

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Die Bahnbestimmung der Himmelskörper**

**Bauschinger, Julius**

**Leipzig, 1928**

Dritter Teil. die geozentrische Bewegung

## Dritter Teil.

### Die geozentrische Bewegung.

#### Abschnitt XVI.

##### Einzelne Örter.

###### 72. Ein einzelner geozentrischer Ort. Berechnung einer Ephemeride.

Die Betrachtung der Bewegungen der Planeten und Kometen vom *heliozentrischen* Standpunkt geht von den einfachsten Gesetzen aus und führt zur einfachsten Beschreibung derselben. Der *geozentrische* Standpunkt muß aber eingenommen werden, wenn es sich um die Beobachtung der Bewegungen handelt. Da wir die wahre Bewegung nur aus der beobachteten erschließen können, müssen wir die Beziehungen zwischen beiden untersuchen. Die geozentrische (scheinbare) Bewegung ist viel komplizierter als die wahre und eine allgemeine Theorie derselben daher sehr verwickelt; man kann aber auf eine solche verzichten, wenn man nur diejenigen Beziehungen erforscht, die zur Kenntnisnahme der wahren Bewegung führen; denn aus dieser kann man immer die scheinbare Bewegung leicht ableiten. Wir wollen diese Beziehungen hier zusammenstellen und mit der Betrachtung eines einzelnen Ortes beginnen.

Wir haben schon in Nr. 13 die mannigfachen Formen kennen gelernt, in die man die Beziehung zwischen dem geozentrischen und dem heliozentrischen Ort bringen kann. Wir wollen hier die wichtigste in der allgemein eingebürgerten Form nochmals aufführen und einige Umformungen daran knüpfen. Sind  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\varrho$  die geozentrischen Äquatorealkoordinaten eines Gestirnes,  $r$  und  $v$  Radiusvektor und wahre Anomalie,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  Neigung, Knoten und Abstand des Perihels vom Knoten der Bahn, bezogen auf die Ekliptik,  $i'$ ,  $\Omega'$ ,  $\omega'$  dieselben bezogen auf den Äquator,  $\varepsilon$  die Schiefe der Ekliptik, endlich  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die rechtwinkligen Äquatorealkoordinaten der *Sonne*, so hat man nach den Formeln 17) (Seite 30) da  $u = \omega + v$ ,  $u' = \omega' + v$  ist:

$$\varrho \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A + \omega + v) + X$$

$$\varrho \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B + \omega + v) + Y$$

$$\varrho \sin \delta = r \sin c \sin (C + \omega + v) + Z$$

wobei nach 9) (Seite 27)

$$\begin{aligned}
 \sin a \sin A &= \cos \Omega \\
 \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\
 \cos a &= \sin i \sin \Omega \\
 \sin b \sin B &= \cos \varepsilon \sin \Omega \\
 \sin b \cos B &= -\sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \cos \Omega = n \cos (N + \varepsilon) \\
 \cos b &= -\cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega \\
 \sin c \sin C &= \sin \varepsilon \sin \Omega \\
 \cos c &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega \\
 n \sin N &= \sin i \\
 n \cos N &= \cos \Omega \cos i.
 \end{aligned}
 \tag{1)$$

$$\text{Kontrolle: } \frac{\sin b \sin c \sin(B-C)}{\sin a \cos A} = -\operatorname{tg} i \text{ (nach 11) Seite 28)}$$

( $\sin a$ ,  $\sin b$ ,  $\sin c$  sind stets positiv; die  $\cos a$ ,  $\cos b$ ,  $\cos c$  werden nur selten gebraucht) oder mit Benutzung der Formeln 10) (Seite 27)

$$\begin{aligned}
 \varrho \cos \delta \cos \alpha &= r \sin a' \sin (A' + \omega' + v) + X \\
 \varrho \cos \delta \sin \alpha &= r \sin b' \sin (B' + \omega' + v) + Y \\
 \varrho \sin \delta &= r \sin c' \sin (C' + \omega' + v) + Z \\
 \sin a' \cos A' &= \cos \Omega' \\
 \sin a' \sin A' &= -\cos i' \sin \Omega' \\
 \cos a' &= \sin i' \sin \Omega' \\
 \sin b' \sin B' &= \sin \Omega' \\
 \sin b' \cos B' &= \cos i' \cos \Omega' \\
 \cos b' &= -\sin i' \cos \Omega' \\
 \sin c' \sin C' &= 0 \\
 \sin c' \cos C' &= \sin i' \\
 \cos c' &= \cos i'.
 \end{aligned}
 \tag{2)$$

Der Formeln 2) wird man sich nur bedienen, wenn man die Umwandlung der Ekliptikalelemente  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  in die Äquatorelemente  $\Omega'$ ,  $i'$ ,  $\omega'$  ohnehin hat vornehmen müssen. Es ist übrigens, wie schon in Nr. 27 erörtert:

$$\sin a' = \sin a, \quad \sin b' = \sin b, \quad \sin c' = \sin c = \sin i',$$

ferner:

$$A' = A - (\omega' - \omega), \quad B' = B - (\omega' - \omega), \quad C' = 0, \quad \text{da } C = \omega' - \omega.$$

Die Formeln 1) dienen zur Herstellung einer sogenannten *Ephemeride*, d. h. einer Reihe von geozentrischen Orten eines Gestirnes für äquidistante Zeitmomente unter Zugrundelage der Bahnelemente. Da sie häufig zur Anwendung kommen, wollen wir sie durch ein Beispiel erläutern.

Für den periodischen Kometen Brooks liegt folgendes Elementensystem vor:

Epoche 1896 Okt. 11.5 M. Z. Berlin.

Mittlere Anomalie für die Epoche $M = 356^{\circ} 42' 42''.25$		
Abstand des Perihels vom Knoten $\omega = 343 47 54.28$	} Ekliptik und Mittl. Äquin. 1900.0	
Länge des Knotens $\Omega = 18 4 18.67$		
Neigung gegen die Ekliptik $i = 6 3 34.28$		
Exzentrizitätswinkel $\varphi = 27 59 59.23$		
Mittlere tägliche Bewegung $\mu = 499''.97534$		
Log. der halben großen Achse $\text{Log} a = 0.567 3721$		

und soll zur Berechnung einer Ephemeride verwendet werden.

Wir rechnen zuerst die Gaußschen Konstanten  $a, A, \dots$  nach obigen Formeln 1) und brauchen dazu die Schiefe der Ekliptik für 1900.0  $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 8''.03$ .

$\cos \Omega$ 9.978 0290	$\sin a \sin A$ 9.978 0290	$\sin e \sin C$ 9.091 5210
$\sin \Omega$ 9.491 6550	$\sin a \cos A$ 9.489 2217 <sub>n</sub>	$\sin e \cos C$ 9.674 9334
$\cos i$ 9.997 5667	$\cos A$ 9.489 4547 <sub>n</sub>	$\cos C$ 9.985 6932
$\sin i$ 9.023 5059	$A$ 107° 58' 38''.63	$C$ 14° 37' 34''.20
$\cos \varepsilon$ 9.962 5550	$\sin a$ 9.999 7670	$\sin e$ 9.689 2402
$\sin \varepsilon$ 9.599 8660		Probe:
	$\sin b \sin B$ 9.454 2100	$B - C$ 4° 24' 1''.20
$n \sin N$ 9.023 5059	$\sin b \cos B$ 9.916 5860	$\sin(B - C)$ 8.884 9359
$n \cos N$ 9.975 5957	$\cos B$ 9.975 6011	$\sin b \sin e$ 9.630 2251
$\cos N$ 9.997 3092	$B$ 19° 1' 35''.40	Summe 8.515 1610
$N$ 6° 22' 17''.22	$\sin b$ 9.940 9849	$\sin a \cos A$ 9.489 2217 <sub>n</sub>
$N + \varepsilon$ 29 49 25.25		$(\text{tg } i)_c$ 9.025 9393
$\cos(N + \varepsilon)$ 9.938 2995		$(\text{tg } i)_a$ 9.025 9392
$n$ 9.978 2865		
$\sin(N + \varepsilon)$ 9.696 6469		

Somit werden die rechtwinkligen heliozentrischen Äquatorealkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x' &= r [9.999 7670] \sin ( 91^{\circ} 46' 32''.91 + v ) \\ y' &= r [9.940 9849] \sin ( 2 49 29.68 + v ) \\ z' &= r [9.689 2402] \sin ( 358 25 28.48 + v ) \end{aligned} \right\} \text{Äqu. 1900.0}$$

Die Berechnung der Polarkoordinaten  $r$  und  $v$  vollziehen wir nach den Formeln III (Seite 137) und gebrauchen hierzu folgende Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \text{Log } \sin \varphi & 9.671 6063 & \text{Log } e'' & 4.986 0314 \\ \text{Log } \cos \varphi & 9.945 9358 & \text{Log } a \cos \varphi & 0.513 3079 \end{aligned}$$

Die übrige Rechnung bedarf keiner Erläuterung, außer daß die rechtwinkligen Äquatorealkoordinaten der Sonne  $X, Y, Z$  für das Äquinoktium 1900.0 direkt dem Berliner Jahrbuch entnommen sind, und daß wir hier die Rechnung nur für ein einziges Zeitmoment, nämlich 1896 Nov. 16.5 durchführen:

$t - t_0$	+ 36	$x'$	+ 1.945 7085
$\mu(t - t_0)$	+ 4° 59' 59".11	$X$	- 0.564 1232
$M$	1 42 41.36	$y'$	+ 0.243 9471
$E$	3 13 28.14	$Y$	- 0.744 3351
$\sin E$	8.750 1082	$z'$	+ 0.063 3810
$\cos E$	9.999 3119	$Z$	- 0.322 9122
Subt.	0.275 8985		
$\cos E - e$	9.723 4134	$x' + X$	+ 1.381 5853
$r \sin v$	9.263 4161	$y' + Y$	- 0.500 3880
$r \cos v$	0.290 7855	$z' + Z$	- 0.259 5312
$\cos v$	9.998 0941		
$\operatorname{tg} v$	8.972 6306	$q \sin \alpha \cos \delta$	9.699 3069 <sub>n</sub>
$v$	5° 21' 50".09	$q \cos \alpha \cos \delta$	0.140 3777
$r$	0.292 6914	$\cos \alpha$	9.973 2347
		$q \sin \delta$	9.414 1896 <sub>n</sub>
$A + \omega + v$	97° 8' 23".00	$q \cos \delta$	0.167 1430
$B + \omega + v$	8 11 19.77	$\cos \delta$	9.993 3293
$C + \omega + v$	3 47 18.57		
$\sin(A + \omega + v)$	9.996 6194	$\left. \begin{array}{l} \alpha'' \\ \alpha^s \\ \delta \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 34^{\circ} 5' 25''.53 \\ 22^{\text{h}} 40^{\text{m}} 21^{\text{s}}.702 \\ - 10^{\circ} 0' 59''.15 \end{array} \right\}$
$r \sin a$	0.292 4584	$\operatorname{Log} q$	0.173 8137
$\sin(B + \omega + v)$	9.153 6194		
$r \sin b$	0.233 6763		
$\sin(C + \omega + v)$	8.820 0272		
$r \sin c$	9.981 9316		

