaußsche Verfahren heranzuziehen. Es ist dann auch leicht möglich, daß man mit einer oder zwei Hypothesen nicht auskommt, sondern deren mehrerer bedarf. Sieht man dies voraus, dann empfiehlt es sich nicht, die Hypothesenrechnung in *der* Weise über die dritte Hypothese hinaus weiter zu führen, daß man die folgende mit den Schlußwerten der vorausgehenden beginnt, da dieses Verfahren oft sehr geringe Konvergenz besitzt, sondern man wird einen Kunstgriff von Gauß (Theoria motus Nr. 120—122) anwenden, der schneller zum Ziele führt.

Sind allgemein X und Y Funktionen der beiden Variabeln x und y und sollen diejenigen Werte der letzteren ermittelt werden, für welche $X = 0$ und $Y = 0$ wird, so kann man ausgehend von Werten von x und y, für welche dies bereits sehr nahe eintrifft, zu den strengen Werten durch ein Interpolationsverfahren gelangen. Man darf dann voraussetzen, daß die Änderungen in den Werten von X und Y sehr

nahe der Änderung in x proportional sind, wenn y unverändert bleibt, und proportional der von y, wenn x sich nicht ändert. Sind x_0 und y_0 die wahren Werte von x und y, und $x_0 + \lambda$ und $y_0 + \mu$ genäherte, so wird man die entsprechenden Werte von X und Y durch

$$X = a\lambda + \beta\mu \quad \text{und} \quad Y = \gamma\lambda + \delta\mu$$

darstellen dürfen, worin α, β, γ, δ konstant sind, so lange λ und μ als kleine Größen angesehen werden dürfen. Hat man also für drei Wertsysteme xy die entsprechenden X, Y berechnet, so kann man sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten α, β, γ, δ, x_0, y_0 aufstellen, aus denen x_0 und y_0 ermittelt werden können. Für

$$\begin{array}{llll} x = a\,, & y = b & \text{werde} & X = A\,,\ Y = B \\ x = a', & y = b' & & X = A',\ Y = B' \\ x = a'', & y = b'' & & X = A'',\ Y = B'', \end{array}$$

dann hat man:

$$\begin{array}{ll} A = \alpha(a - x_0) + \beta(b - y_0) & B = \gamma(a - x_0) + \delta(b - y_0) \\ A' = \alpha(a' - x_0) + \beta(b' - y_0) & B' = \gamma(a' - x_0) + \delta(b' - y_0) \\ A'' = \alpha(a'' - x_0) + \beta(b'' - y_0) & B'' = \gamma(a'' - x_0) + \delta(b'' - y_0)\,. \end{array}$$

Hieraus folgt nach Elimination von α, β, γ, δ

$$x_0 = a + \frac{(a' - a)(A''B - AB'') + (a'' - a)(AB' - A'B)}{(A' - A)(B'' - B) - (A'' - A)(B' - B)}$$

$$y_0 = b + \frac{(b' - b)(A''B - AB'') + (b'' - b)(AB' - A'B)}{(A' - A)(B'' - B) - (A'' - A)(B' - B)}\,.$$

Da der gemeinsame Nenner dieser Ausdrücke auch gleich

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\big((a' - a)(b'' - b) - (a'' - a)(b' - b)\big)$$

ist, so erkennt man einerseits, daß a, a', a'', b, b', b'' *nicht* so angenommen werden dürfen, daß

$$\frac{a'' - a}{b'' - b} = \frac{a' - a}{b' - b}$$

wird und andererseits, daß Fälle eintreten *können*, wo die Methode unbrauchbar ist, nämlich wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ wird. In der Anwendung kann man $a' = a$ und $b'' = b$ setzen, womit sowohl die Berechnung der A, B als obige Formeln sich vereinfachen. Auch ist klar, daß man die Größen a, b, A, B mit a', b', A', B' oder mit a'', b'', A'', B'' vertauschen darf.

In der Anwendung dieses Verfahrens auf die Gauß-Enckesche Rechnungsweise wird man $x = \nu_1$, $y = \nu_3$ und $X = \nu_1' - \nu_1$, $Y = \nu_3' - \nu_3$ setzen, wo mit ν_1' und ν_3' die Schlußwerte der zur Hypothese ν_1, ν_3 gehörigen ν_1 und ν_3 bezeichnet sind. Bei der zweiten und dritten Hypothese wird man mit den Schlußwerten der ersten und zweiten beginnen, bei der vierten aber mit den nach obigen Formeln gebildeten, wobei man für a und b diejenigen Werte nimmt, für welche X und Y bereits am kleinsten geworden sind, also wohl in der Regel die Anfangswerte der dritten Hypothese. Noch vorteilhafter aber ist es, nach einem Verfahren von Gauß (Theoria motus Nr. 159) für a und b die Schlußwerte der dritten Hypothese zu nehmen, mit denen man also bei Fortführung des gewöhnlichen Verfahrens die vierte Hypothese

begonnen hätte, und die Korrektionen dieser nach den obigen Formeln zu bestimmen. Nennt man die drei Werte für X: A, A', A'', für Y: B, B', B'' und die Schlußwerte der dritten Hypothese M und N, so werden die Anfangswerte der vierten Hypothese

$$x = M - \varkappa(A' + A'') - \varkappa' A''$$
$$y = N - \varkappa(B' + B'') - \varkappa' B'',$$

wo:

$$\varkappa = \frac{A'B'' - A''B'}{(A'B'' - A''B') + (A''B - AB'') + (AB' - A'B)}$$
$$\varkappa' = \frac{A''B - AB''}{(A'B'' - A''B') + (A''B - AB'') + (AB' - A'B)}.$$

Ist die Hypothesenrechnung beendet, so erfolgt die Bestimmung der Elemente ungeändert nach den Formeln XIV, XV (Seite 281) oder XV (Seite 293).

Hat man die Hansensche Formulierung (siehe die Übersicht Seite 291) zugrunde gelegt, oder etwa die in diesem Werke nicht zur Darstellung gelangte ungeänderte Methode der Theoria motus, so wird man bei vorhandenen Näherungen die Hypothesenrechnung nicht mit $P = r_3 : r_1$, $Q = r_1 r_3$ beginnen, sondern man wird gleich in die strengen Werte von P und Q

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2 r_2^3 (n_1 + n_3 - 1)$$

eintragen:

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}$$
$$n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)},$$

womit sie übergehen in: (siehe Formel 5) Seite 152)

$$P = \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{r_3 \sin(v_3 - v_2)}, \qquad Q = \frac{4 r_2^4}{p} \frac{\sin\frac{1}{2}(v_3 - v_2) \sin\frac{1}{2}(v_2 - v_1)}{\cos\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}.$$

Nachdem hiermit die erste Hypothese gerechnet, folgen die weiteren, wie in der Übersicht Seite 291.

Selbstverständlich kann man auch hier das oben erläuterte Verfahren der Interpolation nach der dritten Hypothese einschlagen, indem man setzt $x = P$, $y = Q$, $X = P^{\mathrm{I}} - P$, $Y = Q^{\mathrm{I}} - Q$.

97. Beispiel für Berechnung einer Bahn, wenn ein provisorisches Elementensystem vorliegt. Um das in voriger Nr. auseinandergesetzte Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, geben wir im folgenden die hauptsächlichsten Teile einer den periodischen Kometen 1889 V (Brooks) betreffenden Rechnung wieder. Um drei möglichst gute Örter zu erhalten, werden zunächst mit den provisorischen Elementen

$T = 1889$ Sept. 30.28766 M. Z. Berlin
$\omega = 343^\circ 33' 36''.5$
$\Omega = 17\ 58\ 51.8$ } Ekliptik und Äqu. 1890.0
$i = 6\ 4\ 3.9$
$\varphi = 28\ 3\ 3.5$
$\mu = 502''.6573$

folgende Örter berechnet:

1889 M.Z.B.	Wahre AR.	Wahre Dekl.	Aberr.-Zeit	$\log\varrho$
Juli 31.5	$0^h\ 3^m\ 54^s.90$	$-7^\circ\ 4'\ 20''.6$	$10^m\ 0^s$	0.080
Aug. 1.5	4 23.91	−7 0 36.3	9 55	0.077
2.5	4 51.25	−6 56 58.4	9 51	0.074
Sept. 26.5	23 50 19.81	−5 14 30.8	7 56	9.980
27.5	49 42.42	−5 12 13.0	7 57	9.980
28.5	49 5.66	−5 9 48.7	7 58	9.981
Nov. 22.5	23 53 1.32	+0 21 49.0	11 8	0.127
23.5	53 52.08	+0 31 4.5	11 14	0.131
24.5	54 44.25	+0 40 25.2	11 20	0.134

und damit eine Reihe ausgewählter Beobachtungen verglichen. Diese werden zuvor mittels der bekannten ϱ von Parallaxe befreit und durch Subtraktion der Aberrationszeit von der Beobachtungszeit aus scheinbaren Örtern in wahre verwandelt, die nun unmittelbar mit der Ephemeride, die ebenfalls wahre Örter gibt, verglichen werden können. Folgende Tabellen enthalten die auszuführenden Rechnungen:

			Ortszeit	Red. auf Berl.	Aberr.-Zeit	Red. Zeit Berlin
I.	München	Juli	$31\ 12^h35^m\ 4^s$	$+\ 7^m\ 9^s$	$-10^m\ 0^s$	Juli 31.52237
	Straßburg		31 12 47 28	+ 22 30	−10 0	31.54165
	München	Aug.	1 12 12 53	+ 7 9	− 9 55	Aug. 1.50702
	Mt. Hamilton		1 13 14 2	$+\ 9^h\ 0\ 9$	− 9 53	1.91966
II.	Marseille	Sept.	27 8 50 34	+ 32 0	− 7 57	Sept. 27.38515
	Bordeaux		27 8 38 52	+ 55 40	− 7 57	27.39346
	München		27 10 1 33	+ 7 9	− 7 57	27.41719
	Washington		27 10 17 57	+6 1 47	− 7 57	27.67485
III.	Pulkowa	Nov.	23 5 45 13	−1 7 44	−11 12	Nov. 23.18492
	Nice		23 7 52 35	+ 24 13	−11 14	23.33731
	Dresden		23 7 51 32	− 1 20	−11 13	23.31874
	Washington		23 9 36 42	+6 1 47	−11 15	23.64391

	Beobachteter Ort: α	δ	Parallaxe in α	δ	Ephemeriden-Ort: α	δ	Beob.−Eph. α	δ
I. München	$0^h\ 3^m55^s.32$	$-7^\circ\ 4'\ 21''.1$	$-0^s.22$	$+5^s.9$	$0^h\ 3^m55^s.57$	$-7^\circ\ 4'\ 15''.5$	$-0^s.47$	$+0''.3$
Straßburg	3 55.86	−7 4 16.0	−0.23	+5.9	3 56.14	−7 4 11.1	−0.51	+1.0
München	4 23.82	−7 0 43.6	−0.24	+5.9	4 24.11	−7 0 34.7	−0.53	−3.0
Mt. Hamilton	4 35.18	−6 59 6.9	−0.21	+5.1	4 35.58	−6 59 4.1	−0.61	+2.3
II. Marseille	23 49 46.98	−5 12 38.8	−0.28	+6.8	23 49 46.68	−5 12 29.2	+0.02	−2.8
Bordeaux	49 46.86	−5 12 30.4	−0.29	+7.0	49 46.37	−5 12 28.0	+0.20	+4.6
München	49 45.71	−5 12 32.3	−0.14	+7.4	49 45.49	−5 12 24.7	+0.08	−0.2
Washington	46 36.49	−5 11 53.6	−0.13	+6.4	49 35.95	−5 11 48.2	+0.41	+1.0
III. Pulkowa	23 53 36.54	+0 28 0.7	−0.11	+5.6	23 53 35.94	+0 28 8.9	+0.49	−2.6
Nice	53 44.06	+0 29 25.9	+0.01	+4.5	53 43.73	+0 29 33.8	+0.34	−3.4
Dresden	53 43.38	+0 29 20.8	+0.01	+5.0	53 42.77	+0 29 28.5	+0.62	−2.7
Washington	53 59.90	+0 32 20.9	+0.16	+4.0	53 59.50	+0 32 24.9	+0.56	0.0

Die Ephemeride erfordert also zu den drei Epochen 1889 Aug. 1.5, Sept. 27.5 und Nov. 23.5 die Korrektionen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und ergibt daher die nebengesetzten Normalörter:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	wahre AR.	wahre Dekl.
1889 Aug. 1.5	$-0^s.53$	$+0''.1$	$0^h\ 4^m\ 23^s.38$	$-7^\circ\ 0'\ 36''.2$
Sept. 27.5	$+0.18$	$+0.6$	$23\ 49\ 42.60$	$-5\ 12\ 12.4$
Nov. 23.5	$+0.50$	-2.2	$23\ 53\ 52.58$	$+0\ 31\ 2.3$

Diese sind nun auf ein gemeinsames Äquinoktium zu übertragen, wozu wir zur Erleichterung späterer Rechnungen das des benachbarten Jahrzehntanfanges, nämlich 1890.0 wählen. Für solche Übertragungen sind im Berliner Jahrbuch besondere Ephemeriden der f, g, G gegeben. Mittels dieser findet man hier nachstehende Reduktionen auf 1890.0 und die reduzierten Örter:

	Red. auf 1890.0		α 1890.0	δ 1890.0
1889 Aug. 1.5	$+2^s.26$	$+15''.7$	$0^h\ 4^m\ 25^s.64$	$-7^\circ\ 0'\ 20''.5$
Sept. 27.5	$+1.87$	$+12.1$	$23\ 49\ 44.47$	$-5\ 12\ 0.3$
Nov. 23.5	$+1.44$	$+9.3$	$23\ 53\ 54.02$	$+0\ 31\ 11.6$

Die Verwandlung in Längen und Breiten gibt folgende Daten, denen wir die Koordinaten der Erde, ebenfalls auf 1890.0 gebracht, beifügen:

	λ 1890.0	β 1890.0	Korr.	L 1890.0	B 1890.0	$\log R$
1889 Aug. 1.5	$-1^\circ 47' 12''.1$	$-6^\circ 51' 52''.3$	$-0''.4$	$309^\circ 49' 13''.7$	$-0''.44$	0.006310
Sept. 27.5	$-4\ 25\ 22.9$	$-3\ 45\ 1.3$	-0.2	$5\ 1\ 22.8$	-0.24	0.000649
Nov. 23.5	$-1\ 11\ 31.5$	$+1\ 5\ 1.8$	-0.1	$61\ 54\ 55.3$	-0.09	9.994274

Den Breiten β sind die Korrektionen beigesetzt, welche daran anzubringen sind, wenn man die Erdbreiten zu Null annimmt (Nr. 34). Die Bahnrechnung ist nach den Formeln der Übersicht Seite 278 ausgeführt und ergab zunächst folgende von der Hypothesenrechnung unabhängige Resultate:

I.	$\operatorname{tg}\eta_2$	1.127862	III.	N_1	9.950524
	H_2	$-1^\circ 16' 22''.3$		c_1	1.184829_n
	$\operatorname{tg}\beta_0$	9.867854_n		$n_1{}^0$	9.698970
	a_1	1.301355			

	N_3	9.953936					
	c_3	1.246234					
	$n_3{}^0$	9.698970					
VII.	M_1	9.785040	M_3	9.549762	IV.	k^0	0.015350
	M_1'	9.155496	M_3'	0.020600		μ	0.307383

	δ_2	$10^\circ\ 9'\ 25''.3$	
	q	4 59 32.44	

Um die Hypothesenrechnung mit XIII. beginnen zu können, sind den früheren Rechnungen die in der ersten Spalte der folgenden Tabelle aufgeführten r_1, r_2, r_3, $u_3 - u_2$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_1$ entnommen und damit die Verhältnisse Sektor durch Dreieck berechnet worden. Mit diesen werden ν_1, ν_3, l^0, m, z, r_2, $\overline{\varrho_2}$, $\overline{\varrho_1}$, $\overline{\varrho_3}$, r_1, r_3, l_1, l_2, l_3, b_1, b_2, b_3, u_1, u_2, u_3 der Reihe nach durch die Formeln XIII, V, VI, VII, VIII, IX, X berechnet, worauf neue Werte für die y_1, y_2, y_3 ermittelt werden können, die der zweiten Hypothese zugrunde liegen usf.

	I.	II.	III.
r_1	0.30 3843	0.30 3899	0.30 3900
r_2	0.28 9920	0.28 9978	0.28 9978
r_3	0.30 1449	0.30 1508	0.30 1509
$u_3 - u_2$	24°36′25.″6	24°36′17.″1	24°36′17.″0
$u_2 - u_1$	24 28 4.0	24 27 55.9	24 27 55.4
$u_3 - u_1$	49 4 29.6	49 4 13.0	49 4 12.4
y_1	0.00 9224	0.00 9220	0.00 9220
y_3	0.00 9145	0.00 9141	0.00 9141
y_2	0.03 7565	0.03 7549	0.03 7549
ν_1	9.39 7613	9.39 7590	
ν_3	9.39 8859	9.39 8837	
n_1	9.72 7302	9.72 7299	
n_3	9.72 7381	9.72 7378	
l^0	9.77 3288	9.77 3273	
m	1.72 4857	1.72 4842	
$\varkappa$	5°11′49.″39	5°11′49.″37	
$\overline{\varrho_1}$	0.07 3952	0.07 3954	
$\overline{\varrho_2}$	9.97 9494	9.97 9495	
$\overline{\varrho_3}$	0.13 0909	0.13 0911	
i	6° 4′ 1.″0	6° 4′ 1.″2	
Ω	17 59 9.7	17 59 9.5	

Da die y der letzten Hypothese sich nicht mehr geändert haben, kann man die letzterhaltenen Werte der r und u als die definitiven betrachten und daraus die Elemente ableiten.

98. Die Variation der geozentrischen Distanzen. *Gauß* betont in der Theoria motus an mehreren Stellen mit Nachdruck, daß es nicht gelinge das Problem der Bahnbestimmung in einfacher Weise auf die Ermittelung *einer* Unbekannten zurückzuführen, daß dagegen bei Einführung von zwei Unbekannten eine verhältnismäßig einfache Analyse zum Ziele führe. Bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn bieten sich als solche kaum geeignetere Größen dar als P und Q, da man für sie einfache Näherungswerte angeben kann, die sich dann leicht zu den wahren Werten verbessern lassen. Bei schon näherungsweise bekannten Bahnen dagegen kann man auch andere Unbekannte einführen, z. B. die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen oder die Bestimmungsstücke der Bahnebene Ω und i, da dann Näherungswerte dieser Größen vorliegen und auf Grund derselben wie folgt verfahren werden kann. Man berechnet mit den Näherungswerten und zwei geozentrischen Örtern die Elemente und dann mit diesen den dritten geozentrischen Ort, der mit dem beobachteten im allgemeinen nicht übereinstimmen wird; die Näherungswerte werden mit Benutzung der Seite 311 auseinandergesetzten Methode so lange variiert, bis Übereinstimmung des berechneten mit dem beobachteten Ort erzielt ist. Besonders mit den zwei geozentrischen Distanzen als Unbekannten leistet diese unter dem Namen: *Variation der geozentrischen Distanzen* bekannte Methode vorzügliche Dienste, weshalb wir näher auf sie eingehen müssen.

Mit den genäherten Distanzen für die Zeiten zweier Beobachtungen oder Normalörter, in der Regel der beiden äußeren ϱ_1^0 und ϱ_3^0 und den zugehörigen geozentrischen Koordinaten $\lambda_1\ \beta_1$, $\lambda_3\ \beta_3$ berechnet man ein Elementensystem I, welches also diese beiden Örter völlig streng darstellen wird, den mittleren dagegen nicht. Um die Änderungen zu ermitteln, welche an ϱ_1^0 und ϱ_3^0 angebracht werden müssen, damit auch der mittlere Ort dargestellt werde, berechne man weitere zwei Elementensysteme II und III mit den Grundlagen:

und

$$\begin{array}{llll} \text{II.} & \varrho_1^0 + \delta\varrho_1 & \varrho_3^0 & \lambda_1\ \beta_1 \quad \lambda_3\ \beta_3 \\ \text{III.} & \varrho_1^0 & \varrho_3^0 + \delta\varrho_3 & \lambda_1\ \beta_1 \quad \lambda_3\ \beta_3\,. \end{array}$$

Hierbei gewährt die Bemerkung einige Erleichterung der Rechnung, daß man bei Bildung der heliozentrischen Koordinaten für die beiden Örter nach den Formeln (Nr. IX, Seite 279)

$$\begin{aligned} r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L) \\ r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L)+R \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

für das System II beim ersten Ort nur die Inkremente

$$\delta\varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1-L_1)\,, \qquad \delta\varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1-L_1)\,, \qquad \delta\varrho_1\sin\beta_1$$

den bei I erhaltenen Werten hinzuzufügen braucht, während der dritte Ort ungeändert bleibt und daß für das System III der erste Ort ungeändert bleibt und dem dritten Ort die Inkremente

$$\delta\varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3-L_3)\,, \qquad \delta\varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3-L_3)\,, \qquad \delta\varrho_3\sin\beta_3$$

hinzuzufügen sind.

Sind nun der Reihe nach die mit den drei Elementensystemen *gerechneten* mittleren Örter

$$\lambda_2^{\mathrm{I}}\beta_2^{\mathrm{I}}\,, \qquad \lambda_2^{\mathrm{II}}\beta_2^{\mathrm{II}}\,, \qquad \lambda_2^{\mathrm{III}}\beta_2^{\mathrm{III}},$$

der *beobachtete* Ort aber $\lambda_2\beta_2$ und werden ferner mit $\varrho_1^0 + x_1\delta\varrho_1$ und $\varrho_3^0 + x_3\delta\varrho_3$ die Distanzen bezeichnet, für welche Beobachtung — Rechnung Null wird, also die wahren Distanzen, so erhält man durch Spezialisierung des Seite 311—12 beschriebenen Verfahrens oder noch einfacher durch direkte Überlegung leicht die Ansätze:

$$\begin{aligned} (\lambda_2^{\mathrm{II}}-\lambda_2^{\mathrm{I}})x_1 + (\lambda_2^{\mathrm{III}}-\lambda_2^{\mathrm{I}})x_3 &= \lambda_2-\lambda_2^{\mathrm{I}} \\ (\beta_2^{\mathrm{II}}-\beta_2^{\mathrm{I}})x_1 + (\beta_2^{\mathrm{III}}-\beta_2^{\mathrm{I}})x_3 &= \beta_2-\beta_2^{\mathrm{I}}\,. \end{aligned} \qquad \text{A.}$$

Hieraus können x_1 und x_3 und damit die wahren Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 ermittelt werden; die dann durch $\varrho_1\lambda_1\beta_1$, $\varrho_3\lambda_3\beta_3$ berechneten Elemente werden die äußeren Örter streng darstellen, den mittleren aber so gut, als die Berechtigung des Verfahrens es gestattet, d. h. um so besser, je kleiner die Variationen $x_1\delta\varrho_1$ und $x_3\delta\varrho_3$ sind.

Das beschriebene Verfahren läßt sich verallgemeinern, d. h. man kann beliebig viele Beobachtungen ebenso wie hier die mittlere behandeln; man erhält dann so viele Gleichungspaare A. als mittlere Beobachtungen zugezogen wurden und muß aus ihnen die Werte von x_1 und x_3 durch ein Ausgleichungsverfahren bestimmen. Wir werden hierauf in Abschnitt XXVIII zurückkommen.

99. Beispiel zur Variation der geozentrischen Distanzen. Zur Erläuterung des Verfahrens wählen wir die erste Bahnverbesserung des Planeten (482) Petrina, wobei wir zum Teil von Rechnungen Gebrauch machen, die Dr. Neugebauer ausgeführt hat. Aus drei Örtern 1902 März 7 (Besançon), März 30 (Wien) und Mai 7 (Wien), die wir unten angeben, war eine Bahn bestimmt worden, die wir mit ihren Grundlagen gleichfalls in die unten folgende Zusammenstellung unter der Bezeichnung I. aufführen. Eine später hinzukommende Beobachtung 1902 Mai 29 (Wien) zeigte von dieser Bahn erhebliche Abweichungen und die Aufgabe war, durch Variation der Distanzen von März 7 und Mai 7, aus denen die erste Bahn berechnet worden war, ein Elementensystem zu erlangen, welches außer der Beobachtung März 30 auch noch die Beobachtung Mai 29 darstellte. Zu dem Ende wurden drei Elementensysteme berechnet mit den Grundlagen:

	März 7	Mai 7
I.	$\log\varrho_1$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3$, λ_3, β_3
II.	$\log\varrho_1 - 0.00\,1000$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3$, λ_3, β_3
III.	$\log\varrho_1$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3 - 0.00\,1000$, λ_3, β_3,

von denen das erste der ersten Bahnbestimmung entnommen werden konnte. Diese Rechnungen sind auszugsweise folgende:

1902	M.Z.B.	λ	$\mathrm{tg}\,\beta$	L	$\log R$
März	7.49314	174° 37′ 17.″5	$8.74\,4968_n$	166° 27′ 6.″4	9.99 6848
	68.40902	165 55 53.0	8.25 1469	226 20 26.2	0.00 4092

	I.	II.	III.
$\overline{\varrho_1}$	0.30 1078	0.30 0078	0.30 1078
$\overline{\varrho_3}$	0.36 0757	0.36 0757	0.35 9757
$l_1 - L_1$	+ 5° 27′ 42.″9	+ 5° 27′ 27.″8	+ 5° 27′ 42.″9
$l_3 - L_3$	− 42 57 50.2	− 42 57 50.2	− 42 55 58.4
$\mathrm{tg}\,b_1$	8.57 0920	8.57 0588	8.57 0920
$\mathrm{tg}\,b_3$	8.14 5653	8.14 5653	8.14 5399
r_1	0.47 5427	0.47 4758	0.47 5427
r_3	0.46 6615	0.46 6615	0.46 5869
$u_3 - u_1$	11° 49′ 49.″6	11° 50′ 2.″3	11° 51′ 37.″6
y_2	0.00 3074	0.00 3082	0.00 3082
p	0.47 3212	0.47 2146	0.47 3904
Ep.		1902 Mai 7.5	
M	289° 58′ 43.″8	288° 20′ 9.″0	291° 57′ 56.″9
ω	84 20 12.2	85 9 29.0	83 14 5.2
Ω	180 15 13.1	180 15 2.7	180 16 39.4
i	14 23 47.7	14 23 2.2	14 21 26.5
φ	5 41 9.2	5 14 20.6	6 10 32.4
μ	681.″967	686.″013	678.″527
$\log a$	0.47 7496	0.47 5783	0.47 8960
Äqu.	1902.0	1902.0	1902.0

Die Beobachtungen von 1902 März 30 und Mai 29 (Wien) lauten, in geozentrische Längen und Breiten verwandelt und auf das Äquinoktium 1902.0 gebracht:

1902	M.Z.B.	λ 1902.0	β 1902.0
März	30.46 745	169° 42′ 15″.8	− 1° 32′ 33″.1
Mai	29.41 300	167 31 49.3	+ 2 8 53.0

Die Zeiten sind bereits für Aberration korrigiert, die Örter also für diese Zeiten wahre Örter. Für diese selben Zeiten wurden nun mit obigen drei Elementensystemen die Örter gerechnet und folgendes erhalten (Formeln 53) Seite 277):

		λ^{I}	λ^{II}	λ^{III}	β^{I}	β^{II}	β^{III}
März	30.46 745	169° 42′ 16″.1	169° 41′ 50″.5	169° 42′ 30″.5	− 1° 32′ 32″.8	− 1° 32′ 24″.3	− 1° 32′ 41″.9
Mai	29.41 300	167 32 18.1	167 32 34.5	167 32 33.0	+ 2 9 2.1	+ 2 8 49.6	+ 2 9 14.0

Der erste Ort gibt also die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} -25''.6\,x_1 + 14''.4\,x_3 &= -0''.3 \\ +\ 8.5\,x_1 - \ 9.1\,x_3 &= -0.3 \end{aligned}$$

und der zweite:

$$\begin{aligned} +16''.4\,x_1 + 14''.9\,x_3 &= -28''.8 \\ -12.5\,x_1 + 11.9\,x_3 &= -\ 9.1 \end{aligned}$$

Durch eine erst später zu besprechende Ausgleichungsmethode findet man aus allen vier Gleichungen

$$x_1 = -0.630 \qquad x_3 = -1.333$$

und damit für die korrigierten kurtierten Distanzen $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$:

$$\begin{aligned} \log \overline{\varrho_1} &= 0.30\,1078 + 0.00\,0630 = 0.30\,1708 \\ \log \overline{\varrho_3} &= 0.36\,0757 + 0.00\,1333 = 0.36\,2090 \end{aligned}$$

Mit diesen werden die neuen Elemente gefunden:

$$\begin{aligned} &1902\ \text{Mai}\ 7.5 \\ M &= 288^\circ\ 7'\ 6''.3 \\ \omega &= \ 85\ 31\ 13.0 \\ \Omega &= 180\ 13\ 25.1 \\ i &= \ 14\ 27\ 25.6 \\ \varphi &= \ \ 5\ 18\ 49.8 \\ \mu &= 683''.838 \\ \log a &= 0.47\,6703 \end{aligned} \Big\} \ 1902.0$$

welche die vier Beobachtungen in folgender Weise darstellen:

			$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
1902	März	7	0″.0	0″.0
	März	30	+ 2.8	− 7.1
	Mai	7	0.0	0.0
	Mai	29	+ 1.3	− 1.2

Diese Abweichungen können sowohl durch direkte Rechnung gefunden werden, als durch Einsetzung von x_1 und x_3 in obige Bedingungsgleichungen. Die Beobachtungen März 7 und Mai 7, aus denen die Elemente abgeleitet werden, werden

natürlich völlig dargestellt; die beiden anderen Beobachtungen könnten nur dann völlig wiedergegeben werden, wenn alle Beobachtungen fehlerfrei wären. Hier scheint eine der Breiten mit einem nicht ganz zulässigen Beobachtungsfehler behaftet zu sein, weshalb die Darstellung der Beobachtung vom März 30 nicht befriedigt. Ohne Zuziehung weiterer Beobachtungen läßt sich aber kein besseres Resultat erlangen.

100. Die Ausnahmefälle. Die Sicherheit der Bahnbestimmung. Bei der Auswahl der drei Beobachtungen, auf die man eine Bahnbestimmung gründen will, muß man einige Vorsicht üben, da es Fälle gibt, in denen sich die Bahnbestimmung mit geringerer Sicherheit ausführen läßt und auch solche, wo dies gar nicht möglich ist. Durch eine Diskussion der zugrunde liegenden Gleichungen lassen sich diese Ausnahmefälle leicht feststellen. Wir haben die Gleichung zur Bestimmung der mittleren geozentrischen Distanz $\overline{\varrho_2}$ auf die Form gebracht (Seite 263 und 286)

$$K\overline{\varrho_2} = An_1 + Bn_3 - C, \qquad \text{A.}$$

wo

$$K = \frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}$$

$$A = -R_1 \sin(L_1 - H_2), \quad B = -R_3 \sin(L_3 - H_2), \quad C = -R_2 \sin(L_2 - H_2)$$

gesetzt wurde und H_2 und η_2 Länge des Knotens und Neigung des durch den ersten und dritten geozentrischen Ort gelegten größten Kreises $\overline{13}$ sind.

Wenn $\overline{13}$ senkrecht auf der Ekliptik steht, also $\eta_2 = 90^\circ$ wird, so wird auch $\beta_0 = 90^\circ$ und K daher unbestimmt. Die Gleichung A. wird dann zwar unbrauchbar, eine Bahnbestimmung ist aber trotzdem möglich, nur muß man statt der Ekliptik eine andere Fundamentalebene, etwa den Äquator wählen.

Wenn dagegen $\overline{13}$ mit der Ekliptik zusammenfällt, also $\eta_2 = 0$ wird, so wird nicht nur K unendlich groß, sondern auch die Koeffizienten A, B, C werden unbestimmt. Wie aus der allgemeinen Form 19) (Seite 264) der Grundgleichung hervorgeht, ist dann überhaupt eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich und man muß vier Beobachtungen heranziehen (siehe Nr. 102).

Wenn $\beta_0 = \beta_2$ wird, d. h. wenn die drei geozentrischen Örter in *einem* größten Kreise liegen, so wird zwar wegen $K = 0$ die Gl. A. nicht benutzbar, eine Bahnbestimmung ist aber gleichwohl möglich, denn es folgt dann aus der Gl. 3) (Seite 286)

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}\,\frac{A + BP}{(C - A) + (C - B)P}},$$

woraus r_2 bestimmt werden kann. Übrigens leitet man sowohl aus diesem Ausdruck als auch besonders einfach aus der Weißschen Form der Grundgleichung, nämlich der zweiten Gl. 4) (Seite 307), das Resultat ab, daß der vorliegende Fall nur eintreten kann, wenn nahe $r_2 = R_2$ ist; es wird nämlich dann in der genannten Gleichung $H_1 = H_3$ und daher $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} = 0$.

Wenn $\beta_0 = \beta_2$ und $C = 0$ ist, d. h. wenn die drei geozentrischen Örter in einem größten Kreise liegen, der durch den mittleren Erdort (und Sonnenort)

hindurchgeht, dann folgt aus der schon oben angezogenen Form der Grundgleichung 3) (Seite 286), daß

$$\frac{A+BP}{P+1}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}\right)=0$$

wird, woraus notwendig $A+BP=0$ sich ergibt; die Grundgleichung liefert also lediglich die Identität $0=0$ und die Bahnbestimmung wird unmöglich. Da wegen $H_2=L_2$ in diesem Falle

$$P=-\frac{A}{B}=\frac{R_1R_2\sin(L_2-L_1)}{R_2R_3\sin(L_3-L_2)}=\frac{[R_1R_2]}{[R_2R_3]}$$

wird und andererseits

$$P=\frac{[r_1r_2]}{[r_2r_3]}$$

ist, so tritt dieser Ausnahmefall dann ein, wenn die Verhältnisse der Dreiecksflächen der Erd- und der Planetenbahn einander genau gleich werden. Daß dann eine Bahnbestimmung unmöglich wird, sieht man sofort aus der Form 20) (Seite 264) der Grundgleichung, die für $\beta_0=\beta_2$ und $H_2=L_2$ dasselbe aussagt, wie $P=-\frac{A}{B}$.

