

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Die Bahnbestimmung der Himmelskörper**

**Bauschinger, Julius**

**Leipzig, 1928**

Zweiter Teil. Die heliozentrische Bewegung

## Zweiter Teil. Die heliozentrische Bewegung.

### Abschnitt IX.

#### Geometrie der Kegelschnitte.

**36. Entstehung der Kegelschnitte.** Die Untersuchung der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne wird uns zu dem Resultate führen, daß dieselbe in Kegelschnitten erfolgt. Es erscheint daher notwendig, eine kurze Theorie dieser Kurven vorzuschicken und zwar mit besonderer Rücksicht auf die astronomischen Verhältnisse. Die älteste Definition dieser Kurven, als Schnitte eines Kegelmantels, wird sich am besten als Grundlage unserer Entwicklungen eignen.

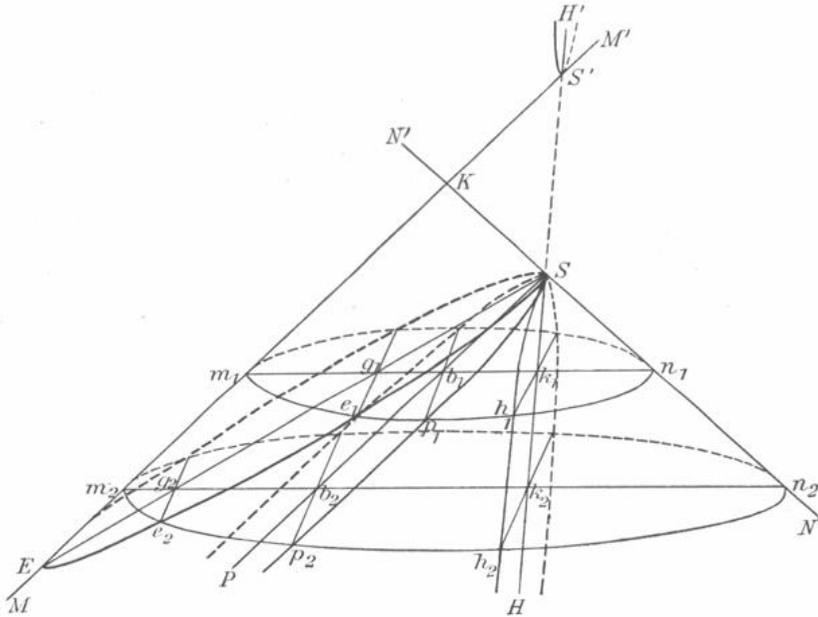


Fig. 22.

Aus dem Mantel eines geraden Kreiskegels (Fig. 22) schneiden eine durch seine Achse gelegte Ebene die Mantellinien  $MM'$  und  $NN'$  und beliebig viele senkrecht zur Achse gezogene Ebenen die Kreislinien  $m_1n_1, m_2n_2, \dots$  aus. Der Schnitt von

senkrecht zur Ebene  $MM'NN'$  gelegten Ebenen mit dem Kegelmantel führt dann, wenn wir von Ebenen, die durch die Spitze  $K$  gehen, absehen, auf Kurven, die Kegelschnitte, von denen wir sofort drei charakteristische Formen unterscheiden: 1. Schneidet die Ebene die beiden Mantellinien  $MM'$  und  $NN'$  auf derselben Seite der Spitze  $K$  oder ist der Winkel, den ihre Schnittlinie  $SE$  mit der Ebene  $MM'NN'$  mit der Mantellinie  $SN$  bildet, größer als der Öffnungswinkel des Kegels, dann entsteht eine geschlossene Kurve  $SE$ , die *Ellipse*, von der ein Spezialfall der *Kreis* ist, wenn die Schnittebene gleichzeitig senkrecht auf der Achse steht. 2. Ist die Ebene parallel zur Mantellinie  $MM'$ , also der Winkel ihrer Schnittgeraden mit  $SN$  gleich dem Öffnungswinkel, so entsteht eine Kurve  $SP$ , die *Parabel*, die sich nach *einer* Richtung ins Unendliche erstreckt. 3. Schneidet die Ebene die Mantellinien auf verschiedenen Seiten von  $K$  oder ist der Winkel der Schnittlinie  $SH$  mit der Mantellinie  $NN'$  kleiner als der Öffnungswinkel, so entsteht eine Kurve  $SH, S'H'$ , die *Hyperbel*, welche aus zwei Ästen besteht, die beide sich ins Unendliche erstrecken.

Aus der Entstehung der Kurven ergibt sich sofort eine Haupteigenschaft, die wir getrennt für die drei Formen ableiten.

1. *Ellipse*. Sind  $e_1$  und  $e_2$  beliebige Punkte der Kurve,  $m_1 e_1 n_1, m_2 e_2 n_2$  die durch sie gelegten Kegelkreise, so ist

$$\frac{\overline{g_1 e_1^2}}{g_2 e_2^2} = m_1 g_1 \cdot n_1 g_1,$$

$$\frac{\overline{g_2 e_2^2}}{g_2 e_2^2} = m_2 g_2 \cdot n_2 g_2,$$

also:

$$\frac{\overline{g_1 e_1^2}}{g_2 e_2^2} = \frac{m_1 g_1}{m_2 g_2} \cdot \frac{n_1 g_1}{n_2 g_2} = \frac{Eg_1}{Eg_2} \cdot \frac{Sg_1}{Sg_2},$$

somit:

$$\frac{\overline{g_1 e_1^2}}{Eg_1 \cdot Sg_1} = \frac{\overline{g_2 e_2^2}}{Eg_2 \cdot Sg_2},$$

d. h. für jeden Punkt der Ellipse besitzt dieses Verhältnis denselben Wert, den wir mit  $c$  bezeichnen wollen. Legt man durch  $S$  als Anfangspunkt in die Ebene der Kurve ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen  $X$ -Achse mit  $SE$  zusammenfällt, so kann die eben gefundene Eigenschaft der Koordinaten  $x, y$  eines Kurvenpunktes durch

$$\frac{y^2}{x(2a-x)} = c$$

ausgedrückt werden, wenn man  $SE = 2a$  setzt. Setzt man weiter  $ac = p$ , so wird daraus:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2, \quad 1$$

was wir die Scheitelgleichung der Ellipse nennen wollen.

2. *Parabel*. Hier wird

$$\frac{\overline{b_1 p_1^2}}{b_2 p_2^2} = \frac{m_1 b_1 \cdot n_1 b_1}{m_2 b_2 \cdot n_2 b_2} = \frac{Sb_1}{Sb_2}, \quad m_1 b_1 = m_2 b_2$$

d. h.

$$\frac{\overline{b_1 p_1^2}}{S b_1} = \frac{\overline{b_2 p_2^2}}{S b_2} = 2p$$

oder

$$y^2 = 2px. \quad 2)$$

(Scheiteltgleichung der Parabel.)

3. *Hyperbel.*

$$\frac{\overline{k_1 h_1^2}}{\overline{k_2 h_2^2}} = \frac{m_1 k_1 \cdot n_1 k_1}{m_2 k_2 \cdot n_2 k_2} = \frac{(SS' + Sk_1) \cdot Sk_1}{(SS' + Sk_2) \cdot Sk_2},$$

d. h.

$$\frac{\overline{k_1 h_1^2}}{(SS' + Sk_1) Sk_1} = \frac{\overline{k_2 h_2^2}}{(SS' + Sk_2) Sk_2} = e;$$

in einem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in  $S$  liegt, wird also, wenn  $SS' = 2a$  und  $ac = p$  gesetzt wird:

$$\frac{y^2}{x(2a + x)} = e$$

oder

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2. \quad 3)$$

(Scheiteltgleichung der Hyperbel.)

Vergleicht man die Gl. 1)–3), so sieht man, daß sie alle in der Form

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$$

enthalten sind, wenn man im Fall der Ellipse  $a$  positiv, im Fall der Parabel  $a$  unendlich und im Fall der Hyperbel  $a$  negativ vorausgesetzt.

Verschiebt man bei der Ellipse und Hyperbel den Anfangspunkt der Koordinatensystems um die Strecke  $a$ , d. h. verlegt man ihn in die Mitte der Linien  $SE$  bez.  $SS'$  und nennt die neuen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$ , so wird

$$\text{bei der Ellipse: } x = \xi + a, \quad y = \eta$$

$$\text{bei der Hyperbel: } x = \xi - a, \quad y = \eta$$

und die Gleichungen der Kurven im neuen Koordinatensystem werden daher:

$$\text{Ellipse: } \eta^2 = pa - \frac{p}{a} \xi^2$$

$$\text{Hyperbel: } \eta^2 = -pa + \frac{p}{a} \xi^2$$

oder wenn  $pa = b^2$  gesetzt wird:

$$\text{Ellipse: } \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad 4)$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \quad 5)$$

Dies sind die Mittelpunktsleichungen der Kegelschnitte. Bei der Parabel fällt der Mittelpunkt ins Unendliche, kann also nicht zum Anfangspunkt gemacht werden.

Wir diskutieren nun die Gl. 4) 5) 2) jede für sich.

**37. Die Ellipse.** Löst man die Gl. 4) nach  $\eta$  bez.  $\xi$  auf, so kommt:

$$\eta = \pm b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}$$

oder

$$\xi = \pm a \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}$$

d. h. die Kurve ist symmetrisch in bezug auf beide Koordinatenachsen. Für  $\xi = 0$  folgt  $\eta = \pm b$  und für  $\eta = 0$  folgt  $\xi = \pm a$ , d. h.  $a$  und  $b$  sind die in den Koordinatenachsen gelegenen Halbachsen. Wächst  $\xi$ , so nimmt der absolute Wert von  $\eta$  ab, bis er für  $\xi = \pm a$  zu Null wird. In den Punkten  $\xi = \pm a$ ,  $\eta = 0$  schließen sich also die ober- und unterhalb der  $X$ -Achse verlaufenden Zweige der Kurve zusammen. Werten von  $\xi$ , die größer sind als  $a$ , entsprechen keine reellen Werte von  $\eta$  mehr. Wächst  $\eta$ , so nimmt der absolute Betrag von  $\xi$  ab, bis er für  $\eta = \pm b$  zu Null wird. In den Punkten  $\eta = \pm b$ ,  $\xi = 0$  schließen sich also die links und rechts der  $Y$ -Achse verlaufenden Zweige der Kurve zusammen. Werten von  $\eta$ , die größer sind als  $b$ , entsprechen keine reellen  $\xi$  mehr. Die Kurve ist also geschlossen, die  $X$ - und  $Y$ -Achsen sind Symmetrieachsen und die in ihnen gelegenen Halbmesser  $a$  und  $b$  sind die größten bez. kleinsten, die auftreten können. Man nennt sie daher große und kleine Halbachse. Führt man Mittelpunktpolarkoordinaten ein durch

$$\xi = -\rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta,$$

wo also  $\theta$  von der negativen Seite der  $X$ -Achse oder von der Richtung vom Mittelpunkt  $M$  nach dem Scheitel  $S$  aus gezählt wird, so wird die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1$$

oder:

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta};$$

hieraus erkennt man den eben ausgesprochenen Satz am schnellsten; offenbar wird  $\rho$  am größten für  $\theta = 0$  ( $\rho = a$ ) und am kleinsten für  $\theta = 90^\circ$  ( $\rho = b$ ). Wird  $a = b$ , so daß die Gleichung der Kurve sich auf

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \quad 6)$$

reduziert, so wird

$$\rho^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad \rho = a,$$

d. h. die Kurve ist ein *Kreis*.

Beliebige durch den Anfangspunkt gezogene Durchmesser der Ellipse werden in ihm halbiert, ebenso wie die in den Achsen gelegenen. Der Anfangspunkt ist daher Mittelpunkt der Kurve.

Zieht man eine Schar paralleler Sehnen, so liegen deren Halbierungspunkte auf einem Durchmesser der Ellipse, der *konjugierter Durchmesser* genannt wird zu dem,

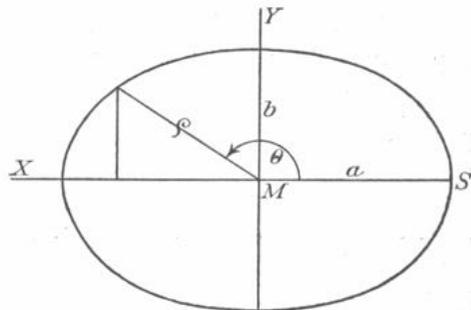


Fig. 23.

welcher der Sehnenschar angehört. Die an den Enden eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel zum konjugierten Durchmesser.

Führt man einen Parameter  $E$  ein, so können die Koordinaten der Punkte der Ellipse in der Form

$$\xi = -a \cos E, \quad \eta = b \sin E \quad 7)$$

geschrieben werden, denn offenbar erhält man hieraus durch Elimination von  $E$  die Ellipsengleichung. Um die geometrische Bedeutung von  $E$  zu erkennen, schlagen wir um die große Achse  $2a$  als Durchmesser einen Kreis, dessen Gleichung sein wird

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Einem bestimmten  $\xi = MP$  entspricht dann in der Ellipse der Punkt  $N$  mit

$$\eta = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}$$

und im Kreis der Punkt  $N'$  mit

$$\eta' = \sqrt{a^2 - \xi^2},$$

d. h. die Ordinaten beider Kurven verhalten sich wie  $b : a$ . Also wird:

$$PN = \eta = b \sin E = \frac{b}{a} PN'$$

oder

$$\sin E = \frac{PN'}{a} = \frac{PN'}{MN'},$$

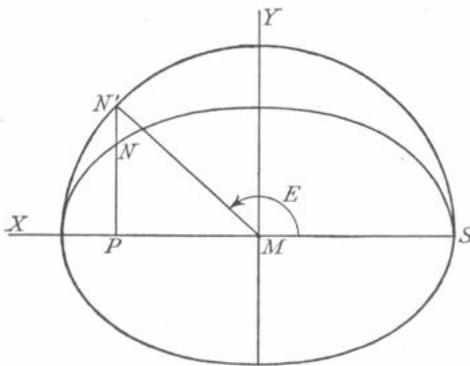


Fig. 24.

d. h.  $E$  ist jener Winkel, den der zum Punkt  $N'$  gehörige Halbmesser mit der  $X$ -Achse einschließt und zwar mit dem negativen Teil derselben oder dem, der nach dem Scheitel  $S$  führt, da  $MP = -a \cos E$ .

Mittels des Winkels  $E$  erhält man die einfachste Konstruktion der Ellipse.

Aus obigem Satz folgt sofort, daß auch der Inhalt der Ellipse sich zum Inhalt des über der großen Achse konstruierten Kreises wie  $b : a$  verhält, d. h. daß der Inhalt der Ellipse  $= ab\pi$  ist.

Trägt man auf der großen Achse der Ellipse vom Mittelpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke  $\sqrt{a^2 - b^2}$  ab, so erhält man zwei Punkte,  $F$  und  $F'$ , die man *Brennpunkte* der Kurve nennt und die offenbar von dem Endpunkte der kleinen Achse um die Strecke  $\sqrt{b^2 - (a^2 - b^2)} = b$  abstehen. Wir wollen die Strecke kurz mit

$$ae = \sqrt{a^2 - b^2}$$

bezeichnen, wo also  $e$  eine Zahl  $< 1$  ist und *Exzentrizität* genannt wird. Die Entfernung  $r$  eines Punktes  $N$  der Ellipse vom Brennpunkte  $F$ , der beim Scheitel  $S$  liegt, wird gefunden aus:

$$r^2 = \eta^2 + (\xi + ae)^2$$

oder wenn aus der Gleichung der Ellipse

$$\eta^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \xi^2$$

eingetragen wird:

$$r^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \xi^2 + \xi^2 + a^2 - b^2 + 2ae\xi$$

oder

$$r^2 = e^2 \xi^2 + a^2 + 2ae\xi = (a + e\xi)^2$$

$$r = a + e\xi.$$

Ebenso findet man als Entfernung  $r'$  vom anderen Brennpunkt  $F''$

$$r' = a - e\xi.$$

Es wird also

$$r + r' = 2a,$$

d. h. die Summe der beiden Radienvektoren, die von den Brennpunkten nach einem Punkt der Ellipse gezogen werden, ist konstant, nämlich gleich der großen Achse.

Wir verschieben jetzt den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems nach dem einen Brennpunkt  $F'$ ; dann ist der Zusammenhang der neuen Koordinaten  $X, Y$  mit den Mittelpunktskoordinaten  $\xi, \eta$ :

$$X = \xi + ae, \quad Y = \eta. \quad 8)$$

Es wird daher der Radiusvektor  $r$

$$r = a + e\xi = a + e(X - ae) = a(1 - e^2) + eX.$$

Nennt man  $v$  den Winkel, den  $r$  mit der Richtung von  $F'$  nach dem Scheitel  $S$  bildet, so daß  $r, v$  die Brennpunktpolarkoordinaten eines Punktes sind, so wird  $X = -r \cos v$  und daher

$$r = a(1 - e^2) - er \cos v$$

oder

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad 9)$$

welches die Gleichung der Ellipse in Brennpunktpolarkoordinaten ist. Für  $v = 0$  wird  $r = a(1 - e)$ ; der entsprechende Punkt der Ellipse, der *eine* Endpunkt der grossen Achse, liegt dem Brennpunkt  $F'$  am nächsten und heißt Perihel; für  $v = 180^\circ$  wird  $r = a(1 + e)$ ; der entsprechende Punkt der Kurve, der *andere* Endpunkt der großen Achse, ist am weitesten von  $F'$  entfernt und heißt Aphel; die sie verbindende Linie, in welcher die große Achse liegt, heißt Apsidenlinie. Für  $v = 90^\circ$  wird

$$r = a(1 - e^2);$$

man nennt diese Konstante den *Parameter* der Ellipse. Der Zusammenhang derselben mit der in der Scheitelgleichung 1) der Ellipse eingeführten Konstante  $p$  ergibt sich sofort, wenn wir  $b^2 = pa$  in  $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$  eintragen:

$$p = a(1 - e^2). \quad 10)$$

Die Gleichung der Ellipse kann also auch

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad 11)$$

geschrieben werden.

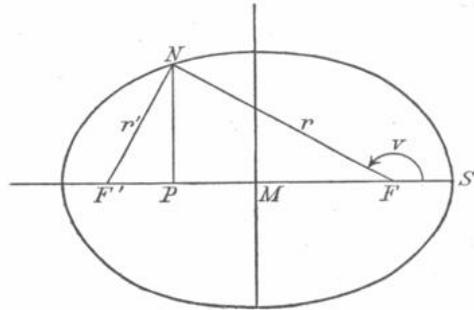


Fig. 25.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes werden:

$$X = -r \cos v, \quad Y = +r \sin v;$$

also wird nach 7) und 8)

$$r \cos v = a \cos E - ae, \quad r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (12)$$

und durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen:

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (13)$$

In der Astronomie bezeichnet man  $E$  als exzentrische,  $v$  als wahre Anomalie.