Man kann die Gl. 1) leicht so umgestalten, daß man der Größen  $r$  und  $v$  nicht bedarf, sondern nur der exzentrischen Anomalie  $E$ , aus der jene in der Regel berechnet werden. In der Tat sind die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten des Planeten von der Form

$$rk \sin(K + v) = rk \sin K \cos v + rk \cos K \sin v,$$

die nach Einführung von

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E, \quad r \cos v = a (\cos E - e)$$

übergeht in:

$$ak \sin K \cos E - aek \sin K + ak \cos \varphi \cos K \sin E,$$

oder wenn man die Konstanten  $l, L, \lambda$  durch

$$\begin{aligned} l \sin L &= ak \sin K \\ l \cos L &= ak \cos \varphi \cos K \\ \lambda &= -aek \sin K \end{aligned}$$

bestimmt:

$$x' = l \sin(E + L) + \lambda. \quad 3)$$

Diese an sich bequemere Form wird man nur dann zur Anwendung bringen, wenn man den Radiusvektor nicht braucht, was aber nur selten der Fall ist.

Bei der *Parabel* kann man  $r$  durch seinen Wert ersetzen und schreiben:

$$x' = \frac{q \sin a \sin(A + \omega + v)}{\cos \frac{1}{2} v^2}$$

$$y' = \dots$$

### 73. Kriterium für die Zugehörigkeit eines beobachteten Ortes zu einer Bahn.

Man muß nicht selten die Entscheidung treffen, ob eine eben angestellte vereinzelte Beobachtung eines kleinen Planeten oder Kometen einem bereits in früheren Jahren beobachteten Gestirn, für das eine Bahn vorliegt, angehören könne oder nicht. Ein einfaches Kriterium hierfür läßt sich leicht bilden, wenn man bedenkt, daß die durch die Beobachtung festgelegte Gerade die bekannte Bahnebene in einem Punkt  $P$  treffen muß, der in der Nähe der Bahnkurve sich befindet. Damit wird man sich nämlich begnügen müssen und nicht die Übereinstimmung des beobachteten mit dem aus der Bahn berechneten Ort verlangen, da dasjenige Element, welches den Ort in der Bahn bestimmt, bei Planeten die mittlere Bewegung, bei Kometen die Durchgangszeit durchs Perihel, in der Regel am unsichersten bestimmt zu sein pflegt. Zur Ermittlung des Schnittpunktes  $P$  bedienen wir uns am besten des auf Seite 30 beschriebenen Verfahrens. Wir ziehen auf der heliozentrischen Einheitskugel die Ekliptik mit dem Ort der Erde in  $E$ , ferner den größten Kreis der Bahnebene, gegeben durch  $\Omega$  und  $i$ . Wir ziehen ferner durch die Sonne eine Gerade parallel zur beobachteten Richtung, die wir als durch Länge und Breite gegeben annehmen; diese Gerade treffe die Sphäre in  $G$ , dessen Koordinaten die beobachteten  $\lambda$  und  $\beta$  sein werden. Der durch  $E$  und  $G$  gelegte größte Kreis trifft den größten Kreis der Bahn in dem Punkte  $H$ , der die Richtung des erwähnten Schnittpunktes, gesehen von der Sonne angibt. Nennt man  $L$  die Länge der Erde,  $\gamma$  den Winkel, den der größte Kreis  $EG$  mit der Ekliptik bildet,  $\chi$  die Länge des Bogens  $EG$ ,  $\alpha$  die Länge des Bogens  $HG$ , so ist  $\chi$  und  $\gamma$  durch

$$\sin \chi \sin \gamma = \sin \beta$$

$$\sin \chi \cos \gamma = \cos \beta \sin(\lambda - L)$$

$$\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L)$$

gegeben und darauf  $KH = u$  und  $EH = \chi - \alpha$  aus dem Dreieck  $KEH$  durch die Gaußschen Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (u + (\chi - \alpha)) = \sin \frac{1}{2} (\gamma + i) \sin \frac{1}{2} (L - \Omega)$$

$$\sin \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (u + (\chi - \alpha)) = \sin \frac{1}{2} (\gamma - i) \cos \frac{1}{2} (L - \Omega)$$

$$\cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (u - (\chi - \alpha)) = \cos \frac{1}{2} (\gamma + i) \sin \frac{1}{2} (L - \Omega)$$

$$\cos \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (u - (\chi - \alpha)) = \cos \frac{1}{2} (\gamma - i) \cos \frac{1}{2} (L - \Omega),$$

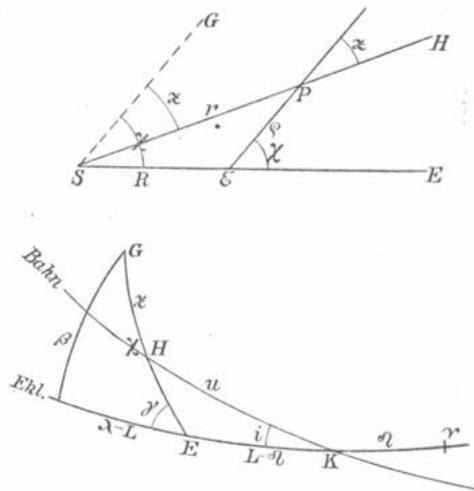


Fig. 35.

wo  $\eta$ , der Winkel bei H, weiter nicht gebraucht wird. Mittels  $\chi$  und  $\varkappa$  ergibt sich aus dem ebenen Dreieck zwischen Sonne, Erde und Schnittpunkt  $P$  die Entfernung ( $r$ ) des letzteren von der Sonne durch

$$(r) = R \frac{\sin \chi}{\sin \varkappa}.$$

Indem diese Distanz mit dem aus den Bahnelementen des Kometen oder Planeten folgenden Radiusvektor nahe übereinstimmen muß, ergibt sich das gewünschte Kriterium. Der Radiusvektor ist aber, wenn es sich um einen kleinen Planeten oder kurzperiodischen Kometen handelt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (p = \text{Parameter}),$$

wo  $v$  mittels des obigen  $u = \omega + v$  aus:

$$v = u - \omega$$

berechnet werden kann. Das Kriterium wird also:

$$1 + e \cos(u - \omega) = \frac{p \sin \varkappa}{R \sin \chi}. \quad \text{A.}$$

Liegt die Vermutung vor, daß das beobachtete Gestirn mit einem früher berechneten langperiodischen Kometen identisch sei, so wird man das Kriterium in einer etwas umgestalteten Form anwenden. Rechnet man nämlich  $E$  aus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(u - \omega),$$

so wird nach Formel VI. (Seite 138)

$$r = a(1-e) \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = q \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2}(u - \omega)^2},$$

wo  $q$  die Periheldistanz ist. Der Vergleich mit ( $r$ ) gibt dann:

$$\cos \frac{1}{2}(u - \omega)^2 = \frac{q \sin \varkappa}{R \sin \chi} \cos \frac{1}{2} E^2. \quad \text{B.}$$

Liegt vom früher beobachteten Kometen nur eine parabolische Bahn vor, so wird man in A. oder B.  $e = 1$  setzen und verwenden:

$$\cos \frac{1}{2}(u - \omega)^2 = \frac{q \sin \varkappa}{R \sin \chi}. \quad \text{C.}$$

Bei einem kleinen Planeten, der, wie meist der Fall, in der Nähe der Opposition beobachtet ist, kann man noch etwas einfacher verfahren. In der Opposition wird nämlich  $\lambda = L$  und daher

$$\chi = \beta \text{ und } \gamma = 90^\circ;$$

dann folgt aber:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \varrho)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}(\beta - \varkappa) = \sin(\lambda - \varrho) \operatorname{tg} i$$

und das Kriterium:

$$1 + e \cos(u - \omega) = \frac{a(1-e^2) \sin \varkappa}{R \sin \beta} \quad \text{D.}$$

oder wie oben:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(u - \omega)$$

$$\cos \frac{1}{2}(u - \omega)^2 = a(1-e) \frac{\sin \varkappa}{R \sin \beta} \cos \frac{1}{2} E^2. \quad \text{E.}$$

Übrigens ist in der Opposition  $\beta - \alpha = b =$  der heliozentrischen Breite und man hat daher

$$\frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{r}{\varrho};$$

diese Gleichung genügt, wenn das Verhältnis  $\frac{r}{\varrho}$  schon berechnet vorliegt, auch häufig zur Entscheidung der Identität.