Wenn der dritte Planetenort mit dem ersten zusammenfällt, der Planet also inzwischen eine Schleife beschreibt, dann kann die Analyse, die wir verfolgt haben, nicht eingeschlagen werden, da durch den ersten und dritten Ort ein bestimmter größter Kreis nicht gegeben ist. Eine Entscheidung, ob und wie eine Bahnbestimmung möglich ist, kann also nur durch Zurückgehen auf die ursprünglichen Gleichungen 4) (Seite 257) der Ebenenbedingung getroffen werden. Nennt man Π einen beliebigen Winkel, so lassen sich diese Gleichungen, wenn man noch $\lambda_1=\lambda_3$, $\beta_1=\beta_3$ setzt, so schreiben:

$$\begin{aligned}
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\cos\beta_1\cos(\lambda_1-\Pi)&=\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\Pi)-n_1R_1\cos(L_1-\Pi)-n_3R_3\cos(L_3-\Pi)+R_2\cos(L_2-\Pi)\\
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi)&=\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\Pi)-n_1R_1\sin(L_1-\Pi)-n_3R_3\sin(L_3-\Pi)+R_2\sin(L_2-\Pi)\\
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\sin\beta_1&=\varrho_2\sin\beta_2\,.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\Pi=\lambda_1$, so gibt die zweite Gleichung:

$$\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)=n_1R_1\sin(L_1-\lambda_1)+n_3R_3\sin(L_3-\lambda_1)-R_2\sin(L_2-\lambda_1),$$

woraus offenbar ϱ_2 bestimmt werden kann. Zugleich aber sieht man auch, daß ϱ_1 und ϱ_3 getrennt nicht ermittelt werden können, sondern nur in der Kombination $n_1\varrho_1+n_3\varrho_3$. Eine Elementenbestimmung ist also unmöglich.

Wenn zur Zeit der mittleren Beobachtung der Planet in der Verbindungslinie Sonne-Erde, also genau in der Opposition sich befindet, dann wird

$$\lambda_2=L_2\,,\qquad \beta_2=0$$

und der Winkel δ_2 an der Erde zwischen den Richtungen nach dem Planeten und nach der Sonne wird ebenfalls gleich Null. Man erkennt bei Durchsicht der zur Aufstellung der Gaußschen Gleichung dienenden Formeln leicht, daß dann ϱ_2 und r_2 in unbestimmter Form erscheinen, also nicht bestimmt werden können.

Ein strenges Eintreten der eben besprochenen Fälle wird selten oder nie vorkommen. Man erkennt aber, daß wenn sie auch nur *genähert* eintreten, darunter

die *Sicherheit* der Bahnbestimmung leiden muß. Man wird daher bei der Auswahl der Beobachtungen folgende Regeln beachten müssen: 1. Die drei geozentrischen Orter dürfen nicht in einem größten Kreis liegen, der durch den mittleren Erdort hindurchgeht; 2. die drei Breiten dürfen nicht zu klein sein; 3. die beiden äußeren Örter dürfen nicht nahe zusammenfallen; 4. man muß es vermeiden, namentlich bei kleinen Breiten, die mittlere Beobachtung in der Nähe der Opposition zu wählen.

Für die *Sicherheit einer Bahnbestimmung im allgemeinen* ist offenbar ein guter Maßstab die Größe des Winkels, unter dem sich die beiden größten Kreise zwischen dem ersten und dritten Ort einerseits und zwischen dem zweiten Planeten- und zweiten Erdort andererseits schneiden, da es von ihm abhängt, mit welcher Sicherheit der Schnittpunkt derselben berechnet werden kann. *Hansen* nannte daher diesen Winkel den *maßgebenden* und hat seine Berechnung empfohlen, die nach Seite 289 leicht auszuführen ist. Ist er größer als 10°, so wird eine gute Bestimmung der Bahn zu erwarten sein, sinkt er unter 1° herab, so verdienen die Elemente kein Vertrauen.

Wesentlich für die Beurteilung der Güte einer Bahn ist natürlich auch die Größe der Zwischenzeiten. Zu groß darf man diese nicht wählen, weil sonst in der ersten Näherung die notwendig zu vernachlässigenden Glieder in den Reihenentwicklungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einen zu großen Einfluß gewinnen; aber da unter allen Umständen die mittlere geozentrische Distanz als Quotient zweier Größen zweiter Ordnung bestimmt werden muß, so dürfen sie auch nicht zu klein angenommen werden, weil sonst die unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Koordinaten nachteilig bei der Elementenbestimmung sich geltend machen. Eine allgemeine Regel läßt sich nicht wohl aufstellen. Doch hat die Erfahrung gezeigt, daß bei kleinen Planeten eine Zwischenzeit von 30—60 Tagen zwischen den beiden äußeren Beobachtungen im allgemeinen gute Elemente mit rasch erledigter Hypothesenrechnung liefert. Bei elliptischen Bahnen von Kometen dagegen, besonders bei solchen die der Erde nahe sind, wird man, wenn Näherungen nicht vorliegen sollten, kleinere Zwischenzeiten nehmen müssen.

101. Die mehrfachen Lösungen. Wir haben gesehen (Nr. 75 und 85), daß die Lösung des Bahnbestimmungsproblems aus drei Beobachtungen von einer Gleichung achten Grades in r_2 abhängt, die nach Einführung der Variabeln z durch

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}$$

auf die Form

$$\sin(z - q) = m \sin z^4 \qquad 1)$$

gebracht werden kann; wir haben auch bereits hervorgehoben, daß $r_2 = R_2$ oder $z = \delta_2$ eine Wurzel dieser Gleichung ist. Die Bedeutung dieser Wurzel ist leicht zu erkennen; sie entspricht der Erdbahn, die in der Tat auch als eine Lösung des Problems sich ergeben muß, da sie alle Bedingungen, aus denen die Gleichung achten Grades hervorging, erfüllt; die drei Beobachtungen geben lediglich die Richtungslinien des Gestirnes an, wo immer diese also von einer Ebene getroffen werden,

welche die Bedingungen erfüllt, muß eine Lösung der Gleichung vorliegen, mithin auch für $\varrho_2 = 0$.

Man erkennt ferner, daß alle Wurzeln x kleiner als δ_2 sind, da für ϱ_2 und r_2 sich positive Werte ergeben müssen. Die Gleichung achten Grades lautet vollständig entwickelt:

$$r_2^8 - \mu^2 r_2^6 + 2 l \mu \cos q \, r_2^3 - l^2 = 0; \qquad 2)$$

nur das Zeichen des dritten Gliedes ist also nicht von vornherein bestimmt, sondern hängt, da nach Festsetzung (Seite 271) $l\mu$ stets positiv ist, vom Zeichen von $\cos q$ ab. Es werden also bei der Diskussion der Wurzeln von 2) zwei Fälle zu unterscheiden sein, jenachdem $\cos q \gtrless 0$ ist.

Ist erstens $\cos q$ positiv, so hat nach der bekannten Regel die Gl. 2) höchstens drei positive Wurzeln; außerdem hat sie eine und nur *eine* negative Wurzel; es sind also mindestens vier Wurzeln imaginär. Ist zweitens $\cos q$ negativ, so hat sie höchstens eine positive und höchstens drei negative Wurzeln, also wieder mindestens vier imaginäre. Da die eine positive Wurzel stets der Erdbahn entspricht, so kann also ein negatives $\cos q$ bei einer Bahnbestimmung überhaupt nicht vorkommen, d. h. q liegt stets zwischen -90° und $+90^\circ$. Man erkennt dies übrigens auch aus der geometrischen Bedeutung.

Von den höchstens drei positiven Wurzeln, die die Gl. 2) sonach haben kann, gehört eine, nämlich r_2 nahe R_2 oder x nahe δ_2 der Erdbahn an; es bleiben also höchstens zwei positive Wurzeln, die für die Bahnbestimmung in Betracht kommen. Diese müssen gleichzeitig in imaginäre übergehen, worauf die Gleichung überhaupt keine einem Planeten oder Kometen entsprechende Lösung gibt.

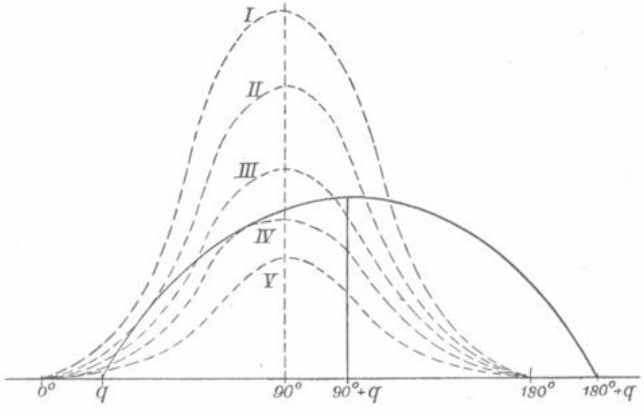

Fig. 50.

Um das Verhalten der positiven Wurzeln von 1) zu erkennen, diskutiert Encke*) die beiden Kurven

$$\begin{aligned} x_1 &= m \sin z^4 \\ x_2 &= \sin(z - q), \end{aligned} \qquad 3)$$

indem er die z als Abszissen, die x als Ordinaten eines Systems betrachtet. Wo die beiden Kurven sich schneiden, ist eine Wurzel von 1). Die erste Kurve geht durch den Nullpunkt und durch den Punkt $z = 180^\circ$, erreicht bei $z = 90^\circ$ ein Maximum $= m$ und hat überhaupt nur positive Ordinaten. Die zweite ist die Sinuskurve, die zwischen $z = q$ und $z = 180^\circ + q$ positive Ordinaten besitzt, welche also die einzigen in Betracht kommenden sind. Ist m so groß, daß zwischen $z = q$ und

*) Ostwalds Klassiker Nr. 141, Seite 23.

$z = 90^\circ + q$ die erste Kurve über die zweite hinausragt, so wird nur *ein* reeller Schnitt der Kurven statthaben für ein $z < 180^\circ$ (in der Figur Fall I); wird m kleiner, so wird eine Berührung der beiden Kurven von außen eintreten: zwei imaginäre Wurzeln gehen in zwei gleiche, reelle über (Fall II); nimmt m darüber hinaus ab, so treten zwei verschiedene, reelle Wurzeln an Stelle der gleichen, so daß also von II ab drei reelle Wurzeln existieren (Fall III); bei weiterem Abnehmen von m wird durch Vereinigung der zweiten mit der dritten Wurzel ein innerer Berührungspunkt erzeugt (Fall IV), über den hinaus wieder nur mehr *eine* reelle Wurzel vorhanden sein wird (Fall V). Da die eine reelle Wurzel stets zur Erdbahn gehört, so können Lösungen der Gleichung, die zu einer Planetenbahn gehören, also nur für Werte von m auftreten, die zwischen Fall II und IV liegen. Um die Werte von m zu bestimmen, für welche die Kurven sich berühren, entwickeln wir nach dem Taylorschen Satz, indem wir von einem bestimmten $z = z_0$ ausgehen:

$$x_1 = m \sin z_0^4 + 4m \sin z_0^3 \cos z_0 \Delta z + \tfrac{1}{2}(12m \sin z_0^2 \cos z_0^2 - 4m \sin z_0^3)\Delta z^2 + \cdots$$
$$x_2 = \sin(z_0 - q) + \cos(z_0 - q)\Delta z - \tfrac{1}{2}\sin(z_0 - q)\Delta z^2 + \cdots.$$

Daraus folgt die Differenz der Ordinaten:

$$x_1 - x_2 = [m \sin z_0^4 - \sin(z_0 - q)] + [4m \sin z_0^3 \cos z_0 - \cos(z_0 - q)]\Delta z + \cdots.$$

Soll dem z_0 ein Schnittpunkt entsprechen, so wird

$$m \sin z_0^4 - \sin(z_0 - q) = 0 \qquad 4)$$

und soll dem z_0 ein Berührungspunkt entsprechen, so wird außerdem

$$4m \sin z_0^3 \cos z_0 - \cos(z_0 - q) = 0 \qquad 5)$$

sein. Diese beiden Bedingungen ergeben:

$$\sin(2z_0 - q) = \tfrac{5}{3}\sin q,$$

woraus erstens folgt, daß $\sin q < \frac{3}{5}$ oder $q < 36^\circ 52'.2$ sein muß (abgesehen vom Zeichen), wenn die Gleichung eine einer Planetenbahn entsprechende Wurzel besitzen soll. Zweitens aber folgen die den Berührungspunkten entsprechenden z_0 aus

$$2z_0 - q = W \quad \text{und} \quad 2z_0 - q = 180^\circ - W,$$

wenn W der spitze, aus

$$\sin W = \tfrac{5}{3}\sin q$$

bestimmte Winkel ist; also einerseits

und andererseits
$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \tfrac{1}{2}(W + q) \\ z_0 &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(W - q) \end{aligned}\right\}. \qquad 6)$$

Die zugehörigen Werte von m ergeben sich aus 4), nämlich:

$$m' = \frac{\sin(z_0 - q)}{\sin z_0^4} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(W - q)}{\sin \tfrac{1}{2}(W + q)^4}$$

und

$$m'' = \frac{\sin(z_0 - q)}{\sin z_0^4} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(W + q)}{\cos \tfrac{1}{2}(W - q)^4}.$$

Daraus folgt, daß für jeden Wert von q zwischen $-36^{\circ}52.'2$ und $+36^{\circ}52.'2$ die zwei Grenzwerte von m, nämlich m' und m'', berechnet werden können, zwischen denen es liegen muß, wenn drei positive reelle Wurzeln der Gleichung 1) oder 2) existieren, d. h. wenn eine Planetenbahn möglich ist. Die »Tafel XXV.« enthält diese Grenzwerte für alle möglichen Werte von q, von Grad zu Grad fortschreitend. Zugleich sind die zu den Grenzwerten gehörigen je zwei Werte von x_0 aufgeführt, die zu den Berührungs- beziehungsweise Schnittpunkten der beiden Grenzkurven mit der Sinuskurve gehören; erstere ergeben sich direkt aus 6), letztere werden durch versuchsweise Auflösung der Gleichungen

$$m' \sin x_0^4 = \sin(x_0 - q) \quad \text{bez.} \quad m'' \sin x_0^4 = \sin(x_0 - q)$$

ermittelt. Die Tafel zeigt also für jedes q die Grenzen, zwischen denen die drei positiven Wurzeln liegen. Um nun diejenige Wurzel herauszufinden, welche der Planetenbahn entspricht, muß man die Bedingung $x < \delta_2$ heranziehen und beachten, daß jedenfalls eine der drei Wurzeln, nämlich x nahe δ_2, der Erdbahn entspricht. Sind x_1, x_2, x_3 der Größe nach geordnet die drei Wurzeln und ist x_1 nahe gleich δ_2, so gibt es *keine* einer Planeten- oder Kometenbahn entsprechende Lösung; ist x_2 nahe δ_2, so gibt diese Wurzel die Erdbahn, und x_1 die Planetenbahn oder das Problem ist eindeutig bestimmt; ist endlich x_3 nahe δ_2, so entspricht x_3 der Erdbahn und x_1 und x_2 entsprechen möglichen Planetenbahnen; das Problem ist dann zweideutig und es gibt zwei ganz verschiedene Bahnen, welche den drei Beobachtungen genügen; welche von ihnen die dem vorliegenden Falle angemessene ist, kann erst durch weitere Beobachtungen entschieden werden.

Abschnitt XX.

Die Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.

102. Vorbemerkung. Bei Besprechung der Ausnahmefälle für die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen haben wir festgestellt, daß eine solche unmöglich ist, wenn die Bahnebene mit der Ekliptik zusammenfällt und unsicher, wenn dies nahezu der Fall ist; die drei Breiten stellen dann nicht drei voneinander unabhängige Stücke dar und die durch drei Beobachtungen gebotenen Koordinaten reichen also zur Bestimmung der sechs Elemente nicht aus. Das Eintreten des Falles zeigt sich in der Kleinheit der geozentrischen Breiten ($< 1^\circ$) oder bei etwa vorausgegangener Kreisbahn in der Kleinheit der Neigung an. Da drei Längen nicht ausreichen zur Bestimmung der vier Elemente M_0, ω, e, μ, welche übrig bleiben, wenn die Bahn mit der Ekliptik zusammenfällt, sondern notwendig eine vierte Länge hinzuzuziehen ist, so bietet sich als der einfachste Weg bei kleiner Neigung der dar, *vier* Beobachtungen zu wählen und davon zwei Breiten wegzulassen. Die verschiedenen Methoden teilen sich hiernach in solche, wo die beiden äußeren und in solche, wo die beiden inneren Breiten unberücksichtigt bleiben. Die ersteren, zu denen namentlich die von *Gauß* in der Theoria motus aufgestellte und von *Watson*, *Bruhns*, *Klinkerfues* u. a. mehr oder minder ausgearbeitete Methode gehört, haben den Vorzug einer größeren Konvergenz und Geschmeidigkeit des Verfahrens, dagegen aber den Nachteil einer geringeren Genauigkeit der Elemente, namentlich derer, welche die Bahnlage bestimmen; die letzteren erfordern in der Regel wegen der größeren Zwischenzeiten eine umständlichere Hypothesenrechnung, geben dann aber so genaue Elemente, als die zur Verwendung gelangte Zwischenzeit erwarten läßt; zu ihnen gehören die Methoden von *Klinkerfues*, *Fabritius* (Astr. Nachr. Band 128), *Oppolzer* (Bahnbest. Band I. Seite 413), *Coddington* (Diss. Berlin 1902), *Berberich* (Veröff. des Rechen-Inst. Berlin Heft 20) u. a.

Es werden zuweilen Bahnen aus vier Beobachtungen berechnet, bei denen dies durch das Eintreten des Ausnahmefalles *nicht* geboten ist, z. B. elliptische Kometenbahnen mit starker Neigung; ein solches Verfahren ist unökonomisch und zwecklos, denn eine Bahn aus vier Beobachtungen erfordert selbst dann mehr Arbeit, wenn bei einer Bestimmung aus drei Beobachtungen infolge großer oder ungleicher Zwischenzeiten etwa eine Hypothese mehr als gewöhnlich zu rechnen wäre; der Gewinn an Genauigkeit aber ist gering anzuschlagen, wenn die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen mit der erforderlichen Zahl von Hypothesen durchgeführt wird, da auf die genaue Darstellung der überschüssigen Daten doch verzichtet werden muß. Man sollte daher von der naturgemäßen Lösung durch drei Beobachtungen nur dann abgehen, wenn dies unbedingt geboten ist, d. h. nur im Ausnahmefall.

Dementsprechend soll hier nur *ein* einfaches Verfahren zur Darstellung kommen, welches dem Ausnahmefall angepaßt ist und verhältnismäßig rasch zum Ziele führt,

wogegen die komplizierteren Methoden, die von den Rechnern niemals oder wenigstens nicht zum zweiten Male angewendet werden, außer Betracht bleiben sollen.

103. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. Der Ausnahmefall ist dadurch bedingt, daß es nicht möglich ist, eine brauchbare Gleichung für *eine* geozentrische Distanz aufzustellen. Man muß daher zwei Gleichungen zwischen zwei geozentrischen Distanzen verwenden, wofür man verschiedene Kombinationen bilden kann. Sind mit 1, 2, 2′, 3 die vier Beobachtungen bezeichnet, so kann man aus der Ebenenbedingung für 1, 2, 2′ die eine Gleichung zwischen ϱ_2 und ϱ_2' und aus der für 2, 2′, 3 die andere Gleichung zwischen ϱ_2 und ϱ_2' ableiten; man kommt dann zur Gaußschen Methode. Oder man leitet aus der Ebenenbedingung für 1, 2, 3 die eine Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 ab und aus der für 1, 2′, 3 die andere. Hier wollen wir den letzteren Weg einschlagen und benutzen hierzu, um gleichzeitig die kleinen Breiten möglichst unschädlich zu machen, die erste der Grundgleichungen 14^a) (Seite 261). In Polarkoordinaten geschrieben und auf die beiden Kombinationen 1, 2, 3 und 1, 2′, 3 angewendet liefert sie die Beziehungen:

$$[r_2 r_3]\cos\beta_1 \sin(\lambda_2-\lambda_1)\varrho_1 + [r_1 r_2]\cos\beta_3 \sin(\lambda_2-\lambda_3)\varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_3]R_2 \sin(\lambda_2 - L_2) - [r_2 r_3]R_1 \sin(\lambda_2 - L_1) - [r_1 r_2]R_3 \sin(\lambda_2 - L_3)$$

und

$$[r_2' r_3]\cos\beta_1 \sin(\lambda_2'-\lambda_1)\varrho_1 + [r_1 r_2']\cos\beta_3 \sin(\lambda_2'-\lambda_3)\varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_3]R_2' \sin(\lambda_2'-L_2') - [r_2' r_3]R_1 \sin(\lambda_2'-L_1) - [r_1 r_2']R_3 \sin(\lambda_2'-L_3).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2-\lambda_3)} = \nu, \qquad \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2'-\lambda_3)} = \nu'$$
$$\nu\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda_2) = M, \qquad \nu'\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda_2') = M'$$
$$\nu R_1 \sin(L_1-\lambda_2) = a, \qquad \nu' R_1 \sin(L_1-\lambda_2') = a'$$
$$\nu R_2 \sin(L_2-\lambda_2) = b, \qquad \nu' R_2' \sin(L_2'-\lambda_2') = b'$$
$$\nu R_3 \sin(L_3-\lambda_2) = c, \qquad \nu' R_3 \sin(L_3-\lambda_2') = c',$$

so wird daraus:

$$\varrho_3 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} M\varrho_1 + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} a - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} b + c$$
$$\varrho_3 = \frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} M'\varrho_1 + \frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} a' - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2']} b' + c'.$$

Man könnte hierin nach Fabritius Vorschlag die Gibbsschen Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einführen, allein man hat dann bei allen Versuchen mit vier Radienvektoren zu rechnen, wodurch das Verfahren zwar genau aber auch recht kompliziert wird. Auch bei Einführung der Formeln 17) (Seite 177) hat man zwei Radienvektoren r_2 und r_2' in Betracht zu ziehen. Am einfachsten scheint es zu sein, die Formeln 23) (Seite 181) heranzuziehen, dann hat man in beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte $(r_1 + r_3)$, mit der die Versuche in der unten zu beschreibenden Weise durchgeführt werden. Setzt man:

$$\frac{1}{(r_1+r_3)^3} = x, \qquad \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} = \xi$$

so wird:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}(\tau_1 - \tau_3)x + 4\tau_1^2 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2(\tau_1' - \tau_3')x + 4\tau_1'^2 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1}{\tau_3}\tau_2(\tau_2 + \tau_3)x + 4\tau_1\tau_3 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2']} = \frac{\tau_2}{\tau_3'} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2(\tau_2 + \tau_3')x + 4\tau_1'\tau_3' x\xi + \cdots$$

und wenn dies oben eingetragen und gleich noch zur Abkürzung eingeführt wird:

$f = \frac{\tau_1}{\tau_3} M$	$f' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} M'$
$g = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}(\tau_1 - \tau_3) M$	$g' = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1'\tau_2}{\tau_3'}(\tau_1' - \tau_3') M'$
$h = 4\tau_1^2 M$	$h' = 4\tau_1'^2 M'$
$l = \frac{\tau_1}{\tau_3} a - \frac{\tau_2}{\tau_3} b + c$	$l' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} a' - \frac{\tau_2}{\tau_3'} b' + c'$
$m = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}[(\tau_1 - \tau_3) a - (\tau_2 + \tau_3) b]$	$m' = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2[(\tau_1' - \tau_3') a' - (\tau_2 + \tau_3') b']$
$n = +4\tau_1(\tau_1 a - \tau_3 b)$	$n' = +4\tau_1'(\tau_1' a' - \tau_3' b')$,

so erhält man:

$$\varrho_3 = (f + gx + hx\xi)\ \varrho_1 + (l + mx + nx\xi) \qquad \text{I.}$$
$$\varrho_3 = (f' + g'x + h'x\xi)\ \varrho_1 + (l' + m'x + n'x\xi).$$

Zwischen ϱ_1 und r_1 sowie zwischen ϱ_3 und r_3 hat man außerdem noch die Beziehungen

$$r_1^2 = R_1^2 + \varrho_1^2 + 2R_1\varrho_1\cos\delta_1 = (R_1\cos\delta_1 + \varrho_1)^2 + R_1^2\sin\delta_1^2$$
$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2R_3\varrho_3\cos\delta_3 = (R_3\cos\delta_3 + \varrho_3)^2 + R_3^2\sin\delta_3^2 \qquad \text{II.}$$

worin:

$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$\cos\delta_3 = \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3); \qquad \delta_1 \text{ und } \delta_3 < 180^\circ$$

setzt man

$$R_1\cos\delta_1 = p_1, \qquad R_3\cos\delta_3 = p_3$$
$$R_1\sin\delta_1 = q_1, \qquad R_3\sin\delta_3 = q_3$$

so hat man für die Rechnung einfacher:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + p_1}{q_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_3 + p_3}{q_3} \qquad \text{II}^a.$$
$$r_1 = q_1\sec\vartheta_1, \qquad r_3 = q_3\sec\vartheta_3.$$

Die Gleichungen I. und II. enthalten die vier Unbekannten ϱ_1, ϱ_3, r_1, r_3, sind also hinreichend zu deren Bestimmung. Die Auflösung vollzieht man am einfachsten durch sukzessive Näherung. Die mit ξ multiplizierten Glieder sind sehr klein und

bleiben bei den ersten Versuchen außer Betracht; bei Planetenbahnen und mäßigen Zwischenzeiten kann man von ihnen überhaupt ganz absehen. Man beginnt mit einem Näherungswerte von $x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}$, der bei kleinen Planeten durch $r_1 = r_3 = 3.0$ oder rund $\log x = 7.700000_{-10}$, bei Kometen durch die vorausgegangene parabolische Bahnbestimmung geboten wird, und berechnet aus I. ϱ_1 und ϱ_3 und dann aus II. die zugehörigen r_1 und r_3. Damit bestimmt man x und eventuell ξ, berechnet ϱ_1 und ϱ_2 von neuem, dann r_1 und r_3 und einen neuen Wert von x und ξ usf., bis keine Änderung mehr eintritt.

Mit den richtigen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 werden die Elemente in derselben Weise berechnet, wie bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. Die Korrektion der Beobachtungszeiten für Aberration erfolgt vor Bestimmung der Elemente.

Zum Schluß wird man die Darstellung der beiden mittleren Örter, die zur Elementenbestimmung nicht beigetragen haben, prüfen. Stellen die Elemente die Längen gut dar, so ist dies eine durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung; stimmen auch die nichtbenutzten Breiten mit der Rechnung überein, so ist dies zugleich ein Beweis, daß die Anwendung der Reihen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen hinreichend war, um die richtigen Elemente zu liefern; stimmen dagegen die Breiten nicht, so waren diese Grundlagen der Methode nicht ausreichend. Eine Hypothesenrechnung, wie bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, würde hier äußerst weitläufig sein; am einfachsten ist es, die geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 und zwar zuerst die eine und dann die andere ein weniges zu variieren und dann das in Nr. 96 beschriebene Verfahren anzuwenden, indem man $x = \varrho_1$ und $y = \varrho_3$ setzt und für X und Y die Differenzen: beobachtete — gerechnete Breiten nimmt.

104. Übersicht der Formeln für eine Bahnberechnung aus vier Beobachtungen.

Daten:

	des Planeten		der Erde	
Beob. Zeiten	Länge	Breite	Länge	$\log R$
t_1	λ_1	β_1	L_1	$\log R_1$
t_2	λ_2	β_2	L_2	$\log R_2$
t_2'	λ_2'	β_2'	L_2'	$\log R_2'$
t_3	λ_3	β_3	L_3	$\log R_3$.

I.

$$\nu = \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2 - \lambda_3)}, \qquad \nu' = \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2' - \lambda_3)}$$

$$M = \nu \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad M' = \nu' \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2')$$

$$a = \nu R_1 \sin(L_1 - \lambda_2), \qquad a' = \nu' R_1 \sin(L_1 - \lambda_2')$$

$$b = \nu R_2 \sin(L_2 - \lambda_2), \qquad b' = \nu' R_2' \sin(L_2' - \lambda_2')$$

$$c = \nu R_3 \sin(L_3 - \lambda_2), \qquad c' = \nu' R_3 \sin(L_3 - \lambda_2').$$

II.
$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \qquad \tau_1' = k(t_3 - t_2')$$
$$\tau_3 = k(t_2 - t_1), \qquad \tau_3' = k(t_2' - t_1)$$
$$\tau_2 = k(t_3 - t_1), \qquad \log k = 8.2355814$$
$$\chi = \frac{\tau_1}{\tau_3}, \qquad \chi' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'}$$
$$\psi = \frac{\tau_2}{\tau_3}, \qquad \psi' = \frac{\tau_2}{\tau_3'}$$
$$\mu = \tfrac{4}{3}\tau_1\tau_2, \qquad \mu' = \tfrac{4}{3}\tau_1'\tau_2$$
$$\log\tfrac{4}{3} = 0.1249387.$$

III.
$$f = \chi M, \qquad f' = \chi' M'$$
$$g = \mu M(1-\chi), \qquad g' = \mu' M'(1-\chi')$$
$$[h = 4\tau_1^2 M], \qquad [h' = 4\tau_1'^2 M']$$
$$l = a\chi - b\psi + c, \qquad l' = a'\chi' - b'\psi' + c'$$
$$m = \mu(a(1-\chi) + b(1+\psi)), \qquad m' = \mu'(a'(1-\chi') + b'(1+\psi'))$$
$$\left[n = 4\tau_1^2\left(a - \frac{b}{\chi}\right)\right], \qquad \left[n' = 4\tau_1'^2\left(a' - \frac{b'}{\chi'}\right)\right].$$

IV.
$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1), \qquad \cos\delta_3 = \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3)$$
$$p_1 = R_1\cos\delta_1, \qquad p_3 = R_3\cos\delta_3$$
$$q_1 = R_1\sin\delta_1, \qquad q_3 = R_3\sin\delta_3.$$

V.
$$x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}, \qquad \xi = \frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3}$$
$$\varrho_1 = (f + (g + h\,\xi)x)\varrho_1 + (l + (m + n\,\xi)x) = A\,\varrho_1 + B$$
$$\varrho_3 = (f' + (g' + h'\xi)x)\varrho_1 + (l' + (m' + n'\xi)x) = A'\varrho_1 + B'$$
Bei kleinen Planeten zuerst $\log x = 7.7000000_{-10}$ $\xi = 0$
$$\varrho_1 = \frac{B' - B}{A - A'}, \qquad \varrho_3 = A\varrho_1 + B$$
$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + p_1}{q_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_3 + p_3}{q_3}$$
$$r_1 = q_1\sec\vartheta_1, \qquad r_3 = q_3\sec\vartheta_3$$
$$x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}, \qquad \xi = \frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3}.$$

VI.
$$r_1\cos b_1\sin(l_1 - L_1) = \varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_1)$$
$$r_1\cos b_1\cos(l_1 - L_1) = \varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) + R_1$$
$$r_1\sin b_1 = \varrho_1\sin\beta_1$$
$$r_3\cos b_3\sin(l_3 - L_3) = \varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_3)$$
$$r_3\cos b_3\cos(l_3 - L_3) = \varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) + R_3$$
$$r_3\sin b_3 = \varrho_3\sin\beta_3.$$

VII.
$$\operatorname{tg} i\sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i\cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1\cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i$$
$$f_2 = \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1).$$

VIII.
$$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A\,, \qquad t_3^0 = t_3 - \varrho_3 A$$
$$\log A = 7.76\,118_{-10} \text{ in Einheiten des Tages.}$$

IX. Sektor durch Dreieck.
$$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\cos f_2}{r_1 + r_3}\,, \qquad \Gamma = \log\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}$$
(Γ mit Arg. $\log\sec\gamma$ aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen),
$$\eta = (t_3^0 - t_1^0)^2 x$$
$$\log y_2 = a'\eta + a''\eta - b''\eta^2\,,$$
worin, wenn die 7. Dezimale als Einheit genommen wird:
$$\log a' = 3.233\,8859$$
$$\log a'' = 3.614\,0972 - \Gamma$$
$$\log b'' = 0.034\,1076\,.$$
Diese Formel reicht bei Planeten bis zu 60 Tagen Zwischenzeit; bei größeren Zwischenzeiten und bei Kometen bedient man sich der Gaußschen Methode (Nr. 49).