**38. Die Hyperbel.** Löst man die Mittelpunktsgleichung 5) der Hyperbel, nämlich

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

nach  $\xi$  und  $\eta$  auf,

$$\eta = \pm b \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} - 1}, \quad \xi = \pm a \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}},$$

so erkennt man, daß zu jedem Werte von  $\xi$  zwei nur dem Vorzeichen nach verschiedene Werte von  $\eta$  gehören und umgekehrt. Zugleich sehen wir, daß der erste

reelle Wert von  $\eta$  sich erst für  $\xi = \pm a$  ergibt, nämlich  $\eta = 0$ ; in dem ganzen von den Linien  $\xi = +a$  und  $\xi = -a$  begrenzten Parallelstreifen kann also kein Punkt der Kurve liegen. Ferner ersieht man, daß die beiden Achsen auch hier Symmetrieachsen sind; aber während die  $X$ -Achse die Kurve trifft und zwar in den Scheitelpunkten  $\xi = \pm a$ ,  $\eta = 0$ , liegt die andere ganz außerhalb des reellen Teiles der Kurve. Das Stück der  $X$ -Achse zwischen den beiden Scheiteln heißt

Hauptachse der Hyperbel und ist gleich  $2a$ . Geht man durch

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta$$

auf die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten über und schreibt sie

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta},$$

so erkennt man, daß reelle Werte von  $\rho$  sich nur ergeben, so lange  $\theta$  zwischen  $+\theta_0$  und  $-\theta_0$  und zwischen  $180^\circ - \theta_0$  und  $180^\circ + \theta_0$  liegt, wo

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b}{a}. \quad (14)$$

Für  $\theta = \theta_0, -\theta_0, 180^\circ - \theta_0$  und  $180^\circ + \theta_0$  erhält man  $\rho = \infty$  und für alle außerhalb der genannten Grenzen liegende  $\theta$  wird  $\rho$  imaginär; die Kurve liegt also zwischen den zwei durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, die durch

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{b}{a}$$

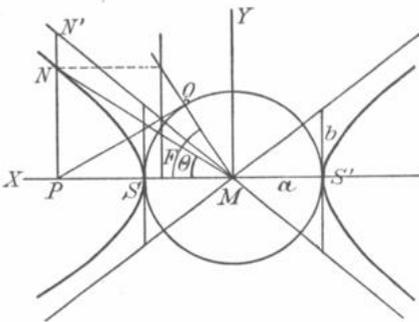


Fig. 26.

bestimmt sind, oder durch

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \frac{b}{a}.$$

Auf diesen Geraden, den Asymptoten der Kurve, liegen die unendlich fernen Punkte derselben. Betrachtet man die Gleichungen der Asymptoten

$$\eta = \pm \frac{b}{a} \xi$$

und der Kurve

$$\eta = \pm \frac{b}{a} \xi \sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}},$$

so erkennt man die Beziehung der Hyperbel zu ihren Asymptoten. Für ein beliebiges  $\xi > a$  wird immer das zur Kurve gehörige  $\eta$  absolut genommen kleiner sein, als das zur Asymptote gehörige: dieser Unterschied wird aber um so kleiner, je größer  $\xi$  wird und er verschwindet ganz, wenn  $\xi = \infty$  geworden ist; also außerhalb der Asymptoten kann kein Punkt der Kurve liegen; die Kurve schmiegt sich an die Asymptoten immer mehr und mehr an, bis sie dieselben im Unendlichen berührt. Zugleich erkennen wir die geometrische Bedeutung von  $b$ : Länge des im Scheitel der Kurve zur  $X$ -Achse errichteten Lotes bis zur Asymptote; in der Tat gibt die Gleichung der Asymptote für  $\xi = a$  den Wert  $\eta = b$ .

Führt man einen Parameter  $F$  ein, so können die Punkte der Hyperbel durch

$$\xi = a \sec F, \quad \eta = b \operatorname{tg} F$$

dargestellt werden; denn es wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 F} - \frac{\sin^2 F}{\cos^2 F} = 1.$$

Um die geometrische Bedeutung von  $F$  zu erkennen, schlagen wir um die Hauptachse  $2a$  als Durchmesser einen Kreis und ziehen vom Endpunkt der Abszisse  $\xi$  eine Tangente  $PQ$  an ihn; dann ist  $F = \sphericalangle PMQ$ ; denn  $\xi = a \sec F$ ; ferner hat der der Abszisse  $\xi$  entsprechende Punkt  $N'$  der Asymptote die Ordinate  $\eta' = \xi \operatorname{tg} \theta_0 = \xi \cdot \frac{b}{a}$  und folglich der Punkt der Hyperbel die Ordinate:  $\eta = \frac{b}{a} \xi \sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}} = \frac{b}{a} a \sec F \sqrt{1 - \cos^2 F} = b \operatorname{tg} F$ . Konstruktion der Hyperbel (siehe Fig. 27).

Trägt man auf der Hauptachse der Hyperbel vom Mittelpunkt  $M$  aus nach beiden Seiten die Strecke

$$ae = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{16}$$

ab, wo also jetzt die Exzentrizität  $e > 1$  ist, so erhält man die Brennpunkte  $F$  und  $F'$ , ebenfalls auf der konkaven Seite der Kurve liegend. Sind wieder  $r$  und  $r'$  die Radienvektoren eines Punktes der Kurve nach den Brennpunkten, so findet man ähnlich wie vorhin

$$r^2 = (\xi e - a)^2,$$

oder

$$r = \xi e - a$$

und ebenso

$$r' = e \xi + a.$$

Bei der Hyperbel wird also

$$r' - r = 2a,$$

d. h. die Differenz der beiden Radienvektoren ist eine Konstante gleich der Hauptachse.

Verschiebt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems nach dem Brennpunkt  $F$ , dann ist der Zusammenhang der neuen Koordinaten  $X, Y$  mit den Mittelpunktskoordinaten  $\xi, \eta$

$$X = \xi - ae, \quad Y = \eta \quad (17)$$

und es wird daher der Radiusvektor:

$$\begin{aligned} r &= e\xi - a = e(X + ae) - a \\ &= a(e^2 - 1) + eX. \end{aligned}$$

Nennt man  $v$  den Winkel, den  $r$  mit der negativen Richtung der  $X$ -Achse, also mit der Richtung von  $F$  nach dem Scheitel  $S$  bildet, so wird  $X = r \cos(180^\circ - v) = -r \cos v$  und daher

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}, \quad (18)$$

welches die Gleichung der Hyperbel in Brennpunktpolarkoordinaten ist. Für  $v = 0$  ergibt sich  $r = a(e - 1)$  und dieser Punkt der Hyperbel heißt auch hier Perihel. Wächst  $v$ , so ergeben sich aus 18) zunächst die Punkte des Kurventeiles 1 bis zu dem Werte  $\cos v = -\frac{1}{e}$ ; hier wird  $r = \infty$ , d. h. der Radiusvektor wird der Asymptote I parallel. Für den Winkel, den die Asymptote mit der  $X$ -Achse bildet, ergibt sich also hier der Wert  $v_0$  aus  $\cos v_0 = -\frac{1}{e}$ ; es stimmt dies mit der früheren Bestimmung 14)

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b}{a}$$

überein, denn  $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{e}$  und  $\theta_0 = 180^\circ - v_0$ . Wächst  $v$  weiter, so ergeben sich negative Werte von  $r$ , die auf den zweiten Zweig der Kurve, nämlich die Teile 2 und 3 führen; endlich wird  $r$  zur Asymptote II parallel, erhält wieder positive Werte und gibt die Punkte des Teiles 4. Für  $v = 90^\circ$  wird  $r = a(e^2 - 1)$ ; diese Strecke, die auch hier Parameter heißt, ist, wie aus  $pa = b^2$  und  $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$  hervorgeht, gleich der in der Scheitelgleichung 3) eingeführten Konstanten  $p$ , so daß 18) auch

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (19)$$

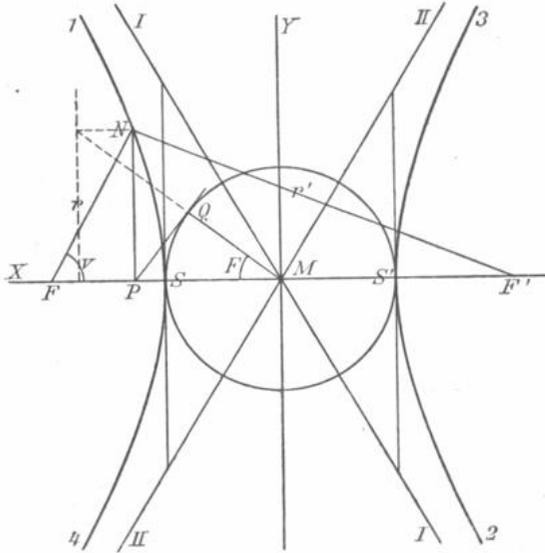


Fig. 27.

geschrieben werden kann, d. h. genau so wie die Ellipsengleichung 11), nur daß hier  $e > 1$  ist.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes werden

$$X = -r \cos v \quad \text{und} \quad Y = r \sin v,$$

also nach 15) und 17)

$$r \cos v = a \left( e - \frac{1}{\cos F} \right), \quad r \sin v = b \operatorname{tg} F = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F \quad 20)$$

und durch Quadrieren und Addieren:

$$r = a \left( \frac{e}{\cos F} - 1 \right). \quad 21)$$

**39. Die Parabel.** Aus der Scheitelgleichung 2) der Parabel:

$$y^2 = 2px$$

ergibt sich wegen

$$y = \pm \sqrt{2px}$$

die Symmetrie der Kurve in Bezug auf die  $X$ -Achse und wegen

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

daß jedem  $y$  nur ein Wert von  $x$  entspricht, der für absolut genommen gleich große, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte von  $y$  derselbe ist. Für negative  $x$  wird  $y$  imaginär, die Kurve liegt also ganz auf der einen Seite der  $Y$ -Achse. Für  $x = \infty$  wird auch  $y = \infty$ ; die Kurve erstreckt sich also nach einer Seite ins Unendliche.

Der Abszisse  $x = \frac{p}{2}$  entspricht  $y = \pm p$ . Der Punkt  $x = \frac{p}{2}$ ,  $y = 0$  der Abszissenachse hat also dieselbe bei der Ellipse und Hyperbel nachgewiesene Eigenschaft, daß die zugehörige Ordinate der Kurve gleich dem Parameter  $p$  ist. Wir nennen ihn ebenfalls den Brennpunkt  $F$  der Parabel. Bei der Ellipse ist sein Abstand vom Scheitel  $S$  gleich  $a(1 - e)$ , bei der Hyperbel gleich  $a(e - 1)$ ; da bei der Ellipse  $p = a(1 - e^2)$ , bei der Hyperbel  $p = a(e^2 - 1)$  ist, so wird der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel in der Ellipse und in der Hyperbel gleich  $\frac{p}{1 + e}$ . Wollen wir also den Begriff der

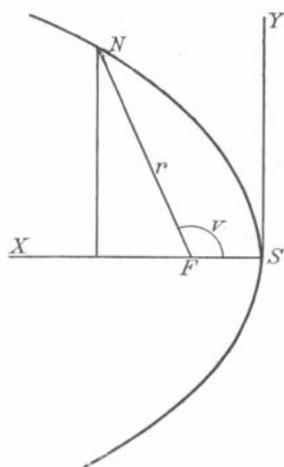


Fig. 28.

Exzentrizität auch bei der Parabel einführen, so haben wir  $e = 1$  zu setzen. Wir können mithin die Parabel als die Übergangskurve zwischen Ellipse und Hyperbel bezeichnen, indem

- $e < 1$  eine Ellipse,
- $e = 1$  eine Parabel,
- $e > 1$  eine Hyperbel

gibt. Da  $p = \pm a(1 - e^2)$  in allen drei Kurven endlich herauskommen muß, so muß bei der Parabel  $a = \infty$  angenommen werden, wie wir schon oben konstatiert haben.

Der Radiusvektor  $r$  vom Brennpunkt nach einem Punkt der Parabel wird

$$r^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2,$$

woraus

$$r = x + \frac{1}{2}p.$$

Hiernach kann man die Parabel am einfachsten konstruieren.

Verlegt man den Anfangspunkt vom Scheitel nach dem Brennpunkt, so werden die neuen Koordinaten

$$X = x - \frac{p}{2}, \quad Y = y$$

und der Radiusvektor stellt sich daher zu:

$$r = x + \frac{1}{2}p = \left(X + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2} = p + X.$$

Nennt man  $v$  den Winkel, den  $r$  mit der negativen  $X$ -Achse oder mit der Richtung von  $F'$  nach dem Scheitel bildet, so wird  $X = r \cos(180^\circ - v) = -r \cos v$  und daher

$$r = \frac{p}{1 + \cos v}, \tag{22}$$

d. h. wir erhalten für die Parabel dieselbe Brennpunktpolargleichung wie für Ellipse und Hyperbel, wenn wir beachten, daß hier  $e = 1$  ist. Mit Hilfe der Gl. 22) kann man wieder den Verlauf der Kurve verfolgen, insbesondere wird für  $v = 0$   $r = \frac{1}{2}p$ , für  $v = 90^\circ$   $r = p$ , wie wir schon oben kennen gelernt haben. Es ist bei der Parabel üblich, statt  $p$  den Abstand des Brennpunkts vom Scheitel, nämlich  $\frac{1}{2}p = q$  oder die Periheldistanz zu benutzen; die Gl. 22) wird dann

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}v}. \tag{23}$$

**40. Gesamtbetrachtung der drei Kurven.** Die auf den einen Brennpunkt bezogenen Gleichungen der drei Kurven:

$$\text{Ellipse: } r = a(1 - e^2) + eX$$

$$\text{Hyperbel: } r = a(e^2 - 1) + eX$$

$$\text{Parabel: } r = p + X$$

zeigen, daß sie die gemeinsame Form

$$r = a(1 - e^2) + eX$$

haben, wobei zu beachten ist, daß wir  $X$  in der Richtung vom Scheitel nach dem Brennpunkt positiv gezählt haben. Da  $r$  positiv herauskommen muß, so muß dann für  $e < 1$  die große Halbachse  $a$  positiv (Ellipse), für  $e > 1$  dieselbe Größe negativ (Hyperbel) und für  $e = 1$  unendlich groß (Parabel) angenommen werden. Drehen wir das Koordinatensystem um den Brennpunkt, so wird

$$r = a(1 - e^2) + e(\alpha x + \beta y);$$

oder

$$r = A + Bx + Cy$$

ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein durch seinen einen Brennpunkt gelegtes rechtwinkliges Koordinatensystem.

Stellen wir die Brennpunktpolargleichungen zusammen, so finden wir, daß sie alle lauten:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

wo  $v$  von der ApSIDENLINIE aus zu zählen ist und zwar von der Richtung vom Brennpunkt nach dem Perihel aus. Die Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem  $e \leq 1$  ist.

Es erscheint nützlich, noch den Übergang der einen Kurvenart in die andere zu betrachten. Zu dem Ende halten wir den Scheitel  $S$  und den ihm nächstliegenden Brennpunkt  $F$  fest und ziehen alle Kurven, welche durch  $S$  hindurchgehen und  $F$  zu dem einen Brennpunkt haben. Die Distanz  $FS = q$  ist gleich  $a(1 - e) = \frac{p}{1 + e}$ .

Ist  $e = 0$ , so wird  $r = p = a = q$ , d. h. es entsteht ein Kreis, der den Mittelpunkt in  $F$  und den Radius  $q$  hat; ist  $e$  von Null verschieden, aber  $< 1$ , so hat  $a$ , die Entfernung des Mittel-

punktes der Kurve vom Scheitel  $S$  einen positiven Wert, der um so größer wird, je mehr  $e$  wächst; der Mittelpunkt und der andere Brennpunkt rücken in der Richtung  $SF$  immer weiter hinaus: die Form der Kurve streckt sich. Der Parameter wächst ebenfalls vom Werte  $q$ , den er beim Kreis hat, zum Werte  $q(1 + e)$  (Ellipse). Wird  $e = 1$ , so muß  $a$  unendlich angenommen werden, d. h. der Mittelpunkt und der zweite Brennpunkt sind ins Unendliche gerückt, der

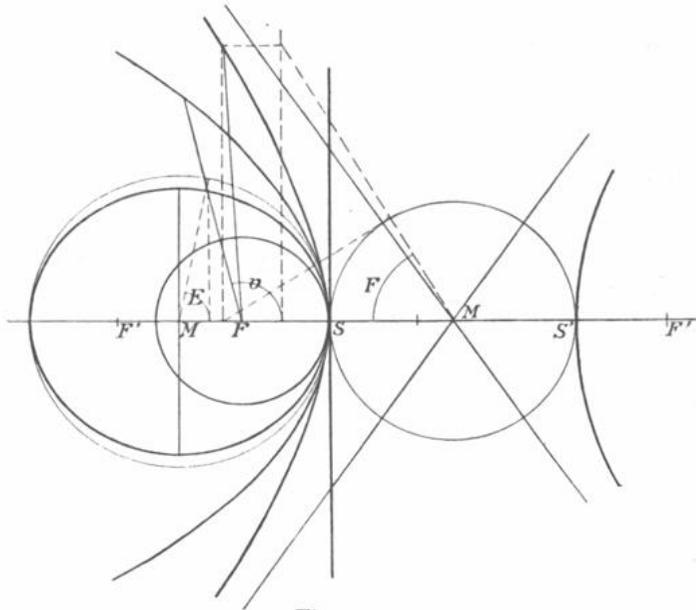


Fig. 29.

Parameter nimmt den Wert  $p = 2q$  an (Parabel). Wächst  $e$  über 1 hinaus, so muß  $a$  negativ angenommen werden, d. h. der Mittelpunkt ist auf der anderen Seite von  $S$  anzunehmen, als auf der  $F$  liegt. Dieser und der zweite Brennpunkt sind bei wenig von 1 sich unterscheidendem  $e$  in großer negativer Entfernung von  $S$  und rücken mit wachsendem  $e$  an dieses heran, d. h.  $a$  wird absolut genommen mit wachsendem  $e$  ständig kleiner, bis für  $e = \infty$   $a = 0$  anzunehmen ist. Der Parameter dagegen wächst von dem Werte, den er für die Parabel inne hatte, mit wachsendem  $e$  zum Werte  $p = q(1 + e)$ , der für  $e = \infty$  ebenfalls unendlich groß ist (Hyperbel mit einer Doppelgeraden als Grenzkurve).