**74. Zwei geozentrische Örter.** Wenn man von den Endpunkten einer bekannten Basis aus die Richtungen nach einem Objekt mißt, so läßt sich daraus die Entfernung des Objektes berechnen. Zwei geozentrische Beobachtungen, die zu verschiedenen Zeiten gehören, stellen solche Richtungsmessungen vor, und die Basis ist die Sehne der Erdbahn, die in der Zwischenzeit beschrieben wird. Bei astronomischen Objekten tritt nur die Komplikation ein, daß sie bewegt sind. Man wird daher die Aufgabe der Entfernungsbestimmung nur lösen können, wenn diese Bewegung bekannt ist. Macht man die unter Umständen erlaubte Annahme, daß die Entfernung des Objektes von der Sonne in der Zwischenzeit sich nicht ändert, so kann durch diese Entfernung, vermöge der Gesetze der Planetenbewegung, die Bewegung ausgedrückt werden; und da die gesuchte Entfernung des Planeten von der Erde ebenfalls in einer bekannten Beziehung zu der Entfernung desselben von der Sonne steht, so ist ersichtlich, daß unter der gemachten Voraussetzung die Bestimmung der Entfernung des Planeten von der Erde muß ausgeführt werden können. Wir werden dies später bei Bestimmung einer Kreisbahn bestätigt finden, auf welche bei Annahme einer konstanten Entfernung von der Sonne die Lösung offenbar hinausläuft. Die Ermittlung einer Kreisbahn hat in der Regel zum Ziel, über die Bahnlage rasch unterrichtet zu werden. Handelt es sich um einen kleinen Planeten, wo man die Entfernung von der Sonne wenigstens ungefähr als bekannt annehmen kann, so kann man die ungefähre Bahnlage aus zwei geozentrischen Örtern noch schneller erkennen, ja schon aus den vom Beobachter angegebenen täglichen Bewegungen der Koordinaten entnehmen, wenn man sich folgender Entwicklungen bedient. Sind  $E_1, E_2$  die beiden Erdörter in den Längen  $L_1$  und  $L_2$ ,  $G_1, G_2$  die geozentrischen Örter des Planeten, so liegen die heliozentrischen Örter  $H_1, H_2$  auf den größten Kreisen  $E_1 G_1$  und  $E_2 G_2$  und zwar da, wo der größte Kreis der Bahn sie schneidet. Sind ferner

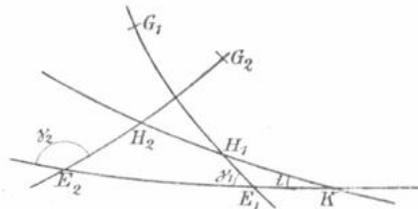


Fig. 36.

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Neigungen von  $E_1 G_1$  und  $E_2 G_2$  gegen die Ekliptik, und die Bogen  $E_1 G_1 = \chi_1$ ,  $E_2 G_2 = \chi_2$ , so folgt mittels der geozentrischen Koordinaten  $\lambda_1 \beta_1, \lambda_2 \beta_2$ :

$$\begin{array}{l|l} \sin \chi_1 \sin \gamma_1 = \sin \beta_1 & \sin \chi_2 \sin \gamma_2 = \sin \beta_2 \\ \sin \chi_1 \cos \gamma_1 = \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) & \sin \chi_2 \cos \gamma_2 = \cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos \chi_1 = \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) & \cos \chi_2 = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2). \end{array}$$

Setzt man nun die Bogen  $G_1 H_1 = \alpha_1$  und  $G_2 H_2 = \alpha_2$  und nennt  $a$  die geschätzte Entfernung von der Sonne, so wird, wenn noch die Entfernung der Erde von der Sonne gleich 1 angenommen wird:

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{a} \sin \chi_1, \quad \sin \alpha_2 = \frac{1}{a} \sin \chi_2,$$

womit offenbar die Punkte  $H_1, H_2$  ihrer Lage nach bestimmt sind. Nennt man  $l_1, b_1, l_2, b_2$  ihre Koordinaten, die sich aus

$$\begin{array}{l|l} \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) = \cos \gamma_1 \sin(\chi_1 - \alpha_1) & \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) = \cos \gamma_2 \sin(\chi_2 - \alpha_2) \\ \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) = \cos(\chi_1 - \alpha_1) & \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) = \cos(\chi_2 - \alpha_2) \\ \sin b_1 = \sin \gamma_1 \sin(\chi_1 - \alpha_1) & \sin b_2 = \sin \gamma_2 \sin(\chi_2 - \alpha_2) \end{array}$$

ergeben, so folgt schließlich nach den Formeln 7) und 8) (Seite 225)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{l_1 + l_2}{2} - \Omega \right) &= \frac{\sin(b_2 + b_1)}{\sin(b_2 - b_1)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l_2 - l_1) \\ \operatorname{tg} i &= \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin(l_1 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tg} b_2}{\sin(l_2 - \Omega)} \quad (\operatorname{tg} i \text{ positiv}). \end{aligned}$$

Liegen, wie in der Regel, die beiden Beobachtungen in der Nähe der Opposition, so kann man für rohe Überschlagsrechnungen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zu  $90^\circ$  annehmen und daher  $\chi_1 = \beta_1, \chi_2 = \beta_2$ ; dann wird

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{1}{a} \sin \beta_1, & \sin \alpha_2 &= \frac{1}{a} \sin \beta_2 \\ b_1 &= \beta_1 - \alpha_1, & b_2 &= \beta_2 - \alpha_2, \end{aligned}$$

ferner wird man  $\frac{l_1 + l_2}{2}$  durch  $l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2}$  oder  $l_2 - \frac{l_2 - l_1}{2}$  berechnen, je nachdem die erste oder die zweite Beobachtung näher der Opposition liegt;  $l_1$  oder  $l_2$  ersetzt man durch  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ ; für  $l_2 - l_1$  aber nimmt man am besten den Bogen  $H_1 H_2$ , der gleich ist:

$$\frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}(t' - t) = \frac{L_2 - L_1}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel. Vom Planeten 1903  $MN$  liegen die Daten vor:

	$\lambda$	$\beta$	$L$
1903 Okt. 24.5	29° 26'	- 2° 17'	30° 25'
Okt. 27.5	28 41	- 2 6	33 22

Nimmt man  $a = 2.51$  [0.4000], so stellt sich die ganze Rechnung wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = - 0^\circ 55' & \alpha_2 = - 0^\circ 50' & \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \quad 1^\circ 28' \\ b_1 = - 1 \quad 12 & b_2 = - 1 \quad 16 & \begin{array}{l} 1.9445 \\ a^{\frac{3}{2}} \quad .0.6000 \end{array} \\ \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 29 \quad 48 & & \frac{1}{2}(l_2 - l_1) \quad 22'.1 \\ \sin(b_2 + b_1) \quad 8.6622_n & & l_1 - \Omega \quad - 9^\circ 58' \\ \sin(b_2 - b_1) \quad 7.2419 & & \operatorname{tg} b_1 \quad 8.3776_n \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l_2 - l_1) \quad 7.8081 & & \sin(l_1 - \Omega) \quad 9.2382_n \\ \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega \right] \quad 9.2284_n & & \operatorname{tg} i \quad 9.1394 \\ \frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega \quad - 9^\circ 36' & & i \quad 7^\circ 51'. \\ \Omega \quad + 39^\circ 24' & & \end{array}$$

Diese mit einem minimalen Rechnungsaufwand erlangten Werte von  $\Omega$  und  $i$  stimmen meist innerhalb eines Grades mit den wahren Werten überein und leisten oft wertvolle Dienste bei Identifizierungen.

## Abschnitt XVII.

## Der Lambertsche Satz von der Krümmung der Bahnen.

**75. Drei geozentrische Örter. Der Lambertsche Satz.** Aus drei geozentrischen Örtern, welche sechs gemessene Koordinaten repräsentieren, müssen die sechs Elemente einer Bahn bestimmt werden und es ist die Hauptaufgabe der Bahnbestimmung, dieses Problem zu lösen. Es wird daher unsere späteren Überlegungen wesentlich erleichtern und uns das wahre Wesen der Methoden durchschauen lassen, wenn wir den Beziehungen dreier geozentrischer Örter besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Wir werden später sehen, daß das Problem nur lösbar ist, wenn die drei Örter nahe beisammen liegen; diese Voraussetzung wollen wir daher auch hier ein- und für allemal machen.

Sind  $E_1, E_2, E_3$  drei Erdörter, die mit der Sonne  $S$  in einer Ebene liegen,  $C_1, C_2, C_3$  drei gleichzeitige Örter eines um die Sonne laufenden Himmelskörpers, die ebenfalls mit  $S$  in einer Ebene liegen, so stellen  $E_1 C_1, E_2 C_2, E_3 C_3$  die Strahlen vor, deren Richtungen uns durch die geozentrischen Örter des Gestirns gegeben sind. An der Sphäre seien sie durch drei Punkte  $G_1, G_2, G_3$  repräsentiert, deren Koordinaten, etwa in bezug auf die Ekliptik, gemessen sind. Die drei Erdörter werden dort drei Punkte eines größten Kreises, der Ekliptik, sein und die drei Punkte  $H_1, H_2, H_3$ , welche den heliozentrischen Richtungen  $SC_1, SC_2, SC_3$  des Gestirns entsprechen, werden ebenfalls in einem größten Kreise liegen, dem Schnitt der Sphäre mit der Bahnebene  $SC_1 C_2 C_3$ . Außerdem liegen die Punkte  $H_1, H_2, H_3$  bzw. auf den größten Kreisen  $E_1 G_1, E_2 G_2, E_3 G_3$ , welche die Schnitte der Sphäre mit den Ebenen  $SE_1 C_1, SE_2 C_2, SE_3 C_3$  sind. Die drei Punkte  $G_1, G_2, G_3$  dagegen liegen *nicht* auf einem größten Kreise, sondern bilden, durch drei größte Kreise miteinander verbunden, ein sphärisches Dreieck, welches die Grundlage der ganzen Bahnbestimmung bildet und daher eingehend betrachtet werden muß. Die trigonometrische Behandlung wird später vorgenommen werden, für jetzt wollen wir seinen Zusammenhang mit der Entfernungsmessung, also dem Nerv der Bahnbestimmung, bloßlegen.