X.
$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{k(t_3^0 - t_1^0)}\, y_2$$
$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1\,, \qquad \frac{p}{r_3} - 1 = q_3$$
$$e\cos v_1 = q_1$$
$$e\sin v_1 = \frac{q_1\cos(u_3 - u_1) - q_3}{\sin(u_3 - u_1)}$$
$$e = \sin\varphi\,, \qquad a = p\sec\varphi^2$$
$$\omega = u_1 - v_1\,, \qquad v_3 = u_3 - \omega\,.$$

XI.
$$\sin\tfrac{1}{2}(v_1 - E_1) = \sqrt{\frac{r_1}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_1$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - E_3) = \sqrt{\frac{r_3}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_3$$
Kontrolle: $a\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(E_3 - E_1) = \sqrt{r_1 r_3}\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)$
$$M_1 = E_1 - (\sin\varphi)''\sin E_1$$
$$M_3 = E_3 - (\sin\varphi)''\sin E_3 \qquad \log(\sin\varphi)'' = \log\sin\varphi + 5.314\,4251$$
$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \log k'' = 3.550\,0066$$
Kontrolle: $\mu = \dfrac{M_3 - M_1}{t_3^0 - t_1^0}\,.$

XII. Berechnung der mittleren Örter.
$$M_2 = M_1 + (t_2^0 - t_1^0)\mu$$
$$E_2 - e\sin E_2 = M_2$$
$$r_2\sin v_2 = a\cos\varphi\sin E_2$$
$$r_2\cos v_2 = a(\cos E_2 - e)$$
$$u_2 = v_2 + \omega$$
$$\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Omega) = r_2\cos u_2 - R_2\cos(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - \Omega) = r_2\sin u_2\cos i - R_2\sin(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2\sin\beta_2 = r_2\sin u_2\sin i\,.$$

105. Beispiel einer Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. Zur Erläuterung der auseinandergesetzten Methode wählen wir die erste Bahn des Planeten (468) [1901 FZ], von dem im ganzen nur vier Beobachtungen aus Heidelberg und Wien vorliegen. Die Breiten sind sehr klein und eine vorausgegangene Kreisbahnbestimmung hatte die Kleinheit der Neigung konstatiert, so daß es geboten war, die Ellipse aus vier Beobachtungen zu berechnen. Die folgenden, zugrunde gelegten Örter wurden mittels der Kreisbahnelemente von Parallaxe und Aberration befreit und sind auf das mittlere Äquinoktium 1901.0 bezogen:

1901 Jan. M.Z.B.

t_1	13.44645	λ_1	129° 4′47″.5	β_1	+0°40′ 1″.14	L_1	113° 3′51″.7	$\log R_1$	9.99 2807
t_2	23.52619	λ_2	127 4 50.5	β_2	+0 40 11.85	L_2	123 19 38.5	» R_2	9.99 3190
t_2'	44.56203	λ_2'	123 0 47.0	β_2'	+0 38 43.82	L_2'	144 39 6.4	» R_2'	9.99 4631
t_3	53.44318	λ_3	121 38 40.7	β_3	+0 37 37.30	L_3	153 36 33.5	» R_3	9.99 5470

I.					III.				
$\lambda_2-\lambda_3$	+5°26′ 9″.8	$\lambda_2'-\lambda_3$	+1°22′ 6″.3		f	0.03 8593	f'	0.10 1461
sin(»)	8.97 6510	sin(»)	8.37 8054		$1-\chi$	0.29 4032$_n$	$1-\chi'$	9.85 4048
$\cos\beta_1$	9.99 9971	$\cos\beta_3$	9.99 9974		μM	9.24 0168	$\mu' M'$	9.79 2564
ν	1.02 3516	ν'	1 62 1972		g	9.53 4200$_n$	g'	9.64 6612
$\nu\cos\beta_1$	1.02 3487	$\nu'\cos\beta_1$	1.62 1943		τ_1^2	9.42 2998	$\tau_1'^2$	8.36 8102
νR_1	1.01 6323	$\nu' R_1$	1.61 4779		$4M$	0.16 8185	$4M'$	1.24 8029
νR_2	1.01 6706	$\nu' R_2'$	1.61 6603		h	9.59 1183	h'	9.61 6131
νR_3	1.01 8986	$\nu' R_3$	1.61 7442		$a\chi$	0.87 2963$_n$	$a'\chi'$	0.30 7730$_n$
					$-b\psi$	0.43 1264	$-b'\psi'$	1.29 2385$_n$
$\lambda_1-\lambda_2$	+ 1°59′ 57″.0	$\lambda_1-\lambda_2'$	+ 6° 4′ 0″.5		Σ	0.67 8014$_n$	Σ	1.33 5195$_n$
$L_1-\lambda_2$	−14 0 58.8	$L_1-\lambda_2'$	− 9 56 55.3		c	0.66 8948	c'	1.32 4147
$L_2-\lambda_2$	− 3 45 12.0	$L_2'-\lambda_2'$	+21 38 19.4		l	8.99 314$_n$	l'	9.73 519$_n$
$L_3-\lambda_2$	+26 31 43.0	$L_3-\lambda_2'$	+30 35 46.5		$1+\psi$	0.69 6183	$1+\psi'$	0.35 8967
					$b(1+\psi)$	0.52 8873$_n$	$b'(1+\psi')$	1.54 2306
	8.54 2638		9.02 4026		$a(1-\chi)$	0.69 4527	$a'(1-\chi')$	0.70 6286$_n$
sin	9.38 4172$_n$	sin	9.23 7459$_n$		Σ	0.19 5748	Σ	1.47 3827
	8.81 5984$_n$		9.56 6736		m	9.86 9791	m'	0.62 0422
	9.64 9962		9.70 6705		a	0.40 0495$_n$	a'	0 85 2238$_n$
					$-b:\chi$	9.36 0222	$-b':\chi'$	1.72 7847$_n$
M	9.56 6125	M'	0.64 5969		Σ	0.35 8990$_n$	Σ	1.78 2140$_n$
a	0.40 0495$_n$	a'	0.85 2238$_n$		$4\tau_1^2$	0.02 5058	$4\tau_1'^2$	8.96 9162
b	9.83 2690$_n$	b'	1.18 3339		n	0.38 4048$_n$	n'	0.75 1302$_n$
c	0.66 8948	c'	1.32 4147					

II.				IV.			
t_3-t_2	1.47 5918	t_3-t_2'	0.94 8470	λ_1-L_1	+16°0′ 55″.8	λ_3-L_3	−31°57′ 52″.8
t_2-t_1	1.00 3450	$t_2'-t_1$	1.49 2978	cos(»)	9.98 2808	cos(»)	9.92 8587
t_3-t_1	1.60 2024			$\cos\delta_1$	9.98 2779	$\cos\delta_3$	9.92 8561
τ_1	9.71 1499	τ_1'	9.18 4051	$\sin\delta_1$	9.44 1094	$\sin\delta_3$	9.72 3849
τ_3	9.23 9031	τ_3'	9.72 8559	p_1	9.97 5586	p_3	9.92 4031
τ_2	9.83 7605			q_1	9.43 3901	q_3	9.71 9319
χ	0.47 2468	χ'	9.45 5492				
ψ	0.59 8574	ψ'	0.10 9046	p_1	+0.94 5336	p_3	+0.83 9520
$\tau_1\tau_2$	9.54 9104	$\tau_1'\tau_2$	9.02 1656				
μ	9.67 4043	μ'	9.14 6595				

V. $\varrho_3 = (+\ 1.09\ 2933 + [9.53\ 4200_n]x + [9.59\ 118]x\xi)\,\varrho_1$
$\qquad - 0.09\ 8433 + [9.86\ 9791]x + [0.38\ 405_n]x\xi$

$\varrho_3 = (+\ 1.26\ 3168 + [9.64\ 6612\ ]x + [9.61\ 613]x\xi)\,\varrho_1$
$\qquad - 0.54\ 3490 + [0.62\ 0422]x + [0.75\ 130_n]x\xi$

Versuch 1.				*Versuch 2.*			
x	7.70 0000	$x\xi$	»	x	7.48 7617	$x\xi$	5.37 080
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168		+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 1715		+ 2221		— 1052		+ 1362
					+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1218	A'	+ 1.26 5389	A	+ 1.09 1790	A'	+ 1.26 4540
	— 0.09 8433		— 0.54 3490		— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 3714		+ 2 0913		+ 2277		+ 1 2824
					— 57		— 132
B	— 0.09 4719	B'	— 0.52 2577	B	— 0.09 6213	B'	— 0.53 0798
	9.63 1300		+ 2.68 0625		9.63 8075		+ 2.74 6606
	9.24 0975				9.23 7418		
ϱ_1	0.39 0325			ϱ_1	0.40 0657		
	0.03 7911				0.03 8139		
ϱ_1	+ 2.45 6547	ϱ_3	+ 2.58 5906	ϱ_1	+ 2.51 5690	ϱ_3	+ 2.65 0393
$\varrho_1 + p_1$	0.53 1720	$\varrho_3 + p_3$	0.53 4714	$\varrho_1 + p_1$	0.53 9205	$\varrho_3 + p_3$	0.54 2815
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.09 7819	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.81 5395	$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 5304	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 3496
$\sec\vartheta_1$	1.09 9199	$\sec\vartheta_3$	0.82 0418	$\sec\vartheta_1$	1.10 6637	$\sec\vartheta_3$	0.82 8337
r_1	0.53 3100	r_3	0.53 9737	r_1	0.54 0538	r_3	0.54 7656
$r_1 + r_3$	0.83 7461	$r_3 - r_1$	8.72 064	$r_1 + r_3$	0.84 5142	$r_3 - r_1$	8.75 866
$(r_1 + r_3)^3$	2.51 2383	ξ	7.88 318	$(r_1 + r_3)^3$	2.53 5426	ξ	7.91 352

Versuch 3.				*Versuch 4.*			
x	7.46 4574	$x\xi$	5.37 809	x	7.46 2039	$x\xi$	5.38 069
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168		+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 997		+ 1292		— 991		+ 1284
	+ 9		+ 10		+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1945	A'	+ 1.26 4470	A	1.09 1951	A'	+ 1.26 4462
	— 0.09 8433		— 0.54 3490		— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 2160		+ 1 2162		+ 2147		+ 1 2091
	— 58		— 135		— 58		— 136
B	— 0.09 6331	B'	— 0.53 1463	B	— 0.09 6344	B'	— 0.53 1535
	9.63 8621		+ 2.75 4037		9.63 8680		+ 2.75 4654
	9.23 6852				9.23 6816		
ϱ_1	0.40 1769			ϱ_1	0.40 1864		
	0.03 8201				0.03 8203		
ϱ_1	+ 2.52 2140	ϱ_3	+ 2.65 7706	ϱ_1	+ 2.52 2690	ϱ_3	+ 2.65 8310
$\varrho_1 + p_1$	0.54 0013	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3723	$\varrho_1 + p_1$	0.54 0082	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3799
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6112	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4404	$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6181	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4480
$\sec\vartheta_1$	1.10 7440	$\sec\vartheta_3$	0.82 9224	$\sec\vartheta_1$	1.10 7508	$\sec\vartheta_3$	0.82 9299
r_1	0.54 1341	r_3	0.54 8543	r_1	0.54 1409	r_3	0.54 8618
$r_1 + r_3$	0.84 5987	$r_3 - r_1$	8.76 464	$r_1 + r_3$	0.84 6059	$r_3 - r_1$	8.76 510
$(r_1 + r_3)^3$	2.53 7961	ξ	7.91 865	$(r_1 + r_3)^3$	2.53 8177	ξ	7.91 904

Versuch 5.

x	7.46 1823	$x\xi$	5.38 086
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 991		+ 1284
	+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1951	A'	+ 1.26 4462
	— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 2146		+ 1 2085
	— 58		— 136
B	— 0.09 6345	B'	— 0.53 1541
	9.63 8685		+ 2.75 4687
	9.23 6816		
ϱ_1	0.40 1869		
	0.03 8203		
ϱ_1	+ 2.52 2718	ϱ_3	+ 2.65 8342
$\varrho_1 + p_1$	0.54 0086	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3802
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6185	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4483
$\sec\vartheta_1$	1.10 7512	$\sec\vartheta_3$	0.82 9303
r_1	0.54 1413	r_3	0.54 8622
$r_1 + r_3$	0.84 6062		
$(r_1 + r_3)^3$	2.53 8186		

VI.		1	3
	$\cos\beta$	9.99 9971	9.99 9974
	ϱ	0.40 1869	0.42 4611
	$\sin\beta$	8.06 5982	8.03 9156
	$\sin(\lambda - L)$	9.44 0747	$9.72\ 3781_n$
	$\cos(\lambda - L)$	9.98 2808	9.92 8587
	$\varrho\cos\beta$	0.40 1840	0.42 4585
		0.38 4648	0.35 3172
	R	9.99 2807	9.99 5470
	$r\cos b\sin(l - L)$	9.84 2587	$0.14\ 8366_n$
	$r\cos b\cos(l - L)$	0.53 2527	0.51 1182
	$\cos(l - L)$	9.99 1129	9.96 2576
	$\operatorname{tg}(l - L)$	9.31 0060	$9.63\ 7184_n$
	$l - L$	+ 11° 32′ 28″.5	— 23° 26′ 46″.0
	$r\sin b$	8.46 7851	8.46 3767
	$r\cos b$	0.54 1398	0.54 8606
	$\cos b$	9.99 9985	9.99 9985
	$\operatorname{tg} b$	7.92 6453	7.91 5161
	r	0.54 1413	0.54 8621
	l	124° 36′ 20″.2	130° 9′ 47″.5
	$l_3 - l_1$	5 33 27.3	
	$\sin(\quad\!\!»\quad)$	8.98 6082	
	$\cos(\quad\!\!»\quad)$	9.99 7954	

VII.		
	$\operatorname{tg} b_3$	7.91 5161
$\operatorname{tg} b_1\cos(l_3 - l_1)$		7.92 4407
		$6.24\ 7971_n$
$\operatorname{tg} i\sin(l_1 - \Omega)$		7.92 6453
$\operatorname{tg} i\cos(l_1 - \Omega)$		$7.26\ 1889_n$
$\sin(l_1 - \Omega)$		9.99 0054
$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$		$0.66\ 4564_n$
$(l_1 - \Omega)$		102° 12′ 55″.5
$\operatorname{tg} i$		7.93 6399
i		0° 29′ 41″.6
Ω		22 23 24.7
$l_3 - \Omega$		107 46 22.8
$\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)$		$0.49\ 4111_n$
$\sec i$		0.00 0016
$\operatorname{tg} u_1$		$0.66\ 4580_n$
$\operatorname{tg} u_3$		$0.49\ 4127_n$
u_1		102° 12′ 53″.9
u_3		107 46 20.6
$u_3 - u_1$		5 33 26.7
f_2		2 46 43.35

IX.		
	$\sqrt{r_1 r_3}$	0.54 5017
	$2\cos f_2$	0.30 0519
		0.84 5536
	$\cos\gamma$	9.99 9474
	Γ	2.91 7060
	$(t_3 - t_1)^2$	3.20 4048
	η	0.66 5862
	η^2	1.33 1724
VII. St.	$a'\eta$	+ 7939
	$a''\eta$	+ 23
	$-b''\eta^2$	— 23
	$\log y_2$	0.00 0794

X.		
	$\sin(u_3 - u_1)$	8.98 6069
	$r_1 r_3$	1.09 0035
		0.07 6898
	$\sqrt{p}$	0.23 9293
	p	0.47 8586
	$\cos(u_3 - u_1)$	9.99 7954

	$p : r_1$	9.93 7173
	$p : r_3$	9.92 9964
	q_1	$9.12\ 9327_n$
	q_3	$9.17\ 2991_n$
$q_1\cos(u_3 - u_1)$		$9.12\ 7281_n$
		8.17 2561
	$e\sin v_1$	9.18 6492
	$e\cos v_1$	$9.12\ 9327_n$
	$\sin v_1$	9.87 6192
	$\operatorname{tg} v_1$	$0.05\ 7165_n$
	v_1	131° 14′ 24″.0
	$\sin\varphi$	9.31 0300
	$\cos\varphi$	9.99 0740
	φ	11° 47′ 21″.8
	$\sec\varphi^2$	0.01 8520
	a	0.49 7106
	ω	330° 58′ 29″.9
	v_3	136 47 50.7
	$\sin v_3$	9.83 5424
	$\sin\frac{1}{2}\varphi$	9.01 1572
	$a^{\frac{3}{2}}$	0.74 5659

XI.		
		0.03 1413
		8.88 7764
		0.03 5018
		8.84 6996
	$\sin\frac{1}{2}(v_1 - E_1)$	8.91 9177
	$\sin\frac{1}{2}(v_3 - E_3)$	8.88 2014
	$v_1 - E_1$	+ 9° 31′ 27″.2
	$v_3 - E_3$	+ 8 44 29.6
	E_1	121 42 56.8
	E_3	128 3 21.1
	$\sin E_1$	9.92 9759
	$\sin E_3$	9.89 6201
		4.55 4484
		4.52 0926
	$e''\sin E_1$	9° 57′ 29″.6
	$e''\sin E_3$	9 13 3.8
	M_1	111 45 27.2
	M_3	118 50 17.3
	$M_3 - M_1$	4.40 6372
	μ	2.80 4348
	(μ)	2.80 4348

Elemente (468)

1901 Januar 13.44645 M. Z. Berlin

M	111° 45′ 27″.2	
ω	330 58 29.9	1901.0
Ω	22 23 24.7	
i	0 29 41.6	

φ	11° 47′ 21″.8
μ	637″.306
$\log a$	0.49 7106

XII. Berechnung der mittleren Örter.

$t_2 - t_1$	1.00 3450	1.49 2978	$r \sin u \cos i$	0.53 0878	0.52 8690
$\mu (t_2 - t_1)$	3.80 7798	4.29 7326	$-R \sin (L_2 - \Omega)$	9.98 5228$_n$	9.92 1806$_n$
	$+ 1^\circ 47' 3''.9$	$+ 5^\circ 30' 30''.1$	$r \cos u$	9.91 5674$_n$	0.00 1816$_n$
M	113 32 31.1	117 15 57.3	$-R \cos (L_2 - \Omega)$	9.27 1331	9.72 1998
E	123 19 25.0	126 39 25.4	$\varrho \cos\beta \sin (\lambda - \Omega)$	0.38 5381	0.40 5348
$\sin E$	9.92 1989	9.90 4295	$\varrho \cos\beta \cos (\lambda - \Omega)$	9.80 3961$_n$	9.67 8485$_n$
$\cos E$	9.73 9863$_n$	9.77 5992$_n$	$\sin (\lambda - \Omega)$	9.98 5566	9.99 2492
$\cos E - e$	9.87 7188$_n$	9.90 3816$_n$	$\operatorname{tg} (\lambda - \Omega)$	0.58 1420$_n$	0.72 6863$_n$
$r \sin v$	0.40 9835	0.39 2141	$\lambda - \Omega$	$104^\circ 41' 25''.8$	$100^\circ 37' 22''.4$
$r \cos v$	0.37 4294$_n$	0.40 0922$_n$	$\varrho \sin\beta$	8.46 7276	8.46 5089
$\cos v$	9.83 0988$_n$	9.85 3831$_n$	$\varrho \cos\beta$	0.39 9815	0.41 2856
$\operatorname{tg} v$	0.03 5541$_n$	9.99 1219$_n$	$\cos\beta$	9.99 9970	9.99 9973
v	$132^\circ 39' 29''.5$	$135^\circ 34' 45''.0$	$\operatorname{tg}\beta$	8.06 7461	8.05 2233
r	0.54 3306	0.54 7091	λ	$127^\circ 4' 50''.5$	$123^\circ 0' 47''.1$
u	$103^\circ 37' 59''.4$	$106^\circ 33' 14''.9$	β	$+ 0\ 40\ 9.2$	$+ 0\ 38\ 46.2$
$\sin u$	9.98 7588	9.98 1615	ϱ	0.39 9845	0.41 2883
$\cos u$	9.37 2368$_n$	9.45 4725$_n$			
$L_2 - \Omega$	$100^\circ 56' 13''.8$	$122^\circ 12' 41''.7$	B−R $\Delta\lambda$	0″.0	− 0″.1
sin »	9.99 2038	9.92 7175	B−R $\Delta\beta$	+ 2.6	− 2.4
cos »	9.27 8141$_n$	9.72 7367$_n$			

Die nahezu völlige Darstellung der beiden mittleren Längen durch die Elemente beweist die Korrektheit der Rechnung; die Darstellung der Breiten ist noch eine genügende; der Wechsel des Vorzeichens weist darauf hin, daß die Abweichungen den Beobachtungen zur Last fallen und daß eine Verbesserung der Elemente mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial nicht unternommen werden kann.

Abschnitt XXI.

Die direkten Methoden der Bahnbestimmung.

106. Die Methode von J. Glauser. Bei Darlegung des Lambertschen Satzes (Nr. 75) haben wir darauf hingewiesen, daß derselbe alle Mittel zur Bahnbestimmung enthalte. Tatsächlich beruht die Laplacesche Bahnbestimmungsmethode (Nr. 107) auf einer Gleichung, die der Ausdruck des Lambertschen Satzes ist, und sind später von *Binet* (Mém. de l'Ac. Paris 1827), *Bruns* (Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241) und *Glauser* (Astr. Nachr. Bd. 121, S. 65) Methoden auf die direkte Anwendung desselben basiert worden; dieselben unterscheiden sich dadurch voneinander, daß Laplace, Binet und Bruns die von der Krümmung der Erd- und Planetenbahn abhängigen Größen durch die ersten und zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten des mittleren Ortes ausdrücken, wozu beliebig viele Beobachtungen herausgezogen werden können, Glauser aber hierzu lediglich die geometrischen Beziehungen zwischen drei Örtern benutzt. Wir wollen zunächst die Glausersche Formulierung auseinandersetzen, indem wir unmittelbar an die Entwicklungen Seite 240 anknüpfen. In der dort aufgestellten Gleichung

$$\frac{k - \varrho_2}{k} = \frac{R_2^3}{r_2^3}$$

ergibt sich für k aus dem Dreieck QE_2R (Fig. 39), wenn σ der Winkel bei R, $180^\circ - \delta_2$ der Winkel bei E_2 und $S = QE_2$ der Pfeil der Erdbahn genannt wird:

$$E_2R = k = S \cdot \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma},$$

so daß die Gleichung so geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} Q\varrho_2 &= \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \\ Q &= \frac{\sin\sigma}{SR_2^3 \sin(\delta_2 - \sigma)} \end{aligned}\right\}. \qquad 1)$$

wo

Betreff der Berechnung von δ_2 verweisen wir der Kürze halber auf die Formeln 34) (Seite 270), betreff der Rechnung von σ auf Seite 288; der Pfeil S der Erdbahn ergibt sich leicht wie folgt: Werden im Dreieck zwischen der Sonne und den äußeren Erdörtern die Winkel an den letzteren E_1 und E_3, der Winkel an der Sonne $L_3 - L_1$ genannt, so wird:

$$E_1 + E_3 = 180^\circ - (L_3 - L_1)$$

und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(E_1 - E_3) = \frac{R_1 - R_3}{R_1 + R_3} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(E_1 + E_3)$$

und dann:

$$S = R_2 - R_1 \frac{\sin E_3}{\sin\left(E_3 + (L_2 - L_1)\right)}. \qquad 2)$$

Nachdem hierdurch Q bekannt geworden, wird die Gl. 1) in Verbindung mit

$$r_2^2 = \varrho_2^2 + R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos\delta_2$$

aufgelöst.

Zur Ermittelung der beiden äußeren geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 dient zunächst die Gleichung (Seite 241)

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_1}\,\frac{\tau_1}{\tau_3},$$

wozu die Bogen ω_1 und ω_3 gebraucht werden. Die Koordinaten λ und β des Punktes g ergeben sich durch:

$$\begin{aligned}\cos\beta\,\sin(\lambda - L_2) &= \cos w_2\,\sin(\delta_2 - \sigma)\\ \cos\beta\,\cos(\lambda - L_2) &= \cos(\delta_2 - \sigma)\\ \sin\beta &= \sin w_2\,\sin(\delta_2 - \sigma)\end{aligned}$$

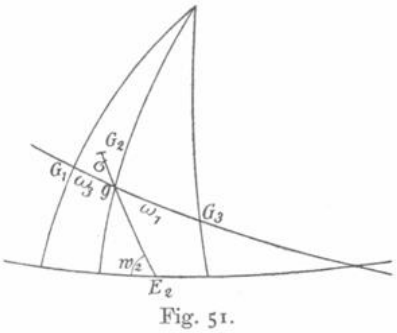

Fig. 51.

wo (Seite 270) w_2 zugleich mit δ_2 berechnet wird, und dann folgt:

$$\begin{aligned}\cos\omega_1 &= \sin\beta\,\sin\beta_3 + \cos\beta\,\cos\beta_3\,\cos(\lambda - \lambda_3)\\ \cos\omega_3 &= \sin\beta\,\sin\beta_1 + \cos\beta\,\cos\beta_1\,\cos(\lambda - \lambda_1)\end{aligned}$$

oder:

$$\cos\omega_1 = \frac{\sin\beta\,\sin(\beta_3 + m_3)}{\cos m_3} \qquad \cos\omega_3 = \frac{\sin\beta\,\sin(\beta_1 + m_1)}{\cos m_1}$$

$$\operatorname{tg} m_3 = \operatorname{cotg}\beta\,\cos(\lambda - \lambda_3) \qquad \operatorname{tg} m_1 = \operatorname{cotg}\beta\,\cos(\lambda - \lambda_1).$$

Ferner erhält man die Winkel C_1 und C_3 (siehe Fig. 52) aus

$$C_1 + C_3 = 180^\circ - (\omega_1 + \omega_3)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C_1 - C_3)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C_1 + C_3)} = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_3} = \frac{1 - \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}{1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$$

und dann schließlich

$$\varrho_1 = \varrho_0\,\frac{\sin(\omega_3 + C_3)}{\sin C_3}, \qquad \varrho_3 = \varrho_0\,\frac{\sin(\omega_1 + C_1)}{\sin C_1};$$

ϱ_0 wird bei dieser Methode, wie aus den Ansätzen Seite 241 hervorgeht, mit ϱ_2 identifiziert.

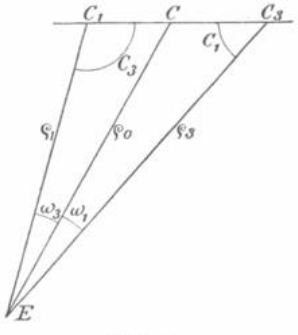

Fig. 52.

107. Die Laplacesche Methode der Bahnbestimmung*). Es läßt sich ein Ausdruck für die geozentrische Distanz ϱ des Planeten (oder Kometen) ableiten, welcher außer der heliozentrischen Distanz r nur die ersten und zweiten Differenzialquotienten der geozentrischen Polarkoordinaten α und δ enthält. Da diese letzteren sich aus gegebenen Beobachtungen ermitteln lassen, so ist damit eine erste Gleichung zwischen ϱ und r gewonnen. Eine zweite, rein geometrische ergibt sich aus dem Dreieck Sonne-Erde-Gestirn. Aus der Verbindung beider folgt ϱ und r. Ebenso kann $\frac{d\varrho}{dt}$ durch ϱ und die Differenzialquotienten der geozentrischen Polarkoordinaten

*) *Laplace*, Méc. cél. Livre II. § 28—37.

ausgedrückt werden. Aus den vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten α, δ, ϱ und ihren ersten Differenzialquotienten lassen sich die sechs Elemente der Bahn ableiten. Dieser Gedankengang, welcher der Laplaceschen Methode zugrunde liegt, soll nun durchgeführt werden.

Als Fundamentalebene führen wir den Äquator ein, da die Umwandlung so zahlreicher Beobachtungen, wie sie hier gebraucht werden, in Länge und Breite zu mühsam wäre. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Planeten in bezug auf die Sonne, r sein Radiusvektor; X, Y, Z die rechtwinkligen, R, A, D die Polarkoordinaten der Sonne bezogen auf die Erde; α, δ, ϱ die geozentrischen Koordinaten des Planeten. Es seien ferner, um die Analyse kürzer durchführen zu können, a, b, c die Richtungskosinus der geozentrischen Örter, also

$$a = \cos\delta\cos\alpha\,, \qquad b = \cos\delta\sin\alpha\,, \qquad c = \sin\delta.$$

Dann wird:

$$x = -X + \varrho a\,, \qquad y = -Y + \varrho b\,, \qquad z = -Z + \varrho c \tag{1}$$

und durch zweimalige Differenziation, wenn die Differenzialquotienten durch Akzente bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} x'' &= -X'' + \varrho'' a + 2\varrho' a' + \varrho a'' \\ y'' &= -Y'' + \varrho'' b + 2\varrho' b' + \varrho b'' \\ z'' &= -Z'' + \varrho'' c + 2\varrho' c' + \varrho c''\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist nach den Bewegungsgleichungen für den Planeten und für die Erde: (m = Masse von Erde + Mond)

$$x'' + k^2\frac{x}{r^3} = 0, \qquad y'' + k^2\frac{y}{r^3} = 0, \qquad z'' + k^2\frac{z}{r^3} = 0 \tag{3}$$

$$X'' + k^2\frac{X(1+m)}{R^3} = 0, \qquad Y'' + k^2\frac{Y(1+m)}{R^3} = 0, \qquad Z'' + k^2\frac{Z(1+m)}{R^3} = 0,$$

also:

$$\begin{aligned} &a'(x''+X'') + b'(y''+Y'') + c'(z''+Z'') + \\ &\quad + k^2\left[\left(\frac{xa'}{r^3} + \frac{X(1+m)a'}{R^3}\right) + \left(\frac{yb'}{r^3} + \frac{Y(1+m)b'}{R^3}\right) + \left(\frac{zc'}{r^3} + \frac{Z(1+m)c'}{R^3}\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf 1) und $aa' + bb' + cc' = 0$:

$$a'(x''+X'') + b'(y''+Y'') + c'(z''+Z'') - k^2(Xa' + Yb' + Zc')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right) = 0.$$

Die Gleichungen 2) ergeben somit, wenn sie der Reihe nach mit a', b', c' multipliziert und addiert werden:

$$-k^2(Xa' + Yb' + Zc')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right) + 2\varrho'(a'^2 + b'^2 + c'^2) + \varrho(a'a'' + b'b'' + c'c'') = 0, \tag{4}$$

welches eine Beziehung zwischen ϱ und ϱ' darstellt, die sonst nur bekannte Größen enthält.

Beachten wir ferner, daß

$$a(bc' - cb') + b(ca' - ac') + c(ab' - ba') = 0$$

und ebenso

$$a'(bc' - cb') + b'(ca' - ac') + c'(ab' - ba') = 0,$$

daß also aus 1) folgt:

$$(x + X)(bc' - cb') + (y + Y)(ca' - ac') + (z + Z)(ab' - ba') = 0$$

und daher aus 3)

$$(x'' + X'')(bc' - cb') + (y'' + Y'')(ca' - ac') + (z'' + Z'')(ab' - ba') - \\ - k^2 (X(bc' - cb') + Y(ca' - ac') + Z(ab' - ba')) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1 + m}{R^3}\right) = 0,$$

so werden die Gl. 2), wenn sie der Reihe nach mit $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ multipliziert und addiert werden:

$$- k^2 (X(bc' - cb') + Y(ca' - ac') + Z(ab' - ba')) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1 + m}{R^3}\right) + \\ + \varrho (a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba')) = 0. \qquad 5)$$

Da der Faktor von ϱ nach Seite 17 gleich $V^3 K$ ist, wo K die Krümmung der scheinbaren Bahn, V die Geschwindigkeit in der scheinbaren Bahn bedeuten, so stellt diese Gleichung nach Seite 243 den Lambertschen Satz dar. Dieser bildet also, wie auch in Nr. 76 erwähnt wurde, die Grundlage der Laplaceschen Methode. Dividiert man 5) durch V, so folgt, wenn man gleichzeitig die Determinantenform wählt:

$$K V^2 \varrho = - k^2 \left(\frac{1 + m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \begin{vmatrix} \frac{X}{R} & a & \frac{a'}{V} \\ \frac{Y}{R} & b & \frac{b'}{V} \\ \frac{Z}{R} & c & \frac{c'}{V} \end{vmatrix} R$$

oder nach Seite 243

$$K V^2 \varrho = - k^2 \left(\frac{1 + m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \sin F, \qquad 5^a)$$

wo F den senkrechten Abstand der Sonne von der geodätischen Tangente im geozentrischen Planetenort bedeutet.

Eine zweite Beziehung zwischen ϱ und r erhält man durch Quadrieren und Addieren der Gl. 1):

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \left(\frac{X}{R} a + \frac{Y}{R} b + \frac{Z}{R} c\right); \qquad 6)$$

hierin stellt der Klammerausdruck den cos des Winkels zwischen Sonnen- und Planetenort dar; wird dieser mit G bezeichnet, so folgt:

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos G. \qquad 6^a)$$

Aus 5) und 6) ergibt sich durch Elimination von ϱ eine Gleichung achten Grades in r (Laplacesche oder Gaußsche Gleichung), die durch Versuche aufzulösen ist. Aus 5) folgt dann ϱ und aus 4) ϱ', so daß nun die sechs Stücke α, δ, ϱ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ vorliegen.

Wir werden später (Nr. 109) zeigen, wie aus den beobachteten Koordinaten ihre ersten und zweiten Differenzialquotienten, die zur Berechnung von 4) und 5) erforderlich sind, abgeleitet werden können und weiter, wie aus den sechs erwähnten Stücken die Elemente der Bahn erhalten werden. Vorher aber werden wir eine Umformung

der Gleichungen 4) und 5) nach *Bruns**) vornehmen, durch welche eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung herbeigeführt wird, während die Laplaceschen Formeln ziemlich kompliziert sind und hier übergangen werden sollen.

108. Umformung von Bruns. Setzt man

$$Q = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right), \qquad \text{I.}$$

so nehmen die Gl. 5) und 4) folgende Gestalt an:

$$k^2 Q = -\frac{\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' & X \\ b & b' & Y \\ c & c' & Z \end{vmatrix}}$$

$$2\frac{\varrho'}{\varrho}(a'^2 + b'^2 + c'^2) = -(a'a'' + b'b'' + c'c'') - k^2 Q(Xa' + Yb' + Zc').$$

Substituiert man $k^2 Q$ aus der ersten in die zweite, so kommt der Reihe nach, wenn noch wie oben die Geschwindigkeit in der scheinbaren Bahn mit V bezeichnet wird, womit $a'^2 + b'^2 + c'^2 = V^2$ wird, und wenn wie Seite 243 $a_0 = \frac{1}{V}(bc' - cb')$, ... gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 2\frac{\varrho'}{\varrho}V^2(Xa_0 + Yb_0 + Zc_0) &= -(a'a'' + b'b'' + c'c'')(Xa_0 + Yb_0 + Zc_0) + \\ &\quad + (a_0a'' + b_0b'' + c_0c'')(Xa' + Yb' + Zc') \\ &= -[(b'c_0 - c'b_0)(b''Z - c''Y) + (c'a_0 - a'c_0)(c''X - a''Z) \\ &\quad + (a'b_0 - b'a_0)(a''Y - b''X)]. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} b'c_0 - c'b_0 &= \frac{1}{V}(b'(ab' - b'a) - c'(ca' - ac')) \\ &= \frac{1}{V}(aV^2 - a'(aa' + bb' + cc')) = aV; \end{aligned}$$

also wird schließlich:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix}}{2V(a_0X + b_0Y + c_0Z)}, \qquad \text{II.}$$

wozu noch kommt:

$$k^2 Q = -\frac{a_0a'' + b_0b'' + c_0c''}{a_0X + b_0Y + c_0Z}. \qquad \text{III.}$$

Die Gleichungen I., II., III. lösen das Problem; nachdem Q durch III. ermittelt ist, gibt die Gl. I. ϱ und die Gl. II. ϱ'.

*) *Bruns*, Der Lambertsche Satz, Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241, 1888.