## Abschnitt X.

## Die Bewegung um die Sonne im allgemeinen.

**41. Erstes und zweites Keplersches Gesetz.** Um die Bewegung eines Körpers im Sonnensystem zu untersuchen, nehmen wir zuerst an, daß außer ihm und der Sonne kein weiterer Körper vorhanden sei und daß beide als Punkte betrachtet werden können; die Ursache der Bewegung sei lediglich die gegenseitige Anziehung, welche die beiden Körper aufeinander ausüben und welche nach dem Newtonschen Gesetz wirken soll. Nach diesem Gesetz wirkt zwischen beiden Körpern eine Kraft, deren Richtung mit ihrer Verbindungslinie zusammenfällt und deren Intensität proportional ist ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Andererseits ist die Kraft, welche die Sonne  $S$  mit der Masse  $M$  auf den Körper  $P$  mit der Masse  $m$  ausübt, gleich dem Produkt aus der Masse  $m$  und der Beschleunigung, welche diese Kraft dem Körper  $P$  mitteilt (Nr. 17). Hebt man beiderseits den Faktor  $m$ , so stellt sich die Beschleunigung von  $P$  dar als Produkt aus dem Proportionalitätsfaktor des Newtonschen Gesetzes und der Masse der Sonne, dividiert durch das Quadrat der gegenseitigen Entfernung. Ferner ist die Kraft, welche der Körper  $P$  auf die Sonne ausübt, gleich dem Produkt aus der Masse  $M$  und der Beschleunigung, welche diese Kraft der Sonne mitteilt. Hebt man hier beiderseits den Faktor  $M$ , so stellt sich die Beschleunigung von  $S$  dar als Produkt aus dem Proportionalitätsfaktor des Newtonschen Gesetzes und der Masse des Körpers  $m$ , dividiert durch das Quadrat der gegenseitigen Entfernung. Die Beschleunigung findet in beiden Fällen in der Verbindungslinie statt, aber das erste Mal in der Richtung von  $P$  nach  $S$ , das zweite Mal in der Richtung von  $S$  nach  $P$ . Nimmt man diese letztere Richtung in der Verbindungslinie als die positive an, so hat man die erstere negativ zu zählen, d. h. die beiden Beschleunigungen werden, wenn  $k^2$  der Proportionalitätsfaktor und  $r$  die gegenseitige Entfernung ist:

$$\text{Beschleunigung von } P: -\frac{k^2 M}{r^2} \text{ und Beschleunigung von } S: +\frac{k^2 m}{r^2}.$$

Die relative Beschleunigung von  $P$  in bezug auf  $S$  wird also

$$-\frac{k^2 M}{r^2} - \frac{k^2 m}{r^2} = -\frac{k^2 (M + m)}{r^2} \quad 1)$$

und findet in der Verbindungslinie statt. Wenn nur die Newtonsche Anziehung wirksam ist, findet in *keiner* anderen Richtung eine Beschleunigung statt.

Da uns kein Mittel zur Verfügung steht, absolute Örter im Raum zu bestimmen, so müssen wir die anfänglich gestellte Aufgabe dahin abändern, daß wir die relative Bewegung von  $P$  in bezug auf  $S$  kennen lernen wollen. Wir legen deshalb ein bewegliches Koordinatensystem  $\xi\eta\zeta$  durch  $S$  als Anfangspunkt, so daß die positive  $\xi$ -Achse stets mit der Verbindungslinie  $SP = r$  — dem Radiusvektor — zusammenfällt; die Drehungsgeschwindigkeit um die  $\zeta$ -Achse sei mit  $\frac{ds}{dt}$ , die um die  $\xi$ -Achse

mit  $\frac{dp}{dt}$  bezeichnet; die Drehungsgeschwindigkeit um die  $\eta$ -Achse kann gleich Null gesetzt werden, da es sich um die Bewegung eines Punktes handelt, die durch drei Stücke vollständig dargestellt werden kann. Unter diesen Voraussetzungen stellen die Ausdrücke 13) (S. 45) die Beschleunigungen nach den drei Achsen dar und da im vorliegenden Falle nur die längs der  $\xi$ -Achse den Wert 1) hat, die anderen aber Null sind, so entstehen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 &= - \frac{k^2 (M + m)}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{d \left( r^2 \frac{ds}{dt} \right)}{dt} &= 0 \\ r \frac{ds}{dt} \frac{dp}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad 2)$$

Nimmt man an, daß niemals ein Zusammenstoß der zwei Körper stattfindet und daß der Körper  $P$  sich nicht ständig in unendlicher Entfernung von  $S$  befinde, mit anderen Worten, daß  $r$  im allgemeinen einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitze, dann giebt die Integration der zweiten Gleichung:

$$r^2 \frac{ds}{dt} = 2c_1 \quad 3)$$

wenn mit  $c_1$  eine Konstante bezeichnet wird. Da hieraus hervorgeht, daß  $\frac{ds}{dt}$  im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so folgt aus der dritten Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad 4)$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit um die  $\xi$ -Achse ist ständig gleich Null oder der Punkt geht aus der  $\xi\eta$ -Ebene, in der er sich im ersten Zeitteilchen bewegt haben möge, niemals heraus, mit anderen Worten:

*Der Punkt  $P$  bewegt sich in einer Ebene, die durch  $S$  geht.*

Die in der Form

$$\frac{1}{2} r^2 ds = c_1 dt \quad 3^a)$$

geschriebene Gl. 3) läßt folgende Interpretation zu. Die linke Seite stellt den Flächeninhalt des von zwei aufeinanderfolgenden Radienvektoren gebildeten Elementarsektors von der Öffnung  $ds$  dar, wobei  $ds$  den auf dem Kreis vom Radius 1 zwischen den Radienvektoren liegenden Bogen bedeutet; die rechte Seite ist proportional der zur Beschreibung des Sektors gebrauchten Zeit; also der Satz:

*Die Bewegung des Punktes geht so vor sich, daß vom Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume überstrichen werden.*

Dieser unter dem Namen des *ersten Keplerschen Gesetzes* (Kepler, *Astronomia nova* 1609) bekannte Satz gilt, wie schon Kepler wußte und wie aus unserer Ableitung unmittelbar hervorgeht, für jede Zentralbewegung, gleichviel nach welchem Gesetz diese erfolgt.

Um die Differenzialgleichung der ebenen Kurve zu erhalten, in der  $P$  sich bewegt, muß man aus den Gl. 2) die Zeit eliminieren. Nun ist

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{d^{\text{I}} r}{dt} = -r^2 \frac{d^{\text{I}} r}{ds} \frac{ds}{dt},$$

also nach 3)

$$\frac{dr}{dt} = -2c_1 \frac{d^{\text{I}} r}{ds},$$

und wenn nach der Zeit differenziert wird:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2c_1 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt}$$

oder wieder nach 3)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{(2c_1)^2}{r^2} \frac{d^2 r}{ds^2}.$$

Wird dies und

$$r \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{(2c_1)^2}{r^3}$$

in die erste Gleichung 2) eingetragen, so wird daraus:

$$-\frac{(2c_1)^2}{r^2} \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{(2c_1)^2}{r^3} = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}$$

oder

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{r} = \frac{k^2(M+m)}{(2c_1)^2}. \quad 5)$$

Diese Differenzialgleichung der Kurve läßt sich sofort integrieren:

$$\frac{1}{r} - \frac{k^2(M+m)}{(2c_1)^2} = c_2 \cos(s - c_3),$$

wo mit  $c_2$  und  $c_3$  zwei neue Konstanten bezeichnet sind. Also hat man:

$$r = \frac{\frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)}}{1 + \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)} \cos(s - c_3)}. \quad 6)$$

Nach Nr. 40 ist dies die Polargleichung eines Kegelschnittes, dessen Parameter

$$p = \frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)}, \quad 7)$$

dessen Exzentrizität

$$e = \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)} \quad 8)$$

ist und dessen einer Brennpunkt mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems, also hier mit der Sonne zusammenfällt. Ein spezieller Fall des hieraus hervorgehenden Satzes:

*Der Körper bewegt sich in einem Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht,*

ist für die elliptische Planetenbewegung von Kepler auf empirischem Wege aufgefunden worden (Astronomia nova 1609) und unter dem Namen des *zweiten Keplerschen Gesetzes* bekannt.

Durch 7) ist die Bedeutung der in 3) eingeführten Konstante  $2e_1$  ermittelt; wir wollen statt  $2e_1$  im folgenden  $p$  als Konstante gebrauchen und infolgedessen die Gleichung 3) in folgender Form schreiben:

$$r^2 \frac{ds}{dt} = k\sqrt{M+m}\sqrt{p}. \quad 9)$$

Ferner ist nach 8)

$$e = pe_2,$$

so daß man auch statt der bisherigen Konstanten  $e_2$  die neue  $e$  einführen kann; geschieht dies, so wird die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(s - c_3)}.$$

Man kann, ohne die Allgemeinheit zu verletzen,  $e$  als positive Größe betrachten; für  $s - c_3 = 0$  nimmt dann der Radiusvektor  $r$  seinen kleinsten Wert

$$r_1 = \frac{p}{1 + e}$$

und für  $s - c_3 = \pi$  seinen größten Wert

$$r_2 = \frac{p}{1 - e}$$

an; die entsprechenden Punkte der Kurve nennt man die *Apsiden* und speziell den ersteren das *Perihel*, den letzteren das *Aphel*. Die sie verbindende Gerade, die durch den Anfangspunkt geht, heißt *Apsidenlinie*. Die Länge dieser Linie ist

$$r_1 + r_2 = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{1 - e^2}$$

und heißt die *große Achse* der Bahn, die wir mit  $2a$  bezeichnen wollen, so daß

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{oder} \quad p = a(1 - e^2) \quad 10)$$

wird. — Für  $s - c_3 = \frac{\pi}{2}$  wird  $r = p$  oder der Parameter ist gleich dem auf der Apsidenlinie senkrecht stehenden Radiusvektor.

Da der Richtung des Perihels der Wert  $s = c_3$  entspricht, nennt man  $c_3$  die Länge des Perihels; wir wollen es kurz mit  $\varpi$  bezeichnen und haben dann als definitive Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(s - \varpi)}. \quad 11)$$

Andere, mitunter dienliche Formen dieser Gleichung sind:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e - 2e \sin \frac{1}{2}(s - \varpi)^2} = \frac{p}{1 - e + 2e \cos \frac{1}{2}(s - \varpi)^2} \\ &= \frac{p}{(1 + e) \cos \frac{1}{2}(s - \varpi)^2 + (1 - e) \sin \frac{1}{2}(s - \varpi)^2}. \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt der großen Achse steht vom Anfangspunkt um die Strecke ab:

$$a - a(1 - e) = ae,$$

welche die geometrische Bedeutung von  $e$  gibt.

Die Kurve nimmt drei charakteristische Formen an, jenachdem  $e$  kleiner, gleich oder größer als 1 ist.

Wenn  $e < 1$  ist, ergibt sich für jeden Wert von  $s$  ein endlicher Wert von  $r$ ; die Kurve liegt also im Endlichen und ist geschlossen; die Kurve ist eine *Ellipse*.

Wenn  $e = 1$  ist, tritt für  $s - \varpi = \pi$  ein unendlich großer Wert des Radiusvektors auf; die Kurve schiebt also Zweige ins Unendliche. Die große Achse wird unendlich groß, der Parameter aber bleibt endlich. Für  $s - \varpi = 0$  wird  $r_1 = \frac{p}{2}$ , d. h. die Distanz von der Sonne bis zum Perihel — die Periheldistanz — ist gleich dem halben Parameter. Nennt man  $q$  diese Periheldistanz, so wird  $p = 2q$  und daher die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1 + \cos(s - \varpi)} = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}(s - \varpi)^2}. \quad (12)$$

Die Kurve ist eine *Parabel*.

Ist  $e > 1$  — der Fall der *Hyperbel* —, so wird, da  $p$  nach 7), wenigstens wenn nur anziehende Kräfte in Betracht gezogen werden, eine wesentlich positive Größe ist, die Konstante  $a$  negativ. Bis zu dem Punkte, wo  $\cos(s - \varpi)$  im zweiten Quadranten den Wert  $-\frac{1}{e}$  annimmt, bleibt der Wert von  $r$  positiv und endlich; dann tritt an der genannten Stelle ein unendlich großer Wert des Radiusvektors ein und darüber hinaus wird dieser negativ für alle weiteren Werte von  $s - \varpi$ , bis dessen  $\cos$  im dritten Quadranten wieder gleich  $-\frac{1}{e}$  geworden ist; darauf folgen wieder endliche positive Werte des Radiusvektors. Die genannten negativen Werte von  $r$  führen zu Kurvenpunkten, die zwischen den rückwärtigen Verlängerungen der zu  $\cos(s - \varpi) = -\frac{1}{e}$  gehörigen beiden Radienvektoren liegen und werden erhalten, wenn man den absoluten Wert des Radiusvektors nach der entgegengesetzten Seite abträgt.  $r_2$  (für  $s - \varpi = \pi$ ) fällt somit in dieselbe Richtung wie  $r_1$  und die Entfernung der beiden zugehörigen Kurvenpunkte wird daher:

$$|r_2| - r_1 = \left| \frac{p}{1 - e} \right| - \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{e - 1} - \frac{p}{1 + e} = -\frac{2p}{1 - e^2} = -2a.$$

Astronomisch haben negative Radienvektoren keine Bedeutung und insofern hat der zweite Kurventeil nur eine formale Existenz. Er gewinnt aber physikalisches Interesse, wenn man statt anziehender Zentralkräfte abstoßende, die nach demselben Gesetz wirken, annimmt. In der ursprünglichen Gleichung ändert sich dann nur das Zeichen von  $k^2$ :

$$r = \frac{-\frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)}}{1 - \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)} \cos(s - c_3)}$$

oder wenn nach wie vor

$$\frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)} = p, \quad \frac{(2c_1)^2 e_2}{k^2(M+m)} = e$$

gesetzt wird,

$$r = \frac{p}{e \cos(s - \varpi) - 1}.$$

Diese Gleichung liefert positive Werte von  $r$  nur wenn  $e > 1$ , d. h. abstoßende Kräfte haben stets eine hyperbolische Bewegung zur Folge. Diese Werte für  $r$  entsprechen für  $s - \varpi$  den vorhin für  $180^\circ + s - \varpi$  erhaltenen und durch Zeichenwechsel zu absoluten Beträgen gemachten, d. h. sie entsprechen dem zweiten Zweig der Hyperbel, welcher dem abstoßenden Punkt die convexe Seite zukehrt.

**42. Kriterium für die Art der Bahn.** Um ein Kriterium für das Eintreten der drei eben besprochenen Kurven zu erhalten, multipliziert man die erste Gleichung 2) mit  $\frac{dr}{dt}$  und fügt dazu die mit  $r \frac{ds}{dt}$  multiplizierte zweite Gleichung, dann kommt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \frac{dr}{dt} + r \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{ds}{dt} = - \frac{k^2 (M+m)}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

oder:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \right) = - \frac{k^2 (M+m)}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2 (M+m)}{r} + c'. \quad 13)$$

Hierin stellt die linke Seite das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn dar, ausgedrückt durch die Komponenten im Radiusvektor und senkrecht dazu:  $\frac{dr}{dt}$  und  $r \frac{ds}{dt}$ . Setzt man diese Geschwindigkeit  $v$ , so wird 13)

$$v^2 = \frac{2k^2 (M+m)}{r} + c'.$$

Um die Bedeutung von  $c'$  aufzudecken, stellen wir  $v^2$  auch noch auf andere Art dar. Ist  $d\sigma$  das Kurvenelement, so wird

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 ds^2.$$

Nun folgt aus 11) durch Differenziation:

$$dr = \frac{pe \sin(s - \varpi)}{(1 + e \cos(s - \varpi))^2} ds = \frac{r^2}{p} e \sin(s - \varpi) ds;$$

also wird:

$$d\sigma^2 = r^4 \left( \frac{e^2 \sin^2(s - \varpi)}{p^2} + \frac{1}{r^2} \right) ds^2,$$

oder wenn nach 11)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^2} (1 + e^2 \cos^2(s - \varpi) + 2e \cos(s - \varpi))$$

substituiert wird:

$$d\sigma^2 = \frac{r^4}{p^2} (2 + 2e \cos(s - \varpi) - (1 - e^2)) ds^2$$

oder endlich nach 11) und 10)

$$d\sigma^2 = \frac{r^4}{p} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) ds^2.$$

Wird dies durch  $dt^2$  dividiert, so erscheint links  $\left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = v^2$  und rechts wird nach 9)

$$r^4 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = k^2 (M + m) p$$

gesetzt werden können, so daß schließlich kommt:

$$v^2 = k^2 (M + m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (14)$$

Aus dieser mit 13) identischen Gleichung ersieht man folgendes: Wenn  $a$  positiv und endlich ist (Ellipse), dann wird  $v^2 < \frac{2k^2(M+m)}{r}$ , wenn  $a$  negativ und endlich ist (Hyperbel), dann wird  $v^2 > \frac{2k^2(M+m)}{r}$ , wenn  $a$  unendlich groß ist (Parabel), dann wird  $v^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r}$ . Demnach hängt die Art der Bahn lediglich von der in der Entfernung  $r$  von der Sonne stattfindenden Geschwindigkeit ab, indem

$$v^2 < \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Ellipse}$$

$$v^2 > \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Hyperbel}$$

$$v^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Parabel}$$

entspricht.

Der für die Art der Kurve maßgebende Ausdruck

$$\frac{2k^2(M+m)}{r}$$

besitzt eine physikalische Bedeutung. Wenn ein Massenteilchen aus dem Unendlichen in gerader Linie auf einen mit der Zentralkraft  $\frac{k^2(M+m)}{r^2}$  ausgestatteten Körper fällt, so kann die Geschwindigkeit  $v_0$  desselben in der Entfernung  $r$  leicht gefunden werden; in der Tat ist:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{k^2 (M + m)}{r^2}$$

oder

$$2 \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{dr}{dt} = - \frac{2k^2(M+m)}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

oder integriert:

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} + c. \quad (15)$$

Geht der Körper im Unendlichen vom Zustand der Ruhe aus, so folgt  $c = 0$  und daher wird seine Geschwindigkeit in der Entfernung  $r$  gefunden aus:

$$v_0^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r}. \quad (15^a)$$

Geht also durch den Punkt in der Entfernung  $r$  von der Zentralkraft in beliebiger Richtung ein Körper mit der Geschwindigkeit  $v$ , so bewegt er sich in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem  $v^2$  kleiner, größer oder gleich  $v_0^2$  ist.

Man kann auch folgendermaßen schließen. Die Differenz von 14) und 15<sup>a</sup>) gibt:

$$v_0^2 - v^2 = \frac{h^2(M+m)}{a},$$

oder, wenn nach 7) und 10)

$$h^2(M+m) = \frac{(2e_1)^2}{p} = \frac{(2e_1)^2}{a(1-e^2)}$$

gesetzt wird:

$$v_0^2 - v^2 = \frac{(2e_1)^2}{a^2(1-e^2)};$$

hiernach ist die vom Körper beschriebene Kurve

eine Ellipse ( $e < 1$ ), wenn  $v^2 < v_0^2$ ,  
 eine Hyperbel ( $e > 1$ ), wenn  $v^2 > v_0^2$   
 oder eine Parabel ( $e = 1$ ), wenn  $v^2 = v_0^2$  ist.

Die Gleichung 14) läßt auch noch folgende interessante Interpretation zu. Schlägt man mit dem Radius  $2a$  um das Kraftzentrum einen Kreis, und läßt von den Punkten desselben vom Zustand der Ruhe ausgehend, das Massenteilchen nach dem Zentrum fallen, so erhält es im Schnittpunkte der Falllinie mit jeder Ellipse, die  $2a$  zur großen Achse und das Zentrum zum einen Brempunkt hat, eine Geschwindigkeit, die jener der elliptischen Bewegung in der Bahn gleich ist. Denn ist die Geschwindigkeit in der Entfernung  $2a$  Null, so bestimmt sich jetzt das  $e$  der Gleichung 15) aus

$$\frac{2k^2(M+m)}{2a} + e = 0$$

und die in der Entfernung  $r$  erlangte Geschwindigkeit wird also:

$$h^2(M+m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

welches nach 14) auch die der elliptischen Bewegung ist. Der Satz gilt auch noch für die Parabel, wo  $\frac{1}{a} = 0$  ist (Satz von Schröder van der Kolk, Astr. Nachr. Nr. 1426).