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz (Nr. 41) bewegt sich sowohl die Erde als der Planet so, daß vom Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Sektoren über-

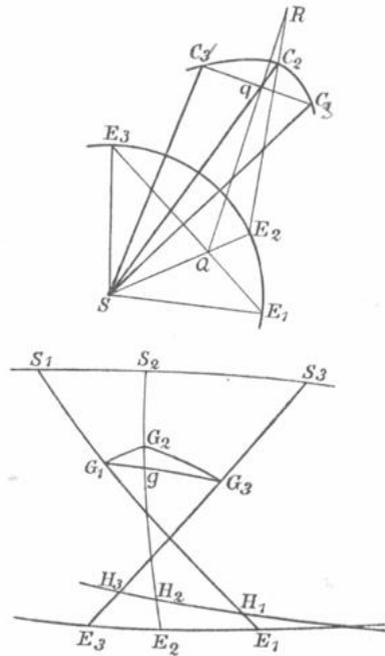


Fig. 37.

strichen werden. Da nun diese Sektoren unter der oben hervorgehobenen Voraussetzung sehr nahe gleich den entsprechenden Dreiecksflächen sind, so verhalten sich die Dreiecksflächen wie die Zwischenzeiten. Zieht man  $E_1 E_3$ , das vom mittleren Radiusvektor der Erde  $R_2$  in  $Q$  getroffen werde, ebenso  $C_1 C_3$ , das vom mittleren Radiusvektor des Planeten  $r_2$  in  $q$  getroffen werde, so werden sich die Dreiecke  $SE_1 E_2$  und  $SE_2 E_3$  einerseits und  $SC_1 C_2$  und  $SC_2 C_3$  andererseits wie die Zwischenzeiten  $\tau_3 = k(t_2 - t_1)$  und  $\tau_1 = k(t_3 - t_2)$  verhalten. Da die Dreiecke die Grundlinien  $SE_2$  bzw.  $SC_2$  gemeinsam haben, so verhalten sie sich wie die Höhen oder wie die Abschnitte der Sehne  $E_1 Q$  zu  $QE_3$  bzw.  $C_1 q$  zu  $qC_3$ . Wir haben somit das Resultat, daß der Schnittpunkt  $Q$  des mittleren Radiusvektors auf der Sehne zwischen den äußeren Orten sich proportional der Zeit, also mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Daraus folgt, daß die Richtung  $Qq$  die Sphäre in einem Punkt  $g$  trifft, der auf dem größten Kreis  $G_1 G_3$  liegt. In der Tat wird dann auch die geozentrische Bewegung des Punktes  $q$  gesehen von  $Q$  eine geradlinige und gleichförmige und die durch den Mittelpunkt der Sphäre parallel zu  $E_1 C_1$ ,  $Qq$ ,  $E_3 C_3$  gezogenen Strahlen liegen also in einer Ebene. Der Punkt  $g$  muß ferner auf dem größten Kreis  $E_2 G_2$  liegen, da die Gerade  $Qq$  der Ebene  $SE_2 C_2$  angehört; er ist also der Schnittpunkt der größten Kreise  $G_1 G_3$  und  $E_2 G_2$  und seine Lage kann durch die bekannten Stücke gezeichnet bzw. gerechnet werden.

Nach Formel 21) (Seite 179) ist der Pfeil

$$QE_2 = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 R_2^2}$$

und ebenso

$$qC_2 = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^2};$$

folglich verhalten sich die Pfeile der beiden Bahnen umgekehrt wie die Quadrate der Radienvektoren. Mit derselben Genauigkeit erhält man nach Formel 21<sup>b)</sup> (Seite 179)

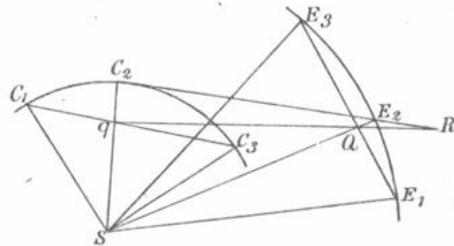
$$\frac{QE_2}{SQ} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 R_2^3}$$

$$\frac{qC_2}{Sq} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}.$$

Diese beiden Resultate vorausgesetzt, schließen wir nun folgendermaßen. Daß  $G_2$  nicht mit  $g$  zusammenfällt, hat seinen Grund darin, daß weder die Erde noch der Planet sich geradlinig und gleichförmig bewegen; denn wäre dies der Fall, so müßte, wie wir sahen, die geozentrische Bahn ein größter Kreis  $G_1 g G_3$  sein. Die Abweichung des Punktes  $G_2$  vom größten Kreis  $G_1 G_3$  wird also durch den Umstand erzeugt, daß der Planet sich in einer Kurve bewegt und folglich hängt die Ermittlung dieser Kurve, also die Bahnbestimmung, wesentlich von diesem Abstand  $G_2 g$  ab. — Man kann noch weiter gehen und aus der Lage des Punktes  $G_2$  zum größten Kreis  $G_1 G_3$  einen Schluß auf die Entfernung des Planeten von der Sonne machen. Die beiden Linien  $E_2 C_2$  und  $Qq$  gehören derselben Ebene  $SE_2 C_2$  an und schneiden sich in  $R$ ; der Winkel, den sie in  $R$  miteinander bilden, ist der Unterschied ihrer Richtungen und folglich gleich dem Bogen  $G_2 g$  der Sphäre. Ist nun

1.  $r_2 > R_2$ , d. h. ist zur Zeit der mittleren Beobachtung der Planet weiter von der Sonne entfernt, als die Erde, so wird nach obigem Satz  $QE_2 > qC_2$  und folglich muß  $R$  in der Richtung von  $E_2$  nach  $C_2$  liegen und der Winkel, den  $E_2C_2$  mit der Ebene der Ekliptik bildet, muß größer sein, als der Winkel, den  $Qq$  mit der Ekliptik bildet oder der Bogen  $E_2G_2$  muß größer sein als der Bogen  $E_2g$  der Sphäre, d. h.  $G_2$  muß auf derjenigen Seite des größten Kreises  $G_1G_3$  liegen, wo der Erdort  $E_2$  nicht ist, also auf derjenigen Seite, wo der  $180^\circ$  davon verschiedene Sonnenort  $S_2$  liegt oder »die Kurve  $G_1G_2G_3$  ist gegen den Teil der Ekliptik wo sich die Sonne befindet konvex«. Ist

2.  $r_2 < R_2$ , d. h. ist der Planet der Sonne näher als die Erde, so wird  $QE_2 < qC_2$  und folglich muß  $R$  in der Richtung von  $C_2$  nach  $E_2$  liegen und der Winkel, den  $E_2C_2$  mit der Ekliptik bildet, wird kleiner als der Winkel, den  $Qq$  damit bildet, oder der Bogen  $E_2G_2$  der Sphäre ist kleiner als  $E_2g$ , d. h.  $G_2$  liegt auf der Seite des größten Kreises  $G_1G_3$ , wo sich  $E_2$  befindet, also auf der entgegengesetzten wie der mittlere Sonnenort oder »die Kurve  $G_1G_2G_3$  ist gegen den Teil der Ekliptik, wo sich die Sonne befindet, konkav«. Ist



3.  $r_2 = R_2$ , d. h. steht der Komet ebenso weit von der Sonne ab, wie die Erde, so wird  $QE_2 = qC_2$ ; da nun  $SE_2 = SC_2$ , so folgt

$$Sq : SC_2 = SQ : SE_2,$$

d. h.  $E_2C_2$  und  $Qq$  sind einander parallel oder  $G_2$  fällt in den größten Kreis  $G_1G_3$ .

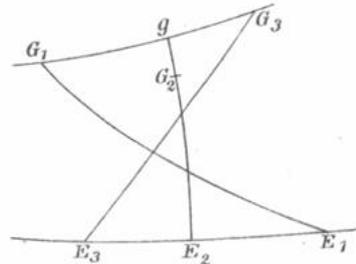


Fig. 38.

Offenbar gelten alle diese Überlegungen auch umgekehrt und wir erhalten daher den schönen und wichtigen Satz, den *Lambert* 1771 entdeckt hat und der die Wurzel der direkten Bahnbestimmungsmethoden ist\*):

Wenn man auf der scheinbaren Bahn eines Planeten oder Kometen zwei Punkte in nicht zu großer Entfernung voneinander annimmt und durch sie einen größten Kreis legt, so ist das Gestirn weiter von der Sonne entfernt als die Erde, wenn die zwischenliegenden Punkte auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Örter der Sonne und im entgegengesetzten Falle ist es näher. Oder:

Die Kurve der scheinbaren Bahn eines Gestirns, das weiter von der Sonne entfernt ist, als die Erde, ist stets konvex gegen den Teil der Ekliptik, wo gleichzeitig die Sonne steht; und die Kurve eines Gestirns, das näher an der Sonne steht, als die Erde, ist stets konkav gegen den Teil der Ekliptik, wo gleichzeitig die Sonne steht. An der Stelle, wo das Gestirn dieselbe Entfernung von der Sonne hat wie die Erde, hat also die Kurve der scheinbaren Bahn einen Wendepunkt.

\*) *Lambert*, Observations sur l'orbite apparente des Comètes. Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin 1771. (Ostwalds Klassiker Nr. 133.)

Die Analyse, die zu diesem Satz geführt hat, gestattet noch weiter zu gehen, nämlich einerseits bis zur Bestimmung der Entfernung des Gestirns von der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung, andererseits zur Aufstellung einer Beziehung zwischen den geozentrischen Entfernungen des Gestirns zu den Zeiten der ersten und dritten Beobachtung. Erstere ist von Lambert angedeutet und von Lagrange\*) genauer ausgeführt worden und liegt versteckt auch der von Gauß gegebenen Lösung des Planetenproblems zugrunde. Letztere ist von Lambert durchgeführt worden und bildet den Angelpunkt der Olbersschen Methode zur Lösung des Kometenproblems. Es erleichtert die Einsicht in die erwähnten Methoden, wenn wir die genannten Punkte schon hier weiter ausführen.

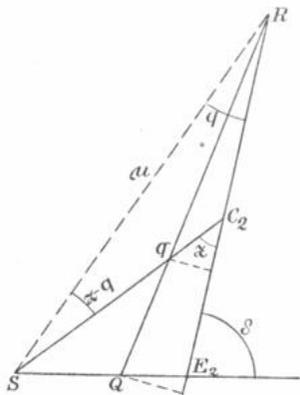


Fig. 39.