Die Berechnung der a, a', a'', $a_0, \cdots$ vollzieht sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} a &= \cos\delta\cos\alpha\,, \quad b = \cos\delta\sin\alpha\,, \quad c = \sin\delta \\ a' &= -\delta'\sin\delta\cos\alpha - \alpha'\cos\delta\sin\alpha \\ b' &= -\delta'\sin\delta\sin\alpha + \alpha'\cos\delta\cos\alpha \\ c' &= \delta'\cos\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \delta'^2 + (\alpha'\cos\delta)^2 \\ Va_0 &= \delta'\sin\alpha - \alpha'\cos\delta\cdot\sin\delta\cos\alpha \\ Vb_0 &= -\delta'\cos\alpha - \alpha'\cos\delta\cdot\sin\delta\sin\alpha \\ Vc_0 &= \alpha'\cos\delta\cdot\cos\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'' &= -\delta''\sin\delta\cos\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\alpha - \delta'^2\cos\delta\cos\alpha + 2\delta'\alpha'\sin\delta\sin\alpha - \alpha'^2\cos\delta\cos\alpha \\ b'' &= -\delta''\sin\delta\sin\alpha + \alpha''\cos\delta\cos\alpha - \delta'^2\cos\delta\sin\alpha - 2\delta'\alpha'\sin\delta\cos\alpha - \alpha'^2\cos\delta\sin\alpha \\ c'' &= \delta''\cos\delta - \delta'^2\sin\delta\,. \end{aligned}$$

Es wird also nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} bc'' - cb'' &= 2\alpha'\delta'\sin\delta^2\cos\alpha + bc\alpha'^2 + \delta''\sin\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\delta\cos\alpha \\ ca'' - ac'' &= 2\alpha'\delta'\sin\delta^2\sin\alpha - ca\alpha'^2 - \delta''\cos\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\delta\sin\alpha \\ ab'' - ba'' &= \alpha''\cos\delta\cos\delta - 2\alpha'\delta'\cos\delta\sin\delta \end{aligned}$$

und:

$$V(a_0a'' + b_0b'' + c_0c'') = (\alpha'\delta'' - \delta'\alpha'')\cos\delta + \alpha'\sin\delta\,(2\delta'^2 + \alpha'^2\cos\delta^2)\,. \qquad \text{(a)}$$

Nennt man im sphärischen Dreieck zwischen Pol des Äquators, Sonnenort und Planetenort die Winkelentfernung der Sonne vom Planeten wie bereits in Gl. 6[a]) (Seite 339) G und den Positionswinkel dieses Bogens H, so erhält man diese Größen aus:

$$\begin{aligned} \sin G\sin H &= \cos D\sin(A-\alpha) \\ \sin G\cos H &= \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(A-\alpha) \\ \cos G &= \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(A-\alpha)\,. \end{aligned}$$

Werden nun

$$X = R\cos D\cos A\,, \qquad Y = R\cos D\sin A\,, \qquad Z = R\sin D$$

eingeführt, so folgt mit Benutzung der eben angeführten G und H

$$V(a_0X + b_0Y + c_0Z) = R(\alpha'\cos\delta\sin G\cos H - \delta'\sin G\sin H) \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix} = \alpha''\cos\delta\sin G\cos H - \delta''\sin G\sin H - 2\alpha'\delta'\sin\delta\sin G\cos H - \alpha'^2\sin\delta\cos\delta\sin G\sin H. \qquad \text{(c)}$$

Die drei für die Gl. II. und III. gebrauchten Ausdrücke (a), (b), (c) lassen sich noch etwas einfacher schreiben, wenn man V, ψ, V_1, ψ_1 aus

$$\begin{aligned} V\cos\psi &= \delta'\,, & V_1\cos\psi_1 &= \delta'' \\ V\sin\psi &= \alpha'\cos\delta\,, & V_1\sin\psi_1 &= \alpha''\cos\delta \end{aligned}$$

berechnet. Es wird nämlich dann:

$$\begin{aligned} (a_0a'' + b_0b'' + c_0c'') &= V_1\sin(\psi - \psi_1) + V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi + V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi^2 \\ (a_0X + b_0Y + c_0Z) &= R\sin G\sin(\psi - H) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix} = V_1\sin G\sin(\psi_1 - H) - V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\sin G\cos(\psi - H) - V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\sin G\cos H$$

und daher gehen II. und III. über in die bequeme Form:

$$R\sin G\sin(H-\psi)k^2Q = V_1\sin(\psi-\psi_1)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\cos\psi$$
$$-2V\sin(H-\psi)\frac{\varrho'}{\varrho} = V_1\sin(H-\psi_1)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos(H-\psi)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\cos H \qquad \text{IV.}$$
$$\log k^2 = 6.471\,1629_{-10}.$$

ψ ist der Positionswinkel der Geschwindigkeit; wird $\psi = H$, d. h. erfolgt die Bewegung in einem durch die Sonne gehenden Kreis, so werden die Formeln unbrauchbar d. h. es tritt der Nr. 100 besprochene Ausnahmefall der Bahnbestimmung ein.

109. Berechnung der ersten und zweiten Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten. Diese Größen werden für denselben Zeitpunkt gebraucht, für den auch die Koordinaten α und δ selbst als vorhanden angenommen werden, und zu ihrer Ermittelung können nur Beobachtungen herangezogen werden. Da diese in nicht äquidistanten Zeitintervallen vorliegen, wird die Rechnung mit Interpolationsformeln eine recht mühsame, und dies ist wohl der Hauptgrund, weshalb die Laplacesche Methode nur wenig Eingang in die Praxis gefunden hat. Laplace hat ein Verfahren auf Grund der Newtonschen Formel angegeben, das nicht nachahmenswert ist. Man erhält aber auch kaum bessere Resultate, wenn man die Stirlingschen Formeln benutzt. Je mehr Beobachtungen man heranziehen kann, desto genauer werden die Differenzialquotienten zu ermitteln sein, desto größer ist aber auch die aufzuwendende Rechenarbeit. Zum mindesten braucht man drei Beobachtungen wie unmittelbar klar ist. Theoretisch ist es wünschenswert, daß die Beobachtungen zeitlich nahe aneinander liegen, praktisch aber sind größere Intervalle vorzuziehen, da sonst die Beobachtungsfehler zu großen Einfluß gewinnen.

Empfehlenswerte Verfahren sind nur: entweder sich äquidistante Örter durch Interpolation zu verschaffen und dann die Formeln der mechanischen Differenziation anzuwenden, oder die vorgelegten Örter nach Potenzen der Zeit zu entwickeln, die Koeffizienten durch Auflösung der linearen Gleichungssysteme zu bestimmen und dann zu differenzieren. Benutzt man nur drei Örter, so werden im letzten Falle die Formeln ziemlich einfach.

Sind α_1, α_2, α_3 die zu den Beobachtungszeiten t_1, t_2, t_3 gehörigen beobachteten Koordinaten und will man für die Zeit t_0 α_0, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0$ ermitteln, so geben die drei Gleichungen:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (t_1-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_1-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$
$$\alpha_2 = \alpha_0 + (t_2-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_2-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$
$$\alpha_3 = \alpha_0 + (t_3-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_3-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$

durch Auflösung nach den Unbekannten α_0, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ das Gewünschte. Nennt

man die Zwischenzeiten $t_3 - t_2 = \Theta_1$, $t_3 - t_1 = \Theta_2$, $t_2 - t_1 = \Theta_3$, so wird die Determinante des Systems gleich $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$, und man erhält also:

$$\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \cdot \alpha_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & t_1 - t_0 & (t_1 - t_0)^2 \\ \alpha_2 & t_2 - t_0 & (t_2 - t_0)^2 \\ \alpha_3 & t_3 - t_0 & (t_3 - t_0)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & (t_1 - t_0)^2 & 1 \\ \alpha_2 & (t_2 - t_0)^2 & 1 \\ \alpha_3 & (t_3 - t_0)^2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & t_1 - t_0 \\ \alpha_2 & 1 & t_2 - t_0 \\ \alpha_3 & 1 & t_3 - t_0 \end{vmatrix}.$$

Läßt man t_0 mit t_2 zusammenfallen, so wird:

$$\alpha_0 = \alpha_2$$

$$\Theta_2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \frac{\Theta_3}{\Theta_1}(\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{\Theta_1}{\Theta_3}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\frac{\Theta_1 \Theta_3}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 = \frac{\Theta_3}{\Theta_2}(\alpha_3 - \alpha_2) - \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Man wird aber nur selten mit diesen Formeln befriedigende Resultate erhalten. Meist muß man viel mehr Beobachtungen heranziehen, um ausreichend genaue Werte der Differenzialquotienten zu erhalten.

110. Bestimmung der Elemente aus den Koordinaten eines Ortes und ihren Geschwindigkeiten. Aus den sechs durch die vorstehende Analyse bekannt gewordenen Größen

$$\alpha,\ \delta,\ \varrho,\ \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\delta}{dt},\ \frac{d\varrho}{dt}$$

sind die Elemente abzuleiten. Man erhält zunächst den heliozentrischen Ort und seine Geschwindigkeit durch:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\delta \cos\alpha - X = \xi - X \\ y &= \varrho \cos\delta \sin\alpha - Y = \eta - Y \\ z &= \varrho \sin\delta \qquad\quad - Z = \zeta - Z \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \xi\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} - \operatorname{tg}\delta\frac{d\delta}{dt} - \operatorname{tg}\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right) - \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} - \operatorname{tg}\delta\frac{d\delta}{dt} + \operatorname{cotg}\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right) - \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \zeta\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{cotg}\delta\frac{d\delta}{dt}\right) - \frac{dZ}{dt},$$

worin $\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$ durch IV. unmittelbar gefunden wird und $\frac{dX}{dt}, \ldots$ aus der Sonnenephemeride zu berechnen sind.

Die Aufgabe, hieraus die Elemente darzustellen, kann auf mannigfache Weise gelöst werden. Am zweckmäßigsten ist wohl der von *Bessel* angegebene Weg, den

Encke im Berliner Jahrbuch für 1858 mitgeteilt hat. Bezieht man die Elemente Ω, i, ω auf den Äquator, so hat man nach Seite 24:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos\Omega\,\cos(\omega+v) - \sin\Omega\,\sin(\omega+v)\cos i) \\ y &= r(\sin\Omega\,\cos(\omega+v) + \cos\Omega\,\sin(\omega+v)\cos i) \\ z &= r\sin(\omega+v)\sin i\,, \end{aligned} \tag{a}$$

und da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}\,, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}}\,e\sin v\,,$$

so folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\{(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\cos\Omega + (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\sin\Omega\cos i\} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\{(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\sin\Omega - (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\cos\Omega\cos i\} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}}(\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\sin i\,. \end{aligned} \tag{b}$$

Wie in den sechs Gleichungen (a) und (b) die x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ durch die sechs Elemente dargestellt werden, so wird man umgekehrt durch Auflösung derselben die Elemente durch die ersteren Größen finden können. Zuerst ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{p}\,\cos i \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{p}\,\sin\Omega\,\sin i \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k\sqrt{p}\cos\Omega\,\sin i\,, \end{aligned} \tag{c}$$

woraus Ω, i, $k\sqrt{p}$ gefunden werden. Durch Quadrieren und Addieren dieser Beziehungen folgt:

$$k^2p = (x^2+y^2+z^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) - \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{d}$$

Nennt man die Geschwindigkeit in der Bahn c, so daß

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{e}$$

ist, so kann man nach (d) setzen:

$$\begin{aligned} cr\,\sin\chi &= k\sqrt{p} \\ cr\,\cos\chi &= x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\,, \end{aligned} \tag{f}$$

woraus man c und χ findet, wenn p aus (c) ermittelt ist. Aus (e) folgt mit Benutzung von (b)

$$c^2 = \frac{k^2}{p}\left((\sin(\omega+v)+e\sin\omega)^2 + (\cos(\omega+v)+e\cos\omega))^2\right)$$

oder

$$c^2 = \frac{k^2}{p}(1 + 2e\cos v + e^2) = \frac{k^2}{p}\left(2(1+e\cos v) - (1-e^2)\right)$$

oder mit Rücksicht auf

$$p = r(1 + e\cos v) \quad \text{und} \quad p = a(1 - e^2)$$

$$c^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus ergibt sich a durch:

$$\frac{k^2}{a} = \frac{2k^2}{r} - c^2 \tag{g}$$

und dann die Exzentrizität mittels:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}\,. \tag{h}$$

Schließlich findet man die wahre Anomalie v aus:

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1 \tag{i}$$

und damit ω, da $\omega + v$ sich direkt durch die Koordinaten x, y, z ausdrücken läßt; in der Tat ergeben die Gl. (a)

$$\begin{aligned} r\sin(\omega + v) &= -x\sin\Omega\sec i + y\cos\Omega\sec i = \frac{z}{\sin i} \\ r\cos(\omega + v) &= \quad x\cos\Omega \qquad + y\sin\Omega\,, \end{aligned} \tag{k}$$

wodurch r und $\omega + v$ gefunden werden. Die Gleichungen zur Berechnung von ω und e lassen sich bequemer stellen. Hat man i, Ω, p aus (c), cr und χ aus (f), r und $\omega + v$ aus (k) gerechnet, so ergibt die umgestellte Gleichung

$$c^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

nämlich

$$2a - r = \frac{r}{\frac{2}{r}\frac{k^2}{c^2} - 1} \tag{l}$$

den Betrag von $2a - r$. Nun ist

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = r\frac{dr}{dt} = \frac{rk}{\sqrt{p}}e\sin v\,,$$

also folgt aus der zweiten Gl. (f) und aus der Polargleichung des Kegelschnitts:

$$e\sin v = \frac{c\cos\chi}{k}\sqrt{p}$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1\,,$$

oder wenn man den Wert von p aus der ersten Gl. (f) substituiert:

$$e\sin v = \frac{c^2 r\sin\chi\cos\chi}{k^2}$$

$$e\cos v = \frac{c^2 r\sin\chi^2}{k^2} - 1\,.$$

Wird hier noch

$$\frac{c^2}{k^2} = \frac{2a - r}{ar}$$

eingetragen, so folgt:

$$2e \sin v = \frac{2a - r}{a} \sin 2\chi$$

$$2e \cos v = -\frac{r}{a} - \frac{2a - r}{a} \cos 2\chi$$

oder nach Multiplikation mit $\sin(\omega + v)$ und $\cos(\omega + v)$

$$\begin{aligned} 2ae \sin\omega &= -r \sin(\omega + v) - (2a - r) \sin(2\chi + \omega + v) \\ 2ae \cos\omega &= -r \cos(\omega + v) - (2a - r) \cos(2\chi + \omega + v). \end{aligned} \tag{m}$$

Noch einfacher scheint folgender Weg zu sein. Nachdem Ω, i, p aus (c) und $\omega + v$ aus (k) berechnet ist, benutze man die Gleichung

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{kr} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)$$

in Verbindung mit

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

zur Berechnung von e und v, womit sich e und ω ergeben.

Die mittlere Anomalie für die Epoche geht aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \\ M &= E - e \sin E \end{aligned} \tag{n}$$

hervor, wenn es sich um eine Ellipse, und aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F &= \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \\ N &= e \operatorname{tg} F - \log \text{nat} \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} F + 45^\circ), \end{aligned}$$

wenn es sich um eine Hyperbel handelt. Im Fall der Parabel wird $\frac{1}{a} = 0$ und daher:

$$c^2 = \frac{2k^2}{r}$$

und wenn q die Periheldistanz genannt wird:

$$2k^2 q = r^2 c^2 - \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2$$

also:

$$q = r - \frac{1}{2k^2} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Doch wird man auch hier am bequemsten

$$\begin{aligned} \Omega, i, q = \frac{p}{2} &\quad \text{aus (c)} \\ cr \text{ und } \chi &\quad \text{aus (f)} \\ r \text{ und } \omega + v &\quad \text{aus (k)} \end{aligned}$$

berechnen und dann v aus

$$\begin{aligned} \sin v &= 2 \sin\chi \cos\chi = \sin 2\chi \\ \cos v &= 2 \sin\chi^2 - 1 = -\cos 2\chi \\ \operatorname{tg} v &= -\operatorname{tg} 2\chi \end{aligned}$$

und die Durchgangszeit durchs Perihel aus:

$$t - \mathrm{T} = q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{k} (\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^3) .$$

111. Baryzentrische Örter. Die seit Nr. 106 besprochenen Methoden setzen die elliptische Bewegung der Erde voraus. Diese Voraussetzung kann man jedoch, wenn man von den Planetenstörungen absieht, nur für den Schwerpunkt von Erde und Mond machen und es müssen daher auf diesen die beobachteten Kometenörter und die Sonnenörter reduziert werden, d. h. man muß die ersteren nicht nur auf das Erdzentrum bringen (für Parallaxe korrigieren), sondern auch noch auf den Schwerpunkt Erde-Mond. *Bruns*, der zuerst auf diesen Umstand aufmerksam gemacht hat, nennt die so korrigierten Örter baryzentrische. Da man solche natürlich erst herstellen kann, wenn die Entfernung des Gestirnes bekannt geworden ist, so müssen zwei Näherungen gerechnet werden, deren erste mit den rohen Beobachtungen, deren zweite mit den baryzentrischen Koordinaten von Sonne und Gestirn durchzuführen ist.

Zur Reduktion der geozentrischen Koordinaten auf baryzentrische muß man die Unterschiede zwischen dem geozentrischen und dem baryzentrischen Ort der Sonne direkt den Sonnentafeln entnehmen, da die Jahrbücher sie nicht anführen (siehe Newcomb, Tables of the Sun, Seite 18). Nennt man sie, gleich in rechtwinklige Koordinaten bezogen auf den Äquator umgerechnet ΔX, ΔY, ΔZ, so folgt für den Gestirnsort (nach S. 16)

$$\Delta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\varrho\cos\delta}\Delta X + \frac{\cos\alpha}{\varrho\cos\delta}\Delta Y$$
$$\Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\varrho}\Delta X - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\varrho}\Delta Y + \frac{\cos\delta}{\varrho}\Delta Z .$$

112. Übersicht der Formeln für die Laplace-Brunssche Methode. Man berechnet aus einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen für ein bestimmtes Datum den Ort des Gestirnes α, δ und die ersten und die zweiten Differenzialquotienten dieser Koordinaten α', δ', α'', δ''; ebenso den zugehörigen Ort der Sonne A, D, R, X, Y, Z und die Differenzialquotienten der rechtwinkligen Koordinaten: X', Y', Z', aus den Angaben des Jahrbuchs. Dann ferner:

I.
$$V\cos\psi = \delta' , \qquad V_1\cos\psi_1 = \delta''$$
$$V\sin\psi = \alpha'\cos\delta , \qquad V_1\sin\psi_1 = \alpha''\cos\delta$$
$$N = V^2\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\psi , \qquad N_1 = N\cos\psi .$$

II.
$$\sin G\sin H = \cos D\sin(A-\alpha)$$
$$\sin G\cos H = \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(A-\alpha)$$
$$\cos G = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(A-\alpha)$$
$$f = R\cos G , \qquad b = R\sin G .$$

III.
$$R\sin G\sin(H-\psi)\,k^2 Q = V_1\sin(\psi-\psi_1) + N + N_1\cos\psi$$
$$-2V\sin(H-\psi)\frac{\varrho'}{\varrho} = V_1\sin(H-\psi_1) + N\cos(H-\psi) + N_1\cos H$$
$$\log k^2 = 6.471\,1629_{-10} .$$

IV.
$$\varrho = \frac{1}{Q}\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \qquad \log(1+m) = 0.000\,0013$$
$$\frac{f-\varrho}{b} = \operatorname{tg}\vartheta; \quad r = b\sec\vartheta.$$

V.
$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\delta\cos\alpha - X = \xi - X \\ y &= \varrho\cos\delta\sin\alpha - Y = \eta - Y \\ z &= \varrho\sin\delta \qquad - Z = \zeta - Z \end{aligned}$$
$$x' = \xi\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \operatorname{tg}\delta\cdot\delta' - \operatorname{tg}\alpha\cdot\alpha'\right) - X'$$
$$y' = \eta\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \operatorname{tg}\delta\cdot\delta' + \operatorname{cotg}\alpha\cdot\alpha'\right) - Y'$$
$$z' = \zeta\left(\frac{\varrho'}{\varrho} + \operatorname{cotg}\delta\cdot\delta'\right) \qquad - Z'.$$

VI.
$$\begin{aligned} k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega &= yz' - zy' \\ k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega &= xz' - zx' \\ k\sqrt{p}\cos i \qquad &= xy' - yx'. \end{aligned}$$

VII.
$$e\sin v = \frac{\sqrt{p}}{kr}(xx' + yy' + zz')$$
$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1.$$

VIII.
$$\begin{aligned} r\sin u &= -x\sin\Omega\sec i + y\cos\Omega\sec i = \frac{z}{\sin i} \\ r\cos u &= \quad x\cos\Omega \qquad + y\sin\Omega. \end{aligned}$$

IX.
$$a = \frac{p}{1-e^2}$$
$$\omega = u - v.$$

	Ellipse:	Hyperbel:
X.	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v,$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$
	$M = E - e''\sin E,$	$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\mathrm{T}) = e\operatorname{tg}F - \log\operatorname{nat}\operatorname{tg}(\frac{1}{2}F + 45^\circ).$
	$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$	

Parabel:

IX^a.
$$q = \tfrac{1}{2}p.$$
Probe: $q = r - \frac{1}{2k^2}(xx' + yy' + zz')^2 \qquad \log\frac{1}{2k^2} = 3.227\,8070.$

X^a.
$$t - \mathrm{T} = q^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{k}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3).$$

Ein ausführliches nach einer ähnlichen Analyse durchgerechnetes Beispiel von *P. Harzer* findet man in Astr. Nachr. Bd. 141. Auch *A. Leuschner* hat einige Bahnen nach der Harzerschen Formulierung rechnen lassen und nützliche Winke zur Abkürzung der Rechnung gegeben (Publ. of the Lick Observatory Vol. VIII, Part 1, 2, 3; 1902).

Abschnitt XXII.

Die Bestimmung einer parabolischen Bahn.

113. Die Methode von Lambert-Olbers. Bei den bis jetzt besprochenen Methoden der Bahnbestimmung wurde von Anfang an eine Voraussetzung über die Exzentrizität *nicht* gemacht, oder nur insofern, als bei der Gaußschen Methode das von $\frac{dr}{dt}$ abhängige Glied der Reihenentwicklungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen als klein angenommen wurde, was bei sehr großen Exzentrizitäten zu illusorischen Resultaten führen kann, indem bei Vernachlässigung dieser Glieder der mitgenommene Teil der Reihe keine Näherung mehr darstellt. Bei der Laplaceschen Methode tritt die Entscheidung über die Exzentrizität des Kegelschnitts erst ganz zuletzt auf und die Unabhängigkeit dieser Methode von der Exzentrizität ist als ein Vorzug derselben zu bezeichnen, dem freilich nicht wenige Nachteile gegenüber stehen. Es hat nun die Erfahrung gezeigt, daß fast eine ganze Klasse von Himmelskörpern — die Mehrzahl der Kometen — sich in Bahnen bewegt, deren Exzentrizität praktisch als 1 angenommen werden kann, d. h. in Parabeln. Bei diesen kann man also die Exzentrizität als zu bestimmendes Element ausscheiden, wodurch eine nicht unwesentliche Vereinfachung des Verfahrens erzielt wird. Es stellt sich nämlich heraus, daß eine einfache Gleichung zwischen der ersten und dritten geozentrischen Distanz besteht, aus der die dritte bestimmt werden kann, sobald über die erste eine Annahme gemacht ist. Als Kriterium dafür aber, ob die Annahme über die erste Distanz korrekt ist oder noch der Änderung bedarf, bietet sich der Lambertsche Satz in der einfachen Form dar, die er für die Parabel annimmt. Es bestimmen sich so durch eine einfache Hypothesenrechnung die geozentrischen Distanzen und daraus in bekannter Weise die Elemente. Die Idee zu dieser Methode, deren analytische Formulierung wir jetzt vornehmen wollen, rührt von Lambert her*), ihre praktische Ausbildung hat sie durch Olbers**) erfahren, wichtige analytische Verbesserungen haben Gauß***) und Encke†) beigetragen.

Wir gehen aus von der Beziehung zwischen der ersten und dritten geozentrischen Distanz ϱ_1 und ϱ_3, die sich durch Elimination von ϱ_2 aus den Gleichungen für die Bedingung der Ebene ergibt, und die wir bereits in Gl. 13) (Seite 260) aufgestellt haben, nämlich von:

$$[r_1 r_2]\, L_2 \varrho_3 = [r_2 r_3]\, N_2 \varrho_1 - ([r_2 r_3]\, R_1 G_2 - [r_1 r_2]\, R_3 E_2) \qquad 1)$$

Sind *I*, *II*, *III* die drei Erdörter, *1*, *2*, *3* die drei geozentrischen Kometenörter, so erhält man nach der Bedeutung der Koeffizienten L_2, N_2, G_2, E_2 dieselben beziehungsweise aus den Dreiecken *II 2 3*, *II 1 2*, *2 I II*, *2 I III*, wenn man die sin zweier Seiten

*) *Lambert*, Orb. Com. 1761, Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 65.
**) *Olbers*, Methode die Bahn eines Kometen zu berechnen. 1797.
***) *Gauß*, Über den Kometen von 1813; 1813, Werke VI, S. 29.
†) *Encke*, Berliner Jahrbuch für 1833.

mit dem sin des von ihnen eingeschlossenen Winkels multipliziert. Da alle diese Dreiecke die Seite $2\,II$ gemeinsam haben, so hebt sich der sin $2\,II$ aus der Gl. 1) weg und damit der Ort des Punktes 2 in dem durch II und 2 gelegten größten Kreis. Da nun in der Parabel nur 5 Stücke zu bestimmen sind, also auch nur 5 Beobachtungsdaten gegeben zu sein brauchen, so empfiehlt es sich, statt eines der 6 Beobachtungsdaten $\lambda\beta$ zu streichen, wodurch die Ausdrücke unsymmetrisch würden, lediglich die Lage des größten Kreises $II2$ durch seine Neigung J_2 gegen die Ekliptik zu benutzen, die Lage des Punktes 2 in ihm aber unbestimmt zu lassen; mit anderen Worten man benutzt statt λ_2 und β_2 nur J_2, bestimmt durch:

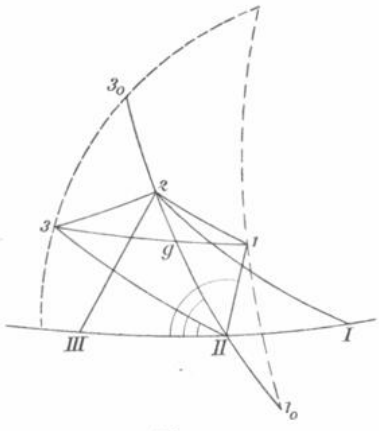

Fig. 53.

$$\operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}. \qquad 2)$$

Da $\sin II2$ aus 1) sich von selbst heraushebt, werden darin dann tatsächlich nur 5 Beobachtungsdaten zur Verwendung gebracht. Nennt man J_1 und J_3 die Neigungen der größten Kreise $II1$ und $II3$ gegen die Ekliptik, so wird

$$\begin{aligned} L_2 &= \sin II2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3) \\ N_2 &= \sin II2 \sin III \sin(J_1 - J_2) \\ G_2 &= \sin II2 \sin(L_2 - L_1) \sin J_2 \\ E_2 &= \sin II2 \sin(L_3 - L_2) \sin J_2 \end{aligned}$$

und daher die Gl. 1), wenn $\sin II2$ weggehoben wird:

$$\begin{aligned} [r_1 r_2] \sin II3 \sin(J_2 - J_3)\varrho_3 = [r_2 r_3] \sin III \sin(J_1 - J_2)\varrho_1 - \\ - ([r_2 r_3] R_1 \sin(L_2 - L_1) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - L_2)) \sin J_2 \end{aligned}$$

oder

$$\varrho_3 = \varrho_1 \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \frac{\sin III \sin(J_1 - J_2)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)} + \frac{\sin J_2}{R_2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left([R_2 R_3] - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} [R_1 R_2] \right).$$

Wir setzen kurz

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m \qquad 3)$$

und diskutieren die beiden Koeffizienten M und m. Der trigonometrische Teil des ersten, nämlich

$$\mathscr{M} = \frac{\sin III \sin(J_1 - J_2)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)}$$

kann sofort einfacher geschrieben werden. Bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt der größten Kreise $II2$ und 13 mit g und den von ihnen gebildeten Winkel mit x, so wird

$$\begin{aligned} \sin III \sin(J_1 - J_2) &= \sin 1g \sin x \\ \sin II3 \sin(J_2 - J_3) &= \sin g3 \sin x \end{aligned}$$

und daher

$$\mathscr{M} = \frac{\sin 1g}{\sin g3},$$

d. h. $\mathscr{F}$ ist gleich dem Verhältnis des Sinus der Abschnitte auf der Strecke 13. Zur Berechnung von $\mathscr{F}$ kann dies nicht dienen. Hierfür ergibt sich aber leicht folgendes: Offenbar ist:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin II1 \sin J_1 = \sin\beta_1 & \sin II2 \sin J_2 = \sin\beta_2 & \sin II3 \sin J_3 = \sin\beta_3 \\ \sin II1 \cos J_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) & \sin II2 \cos J_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) & \sin II3 \cos J_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \end{array} \quad 4)$$

woraus J_1, J_2, J_3, $\sin II1$, $\sin II3$ hervorgehen, während $\sin II2$ nicht gebraucht wird. Unbequemer ist es, $\mathscr{F}$ mit Beachtung von 4) so zu schreiben:

$$\mathscr{F} = \frac{\sin\beta_1 \cos J_2 - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \sin J_2}{-\sin\beta_3 \cos J_2 + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \sin J_2}$$

wobei J_2 noch durch 2) zu berechnen ist. Man kann $\mathrm{tg} J_2$ aber auch durch 2) eliminieren, so daß wird:

$$\mathscr{F} = \frac{\sin\beta_1 \sin(\lambda_2 - L_2) - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \mathrm{tg}\beta_2}{-\sin\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2) + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \mathrm{tg}\beta_2}$$

oder auch:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \cdot \frac{\mathrm{tg}\beta_1 \sin(\lambda_2 - L_2) - \mathrm{tg}\beta_2 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\mathrm{tg}\beta_2 \sin(\lambda_3 - L_2) - \mathrm{tg}\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2)}.$$

Nennt man die Breiten der Punkte, in denen die Breitenkreise von 1 und 3 den größten Kreis $II2$ schneiden, bzw. β_1^0 und β_3^0, so wird:

$$\sin(\lambda_1 - L_2) = \frac{\mathrm{tg}\beta_1^0}{\mathrm{tg} J_2}, \qquad \sin(\lambda_3 - L_2) = \frac{\mathrm{tg}\beta_3^0}{\mathrm{tg} J_2}$$

und daher:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \frac{\mathrm{tg}\beta_1 - \mathrm{tg}\beta_1^0}{\mathrm{tg}\beta_3^0 - \mathrm{tg}\beta_3} = \frac{\cos\beta_3^0}{\cos\beta_1^0} \frac{\sin(\beta_1 - \beta_1^0)}{\sin(\beta_3^0 - \beta_3)},$$

woraus man sieht, da $\mathscr{F}$ stets positiv sein muß, daß 1 und 3 auf verschiedenen Seiten des größten Kreises $II2$ liegen.

Endlich kann man dem $\mathscr{F}$ auch noch folgende Form geben:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)} \frac{\mathrm{tg} J_1 - \mathrm{tg} J_2}{\mathrm{tg} J_2 - \mathrm{tg} J_3},$$

wie sich leicht durch Anwendung von 4) auf die ursprüngliche Form ergibt.

Die zweite Größe m läßt sich so schreiben:

$$m = \frac{\sin J_2 \, [R_1 R_2]}{R_2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right)$$

oder

$$m = \frac{R_1 \sin J_2 \sin(L_2 - L_1)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) \qquad 5)$$

und zeigt so, daß man sie in erster Näherung ganz vernachlässigen kann. In der Tat muß man, auch zur Berechnung von M, von der Reihenentwicklung (Formel 23) Seite 181)

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 \tau_1 \tau_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots \right) \qquad 6)$$

Gebrauch machen und sich auf das erste Glied d. h. auf

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \qquad 7)$$

beschränken, wenn die Bahn noch völlig unbekannt ist; dann aber kann man, meistens mit erhöhtem Recht, auch

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$$

setzen, was $m = 0$ zur Folge hat. Man begeht dadurch einen Fehler zweiter Ordnung, der aber ohnehin in der ersten Näherung unvermeidlich ist, da man M ebenfalls mit 7) berechnen muß. Man erhält somit die einfache Relation:

$$\varrho_3 = M\varrho_1$$

$$M = \frac{\tau_1}{\tau_3}\,\mathscr{D}; \qquad \mathscr{D} = \frac{\sin\beta_1 \cos J_2 - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)\sin J_2}{-\sin\beta_3 \cos J_2 + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}. \qquad 8)$$

Beachtet man den ursprünglichen Wert von $\mathscr{D}$, so wird

$$\varrho_3 = \frac{\sin 1\,g}{\sin g\,3}\,\frac{\tau_1}{\tau_3}\,\varrho_1$$

in welcher Form zuerst Lambert die Gleichung aufgestellt hat (vergl. Nr. 75 Seite 241). Sie wird aber gewöhnlich die Olberssche Gleichung genannt, da auch dieser sie selbständig auffand.

Die Benutzung des Näherungswertes 7) für das Verhältnis der Dreiecksflächen ist offenbar nur bei kleinen Zwischenzeiten gestattet, bei großen würde sie zu völlig illusorischen Resultaten führen, namentlich dann, wenn $\tau_1 + \tau_3$ klein ist. Dagegen bietet sich auch ein einfaches Mittel dar, wodurch man in der Größe der Zwischenzeiten sich etwas weitere Grenzen stecken darf, nämlich das, daß man die Zwischenzeiten möglichst *gleich* wählt. Das zweite Glied in 6) wird dann wegen des Faktors $\tau_1^2 - \tau_3^2$ möglichst unschädlich gemacht, während allerdings das dritte Glied, das häufig nicht viel kleiner ist, als das zweite, nicht vermindert wird, so daß man auch bei streng gleichen Zwischenzeiten diese nicht zu groß wählen darf. Es kommt namentlich auch auf die Größe von $\tau_1 + \tau_3$ an; bei sonnenfernen Kometen werden die vernachlässigten Glieder auch bei größeren Zwischenzeiten klein bleiben, bei sehr sonnennahen aber können sie trotz kleiner und gleicher Zwischenzeiten stark anwachsen, ja sogar den durch 8) erhaltenen Näherungswert in Frage stellen.