**43. Bestimmung der Bahn aus Ort und Geschwindigkeit.** Mittels der bisher erlangten Integrale der Gl. 2) läßt sich folgender wichtige Satz erweisen:

*Ist für einen Punkt  $P$  in gegebener Entfernung  $r$  von der Sonne  $S$  Größe und Richtung der Geschwindigkeit bekannt, so kann damit seine Bahn ermittelt werden.* In der Tat, fällt man von  $S$  aus das Lot  $SQ = n$  auf die Richtung der Geschwindigkeit, so wird einerseits (Fig. 30):

$$\sin QP'S = \frac{n}{r}$$

und andererseits:

$$\sin QP'S = \frac{r ds}{d\sigma},$$

also:

$$n = \frac{r^2 ds}{d\sigma} = \frac{r^2 \frac{ds}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{k\sqrt{M+m} \sqrt{p}}{v}.$$

Hieraus ergibt sich  $p$ , wenn  $n$ ,  $v$ ,  $k$  als bekannt angenommen werden. Ferner folgt aus

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{und} \quad v^2 = k^2(M + m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$a$  und  $e$ . Errichtet man in  $P$  zur Bahnrichtung das Lot  $PN'$  und macht  $\sphericalangle SPN' = \sphericalangle N'PS'$ , so geht  $PS'$  durch den zweiten Brennpunkt  $S'$ , und dieser selbst wird durch seine Entfernung von  $P$ , nämlich

$$PS' = 2a - r$$

erhalten; die Verbindungslinie  $SS'$  gibt die Richtung der Apsidenlinie und damit die Lage der Bahn. Im Fall der Parabel wird die Richtung der Achse durch eine Parallele gegeben, die durch  $S$  zu  $PS'$  gezogen wird. Im Fall der Hyperbel ist der Winkel  $SPN'$  an dem äußeren Teil der Normalen  $PN''$  anzutragen, so daß  $\sphericalangle N''PS'' = \sphericalangle SPN'$  wird, und dann

$$PS'' = 2a + r$$

zu machen. — Damit ist gezeigt, daß mit den gegebenen Stücken in jedem Fall die Bahn rechnerisch und graphisch ermittelt werden kann.

Wir haben bis jetzt drei Integrale der Differenzialgleichungen 2) ermittelt und dementsprechend drei unabhängige Konstante  $a$ ,  $e$ ,  $\sigma$  eingeführt. Die vierte Integration erfordert für die drei verschiedenen Kurven eine gesonderte Behandlung, zu der wir nun übergehen.

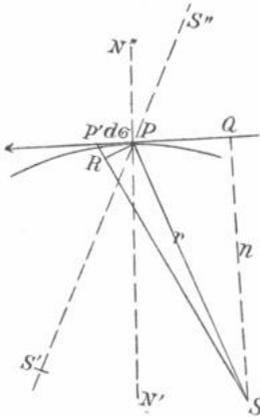


Fig. 30.

## Abschnitt XI.

## Die Bewegung in der Ellipse.

44. Die Bewegung in der Ellipse. Es ist das Integral der Gleichung 9)

$$\frac{1}{2} r^2 ds = \frac{1}{2} k \sqrt{M+m} \sqrt{p} dt$$

aufzustellen unter der Annahme, daß der Körper sich in einer Ellipse, also einer geschlossenen Kurve bewegt. Da die linke Seite den Elementarsektor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radienvektoren vorstellt, so kann das Integral leicht aufgestellt werden, wenn man die Integration über die Zeit eines ganzen Umlaufes des Körpers erstreckt; es erscheint dann nämlich links die Fläche der Ellipse und rechts die Umlaufszeit  $T$ :

$$ab\pi = \frac{1}{2} k \sqrt{M+m} \sqrt{p} T,$$

wo  $b$  die kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet. Ersetzt man  $b$  durch  $\sqrt{ap}$  (Nr. 37), so wird aus der Gleichung:

$$a^{\frac{3}{2}} \pi = \frac{1}{2} k \sqrt{M+m} T$$

oder

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2 (M+m)}{4\pi^2}. \quad (16)$$

Kann man, wie dies im Sonnensystem der Fall ist, die Massen  $m$  als sehr klein gegen die Sonnenmasse  $M$  betrachten, so steht auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Größe, die sehr nahe konstant ist. Nimmt man sie in erster Näherung als eine Konstante, so hat man das *dritte Keplersche Gesetz* (Harmonices mundi 1619):

*Die Kuben der großen Achsen der in Ellipsen um die Sonne laufenden Himmelskörper verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufzeiten.*

Nennt man  $a'$ ,  $T'$ ,  $m'$  die zu einem zweiten um die Sonne laufenden Körper gehörigen Stücke, so ist die strenge Form des Gesetzes:

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{T^2 (M+m)}{T'^2 (M+m')} = \dots \quad (17)$$

Um aber den Ort des Planeten für eine beliebige Zeit angeben zu können, muß man die Gl. 9) über beliebige Zeiträume integrieren. Zu dem Zwecke wollen wir zuerst statt der Umlaufszeit den Winkel einführen, der im Mittel in der Zeiteinheit zurückgelegt wird; da der Radiusvektor in der Zeit  $T$  den Umkreis  $2\pi$  zurücklegt, so wird dieser Winkel

$$\mu = \frac{2\pi}{T}. \quad (18)$$

Aus der Gleichung 16) folgt dann:

$$\mu^2 a^3 = k^2 (M+m), \quad (19)$$

d. h. wenn die Massen  $m$  zu vernachlässigen sind, verhalten sich die Kuben der großen Achsen umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Bewegungen.

Dies vorausgesetzt, eliminieren wir mittels der in der Form

$$r^4 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = k^2 (M + m) p$$

geschriebenen Gleichung 9) aus der Gleichung 13) bez. 14) nämlich

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = k^2 (M + m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

die Größe  $r^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$ :

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = k^2 (M + m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2} \right).$$

Multipliziert man dies mit  $r^2$  und beachtet 19) so kommt:

$$\frac{r^2}{\mu^2 a^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2ar - r^2 - ap = 2ar - r^2 - a^2 + a^2 e^2,$$

letzteres mit Berücksichtigung von  $p = a(1 - e^2)$ ; also ist:

$$\frac{r^2}{\mu^2 a^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = a^2 e^2 - (a - r)^2.$$

Um hier integrieren zu können, führt man statt  $r$  eine neue Variable ein, nämlich die durch

$$a - r = ae \cos E \tag{20}$$

definierte Variable  $E$ ; mit dieser wird:

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt}$$

und

$$(a - r)^2 = a^2 e^2 - a^2 e^2 \sin^2 E,$$

so daß die Differenzialgleichung in die Form

$$\frac{r}{\mu a} \frac{dE}{dt} = 1$$

oder wenn nach 20)  $\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$  gesetzt wird, in die Form

$$(1 - e \cos E) dE = \mu dt$$

übergeht. Diese gibt durch Integration:

$$E - e \sin E = \mu t + c, \tag{21}$$

wo  $c$  eine neue Integrationskonstante bezeichnet. Den Winkel  $\mu t + c = M$  nennt man die *mittlere Anomalie*. Zählt man die Zeit von dem Momente  $t_0$  an, den wir als *Epoche* bezeichnen wollen, so kann man 21) auch schreiben:

$$E - e \sin E = \mu(t - t_0) + c \tag{22}$$

und es bedeutet hiernach die Konstante  $c$  die mittlere Anomalie für die Zeit der Epoche. Die Konstante  $\mu$ , die in 22) noch vorkommt, ist keine neue unabhängige Konstante, denn sie hängt durch die Gl. 19) mit  $a$  zusammen.

Wenn  $c$ , die vierte unabhängige Integrationskonstante des Problems, bekannt ist, kann aus der Gl. 22) für jede beliebige Zeit  $t$  der Winkel  $E$  ermittelt werden; damit aber gestaltet sich die vollständige Lösung der Aufgabe folgendermaßen. Die Gl. 20):

$$r = a(1 - e \cos E) \tag{20}$$

ergibt den Radiusvektor. Da die Beziehung zwischen diesem und der Variablen  $s$  bereits durch die Gl. 11)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(s - \varpi)} \quad (11)$$

bekannt ist, so muß auch letztere sich durch  $E$  ausdrücken lassen. In der Tat folgt aus

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(s - \varpi)}; \\ 1 - e^2 &= (1 - e \cos E)(1 + e \cos(s - \varpi)) \end{aligned}$$

oder nach Auflösung der rechten Seite:

$$\cos(s - \varpi) = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}. \quad (23)$$

Die Gl. 20) und 23) lösen die Aufgabe, sind aber unbequem. Multipliziert man 23) mit  $r$  in der Form 20), so kommt

$$r \cos(s - \varpi) = a(\cos E - e). \quad (24)$$

Quadriert man 20) und zieht die ebenfalls quadrierte Gl. 24) davon ab, so erhält man:

$$r^2 \sin(s - \varpi)^2 = a^2 \sin^2 E - a^2 e^2 \sin^2 E$$

oder

$$r \sin(s - \varpi) = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (25)$$

Durch 24) und 25) erhält man  $r$  und  $s$  gleichzeitig. Man kann noch eine Reihe derartiger Relationen aufstellen; wir gehen darauf aber erst ein, wenn wir die geometrische Bedeutung der bisher eingeführten Größen festgestellt haben.

Wir haben die Variable  $s$  in der Gestalt  $\frac{ds}{dt}$ , der Drehungsgeschwindigkeit um die  $\zeta$ -Achse, eingeführt und dann nachgewiesen, daß der Körper  $P$  in der  $\xi\eta$ -Ebene, in der er seine erste Elementarbewegung ausführte, dauernd bleibt. Nehmen wir also eine feste Richtung  $\xi_0$  als Anfangslage der  $\xi$ -Achse an, so wird  $s$  den Winkel der beweglichen  $\xi$ -Achse, also des Radiusvektors, mit dieser festen Richtung bezeichnen. Die Konstante  $\varpi$  haben wir als Wert des Winkels  $s$ , den dieser im Perihel der Kurve annimmt, erkannt. In nebenstehender Figur 31 wird also  $\angle \xi_0 SP = s$ ,  $\xi_0 SH = \varpi$  und daher  $s - \varpi = HSP$  gleich dem Winkel des Radiusvektors mit der Richtung nach dem Perihel. Man nennt diesen Winkel, den wir in Zukunft mit  $v$  bezeichnen wollen, die *wahre Anomalie*. Durch die Koordinaten  $r$  und  $v$  ist ein Punkt der Ellipse bestimmt; die Gleichungen 24) und 25), nämlich:

$$\begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E \\ r \cos v &= a(\cos E - e) \end{aligned} \quad (26)$$

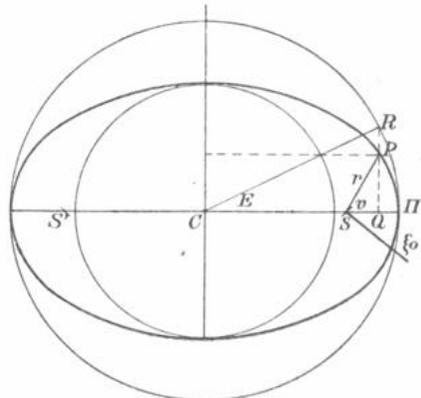


Fig. 31.

zeigen, wie sie mit dem Hilfswinkel  $E$  zusammenhängen. Damit läßt sich dessen geometrische Bedeutung leicht feststellen. Verlängert man das von  $P$  auf die Apsidenlinie gefällte Lot  $PQ$  nach der anderen Seite, bis es den um die große Achse als Durchmesser gezogenen Kreis in  $R$  schneidet, und verbindet man  $R$  mit dem Zentrum  $C$  des Kreises, so ist der Winkel von  $CR$  mit der Apsidenlinie gleich dem Winkel  $E$ ; denn

$$SQ = CQ - CS$$

oder

$$r \cos v = a \cos E - ae,$$

in Übereinstimmung mit der zweiten Gl. 26. Man nennt  $E$  die exzentrische Anomalie (von ex centro). Der Zusammenhang von  $E$  mit der Zeit ist durch 22)

$$E - e \sin E = \mu(t - t_0) + c = M \quad 22)$$

gegeben. Daraus folgt, daß für  $E = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$   $M$  ebenfalls diese Werte annimmt, d. h. daß auch die mittlere Anomalie gleich der wahren und der exzentrischen von der Richtung nach dem Perihel an gezählt wird. Aus

$$M = \mu(t - t_0) + c = 2z\pi \quad (z = 0, 1, 2, \dots)$$

folgt

$$t = t_0 + \frac{2z\pi - c}{\mu},$$

woraus sich die Zeiten der Durchgänge durch das Perihel ergeben. Die Periode derselben ist natürlich die Umlaufdauer  $\frac{2\pi}{\mu} = T$ . Fällt die Epoche  $t_0$  mit einer dieser Durchgangszeiten zusammen, so wird

$$c = 2z\pi. \quad (z = 0, 1, 2, \dots)$$

Die Größe  $\mu$  ist durch die Gleichung 19) oder durch

$$\mu = \frac{k\sqrt{M+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben; sie erscheint hier zunächst in Teilen des Radius ausgedrückt; multipliziert man sie mit der Anzahl von Sekunden, die auf einen Bogen von der Länge des Radius kommen, d. h. mit 206264.8, so ist sie in Sekunden verwandelt und stellt dann den Winkel dar, um den die mittlere Anomalie in jeder Zeiteinheit wächst; sie heißt daher »mittlere Bewegung«. Offenbar erhält man die mittlere Anomalie, wenn man  $\mu$  mit der seit dem letzten Periheldurchgang verfloßenen Zeit multipliziert.

Das gegenseitige Verhalten der drei Winkel, die wir mit wahrer, exzentrischer und mittlerer Anomalie bezeichnet haben, ergibt sich leicht aus den aufgestellten Gleichungen. Im Perihel sind alle drei gleich Null, mit wachsender wahrer Anomalie wachsen auch die beiden anderen, aber so, daß bis zum Aphel die exzentrische kleiner bleibt als die wahre und die mittlere kleiner als die exzentrische; im Aphel selbst werden alle drei gleichzeitig gleich  $180^\circ$ ; von hier an aber bis wieder zum Perihel ist die exzentrische Anomalie immer größer als die wahre und die mittlere größer als die exzentrische. Oder: im ersten Halbkreis ist die wahre Anomalie größer als die mittlere, im zweiten umgekehrt die mittlere größer als die wahre; die exzentrische liegt stets zwischen beiden;  $v - M$  wird *Mittelpunktsgleichung* genannt. Auch

das ist ersichtlich: gehören  $v$ ,  $M$ ,  $E$  zusammen, so entsprechen auch  $360^\circ - v$ ,  $360^\circ - M$ ,  $360^\circ - E$  einander.

Wir wollen nun noch weitere Beziehungen zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie und dem Radiusvektor aufstellen. Dabei empfiehlt es sich, den durch

$$e = \sin \varphi$$

definierten sogenannten Exzentrizitätswinkel  $\varphi$  einzuführen, der offenbar der Winkel ist, den die von einem Endpunkt der kleinen Achse nach dem Mittelpunkt und dem einen Brennpunkt gezogenen Strahlen miteinander einschließen. Es wird dann:

$$1 \pm e = 1 \pm \sin \varphi = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi + \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \pm 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi = (\cos \frac{1}{2} \varphi \pm \sin \frac{1}{2} \varphi)^2$$

$$\sqrt{1 - e^2} = \cos \varphi, \quad \sqrt{1 + e} = \cos(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$$

$$\sqrt{1 - e} = \cos(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \sqrt{2}$$

$$\sqrt{1 + e} + \sqrt{1 - e} = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi$$

$$\sqrt{1 + e} - \sqrt{1 - e} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi;$$

ferner

$$\text{der Parameter} \quad p = a \cos \varphi^2$$

$$\text{die kleine Halbachse } b = a \cos \varphi.$$

Die bisherigen Formeln werden in dieser Schreibweise:

$$r = \frac{a \cos \varphi^2}{1 + \sin \varphi \cos v} \quad \text{I.}$$

$$r = a(1 - \sin \varphi \cos E) \quad \text{II.}$$

$$r \cos v = a(\cos E - \sin \varphi) \quad \text{III.}$$

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E.$$

Bildet man aus

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

die Ausdrücke

$$1 + \cos v = 2 \cos^2 \frac{1}{2} v = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E} = \frac{(1 - e) 2 \cos^2 \frac{1}{2} E}{1 - e \cos E}$$

$$1 - \sin v = 2 \sin^2 \frac{1}{2} v = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E} = \frac{(1 + e) 2 \sin^2 \frac{1}{2} E}{1 - e \cos E},$$

so folgt:

$$\cos \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{1 - e}}{\sqrt{1 - e \cos E}} \cos \frac{1}{2} E \quad \text{IV.}$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{1 + e}}{\sqrt{1 - e \cos E}} \sin \frac{1}{2} E$$

und daher

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \quad \text{V.}$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \sin E \sec \frac{1}{2} E^2.$$

Multipliziert man IV. mit

$$\sqrt{r} = \sqrt{a} \sqrt{1 - \cos E},$$

so erscheint:

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E = \frac{1}{2} \sqrt{a(1+e)} \sin E \sec \frac{1}{2} E$$

VI.

oder

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a} (\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi) \cos \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a} (\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi) \sin \frac{1}{2} E.$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{a} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{a} (\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi \cos E)$$

und

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - E) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \sin E}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos E}.$$

Verbindet man die beiden Gleichungen VI. durch die Multiplikatoren  $-\sin \frac{1}{2} E$  und  $\cos \frac{1}{2} E$ , beziehungsweise  $\sin \frac{1}{2} E$  und  $\cos \frac{1}{2} E$ , so kommt

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (v - E) &= \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{a}{r}} \sin E = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v \\ \sin \frac{1}{2} (v + E) &= \cos \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{a}{r}} \sin E = \cos \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v. \end{aligned} \right\}$$

und

VII.

Aus all diesen Formeln wird man je nach dem vorliegenden Fall die Auswahl treffen. Handelt es sich um die Berechnung des Radiusvektors und der wahren Anomalie aus der exzentrischen, eine Aufgabe, die ständig bei der Ephemeridenrechnung zu lösen ist, so wird im allgemeinen die Anwendung der Gruppen III. oder VI. die schnellste Rechnung gewähren; erstere sind namentlich dann wohl überhaupt die bequemsten, wenn man Additionslogarithmen verwendet, letztere wird man nur dann wählen, wenn viele Örter zu rechnen sind, weil sonst die Berechnung der Hilfsgrößen  $\sqrt{a(1-e)}$  und  $\sqrt{a(1+e)}$  sich nicht lohnt. Man kann auch  $r$  aus II. und  $v$  aus V. berechnen oder  $r$  aus II. und dann  $v$  mittels der ersten Gl. VII. und wird letzteren Weg namentlich dann einschlagen, wenn die äußerste Genauigkeit erfordert wird. Endlich kann man  $v$  aus V. und dann  $r$  aus I. bestimmen. — Eine besondere Kontrolle dieser Rechnungen ist gewöhnlich, besonders bei Ephemeridenrechnungen, nicht erforderlich, da man durch Bildung der Differenzen des für äquidistante Zeiten berechneten  $v$  leicht jede Unregelmäßigkeit bemerkt. Für einzelne Örter rechnet man nach zwei der angegebenen Methoden. Wir führen nun ein *Beispiel* nach allen angeführten Methoden durch.