Es ist ohne weiteres klar, daß der sphärische Bogen  $G_2g$  aus den gegebenen geozentrischen Koordinaten des Gestirns und der Sonne durch ein einfaches trigonometrisches Verfahren bestimmt werden kann, wie später auszuführen sein wird. Damit ist, wie schon auseinandergesetzt, in dem ebenen Dreieck  $QE_2R$  der Winkel bei  $R$  bekannt geworden. Außerdem kennt man in diesem Dreieck den Winkel  $QE_2R = \text{Bogen } E_2G_2$  und die Strecke  $QE_2$  aus der als bekannt anzunehmenden Theorie der Erdbewegung. Das Dreieck ist also bestimmt und gibt durch Auflösung die Strecken  $E_2R$  und  $QR$ . Nun ist weiter in den ebenen Dreiecken  $RqC_2$  und  $RQE_2$  und nach den oben angegebenen Ausdrücken für die Pfeile  $qC_2$  und  $QE_2$ :

$$\frac{Rq}{RQ} = \frac{qC_2 \sin SC_2E_2}{QE_2 \sin SE_2C_2} = \frac{SE_2^3}{SC_2^3}$$

und ebenso

$$\frac{RC_2}{RE_2} = \frac{qC_2 \sin SqQ}{QE_2 \sin SQq} = \frac{qC_2}{QE_2} \cdot \frac{SQ}{Sq} = \frac{SE_2^3}{SC_2^3}.$$

Wird also auf der Strecke  $RE_2$  der Punkt  $C_2$  so bestimmt, daß dieser Gleichung genügt wird, so ist damit  $SC_2$  oder die heliozentrische Entfernung des Gestirns ermittelt. Die genannte Bestimmung von  $C_2$  bildet also den Kern des Problems. Wir werden jetzt zeigen, daß sie identisch ist mit der Auflösung der sogenannten Gaußschen Gleichung (in anderer Form schon bei Lagrange\*\*), die, wie wir später sehen werden, im Mittelpunkt der Bahnbestimmung steht. Nennt man  $\varrho_2$  die geozentrische Entfernung des Gestirns und  $k$  die Entfernung  $RE_2$ , so wird obige Bedingung:

$$\frac{k - \varrho_2}{k} = \frac{R_2^3}{r_2^3} \quad \text{oder} \quad \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)^2 = \left(\frac{\varrho_2}{k}\right)^2. \quad 4)$$

Nimmt man hierzu aus Dreieck  $SE_2C_2$ , den bekannten Winkel bei  $E_2$  gleich  $180^\circ - \delta$  setzend:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2 \cos \delta,$$

\*) Lagrange, Oeuvres IV, p. 472.

\*\*) Ebendasselbst p. 469.

so kommt aus der Verbindung beider Gleichungen eine Gleichung achten Grades, aus der  $r_2$  zu ermitteln ist, nämlich:

$$R_2^2 + k^2 \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)^2 + 2R_2 k \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right) \cos \delta - r_2^2 = 0.$$

Sie reduziert sich auf den siebenten Grad, da sie offenbar durch  $r_2 = R_2$  befriedigt wird. Mittels dieser Gleichung wird das Bahnbestimmungsproblem gelöst.

Hält man die mittlere Beobachtung fest, also  $r_2$ ,  $R_2$  und  $E_2 C_2$ , so bleibt nach obiger Gleichung, die man so schreiben kann:

$$\frac{RE_2 - C_2 E_2}{RE_2} = \frac{R_2^3}{r_2^3} = \text{const.}$$

auch  $RE_2$  konstant, d. h. der Punkt  $R$  ändert seine Lage nicht. Wie also auch die beiden äußeren Beobachtungen gewählt werden mögen, die Linie  $Qq$  geht immer durch denselben Punkt  $R$  von  $E_2 C_2$  (Satz von Lehmann-Filhés\*).

Wir kommen jetzt zu dem oben berührten zweiten Punkt. Macht man die wie wir wissen sehr nahe richtige Annahme, daß die Punkte  $Q$  und  $q$  mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf den Sehnen  $E_1 E_3$  bzw.  $C_1 C_3$  sich bewegen, so ist, wie auseinandergesetzt, die Projektion des geozentrischen Ortes von  $q$  an die Sphäre der größte Kreis  $G_1 g G_3$  (Fig. 37), dessen Bogen  $G_1 g = \omega_3$  und  $g G_3 = \omega_1$  bekannt sind;  $q$  selbst beschreibt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit die Strecke  $C_1' C_3'$ , deren Endpunkte die Endpunkte der geozentrischen Distanzen  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung sind. Werden die Zwischenzeiten von der ersten zur zweiten bzw. von der zweiten zur dritten Beobachtung  $\tau_3$  und  $\tau_1$  genannt, so wird

$$\frac{C_1' q'}{q' C_3'} = \frac{\tau_3}{\tau_1};$$

ferner ist

$$\frac{C_1' q'}{\varrho_1} = \frac{\sin \omega_3}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{q' C_3'}{\varrho_3} = \frac{\sin \omega_1}{\sin \gamma},$$

( $\gamma =$  Winkel bei  $q'$ ) also:

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{\sin \omega_3 \tau_1}{\sin \omega_1 \tau_3}.$$

Dies ist die unter dem Namen der Olbersschen bekannte Gleichung, die aber bereits Lambert\*\*) aufgestellt hat.

**76. Die Formulierung des Lambertschen Satzes von Bruns.** Durch Einführung des Begriffes der Krümmung der scheinbaren Bahn (siehe Nr. 8) ist Bruns zu einer schärferen Formulierung des Lambertschen Satzes gelangt (Astr. Nachr. Bd. 118, S. 243). Sind  $x, y, z, r, l, b$  die heliozentrischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten eines um die Sonne laufenden Himmelskörpers,  $\xi, \eta, \zeta, \varrho, \lambda, \beta$  die

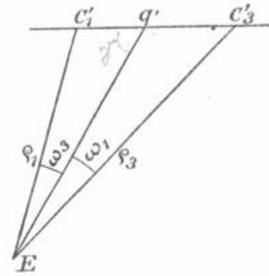


Fig. 40.

\*) Lehmann-Filhés, Astr. Nachr. Bd. 98, S. 307; Sidler, Astr. Nachr. Bd. 99, S. 139.

\*\*) Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 121.

entsprechenden geozentrischen Koordinaten und  $X, Y, Z, R, L, B$  die gleichzeitigen Koordinaten der Sonne, so ist

$$\xi = x + X, \quad \eta = y + Y, \quad \zeta = z + Z.$$

Macht man die Annahme, daß der Planet (mit verschwindend kleiner Masse) einerseits und der Schwerpunkt Erde-Mond andererseits in Ellipsen um die Sonne laufen, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k^2 x}{r^3}, & \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{k^2 y}{r^3}, & \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{k^2 z}{r^3}, \\ \frac{d^2 X}{dt^2} &= -\frac{k^2(1+m)X}{R^3}, & \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -\frac{k^2(1+m)Y}{R^3}, & \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -\frac{k^2(1+m)Z}{R^3}, \end{aligned}$$

wo  $m$  die vereinigte Masse von Erde und Mond darstellt, und folglich:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} - \frac{k^2(1+m)X}{R^3}$$

oder wenn  $x = \xi - X$  eingetragen wird:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{k^2 \xi}{r^3} - k^2 X \left( \frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Wird zur Abkürzung

$$\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3} = P$$

gesetzt, so folgt:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{k^2 \xi}{r^3} - k^2 X P$$

und analog für die anderen Koordinaten. Nennt man  $V$  die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung in der geozentrischen Bahn und beachtet, daß die Richtungskosinus in dem Punkte  $\xi\eta\zeta$  durch

$$a = \frac{\xi}{\varrho}, \quad b = \frac{\eta}{\varrho}, \quad c = \frac{\zeta}{\varrho}$$

gegeben sind, wo  $\varrho$  der konstante Kugelradius ist, so wird nach Seite 17 die Krümmung  $K$  in diesem Punkte gefunden durch

$$\varrho^3 V^3 K = \begin{vmatrix} \xi, & \frac{d\xi}{dt}, & -\frac{k^2 \xi}{r^3} - k^2 X P \\ \eta, & \frac{d\eta}{dt}, & -\frac{k^2 \eta}{r^3} - k^2 Y P \\ \zeta, & \frac{d\zeta}{dt}, & -\frac{k^2 \zeta}{r^3} - k^2 Z P \end{vmatrix}$$

oder nach bekannten Determinantensätzen:

$$\varrho^3 V^3 K = - \begin{vmatrix} \xi, & \frac{d\xi}{dt}, & X \\ \eta, & \frac{d\eta}{dt}, & Y \\ \zeta, & \frac{d\zeta}{dt}, & Z \end{vmatrix} k^2 P$$

oder wenn die Richtungskosinus wieder eingetragen werden:

$$\varrho V^3 K = - \begin{vmatrix} a, & \frac{da}{dt}, & X \\ b, & \frac{db}{dt}, & Y \\ c, & \frac{dc}{dt}, & Z \end{vmatrix} k^2 P.$$

Nach Seite 16 geht die geodätische Tangente durch die Punkte  $a, b, c$  und  $\frac{1}{V} \frac{da}{dt}, \frac{1}{V} \frac{db}{dt}, \frac{1}{V} \frac{dc}{dt}$  und der Pol derselben hat die Richtungskosinus

$$a_0 = \frac{1}{V} \left( b \frac{dc}{dt} - c \frac{db}{dt} \right), \quad b_0 = \frac{1}{V} \left( c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt} \right), \quad c_0 = \frac{1}{V} \left( a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt} \right),$$

folglich wird:

$$\varrho V^2 K = - k^2 P \left( \frac{X}{R} a_0 + \frac{Y}{R} b_0 + \frac{Z}{R} c_0 \right) R.$$

Nennt man  $F$  den Bogenabstand der Sonne von der geodätischen Tangente, so wird

$$\frac{X}{R} a_0 + \frac{Y}{R} b_0 + \frac{Z}{R} c_0 = \sin F$$

und daher:

$$\varrho V^2 K = - k^2 P R \sin F. \quad \text{A.}$$

Sind  $F$  und  $K$  vom selben Zeichen, d. h. wendet nach den Festsetzungen Seite 17 die Kurve ihre konkave Seite der Sonne zu, so muß nach dieser Gleichung  $P$  negativ sein, d. h.  $r \sqrt[3]{1+m} < R$ ; haben  $F$  und  $K$  verschiedenes Zeichen, d. h. wendet die Kurve ihre konvexe Seite der Sonne zu, so folgt  $r \sqrt[3]{1+m} > R$ . Die Gleichung A. ist somit die analytische Formulierung des Lambertschen Satzes. Für eine exakte Anwendung derselben ist zu beachten, daß die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta, X, Y, Z$  sich nicht auf den Mittelpunkt der Erde, sondern auf den Schwerpunkt von Erde und Mond beziehen.