Will man den Lambertschen Satz für die parabolische Bewegung als Kriterium einführen, so muß man die darin auftretenden Radienvektoren r_1 und r_3 und die ihre Endpunkte verbindende Sehne s ebenfalls durch ϱ_1 ausdrücken. Dies gelingt wie folgt. Aus den Dreiecken Sonne-Erde-Komet ergibt sich: (Seite 257)

$$r_1^2 = R_1^2 + \varrho_1^2 + 2R_1\varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2R_3\varrho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

oder

$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_1^2 M^2 + 2R_3\varrho_1 M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3).$$

Für die Sehne hat man in rechtwinkligen Koordinaten:

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

oder wenn man die heliozentrischen Erdkoordinaten X, Y, Z, die geozentrischen Kometenkoordinaten ξ, η, ζ nennt, wegen $x = \xi + X, \ldots$:

$$s^2 = (\xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1 + Z_3 - Z_1)^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1, & \xi_3 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 = M\varrho_1 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 \\ \eta_1 &= \varrho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1, & \eta_3 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 = M\varrho_1 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 \\ \zeta_1 &= \varrho_1 \sin\beta_1, & \zeta_3 &= \varrho_3 \sin\beta_3 \quad\; = M\varrho_1 \sin\beta_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1 \cos L_1, & X_3 &= R_3 \cos L_3 \\ Y_1 &= R_1 \sin L_1, & Y_3 &= R_3 \sin L_3 \\ Z_1 &= 0, & Z_3 &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 &= \varrho_1 (M \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \cos\beta_1 \cos\lambda_1) \\ \eta_3 - \eta_1 &= \varrho_1 (M \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - \cos\beta_1 \sin\lambda_1) \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_1 (M \sin\beta_3 - \sin\beta_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_3 - X_1 &= R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1 \\ Y_3 - Y_1 &= R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1 \\ Z_3 - Z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichungen kurz so:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 &= \varrho_1 h \cos\zeta \cos H \\ \eta_3 - \eta_1 &= \varrho_1 h \cos\zeta \sin H \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_1 h \sin\zeta \\ X_3 - X_1 &= g \cos G \\ Y_3 - Y_1 &= g \sin G \end{aligned}$$

so ergeben sich die Hilfsgrößen h, ζ, H, g, G aus:

$$\begin{aligned} h \cos\zeta \cos(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1) - \cos\beta_1 \\ h \cos\zeta \sin(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h \sin\zeta &= M \sin\beta_3 - \sin\beta_1 \\ g \cos(G - L_1) &= R_3 \cos(L_3 - L_1) - R_1 \\ g \sin(G - L_1) &= R_3 \sin(L_3 - L_1) \end{aligned}$$

(h und g positiv)

und für s folgt dann nach Ausführung der Quadrate

$$s^2 = \varrho_1^2 h^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\zeta \cos(H - G).$$

Wird nun noch gesetzt

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) &= \cos\psi_1 \\ \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) &= \cos\psi_3 \\ \cos\zeta \cos(H - G) &= \cos\varphi \end{aligned}$$

so nehmen die aus rein geometrischen Beziehungen hervorgehenden Ausdrücke von r_1, r_3 und s folgende Form an:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \varrho_1^2 + R_1^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos\psi_1 \\ r_3^2 &= M^2\varrho_1^2 + R_3^2 + 2\varrho_1 M R_3 \cos\psi_3 \\ s^2 &= h^2\varrho_1^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\varphi. \end{aligned}$$

Nach einem Kunstgriff von Gauß läßt sich ihre Berechnung aber noch weiter vereinfachen. Es ist nämlich:

$$r_1^2 = (\varrho_1 + R_1 \cos\psi_1)^2 + (R_1 \sin\psi_1)^2 .$$

Wird also

$$R_1 \cos\psi_1 = f_1, \qquad R_1 \sin\psi_1 = l_1$$

gesetzt, so folgt:

$$r_1^2 = (\varrho_1 + f_1)^2 + l_1^2$$
$$= l_1^2 \left(1 + \left(\frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}\right)^2\right)$$

oder wenn ϑ_1 aus:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}$$

berechnet wird:

$$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1 .$$

Ebenso ergibt sich für r_3 und s:

$\frac{R_3 \cos\psi_3}{M} = f_3$	$\frac{g\cos\varphi}{h} = f$
$\frac{R_3 \sin\psi_3}{M} = l_3$	$\frac{g\sin\varphi}{h} = l$
$\frac{\varrho_1 + f_3}{l_3} = \operatorname{tg}\vartheta_3$	$\frac{\varrho_1 + f}{l} = \operatorname{tg}\vartheta$
$r_3 = M l_3 \sec\vartheta_3$	$s = hl \sec\vartheta .$

r_1, r_3 und s sind jetzt durch ϱ_1 ausgedrückt und man könnte durch Eintragung ihrer Werte in die Lambertsche Gleichung für die Parabel (Seite 193)

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}$$

eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten ϱ_1 aufstellen. Die Auflösung dieser Gleichung würde aber bedeutende Schwierigkeiten verursachen und auch nur auf dem Wege der sukzessiven Annäherung gelingen. Man zieht es daher vor mit einem hypothetischen Werte von ϱ_1 r_1, r_3 und s zu rechnen, diese in die Lambertsche Gleichung einzutragen und zu sehen, ob sie mit dem beobachteten Werte der Zwischenzeit übereinstimmen; ϱ_1 ist so lange unter Anwendung der regula falsi zu variieren, bis Übereinstimmung erzielt ist. Noch einfacher ist es, die Sehne s mit Benutzung der Enckeschen Umformung (Seite 194) aus der Lambertschen Gleichung zu ermitteln und diesen gewissermaßen dynamischen Wert derselben mit dem geometrischen zu vergleichen. Die Hypothese für ϱ_1 ist richtig, wenn die beiden übereinstimmen. Die Rechnung für den aus der parabolischen Bewegung folgenden Wert für s vollzieht sich nach Gl. 12) (Seite 195), nämlich

$$\eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \log 2k = 8.536\,6114$$

$$s = (r_1 + r_3)\eta\mu$$

μ mit Arg. η aus Taf. XXII.

Hat die Hypothesenrechnung den richtigen Wert von ϱ_1 und damit von ϱ_3 ergeben, so erhält man aus den vollständigen geozentrischen Koordinaten ϱ, λ, β die heliozentrischen Polarkoordinaten r, l, b durch:

$$\begin{aligned} r\cos b\cos l &= \varrho\cos\beta\cos\lambda + R\cos L \\ r\cos b\sin l &= \varrho\cos\beta\sin\lambda + R\sin L \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

oder bequemer durch:

$$\begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L) + R \\ r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L) \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

und dann die fünf Elemente der Parabel durch eine der in Nr. 58 und 69 angegebenen Methoden, deren beste in folgender Übersicht aufgenommen sind.

114. Führung der Hypothesenrechnung. Kontrollen. Über die zweckmäßigste Führung der Hypothesenrechnung ist eine Anmerkung zu machen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei Neuentdeckungen von Kometen in der Regel $r_1 + r_3$ zwischen 1 und 3 liegt, also rund $r_1 + r_3 = 2$ ist. Mit der Lambertschen Gleichung

$$s = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{r_1 + r_3}}\,\mu,$$

in der man μ näherungsweise gleich 1 setzen darf, findet man dann s durch:

$$(s) = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{2}}$$

und ferner

$$\sec(\vartheta) = \frac{(s)}{hl}, \qquad \varrho_1' = l\,\mathrm{tg}(\vartheta) - f,$$

womit man die Hypothesenrechnung beginnt. Die Korrektionen hierfür ermittelt man durch Anwendung der regula falsi in folgender Weise. Es seien ϱ', $\varrho' + \Delta'\varrho$, $\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho$, ... die aufeinanderfolgenden Werte von ϱ, mit denen man die Hypothesen rechnet und p, $p + \Delta' p$, $p + \Delta' p + \Delta'' p$, ... seien die zugehörigen Unterschiede des geometrischen und dynamischen Wertes der Sehne: $s_g - s_d$, dann setze man folgendes Schema an:

	Arg.	$s_g - s_d$	1. Diff.	2. Diff.
I. Hyp.	ϱ'	p		
			$\frac{\Delta' p}{\Delta'\varrho}$	
II. »	$\varrho' + \Delta'\varrho$	$p + \Delta' p$		$\frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta' p}{\Delta'\varrho}$
			$\frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho}$	
III. »	$\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho$	$p + \Delta' p + \Delta'' p$		$\frac{\Delta''' p}{\Delta'''\varrho} - \frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho}$
			$\frac{\Delta''' p}{\Delta'''\varrho}$	
IV. »	$\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho + \Delta'''\varrho$	$p + \Delta' p + \Delta'' p + \Delta''' p$		

Nach Durchrechnung der beiden ersten Hypothesen erhält man daraus als Bedingung der regula falsi für die dritte:

$$\frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} = \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho} \quad \text{und} \quad p + \Delta'p + \Delta''p = 0$$

somit

$$\Delta''\varrho = -\frac{p + \Delta'p}{\frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho}}.$$

Nach Erledigung von drei Hypothesen kann man einen proportionalen Verlauf der ersten Differenzen als Bedingung setzen d. h. man erhält für die vierte Hypothese:

$$\frac{\Delta'''p}{\Delta'''\varrho} - \frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} = \frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho} \quad \text{und} \quad p + \Delta'p + \Delta''p + \Delta'''p = 0$$

woraus:

$$\Delta'''\varrho = -\frac{p + \Delta'p + \Delta''p}{2\frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho}} \quad \text{usf.}$$

Man wird nur selten mehr als vier Hypothesen nötig haben.

Endlich muß auf einige Kontrollen aufmerksam gemacht werden. Die bei Berechnung der heliozentrischen Örter sich ergebenden Radienvektoren r_1 und r_3 müssen mit den bei der letzten Hypothese verwendeten übereinstimmen. Nach Berechnung der Argumente der Breite u_1 und u_3 wird der von den Radienvektoren eingeschlossene Winkel $u_3 - u_1$ bekannt und kann zu einer durchgreifenden Kontrolle benutzt werden. In dem von r_1, r_3, s gebildeten Dreieck muß nämlich sein:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{\sigma(\sigma - s)}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r_1}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{r_3}{\sigma}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)}}$$

oder auch

$$\sin \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{r_1 r_3}},$$

wenn

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3 + s)$$

gesetzt wird.

Endlich kann man die Durchgangszeit durchs Perihel aus beiden Beobachtungszeiten t_1 und t_3 ableiten, wobei sich völlige Übereinstimmung herausstellen muß.

Über die Kontrolle, die man durch die Berechnung des mittleren Ortes erlangt und die dadurch ermöglichten Verbesserungen der Bahn wird weiter unten gesprochen werden.

115. Übersicht der Formeln zur Berechnung einer ersten parabolischen Bahn. Betreffs der Vorbereitung der Beobachtungen gilt das in Nr. 87 Gesagte.

	Daten.			
	Des Kometen		Der Erde	
Beob. Zeit	Länge	Breite	Länge	Log R
t_1	λ_1	β_1	L_1	R_1
t_2	λ_2	β_2	L_2	R_2
t_3	λ_3	β_3	L_3	R_3.

A. Konstante Hilfsgrößen.

I.
$$\begin{array}{l|l|l} A\sin J_1 = \sin\beta_1 & B\sin J_2 = \sin\beta_2 & C\sin J_3 = \sin\beta_3 \\ A\cos J_1 = \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_2) & B\cos J_2 = \cos\beta_2\sin(\lambda_2 - L_2) & C\cos J_3 = \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2) \end{array}$$

A, C positiv; B wird nicht gebraucht.

$$\mathfrak{M} = \frac{A\sin(J_1 - J_2)}{C\sin(J_2 - J_3)}; \quad M = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\mathfrak{M}.$$

II.
$$\begin{aligned} h\cos\zeta\cos(H - \lambda_1) &= M\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - \lambda_1) - \cos\beta_1 \\ h\cos\zeta\sin(H - \lambda_1) &= M\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h\sin\zeta &= M\sin\beta_3 - \sin\beta_1 \\ g\cos(G - L_1) &= R_3\cos(L_3 - L_1) - R_1 \\ g\sin(G - L_1) &= R_3\sin(L_3 - L_1) \end{aligned}$$

h und g positiv.

$$\begin{aligned} \cos\psi_1 &= \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\psi_3 &= \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) \\ \cos\varphi &= \cos\zeta\cos(H - G) \end{aligned}$$

ψ_1, ψ_3, φ sind kleiner als 180°.

III.
$$\begin{array}{l|l|l} f_1 = R_1\cos\psi_1 & f_3 = \dfrac{R_3\cos\psi_3}{M} & f = \dfrac{g\cos\varphi}{h} \\ l_1 = R_1\sin\psi_1 & l_3 = \dfrac{R_3\sin\psi_3}{M} & l = \dfrac{g\sin\varphi}{h}. \end{array}$$

B. Hypothesenrechnung.

IV.
$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}\vartheta_1 = \dfrac{\varrho_1 + f_1}{l_1}, & \operatorname{tg}\vartheta_3 = \dfrac{\varrho_1 + f_3}{l_3}, & \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{\varrho_1 + f}{l}, \\ r_1 = l_1\sec\vartheta_1, & r_3 = l_3 M\sec\vartheta_3, & s_g = lh\sec\vartheta \end{array}$$

$$\eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \log 2k = 8.536611_{-10}$$

$$s_d = (r_1 + r_3)\eta\mu$$

μ mit Arg. η aus Taf. XXII.

ϱ_1 wird so lange variiert, bis $s_g = s_d$ sich ergibt.

(Siehe obige Anleitung zur Hypothesenrechnung.)

C. Bestimmung der Elemente.

V.
$$\varrho_3 = M\varrho_1$$

$$\begin{aligned} r_1\cos b_1\cos(l_1 - L_1) &= \varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) + R_1 \\ r_1\cos b_1\sin(l_1 - L_1) &= \varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_1) \\ r_1\sin b_1 &= \varrho_1\sin\beta_1 \\ r_3\cos b_3\cos(l_3 - L_3) &= \varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) + R_3 \\ r_3\cos b_3\sin(l_3 - L_3) &= \varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_3) \\ r_3\sin b_3 &= \varrho_3\sin\beta_3. \end{aligned}$$

Probe: r_1 und r_3 müssen identisch mit den bei der letzten Hypothese benutzten sich ergeben.

Ist $l_3 - l_1 > 0$, dann ist $i < 90°$
» $l_3 - l_1 < 0$, » » $i > 90°$.

VI.
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)}{\cos i} = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin i \cos(l_1 - \Omega)}$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)}{\cos i} = \frac{\operatorname{tg} b_3}{\sin i \cos(l_3 - \Omega)}.$$

Ist die Breite positiv, so liegt u zwischen 0° und 180°; ist sie negativ, zwischen 180° und 360°.

Probe: $\sigma = \frac{1}{2}(r_1 + r_3 + s)$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{\sigma(\sigma - s)}}$.

VII.
$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{r_3}}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)$$
$$\omega = u_1 - v_1 \qquad v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$$
$$\pi = \omega + \Omega.$$

Man entnehme mit Arg. v_1 und v_3 aus der Barkerschen Tafel M_1 und M_3, dann wird
$$T = t_1 - \frac{M_1 q^{\frac{3}{2}}}{C} = t_3 - \frac{M_3 q^{\frac{3}{2}}}{C}$$
$$\log C = 9.960\,1277$$
oder bei Benutzung von Tafel XV $C = 1$.

Elemente:

Perihelzeit	T	
Abstand des Perihels vom Knoten	ω	Ekliptik und Äqu. des Jahresanfanges
Länge des Knotens	Ω	
Neigung	i	
log der Periheldistanz	$\log q$	

D. Darstellung des mittleren Ortes.

VIII. Mit $M_2 = \frac{C(t_2 - T)}{q^{\frac{3}{2}}}$ entnehme man der Barkerschen Tafel v_2.
$$r_2 = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v_2}, \qquad u_2 = v_2 + \omega$$
$$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - \Omega) = r_2 \cos u_2 - R_2 \cos(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega) = r_2 \sin u_2 \cos i - R_2 \sin(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2 \sin\beta_2 = r_2 \sin u_2 \sin i.$$

116. Beispiel einer ersten parabolischen Bahn. Wir wählen zur Erläuterung der Olbersschen Methode die Berechnung der Bahn des Kometen 1896 IV (Sperra) und legen folgende den Astr. Nachr. entnommenen Beobachtungen zugrunde, wobei wir die Beobachtungszeiten gleich auf den Berliner Meridian und die Örter auf den Jahresanfang reduziert angeben:

Komet 1896 IV.

		M. Z. Berlin	α 1896.0	δ 1896.0	
1896	Sept. 7	$10^h\ 8^m\ 32^s$	$13^h\ 55^m\ 32^s.46$	$+55^\circ\ 21'\ 5''.5$	München
	» 10	8 35 42	14 16 7.45	+54 52 41.0	Teramo
	» 13	9 55 30	14 37 17.12	+54 11 24.4	Straßburg.

Von einer Berücksichtigung der Aberration und Parallaxe soll, wie immer bei ersten Kometenbahnen, Abstand genommen werden. Die Umwandlung in Längen und Breiten, sowie die Interpolation der Erdörter ergab folgende der Bahnbestimmung zugrunde liegende Daten:

Komet 1896 IV (Sperra).

1896 M. Z. Berlin.

t_1	Sept. 7.42 259	λ_1	$171^\circ 22' 49''.4$	β_1	$+59^\circ 46' 6''.8$	L_1	$345^\circ 41' 26''.2$	R_1	0.00 3027
t_2	10.35 812	λ_2	176 22 51.9	β_2	+61 27 43.8	L_2	348 32 48.8	R_2	0.00 2690
t_3	13.41 354	λ_3	182 11 53.2	β_3	+63 3 56.7	L_3	351 31 26.2	R_3	0.00 2327

A. Hilfsgrößen.

I.	$\sin\beta_1$	9.93 6513	$\sin\beta_2$	9.94 3743	$\sin\beta_3$	9.95 0134	λ_1-L_2	$182^\circ 50' 0''.6$
	$\cos\beta_1$	9.70 1995	$\cos\beta_2$	9.67 9191	$\cos\beta_3$	9.65 6068	λ_2-L_2	187 50 3.1
	$\sin(\lambda_1-L_2)$	$8.69\,4024_n$	$\sin(\lambda_2-L_2)$	$9.13\,4517_n$	$\sin(\lambda_3-L_2)$	$9.37\,2932_n$	λ_3-L_2	193 39 4.4
	$A\cos J_1$	$8.39\,6019_n$	$B\cos J_2$	$8.81\,3708_n$	$C\cos J_3$	$9.02\,9000_n$	J_1	91 39 0.34
	$\sin J_1$	9.99 9820	$\sin J_2$	9.99 8810	$\sin J_3$	9.99 6900	J_2	94 14 21.48
	$\operatorname{tg} J_1$	$1.54\,0494_n$	$\operatorname{tg} J_2$	$1.13\,0035_n$	$\operatorname{tg} J_3$	$0.92\,1134_n$	J_3	96 50 16.29
	A	9.93 6693	$A:C$	9.98 3459	C	9.95 3234	J_1-J_2	−2 35 21.14
	$\sin(J_1-J_2)$	$8.65\,4896_n$	sin : sin	9.99 8435	$\sin(J_2-J_3)$	$8.65\,6461_n$	J_2-J_3	−2 35 54.81
			$\mathfrak{C}$	9.98 1894	M	9.99 9278		
	$M\sin\beta_3$	9.94 9412	$r_1:r_3$	0.01 7384	$M\cos\beta_3$	9.65 5346		
II.	—	9.64 7559	$R_3\cos(L_3-L_1)$	0.00 0072	$\cos(\lambda_1-L_1)$	$9.99\,7855_n$	t_3-t_2	0.48 5071
	$h\cos\zeta\sin(H-\lambda_1)$	8.92 8776	R_1	0.00 3027	$\cos(\lambda_3-L_3)$	$9.99\,2419_n$	t_2-t_1	0.46 7687
	$h\cos\zeta\cos(H-\lambda_1)$	$8.77\,3159_n$	$g\sin(G-L_1)$	9.00 9371	$\cos(H-G)$	$9.90\,3408_n$		
	sin »	9.91 3641	$g\cos(G-L_1)$	$7.83\,4358_n$	$\cos\psi_1$	$9.69\,9850_n$	$\lambda_3-\lambda_1$	$10^\circ 49' 3''.8$
	$\operatorname{tg}(H-\lambda_1)$	$0.15\,5617_n$	$\sin(G-L_1)$	9.99 9033	$\cos\psi_3$	$9.64\,8487_n$	sin »	9.27 3430
	$H-\lambda_1$	$124^\circ 56' 51''.8$	tg »	$1.17\,5013_n$	$\cos\varphi$	$9.89\,0085_n$	cos »	9.99 2213
	$h\sin\zeta$	8.41 5753	$G-L_1$	$93^\circ 49' 24''.7$	$\sin\psi_1$	9.93 7236	L_3-L_1	$5^\circ 50' 0''.0$
	$h\cos\zeta$	9.01 5135	g	9.01 0338	$\sin\psi_3$	9.95 2049	sin »	9.00 7044
	$\cos\zeta$	9.98 6677			$\sin\varphi$	9.79 9507	cos »	9.99 7745
	$\operatorname{tg}\zeta$	9.40 0618	H	$296^\circ 19' 41''.2$				
	ζ	$14^\circ 7' 10''.6$	G	79 30 50.9	$R_3:M$	0.00 3049	λ_1-L_1	$185^\circ 41' 23''.2$
	h	9.02 8458	$H-G$	216 48 50.3	$g:h$	9.98 1880	λ_3-L_3	190 40 27.0
III.	l_1	9.94 0263	l_3	9.95 5098	l	9.78 1387	t_3-t_1	0.77 7496
	f_1	$9.70\,2877_n$	f_3	$9.65\,1536_n$	f	$9.87\,1965_n$	$2k(t_3-t_1)$	9.31 4107
			l_3M	9.95 4376	lh	8.80 9845		
	f_1	− 0.50 4519	f_3	− 0.44 8266	f	− 0.74 4672		

B. Hypothesenrechnung.

IV.		I.	II.	III.	IV.
	ϱ_1	+ 1.96 8850	+ 1.66 8850	+ 1.68 2778	+ 1.68 2895
	$\varrho_1 + f_1$	+ 1.46 4331	+ 1.16 4331	+ 1.17 8259	+ 1.17 8376
	$\varrho_1 + f_3$	+ 1.52 0584	+ 1.22 0584	+ 1.23 4512	+ 1.23 4629
	$\varrho_1 + f$	+ 1.22 4178	+ 0.92 4178	+ 0.93 8106	+ 0.93 8223
log	$\varrho_1 + f_1$	0.16 5639	0.06 6076	0.07 1241	0.07 1284
log	$\varrho_1 + f_3$	0.18 2010	0.08 6567	0.09 1495	0.09 1536
log	$\varrho_1 + f$	0.08 7844	9.96 5756	9.97 2252	9.97 2306
	tg ϑ_1	0.22 5376	0.12 5814	0.13 0978	0.13 1021
	tg ϑ_3	0.22 6912	0.13 1469	0.13 6397	0.13 6438
	tg ϑ	0.30 6457	0.18 4369	0.19 0865	0.19 0919
	sec ϑ_1	0.29 1213	0.22 2409	0.22 5733	0.22 5761
	sec ϑ_3	0.29 2353	0.22 6051	0.22 9252	0.22 9278
	sec ϑ	0.35 3838	0.26 1706	0.26 6276	0.26 6315
	r_1	0.23 1476	0.16 2672	0.16 5996	0.16 6024
	r_3	0.24 6729	0.18 0427	0.18 3628	0.18 3654
	Add.	0.29 3470	0.29 2243	0.29 2303	0.29 2304
	s_g	9.16 3683	9.07 1551	9.07 6121	9.07 6160
	$r_1 + r_3$	0.54 0199	0.47 2670	0.47 5931	0.47 5958
	$(r_1 + r_3)^{\frac{1}{2}}$	0.27 0099	0.23 6335	0.23 7965	0.23 7979
	$(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	0.81 0298	0.70 9005	0.71 3896	0.71 3937
	η	8.50 3809	8.60 5102	8.60 0211	8.60 0170
	μ	0.00 0018	0.00 0029	0.00 0029	0.00 0029
	s_d	9.04 4026	9.07 7801	9.07 6171	9.07 6157
Zahlen	s_g	+ 0.14 5775	+ 0.11 7910	+ 0.11 9157	
Zahlen	s_d	+ 0.11 0669	+ 0.11 9619	+ 0.11 9171	
	$s_g - s_d$	+ 0.03 5106	− 0.00 1709	− 0.00 0014	
		$\Delta' p$ − 0.03 6815	$\frac{\Delta' p}{\Delta' \varrho}$ 9.08 890	$\Delta'' p$ + 0.00 1695	2 $\frac{\Delta'' p}{\Delta'' \varrho}$ 9.3862
		$\Delta' \varrho$ − 0.3	$\Delta'' \varrho$ + 0.01 3928	$\Delta''' \varrho$ = + 0.00 0117	

C. Bestimmung der Elemente.

V.				VI.				
	ϱ_1	0.22 6057	ϱ_3	0.22 5335	$l_3 - l_1$	+ 4° 16′ 57″.9	tg u_1	0.90 7225$_n$
	$\cos(\lambda_1 - L_1)$	9.99 7855$_n$	$\cos(\lambda_3 - L_3)$	9.99 2419$_n$	sin »	8.87 3195	tg u_3	0.71 1872$_n$
	$\varrho_1 \cos\beta_1$	9.92 8052	$\varrho_3 \cos\beta_3$	9.88 1403	cos »	9.99 8787	u_1	97° 3′ 29″.5
	$\sin(\lambda_1 - L_1)$	8.99 6259$_n$	$\sin(\lambda_3 - L_3)$	9.26 7696$_n$	tg b_3	0.70 7762	u_3	100 59 13.4
						9.73 5157		
		9.92 5907		9.87 3822$_n$	$-\mathrm{tg}\, b_1 \cos(l_3 - l_1)$	0.89 6254$_n$	Probe:	
	R_1	0.00 3027	R_3	0.00 2327		0.44 2919$_n$	$u_3 - u_1$	3° 55′ 43″.9
	$r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1)$	8.92 4311$_n$	$r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3)$	9.14 9099$_n$	tg i sin $(l_1 - \Omega)$	0.89 7467	$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1 57 51.95
	$r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1)$	9.21 4419	$r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3)$	9.41 0794	tg i cos $(l_1 - \Omega)$	1.56 9724$_n$	r_1	+ 1.46 5630
	$\cos(l_1 - L_1)$	9.94 9316	$\cos(l_3 - L_3)$	9.94 3087	cos $(l_1 - \Omega)$	9.99 0393$_n$	r_3	+ 1.52 6350
	$\mathrm{tg}(l_1 - L_1)$	9.70 9892$_n$	$\mathrm{tg}(l_3 - L_3)$	9.73 8305$_n$	tg $(l_1 - \Omega)$	9.32 7743$_n$	s	+ 0.11 9168
	$l_1 - L_1$	332° 51′ 15″.3	$l_3 - L_3$	331° 18′ 13″.2	$l_1 - \Omega$	167° 59′ 34″.1		+ 3.11 1148
	$r_1 \sin b_1$	0.16 2570	$r_3 \sin b_3$	0.17 5469	tg i	1.57 9331	σ	+ 1.55 5574
	$r_1 \cos b_1$	9.26 5103	$r_3 \cos b_3$	9.46 7707	i	88° 29′ 27″.6	$\sigma - r_1$	8.95 3967
	$\sin b_1$	9.99 6546	$\sin b_3$	9.99 1815	Ω	150 33 7.4	$\sigma - r_3$	8.46 5740
	tg b_1	0.89 7467	tg b_3	0.70 7762	$l_3 - \Omega$	172 16 32.0	σ	0.19 1891
	b_1	+ 82° 46′ 59″.2	b_3	+ 78° 54′ 39″.8	cos »	9.99 6041$_n$	$\sigma - s$	0.15 7277
	r_1	0.16 6024	r_3	0.18 3654	sin i	9.99 9849		7.07 0539
	l_1	318° 32′ 41″.5	l_3	322° 49′ 39″.4	$\sin i \cos(l_1 - \Omega)$	9.99 0242$_n$	$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	8.53 5269
	$\sqrt{r_1}$	0.08 3012	$\sqrt{r_3}$	0.09 1827	$\sin i \cos(l_3 - \Omega)$	9.99 5890$_n$	$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1° 57′ 51″.70

VII. cotg $\frac{1}{2}(u_3-u_1)$	1.46 4716	$\sin \frac{1}{2}v_1 : \sqrt{q}$	9.67 2144	$q^{\frac{3}{2}}$	0.06 6288		
cosec »	1.46 4971	$\cos \frac{1}{2}v_1 : \sqrt{q}$	9.91 6988	M_1	1.71 4606		
	1.38 1704	$\cos \frac{1}{2}v_1$	9.93 9084	M_3	1.75 5693	Elemente:	
	1.37 3144	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1$	9.75 5156		1.78 0894	T 1896 Juli 9.0423	
	8.29 9000	$\frac{1}{2}v_1$	29° 38′ 32″.4		1.82 1981	ω 37° 46′ 24″.6	
		v_1	59 17 4.9		60.38 014	Ω 150 33 7.4	1896 0
		v_3	63 12 48.8		66.37 143	i 88 29 27.6	
		ω	37 46 24.6	T	Juli 9.0424	$\log q$ 0.04 4192	
		$\sqrt{q}$	0.02 2096	T	» 9.0421		
		q	0.04 4192				

D. Darstellung des mittleren Ortes.

$t_2 - T$	+63.3158	$\cos u_2$	9.19 5437$_n$		9.37 0105$_n$	$\varrho_2 \sin \beta_2$	0.16 9109
»	1.80 1512	$\sin u_2$	9.99 4592		9.98 0909	$\varrho_2 \cos \beta_2$	9.90 4558
M_2	1.73 5224	$r_2 \cos u_2$	9.37 0105$_n$		8.58 9778	$\sin \beta_2$	9.94 3742
v_2	61° 14′ 58″.6	$r_2 \sin u_2$	0.16 9260		9.49 2552	$\operatorname{tg} \beta_2$	0.26 4551
$\frac{1}{2}v_2$	30 37 29.3	$\sin i$	9.99 9849	$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\Omega)$	9.54 3740	β_2	61° 27′ 43″.6
$\cos \frac{1}{2}v_2^2$	9.86 9524	$\cos i$	8.42 0518	$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2-\Omega)$	9.85 8846	ϱ_2	0.22 5367
r_2	0.17 4668	$L_2 - \Omega$	197° 59′ 41″.4	$\cos(\lambda_2 - \Omega)$	9.95 4288	λ_2	176° 22′ 53″.6
u_2	99° 1′ 23″.2	sin »	9.48 9862$_n$	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \Omega)$	9.68 4894	Beob. — Rechn.	
		cos »	9.97 8219$_n$	$\lambda_2 - \Omega$	25° 49′ 46″.2	$\Delta\lambda$ — 1″.7	$\Delta\beta$ + 0″.2
		R_2	0.00 2690			$\Delta\lambda \cos\beta''$ = — 0″.8	

117. Eine andere Form der Hypothesenrechnung. Statt ϱ_1 willkürlich zu variieren, kann man die Formeln der Hypothesenrechnung auch leicht derartig umstellen, daß die Schlußwerte einer Hypothese die Anfangswerte für die nächste liefern — ein Verfahren, das jede Überlegung über Größe und Sinn der Variation unnötig macht, allerdings aber manchmal geringe Konvergenz besitzt. Dieses Verfahren ist von *Encke* (Berl. Jahrbuch für 1833, S. 279) angegeben und von *Watson*, *Oppolzer*, *Weiß* u. a. empfohlen worden. Als zu variierende Unbekannte wird $r_1 + r_3$ eingeführt, hierdurch mittels des Lambertschen Satzes s und dann ϱ_1 ausgedrückt, aus diesem r_1 und r_3 berechnet, worauf mit $r_1 + r_3$ die Rechnung von neuem durchgeführt wird, bis sie steht. An Stelle der Formeln IV (Seite 357) treten dann folgende, die sich derselben Hilfsgrößen bedienen:

IV^a. Mit dem Arg. $\eta = \dfrac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \log 2k = 8.53\,6611_{-10}$

wird μ der Tafel XXII entnommen;

$$s = (r_1 + r_3)\,\eta\,\mu$$

$$\cos\vartheta = \frac{lh}{s}$$

$$\varrho_1 = l \operatorname{tg}\vartheta - f$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_1 + f_3}{l_3}$$

$$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1, \qquad r_3 = l_3 M \sec\vartheta_3$$

Mit $r_1 + r_3$ beginnt die nächste Hypothese. Die erste Hypothese wird man wieder mit $r_1 + r_3 = 2$ beginnen. Reicht man mit drei Hypothesen nicht aus, so führt folgendes einfache Interpolationsverfahren rasch zum Ziel. Es sei $x_0 = \log(r_1 + r_3)$

der Ausgangswert der ersten Hypothese, x_1 der Endwert derselben, also der Ausgangswert der zweiten Hypothese, x_2 der Endwert dieser und Anfangswert der dritten, schließlich x_3 der Endwert der dritten. Nennt man nun der Reihe nach dx_0, dx_1, dx_2, dx_3 die Korrektionen, die zu bzw. x_0, x_1, x_2, x_3 hinzuzufügen sind, um den wahren Wert von $\log(r_1 + r_3)$ zu erhalten, so daß

$$x_0 + dx_0 = x_1 + dx_1 = x_2 + dx_2 = x_3 + dx_3$$

wird, so kann man setzen

$$\begin{aligned} dx_1 &= -q\,dx_0 \\ dx_2 &= -q\,dx_1 \\ dx_3 &= -q\,dx_2 \end{aligned}$$

wo q ein nahezu konstanter Faktor ist, dessen analytischer Ausdruck leicht durch Differenziation der Gleichungen IV^a erhalten wird. Bildet man also das Differenzenschema:

$$\begin{array}{lll} x_1 & & \\ & \Delta x_1 & \\ x_2 & & \Delta'' x_1 \\ & \Delta x_2 & \\ x_3 & & \end{array}$$

so wird nahe:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= (1+q)\,dx_1 \\ \Delta x_2 &= -(1+q)\,q\,dx_1 \\ \Delta'' x_1 &= -(1+q)^2\,dx_1 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta'' x_1} \\ dx_3 &= -\frac{(\Delta x_2)^2}{\Delta'' x_1}\,. \end{aligned}$$

Hiervon wird dx_3 in der Regel der kleinere Wert sein; man wird daher mit $x_3 + dx_3$ für $r_1 + r_3$ die vierte Hypothese beginnen und damit meistens das Ziel erreicht haben. Da

$$q = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

bekannt ist, so kann man gegebenen Falls die fünfte Hypothese mit

$$\log(r_1 + r_3) = X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1+q} = X_1 + \frac{X_0 - X_1}{1+q}\,q$$

rechnen, wo X_0 und X_1 Anfangs- und Endwert der vierten Hypothese sind.