Für den periodischen Kometen Brooks war 1896 Juni 17.5

$\log a$	0.567 3639	$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$	$58^\circ 59' 55''.65$
$\varphi$	$27^\circ 59' 51''.29$	$\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	0.221 2055
$\sin \varphi$	9.671 5748	$1 + \sin \varphi$	0.167 1502
$\cos \varphi$	9.945 9447	$1 - \sin \varphi$	9.724 7392
$a \cos \varphi$	0.513 3086	$\sqrt{a(1 + \sin \varphi)}$	0.367 2570
$a \sin \varphi$	0.238 9387	$\sqrt{a(1 - \sin \varphi)}$	0.146 0515
$\frac{1}{2}\varphi$	$13^\circ 59' 55''.65$		
$\sin \frac{1}{2}\varphi$	9.383 6384		
$\cos \frac{1}{2}\varphi$	9.986 9064		
$p$	0.459 2533		

Nach III.

$E$	$325^\circ 16' 50''.86$
$\sin E$	9.755 5357 <sub>n</sub>
$\cos E$	9.914 8470
Sub.	0.367 6648
$\cos E - e$	9.547 1822
$r \sin v$	0.268 8443 <sub>n</sub>
$r \cos v$	0.114 5461
$\cos v$	9.758 9100
* $\operatorname{tg} v$	0.154 2982 <sub>n</sub>
$v$	$305^\circ 1' 46''.03$
$r$	0.355 6361

Nach VI.

$E$	$325^\circ 16' 50''.86$
$\frac{1}{2}E$	$162 38 25.43$
$\sin \frac{1}{2}E$	9.474 7521
$\cos \frac{1}{2}E$	9.979 7536 <sub>n</sub>
$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2}v$	9.842 0091
$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2}v$	0.125 8051 <sub>n</sub>
$\cos \frac{1}{2}v$	9.947 9870
* $\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$	9.716 2040 <sub>n</sub>
$\frac{1}{2}v$	$152^\circ 30' 53''.03$
$v$	$305 1 46.07$
$\sqrt{r}$	0.177 8181
$r$	0.355 6362

Nach II. und V.

$E$	$325^\circ 16' 50''.86$
$\cos E$	9.914 8470
$e \cos E$	9.586 4218
$1 - e \cos E$	9.788 2724
$r$	0.355 6363
$\frac{1}{2}E$	$162^\circ 38' 25''.43$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}E$	9.494 9985
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$	9.716 2040
* $\frac{1}{2}v$	$152^\circ 30' 53''.03$
$v$	$305 1 46.07$

Nach II. und VII.

$E$	$325^\circ 16' 50''.86$
$\cos E$	9.914 8470
$ae \cos E$	0.153 7857
Sub.	0.211 7276
$r$	0.355 6363
$\sqrt{\frac{a}{r}}$	0.105 8638
$\sin E$	9.755 5357 <sub>n</sub>
$\sin \frac{1}{2}(v - E)$	9.245 0379 <sub>n</sub>
$v - E$	$20^\circ 15' 4''.78$
$v$	$305 1 46.08$

Nach V. und I.

$E$	$325^\circ 16' 50''.86$
$\frac{1}{2}E$	$162 38 25.43$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}E$	9.494 9985
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$	9.716 2040
$v$	$305^\circ 1' 46''.07$
$\cos v$	9.758 9101
$e \cos v$	9.430 4849
$1 + e \cos v$	0.103 6170
$r$	0.355 6363

Die mit \* bezeichneten Zeilen schreibt ein geübter Rechner nicht an. Konstante Logarithmen sind in der Rechnung nicht angegeben; man hat diese zur Benutzung für die fortlaufende Rechnung auf den unteren Rand eines Papierstreifens aufgeschrieben.

Die umgekehrte Aufgabe, die exzentrische Anomalie aus der wahren zu ermitteln, kommt weit seltener vor. Man kann sich hierzu der Formel V.:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

bedienen, es ist aber, besonders bei kleiner Exzentrizität, sicherer, die Formel aus VII.

$$\sin \frac{1}{2}(v - E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v$$

heranzuziehen, vorausgesetzt, daß  $r$  gegeben oder aus I. berechnet ist; der Vorteil dieses Weges tritt besonders dann hervor, wenn man aus der exzentrischen Anomalie dann weiter auch die mittlere aus  $M = E - e \sin E$  zu berechnen hat, was meistens der Fall ist; man braucht dann  $\sin E$ , das man einerseits durch direktes Aufschlagen des aus VII. folgenden Wertes von  $E$ , andererseits aber ohne erhebliche Mehrarbeit aus III:

$$\sin E = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi} = \frac{r}{p} \cos \varphi \sin v$$

erhalten kann, wodurch eine Kontrolle erzielt wird. Wir behandeln obiges Beispiel, indem wir jetzt

log $a$ 0.567 3639	sin $\frac{1}{2} \varphi$ 9.383 6384
sin $\varphi$ 9.671 5748	$p$ 0.459 2533
cos $\varphi$ 9.945 9447	$v$ 305° 1' 46".08
$e''$ 4.985 9999	

als bekannt voraussetzen und  $E$  und  $M$  suchen:

$v$ 305° 1' 46".07	$E$ 325° 16' 50".87
cos $v$ 9.758 9101	sin $E$ 9.755 3357 <sub>n</sub>
$e \cos v$ 9.430 4849	
$1 + e \cos v$ 0.103 6170	Kontrolle
$\frac{r}{p}$ 9.896 3830	$\frac{r}{p} \cos \varphi$ 9.842 3277
$\sqrt{\frac{r}{p}}$ 9.948 1915	sin $v$ 9.913 2081 <sub>n</sub>
sin $v$ 9.913 2081 <sub>n</sub>	sin $E$ 9.755 5358 <sub>n</sub>
sin $\frac{1}{2}(v - E)$ 9.245 0380 <sub>n</sub>	$e'' \sin E$ 4.741 5356 <sub>n</sub>
$v - E$ - 20° 15' 4".80	- 15° 19' 8".74
	$M$ 340 35 59.61

Wir leiten noch einen genäherten Wert für die *Mittelpunktsgleichung*  $v - M$  ab, der bei kleinen Exzentrizitäten von Nutzen ist. Da  $\operatorname{tg} s = s + \frac{1}{3} \operatorname{tg} s^3 + \dots$ , so folgt mit *Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung* aus der oben gegebenen Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(v - E) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \sin E}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos E}$$

sofort:

$$v - E = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \sin E + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^3 \sin 2E + \dots$$

Wird dies mit

$$E - M = e \sin E$$

verbunden, so ergibt sich

$$v - M = (e + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi) \sin E + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^3 \sin 2E + \dots$$



man ausführlich erläutert und mit der nötigen Sinuskurve ausgestattet in den »Tafeln« Nr. XIII. Hier wollen wir aus der graphischen Darstellung nur den Schluß ziehen, daß offenbar bei Exzentrizitäten in der Nähe von 1 und bei kleinen Werten von  $M$  der Schnitt von  $AC$  mit der Sinuskurve nur sehr unsicher festgestellt werden kann, daß also  $E$  sich dann aus der Keplerschen Gleichung nicht bestimmen läßt. Wir werden also zwei Fälle zu unterscheiden haben: kleine Exzentrizitäten, wo die Keplersche Gleichung immer aufgelöst werden kann, und große in der Nähe von 1 befindliche Exzentrizitäten, wo für kleine  $M$  überhaupt ein anderes Verfahren eingeschlagen werden muß. Wir betrachten vorläufig nur den ersten Fall und kommen auf den zweiten erst später zurück.

Der Weg der sukzessiven Näherung setzt den Besitz eines *ersten* Näherungswertes voraus und dann eine rasch fördernde Methode, ihn zum wahren zu verbessern. Was ersteren anbelangt, so kann man ihn, wie oben erläutert, graphisch erhalten, oder man kann ihn aus Tabellen entnehmen, die mit den zwei Argumenten  $e$  und  $M$  angelegt sind; eine solche Tabelle ist in Taf. X in den »Tafeln« oder in weitaus größerem Umfang in den »Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems von *J. J. Åstrand*, mit einer Einleitung von *H. Bruns*« geboten. Sind keine solchen Hilfsmittel zur Hand, so wird man davon Gebrauch machen, daß  $E$  zwischen den Grenzen  $M$  und  $M \pm e''$  liegen muß, wo  $e''$  die in Sekunden ausgedrückte Exzentrizität bezeichnet und wo das obere Zeichen im ersten, das untere im zweiten Halbkreis zu nehmen ist; bei kleiner Exzentrizität wird also schon  $M$  oder ein schätzungsweise vermehrter oder verminderter Wert eine Näherung darstellen. Es gibt auch mehrere Methoden, die durch eine kleine direkte Rechnung einen sehr guten Näherungswert verschaffen, so zunächst das *Enckesche* Verfahren (*Astr. Nachr.* Nr. 714), das beliebig weit ausgebaut werden kann (siehe *N. Herx*, *Astr. Nachr.* Nr. 2354), aber dann aufhört bequem zu sein. In diesem wird

$$E - M = x$$

gesetzt, worauf die Keplersche Gleichung die Form

$$x = e \sin(M + x),$$

oder nach Entwicklung des  $\sin$  die Form:

$$x = e \sin M (1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots) + e \cos M (x - \frac{1}{6}x^3 + \dots)$$

annimmt; diese gibt:

$$x = e \sin M + e \cos M x - \frac{1}{2} e \sin M x^2 - \frac{1}{6} e \sin M \cotg M x^3 + \dots$$

oder

$$x = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} - \frac{1}{2} \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} x^2 - \frac{1}{6} \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \cotg M x^3 + \dots;$$

wird

$$\frac{e \sin M}{1 - e \cos M} = \operatorname{tg} y$$

und in den höheren Gliedern  $x = \operatorname{tg} y$  gesetzt, so folgt:

$$x = \operatorname{tg} y - \frac{1}{2} \operatorname{tg} y^3 - \frac{1}{6} \cotg M \operatorname{tg} y^4 + \dots;$$

einen ebenso genauen, aber einfacheren Ausdruck erhält man hieraus, wenn man  $\sin y = \eta$  statt  $\operatorname{tg} y$  einführt; da

$$\operatorname{tg} y = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \eta + \frac{1}{2}\eta^3 + \dots, \quad \operatorname{tg} y^3 = \eta^3 + \dots, \quad \operatorname{tg} y^4 = \eta^4 + \dots,$$

so wird

$$x = \eta - \frac{1}{6}\cotg M \eta^4 + \dots$$

und man hat daher folgendes einfache System zur Erlangung eines Näherungswertes durchzurechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \\ \eta &= \operatorname{tg} y \cos y && \text{A.} \\ x &= \alpha \eta + \beta \cotg M \eta^4, \end{aligned}$$

wobei die Zahlenwerte von  $\alpha$  und  $\beta$ , wenn  $x$  gleich in Sekunden erscheinen soll, folgendermaßen zu nehmen sind:

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 5.3144251 \\ \log \beta &= 4.536274n. \end{aligned}$$

Nimmt man obiges Beispiel (Seite 140) vor, wo

$$\begin{aligned} \log e &= \log \sin \varphi = 9.6715748 \\ \log e'' &= 4.9859999, \end{aligned}$$

so wird für  $M = 340^\circ 35' 59''.61$  die Rechnung sich folgendermaßen stellen:

$\sin M$	9.5213511 <sub>n</sub>	$\eta$	9.4305287 <sub>n</sub>
$\cos M$	9.9746139	$\eta^4$	7.7221148
$e \cos M$	9.6461887	$\cotg M$	0.4532628 <sub>n</sub>
$1 : (1 - e \cos M)$	0.2539739	$\cotg M \eta^4$	8.1753776 <sub>n</sub>
$e \sin M$	9.1929259 <sub>n</sub>	$\alpha \eta$	- 15° 26' 24''.51
$\operatorname{tg} y$	9.4468998 <sub>n</sub>	$\beta \cotg M \eta^4$	+ 8 34.82
$\cos y$	9.9836289	$E - M$	- 15 17 49.69

Dieser Wert weicht nur wenig mehr als  $1'$  von dem wahren ab und kann leicht durch eine der im folgenden anzugebenden Methoden zum wahren verbessert werden.

Ein zweites, ziemlich ähnliches Verfahren hat *Tietjen* angegeben (Veröff. des Rechen-Institutes Nr. 1). Setzt man hier ebenfalls  $E = M + x$ , so wird

$$x = e \sin(M + x) = e \sin M \cos x + e \cos M \sin x,$$

oder

$$\frac{x}{\cos x} = e \sin M + e \cos M \operatorname{tg} x;$$

wird hiervon

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

subtrahiert, so folgt:

$$\frac{x - \sin x}{\cos x} = e \sin M - (1 - e \cos M) \operatorname{tg} x,$$

oder

$$\operatorname{tg} x = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} - \frac{x - \sin x}{\cos x (1 - e \cos M)}.$$

Wird  $x_0$  aus

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$$

berechnet, so folgt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} - \frac{(x - \sin x) \cos x_0}{(1 - e \cos M) \cos x \cos x_0},$$

oder

$$\sin(x - x_0) = - \frac{(x - \sin x) \cos x_0}{1 - e \cos M}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} x - \sin x &= (x_0 - \sin x_0) + (x - x_0) - (\sin x - \sin x_0) \\ &= (x_0 - \sin x_0) + (x - x_0) - 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß  $x$  und  $x_0$  sich nur um Größen dritter Ordnung voneinander unterscheiden, wenn die Exzentrizität erster Ordnung genannt wird, so wird man statt des  $\sin \frac{1}{2}(x - x_0)$  den Bogen setzen dürfen und dann erhalten:

$$x - \sin x = (x_0 - \sin x_0) + 2(x - x_0) \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0).$$

Wird dies oben eingetragen und außerdem

$$\frac{\cos x_0}{1 - e \cos M} = A$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$(x - x_0) = - (x_0 - \sin x_0) A - 2A(x - x_0) \sin^2 \frac{1}{4}(x - x_0)^2$$

oder

$$x - x_0 = - \frac{(x_0 - \sin x_0) A}{1 + 2A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2}.$$

Da genähert

$$\frac{1}{1 + 2A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x_0^2 = \cos x_0,$$

so wird in

$$x - x_0 = - \frac{(x_0 - \sin x_0) A \cos x_0}{\cos x_0 (1 + 2A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2)}$$

der Nenner sehr nahe gleich 1 sein. Da ferner bekanntlich

$$x_0 - \sin x_0 = \frac{1}{6} \sin^3 x_0 + \frac{3}{40} \sin^5 x_0 + \dots,$$

so wird man

$$(x_0 - \sin x_0) \cos x_0 = C \sin x_0^3$$

setzen dürfen, und es wird  $C$  eine wenig veränderliche, mit dem Argument  $x_0$  leicht tabulierbare Größe sein. Es folgt dann schließlich die fast strenge Formel:

$$x - x_0 = - \frac{AC \sin x_0^3}{\cos x_0 (1 + 2A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2)}.$$

Die zweckmäßigste Anwendung derselben wird sein, den Nenner gleich 1 zu setzen und aus

$$x = x_0 - AC \sin x_0^3$$

den Näherungswert der exzentrischen Anomalie abzuleiten, der dann, wie unten angegeben, weiter verbessert wird. Eine Variante dieser Methode ist, zu setzen:

$$\sigma = C \sin x_0^3 \cos x_0$$

und  $\sigma$  zu tabulieren; es wird dann:

$$x = x_0 - \frac{\sigma}{1 - e \cos M}$$

Die Taf. XI gibt  $\log C$ , bereits in Bogensekunden ausgedrückt; die Taf. XII gibt  $\sigma$ . Wir stellen die Formeln dieser Methode zusammen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_0 &= \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \\ A &= \frac{\cos x_0}{1 - e \cos M} \\ E &= M + x_0 - AC \sin x_0^3 \\ &\quad C \text{ aus Taf. XI} \end{aligned} \quad \text{B.}$$

oder:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_0 &= \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \\ E &= M + x_0 - \frac{\sigma}{1 - e \cos M} \\ &\quad \sigma \text{ aus Taf. XII.} \end{aligned} \quad \text{C.}$$

Für Exzentrizitätswinkel unter  $15^\circ$  geben diese Formeln für eine fünfstellige Rechnung den genauen Wert, für sechs- und siebenstellige Rechnung einen so guten Näherungswert, daß man mit *einer* weiteren Näherung am Ziel ist. Für größere Exzentrizitäten kommt man ebenso weit, wenn man die früher angegebene strengere Formel benutzt, es ist aber rechnerisch vorteilhafter, B. oder C. zu benutzen und eine Näherung mehr zu machen.

Beispiel: Nimmt man wieder die obigen Zahlen (Seite 143):

$$\begin{aligned} \log e &= 9.671\,5748 \\ M &= 34^\circ 35' 59''.61, \end{aligned}$$

so wird hier:

$\sin M$	9.521 3511 <sub>n</sub>		
$\cos M$	9.974 6139		
$e \cos M$	9.646 1887	$A$	0.237 603
$1 : (1 - e \cos M)$	0.253 9739	$C$	4.534 492
$e \sin M$	9.192 9259 <sub>n</sub>	$\sin x_0^3$	8.291 586 <sub>n</sub>
$\operatorname{tg} x_0$	9.446 8998 <sub>n</sub>	$- AC \sin x_0^3$	3.063 681
$x_0$	$- 15^\circ 38' 0''.25$		$+ 19' 17''.93$
$\sin x_0$	9.430 5286 <sub>n</sub>	$E - M$	$- 15^\circ 18' 42''.32$
$\cos x_0$	9.983 6289		

Dieser Wert weicht nur  $26''$  vom wahren ab.

Die bisher besprochenen Methoden zur Erlangung eines ersten Näherungswertes für  $E$  braucht man nur anzuwenden, wenn vereinzelte Werte zu rechnen sind oder am Anfang der Berechnung einer Ephemeride. Hat man aber für viele äquidistante Werte von  $M$  die  $E$  zu rechnen, so wird man nach Durchrechnung der zwei bis drei ersten Fälle für die folgenden durch Extrapolation der Größen  $E - M$ , Werte von  $E$  finden, die bereits bis auf wenige Sekunden an die Wahrheit herankommen, also leicht verbessert werden können. Hat man z. B. gefunden:

	$M$	$E$
Dez. 15	10° 38' 28".69	19° 44' 34".45
19	11 11 59.32	20 44 32.60
23	11 45 29.95	21 44 12.21
27	12 19 0.58	22 43 32.69

so legt man das Schema an:

	$E - M$	$A'$	$A''$	$A'''$
Dez. 15	9° 6' 5".76			
19	9 32 33.28	+ 26' 27".52	- 18".54	- 0".59
23	9 58 42.26	+ 26 8.98	- 19.13	- 0.59
27	10 24 32.11	+ 25 49.85	- 19.72	
31	10 50 2.24	+ 25 30.13		

und findet für Dez. 31. den kursiv eingetragenen Wert, der

$$E = 12^{\circ} 52' 31''.21 + 10^{\circ} 50' 2''.24 = 23^{\circ} 42' 33''.45$$

gibt und nur 0".13 von dem wahren Wert abweicht.