Schreibt man,

$$-\frac{V^2 K}{k^2 R \sin F} = Q$$

setzend, die Gleichung A. in der Form:

$$Q \varrho = \frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3},$$

so hat man wieder in Verbindung mit

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2 R \varrho \cos \delta$$

die Gaußsche Gleichung achten Grades. Wir werden später sehen, daß es möglich ist, die Krümmung  $K$  zu berechnen. Dann kann die Gleichung unmittelbar zur Grundlage einer Bahnbestimmungsmethode gemacht werden (Siehe Nr. 108).

## Abschnitt XVIII.

## Die scheinbare Bahn.

**77. Die scheinbare Bahn und ihre ausgezeichneten Punkte.** Wir haben bis jetzt durch den Lambertschen Satz das allgemeine Resultat über die Kurve der scheinbaren Bahn, daß sie bei einem Himmelskörper, der seine Bahn ganz außerhalb der Erdbahn beschreibt (also z. B. bei allen kleinen Planeten) stets ihre konvexe Seite dem gleichzeitigen Sonnenort zukehrt; daß sie ferner bei einem Planeten, der ganz innerhalb der Erdbahn bleibt (also bei den unteren Planeten) stets ihre konkave Seite dem Sonnenort zuwendet; daß sie endlich bei einem Kometen, der zuerst außer- dann innerhalb der Erdbahn sich befindet, zuerst konvex dann konkav gegen die Sonne wird, also einen Wendepunkt aufweist. Man muß bei Feststellung der Krümmung natürlich vom scheinbaren Ort des Himmelskörpers auf dem *nächsten* d. h. auf dem Weg, der  $< 180^\circ$  ist, zum zugehörigen Sonnenort gehen.

Eine allgemeine Theorie der scheinbaren Bahn unter Zugrundelegung der wahren, wie sie schon von Lambert vorgeschlagen wurde, bietet bedeutende Schwierigkeiten, deren Überwindung zum Nutzen in keinem Verhältnisse stünde. Wir beschränken uns daher auf folgende Darlegungen. Die geozentrischen Koordinaten  $\lambda, \beta, \varrho$  eines Planeten, bezogen auf die Ekliptik, hängen mit der heliozentrischen Bewegung der Erde und des Planeten durch die Gleichungen 23) (Seite 32) zusammen:

$$\begin{aligned} \varrho \cos \beta \cos(\lambda - \varrho) &= r \cos u + R \cos U \\ \varrho \cos \beta \sin(\lambda - \varrho) &= r \sin u \cos i + R \sin U \\ \varrho \sin \beta &= r \sin u \sin i \end{aligned} \quad 1)$$

wo  $u$  das Argument der Breite des Planeten,  $U$  die Länge der *Sonne*, gezählt vom Knoten der Planetenbahn, bedeuten. Wir werden bald die Differentiale von  $\lambda$  und  $\beta$  nötig haben und wollen daher die einfachsten Ausdrücke hierfür vorweg aufstellen.

Wird 1) total differenziert, wobei die Elemente der Planetenbahn konstant gehalten werden, so folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda - \varrho) \cos \beta d\varrho - \varrho \sin(\lambda - \varrho) \cos \beta d\lambda - \varrho \cos(\lambda - \varrho) \sin \beta d\beta &= d(r \cos u + R \cos U) \\ \sin(\lambda - \varrho) \cos \beta d\varrho + \varrho \cos(\lambda - \varrho) \cos \beta d\lambda - \varrho \sin(\lambda - \varrho) \sin \beta d\beta &= d(r \sin u \cos i + R \sin U) \\ \sin \beta d\varrho &+ \varrho \cos \beta d\beta = d(r \sin u \sin i) \end{aligned}$$

und hieraus durch eine leicht erkenntliche Operation:

$$\begin{aligned} \varrho \cos \beta d\lambda &= -\sin(\lambda - \varrho) d(r \cos u + R \cos U) + \cos(\lambda - \varrho) d(r \sin u \cos i + R \sin U) \\ \varrho d\beta &= -\cos(\lambda - \varrho) \sin \beta d(r \cos u + R \cos U) - \sin(\lambda - \varrho) \sin \beta d(r \sin u \cos i + R \sin U) \quad 2) \\ &+ \cos \beta d(r \sin u \sin i). \end{aligned}$$

Hierin ist zu setzen:

$$\begin{aligned} d(r \sin u) &= d(r \sin(\omega + v)) = \sin u dr + r \cos u dv \\ d(r \cos u) &= d(r \cos(\omega + v)) = \cos u dr - r \sin u dv \end{aligned}$$

oder wenn in der konstanten Bahn nach Seite 149

$$dr = \frac{r^2}{p} e \sin v \, dv$$

gesetzt wird, nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} d(r \sin u) &= \frac{r^2}{p} (\cos u + e \cos \omega) \, dv = \frac{k}{\sqrt{p}} (\cos u + e \cos \omega) \, dt \\ d(r \cos u) &= -\frac{r^2}{p} (\sin u + e \sin \omega) \, dv = -\frac{k}{\sqrt{p}} (\sin u + e \sin \omega) \, dt. \end{aligned} \quad 3)$$

Für die Sonnenbahn wird ebenso, wenn  $E$  deren Exzentrizität und  $\Omega$  der Abstand des Perigäums vom Knoten der Planetenbahn genannt wird:

$$\begin{aligned} d(R \sin U) &= \frac{R^2}{P} (\cos U + E \cos \Omega) \, dV = \frac{k}{\sqrt{P}} (\cos U + E \cos \Omega) \, dt \\ d(R \cos U) &= -\frac{R^2}{P} (\sin U + E \sin \Omega) \, dV = -\frac{k}{\sqrt{P}} (\sin U + E \sin \Omega) \, dt. \end{aligned} \quad 4)$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir die scheinbare Bewegung eines äußeren Planeten, also den Fall  $r > R$ , etwa eines kleinen Planeten, in einzelnen Phasen verfolgen. Man entnimmt den Gl. 1)

$$\operatorname{tg}(\lambda - \varrho) = \frac{r \sin u \cos i + R \sin U}{r \cos u + R \cos U} \quad 5)$$

und ersieht, daß für  $u = U$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \varrho) = \frac{r \cos i + R}{r + R} \operatorname{tg} U$$

wird, d. h. im Falle einer kleinen Neigung wird  $\lambda - \varrho$  nahe gleich  $U$ , da  $\sin(\lambda - \varrho)$  und  $\cos(\lambda - \varrho)$  beide positive Faktoren, also gleiches Zeichen mit  $\sin U$  und  $\cos U$  haben; von der Erde aus gesehen erscheint dann der Planet in derselben Richtung wie die Sonne. Man nennt diese Phase die *Konjunktion* des Planeten.

Für  $u = 180^\circ + U$  wird:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \varrho) = \frac{R - r \cos i}{R - r} \operatorname{tg} U.$$

Hier haben  $\sin(\lambda - \varrho)$  und  $\cos(\lambda - \varrho)$  beide entgegengesetztes Zeichen wie  $\sin U$  bzw.  $\cos U$  und es folgt daher

$$\lambda - \varrho \text{ nahe gleich } 180^\circ + U,$$

d. h. von der Erde aus stehen Sonne und Planet in entgegengesetzter Richtung. Man nennt diese Phase die *Opposition* des Planeten. Um die Bewegungsrichtung während dieser beiden Phasen zu erkennen, bilden wir nach 2) 3) 4) das Differenzial  $d\lambda$ , wobei wir der Einfachheit halber Planeten- und Sonnenbahn als Kreisbahnen mit den Radien  $r$  und  $R$  annehmen wollen. Es erscheint, wenn die erste Formel in 2) noch mit  $q \cos \beta$  multipliziert und 1) beachtet wird:

$$\begin{aligned} \frac{q^2 \cos^2 \beta^2}{k} \frac{d\lambda}{dt} &= (r \sin u \cos i + R \sin U) \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \sin u + \frac{1}{\sqrt{R}} \sin U \right) + \\ &+ (r \cos u + R \cos U) \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \cos u \cos i + \frac{1}{\sqrt{R}} \cos U \right). \end{aligned}$$

Wird noch  $i = 0$  gesetzt, so gibt dies leicht:

$$\frac{g^2 \cos^2 \beta^2}{k} \frac{d\lambda}{dt} = (\sqrt{r} + \sqrt{R}) + \left( \frac{R}{\sqrt{r}} + \frac{r}{\sqrt{R}} \right) \cos(U - u)$$

oder für  $R = 1$

$$\frac{g^2 \cos^2 \beta^2}{k} \frac{d\lambda}{dt} = (1 + \sqrt{r}) + \left( r + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \cos(U - u). \quad (6)$$

Hieraus sieht man, daß  $d\lambda$  sicher positiv ist, der Planet sich also in derselben Richtung wie die Sonne bewegt, wenn  $u - U$  in der Nähe von  $0^\circ$  liegt; also in der Konjunktion ist der Planet *rechtläufig*. Ist dagegen  $u - U$  in der Nähe von  $180^\circ$ , so wird obiger Ausdruck negativ, also  $\lambda$  nimmt mit wachsender Zeit ab: der Planet ist in der Opposition *rüchläufig*. Wenn  $d\lambda$  von einem positiven zu einem negativen Wert übergeht oder umgekehrt, muß es durch Null hindurchgehen;  $d\lambda = 0$  entspricht einem Stillstehen des Planeten in Länge und einem Maximal- oder Minimalpunkt der Kurve. Die scheinbare Kurve muß also solche Stellen aufweisen, wo wie man sich ausdrückt der Planet *stationär* ist, und zwar wird an einer derselben die rechtläufige Bewegung zu einer rüchläufigen ( $\lambda$  ein Maximum) und an der darauffolgenden die rüchläufige zu einer rechtläufigen ( $\lambda$  ein Minimum). Zwischen beiden liegt die Opposition. Von einer Konjunktion mit der Sonne kommend wird also der Planet, wenn er eine gewisse nachher zu bestimmende Entfernung von der Sonne in rechtläufiger Bewegung erreicht hat, stationär, dann rüchläufig, wieder stationär und geht dann in rechtläufiger Bewegung einer neuen Konjunktion entgegen. Wenn die Neigung  $i$  von Null verschieden ist, kann hierbei der Fall eintreten,



Fig. 41.