Zur Erläuterung des Verfahrens sei die Hypothesenrechnung der schon oben behandelten Kometenbahn (Seite 360) hier vollständig durchgeführt. Da die sukzessiven Werte von $\log(r_1 + r_3)$ abwechselnd größer und kleiner als der wahre Wert sich ergeben (was sich leicht aus obigen Formeln erklärt und allgemein gilt) ist die Konvergenz eine geringe und nur die Anwendung des Interpolationsverfahrens ließ das Ziel rasch erreichen.

f_1	− 0.50 4519	f_3	− 0.44 8266	f	− 0.74 4672
l_1	9.94 0263	l_3	9.95 5098	l	9.78 1387
$2k(t_3 - t_1)$	9.31 4107	Ml_3	9.95 4376	lh	8.80 9845

	I.	II.	III.	IV.	V.
$r_1 + r_3$	0.30 1030	0.54 0205	0.45 3208	0.47 6013	0.47 5957
$(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	0.45 1545	0.81 0307	0.67 9812	0.71 4020	0.71 3936
η	8.86 2562	8.50 3800	8.63 4295	8.60 0087	8.60 0171
μ	0.00 0096	0.00 0018	0.00 0033	0.00 0029	0.00 0029
s	9.16 3688	9.04 4023	9.08 7536	9.07 6129	9.07 6157
$\cos\vartheta$	9.64 6157	9.76 5822	9.72 2309	9.73 3716	9.73 3688
$\operatorname{tg}\vartheta$	0.30 6464	0.14 3908	0.20 6849	0.19 0876	0.19 0916
$l\operatorname{tg}\vartheta$	0.08 7851	9.92 5295	9.98 8236	9.97 2263	9.97 2303
ϱ_1	+ 1.96 8869	+ 1.58 6639	+ 1.71 7948	+ 1.68 2802	+ 1.68 2888
$\varrho_1 + f_1$	0.16 5645	0.03 4275	0.08 4014	0.07 1250	0.07 1282
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	0.22 5382	0.09 4012	0.14 3751	0.13 0987	0.13 1019
$\varrho_1 + f_3$	0.18 2016	0.05 6285	0.10 3695	0.09 1504	0.09 1534
$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.22 6918	0.10 1187	0.14 8597	0.13 6406	0.13 6436
$\sec\vartheta_1$	0.29 1222	0.20 2569	0.23 4075	0.22 5739	0.22 5758
$\sec\vartheta_3$	0.29 2357	0.20 6950	0.23 7283	0.22 9258	0.22 9277
r_1	0.23 1485	0.14 2832	0.17 4338	0.16 6002	0.16 6021
r_3	0.24 6733	0.16 1326	0.19 1659	0.18 3634	0.18 3653
Add.	0.29 3472	0.29 1882	0.29 2456	0.29 2303	0.29 2303

x_1	0.54 0205			
x_2	0.45 3208	− 8 6997	+ 11 7904	$dx_3 = -0.00\,8102$
x_3	0.48 4115	+ 3 0907		

$\log q$	9.5506	X_0	0.47 6013	− 76	1.8808_n
$\log(1+q)$	0.1320	X_1	0.47 5937		1.7488_n
					− 56

Wie erwähnt, kann man für q einen analytischen Ausdruck aufstellen; benutzt man diesen zur numerischen Berechnung von q, so kann man nach Durchrechnung jeder Hypothese für die nächste einen Wert von $r_1 + r_3$ als Anfangswert einführen, der der Wahrheit näher liegen wird, als der Endwert der ersten, nämlich den Wert

$$\log(r_1 + r_3) = X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1 + q},$$

wo X_0 und X_1 Anfangs- und Endwert von $\log(r_1 + r_3)$ bei der ersten Hypothese sind.

Um den Ausdruck von q zu ermitteln, variieren wir $r_1 + r_3$ um $d(r_1 + r_3)$; die hieraus sich ergebende Änderung der Sehne s folgt durch Differenziation des Eulerschen Satzes, nämlich:

$$\sqrt{r_1 + r_3 + s}\,(d(r_1 + r_3) + ds) - \sqrt{r_1 + r_3 - s}\,(d(r_1 + r_3) - ds) = 0$$

oder:

$$(\sqrt{r_1 + r_3 + s} + \sqrt{r_1 + r_3 - s})\,ds = -(\sqrt{r_1 + r_3 + s} - \sqrt{r_1 + r_3 - s})\,d(r_1 + r_3).$$

Führt man hier den auch schon früher gebrauchten Winkel γ durch:

$$\sin\gamma = \frac{s}{r_1 + r_3} = \eta\mu$$

ein, so wird einfach:

$$ds = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\, d(r_1 + r_3). \qquad \text{(a)}$$

Um andererseits die Änderung zu erfahren, welche eine Variation von s in dem geometrischen Werte von $r_1 + r_3$ veranlaßt, hat man durch Differenziation der letzten Gleichungen in IV[a]:

$$dr_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_1^{\,2}}\, l_1 d\vartheta_1, \qquad dr_3 = \frac{\sin\vartheta_3}{\cos\vartheta_3^{\,2}}\, l_3 M d\vartheta_3$$

$$d\varrho_1 = \frac{l_1}{\cos\vartheta_1^{\,2}}\, d\vartheta_1 = \frac{l_3}{\cos\vartheta_3^{\,2}}\, d\vartheta_3 = \frac{l}{\cos\vartheta^2}\, d\vartheta;$$

also

$$dr_1 = d\varrho_1 \cdot \sin\vartheta_1, \qquad dr_3 = d\varrho_1 \cdot M\sin\vartheta_3$$

$$d(r_1 + r_3) = (\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\, d\varrho_1;$$

ferner:

$$ds = lh\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta^2}\, d\vartheta = h\sin\vartheta\, d\varrho_1,$$

also:

$$d(r_1 + r_3) = (\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{ds}{h\sin\vartheta}. \qquad \text{(b)}$$

Aus der Verbindung von (a) und (b) erkennt man, daß eine Änderung des Anfangswertes von $r_1 + r_3$ in einer Hypothese um $d(r_1 + r_3)_a$ im Endwert $(r_1 + r_3)_e$ eine Änderung gleich

$$d(r_1 + r_3)_e = -(\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{h\sin\vartheta}\, d(r_1 + r_3)_a$$

hervorbringt. Folglich wird, wenn

$$dX_0 = d\log(r_1 + r_3)_a, \qquad dX_1 = d\log(r_1 + r_3)_e$$

gesetzt wird:

$$dX_1 = -q\, dX_0$$

$$q = +(\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{h\sin\vartheta}\,\frac{(r_1 + r_3)_a}{(r_1 + r_3)_e} \qquad \text{(c)}$$

und die nächste Hypothese beginnt mit

$$X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1 + q}.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf die zweite Hypothese des obigen Beispieles (Seite 363) an, so stellt sich die ausführliche Berechnung so:

$\sin\vartheta_3$	9.89 4237	$\sin\gamma$	8.50 3818	$\sin\vartheta$	9.90 9730
$\sin\vartheta_1$	9.89 1443	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$	8.20 2788	h	9.02 8458
$M\sin\vartheta_3$	9.89 3515			$h\sin\vartheta$	8.93 8188
Add.	0.29 9995				
$(\ldots)$	0.19 3510				
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma : h\sin\vartheta$	9.26 4600				
$(r_1 + r_3)_a : (r_1 + r)_e$	0.08 6997				
q	9.53 9107				
$1 + q$	0.12 9053				
$X_1 - X_0$	$8.93\,9504_n$				
	$8.81\,0451_n$				
$(X_1 - X_0) : (1 + q)$	$-0.06\,4632$				

Man hat also für die dritte Hypothese den Anfangswert 0.540205 — 0.064632 = 0.475573, der vom wahren Wert um mehr nur 384 Einheiten der letzten Stelle abweicht und mit der vierten Hypothese zum Ziel führt. —

Man kann auf diese Weise die Berechnung einer Hypothese ersparen, aber die Ermittelung von q erfordert kaum weniger Arbeit, als eine Hypothese.

118. Erste Verbesserung parabolischer Bahnen. Die durchgreifendste Kontrolle, die man nach Ermittelung einer Bahn anstellen kann, ist die Berechnung der geozentrischen Örter für die Beobachtungszeiten aus den erhaltenen Elementen, insbesondere die Berechnung des mittleren Ortes, der bei der Elementenbestimmung selbst nicht mitgewirkt hat. Besteht innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Rechnung Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Örtern, so hat die Bahnbestimmung ihre Aufgabe gelöst. Bei der Ermittelung einer parabolischen Bahn ist hierbei aber folgendes zu beachten. Dieselbe macht von der mittleren Beobachtung nur insofern Gebrauch, als diese auf einem bestimmten größten Kreis liegend angenommen wird, wogegen der Ort in diesem Kreis selbst in die Bahnbestimmung nicht eingeht. Man wird von dem berechneten Orte daher auch nur fordern dürfen, daß er in diesem größten Kreise liege, eine Nichtübereinstimmung der Koordinaten λ und β selbst aber noch nicht als Hinweis auf einen vorgefallenen Rechenfehler betrachten. Genügen die berechneten Koordinaten der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)} = \operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}, \qquad 1)$$

so erfüllt die gerechnete Bahn die an sie zu stellenden Bedingungen und ist rechnerisch korrekt, auch wenn die Differenzen $(\lambda_2)_B - (\lambda_2)_R = \Delta\lambda$ und $(\beta_2)_B - (\beta_2)_R = \Delta\beta$ größere Beträge erreichen. Man kann die Bedingung 1) für die Anwendung etwas bequemer gestalten, wenn man

$$\operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$

unter Voraussetzung eines konstanten J_2 differenziert; man erhält

$$\Delta\beta = \cos(\lambda_2 - L_2)\cos\beta_2^{\,2}\operatorname{tg} J_2 \cdot \Delta\lambda. \qquad 2)$$

Findet also zwischen $\Delta\beta$ und $\Delta\lambda$ diese Relation statt, so ist die Bahn, soweit die benutzten Beobachtungen zu entscheiden gestatten, korrekt. Ist dagegen eine Darstellung der mittleren Beobachtung auch in dieser Hinsicht nicht zu erzielen, so hat man folgende Möglichkeiten ins Auge zu fassen: 1. Es liegt ein Rechen- oder ein Beobachtungsfehler vor; erneute Kontrolle aller einschlägigen Werte ist das einzige Mittel, Aufschluß zu erhalten. 2. Die Bahn weicht merklich von einer Parabel ab; die definitive Entscheidung hierüber wird man meist erst nach Ausrechnung einer elliptischen Bahn und nach Vergleichung weiterer Beobachtungen treffen können. 3. Die parabolische Bahn selbst ist einer Verbesserung fähig, indem die bei der ersten Rechnung gemachten Vernachlässigungen, insbesondere die Ersetzung des Verhältnisses der Dreiecke durch das Verhältnis der Zwischenzeiten, zu starken Einfluß haben, um ohne Folge zu bleiben. Die in diesem Falle sich darbietenden Methoden der Bahnverbesserung *ohne Zuziehung neuer Beobachtungen* sind folgende.

A. Eine erste Methode, die man auch anwenden kann, wenn der mittlere Ort noch gut dargestellt wird, besteht darin, unter Benutzung der erlangten Elemente die in der ersten Näherung gemachten Vernachlässigungen zu beseitigen: Man korrigiert die Beobachtungszeiten für die Planetenaberration (Nr. 27) und bringt die Fixsternaberration, wenn man sie vorher bei der Reduktion vom scheinbaren Ort auf den Jahresanfang beseitigt hat, wieder in Anrechnung, d. h. man korrigiert die Beobachtungen nur um

$$\Delta\alpha = -(f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta)$$
$$\Delta\delta = -g\cos(G+\alpha).$$

Man berücksichtigt ferner mit Benutzung der geozentrischen Distanzen die Parallaxe und schafft die Sonnenbreiten weg (Nr. 34). Endlich verwendet man zur Berechnung von ϱ_3 die strenge Formel

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m$$
$$M = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\,\frac{\sin\beta_1\cos J_2 - \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_2)\sin J_2}{-\sin\beta_3\cos J_2 + \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}$$
$$m = \frac{R_1\sin J_2\sin(L_2 - L_1)}{-\sin\beta_3\cos J_2 + \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}\left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\right)$$

und nimmt darin

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{r_2 r_3\sin(v_3 - v_2)}{r_1 r_2\sin(v_2 - v_1)}.$$

Der hieraus hervorgehende Wert

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = (M) = M + \frac{m}{\varrho_1}$$

wird also statt M in den Formeln I.—V. (Seite 357) eingeführt, die im übrigen unverändert bleiben.

B. Will man nicht die ganze Bahnrechnung wiederholen, sondern nur brauchbare Elemente zur Ephemeridenrechnung rasch erhalten, so wird man sich darauf beschränken, M zu verbessern, was auf mannigfache Art geschehen kann. In M nämlich liegt in der Regel die Wurzel der mangelhaften Bahn, da die Ersetzung der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten unter Umständen recht fehlerhaft sein kann. Man kann einen besseren Wert von M sich schon vor Berechnung der Elemente verschaffen und wird diesen Weg einschlagen, wenn man mit ungünstig verteilten Beobachtungen zu tun hat, da dann von vornherein zu erwarten ist, daß man keine Darstellung des mittleren Ortes erhalten wird. Man kann zu dem Ende in Formel 6) (Seite 351) die vernachlässigten Glieder in $[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$ berechnen, sobald man r_1 und r_3 genähert kennt, zweckmäßiger aber noch bedient man sich des Verhältnisses Sektor durch Dreieck, für dessen Berechnung man das einfache Seite 198 auseinandergesetzte Verfahren oder die Taf. XXII[a] hat. Man wird dann in M setzen:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\cdot\frac{y_3}{y_1},$$

wo $y_1 = \frac{(23)}{[r_2 r_3]}$, $y_3 = \frac{(12)}{[r_1 r_2]}$ ist. Man braucht hierzu den mittleren Radiusvektor r_2, den man mit hinlänglicher Sicherheit aus (Seite 200)

$$(t_3 - t_1) r_2 = (t_3 - t_2) r_1 + (t_2 - t_1) r_3$$

oder einer anderen der dort angegebenen Formeln erhält. Übrigens kann man, wie Bessel (Ges. Abh. Bd. I, Seite 13) gezeigt hat, das Verhältnis $[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$ mit den äußeren Radienvektoren r_1 und r_3 allein berechnen, man macht von diesem eleganten Verfahren aber selten Gebrauch, da es umständlicher ist, als das angegebene. — Die Gibbssche Formel (Seite 181) gibt:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12 r_1^3}(r_1 r_3 + r_2 (r_3 - r_1))}{1 + \frac{1}{12 r_3^3}(r_1 r_3 - r_2 (r_3 - r_1))}$$

und kann ebenfalls für den vorliegenden Zweck zur Anwendung kommen.

C. Eine andere Art, M zu verbessern, setzt voraus, daß man Elemente und mittleren Ort gerechnet habe und besteht in folgendem von *Carlini* vorgeschlagenen Kunstgriff. Man bestimmt jenen Wert von M, durch den der mittlere Ort gut dargestellt wird, und zwar durch Änderung des Winkels J_2, von dem M, soweit der mittlere Ort in Betracht kommt, allein abhängt. Den geänderten Winkel findet man folgendermaßen. Es seien wie bisher $(\lambda_2)_B$, $(\beta_2)_B$ die beobachteten, $(\lambda_2)_R$, $(\beta_2)_R$ die gerechneten Koordinaten und

$$\operatorname{tg}(J_2)_B = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)};$$

dann rechne man:

$$\operatorname{tg}(J_2)_R = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}$$

und nenne $\operatorname{tg}(J_2)^*$ jenen Wert, für den Identität der gerechneten und beobachteten Funktion $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda - L)}$ eintritt, wenn man M mit $(J_2)^*$ berechnet. $\operatorname{tg}(J_2)_R - \operatorname{tg}(J_2)_B$ wäre Null, wenn das richtige J_2 benutzt worden wäre, und es wird sich von Null um soviel unterscheiden, als man $\operatorname{tg}(J_2)_B$ ändern muß, um statt $\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}$ zu erhalten $\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)}$, d. h. um $\operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)^*$; es wird also:

$$\operatorname{tg}(J_2)_R - \operatorname{tg}(J_2)_B = \operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)^*$$

oder:

$$\operatorname{tg}(J_2)^* = 2 \operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)_R .$$

Bestimmt man hieraus $(J_2)^*$ und rechnet damit M und dann die Bahn, so kann man in der Mehrzahl der Fälle auf Darstellung des mittleren Ortes rechnen.

D. Die Änderung von M, welche nötig ist, um den mittleren Ort darzustellen, kann man auch auf einem rein empirischen Wege, durch die Methode der *Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen*, bestimmen. Man variiert hier M willkürlich und berechnet beide Male den mittleren Ort und seine Abweichung von der Beobachtung. Ergibt sich für

$$M = M_0 \qquad \text{Beob.} - \text{Rechnung} = \Delta\lambda_0 \text{ und } \Delta\beta_0$$

und für

$$M = M_1 \qquad \text{Beob.} - \text{Rechnung} = \Delta\lambda_1 \text{ und } \Delta\beta_1$$

und nennt man $M = \overline{M}$ jenen Wert, für den Beob. — Rechnung Null wird, so hat man nach der Regula falsi

$$(\overline{M} - M_0) : (M_1 - M_0) = -\Delta\lambda_0 : (\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_0)$$
$$(\overline{M} - M_0) : (M_1 - M_0) = -\Delta\beta_0 : (\Delta\beta_1 - \Delta\beta_0),$$

und wenn man

$$\overline{M} = M_0 + (M_1 - M_0)x$$

setzt, die beiden Werte:

$$x = \frac{\Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1} \quad \text{und} \quad x = \frac{\Delta\beta_0}{\Delta\beta_0 - \Delta\beta_1},$$

aus denen man den wahrscheinlichsten Wert von x bildet, am einfachsten durch Nehmen des arithmetischen Mittels.

Ist x nicht zu groß, so braucht man die Elemente, welche $\overline{M}$ entsprechen, nicht neu zu rechnen, sondern wird annehmen dürfen

$$\overline{E} = E_0 + (E_1 - E_0)x,$$

wenn E_0, E_1, $\overline{E}$ die den Hypothesen M_0, M_1, $\overline{M}$ entsprechenden Werte eines Elementes sind.

Wenn dieses letztere Verfahren nicht zu einer guten Darstellung des mittleren Ortes führt, so pflegt dieses ein sicheres Zeichen zu sein, daß eine parabolische Bahn den Beobachtungen überhaupt nicht genügt.

E. Die einer Variation von M entsprechende Änderung von ϱ_1 kann, wenn sie klein ist, auch durch Differenzialformeln ermittelt werden, die man leicht durch Differenziation der Eulerschen Gleichung erhält. *Oppolzer* hat in »Bahnbestimmung, Band I, Seite 302« eine solche Formel aufgestellt. Da ihre Berechnung nahezu ebensoviel Zeit erfordert, wie die direkte Berechnung von ϱ_1 mit dem variierten M, und ihr Gebrauch auf kleine Änderungen von M beschränkt ist, soll hier nicht darauf eingegangen werden. Die Berechnung der Elemente mit den variierten Werten von ϱ_4 und ϱ_3 und die Darstellung des mittleren Ortes durch sie kann ebenfalls differenziell geführt werden; *A. Leuschner* (Berlin, Diss. 1897) hat die hierzu nötigen Formeln abgeleitet; auch hier führt die direkte Rechnung fast ebenso rasch zum Ziele.

119. Beispiel einer parabolischen Bahnberechnung, wenn Näherungen vorliegen. Um auch das Verfahren zu erläutern, welches man einschlagen wird, wenn bereits eine Bahnbestimmung vorausgegangen ist, geben wir ein ausführliches Beispiel der Bahnberechnung des Kometen 1896 I (Perrine-Lamp). Zugrunde gelegt sind folgende drei rohe Beobachtungen:

				α app.	$\log p\Delta$	δ app.	$\log p\Delta$
1896 Febr. 15	$17^h 28^m 37^s$	M. Z.	Kiel	$19^h 26^m 44^s.29$	9.486_n	$-1^\circ\,1'56''.2$	0.857
» » 18	17 19 18	»	Straßburg	19 56 44.52	9.573_n	$+9\;33\;26.1$	0.792
» » 21	16 56 44	»	Göttingen	20 41 16.53	9.599_n	$+23\;0\;25.5$	0.786

Da aus der ersten Bahnbestimmung die genäherten geozentrischen Distanzen

$\log \varrho$	Aberr.-Zeit	Red. auf m. Z. Berlin
9.70 5618	$-4^m 13^s$	$+12^m 59^s$
9.63 3801	$-3\ 34$	$+22\ 30$
9.58 4178	$-3\ 11$	$+13\ 48$

ermittelt wurden, konnte die Aberration nach dem zweiten Verfahren in Nr. 27 berücksichtigt werden; mit log Lichtzeit = 2.69 767 ergaben sich die oben bereits angesetzten Aberrationszeiten. Wird gleichzeitig die Reduktion der Zeiten auf den Berliner Meridian mittels der oben ebenfalls angesetzten Längenunterschiede vorgenommen und dann in Bruchteile des Tages verwandelt, so ergeben sich die in der unten folgenden Zusammenstellung der Daten angesetzten Beobachtungszeiten. In der Reduktion der α app. und δ app. auf den Jahresanfang sind nunmehr die Präzession und Nutation mittels

$$\Delta\alpha = -(f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta), \quad \Delta\delta = -(g\cos(G+\alpha))$$

zu berücksichtigen (Nr. 28). Hier ergab sich

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Febr. 15	$-0^s.93$	$+5''.6$
» 18	-0.84	$+4.4$
» 21	-0.67	$+2.4$

Gleichzeitig wird die Parallaxe nach dem Verfahren Nr. 32 angebracht, wozu oben bereits die parallaktischen Faktoren angegeben wurden:

	Parallaxe	
	in α	in δ
Febr. 15	$-0^s.60$	$+14''.2$
» 18	-0.87	$+14.4$
» 21	-1.04	$+15.9$

Wir haben nun folgende Daten, die mit der Schiefe der Ekliptik für 1896.0 $\varepsilon = 23^\circ 27' 9''.9$ in die nebengesetzten Längen und Breiten verwandelt wurden:

M. Z. Berlin	α 1896.0	δ 1896.0	λ 1896.0	β 1896.0
1896 Febr. 15.73 430	$291^\circ 40' 41''.4$	$-1^\circ\ 1' 36''.4$	$293^\circ 15' 12''.8$	$+20^\circ 41' 31''.4$
» » 18.73 488	299 10 42.1	$+9\ 33\ 44.9$	303 35 42.0	$+29\ 40\ 25.4$
» » 21.71 344	310 18 42.3	$+23\ 0\ 43.8$	320 38 52.1	$+39\ 38\ 24.6$

Die Erdörter wurden für dieselben Zeiten aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert:

	L 1896.0	$\log R$	$B_\odot$	$\Delta\beta$
1896 Febr. 15.73 430	$147^\circ 3' 31''.7$	9.99 4855	$+0''.18$	$-0''.3$
» » 18.73 488	150 5 8.5	9.99 5130	$+0.45$	-0.9
» » 21.71 344	153 5 9.1	9.99 5412	$+0.56$	-1.1

und die Sonnenbreiten schließlich durch das Verfahren Nr. 34 mittels der $\Delta\beta$ beseitigt, die an obige β noch anzubringen sind. Die vollständigen Daten der Bahnbestimmung sind dann:

			λ 1896.0	β 1896.0	L 1896.0	$\log R$
1896	Febr.	15.73430	293° 15′ 12″.8	+ 20° 41′ 31″.1	147° 3′ 31″.7	9.994855
»	»	18.73488	303 35 42.0	+ 29 40 24.5	150 5 8.5	9.995150
»	»	21.71344	320 38 52.1	+ 39 38 23.5	153 5 9.1	9.995412

Wir rechnen nach dem (S. 366) unter A. angegebenen Verfahren, wozu aus der ersten Bahnbestimmung außer den oben bereits angegebenen ϱ folgende Resultate herangezogen wurden:

$$v_3 - v_2 = 6^\circ 2' 6''.3 \qquad v_2 - v_1 = 6^\circ 43' 20''.0$$
$$\log r_3 = 9.872228 \qquad \log r_1 = 9.828703$$

Die folgende Übersicht enthält nur die hauptsächlichsten Zwischenresultate.

$\operatorname{tg} J_2$	0.106318	f_1	9.885463_n
$\sin J_2$	9.896201	l_1	9.793566
$\cos J_2$	9.789883	f_3	9.993091_n
$\mathscr{S}$	9.881713	l_3	9.935870
$[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$	9.996889	f	9.261700_n
M	9.878602	l	8.941592
m	5.7598_n		
$m : \varrho_1$	6.0542_n	$2k(t_3 - t_1)$	9.313250
(M)	9.878537		

Es wurden zwei Hypothesen mit $\log \varrho_1 = 9.705618$ und $\log \varrho_1 = 9.705518$ gerechnet und daraus $\log \varrho_1 = 9.705574$ ermittelt, was vollständige Übereinstimmung von $\log s_d = \log s_g = 0.237498$ ergab. Hieraus $\log \varrho_3 = 9.584111$ und dann die heliozentrischen Koordinaten:

l_1	171° 3′ 14″.6	l_3	158° 16′ 32″.3
b_1	+ 15 26 0.1	b_3	+ 19 11 2.1
r_1	9.828698	r_3	9.872234

und die Elemente der Bahnlage $i = 155^\circ 45' 26''.5$, $\Omega = 208^\circ 51' 56''.9$. Ferner

$$u_1 = 40^\circ 23' 59''.1 \qquad u_3 = 53^\circ 9' 29''.5$$

womit die Probe völlig stimmte. Ferner

$$v_1 = 42^\circ 2' 37''.8 \qquad v_3 = 54^\circ 48' 8''.2$$
$$\omega = 358\ 21\ 21.3 \qquad \log q = 9.768874.$$

Aus dem ersten Orte folgte T = 1896 Jan. 31.81360 und aus dem zweiten T = Jan. 31.81354, und es wurde angenommen: T = Jan. 31.81357. Die Berechnung des Ortes für die Zeit der mittleren Beobachtung ergab: $v_2 = 48^\circ 46' 0''.0$, $\log r_2 = 9.850024$.

$$(\lambda_2)_R = 303^\circ 35' 33''.6 \qquad (\beta_2)_R = + 29^\circ 40' 30''.8 \qquad \log \varrho_2 = 9.633758$$

also Beob. — Rechn. $\Delta\lambda = + 8''.4$, $\Delta\beta = - 6''.3$.

Diese Unterschiede erscheinen etwas groß; man überzeugt sich aber leicht, daß der gerechnete Ort sehr nahe in dem durch L_2 und J_2 bestimmten Kreis liegt; in der Tat gibt

$$\log \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)} = 0.106314 \quad \text{gegen} \quad \log \operatorname{tg} J_2 = 0.106318;$$

diesen Unterschied muß man den unvermeidlichen Unsicherheiten der sechsstelligen Rechnung zuschreiben, so daß die Korrektheit der ganzen Rechnung außer Zweifel gestellt ist. Rechnet man aus der Formel 2) (Seite 365) $\Delta\beta$ aus $\Delta\lambda$, so ergibt sich $\Delta\beta = -7''.2$; der Unterschied von $0''.9$ gegen den obigen ist so gering, daß man ihn wohl als Beobachtungsfehler bei diesem wegen der schnellen Bewegung schwierig zu beobachtenden Objekt betrachten kann, also zu einer weiteren Verbesserung von M nicht Veranlassung nehmen wird.

120. Der Ausnahmefall. Die Gleichung 3) (Seite 350) verliert ihre Verwendbarkeit, wenn die drei größten Kreise, die wir vom mittleren Erdort nach den drei geozentrischen Örtern des Kometen gezogen haben, zusammenfallen, d. h. also, wenn die drei Örter in *einem* größten Kreise mit dem mittleren Erdort liegen. Es wird nämlich dann $J_1 = J_2 = J_3$ und M wird in jeder Form den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen und m den Faktor $\frac{1}{0}$ erhalten, der die Vernachlässigung von m verbietet auch bei den kleinsten Zwischenzeiten. In aller Strenge wird dies kaum jemals eintreten und kann jedenfalls vermieden werden, aber Fälle, wo *nahezu* das angegebene Verhalten eintritt, kommen vor und würden, auf die bisher angegebene Weise behandelt, offenbar unsichere, ja illusorische Resultate ergeben. Der Grund liegt darin, daß dann die beiden größten Kreise II 2 und 1 3 sich unter sehr spitzem Winkel schneiden, ihr Schnittpunkt g also, von dessen Lage auf der Strecke 1 3 alles abhängt, nur mit größter Unsicherheit bestimmt werden kann. Wird die Bahnbestimmung ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität unternommen, dann ist, wie wir gesehen haben (Nr. 100), beim Eintreten dieses Falles eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich. Wird aber, wie hier, von vornherein die Exzentrizität gleich 1 gesetzt, so ist *ein* Element weniger zu ermitteln und eine Bahnbestimmung ist möglich, da zur Ermittlung von 5 Elementen die gegebenen (im Grunde 5 unabhängige Koordinaten repräsentierenden) Stücke ausreichen. Es ist nämlich möglich, das Verhältnis M der äußeren geozentrischen Distanzen auch hier aufzustellen, welches bei der Parabel zur Bahnbestimmung genügt. Man muß nur die Gleichung 3) transformieren oder, was noch einfacher ist, man muß von einer anderen der früher aufgestellten Beziehungen zwischen ϱ_1 und ϱ_3 ausgehen. Die letzte Gleichung in 14[a]) (Seite 261) wird in Polarkoordinaten geschrieben, wenn wir gleichzeitig eine Drehung des Koordinatensystems um den beliebigen Winkel Π vornehmen:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3]\left(\cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\lambda_1 - \Pi) - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Pi)\right)\varrho_1 + \\
&\quad + [r_1 r_2]\left(\cos\beta_3 \sin\beta_2 \sin(\lambda_3 - \Pi) \sin\beta_3 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Pi)\right)\varrho_3 = \\
&= \{-[r_2 r_3] R_1 \sin(L_1 - \Pi) + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - \Pi) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - \Pi)\} \sin\beta_2 .
\end{aligned}$$

Wird hier linkerhand, wie Seite 306

$$\begin{aligned} h_1 \sin(\lambda_2 - H_1) &= \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ h_1 \cos(\lambda_2 - H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_3 - \lambda_2) \\ h_3 \sin(\lambda_2 - H_3) &= \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ h_3 \cos(\lambda_2 - H_3) &= -\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_1 + \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \qquad (a)$$

eingetragen und rechterhand das letzte Glied durch die Identität

$$[R_2 R_3] R_1 \sin(L_1 - \Pi) - [R_1 R_3] R_2 \sin(L_2 - \Pi) + [R_1 R_2] R_3 \sin(L_3 - \Pi) = 0$$

eliminiert, so erscheint:

$$[r_2 r_3] h_3 \sin(H_3 - \Pi) \cos\beta_1 \varrho_1 - [r_1 r_2] h_1 \sin(H_1 - \Pi) \cos\beta_3 \varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_2] \left\{ \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) R_1 \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{[R_1 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) R_2 \sin(L_2 - \Pi) \right\}.$$

Ersetzt man die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Reihenentwicklungen (Seite 177), so nimmt die rechte Seite dieser Gleichung die Gestalt an:

$$[r_1 r_2] \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} \left((\tau_3 - \tau_1) R_1 \sin(L_1 - \Pi) + (\tau_2 + \tau_3) R_2 \sin(L_2 - \Pi) \right) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$$

oder wenn

$$\begin{aligned} g \sin(G - L_2) &= -(\tau_3 - \tau_1) R_1 \sin(L_2 - L_1) \\ g \cos(G - L_2) &= +(\tau_3 - \tau_1) R_1 \cos(L_2 - L_1) + (\tau_2 + \tau_3) R_2 \end{aligned} \qquad (b)$$

gesetzt wird,

$$[r_1 r_2] \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} g \sin(G - \Pi) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right).$$

Die Beziehung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 kann man also, wenn noch

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$$

substituiert wird, so schreiben:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{h_3}{h_1} \frac{\sin(H_3 - \Pi)}{\sin(H_1 - \Pi)} \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \varrho_1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} \frac{g}{h_1} \frac{\sin(G - \Pi)}{\sin(H_1 - \Pi)} \frac{1}{\cos\beta_3} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

welches die von *E. Weiß* vorgeschlagene Form der Olbersschen Gleichung ist. Dieselbe ist allerdings etwas umständlicher zu berechnen als die früher angegebene, besitzt aber zwei wichtige Vorzüge. Man kann nämlich, indem man den willkürlichen Winkel Π gleich G setzt, die Größe m streng zum Verschwinden bringen, so daß die Olberssche Gleichung lautet:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{h_3}{h_1} \frac{\sin(H_3 - G)}{\sin(H_1 - G)} \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \varrho_1,$$

wo H_1, H_3, h_1, h_3, G aus (a) und (b) zu berechnen sind. Wie man aus (b) ersieht, ist G immer nahe gleich L_2. Setzt man direkt $G = L_2$, so erhält man die frühere Form, aber m erhält dann einen zwar kleinen, aber immerhin von Null verschiedenen Wert. Der andere Vorzug besteht darin, daß man eine Wahl des Winkels Π treffen kann, wodurch im Ausnahmefall die Form $\frac{0}{0}$ in M und m und bei Annäherung an denselben die Unsicherheit der Rechnung vermieden wird. Im Ausnahmefall werden H_1 und H_3 gleich L_2; man darf hier also Π nicht in der Nähe von L_2 wählen, also weder gleich H_1 oder H_3, noch gleich G machen, sondern man muß es so bestimmen,

dass $\sin(H_3 - \Pi)$ *und* $\sin(H_1 - \Pi)$ einen möglichst großen Betrag erreichen, damit die Faktoren

$$\frac{\sin(H_3-\Pi)}{\sin(H_1-\Pi)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(G-\Pi)}{\sin(H_1-\Pi)}$$

in M und m von der Form $\frac{0}{0}$ möglichst entfernt bleiben. Dies geschieht für

$$\tfrac{1}{2}(H_1 + H_3) - \Pi = 90^\circ,$$

da H_3 im Ausnahmefall stets in der Nähe von H_1 liegt. Die Olberssche Gleichung wird dann:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{h_3}{h_1}\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3}\varrho_1 - \frac{\tau_1\tau_2}{6\tau_3}\frac{g}{h_1}\frac{\cos\left((G - \frac{1}{2}(H_1+H_3)\right)}{\cos\frac{1}{2}(H_3-H_1)}\frac{1}{\cos\beta_3}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

Das zweite Glied rechts kann nun allerdings nicht mehr verschwinden, aber es bleibt eine kleine Größe erster Ordnung und man kann daher in erster Näherung setzen:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{h_3}{h_1}\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3}\varrho_1, \tag{c}$$

womit wieder die gewöhnliche Form erreicht ist. Aus dem Lambertschen Satz von der Krümmung der Bahnen (Nr. 75) folgt unmittelbar, daß der Ausnahmefall nur eintreten kann, wenn der Komet zur Zeit der zweiten Beobachtung nahe in der Entfernung R_2 von der Sonne sich befindet. Es wird also im Ausnahmefall der Faktor

$$\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$$

wesentlich zur Verkleinerung von m beitragen und seine Vernachlässigung rechtfertigen.