Die Verbesserung des Näherungswertes zum wahren geschieht am einfachsten durch Bildung des Differenzialquotienten  $\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E}$ ; rechnet man nämlich mit dem Näherungswert  $E_1$  den zugehörigen Wert von  $M$ , nämlich  $M_1 = E_1 - e' \sin E_1$ , so ist offenbar sehr nahe

$$E - E_1 = (M - M_1) \frac{dE}{dM}$$

und  $E_1 + (E - E_1)$  wird dem strengen Werte um so näher liegen, je genauer  $E_1$  bereits war. Die Berechnung von  $\frac{1}{1 - e \cos E}$  ist leicht auszuführen; fertig berechnet gibt diesen Ausdruck die Taf. XIV; in den Åstrandschen Tafeln wird er durch die ersten Differenzen geboten. Nach einem Vorschlag von Gauß (Theoria motus art. 11) benutzt man zur empirischen Bildung des Differenzialquotienten die logarithmischen Differenzen. Sei  $E_1$  der genäherte,  $E_1 + x = E$  der strenge Wert, dann notiere man bei Entnahme von  $\log \sin E_1$  die logarithmische Differenz in Einheiten der letzten Stelle für 1" Änderung von  $E_1$  mit ihrem Zeichen und nenne sie  $d$  (dieses wird positiv im ersten und vierten, negativ im zweiten und dritten Quadranten sein), ferner ebenso in Einheiten derselben Dezimale die Änderung von  $\log e' \sin E_1$  für 1 Einheit der Zahl  $e' \sin E_1$  und nenne sie  $D$  (stets positiv), dann ist

$$e' \sin(E_1 + x) = e' \sin E_1 + \frac{d}{D} x,$$

wo  $x$  in Sekunden ausgedrückt gedacht ist; also wird

$$E_1 + x = M + e' \sin(E_1 + x) = M + e' \sin E_1 + \frac{d}{D} x$$

oder

$$x = (M + e' \sin E_1 - E_1) \frac{D}{D - d}$$

oder wenn

$$M + e' \sin E_1 = E_2$$

gesetzt wird:

$$x = (E_2 - E_1) \frac{D}{D - d}.$$

Der wahre Wert wird also:

$$E = E_2 + (E_2 - E_1) \frac{D}{D - d} \cdot \frac{d}{D}$$

oder

$$E = E_2 + (E_2 - E_1) \frac{d}{D - d}.$$

Wir wollen nur die Gaußsche Methode durch ein Beispiel erläutern. Es sei wie oben (Seite 143)

$$\begin{aligned} M & 340^\circ 35' 59''.61 \\ \log e & 9.671\ 5748 \\ \log e'' & 4.985\ 9999 \end{aligned}$$

und als Näherungswert von  $E$  werde der dort gefundene

$$E_1 = 340^\circ 35' 59''.61 - 15^\circ 17' 49''.69$$

genommen, den man abrunden wird auf:

$$\begin{array}{rcl} E_1 & 325^\circ 18' 10''.00 & \\ \sin E_1 & 9.755\ 2952_n & d = + 30.5 \\ e'' \sin E_1 & 4.741\ 2951_n & \\ e'' \sin E_1 & - 15^\circ 18' 38''.21 & D = + 79.0 \\ E_2 & 325\ 17\ 21.40 & \\ E_2 - E_1 & - 48''.60 & \frac{d}{D - d} = + \frac{30.5}{48.5} = [9.7986] \\ \frac{d}{D - d} (E_2 - E_1) & - 30''.56 & \\ E & 325^\circ 16' 50''.84 & \\ \sin E & 9.755\ 5358_n & \\ e'' \sin E & 4.741\ 5357_n & \\ e'' \sin E & - 15^\circ 19' 8''.76 & \\ M + e'' \sin E & 325\ 16\ 50.85. & \end{array}$$

Der strenge Wert ist also  $E = 325^\circ 16' 50''.85 + \frac{5}{8} 0''.01$ .

Um die wahre Anomalie aus der mittleren zu erhalten, haben wir die Zwischengröße der exzentrischen Anomalie eing. führt. Man kann aber auch den Unterschied  $v - M$  in Reihen entwickeln, wodurch man die wahre Anomalie unmittelbar erhält. Dieses Verfahren empfiehlt sich aber nur bei ganz kleinen Exzentrizitäten, wie sie bei den großen Planeten auftreten, weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen. Zu erwähnen ist aber, daß *Tietjen* ausführliche Tafeln konstruiert hat (Veröff. des Rechen-Instituts Nr. 1), die für die Exzentrizitätswinkel von  $0^\circ 0'$  bis  $20^\circ 20'$  von  $20'$  zu  $20'$  fortschreitend  $v - M$  zu entnehmen gestatten, allerdings nur mit einer Genauigkeit, wie sie etwa für rohere Ephemeriden und Störungsrechnungen ausreichend ist.

**46. Die Differenzialquotienten der Polarkoordinaten nach der Zeit** werden häufig gebraucht und mögen daher an dieser Stelle im Zusammenhang abgeleitet werden.

Da sich  $s$  von der wahren Anomalie  $v$  nur um eine Konstante unterscheidet, gibt die Gl. 9) (Seite 127) unmittelbar

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}{r^2}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -r^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -r^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{p} (1 + e \cos v) \right) \\ &= +r^2 \frac{e}{p} \sin v \frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} e \sin v \\ &= \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} \varphi \sin v. \end{aligned}$$

Wird nochmals differenziert, so kommt:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}{r^3} \frac{dr}{dt} = -\frac{2k^2(1+m)}{r^3} e \sin v$$

und

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} e \cos v \frac{dv}{dt} = \frac{k^2(1+m)}{r^2} e \cos v.$$

Eine elegante Gleichung erhält man auch, wenn man die Differenzialquotienten von  $r^2$  bildet:

$$\frac{dr^2}{dt} = 2r \frac{dr}{dt} = \frac{2k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} er \sin v$$

oder wenn

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

substituiert wird:

$$\frac{dr^2}{dt} = 2k\sqrt{1+m} e\sqrt{a} \sin E.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2k\sqrt{1+m} e\sqrt{a} \cos E \frac{dE}{dt}$$

oder da aus

$$E - e \sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t$$

sich ergibt

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m} a}{a^{\frac{3}{2}} r} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = \frac{2k^2(1+m)e \cos E}{r}$$

oder wenn  $r = a - ae \cos E$  beachtet wird:

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2k^2(1+m) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Wir stellen die Formeln nochmals zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Ellipse: } \frac{dv}{dt} &= k \sqrt{1+m} \frac{\sqrt{p}}{r^2} \\ \frac{dr}{dt} &= k \sqrt{1+m} \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} = k \sqrt{1+m} \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin v}{\sqrt{a}} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{2e \sin v}{r^3} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= k^2 (1+m) \frac{e \cos v}{r^2} \\ \frac{d^2 r^2}{dt^2} &= k^2 (1+m) 2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

Wir fügen gleich die Werte für die Parabel an, da sie sich hieraus ergeben, wenn man  $e = 1$  setzt. Wir führen gleichzeitig die Periheldistanz  $q = \frac{1}{2}p$  ein:

$$\begin{aligned} \text{Parabel: } \frac{dv}{dt} &= k \sqrt{1+m} \frac{\sqrt{2q}}{r^2} \\ \frac{dr}{dt} &= k \sqrt{1+m} \frac{\sin v}{\sqrt{2q}} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{2 \sin v}{r^3} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= k^2 (1+m) \frac{\cos v}{r^2} \\ \frac{d^2 r^2}{dt^2} &= k^2 (1+m) \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

**47. Die Gaußsche Konstante  $k$ ; die astronomischen Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse.** Die in den Grundgleichungen 2) (Seite 125) eingeführte Konstante  $k$ , welche die Gravitationskonstante des Sonnensystems heißt, kann jetzt bestimmt werden. Zunächst sind aber die Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse festzusetzen, die wir dieser Bestimmung zugrunde legen wollen. Wir bestimmen als

Einheit der Zeit den mittleren Sonnentag,  
Einheit der Länge die halbe große Achse der Erdbahn,  
Einheit der Masse die Sonnenmasse.

Dann wird in der auf den Planeten Erde angewendeten Gleichung 16) (Seite 133)

$$k = \frac{2 a^{\frac{3}{2}} \pi}{\sqrt{M+m} T}$$

zu setzen sein  $a = 1$ ,  $M = 1$ ,  $m$  die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse,  $T$  die Umlaufzeit der Erde um die Sonne oder das siderische Jahr, ausgedrückt in mittleren Sonnentagen. Nach den Annahmen von Gauß (Theoria motus art. 1) ist:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{354710} = 0.0000028192 \\ T &= 365.2563835 \end{aligned}$$

und es stellt sich daher die Berechnung von  $k$  folgendermaßen

$$\begin{array}{r} \log 2\pi \qquad \qquad \qquad 0.798\ 179\ 8684 \\ \text{compl. log } T \qquad \qquad \qquad 7.437\ 402\ 1852 \\ \hline \text{compl. log } \sqrt{1+m} \qquad \qquad \qquad 9.999\ 999\ 3878 \\ \log k = 8.235\ 581\ 4414_{-10} \\ k = 0.017\ 202\ 09895 \end{array}$$

Sehr häufig tritt  $k$  in Verbindungen ein, die durch Multiplikation mit 206 264.806 aus Teilen des Radius in Sekunden zu verwandeln sind. Man führt dies am einfachsten dadurch aus, daß man  $k$ , ausgedrückt in Sekunden, benutzt. Dieser Wert ist

$$\begin{aligned} k'' &= 3548''.18761 \\ \log k'' &= 3.550\ 006\ 5746 \end{aligned}$$

und ist offenbar wegen Gl. 19) (Seite 133), die hier wird:

$$\mu = k'' \sqrt{1+m}$$

sehr nahe gleich der mittleren täglichen Bewegung der Erde.

Mit den angegebenen Zahlenwerten nennt man  $k$  wohl auch die Gaußsche Konstante.

Die Angaben, welche Gauß der Bestimmung von  $k$  zugrunde gelegt hat, sind gegenwärtig veraltet und müßten durch andere ersetzt werden; da eine derartige Änderung von  $k$ , die wegen der Unsicherheit der Erdmasse doch nie als eine definitive gelten könnte, manche Nachteile hat, zieht man es vor,  $k$  als absolute Konstante beizubehalten und dafür die Längeneinheit derart zu ändern, daß die Gleichung 16) bestehen bleibt trotz der neuen Annahmen über  $m$  und  $T$ . Die Längeneinheit ist nach dieser Übereinkunft durch  $k$  bestimmt; in ihr ausgedrückt wird die halbe große Achse der Erdbahn nicht genau gleich 1, sondern eine hiervon etwas abweichende Zahl. Da diese Abweichung sehr klein ist (mit den Annahmen, die Newcomb gemacht hat, wird  $\log a = 0.000\ 000\ 013$ , Astr. Papers, Vol. VI, S. 10) ist sie eine leichter zu ertragende Unbequemlichkeit, als die Änderung der fundamentalen Konstanten  $k$ .

Durch Einführung einer anderen Zeiteinheit kann man es dahin bringen, daß  $k = 1$  wird, was bei theoretischen Untersuchungen zur Vereinfachung der Schreibweise beiträgt und daher vielfach benutzt wird. Diese Zeiteinheit ist offenbar

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{0.017\ 202\ 098\ 95} = 58.132\ 44087 \text{ mittlere Sonnentage.}$$

**48. Beziehungen zwischen mehreren Orten einer Ellipse und den Elementen.** Wir haben bisher *einen* Ort in der Ellipse betrachtet und gezeigt, wie er durch die Elemente der Bahn und die Zeit ermittelt werden kann; wir wollen jetzt *zwei* und *drei* Orte in ihren Beziehungen zu den Bahnelementen untersuchen, dabei aber mit Rücksicht auf unsere Hauptaufgabe, die Bahnbestimmung, folgende Bemerkung vorausschicken. Eine Ellipse ist nach Lage und Größe in ihrer Ebene vollständig bestimmt, wenn die drei Elemente: Länge des Perihel, Exzentrizität und Parameter bekannt sind. Zur Bestimmung einer Ellipse sind also drei Gleichungen

zwischen diesen Elementen einerseits und anderweitig bekannt gewordenen Größen andererseits notwendig. Die ersten Entwicklungen der Bahnbestimmung weisen darauf hin, daß die ihrer Größe und Lage nach gegebenen Radienvektoren, vom Brennpunkt nach den Ellipsenorten gezogen, die natürlichsten Größen der letzteren Art sind. Deren Verbindung mit den genannten Elementen liefert Gleichungen von der Form

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(s - \varpi).$$

Demnach würden drei Paare von Größen  $s$  und  $r$  nötig sein, um die nötigen Gleichungen zur Bestimmung von  $p$ ,  $e$ ,  $\varpi$  aufstellen zu können. Kann man eines der Elemente als bekannt annehmen, so braucht man nur noch zwei Paare  $s$ ,  $r$ , um die Ellipse völlig zu bestimmen; diese Daten würden also auch ermöglichen, die *Zeit* zu berechnen, die der Radiusvektor braucht, um von der einen Lage in die andere überzugehen. Daraus geht umgekehrt hervor, daß man aus zwei ihrer Größe und Lage nach bekannten Radienvektoren und der Zwischenzeit jenes Element und dann auch die übrigen, also die ganze Bahn muß berechnen können. Hieraus ist klar, daß die Lösung dieser Aufgabe in den Mittelpunkt gerückt werden muß, und daß aus der großen Zahl von Beziehungen zwischen mehreren Orten der Bahn diejenigen heranzuziehen sind, die hierzu beitragen können.

Dasjenige Element, welches zuerst bestimmt zu werden pflegt, ist der Parameter  $p$ ; durch ihn und durch zwei nach Lage und Größe gegebene Radienvektoren die beiden anderen Elemente  $e$  und  $\varpi$  auszudrücken, gelingt wie folgt. Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_1} - 1 &= e \cos(s_1 - \varpi) \\ \frac{p}{r_2} - 1 &= e \cos(s_2 - \varpi) \end{aligned} \quad 1)$$

werden, wenn

$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1, \quad \frac{p}{r_2} - 1 = q_2$$

und  $s_2 - \varpi = (s_1 - \varpi) + (s_2 - s_1)$  gesetzt wird:

$$e \cos(s_1 - \varpi) = q_1$$

$$e \cos(s_1 - \varpi) \cos(s_2 - s_1) - e \sin(s_1 - \varpi) \sin(s_2 - s_1) = q_2$$

oder:

$$\begin{aligned} e \cos(s_1 - \varpi) &= q_1 \\ e \sin(s_1 - \varpi) &= \frac{q_1 \cos(s_2 - s_1) - q_2}{\sin(s_2 - s_1)}. \end{aligned} \quad 2)$$

Hieraus ergibt sich gleichzeitig  $e$  und  $\varpi$ . Man kann aber auch  $\varpi$  durch

$$\operatorname{tg}(s_1 - \varpi) = \operatorname{cotg}(s_2 - s_1) - \frac{q_2}{q_1 \sin(s_2 - s_1)}$$

oder:

$$\operatorname{tg}(s_1 - \varpi) = \operatorname{cotg}(s_2 - s_1) - \frac{r_1 p - r_2}{r_2 p - r_1} \frac{1}{\sin(s_2 - s_1)} \quad 3)$$

ermitteln und dann  $e$  durch:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos(s_1 - \varpi) - r_2 \cos(s_2 - \varpi)}, \quad 4)$$

wovon 3) unmittelbar durch Division der Gleichungen 2), und 4) durch Gleichsetzung von  $p = r_1 e \cos(s_1 - \varpi) + r_1 = r_2 e \cos(s_2 - \varpi) + r_2$  entsteht. Oder endlich man erhält durch addieren und subtrahieren von 1)

$$\begin{aligned} 2e \cos \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \left( \frac{s_2 + s_1}{2} - \varpi \right) &= \frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} - 2 \\ 2e \sin \frac{s_2 - s_1}{2} \sin \left( \frac{s_2 + s_1}{2} - \varpi \right) &= \frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_2} \end{aligned}$$

und daraus wieder  $\varpi$  und  $e$  gleichzeitig.

Können demgemäß zwei Radienvektoren nach Größe und Lage als bekannt angenommen werden, und außerdem die von vornherein bekannte Zwischenzeit, so kommt alles darauf an, den Parameter zu ermitteln. Man kann sogar zeigen, daß ein Näherungswert desselben genügt. Denn rechnet man mittels eines solchen nach 2) die zugehörigen Werte von  $e$  und  $\varpi$ , so kann daraus die Zwischenzeit abgeleitet werden; stimmt diese mit der bekannten überein, so ist mit dem Näherungswerte von  $p$  bereits der richtige getroffen gewesen, wenn nicht, so kann man durch ein einfaches Näherungsverfahren allmählich zum wahren Wert von  $p$  fortschreiten.

Durch diese Überlegungen sind wir dahin geführt, den Beziehungen des Parameters zu den Radienvektoren, den zwischen ihnen liegenden Winkeln und den Zwischenzeiten das Hauptaugenmerk zuzuwenden.

Nehmen wir fürs erste drei Radienvektoren  $r_1, r_2, r_3$  mit ihren Bestimmungswinkeln  $s_1, s_2, s_3$ , so führen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_1} &= 1 + e \cos(s_1 - \varpi) \\ \frac{p}{r_2} &= 1 + e \cos(s_2 - \varpi) \\ \frac{p}{r_3} &= 1 + e \cos(s_3 - \varpi) \end{aligned}$$

zu einem eleganten Ausdruck von  $p$ ; denn multipliziert man sie der Reihe nach mit  $\sin(s_3 - s_2), -\sin(s_3 - s_1), \sin(s_2 - s_1)$  und addiert, so kommt wegen des bekannten Satzes

$$\cos A \sin(C - B) + \cos B \sin(A - C) + \cos C \sin(B - A) = 0,$$

der für beliebige Winkel  $A, B, C$  gilt:

$$p = \frac{\sin(s_3 - s_2) - \sin(s_3 - s_1) + \sin(s_2 - s_1)}{\frac{1}{r_1} \sin(s_3 - s_2) - \frac{1}{r_2} \sin(s_3 - s_1) + \frac{1}{r_3} \sin(s_2 - s_1)}$$

Hierin wird der Zähler

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos \frac{1}{2}(s_3 - s_2) - 2 \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos \left( \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_2 - s_1 \right) \\ = 4 \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_1) \sin \frac{1}{2}(s_2 - s_1) \end{aligned}$$

und wenn man daher Zähler und Nenner mit  $r_1 r_2 r_3$  multipliziert, so erscheint:

$$p = \frac{4 r_1 r_2 r_3 \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_1) \sin \frac{1}{2}(s_2 - s_1)}{r_2 r_3 \sin(s_3 - s_2) - r_1 r_3 \sin(s_3 - s_1) + r_1 r_2 \sin(s_2 - s_1)} \quad 5)$$

Da  $\frac{1}{2}r_2r_3 \sin(s_3 - s_2)$  die Fläche des Dreiecks darstellt, welches von den Radienvektoren  $r_2, r_3$  und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte gebildet wird, usf., so stellt der Nenner dieses Ausdruckes offenbar die doppelte Fläche des von den Endpunkten der drei Radienvektoren gebildeten Dreiecks dar, ist also, wenn die Radienvektoren nahe aneinander liegen, sehr klein. Kleine Fehler in  $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$  würden also sehr beträchtliche in  $p$  hervorrufen, weshalb sich der Ausdruck 5) zur Berechnung von  $p$  nicht eignet, außer wenn die Radienvektoren beträchtliche Winkel miteinander bilden. Übrigens kann 5), wenn man die erwähnten doppelten Dreiecksflächen mit  $[r_2r_3], [r_1r_3], [r_1r_2]$  bezeichnet, auch so geschrieben werden:

$$p = \frac{[r_2r_3][r_1r_3][r_1r_2]}{[r_2r_3] - [r_1r_3] + [r_1r_2]} \frac{1}{2r_1r_2r_3 \cos \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos \frac{1}{2}(s_3 - s_1) \cos \frac{1}{2}(s_2 - s_1)} \quad 5^a)$$

oder so:

$$p = \frac{r_1[r_2r_3] - r_2[r_1r_3] + r_3[r_1r_2]}{[r_2r_3] - [r_1r_3] + [r_1r_2]}, \quad 5^b)$$

die sich zur Berechnung von  $p$  natürlich ebensowenig eignen, wie 5).