Fig. 42.

daß der zweite rechtläufige Zweig den vorher beschriebenen rechtläufigen oder den rüchläufigen *schneidet*, d. h. daß die Kurve einen *Doppelpunkt* bekommt, zwischen dessen Elementen eine *Schleife* liegt (Form Fig. 41); ein solcher *muß* aber nicht auftreten, denn die Bewegung kann auch in Form Fig. 42 sich vollziehen. Wir werden nachher hierüber einige Sätze kennen lernen. Um das Eintreten des stationären Zustandes zu studieren, bilden und diskutieren wir die Gleichung  $d\lambda = 0$ . Aus 6) folgt, wenn  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  gesetzt wird:

$$\cos(U - u) = - \frac{1 - \sqrt{r}}{r + \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

Sobald also  $\pm(U - u)$  einen bestimmten Betrag, der größer als  $90^\circ$  ist, erreicht hat, beginnt der Wechsel in der Bewegungsrichtung. Für eine Kreisbahn ist dieser Betrag konstant; für eine Ellipse wird er um Größen von der Ordnung der Exzentrizität je nach der Lage des Planeten in der Ellipse variieren; im Aphel wird  $U - u$  kleiner sein, als im Perihel. Überhaupt je entfernter der Planet ist, desto näher rückt  $\pm(U - u)$  an  $90^\circ$  heran. Das obere Zeichen entspricht dem stationären Zustand vor der Opposition, das untere dem nach derselben. Man könnte hieraus offenbar die Dauer der retrograden Bewegung, dann die Zeit von einer Opposition

zur anderen usf. ableiten, doch lohnt es sich nicht auf diese Verhältnisse einzugehen, da sie für in der Ekliptik gelegene Kreisbahnen sich von selbst ergeben, für allgemein gelegene Ellipsen aber zu so komplizierten Ausdrücken führen, daß sie praktisch wertlos sind.

**78. Die Vorausberechnung der Oppositionszeit.** Da man die Ephemeriden der kleinen Planeten gewöhnlich über den Zeitraum von 20—30 Tagen vor und nach der Opposition erstreckt, wofür die Beobachtungsbedingungen die günstigsten sind, so muß man imstande sein, die Zeit der Opposition wenigstens genähert im voraus anzugeben, während sich das genaue Datum dann aus der Ephemeride selbst mit Leichtigkeit ergibt. Wir haben schon hervorgehoben, daß eine allgemeine Formel für das Oppositionsdatum wenig nützen würde, da sie notwendig sehr kompliziert wäre. Man kann aber durch sukzessive Näherung rasch zum Ziele kommen. Man wird zuerst das Datum feststellen, für welches die *mittlere Länge* des Planeten gleich der Länge der Erde wird; man erhält es durch Addition der synodischen Umlaufszeit des Planeten zum Datum der vorhergehenden Opposition; für die bei den kleinen Planeten in Betracht kommenden mittleren Bewegungen  $\mu$  enthält folgendes Täfelchen die genäherten synodischen Umlaufzeiten, berechnet aus

$$T = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{\mu_0 - \mu}; \quad (\mu_0 = \text{mittl. tägl. Bew. der Erde})$$

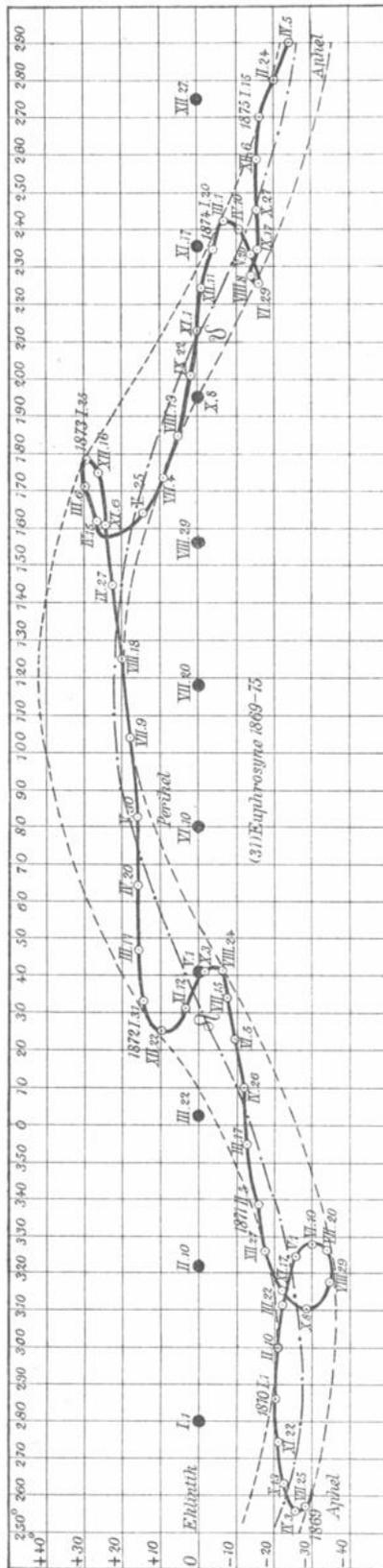
$\mu$	$T$	
400''	1 Jahr	47 Tage
500	1 »	60 »
600	1 »	75 »
700	1 »	90 »
800	1 »	106 »
900	1 »	124 »
1000	1 »	144 »
1100	1 »	164 »
1200	1 »	187 »
1300	1 »	211 »

Für dieses Datum rechnet man die mittlere Anomalie  $M$  des Planeten und daraus die wahre Anomalie  $v$ , am bequemsten und mit hier ausreichender Genauigkeit mittels des ersten Gliedes der Reihenentwicklung

$$v - M = 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \dots$$

worin  $e$  in Sekunden ausgedrückt einzusetzen ist. Indem man diesen Betrag  $v - M = C$  als konstant annimmt, sucht man jetzt durch Gleiten in der Sonnenephemeride den Tag, für welchen  $\Omega + \omega + M + C$  gleich der Erdlänge wird und berechnet dann für dieses und für ein einige Tage später liegendes Datum die heliozentrischen Längen  $l$  und  $l_1$  mittels:

$$\begin{aligned} \text{Datum } t: \quad & \text{tg}(l - \Omega) = \cos i \text{tg}(\omega + M + C) \\ \text{» } t_1: \quad & \text{tg}(l_1 - \Omega) = \cos i \text{tg}(\omega + M_1 + C). \end{aligned}$$



— Geozentrische Bahn. - - - - - Heliocentrische Bahn. --- Grenzkurven des Zodiakus.

Fig. 43.

Sind  $L$  und  $L_1$  die zugehörigen Erdlängen, so wird das Oppositionsdatum  $t_0$  gefunden aus:

$$t_0 = t + \frac{(l - L)(t_1 - t)}{(L_1 - L) - (l_1 - l)}$$

oder

$$t_0 = t_1 + \frac{(l_1 - L_1)(t_1 - t)}{(L_1 - L) - (l_1 - l)}$$

Stellt sich  $t_0 - t$  oder  $t_0 - t_1$  noch als groß heraus, so ist das Verfahren zu wiederholen, indem man für  $t$  das gewonnene  $t_0$  nimmt.

**79. Doppelpunkte und Schleifenbildung.** Wir machen noch einige allgemeine Bemerkungen über Doppelpunkte und Schleifenbildung. Aus der Gleichung

$$q \sin \beta = r \sin u \sin i$$

folgt, daß für Werte von  $u$  in der Nähe von  $0^\circ$  oder  $180^\circ$ , also wenn der Planet sich in der Nähe seiner Knoten befindet, die Breite  $\beta$  sich rasch ändert und von positiven zu negativen Werten bzw. umgekehrt übergeht. Hier wird also die neu einsetzende rechtläufige Bewegung in nördlicheren bzw. südlicheren Breiten stattfinden als die vorausgegangene; also: *»bei Oppositionen in der Nähe der Knoten findet keine Doppelpunktbildung statt«*. Ist dagegen  $u$  in der Nähe von  $90^\circ$  oder  $270^\circ$ , so wird  $\beta$  für  $u = 90^\circ \mp \nu$  bzw.  $270^\circ \mp \nu$  nahe denselben Wert erhalten, also die Möglichkeit einer Doppelpunktbildung am meisten geboten sein. Tritt für  $u = 90^\circ \mp \nu$  ein Doppelpunkt ein, so wird für die Werte von  $u$  zwischen  $90^\circ - \nu$  und  $90^\circ + \nu$   $\beta$  größer sein, als für diese Werte selbst; somit: *»der Doppelpunkt liegt im allgemeinen der Ekliptik näher als die Schleife«*. Knüpfen wir ferner an die Darlegungen und die Figur der Nr. 75 an, so wird folgendes ersichtlich. Das Eintreten eines Doppelpunktes besagt, daß von den zwei Erdörter  $E_1$  und  $E_3$  der Planet in derselben Richtung gesehen wird, d. h. daß  $E_1 C_1$  und  $E_3 C_3$  parallel sind. Die beiden Sehnen

$E_1 E_3$  und  $C_1 C_3$  liegen also in einer Ebene, der auf der Sphäre ein bestimmter größter Kreis entspricht, der durch den Doppelpunkt hindurchgeht. Nimmt man nun einen beliebigen dazwischen liegenden Ort  $E_2 C_2$ , so wird für diesen die Verbindungslinie  $Qq$  der Sehnenschnittpunkte ebenfalls der genannten Ebene und der entsprechende Punkt  $g$  der Sphäre dem bestimmten größten Kreis angehören. Nun bewegen sich innerhalb des Geltungsbereiches aller dieser Betrachtungen die Punkte  $Q$  und  $q$  mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf den Sehnen  $E_1 E_3$  bzw.  $C_1 C_3$ . Die Linien  $Qq$  sind somit alle parallel zu  $E_1 C_1$  und  $E_3 C_3$ , gehen an der Sphäre also alle durch denselben Punkt  $g$ , der infolgedessen notwendig mit dem Doppelpunkt  $G_1 G_3$  zusammenfällt. Da aber  $q$  in der Ebene  $SC_2 E_2$ , also  $g$  im größten Kreis  $G_2 E_2$  liegt, so folgt: »Die größten Kreise, welche die Punkte einer Schleife mit den zugehörigen Sonnenorten verbinden, gehen alle durch den Doppelpunkt« (Satz von Klinkerfues).