121. Beispiel zum Ausnahmefall. Wir behandeln dieselbe Bahn, die Oppolzer nach einer anderen Methode berechnet hat, nämlich die des Kometen 1869 III, aus folgenden bereits mit allen Korrektionen versehenen Beobachtungen:

1869 M. Z. B.	λ 1869.0	β 1869.0	L 1869.0	$\log R$
Nov. 29.41785	351° 46′ 19.″9	+ 20° 25′ 9.″5	67° 44′ 44.″8	9.99 3829
» 34.42403	0 41 17.4	+ 19 48 37.9	72 49 40.2	9.99 3509
» 39.42904	10 8 37.2	+ 18 38 59.1	77 54 55.4	9.99 3228

Die Anwendung der Formeln I (Seite 357) ergibt hier:

J_1	159° 21′ 1.″4
J_2	159 16 11.6
J_3	159 12 0.5

Die drei Beobachtungen liegen also so nahe in einem größten Kreise mit dem mittleren Erdort, daß die Olberssche Gleichung in der ursprünglichen Form nicht anwendbar ist, da m nicht vernachlässigt werden dürfte. Wir rechnen daher die erste Näherung nach den Formeln (a) und (c):

$\cos\beta_1$	9.97 1816			$\cos\beta_3$	9.97 6575
$\operatorname{tg}\beta_1$	9.57 0870	$\operatorname{tg}\beta_2$	9.55 6579	$\operatorname{tg}\beta_3$	9.52 8279
$-\operatorname{cotg}\beta_2 . \operatorname{tg}\beta_1$	0.01 4291$_n$	$\lambda_2 - \lambda_1$	8° 54′ 57.″5	$\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3$	9.97 1700
$\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.99 4721	$\lambda_3 - \lambda_2$	9 27 19.8	$-\cos(\lambda_3 - \lambda_2)$	9.99 4059$_n$
	8.66 3631				8.72 2900
$h_3 \sin(\lambda_2 - H_3)$	9.19 0291	$\lambda_2 - H_3$	106° 22′ 23.″2	$h_1 \sin(\lambda_2 - H_1)$	9.21 5588
$h_3 \cos(\lambda_2 - H_3)$	8.65 8352$_n$	$\lambda_2 - H_1$	106 46 4.9	$h_1 \cos(\lambda_2 - H_1)$	8.69 4600$_n$
$\sin(\lambda_2 - H_3)$	9.98 2021	H_3	254 18 54.2	$\sin(\lambda_2 - H_1)$	9.98 1130
$\operatorname{tg}(\lambda_2 - H_3)$	0.53 1939$_n$	H_1	253 55 12.5	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - H_1)$	0.52 0988$_n$
h_3	9.20 8270	$h_3 : h_1$	9.97 3812	h_1	9.23 4458
$t_3 - t_2$	+ 5.00 501	$\cos\beta_1 : \cos\beta_3$	9.99 5241	$t_2 - t_1$	+5.00 618
	0.69 9404	$\tau_1 : \tau_3$	9.99 9911		0.69 9493
		M	9.96 8964		

Mit diesem Werte von M wurde bis zur Ermittelung genähert richtiger Werte von ϱ_1 und r_2 gerechnet; mit dem nach der zweiten Hypothese erhaltenen $\log r_2 = 0.0528$ ergab sich dann für

$$m = -\frac{\tau_1 \tau_2}{6\tau_3} \frac{g}{h_1} \frac{\cos\left(G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3)\right)}{\cos\frac{1}{2}(H_3 - H_1)} \frac{1}{\cos\beta_3} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

folgende Rechnung, zunächst nach (b)

τ_1	8.93 4985	$\frac{1}{2}(H_3 + H_1)$	254° 7′ 3.″3	$-\tau_1\tau_3 : 6\tau_3$	8.45 7826$_n$
τ_3	8.93 5074	$\frac{1}{2}(H_3 - H_1)$	0 11 50.8	$g : h_1$	0.17 1250
τ_2	9.23 6066			cos : cos	9.99 9892$_n$
$(\tau_3 - \tau_1)$	5.24	$G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3)$	178 42 35.7	$\sec\beta_3$	0.02 3425
$\tau_2 + \tau_3$	9.41 2170	$\cos(G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3))$	9.99 9890$_n$	$(\ldots.)$	9.54 60
$L_2 - l_1$	5° 4′ 55.″4	$\cos\frac{1}{2}(H_3 - H_1)$	9.99 9998	m	8.19 84
sin »	8.94 7347	cos : cos	9.99 9892$_n$	ϱ_1	9.53 01
cos »	9.99 8289			$m : \varrho_1$	8.66 82
		$1 : R_2^3$	0.0195	M	9.96 8964
$g \sin(G - L_2)$	4.18$_n$	$1 : r_2^3$	9.8416	Add.	0.02 1200
$g \cos(G - L_2)$	9.40 5708	$(\ldots.)$	9.5460	(M)	9.99 0164
$G - L_2$	− 1.″2				
g	9.40 5708				
$g : h_1$	0.17 1250				
G	72° 49′ 39.″0				

Mit Benutzung von $\log \varrho_1 = 9.5301$ folgte daraus nach der Formel

$$\varrho_3 = \varrho_1 M + m = \varrho_1 \left(M + \frac{m}{\varrho_1}\right) = \varrho_1 (M)$$

ein verbesserter Wert (M), mit dem die Rechnung wiederholt und zu Ende geführt wurde.

Abschnitt XXIII.

Berechnung parabelnaher Bahnen.

122. Übergang von der Parabel auf Ellipse oder Hyperbel. Vom Standpunkte der Bahnbestimmung aus muß man die Kometenbahnen in drei Klassen unterscheiden: 1. parabolische Bahnen, bei denen die Beobachtungen keine Spur von Abweichung von der rein parabolischen Bewegung andeuten; 2. elliptische Bahnen mit mäßiger Exzentrizität, den sogenannten kurzperiodischen Kometen angehörend; 3. elliptische und hyperbolische Bahnen mit Exzentrizitäten, die nur wenig von 1 sich unterscheiden, sogenannte parabelnahe Bahnen, den Kometen von sehr langer Umlaufszeit und den hyperbolischen Kometen angehörend. Die Bahnberechnung der ersten Klasse wird nach der in Abschnitt XXII auseinandergesetzten Methode vollzogen und ist vermöge des Umstandes, daß ein Element weniger bestimmt zu werden braucht, dadurch charakterisiert, daß die Analyse auf *eine* Unbekannte basiert werden kann, sei es die eine geozentrische Distanz bei völlig unbekannten Bahnen oder sei es das Verhältnis der Distanzen M bei schon näherungsweise bekannten Bahnen. Die Bahnbestimmung der zweiten Klasse wird durch die gewöhnliche Methode (Abschnitt XIX) geleistet, bei der eine Voraussetzung über die Exzentrizität von vornherein nicht gemacht wird und die dadurch charakterisiert ist, daß *zwei* unbekannte Größen durch allmähliche Annäherung oder Hypothesenrechnung bestimmt werden, seien es nun die Größen P und Q bei noch unbekannten Bahnen oder die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen bei schon näherungsweise bekannten Bahnen. Diese Methode führt nun bei der dritten Klasse nicht zum Ziel, wenigstens nicht in praxi, da der geringe Unterschied der Exzentrizität von 1 sich mit Schärfe nicht ermitteln lässt. Es muß hierfür eine besondere Methode aufgestellt werden, zu deren Besprechung wir uns nun wenden. Man kann diese Methode von vornherein auf die Annahme basieren, daß Näherungen vorhanden sind, da eine parabolische Bahn in allen Fällen vorausgegangen ist. Häufig werden sogar die Abweichungen der Beobachtungen von der Parabel so klein sein, daß man mit Normalörtern operieren *muß*, um sie mit Sicherheit zu konstatieren, so daß eine vorausgegangene Näherung notwendige Grundlage des ganzen hier einzuschlagenden Verfahrens ist.

Die Methode*) besteht nun einfach darin, daß man statt der *zwei* geozentrischen Distanzen nur die *eine* als Unbekannte nimmt und als andere dasjenige Element einführt, welches der größten Unsicherheit unterworfen ist, nämlich die große Halbachse oder bequemer ihren reziproken Wert $\frac{1}{a}$. Aus den Koordinaten zweier Normalörter $\lambda_1\ \beta_1$, $\lambda_3\ \beta_3$, aus der zum ersten gehörigen geozentrischen Distanz ϱ_1 und aus $\frac{1}{a}$ lassen

*) *Hornstein*, Übergang von der Parabel zur Ellipse oder Hyperbel. Sitzungsberichte der Ak. der Wiss. Wien 1854. — *A. Marth*, Remarks on the determination of cometary orbits. Astr. Nachr. Band 65, Seite 337, 1865.

sich unter Hinzuziehung des allgemeinen Lambertschen Satzes die Elemente einer Bahn ableiten, mit denen der dritte Normalort oder, wie gleich allgemeiner gesagt werden kann, *alle* übrigen Normalörter verglichen werden können. Variierte Werte von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ führen zu geänderten Elementen und daraus gerechneten Örtern; die Vergleichung der beobachteten Örter mit diesen liefert Bedingungsgleichungen zur Bestimmung derjenigen Variationen von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$, welche die beste Übereinstimmung (im Falle *einer* Position die genaue Darstellung) zwischen Beobachtung und Rechnung herbeiführen. Mit diesen Werten von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ werden schließlich die definitiven Elemente berechnet.

Um diesen Gedankengang in Formeln zu übertragen, ist zuerst zu zeigen, wie aus λ_1 β_1, λ_3 β_3, ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ die Elemente der Bahn berechnet werden. Man muß die fehlende Distanz ϱ_3 mittelst des Lambertschen Satzes ermitteln, den wir in der bequemen in Nr. 66 entwickelten Form annehmen. Für den ersten Radiusvektor r_1 hat man:

$$\begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \lambda_1) &= \varrho_1 \cos\beta_1 + R_1 \cos(L_1 - \lambda_1) \\ r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \lambda_1) &= R_1 \sin(L_1 - \lambda_1) \\ r_1 \sin b_1 &= \varrho_1 \sin\beta_1 . \end{aligned} \qquad 1)$$

Den Radiusvektor r_3 und die Sehne s muß man durch ϱ_3 ausdrücken. Aus

$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2 R_3 \varrho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned} &\cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) = \cos {}^1\!F_3, \qquad {}^1\!F_3 < 180^\circ \\ &R_3 \cos {}^1\!F_3 = F_3, \qquad R_3 \sin {}^1\!F_3 = G_3 \\ &\operatorname{tg}\Theta_3 = \frac{\varrho_3 + F_3}{G_3}, \qquad r_3 = G_3 \sec\Theta_3 . \end{aligned} \qquad 2)$$

Ferner hat man nach den Entwickelungen Seite 353 mit Benutzung obiger Gl. 1)

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - r_1 \cos b_1 \cos l_1 + R_3 \cos L_3 \\ \eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - r_1 \cos b_1 \sin l_1 + R_3 \sin L_3 \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_3 \sin\beta_3 - r_1 \sin b_1 . \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der Form:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 + \sigma \cos\nu \cos K \\ \eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 + \sigma \cos\nu \sin K \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_3 \sin\beta_3 + \sigma \sin\nu , \end{aligned}$$

so sind die Hilfsgrößen σ, ν, K durch

$$\begin{aligned} \sigma \cos\nu \cos(K - l_1) &= R_3 \cos(L_3 - l_1) - r_1 \cos b_1 \\ \sigma \cos\nu \sin(K - l_1) &= R_3 \sin(L_3 - l_1) \\ \sigma \sin\nu &= - r_1 \sin b_1 \end{aligned} \qquad 3)$$

gegeben und für die Sehne s folgt:

$$s^2 = \varrho_3^2 + \sigma^2 + 2\varrho_3\sigma \left(\sin\beta_3 \sin\nu + \cos\beta_3 \cos\nu \cos(K - \lambda_3)\right)$$

oder bequemer für die Rechnung:

$$\begin{aligned} \cos\Phi &= \sin\beta_3 \sin\nu + \cos\beta_3 \cos\nu \cos(K-\lambda_3) \qquad \Phi < 180^\circ \\ \sigma\cos\Phi &= F, \qquad \sigma\sin\Phi = G, \\ \operatorname{tg}\Theta &= \frac{\varrho_3 + F}{G}, \qquad s = G\sec\Theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ entspricht derjenige Wert von ϱ_3, welcher die Befriedigung der Lambertschen Gleichung

$$\begin{aligned} 6k(t_3 - t_1) &= (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\varepsilon \mp (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\delta \\ &[Q_\varepsilon \text{ und } Q_\delta \text{ mit den Argumenten} \\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 &= \frac{r_1 + r_3 + s}{4a}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{r_1 + r_3 - s}{4a} \\ &\text{aus Taf. XXIII}] \end{aligned} \tag{5}$$

herbeiführt. Man wird mit einem stets vorhandenen Näherungswert von ϱ_3, etwa $\varrho_3{}^0$, r_3 und s aus 2) und 4) berechnen und mit dem aus 1) folgenden r_1 in 5) eintragen; stimmt

$$\mathrm{T} = \frac{1}{6k}\left((r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\varepsilon \mp (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\delta\right)$$

mit dem beobachteten $t_3 - t_1$ überein, so ist mit $\varrho_3{}^0$ der richtige Wert getroffen. Findet man die Abweichung

$$\Delta t = t_3 - t_1 - \mathrm{T},$$

so muß man $\varrho_3{}^0$ korrigieren, wofür sich leicht ein Ausdruck aufstellen läßt. Die Differenziation der Ausdrücke von r_3, s und $t_3 - t_1$ gibt:

$$\Delta r_3 = \frac{1}{r_3}(\varrho_3 + R_3\cos{}^1\!F_3)\,\Delta\varrho_3$$

$$\Delta s = \frac{1}{s}(\varrho_3 + \sigma\cos\Phi)\,\Delta\varrho_3$$

$$\Delta t = \frac{1}{4k}\left(\sqrt{r_1 + r_3 + s}\; Q_\varepsilon\,(\Delta r_3 + \Delta s) \mp \sqrt{r_1 + r_3 - s}\; Q_\delta\,(\Delta r_3 - \Delta s)\right)$$

also:

$$\Delta\varrho_3 = \frac{4k\,\Delta t}{(Q_\varepsilon\sqrt{r_1+r_3+s} \mp Q_\delta\sqrt{r_1+r_3-s})\frac{1}{r_3}(\varrho_3+R_3\cos{}^1\!F_3) + (Q_\varepsilon\sqrt{r_1+r_3+s} \pm Q_\delta\sqrt{r_1+r_3-s})\frac{1}{s}(\varrho_3+\sigma\cos\Phi)}. \tag{6}$$

Es gilt hier ebenso wie in 5) das obere oder untere Zeichen, je nachdem die heliozentrische Bewegung kleiner oder größer als 180° ist. Mit $\varrho_3{}^0 + \Delta\varrho_3$ wird die Rechnung wiederholt und dies so lange fortgesetzt, bis der Lambertschen Gleichung Genüge getan ist.

Ist der den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ entsprechende Wert von ϱ_3 gefunden, so werden r_3, l_3, b_3 durch

$$\begin{aligned} r_3\cos b_3\cos(l_3 - \lambda_3) &= R_3\cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3\cos\beta_3 \\ r_3\cos b_3\sin(l_3 - \lambda_3) &= R_3\sin(L_3 - \lambda_3) \\ r_3\sin b_3 &= \varrho_3\sin\beta \end{aligned} \tag{7}$$

bestimmt und dann nach den Nrn. 68 und 69 die Elemente. Mit diesen Elementen berechnet man nach Nr. 64 und für die Zeiten der aufgestellten Normalörter die geozentrischen Koordinaten und vergleicht sie mit den beobachteten. Die Unterschiede lassen dann erkennen, wie weit mit den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ die Beobachtungen vereinbar sind. Die *wahren* Werte von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ und damit die wahren Elemente erhält man durch die bei der Variation der geozentrischen Distanzen auseinandergesetzte Methode (Nr. 98) d. h. man muß drei Hypothesen über ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ machen und die daraus hervorgehenden Elemente mit den Normalörtern vergleichen. Hat man für die drei Hypothesen die

	angenommenen Werte von		die entsprechenden berechneten geoz. Örter für die Zeit eines Normalortes t_i	
	ϱ	$\frac{1}{a}$		
Hyp. I:	ϱ_0	$\frac{1}{a_0}$	λ_i^{I}	β_i^{I}
» II:	$\varrho_0 + \Delta\varrho$	$\frac{1}{a_0}$	λ_i^{II}	β_i^{II}
» III:	ϱ_0	$\frac{1}{a_0} + \Delta\frac{1}{a}$	λ_i^{III}	β_i^{III}

und ist λ_i β_i der beobachtete Normalort, so hat man die Gleichungen

$$(\lambda_i^{\mathrm{II}} - \lambda_i^{\mathrm{I}})\, x + (\lambda_i^{\mathrm{III}} - \lambda_i^{\mathrm{I}})\, y = \lambda_i - \lambda_i^{\mathrm{I}}$$
$$(\beta_i^{\mathrm{II}} - \beta_i^{\mathrm{I}})\, x + (\beta_i^{\mathrm{III}} - \beta_i^{\mathrm{I}})\, y = \beta_i - \beta_i^{\mathrm{I}}$$

und die daraus hervorgehenden Werte von x und y führen zu den wahren Werten:

$$\varrho_0 + x \cdot \Delta\varrho \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_0} + y \cdot \Delta\frac{1}{a}.$$

Ein Normalort genügt zur Bestimmung von x und y; in der Regel aber hat man in den Fällen, wo man von dieser Methode Gebrauch macht, eine ganze Reihe von Normalörtern zur Verfügung. Jeder derselben liefert dann ein Gleichungspaar für x und y, und die Werte von x und y sind durch Ausgleichungsrechnung zu bestimmen.

Abschnitt XXIV.

Bestimmung einer Kreisbahn.

123. Berechnung einer Kreisbahn; erste Methode. Wie es unter allen Umständen vorteilhaft ist, der Berechnung einer elliptischen Kometenbahn die Berechnung einer Parabel vorausgehen zu lassen, so empfiehlt es sich häufig, für einen neuentdeckten Planeten mit einer Kreisbahn zu beginnen. Man erreicht dadurch die Möglichkeit, rasch eine Ephemeride zur Weiterverfolgung herstellen zu können und gewinnt einen Einblick in die Bahnlage, die für die Wahl der Methode bei der genaueren Rechnung oft maßgebend ist; auch die Hypothesenrechnung wird durch die Kenntnis der Kreisbahn erleichtert und die genäherte Berücksichtigung der Aberration und Parallaxe bequem ermöglicht.

Die Kreisbahn ist bestimmt durch den Radius a, durch die Stücke der Bahnlage Ω und i und durch den Ort des Planeten in der Bahn für eine bestimmte Zeit, wozu in der Regel das Argument der Breite u_0 genommen wird. Es sind also nur *vier* Stücke zu ermitteln, Exzentrizität und Länge des Perihels fallen weg; hierzu braucht man vier Beobachtungsdaten, als welche sich Länge und Breite für zwei Zeiten darbieten. Wir bezeichnen sie mit

Zeit	Geoz. Länge	Geoz. Breite
t_1	λ_1	β_1
t_2	λ_2	β_2

und nehmen außerdem die heliozentrischen Längen und Radienvektoren der Erde für dieselben Zeiten als bekannt an:

Zeit	Helioz. Länge der Erde	Radiusvektor
t_1	L_1	R_1
t_2	L_2	R_2

Um die Bezeichnung gleich vollständig einzuführen, nennen wir die:

Zeit	Helioz. Länge	Helioz. Breite	Arg. der Breite	Distanz von der Erde
t_1	l_1	b_1	u_1	ϱ_1
t_2	l_2	b_2	u_2	ϱ_2

Dann hat man

$$\begin{aligned}
\text{für die Zeit } t_1\text{:}\quad & a\cos b_1\cos l_1 = \varrho_1\cos\beta_1\cos\lambda_1 + R_1\cos L_1\\
& a\cos b_1\sin l_1 = \varrho_1\cos\beta_1\sin\lambda_1 + R_1\sin L_1 \qquad 1)\\
& a\cos b_1 \qquad\quad = \varrho_1\sin\beta_1\,,\\
\text{für die Zeit } t_2\text{:}\quad & a\cos b_2\cos l_2 = \varrho_2\cos\beta_2\cos\lambda_2 + R_2\cos L_2\\
& a\cos b_2\sin l_2 = \varrho_2\cos\beta_2\sin\lambda_2 + R_2\sin L_2 \qquad 2)\\
& a\sin b_2 \qquad\quad = \varrho_2\sin\beta_2\,,
\end{aligned}$$

und wenn diese Gleichungen quadriert und addiert werden:

$$\begin{aligned} a^2 &= \varrho_1^2 + R_1^2 + 2 R_1 \varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \\ a^2 &= \varrho_2^2 + R_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2), \end{aligned} \qquad 3)$$

woraus:

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + R_1^2 - R_2^2 + 2 R_1 \varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) - 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) = 0. \qquad 3^a)$$

Hierin sind alle Größen bekannt mit Ausnahme von ϱ_1 und ϱ_2; die Gleichung gibt also ϱ_2, sobald man ϱ_1 als bekannt annimmt.

Rechnet man nun mit einer bestimmten Hypothese für ϱ_1 aus $3^a)$ ϱ_2 und dann aus 1) und 2) a, l_1, b_1, l_2, b_2, so kann man damit auch $u_2 - u_1$ finden; in der Tat gibt das Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik und den beiden heliozentrischen Örtern:

$$\cos(u_2 - u_1) = \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos(l_2 - l_1),$$

eine Gleichung, die man für den Gebrauch noch umformen muß, da $u_2 - u_1$ in der Regel klein ist. Setzt man darin

$$\begin{aligned} \sin b_1 \sin b_2 &= \tfrac{1}{2}\cos(b_2 - b_1) - \tfrac{1}{2}\cos(b_2 + b_1) \\ \cos b_1 \cos b_2 &= \tfrac{1}{2}\cos(b_2 - b_1) + \tfrac{1}{2}\cos(b_2 + b_1) \end{aligned}$$

und subtrahiert sie dann von

$$1 = \cos\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2,$$

so erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 = \cos\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(b_2 - b_1)^2 + \cos\tfrac{1}{2}(b_2 + b_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2. \qquad 4)$$

Für $u_2 - u_1$ kann man aber neben diesem rein geometrischen Wert auch einen aus der Bewegung folgenden aufstellen; es ist, da die Bewegung im Kreise gleichförmig ist und mit der Geschwindigkeit $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ erfolgt:

$$u_2 - u_1 = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1). \qquad 5)$$

Stimmen die aus 4) und 5) hervorgegangenen Werte von $u_2 - u_1$ überein, so ist mit der Hypothese für ϱ_1 das Richtige getroffen; ist dies nicht der Fall, so muß die Hypothese variiert und dies so lange fortgesetzt werden, bis Übereinstimmung erzielt ist. Hierbei ist die Anwendung der regula falsi von Nutzen; diese nimmt an, daß eine Funktion sich proportional dem Argument ändert; nimmt man hier als Funktion den Unterschied der aus 4) und 5) hervorgehenden Werte von $u_2 - u_1$, als Argument ϱ und setzt für

$\varrho = \varrho_0$	den Unterschied der	$u_2 - u_1$	p
$\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$	» »	» $u_2 - u_1$	$p - \Delta p$
$\varrho = \varrho_0 + \xi$	» »	» $u_2 - u_1$	0,

so daß also $\varrho_0 + \xi$ der gesuchte Wert ist, so wird

$$\Delta\varrho : \xi = \Delta p : p$$

oder:

$$\xi = \frac{p \cdot \Delta\varrho}{\Delta p}.$$

Ist der richtige Wert von ϱ_1 und damit von a und den heliozentrischen Koordinaten ermittelt, dann ergeben sich die übrigen Elemente leicht wie folgt. Es ist:

$$\begin{array}{rl|rl} \cos i \sin u_1 &= \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega) & \cos i \sin u_2 &= \cos b_2 \sin(l_2 - \Omega) \\ \cos u_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega) & \cos u_2 &= \cos b_2 \cos(l_2 - \Omega) \\ \sin i \sin u_1 &= \sin b_1 & \sin i \sin u_2 &= \sin b_2 . \end{array} \qquad 6)$$

Wird die bekannte Größe $u_2 - u_1 = \sigma$ gesetzt, womit $u_2 = u_1 + \sigma$ wird, so ergeben die beiden zuletzt angesetzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin i \sin u_1 &= \sin b_1 \\ \sin i \sin(u_1 + \sigma) &= \sin b_2 \end{aligned}$$

oder durch Addition bez. Subtraktion

$$\begin{aligned} \sin i \sin(u_1 + \tfrac{1}{2}\sigma) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b_2 + b_1)\cos\frac{1}{2}(b_2 - b_1)}{\cos\frac{1}{2}\sigma} \\ \sin i \cos(u_1 + \tfrac{1}{2}\sigma) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b_2 + b_1)\sin\frac{1}{2}(b_2 - b_1)}{\sin\frac{1}{2}\sigma} . \end{aligned} \qquad 7)$$

Hieraus wird i und u_1 gefunden, worauf die zwei ersten Gleichungen beider Gruppen 6) den Knoten Ω ergeben. Natürlich kann man auch irgend eines der in Nr. 69 angegebenen Verfahren anwenden.

Statt bei der Hypothesenrechnung von ϱ_1 auszugehen, nimmt man besser a als Ausgangsgröße und rechnet daraus nach 3) ϱ_1 und ϱ_2, was bequemer ist, als die Auflösung von 3[a]), besonders wenn man folgende Umformung von 3) vornimmt. Nennt man in dem Dreieck Sonne-Erde-Planet den Winkel an letzterem x und den Außenwinkel an der Erde δ, so hat man zunächst

$$a^2 = \varrho^2 + R^2 + 2R\varrho\cos\delta ,$$

also durch Vergleich mit 3)

$$\cos\beta\cos(\lambda - L) = \cos\delta ;$$

weiter aber:

$$a = \frac{R\sin\delta}{\sin x} , \qquad \varrho = \frac{R\sin(\delta - x)}{\sin x} , \qquad 8)$$

die nun 3) vollständig ersetzen. Rechnet man mit einer Annahme für a:

$$\sin x_1 = \frac{R_1\sin\delta_1}{a} , \qquad \sin x_2 = \frac{R_2\sin\delta_2}{a}$$

und dann

$$\varrho_1 = \frac{R_1\sin(\delta_1 - x_1)}{\sin x_1} , \qquad \varrho_2 = \frac{R_2\sin(\delta_2 - x_2)}{\sin x_2} ,$$

worin

$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) , \qquad \cos\delta_2 = \cos\beta_2\cos(\lambda_2 - L_2)$$
$$\delta_1 \text{ und } \delta_2 < 180^\circ ,$$

so führen 1) und 2) zu l_1, b_1, l_2, b_2, womit $u_2 - u_1$ durch 4) erhalten wird. Aber auch diese Gleichung läßt sich noch durch eine geeignetere ersetzen, was uns zur Gaußschen Methode führt.

124. Bestimmung einer Kreisbahn. Gaußsche Methode. Wenn man auf der Sphäre die heliozentrischen Örter der Erde: E, und des Planeten: P durch größte Kreise EP verbindet, so liegen auf diesen auch die Punkte G, welche den geozentrischen Richtungen des Planeten entsprechen, d. h. die Punkte, wo die zu den Richtungen EP durch S gezogenen Parallelen die Sphäre schneiden. Die Lage der größten Kreise EPG kann also durch die gemessenen Koordinaten bestimmt werden und gleichzeitig die schon vorhin eingeführten Winkel δ, die dem Bogen EG der Sphäre entsprechen. Man erhält, wenn die Breitenkreise durch G gezogen und γ die Neigungen der genannten größten Kreise gegen die Ekliptik genannt werden:

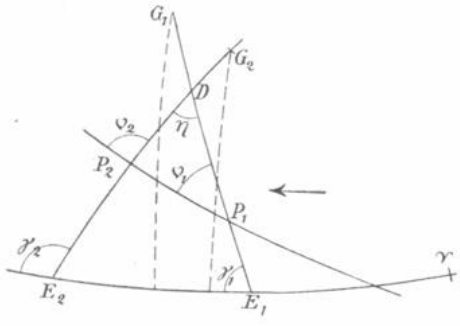

Fig. 54.

$$\begin{aligned} \sin\delta_1 \sin\gamma_1 &= \sin\beta_1 \\ \sin\delta_1 \cos\gamma_1 &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\delta_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \sin\delta_2 \sin\gamma_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\delta_2 \cos\gamma_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\delta_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \end{aligned} \right. \qquad 9)$$

Hierin können δ_1 und δ_2 kleiner als 180° angenommen werden.

Nennt man D den Schnittpunkt der größten Kreise E_1G_1 und E_2G_2 und bezeichnet den Winkel bei D im sphärischen Dreieck E_1DE_2 mit η und die Seiten E_1D und E_2D mit φ_1 und φ_2, so ergibt die Anwendung der Gaußschen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) . \end{aligned} \qquad 10)$$

Hieraus wird η, φ_1 und φ_2 gefunden. Die vorhin eingeführten Winkel $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind identisch mit den Bogen P_1G_1 und P_2G_2; man hat also:

$$P_1D = \varkappa_1 = \varphi_1 + \varkappa_1 - \delta_1 , \qquad P_2D = \varkappa_2 = \varphi_2 + \varkappa_2 - \delta_2 \qquad 11)$$

und daher im Dreieck P_1P_2D, wo der Bogen P_1P_2 wieder mit $\sigma = u_2 - u_1$ bezeichnet werden möge:

$$\cos\sigma = \cos\varkappa_1 \cos\varkappa_2 + \sin\varkappa_1 \sin\varkappa_2 \cos\eta ,$$

oder wie oben umgeformt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 + \varkappa_1)^2 . \qquad 12)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_1 - \delta_1 = \psi_1 , \qquad \varphi_2 - \delta_2 = \psi_2 ,$$

so bestehen die zur Hypothesenrechnung durchzurechnenden Formeln in folgenden:

$$\begin{aligned}
\sin x_1 &= \frac{R_1 \sin\delta_1}{a}, \qquad \sin x_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{a} \\
x_1 &= \psi_1 + x_1, \qquad x_2 = \psi_2 + x_2 \\
\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 &= \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)^2 \\
\sigma &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Ermittlung der übrigen Elemente kann entweder wie bei der vorigen Methode vorgenommen werden, was der kürzere Weg ist, oder eleganter in folgender Weise. Nennt man die Neigungen der größten Kreise $E_1 G_1$ und $E_2 G_2$ gegen die Bahn ν_1 und ν_2, so liefert das Dreieck $P_1 P_2 D$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1) &= \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\
\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1) &= \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \\
\cos\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) &= \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\
\cos\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) &= \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{14}$$

und somit ν_1, ν_2, und σ, welch letzteres mit dem bereits ermittelten Wert übereinstimmen muß. Dann geben schließlich die Dreiecke zwischen dem Knoten und $P_1 E_1$ bez. $P_2 E_2$:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(u_1 + (L_1 - \Omega)) &= \sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \nu_1) \\
\sin\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(u_1 + (L_1 - \Omega)) &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \nu_1) \\
\cos\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - (L_1 - \Omega)) &= \sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \nu_1) \\
\cos\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(u_1 - (L_1 - \Omega)) &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \nu_1)
\end{aligned} \tag{15}$$

und entsprechende Formeln für den zweiten Ort. Hieraus wird i, u, Ω bez. i, u_2, Ω gefunden, wodurch neue Kontrollen erhalten werden; $u_2 - u_1 = \sigma$ gibt eine Schlußprüfung.

Es ist noch anzuführen, daß man die Gl. 1) und 2) (Seite 379) für die Rechnung zweckmäßiger so schreibt:

$$\begin{aligned}
a\cos b \cos(l - L) &= \varrho \cos\beta \cos(\lambda - L) + R \\
a\cos b \sin(l - L) &= \varrho \cos\beta \sin(\lambda - L) \\
a \sin b &= \varrho \sin\beta
\end{aligned}$$

oder auch, wenn

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\sin(\delta - x)}{\sin\delta}, \qquad \frac{R}{a} = \frac{\sin x}{\sin\delta}$$

gesetzt und 9) beachtet wird:

$$\begin{aligned}
\cos b \cos(l - L) &= \cos(\delta - x) \\
\cos b \sin(l - L) &= \cos\gamma \sin(\delta - x) \\
\sin b &= \sin\gamma \sin(\delta - x),
\end{aligned}$$

Gleichungen, die man auch direkt aus der Fig. 54 ableiten kann.

125. Übersicht der Formeln für Berechnung einer Kreisbahn. Wir stellen im nachfolgenden diejenigen Formeln aus den beiden Methoden zusammen, die sich bei langjährigem Gebrauch am besten bewährt haben.

Daten:

	Des Planeten		Der Erde	
	Länge	Breite	Länge	Radiusvektor
t_1	λ_1	β_1	L_1	R_1
t_2	λ_2	β_2	L_2	R_2

I.
$$\begin{aligned} \sin\delta_1 \sin\gamma_1 &= \sin\beta_1 \\ \sin\delta_1 \cos\gamma_1 &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\delta_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\delta_2 \sin\gamma_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\delta_2 \cos\gamma_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\delta_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \end{aligned}$$

δ_1 und $\delta_2 < 180^\circ$.