Zu einem anderen Ausdruck für  $p$  bietet die Gl. 9) (Seite 127)

$$r^2 ds = k \sqrt{1 + m} Vp dt$$

die Hand. Wenn man nämlich zwischen den Grenzen  $s_1$  und  $s_2$  linkerhand und den zugehörigen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  rechterhand integriert, so hat man in

$$\int_{s_1}^{s_2} r^2 ds = k \sqrt{1 + m} Vp (t_2 - t_1)$$

einen Ausdruck für  $p$ , sobald es gelingt das linksstehende Integral, welches offenbar die doppelte Fläche des elliptischen Sektors zwischen den Radienvektoren  $r_1$  und  $r_2$  darstellt, auszuwerten. *Gauß* hat hierzu unter Heranziehung der Cotesschen Formeln für mechanische Quadratur und unter Benutzung der Gl. 5) zur Ermittlung des zu  $\frac{s_1 + s_2}{2}$  gehörigen Radiusvektors  $\bar{r}$  eine Methode ausgearbeitet (Theoria motus art. 85 bis 87), indem er setzt:

$$\int_{s_1}^{s_2} r^2 ds = \frac{1}{6}(r_1^2 + 4\bar{r}^2 + r_2^2)(s_2 - s_1),$$

und einen ähnlichen Weg hat *Euler*\*) in seinen Abhandlungen über Bahnbestimmung eingeschlagen; da diese Methoden aber durch neuere und bessere völlig in den Hintergrund gedrängt sind, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

*Moulton* hat neuerdings den Gedanken der direkten Auswertung des Integrales wieder aufgenommen (Astr. Journal Nr. 510, 1901), indem er  $r^2$  in eine Potenzreihe von  $s - s_2$  entwickelt:

$$r^2 = r_2^2 + c'(s - s_2) + c''(s - s_2)^2$$

---

\*) *Euler*, Theoria motus planetarum et cometarum . . . ; Recherches sur la vraie orbite de la comète de 1769 . . . .

und die Koeffizienten  $c'$  und  $c''$  durch die Radienvektoren  $r_1$  und  $r_3$  und die zugehörigen Winkel  $s_1$  und  $s_3$  bestimmt. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_2^2 + c'(s_1 - s_2) + c''(s_1 - s_2)^2 \\ r_3^2 &= r_2^2 + c'(s_3 - s_2) + c''(s_3 - s_2)^2 \end{aligned}$$

geben, wenn zur Abkürzung

$$s_3 - s_2 = \sigma_1, \quad s_3 - s_1 = \sigma_2, \quad s_2 - s_1 = \sigma_3$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} -c'\sigma_3 + c''\sigma_3^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\ +c'\sigma_1 + c''\sigma_1^2 &= r_3^2 - r_2^2, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} c' &= -\frac{r_1^2\sigma_1 + r_3^2\sigma_3 - r_2^2(\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \\ c'' &= \frac{r_1^2\sigma_1 + r_3^2\sigma_3 - r_2^2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}. \end{aligned}$$

Da

$$\int r^2 ds = r_2^2(s - s_2) + \frac{1}{2}c'(s - s_2)^2 + \frac{1}{3}c''(s - s_2)^3$$

und daher

$$\int_{s_1}^{s_3} r^2 ds = \sigma_1 r_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 c' + \frac{1}{3}\sigma_1^3 c'' + \sigma_3 r_2^2 - \frac{1}{2}\sigma_3^2 c' + \frac{1}{3}c''\sigma_3^3,$$

so folgt:

$$k\sqrt{1+m}(t_3 - t_1)Vp = r_2^2\sigma_2 + \frac{c'}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \frac{c''}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_3^3)$$

und nach Substitution der Werte von  $c'$  und  $c''$ :

$$k\sqrt{1+m}(t_3 - t_1)Vp = \frac{1}{6}\frac{\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}(r_2^2\sigma_2^2 + r_1^2\sigma_1(2\sigma_3 - \sigma_1) + r_3^2\sigma_3(2\sigma_1 - \sigma_3)). \quad (6)$$

Da in der Entwicklung von  $r^2$  die Glieder dritter, . . . Ordnung übergangen sind, ist 6) natürlich nur ein Näherungsausdruck; betreff Untersuchung seiner Genauigkeit muß auf die zitierte Abhandlung verwiesen werden; hier sei nur erwähnt, daß er bei kleinen Planeten noch bei Zwischenzeiten von 40 Tagen gute Resultate liefert; ist eine erste Näherung der Elemente bekannt geworden, dann können auch die höheren Glieder berechnet und damit seine Genauigkeit wesentlich erhöht werden; allein die hierzu dienenden Formeln sind bereits sehr kompliziert.

**49. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Ellipse.** Wir kommen jetzt zu denjenigen Methoden, den Parameter  $p$  zu ermitteln, welche sich des Verhältnisses zwischen dem elliptischen Sektor zwischen zwei Radienvektoren und dem zugehörigen Dreieck bedienen. Daß die Einführung dieses Verhältnisses von großem Nutzen ist, scheint zuerst *Lambert* 1772 in seinen »Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik Teil 3«\*) bemerkt zu haben; nachher haben *Gauß*, *Encke*, *Hansen* u. a. die Methode ausgebaut. Wir wollen diese wichtigen Entwicklungen kennen lernen und beginnen mit der *Gaußschen* (*Theoria motus* art. 88—94).

\*) Siehe *Ostwalds Klassiker* Nr. 133, Seite 133.

Sind  $r$  und  $r'$  die Radienvektoren, die zu den seit dem Durchgang durchs Perihel verflissenen Zeiten  $t$  und  $t'$  gehören und ist  $2f$  der von beiden eingeschlossene Winkel, dann ist  $k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t'-t)$  die doppelte Fläche des Sektors und  $rr' \sin 2f$  die doppelte Fläche des Dreiecks, und das Verhältnis der beiden

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t'-t)}{rr' \sin 2f} \quad 1)$$

führt zu einem Werte von  $\sqrt{p}$ , sobald es gelingt  $y$  lediglich durch  $r$ ,  $r'$ ,  $t'-t$  und  $2f$  auszudrücken. Hierzu muß in 1)  $p$  als Funktion dieser Größen dargestellt werden, was in einem geschlossenen Ausdruck nur durch Einführung einer neuen Unbekannten, des Unterschiedes der exzentrischen Anomalien, geschehen kann. Zur Elimination derselben muß dann eine zweite Gleichung aufgestellt werden. Diese beiden Gleichungen leiten wir zuerst ab. Aus den für die Zeiten  $t$  und  $t'$  aufgestellten Gleichungen VI. (Seite 138) nämlich

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2}v = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2}E$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2}v = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2}E$$

$$\sqrt{r'} \cos \frac{1}{2}v' = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2}E'$$

$$\sqrt{r'} \sin \frac{1}{2}v' = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2}E'$$

wo die  $v$  die wahren, die  $E$  die exzentrischen Anomalien bezeichnen, folgt durch eine leicht ersichtliche Operation:

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v'-v) = a \cos \frac{1}{2}(E'-E) - ae \cos \frac{1}{2}(E'+E)$$

oder wenn

$$\begin{array}{l|l} v'-v = 2f & v'+v = 2F \\ E'-E = 2g & E'+E = 2G \end{array}$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{rr'} \cos f = a \cos g - ae \cos G.$$

Ganz ähnlich findet sich:

$$\sqrt{rr'} \cos F = a \cos G - ae \cos g.$$

Multipliziert man diese letzte Gleichung mit  $e$  und addiert sie zur ersten, so folgt

$$\sqrt{rr'} \cos f + e\sqrt{rr'} \cos F = a(1-e^2) \cos g = p \cos g$$

oder

$$e \cos F = -\cos f + \frac{p}{\sqrt{rr'}} \cos g$$

und ganz ähnlich

$$e \cos G = \cos g - \frac{\sqrt{rr'}}{a} \cos f.$$

Wenn man jetzt die Gleichungen für die Radienvektoren in den wahren Anomalien

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v \quad \text{und} \quad \frac{p}{r'} = 1 + e \cos v'$$

addiert:

$$\frac{p(r+r')}{rr'} = 2 + 2e \cos f \cos F$$

und den eben erhaltenen Wert von  $e \cos F$  einträgt, so ergibt sich

$$\frac{p(r+r')}{rr'} = 2 - 2 \cos f^2 + \frac{2p}{\sqrt{rr'}} \cos g \cos f$$

oder:

$$p = \frac{2 \sin f^2 rr'}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g}.$$

Dieses  $p$  in die quadrierte Gleichung 1) eingetragen führt auf folgende erste Hauptgleichung:

$$y^2 = \frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{2rr' \cos f^2 (r+r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g)},$$

die wir bald durch Einführung von Hilfsgrößen einfacher schreiben werden. Um zur zweiten Hauptgleichung zu gelangen, addieren wir zunächst die Gleichungen für die Radienvektoren in den exzentrischen Anomalien

$$\begin{aligned} r &= a - ae \cos E \\ r' &= a - ae \cos E' \\ r + r' &= 2a - 2ae \cos g \cos G \end{aligned}$$

und erhalten durch Eintragung des obigen Ausdruckes für  $e \cos G$

$$r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g = 2a \sin^2 g$$

oder unter Heranziehung der ersten Grundgleichung:

$$\frac{1}{a} = \frac{4 \sin^2 g rr' \cos f^2 y^2}{k^2(1+m)(t'-t)^2}. \quad (1^a)$$

Werden jetzt die Keplerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu t &= \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t = E - e \sin E \\ \mu t' &= \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t' = E' - e \sin E' \end{aligned}$$

voneinander subtrahiert:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g$$

und wird wieder für  $e \cos G$  sein Wert eingetragen, so kommt:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2 \frac{\sqrt{rr'}}{a} \sin g \cos f$$

oder wenn  $a$  durch den eben abgeleiteten Wert eliminiert wird:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = \frac{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}{k^2(1+m)(t'-t)^2} (y^3 - y^2).$$

Dies ist die zweite Grundgleichung. Ehe wir sie mit der ersten zusammen weiter behandeln, wollen wir beide durch Einführung einiger Hilfsgrößen einfacher schreiben. Zunächst setzen wir den in der zweiten auftretenden Faktor

$$\frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3} = m \quad (2)$$

und führen diesen auch in der ersten ein, womit sie wird:

$$y^2 = \frac{4m \cos f \sqrt{rr'}}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g} = \frac{m}{\frac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2} \cos g}.$$

Setzt man dann weiter:

$$\frac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2} = l, \quad 3)$$

so wird daraus

$$y^2 = \frac{m}{l + \sin \frac{1}{2} g^2}, \quad \text{I.}$$

während die zweite Hauptgleichung sich so schreibt:

$$y^3 - y^2 = m \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}. \quad \text{II.}$$

Die Hilfsgröße  $l$  läßt sich auf mannigfache Weise für die Rechnung bequemer gestalten; wir stellen einige Formen zusammen, ohne uns mit der einfachen Ableitung derselben aufzuhalten:

$$\left. \begin{aligned} \sec \gamma &= \frac{r + r'}{2 \cos f \sqrt{rr'}} \\ l &= \frac{1}{2} (\sec \gamma - 1) \end{aligned} \right\} 4) \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} \\ l &= \frac{\sin \frac{1}{2} f^2 + \operatorname{tg} 2\omega^2}{\cos f} \end{aligned} \right\} 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} \\ \operatorname{tg} q &= \frac{\operatorname{tg} 2\omega}{\sin \frac{1}{2} f} \\ l &= \sin \frac{1}{2} f^2 \sec f \sec q^2 \end{aligned} \right\} 6) \quad \left. \begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \omega &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} - \sqrt[4]{\frac{r}{r'}} \\ \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \frac{1}{2} f} \\ l &= \sin \frac{1}{2} f^2 \sec f \sec B^2 \end{aligned} \right\} 7)$$

Die Gleichungen I. und II. lösen das vorgelegte Problem, denn sie enthalten zwei Unbekannte  $y$  und  $g$ , so daß durch Elimination von  $g$  das gesuchte Verhältnis  $y$  durch bekannte Größen dargestellt wird. Da die eine Gleichung transzendent ist, muß die Auflösung indirekt oder durch Reihenentwicklung geführt werden. Ist  $2g$  ein großer Winkel, so wird man auf ersterem Wege, der der kürzere ist, keinerlei Schwierigkeiten begegnen, denn  $2g - \sin 2g$  wird sich ohne Genauigkeitsverlust für angenommene Werte von  $g$  mittels der gewöhnlichen Tafeln der trigonometrischen Funktionen berechnen lassen; in diesem Falle, wo also eine große heliozentrische Bewegung vorliegt, wird man erstens über einen guten Näherungswert von  $2g$  bereits verfügen und zweitens wird dann nicht  $y$ , sondern der genaue Wert von  $2g$  eigentlich der für die weitere Rechnung (die Elementenbestimmung, siehe unten Nr. 50), belangreiche sein. Nach einem Vorschlag von Oppolzer (Bahnbestimmung, Bd. I, S. 84) eliminiert man dann aus I. und II. besser  $y$  und schreibt:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = X, \quad l + \sin \frac{1}{2} g^2 = Y,$$

womit

$$y = XY + 1$$

und dann nach I.

$$m = (XY + 1)^2 Y \quad 8)$$

wird. Diese Gl. 8) enthält nur mehr  $g$  als Unbekannte und kann leicht durch Versuche aufgelöst werden, indem man  $g$  so lange variiert, bis sie befriedigt ist. Will man  $y$  hierauf doch bestimmen, was am leichtesten durch Anwendung von I. gelingt, so wird man zu beachten haben, daß für  $2g > 180^\circ$  wegen

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t'-t)}{rr' \sin 2f}$$

der Wert von  $y$  negativ anzusetzen ist.

Ist dagegen  $2g$  ein kleiner Winkel, etwa kleiner als  $60^\circ$ , was bei ersten Bahnbestimmungen immer der Fall sein muß, dann läßt sich dieses Verfahren nicht durchführen, da man  $2g - \sin 2g$  nicht mit der nötigen Genauigkeit den Tafeln entnehmen kann. Man muß also zur Reihenentwicklung schreiten, was auf mannigfache Art geschehen kann. Gauß entwickelt den Ausdruck

$$X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$$

nach Potenzen der kleinen Größe

$$x = \sin \frac{1}{2}g^2.$$

Um die Koeffizienten dieser Reihenentwicklung zu erhalten, differenziert man

$$\sin g^3 \cdot X = 2g - \sin 2g,$$

woraus hervorgeht:

$$3X \cos g \sin g^3 + \sin g^3 \frac{dX}{dg} = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin g^3$$

oder

$$\sin g \cdot \frac{dX}{dg} = 4 - 3X \cos g \sin g.$$

Da nun

$$\frac{dx}{dg} = \sin \frac{1}{2}g \cos \frac{1}{2}g = \frac{1}{2} \sin g,$$

so folgt:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{8 - 6X \cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)},$$

oder

$$(2x - 2x^2) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X.$$

Setzt man also:

$$X = \frac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \dots),$$

so folgt die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3}(\alpha x + (2\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \dots) \\ & = (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)x^2 + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \dots, \end{aligned}$$

welche identisch sein muß und daher durch Gleichsetzung der zu gleichen Potenzen von  $x$  gehörigen Koeffizienten die Beziehungen liefert:

$$\alpha = \frac{6}{5}, \quad \beta = \frac{8}{7}\alpha, \quad \gamma = \frac{10}{9}\beta, \quad \delta = \frac{12}{11}\gamma,$$

deren Gesetz ersichtlich ist. Es wird somit:

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \dots,$$

oder

$$X = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \dots \right).$$

Es ist dies nicht die konvergenteste Entwicklung, die man für  $X$  aufstellen kann; so besitzt z. B.

$$X = \frac{1}{3 \cos \frac{1}{2}g^2} \left( 1 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2}g^2 - \frac{1}{5 \cdot 7} \operatorname{tg} \frac{1}{2}g^4 + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} \operatorname{tg} \frac{1}{2}g^6 - \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \operatorname{tg} \frac{1}{2}g^8 + \dots \right)$$