Zur Verdeutlichung der besprochenen Verhältnisse ist in der Figur 43 (Seite 248) die scheinbare Bahn von (31) Euphrosyne im System der Ekliptik für den vollen Umlauf 1869—1875 gezeichnet. Die Berechnung der Längen und Breiten ist in 40-tägigen Intervallen nach den Elementen

Epoche 1873 März 9.0	
$M_0 = 49^{\circ}33$	$\varphi = 12^{\circ}86$
$\omega = 62.25$	$\mu = 634''5$
$\Omega = 31.46$	$\log a = 0.4984$
$i = 26.45$	

ausgeführt worden. Die einzelnen Intervalle sind durch kleine Kreise mit beigeschriebenem Datum begrenzt. Die Sonnenörter sind ebenfalls von 40 zu 40 Tagen durch Vollkreise gekennzeichnet. Die charakteristischen Formen der Schleifenbildung, die Schnelligkeit der Bewegung, der Lambertsche Satz usf. treten deutlich zu Tage.

**80. Der Zodiakus der Bahnen.** Alle geozentrischen Örter, die ein Planet, dessen Bahn gegen die Ekliptik geneigt ist, einnehmen kann, liegen in einer Zone, die *Gauß*\*) den *Zodiakus* der Bahn genannt hat; die Grenzkurven desselben lassen sich durch geometrische Überlegungen (Tangentialebenen an die Erd- und Planetenbahn) bestimmen, am kürzesten ist aber folgender analytischer Weg. Aus den Gleichungen 2) 3) 4) ergibt sich, daß  $d\lambda$  und  $d\beta$  folgende Form haben:

$$d\lambda = gdu + GdU, \quad d\beta = hdu + HdU$$

und daß hierin:

$$\begin{aligned} g \cos \beta g &= \sin(\lambda - \Omega) \frac{r^2}{p} (\sin u + e \sin \omega) + \cos(\lambda - \Omega) \cos i \frac{r^2}{p} (\cos u + e \cos \omega) \\ gh &= \cos(\lambda - \Omega) \sin \beta \frac{r^2}{p} (\sin u + e \sin \omega) - \sin(\lambda - \Omega) \sin \beta \cos i \frac{r^2}{p} (\cos u + e \cos \omega) \\ &\quad + \cos \beta \sin i \frac{r^2}{p} (\cos u + e \cos \omega) \\ g \cos \beta G &= \sin(\lambda - \Omega) \frac{R^2}{P} (\sin U + E \sin \Omega) + \cos(\lambda - \Omega) \frac{R^2}{P} (\cos U + E \cos \Omega) \\ gH &= \cos(\lambda - \Omega) \sin \beta \frac{R^2}{P} (\sin U + E \sin \Omega) - \sin(\lambda - \Omega) \sin \beta \frac{R^2}{P} (\cos U + E \cos \Omega). \end{aligned}$$

\*) *Gauß*, Über die Grenzen der geozentrischen Örter der Planeten. Werke Bd. VI, S. 106 u. 194.

Läßt man nun  $u$  und  $U$  sich gleichzeitig so ändern, daß

$$\frac{du}{dU} = -\frac{G}{g}$$

ist, so ist  $d\lambda$  ständig Null, d. h.  $\lambda$  bleibt ungeändert,  $\beta$  aber wird so lange zu- oder abnehmen, bis es einen größten oder kleinsten Wert erreicht hat. Dies tritt ein, wenn  $d\beta = 0$  wird, d. h. wenn

$$-h \frac{G}{g} + H$$

verschwindet. Folglich ist für ein konstantes  $\lambda$

$$Hg - Gh = 0 \quad 7)$$

die Bedingungsgleichung dafür, daß  $\beta$  ein Minimum oder Maximum werde. Setzt man alle möglichen Werte von  $\lambda$  in diese Gleichung ein und löst sie nach  $\beta$  auf, so erhält man die Punkte der Grenzkurven des Zodiakus. Bildet man unter Benutzung obiger Werte von  $g, G, h, H$  die Gleichung 7), so kommt nach einiger Reduktion:

$$\begin{aligned} & \sin\beta (\sin u + e \sin \omega) (\cos U + E \cos \Omega) \\ & - (\sin\beta \cos i - \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) \sin i) (\cos u + e \cos \omega) (\sin U + E \sin \Omega) \\ & + \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) \sin i (\cos u + e \cos \omega) (\cos U + E \cos \Omega) = 0 \end{aligned}$$

oder, wenn mit  $g$  multipliziert und 1) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} r (\sin u (\sin u + e \sin \omega) + \cos u (\cos u + e \cos \omega)) (\cos U + E \cos \Omega) \\ + R (\sin U (\sin U + E \sin \Omega) + \cos U (\cos U + E \cos \Omega)) (\cos u + e \cos \omega) = 0 \end{aligned}$$

oder mit Beachtung von

$$\begin{aligned} r = \frac{P}{1 + e \cos(u + \omega)}, \quad R = \frac{P}{1 + E \cos(U - \Omega)}; \\ p (\cos U + E \cos \Omega) + P (\cos u + e \cos \omega) = 0. \end{aligned} \quad 8)$$

Dies ist die gesuchte Bedingungsgleichung in ihrer einfachsten Form. Auf eine allgemeine Diskussion derselben, welche alle Fälle der gegenseitigen Lage der Planeten- oder Kometenbahn gegen die Erdbahn umfaßt, gehen wir hier nicht ein, sondern beschränken uns auf den Fall einer die Erdbahn völlig umschließenden Bahn, wo schon die Anschauung lehrt, daß die Grenzkurven tatsächlich existieren. Zu jedem Wert von  $u$  liefert die Gl. 8) zwei Werte von  $U$ , nämlich  $U_1$  und  $U_2$ ; die zu jedem Paar  $u, U_1$  und  $u, U_2$  gehörigen geozentrischen Örter berechnet nach 1) (S. 244) sind die Punkte der nördlichen bzw. südlichen Grenzkurve. Für  $U$  selbst ergeben sich Grenzen, außerhalb welcher imaginäre Werte von  $u$  aus 8) hervorgehen; diese Grenzen, vermehrt um  $180^\circ$ , schließen die Erdörter ein, von denen aus der Planet an den Grenzkurven seines Zodiakus wahrgenommen werden kann, wo also die scheinbare Bahn diese Grenzkurven berührt. Zur Erläuterung habe ich den Zodiakus von (31) Euphrosyne berechnet, also desselben Planeten, dessen geozentrischen Lauf wir schon oben durch mehrere Jahre hindurch verfolgt haben. Die Grundlagen der Rechnung sind die Elemente von

Euphrosyne:		Sonne:	
$\log p$	0.4764	$\log P$	9.9999
$\psi$	$12^\circ 51.5$	$\Phi$	$0^\circ 57.6$
$\omega$	62 15.1	$\Omega$	249 30.3
$\Omega$	31 27.7		—
$i$	26 27.7		—

Man erhält als Bedingungsleichung:

$$\cos U = -0.3336 \cos u - 0.0287,$$

sodaß die Extreme von  $\cos U$   $-0.3623$  und  $+0.3049$  werden. Der Winkel  $U$  bewegt sich also einerseits zwischen  $72^{\circ}15'$  und  $111^{\circ}15'$ , andererseits zwischen  $248^{\circ}45'$  und  $287^{\circ}45'$ , und somit die Sonnenlängen zwischen  $103^{\circ}43'$  und  $142^{\circ}43'$  einerseits und  $280^{\circ}13'$  und  $319^{\circ}13'$  andererseits. Die erste Gruppe der  $U$  ergibt die südliche, die zweite die nördliche Grenzkurve. Die scheinbare Bahn kann diese Grenzkurven nur während der Zeiten erreichen, zu denen die Sonne zwischen den genannten Längen steht, also zwischen Juli 6 und August 15 die südliche und zwischen Januar 1 und Februar 8 die nördliche Kurve. In jedem Jahr werden je einmal beide Kurven von der scheinbaren Bahn gestreift. Um die Grenzkurven zu erhalten, wird  $u$  von  $15^{\circ}$  zu  $15^{\circ}$  variiert, damit  $U$  gerechnet und schließlich nach 1)  $\lambda$  und  $\beta$ . Nachstehende Tabelle enthält die Resultate.

$u$	Nördliche Kurve		Südliche Kurve	
	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
$0^{\circ}$	$10^{\circ}13'$	$0^{\circ}0'$	$53^{\circ}8'$	$0^{\circ}0'$
15	23 8	+ 7 48	67 14	+ 6 27
30	37 28	+ 16 37	79 45	+ 11 21
45	53 56	+ 25 49	91 17	+ 14 50
60	73 38	+ 34 9	101 56	+ 17 7
75	96 59	+ 39 58	112 3	+ 18 26
90	120 11	+ 41 35	121 59	+ 18 55
105	147 35	+ 38 40	132 5	+ 18 34
120	169 2	+ 32 23	142 42	+ 17 21
135	188 0	+ 24 30	154 29	+ 15 11
150	202 14	+ 15 45	166 24	+ 11 27
165	215 54	+ 7 30	179 54	+ 6 26
180	228 39	0 0	193 45	0 0
195	241 20	- 6 28	208 37	- 7 27
210	253 19	- 11 46	224 23	- 15 18
225	265 20	- 15 52	241 10	- 22 47
240	277 19	- 18 46	259 25	- 29 9
255	289 17	- 20 25	279 22	- 33 37
270	301 6	- 20 53	300 45	- 35 34
285	312 41	- 20 14	322 40	- 34 32
300	324 1	- 18 27	343 56	- 30 32
315	335 12	- 15 37	3 42	- 24 6
330	346 21	- 11 39	21 47	- 16 8
345	357 45	- 6 29	38 16	- 7 45
360	10 13	0 0	53 8	0 0

In obiger Darstellung (Fig. 43, Seite 248) des geozentrischen Laufes von Euphrosyne 1869—1875 sind diese Kurven eingetragen und man wird bei deren Betrachtung die obigen Bemerkungen bestätigt finden.

Man kann natürlich auch die AR und Dekl. der Punkte der Grenzkurven berechnen; man braucht nur statt der Formeln 1) (Seite 244) die Formeln 1) (Seite 229/30) zu nehmen.