II.
$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned}$$

$$\varphi_1 - \delta_1 = \psi_1, \qquad \varphi_2 - \delta_2 = \psi_2.$$

III. Hypothesenrechnung.

$$\sin\varkappa_1 = \frac{R_1 \sin\delta_1}{a}, \qquad \sin\varkappa_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{a}$$

$$\varkappa_1 = \psi_1 + \varkappa_1, \qquad \varkappa_2 = \psi_2 + \varkappa_2$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 + \varkappa_1)^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{k'}{2a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1), \qquad \log k' = 1.77\,186 \text{ (in Bogenminuten)}.$$

IV.
$$\varrho_1 = \frac{R_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1)}{\sin\varkappa_1}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2)}{\sin\varkappa_2}$$

$$\begin{aligned} \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) &= \cos\gamma_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1) \\ \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) &= \cos(\delta_1 - \varkappa_1) \\ \sin b_1 &= \sin\gamma_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) &= \cos\gamma_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2) \\ \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) &= \cos(\delta_2 - \varkappa_2) \\ \sin b_2 &= \sin\gamma_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2). \end{aligned}$$

V.
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u_1 &= \operatorname{tg}(l_1 - \Omega) \sec i \\ \operatorname{tg} u_2 &= \operatorname{tg}(l_2 - \Omega) \sec i \end{aligned} \qquad u \text{ im Quadranten von } l - \Omega$$

Kontrolle: $u_2 - u_1 = \sigma$.

VI.
$$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A, \qquad t_2^0 = t_2 - \varrho_2 A$$
$\log A$ 7.76118_{-10} in Einheiten des Tages.
$$\mu = \frac{u_2 - u_1}{t_2^0 - t_1^0} = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3.55001$$
$$u_0 = u_1 + (t_0 - t_1^0)\mu = u_2 + (t_0 - t_2^0)\mu .$$

Ephemeride:
$$u = u_0 + (t - t_0)\mu$$
$$\varrho \cos\delta \cos\alpha = a \sin a \sin(A + u) + X$$
$$\varrho \cos\delta \sin\alpha = a \sin b \sin(B + u) + Y$$
$$\varrho \sin\delta = a \sin c \sin(C + u) + Z .$$

126. Beispiel einer Kreisbahn. Im folgenden ist die Berechnung der Kreisbahn mitgeteilt, die für den Planeten 1901 GL bald nach seiner Entdeckung ausgeführt wurde. Zugrunde liegen zwei Heidelberger photographische Aufnahmen (A. N. Bd. 156, S. 30, 95). Die Hypothesenrechnung ist in das Schema nicht aufgenommen, da man sie am besten auf einem Nebenblatt ausführt. Man beginnt bei einem kleinen Planeten am besten mit $\log a = 0.40000$ und variiert je nach der Differenz um 2000—5000 Einheiten der fünften Stelle in $\log a$. Im vorliegenden Fall ergab die

I. Hyp. $\log a = 0.40000$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2} = -0.'89$

II. Hyp. $\log a = 0.42000$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2} = +0.'54$

$\Delta \log a = 0.02$, $p = -0.89$, $\Delta p = -1.43$

$\xi = +0.01244$

III. Hyp. $\log a = 0.41244$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2}$ $+0.'02$

$\Delta \log a = 0.01244$, $p = -0.89$, $\Delta p = -0.91$

$\xi = +0.01217$.

Es wurde daher $\log a = 0.41217$ als richtige Entfernung angenommen. Die vollständige Durchrechnung dieser letzten Hypothese sei hier angeführt:

$a^{\frac{3}{2}}$	0.61825	$\sin x_1$	9.07180	$\sin x_2$	8.87540	$\cos\frac{1}{2}\iota^2$	9.83888	$\sin\frac{1}{2}\iota^2$	9.49130
$\frac{k'(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$	2.29747	x_1	6°46′.52	x_2	4°18′.28	$\sin\frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2$	6.72930	$\sin\frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2$	7.17350
							6.56818		6.66480
σ	3°18′.37	x_1	+3°32′.40	x_2	+0°53′.17		6.92020		
$\frac{1}{2}\sigma$	1°39′.18	$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$	−1°19′.61	$\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$	+2°12′.78	$\sin\frac{1}{2}\sigma$	8.46010	$\frac{1}{2}\sigma$	1°39′.18

Kreisbahn. Planet [1901 GL] = (480).

		1901					
	t_1	Mai 24.55 243		t_2	Mai 38.47 951	$t_2 - t_1$	1.14 386
1901.0	λ_1	258° 4.′20		λ_2	254° 43.′90	$k'(t_2 - t_1)$	2.91 572
1901.0	L_1	243 5. 46		L_2	256 25. 84.		
	R_1	0.00 565		R_2	0.00 654		
	$\sin \beta_1$	9.20 234		$\sin \beta_2$	9.27 593	$\frac{1}{2}(L_2 - L_1)$	6° 40.′19
	$\cos$ »	9.99 442		$\cos$ »	9.99 212	$\frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$	65 22.58
	tg »	9.20 793		tg »	9.28 381	$\frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)$	33 23.51
	$(\lambda_1 - L_1)$	+ 14° 58.′74		$(\lambda_2 - L_2)$	− 1° 41.′94		
	$\sin$ »	9.41 240		$\sin$ »	$8.47\,201_n$		
	$\cos$ »	9.98 499		$\cos$ »	9.99 981		
	tg »	9.42 742		tg »	$8.47\,220_n$		
I.	$\operatorname{tg} \gamma_1$	9.79 553		$\operatorname{tg} \gamma_2$	$0.81\,180_n$	II. $\sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$	9.06 501
	$\sin$ »	9.72 402		$\sin$ »	9.99 490	$\cos$ »	9.99 705
	$\cos$ »	9.92 849		$\cos$ »	$9.18\,309_n$	$\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$	9.95 859
	γ_1	+ 31° 59.′07		γ_2	98° 46.′09	$\cos$ »	9.61 978
						$\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)$	9.74 065
	$\sin \vartheta_1$	9.47 832		$\sin \vartheta_2$	9.28 103	$\cos$ »	9.92 165
	$\cos$ »	9.97 940		$\cos$ »	9.99 193		
	tg »	9.49 892		tg »	9.28 910		9.02 360
	ϑ_1	17° 30.′45		ϑ_2	11° 0.′67		9.73 769
							8.68 479
III.	$\varkappa_1$	6 46.52		$\varkappa_2$	4° 18.′28		9.91 870
	$\vartheta_1 - \varkappa_1$	10 43.93		$\vartheta_2 - \varkappa_2$	6 42. 39	$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$	10° 55.′95
	$\sin$ »	9.27 002		$\sin$ »	9.06 738	$\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$	3 20.38
	$\cos$ »	9.99 233		$\cos$ »	9.99 702	φ_1	14 16.33
	$R_1 \sin \vartheta_1$	9.48 397		$R_2 \sin \vartheta_2$	9.28 757	φ_2	7 35.57
	a	0.41 217		a	0.41 217	$\sin \frac{1}{2}\eta$	9.74 565
	$\sin \varkappa_1$	9.07 180		$\sin \varkappa_2$	8.87 540	$\cos$ »	9.91 944
	$R_1 \sin(\vartheta_1 - \varkappa_1)$	9.27 567		$R_2 \sin(\vartheta_2 - \varkappa_2)$	9.07 392		
	ϱ_1	0.20 387		ϱ_2	0.19 852	ψ_1	− 3° 14.′12
						ψ_2	− 3 25.11
IV.	$\cos b_1 \sin(l_1 - L_1)$	9.19 851		$\cos b_2 \sin(l_2 - L_2)$	$8.25\,047_n$		
	$\cos b_1 \cos$ »	9.99 233		$\cos b_2 \cos$ »	9.99 702	l_1	252° 13.′41
	$\cos$ »	9.99 446		$\cos$ »	9.99 993	l_2	255 24.23
	$l_1 - L_1$	+ 9° 7.′95		$l_2 - L_2$	− 1° 1.′61	$l_2 - l_1$	3 10.82
	$\sin b_1$	8.99 404		$\sin b_2$	9.06 228	$\sin$ »	8.74 413
	$\cos$ »	9.99 787		$\cos$ »	9.99 709	$\cos$ »	9.99 933
	tg »	8.99 616		tg »	9.06 519		
V.	$\operatorname{tg} b_2$	9.06 519		$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.50 404	VI. $\varrho_1 A$	0.00 921
	$\operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)$	8.99 549		$\operatorname{tg}(l_2 - \Omega)$	9 58 151	$\varrho_2 A$	0.00 910
		8.23 625		$\operatorname{tg} u_1$	9.52 597	t_1^0	24.54 322
	$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega)$	8.99 616		$\operatorname{tg} u_2$	9.60 344	t_2^0	38.47 041
	$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega)$	9.49 212		u_1	18° 33.′45	$t_2^0 - t_1^0$	1.14 386
	$\cos$ »	9.97 893		u_2	21 51. 85		
	$l_1 - \Omega$	17° 42.′14		$u_2 - u_1$	3 18.40	$t_0 - t_2^0$	+ 0.02 959
	$l_2 - \Omega$	20 52.96		»	2.29 754	»	8.47 114
	$\operatorname{tg} i$	9.51 319		μ'	1.15 368	Δu	+ 0.′42
	$\sec i$	0.02 193		μ''	2.93 183	$k'' : a^{\frac{3}{2}}$	2.93 176

Elemente:

1901 Juni 7.5

u	21° 52.′27	i	18° 3.′30	$\log a$	0.41 217
Ω	234 31.27	μ	854.″7	Äqu.	1901.0

127. Die Unmöglichkeit einer Kreisbahn. Man kann mittels der oben gegebenen Formeln leicht eine Gleichung bilden, welche als einzige Unbekannte den Radius a der Kreisbahn enthält. Übersichtlicher ist es folgenden Weg einzuschlagen. Mittels der bekannten Formel für den cos eines Bogens zwischen zwei Punkten der Sphäre (Seite 3) kann man unter Hinzuziehung von 1) und 2) (Seite 379) unmittelbar ansetzen:

$$\cos(u_2-u_1)=\frac{1}{a^2}(\varrho_1\cos\beta_1\cos\lambda_1+R_1\cos L_1)(\varrho_2\cos\beta_2\cos\lambda_2+R_2\cos L_2)$$
$$+\frac{1}{a^2}(\varrho_1\cos\beta_1\sin\lambda_1+R_1\sin L_1)(\varrho_2\cos\beta_2\sin\lambda_2+R_2\sin L_2)+\frac{1}{a^2}\varrho_1\varrho_2\sin\beta_1\sin\beta_2$$

oder nach Auflösung der Klammern:

$$\cos(u_2-u_1)=\frac{\varrho_1\varrho_2}{a^2}\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{\varrho_1R_2}{a^2}\cos\beta_1\cos(\lambda_1-L_2)+\frac{\varrho_2R_1}{a^2}\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_1)$$
$$+\frac{R_1R_2}{a^2}\cos(L_2-L_1)+\frac{\varrho_1\varrho_2}{a^2}\sin\beta_1\sin\beta_2\,.$$

Nennt man kurz 1, 2 die den geozentrischen Örtern des Planeten, I, II die den Erdörtern entsprechenden Punkte der Sphäre und $(12),\ldots.$ die zwischenliegenden Bogen, so sieht man leicht, daß obige Gleichung so geschrieben werden kann:

$$a^2\cos(u_2-u_1)=\varrho_1\varrho_2\cos(12)+\varrho_1R_2\cos(1\,II)+\varrho_2R_1\cos(I2)+R_1R_2\cos(III)$$

(nebenbei bemerkt, gilt diese Gleichung auch, wenn es sich nicht um eine Kreisbahn handelt, sondern verschiedene Radienvektoren r_1 und r_2 vorliegen, es wird dann $r_1r_2\cos(u_2-u_1)=\cdots$). Trägt man hier ϱ_1 und ϱ_2 ein, wie sie aus:

$$a^2=\varrho_1^2+R_1^2+2R_1\varrho_1\cos\delta_1=\varrho_1^2+R_1^2+2R_1\varrho_1\cos(I1)$$
$$a^2=\varrho_2^2+R_2^2+2R_2\varrho_2\cos\delta_2=\varrho_2^2+R_2^2+2R_2\varrho_2\cos(II2)$$

oder:

$$a^2=[\varrho_1+R_1\cos(I1)]^2+R_1^2\sin(I1)^2$$
$$a^2=[\varrho_2+R_2\cos(II2)]^2+R_2^2\sin(II2)^2$$

hervorgehen, und ferner $u_2-u_1=\frac{k(t_2-t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$, so folgt:

$$\left(\sqrt{a^2-R_1^2\sin(I1)^2}-\cos(I1)\right)\left(\sqrt{a^2-R_2^2\sin(II2)^2}-\cos(II2)\right)\cos(12)$$
$$+\left(\sqrt{a^2-R_1^2\sin(I1)^2}-\cos(I1)\right)R_2\cos(1\,II)+\left(\sqrt{a^2-R_2^2\sin(II2)^2}-\cos(II2)\right)R_1\cos(I2)$$
$$+R_1R_2\cos(III)-a^2\cos\frac{k(t_2-t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}=0,$$

welches die in Aussicht gestellte Gleichung ist. Es ist bemerkenswert, daß dieselbe nur die trigonometrischen Funktionen der Bogen enthält, welche von dem sphärischen Viereck $1\,2\,III$ und seinen Diagonalen geboten werden. Die Gleichung ist transzendent und kompliziert, so daß die allgemeine Diskussion in bezug auf ihre Wurzeln in a erhebliche Schwierigkeiten bietet. Wird die Erdbahn als Kreis vom Radius 1 angenommen, so ist $a=1$ eine Wurzel der Gleichung, welche eben der Erdbahn entspricht. Um wenigstens zu einem Näherungsresultat zu kommen, hat *Tisserand**)

*) Bulletin astron. Tome XII. p. 53. 1895.

für den Fall, in welchem man zu Kreisbahnen greift, nämlich kleiner Zwischenzeiten und Nähe der Opposition, ferner unter der Voraussetzung, daß der Planet in der Nähe der Ekliptik stehe, eine Entwicklung der Gleichung vorgenommen, indem er $R_1 = R_2 = 1$ setzte, und nur die ersten Potenzen der kleinen Bogen (12), $(I\,II)$, $(I1)$, $(II2)$, $(1\,II)$, $(2\,I)$, $\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$ berücksichtigte. Indem wir betreffs der Einzelheiten auf die zitierte Abhandlung verweisen, sei hier angeführt, daß darin nur das eine Resultat festgestellt werden konnte, daß bei einer geozentrischen Bewegung in Breite, die über gewisse Grenzen hinausgeht, die Gleichung nur imaginäre Wurzeln haben kann, also keine Kreisbahn existiert. Es gibt jedenfalls noch andere Kriteria, allein die Frage nach der Existenz einer Kreisbahn ist nicht von besonderer Wichtigkeit. Daß bei stark exzentrischen Bahnen die Hypothese einer Kreisbahn zu Widersprüchen führen muß, liegt ohnehin auf der Hand.

Abschnitt XXV.

Geschichte der Bahnbestimmung.

128. Das Kometenproblem von Newton bis Olbers. Das Problem der Bahnbestimmung im heutigen Sinne aufzustellen und seine Lösung zu versuchen, bot sich erst Anlaß, nachdem *Newton* den Nachweis erbracht hatte, daß auch die Kometen sich in Kegelschnitten um die Sonne bewegen (Princ. math. Libr. III. 1686). Denn das Problem, die Bahnen der alten Planeten zu bestimmen, wie es *Kepler* zuerst aufstellte und löste (Astr. nova 1609), war infolge des Umstandes, daß für sie die mittleren Bewegungen durch Jahrhunderte lange Beobachtungen mit großer Genauigkeit bekannt waren, ein wesentlich anderes und leichteres, und der ebenfalls von Kepler gemachte Versuch, die Bahnen der Kometen zu ermitteln, mußte infolge der Voraussetzung, daß sie sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen (die übrigens noch im 18. Jahrhundert bei vielen Methoden zur Erlangung einer ersten Approximation benutzt wurde), zu schweren Irrtümern führen und es kann daher dieser Versuch so wenig wie die mißlungenen Ansätze seiner noch nach Newton den Kern des Problems übersehenden Nachfolger (Cassini, Bouguer, Boscovich, Gregori) zur Geschichte des eigentlichen Problems gerechnet werden. Newtons Lösung (Princ. Libr. III., Prop. XLI, in Wolfers Übersetzung Seite 472) ist eine konstruktive, graphische und war brauchbar; *Halley* hat damit eine große Zahl von Bahnen tatsächlich bestimmt und die Methoden des 18. Jahrhunderts lehnen sich alle mehr oder minder an sie an. Newton macht von dem Satze Gebrauch, daß die Sehne vom mittleren Radiusvektor im Verhältnis der Zeiten geschnitten werde d. h.

er setzt, wie Lambert bemerkte, die Dreiecke an Stelle der Sektoren; was seiner Methode zu einer vollkommenen fehlt, ist eigentlich nur der Euler-Lambertsche Satz, wofür er sich mit einer nur näherungsweise richtigen Beziehung zwischen der Sehne, den Radienvektoren und der Zwischenzeit begnügt. Sonst ist bereits das Prinzip der sukzessiven Näherung eingeführt, das bei ihm aber auf die Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort angewendet wird. Die Unbekannten, auf die *jetzt* die Hypothesenrechnung aufgebaut wird, nämlich die geozentrischen Distanzen der äußeren Beobachtungen, scheint zuerst *Bouguer* (Mém. de l'Acad. des sc. Paris Année 1733) benutzt zu haben, im übrigen aber ist seine Methode aus dem oben berührten Grunde unbrauchbar. Ein in Frankreich vor Bekanntwerden der Laplaceschen Methode häufig angewendetes Verfahren ist das von *Lacaille*, bekannt unter dem Namen »Methode der falschen Voraussetzungen«, welches mehr oder minder auf ein Erraten der Elemente hinauskommt und nach Newtons Methode einen Rückschritt bedeutet.

Die erste rein analytische, aber sehr unvollkommene Methode hat *Euler* in dem Werke »Theoria motuum planetarum et cometarum 1744« (deutsch von Paccassi 1781) gegeben: er wählt als Unbekannte die Entfernung des Kometen von der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, bestimmt dadurch Lage und Länge der Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung und daraus dann die Elemente; mit diesen wird der Ort für die Zeit einer vierten entfernteren Beobachtung berechnet, mit der Beobachtung verglichen und damit durch allmähliche Annäherung die Unbekannte selbst bestimmt. Er übersieht also vollständig das machtvolle Mittel, das ihm sein schon 1743 bekannter Satz geboten hätte, die Sehne mit der Zeit zu vergleichen, und verunstaltet seine Lösung durch Heranziehung von mehr Beobachtungen, als unbedingt nötig sind. Die von ihm durchgeführten im Werke selbst mitgeteilten Bahnberechnungen haben ihn wohl auch von der erheblichen Rechenarbeit, die seine Methode verlangt, überzeugt und er ist auf sie niemals zurückgekommen, sondern hat in dem Werke »Recherches et calculs sur la vraie orbite de la comète 1769« Petersbourg 1770, neue Wege eingeschlagen, die aber auch keinen Fortschritt bedeuten.

Einen wirklichen Schritt vorwärts machen nach Newton erst wieder die Arbeiten von *J. H. Lambert*, insbesondere die Abhandlungen »Insigniores orbitae Cometarum proprietates« 1761 und »Observations sur l'orbite apparente des Comètes 1771«*). Er hat erkannt, daß es sich in erster Linie um eine leicht durchführbare Methode handle, eine *erste Approximation* für eine beliebig einzuführende Unbekannte zu gewinnen und dann um Methoden, diese zu *verbessern*. Er hat zu dem Ende eine Gleichung 6. Grades mit einer Unbekannten aufgestellt, nach deren Auflösung genäherte Elemente sich sofort ergeben. Er selbst hat diese Gleichung freilich nicht aufgelöst, sondern hat sie durch ein graphisches Verfahren ersetzt.

Er hat ferner bemerkt, daß das Verhältnis, in welchem die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung vom mittleren Radiusvektor geschnitten wird, *genau gleich* ist dem Verhältnis der *Dreiecke*, welche von der Sonne und dem 1. und 2. Kometenort einerseits und der Sonne und dem 2. und 3. Kometenort andererseits gebildet werden, daß man also an Stelle dieser Dreiecke die entsprechenden para-

*) Neu herausgegeben in Ostwalds Klassiker Nr. 133.

bolischen Sektoren setzt, wenn man jene Abschnitte der ganzen Sehne den Zeiten proportional nimmt.

Er fand den wichtigen Satz, daß die Sektoren sich genau wie die Abschnitte der Sehne $\overline{13}$ verhalten, wenn der mittlere Radiusvektor durch den Schnittpunkt der Tangenten geht, die parallel zu den Sehnen $\overline{12}$ und $\overline{23}$ an die Parabel gezogen werden.

Er hat durch die Entdeckung und sofortige Verwendung seines Satzes, daß die Zeit, die zur Beschreibung eines Bogens gebraucht wird, durch die untergespannte Sehne und die Summe der Radienvektoren der Endpunkte ausgedrückt werden kann, das bequeme und wirkungsvolle Mittel geschaffen, die aufeinanderfolgenden Hypothesen rasch zu erledigen.

Durch die Projektion der Bahn auf eine Ebene, welche auf der durch Sonne, Erde und Komet zur Zeit der mittleren Beobachtung bestimmten Ebene (oder auf der Linie Erde-Sonne) senkrecht steht, findet er das einfachste Mittel, sofort die Richtung der Projektion des mittleren Radiusvektors auf diese Ebene angeben zu können, da dieselbe offenbar mit der Projektion der bekannten Visierlinie Erde-Komet zusammenfällt. Dadurch fällt für ihn die Betrachtung des Pfeiles des durchlaufenen Bogens fort, durch welche die Newtonsche Methode weitläufig und unsicher wird.

Endlich findet er in seinem Satze über die Krümmung der scheinbaren Bahn den ersten direkten Weg, die Distanz des Kometen von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung zu ermitteln. Er zeigt, daß der Abstand des mittleren beobachteten Ortes von dem größten Kreis, der durch die beiden äußeren beobachteten Örter hindurchgelegt wird, von der Krümmung der Kometen- und Erdbahn herrührt, von denen letztere bekannt, und erstere näherungsweise aus der Wirkung der Zentralkraft abgeleitet werden kann; dadurch entsteht eine Gleichung, welche als Unbekannte die Entfernung des Kometen von der Erde enthält.

Er ist auch der erste, der andere als parabolische Bahnen in Betracht zog und dadurch den Weg bahnte für das erst später mit Erfolg in Angriff genommene Planetenproblem. Lambert selbst hat die vollen Früchte seiner erfolgreichen Bemühungen nicht geerntet; ihm fehlte der Sinn für die analytische Behandlung des Problems, die doch allein zu exakten Resultaten führen kann; gerade am entscheidenden Punkt kehrt er, seiner Vorliebe für die Geometrie folgend, wieder zur Konstruktion zurück und beraubt sich dadurch um den vollen Erfolg, den erst Olbers davontrug. Indem dieser, wie Encke sich ausdrückt, in glücklichster Weise geometrische und analytische Behandlung verknüpfte, brachte er die Methode zu einer Vollendung, die noch heute nicht übertroffen ist; aber es muß doch hervorgehoben werden, daß sich die Olberssche Methode, abgesehen von einem Punkte, der zur Kürzung der Rechnung beiträgt, kaum von der Lambertschen unterscheidet.

Die von Lambert gegebene Anregung fiel aber auf fruchtbaren Boden und führte das Problem schnell der Lösung entgegen. Im Jahre 1777 stellte die Berliner Akademie, in deren Geschichte das Bahnbestimmungsproblem überhaupt eine bedeutungsvolle Rolle spielt, wohl auf Veranlassung von Lambert und Lagrange als Preisarbeit das Kometenproblem auf. Die eingelaufenen Arbeiten fanden zwar den Beifall der Akademie, können aber noch nicht als Fortschritt bezeichnet werden, da

sie nur in unwesentlichen Punkten über Lambert hinausgehen. Der Hauptgewinn des Preisauschreibens war jedenfalls, daß sich *Lagrange* mit dem Problem zu beschäftigen anfing und darüber zwei Mémoires schrieb (Mém. de l'Ac. de Berlin Année 1778, Oeuvres Band IV), die hinwiederum die Arbeiten von *Du Séjour* und *Laplace* (Mém. de l'Ac. Paris 1779, 1780) veranlaßten, worauf Lagrange in einem dritten Mémoire nochmals auf das Problem zurückkam (Mém. de l'Ac. Berlin 1783). Im zweiten Mémoire von 1778 (das erste enthält die geschichtliche Entwicklung des Problems) zeigt Lagrange zuerst, daß die Einführung der beiden Elemente, welche die Bahnlage bestimmen, als Unbekannte auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt; er entwickelt dann aus der Bedingung, daß die drei Örter in einer durch die Sonne gehenden Ebene liegen, die Ausdrücke der geozentrischen Distanzen durch die Dreiecksflächen, und ersetzt diese unter Benutzung des Euler-Lambertschen Satzes durch die Zwischenzeiten und die Summen der Radienvektoren. Diese Werte der geozentrischen Distanzen werden schließlich in aus der Betrachtung der Dreiecke Sonne-Erde-Komet hervorgehenden Formeln eingetragen, wodurch 3 Gleichungen mit den 3 Radienvektoren als Unbekannten entstehen. Für die Auflösung dieser äußerst komplizierten Gleichungen gibt Lagrange ein auf die Kleinheit der Zwischenzeiten basiertes, in praxi kaum durchführbares Verfahren an. — Im Mémoire von 1783 strebt er Vereinfachungen an, führt andere Unbekannte (Radiusvektor, Parameter und große Achse) ein, stellt für den Radiusvektor eine Gleichung siebenten Grades auf, zieht aber schließlich 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten vor, deren Auflösung wohl noch komplizierter ist, als die des zweiten Mémoire. Für die astronomische Praxis haben diese Methoden niemals Bedeutung gewonnen, denn Lagrange hat sie den Bedürfnissen der Rechner nicht anzupassen gewußt, aber sie sind trotzdem epochemachend in der Geschichte des Problems; denn dasselbe erfährt hier zum ersten Male eine elegante analytische Behandlung und scharfe Formulierung; die Grundgleichungen aus der Ebenenbedingung werden aufgestellt und aufgelöst, die Gleichung achten Grades wird korrekt gebildet, die Dreiecksflächen werden nach Potenzen der Zeit entwickelt usf.

In den Mém. de l'Ac. de Paris 1779—80 veröffentlichte *Laplace* eine ganz neue Methode, die mit den früheren kaum einen Zusammenhang hat: er ermittelt aus allen vorhandenen Beobachtungen Werte der ersten und zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten und zeigt wie durch sie die Elemente dargestellt werden können. Diese Methode ist reproduziert in Méc. cél. T. I, Livre II (1799), und ist in Frankreich vielfach gebraucht worden. Die Mém. de l'Ac. de Paris 1779 enthalten zwei Methoden von *Du Séjour*; die prinzipiellen Mängel der ersten hat Olbers ausführlich auseinandergesetzt; die zweite aber, von der merkwürdigerweise Du Séjour selbst wenig gehalten zu haben scheint und die Olbers in seiner Kritik ganz übergeht, hat sich später als identisch mit der Olbersschen Lösung herausgestellt (Fabritius, Astr. Nachr. Band 106).

Das Ende des achtzehnten Jahrhunderts brachte noch die vollständige, in mathematischer wie praktischer Hinsicht befriedigende Lösung des Kometenproblems. Olbers unterwarf in seiner klassischen »Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen, Weimar 1797« die Arbeiten seiner Vorgänger einer scharfsinnigen Kritik und faßte in geschickter und selbständiger Weise die

brauchbaren Resultate zu einer Methode zusammen, die bis heute ohne wesentliche Änderungen im Gebrauch ist. Solche Abänderungen in den Einzelheiten haben *Gauß* (Einige Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen 1813, Werke Band VI) und *Encke* (Über die Olberssche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen, Berliner Jahrbuch für 1833) beigetragen.

129. Die Bahnbestimmung im 19. Jahrhundert. Im 18. Jahrhundert war das Bahnbestimmungsproblem identisch mit dem Kometenproblem und das allgemeine Problem, den Kegelschnitt ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität zu bestimmen, wurde mehr nebenher und nur aus analytischem Interesse behandelt. Euler, Lambert, Lagrange und Laplace hatten aber auch hier den Boden so wohl bereitet, daß gleich mit Beginn des neuen Jahrhunderts, als durch Entdeckung des ersten kleinen Planeten auch das praktische Bedürfnis hervortrat, das schwierigere Problem eine vollständige Lösung erfuhr. Mit vollendeter Kunst ergänzte *Gauß* die Lücken in den Arbeiten der Vorgänger, brachte neue fruchtbare Ideen in das Problem und schuf namentlich als erster die Grundlagen einer astronomischen Rechenkunst, deren Mangel die alten Methoden so schwerfällig gemacht hatte. Sein Werk, die »Theoria motus corporum caelestium, 1809« ist bis auf den heutigen Tag das klassische Lehrbuch der Bahnbestimmung geblieben. Hervorgehoben sei daraus die Umwandlung der Gleichung achten Grades in eine leicht auflösbare Form, die Begründung der Hypothesenrechnung auf zwei Unbekannte, die Entwicklung eines bequemen Ausdruckes für das Verhältnis des elliptischen Sektors zum Dreieck, eine neue Art der Elementenbestimmung aus zwei heliozentrischen Örtern usf.

Die weitere Entwicklung erfolgte nach zwei Richtungen, die von der Gaußschen und von der Laplaceschen Lösung des Problems ihren Ausgang nahmen. Die Methode der Theoria motus konnte in ihrer Begründung und in einigen Einzelheiten wenn auch nicht verbessert so doch vereinfacht oder variiert werden; es sei hier auf die Arbeiten von *Encke* (Berl. Jahrbuch für 1854), *Hansen* (Verh. d. sächs. Ak. d. Wiss. Bd. 15, 1863), *Tietjen* (Berl. Jahrb. für 1879), *Oppolzer* (Bahnbestimmung I, 1. Aufl. 1870), *Weiß* (Denkschr. der Wiener Ak. d. Wiss. Band 60, 1893) nur im allgemeinen hingewiesen, da wir in unserer Darstellung die Einzelheiten schon hervorgehoben haben. Die Methode von Encke ist die eigentliche Methode des Rechners geworden, die bei den Anwendungen auf die zahlreichen Entdeckungen von kleinen Planeten von der Mitte des 19. Jahrhunderts ab sich immer aufs neue bewährte; sie ist ihrer einfachen Begründung halber auch in die meisten Lehrbücher übergegangen (Watson, Klinkerfues, Tisserand). Eine von der Gaußschen wesentlich abweichende Art der Begründung hat *Klinkerfues* eingeschlagen, indem er den Lambertschen Satz in den Mittelpunkt der Betrachtung stellte. Andere Bestrebungen gingen dahin, die Genauigkeit von Anfang weiter zu treiben, als dies Gauß für zweckmäßig gehalten hatte; hier ist vor allem die *Oppolzer*sche Bearbeitung des Problems (Bahnbestimmung I, 2. Auflage) zu erwähnen, bei welcher, um die Hypothesenrechnung abzukürzen, in den Entwickelungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen die vom Differenzialquotienten des Radiusvektors nach der Zeit abhängigen Glieder wenigstens genähert mitgenommen werden; in Fällen, die in der Praxis selten vorkommen und jedenfalls

vermieden werden können, besitzt dieses Vorgehen gegenüber dem Gaußschen Verfahren den Vorteil einer schnelleren Konvergenz d. h. einer geringeren Hypothesenanzahl, aber dieser wird erkauft durch eine komplizierte und wenig übersichtliche Rechnung, so daß die Methode selbst in der vereinfachten Tietjenschen Bearbeitung (Berl. Jahrb. für 1887) keinen Eingang bei den Rechnern gefunden hat. Dasselbe gilt von der *Gibbs*schen Methode, die von einem an und für sich sehr genauen und eleganten Ausdruck für die Verhältnisse der Dreiecksflächen ausgeht, aber dadurch, daß sie genötigt ist, die drei Radienvektoren als Unbekannte einzuführen, zu umständlichen Entwicklungen greifen muß; zudem ist bei ihr eine Hypothesenrechnung unmöglich, d. h. wenn die durch die Gibbssche Formel gebotene Genauigkeit nicht ausreicht, die Bahn durch die drei Beobachtungen streng hindurchzulegen, so bietet sie kein Mittel, dies durch sukzessive Verbesserung herbeizuführen. Später haben *Fabritius* und *Vogel* (Astr. Nachr. Bd. 128, 1891) ferner *Frischauf* (Die Gauß-Gibbssche Methode, Leipzig 1905) Anwendungen der Gibbsschen Formel auf die Bahnbestimmung vorzuschlagen, die von diesen Mängeln frei sind.

Über die Laplacesche Methode (1780) hat sich Lagrange dahin ausgesprochen, daß sie analytisch die einfachste Lösung des Problems sei, in der Anwendung aber keinen entsprechenden Nutzen gewähre, da es nicht gelinge die Differenzialquotienten der Koordinaten mit der nötigen Sicherheit zu bestimmen (Oeuvres Vol. XIV. p. 108). Trotz der vielen Bearbeitungen, die die Methode im Lauf des 19. Jahrhunderts erfahren hat, wird man dieses Urteil noch heute bestätigen müssen, da jede Anwendung derselben von der Mühseligkeit der Rechnung und von der geringen Sicherheit des erlangten Resultats den Beweis erbringt. Die Methode faßt zweifellos das Problem im Kern, aber die Hilfsmittel, deren sie sich bedient, sind unzulänglich; ersetzt man aber diese durch geeignetere, so kommt man eben auf die Gaußsche Methode. Wir geben hier nur die Titel der wichtigsten Arbeiten, die auf Laplace fußen:

Cauchy, eine große Zahl von Noten in den Comptes rendus 1847—48 (Oeuvres Vol. X).

Villarceau, Annales de l'Obs. Paris Vol. III.

Radau, Bull. astron. Vol. II, p. 1; Vol. IV, p. 409.

Bruns, Über den Lambertschen Satz, Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241.

Harzer, Astr. Nachr. Bd. 141; Publikationen der Sternwarte Kiel Nr. XI.

Leuschner, A short Method . . ., Publ. Lick Observatory Vol. VII.