(siehe Hansen, Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers art. 29 und Fabritius, Astr. Nachr. Bd. 129, 49) eine weit stärkere Konvergenz; allein für den vorliegenden Fall ist sie die geeignetste, weil auch die Formel I. die Größe  $x$  enthält. Die Gl. I. und II. können jetzt so geschrieben werden:

$$x = \frac{m}{y^2} - l \quad \text{I}^a.$$

$$y - 1 = \frac{m}{y^2} X \quad \text{II}^a.$$

und es wird sich nur noch darum handeln, ein angemessenes Näherungsverfahren zur Bestimmung von  $y$  auszumitteln, wozu vor allem die Größenordnung festzusetzen ist. Nennt man den Bogen  $g$  von der ersten Ordnung, so wird  $x$  von der zweiten, und setzt man mit Gauß:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)} = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{6}{5}(x - \xi) + \left(\frac{6}{5}(x - \xi)\right)^2 + \dots \right),$$

so folgt durch Vergleichung mit obiger Entwicklung, daß

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \dots$$

eine Größe der vierten Ordnung ist. Hierauf baut sich folgendes Verfahren auf. Setzt man in dem eben aufgestellten Ausdruck von  $X$  den Wert von  $x$  aus I<sup>a</sup>. ein, so kommt:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5} \frac{m}{y^2} + \frac{6}{5}l + \frac{6}{5}\xi} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m}{y^2}}$$

oder

$$\frac{m}{y^2} X = \frac{\frac{10}{9}}{y^2 \frac{5}{6} + l + \xi - 1}$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \quad 9)$$

$$\frac{m}{y^2} X = \frac{\frac{10}{9}h}{y^2 - h}.$$

Wird dies mit II<sup>a</sup>. verglichen, so folgt:

$$y - 1 = \frac{\frac{10}{9}h}{y^2 - h}$$

oder:

$$y^3 - y^2 - hy - \frac{1}{9}h = 0. \quad 10)$$

Da für  $2f < 180^\circ$ , was hier stets vorausgesetzt wird,  $m$  positiv ist, und ebenso  $l$ , so ist auch  $h$  positiv; diese kubische Gleichung in  $y$  hat also nur eine positive Wurzel, welche den Wert von  $y$  darstellen wird, da dieses für  $2f < 180^\circ$  positiv herauskommen muß. Man kann diese Wurzel oder noch besser  $y^2$  mit dem Argument  $h$  tabulieren; dies hat Gauß in einer Tafel der Theoria motus getan, welche in »Taf. XIX« reproduziert ist. Kann man also  $h$  als bekannt annehmen, dann ist die Aufgabe gelöst. Nun ist  $h$  aber nach 9) noch von  $\xi$  abhängig, welches unbekannt ist; aber wie hervorgehoben, ist  $\xi$  von der vierten Ordnung, kann somit in erster Näherung gleich Null gesetzt werden; mit dem Näherungswerte

$$(h) = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

muß sich also ein Näherungswert von  $y^2$  ergeben, der seinerseits wegen

$$x = \frac{m}{y^2} - l$$

zu einem Näherungswert von  $x$  führt. Stellt man schließlich  $\xi$  als Funktion von  $x$  dar, so kann das Näherungsverfahren jetzt mit dem Werte 9) von  $h$  fortgesetzt werden, bis eine Änderung der Zahlenwerte nicht mehr eintritt, womit der strenge Wert von  $y$  erreicht ist. In der Regel ist dies schon nach dem ersten Schritt der Fall. Um  $\xi$  als Funktion von  $x$  zu erhalten, zieht man (nach Gauß im Berliner Jahrbuch für 1814) am einfachsten die Definitionsgleichung:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}$$

heran und schreibt sie in der Gestalt:

$$\xi = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}.$$

Für den Zähler dieses Bruches bekommt man nach Einsetzung der Reihenentwicklung für  $X$

$$\frac{8}{105} x^2 \left( 1 + 2 \cdot \frac{8}{9} x + 3 \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 11} x^2 + 4 \cdot \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{9 \cdot 11 \cdot 13} x^3 + 5 \cdot \frac{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} x^4 + \dots \right);$$

setzt man also die Reihe in der Klammer gleich  $A$ , womit

$$xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105} x^2 A$$

wird, so folgt

$$X = \frac{\frac{4}{3} \left( 1 - \frac{12}{175} x^2 A \right)}{1 - \frac{6}{5} x}$$

und daher:

$$\xi = \frac{\frac{2}{35} x^2 A \left( 1 - \frac{6}{5} x \right)}{1 - \frac{12}{175} x^2 A}.$$

Gauß hat  $\xi$  mit dem Argument  $x$  in eine Tafel gebracht, die als »Taf. XX« in die Sammlung aufgenommen wurde.

Zusammenstellung der Gaußschen Methode.

$$m = \frac{k^2(t' - t)^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}, \quad \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} 2\omega}{\sin \frac{1}{2}f}$$

$$l = \sin \frac{1}{2}f^2 \sec f \sec q^2 \quad \text{A.}$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \quad (\text{zuerst } \xi = 0).$$

Aus Tafel XIX  $\log y^2$  mit Arg.  $h$

$$x = \frac{m}{y^2} - l$$

Aus Tafel XX  $\xi$  mit Arg.  $x$ .

Die Tafeln XIX und XX sind so weit ausgedehnt, daß über ihre Grenze hinaus das oben beschriebene indirekte Verfahren eintreten kann. Für große Bogen empfiehlt es sich, statt mit  $\xi = 0$  mit dem zu  $(x) = \sin \frac{1}{2}f^2$  gehörigen  $\xi$  zu beginnen, da man dann eine Näherung erspart.

*Tietjen* hat (Berl. Jahrbuch 1879) bemerkt, daß man viel weniger umfangreiche Tafeln gebraucht, wenn man das Gaußsche Verfahren in folgender Weise modifiziert. Schreibt man die Gl. 10) in der Form

$$\frac{(y-1)y^2}{y + \frac{1}{9}} = h$$

und setzt

$$y = 1 + x,$$

so wird daraus:

$$\frac{x(1+x)^2}{x + \frac{10}{9}} = h$$

oder

$$\frac{x(1+x)^2}{1 + \frac{9}{10}x} = \frac{10}{9}h.$$

Nun ist

$$(1+x)^2 = (1 + \frac{9}{10}x)(1 + \frac{11}{10}x) + \frac{1}{100}x^2,$$

also wird aus der letzten Gleichung:

$$x(1 + \frac{11}{10}x) + \frac{1}{100} \frac{x^3}{1 + \frac{9}{10}x} = \frac{10}{9}h. \quad (11)$$

Soweit ist die Gleichung streng und wir werden sie auch nachher in dieser Strenge weiter behandeln. Vorher aber wollen wir daraus den bequemen Kettenbruch ableiten, den *Hansen* (Bahnbestimmung Art. 29) auf einem anderen Wege gefunden hat. Da nämlich  $x$  von der zweiten Ordnung ist, so ist das dritte Glied linker Hand reichlich von der sechsten Ordnung und kann daher bei kleineren Bogen weggelassen werden. Dann aber wird:

$$x(1 + \frac{11}{10}x) = \frac{10}{9}h$$

oder

$$x = \frac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{11}{10}x} = \frac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h} \dots}$$

und daher:

## Der Hansensche Kettenbruch

$$y = 1 + \frac{\frac{10}{11}}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h \dots}} \quad \begin{array}{l} \log \frac{10}{11} = 9.958\ 6073 \\ \log \frac{11}{9} = 0.087\ 1502 \\ \log \frac{5}{6} = 9.920\ 8188 \end{array} \quad \text{B.}$$

Für  $h$  nimmt man  $\frac{m}{\frac{5}{6} + l}$ , da in allen Fällen, wo der Kettenbruch anwendbar ist,  $\xi$  gleich Null gesetzt werden darf. Die Anwendung des Kettenbruches gibt auch für siebenstellige Rechnung bis zu Bogen  $2f = 20^\circ$  noch völlig strenge Werte; bis zu Bogen von  $30^\circ$  aber kann man mit sechsstelliger Rechnung gehen. Die Berechnung geschieht sehr bequem mit Additionslogarithmen.

Will man die Gleichung 11) streng beibehalten, so wird man setzen:

$$\frac{11}{10}x = x_1 \quad \frac{11}{9}h = h_1$$

und dann erhalten:

$$x_1(1 + x_1) = h_1 - \frac{x_1^3}{121(1 + \frac{9}{11}x_1)} = h_2$$

und:

$$x_1 = \frac{h_2}{1 + h_2} \frac{1}{1 + \frac{h_2}{1 + \dots}}$$

Um diesen Kettenbruch anzuwenden, kann man zuerst  $h_2 = h_1$  setzen, damit einen genäherten Wert von  $x_1$  erhalten, dann  $h_2$  berechnen usw. und an angemessener Stelle  $\xi$  berücksichtigen. Bei größeren Bogen aber, wo man allein auf dieses strengere Verfahren zu rekurrieren braucht, wird die Berechnung des Kettenbruches nicht kurz und man wird daher lieber zu folgendem trigonometrischen Verfahren greifen: Setzt man zuerst

$$x_1'(x_1' + 1) = h_1$$

so wird, wenn  $\psi$  aus

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\sqrt{h_1}$$

berechnet wird:

$$x_1' = \frac{\sin \psi^2}{\cos 2\psi} = \sqrt{h_1} \operatorname{tg} \psi.$$

Bezeichnet man also den strengen Wert von  $x_1$ , der aus  $x_1(x_1 + 1) = h_2$  hervorgeht, mit

$$x_1 = \alpha x_1' = \alpha \sqrt{h_1} \operatorname{tg} \psi = \alpha \sqrt{\frac{11}{9}} \sqrt{h} \operatorname{tg} \psi,$$

so wird

$$x = \frac{10}{11} x_1 = \alpha \sqrt{\frac{100}{99}} \sqrt{h} \operatorname{tg} \psi = \alpha \sqrt{h} \operatorname{tg} \psi$$

und  $\alpha$  wird ein veränderlicher Faktor sein, der aber von der Einheit nicht sehr verschieden ist und sich daher bequem in eine Tafel bringen läßt. Diese Tafel ist in XXI gegeben und wesentlich kürzer als die Gaußsche. Auch die Tafel für  $\xi$  läßt sich kürzer gestalten, wenn man  $\xi = bx^2$  setzt und  $b$  tabuliert; auch diese ist in XXI aufgenommen.

## Zusammenstellung des Tietjenschen Verfahrens.

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{tg} \omega &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} - \sqrt[4]{\frac{r}{r'}}, & \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \frac{1}{2} f} \\
 l &= (\sin \frac{1}{2} f)^2 \sec f \sec B^2 \\
 m &= \frac{k^2 (t' - t)^2}{(2 \sqrt{r r'} \cos f)^3}, & h &= \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \\
 \operatorname{tg} 2 \psi &= 2 \sqrt{\frac{11}{9}} \sqrt{h} & \log 2 \sqrt{\frac{11}{9}} &= 0.344 6051 \\
 y &= 1 + a \sqrt{h} \operatorname{tg} \psi & (a \text{ mit Arg. } h \text{ aus Taf. XXI}) \\
 x &= \frac{m}{y^2} - l \\
 \xi &= b x^2 & (b \text{ mit Arg. } x \text{ aus Taf. XXI}).
 \end{aligned}
 \tag{C.}$$

Encke (Berl. Jahrb. für 1854 Art. 15—17, auch Ostwalds Klassiker Nr. 141, S. 32) hat für  $y$  eine Reihenentwicklung gegeben, die für kurze Zwischenzeiten sehr bequem ist und daher noch angegeben werden möge, da sie sich aus dem Gaußschen Algorithmus rasch ergibt. Setzt man nämlich den Wert von  $x$  aus I<sup>a</sup>. (Seite 159) in die Reihenentwicklung für  $X$  in II<sup>a</sup>. ein, so erscheint:

$$y = 1 + \frac{m}{y^2} \left( \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \left( \frac{m}{y^2} - l \right) + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{m}{y^2} - l \right)^2 + \dots \right).$$

Nun ist nach 2), 3), 4) (Seite 156—157)

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{k^2 (1+m)(t' - t)^2}{(2 \cos f \sqrt{r r'})^3} = \frac{k^2 (1+m)(t' - t)^2}{((r + r') \cos \gamma)^3} \quad \text{und} \\
 l &= \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\cos \gamma}, \quad \text{wenn } \cos \gamma = \frac{2 \cos f \sqrt{r r'}}{r + r'};
 \end{aligned}$$

setzt man also

$$\eta = \frac{(t' - t)^2}{(r + r')^3},$$

so wird

$$m = \frac{\eta}{\cos \gamma^3} k^2 (1+m)$$

und daher:

$$y = 1 + \frac{\eta k^2 (1+m)}{y^2 \cos \gamma^3} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \left( \frac{k^2 (1+m) \eta}{y^2 \cos \gamma^3} - \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\cos \gamma} \right) + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{k^2 (1+m) \eta}{y^2 \cos \gamma^3} - \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\cos \gamma} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Kehrt man diese Reihe um und ordnet nach Potenzen von  $\eta$ , so kommt:

$$\begin{aligned}
 \log \text{nat. } y &= \frac{4}{3} k^2 (1+m) \eta + \frac{3^2}{5} (\sin \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{4}{3} k^2 (1+m) \eta) k^2 (1+m) \eta \\
 &+ \frac{7 \cdot 3^6}{35} (\sin \frac{1}{2} \gamma^4 - \frac{89}{69} \sin \frac{1}{2} \gamma^2 k^2 (1+m) \eta + \frac{799}{1863} k^4 (1+m)^2 \eta^2) k^2 (1+m) \eta.
 \end{aligned}$$

Da  $\eta$  von der zweiten Ordnung ist und  $\gamma$  von der ersten, so ist dieser Ausdruck genau bis auf Glieder der sechsten Ordnung. Die Faktoren  $\sin \frac{1}{2} \gamma^2, \dots$  kann man mit Hilfe der Subtraktionslogarithmen leicht berücksichtigen. Diese geben nämlich mit dem Argument  $\log a$  den Wert  $\log \frac{a}{a-1}$ ; ist folglich  $a = \sec \gamma$ , so geben diese

Tafeln sofort durch einmaliges Eingehen mit dem Argument  $\log \sec \gamma$  den Ausdruck

$\log \frac{\sec \gamma}{\sec \gamma - 1} = \log \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2} = \Gamma$ . Geht man jetzt in obiger Formel zum Briggschen Logarithmus über und setzt alle Koeffizienten in Zahlen um, wobei  $1 + m$  mit  $1$  identifiziert wird, so läßt sich die Reihe, wenn die siebente Dezimale des Briggschen Logarithmus als Einheit genommen wird, so schreiben:

Die Enckesche Reihe:

$$\cos \gamma = \frac{2\sqrt{rr'} \cos f}{r + r'}, \quad \Gamma = \log \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}$$

( $\Gamma$  mit Arg.  $\log \sec \gamma$  aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen)

$$\eta = \frac{(t' - t)^2}{(r + r')^3}$$

$$\begin{array}{rcl} \log y = & a' \eta & 2. \text{ Ord.} \\ & + a'' \eta - b'' \eta^2 & 4. \text{ } > \\ & + a''' \eta - b''' \eta^2 + c''' \eta^3 & 6. \text{ } > \end{array} \quad \text{D.}$$

wo, wenn die siebente Dezimale als Einheit genommen wird:

$$\begin{array}{l} \log a' = 3.233\ 8859 \\ \log a'' = 3.614\ 0972 - \Gamma \\ \log a''' = 3.829\ 6970 - 2\Gamma \end{array} \left| \begin{array}{l} \log b'' = 0.034\ 1076 \\ \log b''' = 0.712\ 4306 - \Gamma \end{array} \right| \log c''' = 7.006\ 4167_{-10}$$

Bei kleinen Planeten (bei Kometen wird man diese Methode nicht anwenden) reicht man bei etwa 30-tägiger Zwischenzeit und sechsstelliger Rechnung mit dem einen Glied

$$\log y = a' \eta$$

völlig aus; bei Zwischenzeiten bis zu 60 Tagen reichen ebenso die Glieder

$$\log y = a' \eta + a'' \eta - b'' \eta^2.$$

In den weitaus meisten Fällen der Praxis gewährt diese Entwicklung also eine sehr kurze Rechnung. Bei größeren Zwischenzeiten wird man aber die Gaußsche Methode vorziehen.

Beispiele zu den Methoden *A*, *B*, *C* finden sich bei den Tafeln. Dagegen wollen wir hier ein solches nach der Enckeschen Reihe durchführen.

$$t' - t = 41^d 19894, \quad \log r = 0.466\ 845, \quad \log r' = 0.461\ 914, \quad 2f = 8^o 38' 26''6$$

$r$	0.466 845	$a'$	3.233 886
$r'$	0.461 914	$\eta$	0.933 524
$r + r'$	0.765 416	$a''$	1.069 813
$2\sqrt{rr'}$	0.765 410	$\eta^2$	1.867 048
$\cos f$	9.998 764	$b''$	0.034 108
$\cos \gamma$	9.998 758	$a'' \eta$	+ 100.8
$\Gamma$	2.544 284	$- b'' \eta^2$	VII. - 79.6
$t' - t$	1.614 886	$a' \eta$	14703.1
$(t' - t)^2$	3.229 772	$\log y$	0.001 4724
$(r + r')^3$	2.296 248		

Die Glieder vierter Ordnung ( $a''\eta - b''\eta^2$ ) machen hier also nur mehr 2 Einheiten der 6. Stelle aus; die der sechsten Ordnung sind gänzlich verschwindend.

**50. Bestimmung der elliptischen Elemente.** Nachdem wir gezeigt haben, wie das Verhältnis des Sektors zum Dreieck durch die Zwischenzeit, zwei Radienvektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt werden kann, wenden wir uns zur Benutzung dieses Ausdruckes für die Bestimmung der elliptischen Elemente. Die Gl. 1) (Seite 155) gibt unmittelbar für den Parameter:

$$p = \left( \frac{r_1 r_2 \sin 2f y}{k \sqrt{1+m} (t_2 - t_1)} \right)^2 \quad 1)$$

und ebenso findet man aus 1<sup>a)</sup> (Seite 156) den Ausdruck für die große Halbachse:

$$a = \frac{k^2 (1+m) (t_2 - t_1)^2}{4 \sin^2 g r_1 r_2 \cos^2 f y^2}, \quad 1^a)$$

der die Berechnung von  $g$  aus

$$\sin \frac{1}{2} g^2 = x$$

voraussetzt. Da  $p = a \cos \varphi^2$ , kann man aus 1) und 1<sup>a)</sup> die Exzentrizität finden, jedoch ist für kleine Exzentrizitäten der entstehende Ausdruck ungeeignet. Es ist vorzuziehen,  $e$  und  $\varpi$  vermittels des schon oben (Seite 151) auseinandergesetzten Verfahrens zu bestimmen, worauf man  $a$  durch

$$a = \frac{p}{\cos \varphi^2} \quad 2)$$

ermitteln kann. Durch  $\varpi$  werden die wahren Anomalien  $v_1$  und  $v_2$  bekannt, die durch die Gl. VII. (Seite 138)

$$\begin{aligned} \sin(v_1 - E_1) &= \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r_1}{p}} \sin v_1 \\ \sin(v_2 - E_2) &= \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r_2}{p}} \sin v_2 \end{aligned} \quad 3)$$

zu den exzentrischen Anomalien  $E_1$  und  $E_2$  führen. Aus diesen folgen die mittleren Anomalien

$$\begin{aligned} M_1 &= E_1 - e \sin E_1 \\ M_2 &= E_2 - e \sin E_2 \end{aligned}$$

und dann die mittlere tägliche Bewegung

$$\mu = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1},$$

die mit der aus

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}$$

zu ermittelnden übereinstimmen muß.

Dieser Weg der Elementenbestimmung kann an Kürze der Rechnung kaum überboten werden; es gibt aber ein von Gauß angegebenes Verfahren (Theoria motus Nr. 96), das ihm an Symmetrie überlegen ist und daher nicht übergangen werden

kann. Die Entwicklungen schließen sich eng an die in Nr. 49 durchgeführten an. Setzt man wie dort

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= 2f & v_2 + v_1 &= 2F \\ E_2 - E_1 &= 2g & E_2 + E_1 &= 2G, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} v_1 &= F - f & E_1 &= G - g \\ v_2 &= F + f & E_2 &= G + g \end{aligned}$$

und die Gl. VI. (Seite 138):

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{1+e} \sin \frac{1}{2} E_1$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{1-e} \cos \frac{1}{2} E_1$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \sin \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{1+e} \sin \frac{1}{2} E_2$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{1-e} \cos \frac{1}{2} E_2$$

gehen daher, wenn noch

$$\sqrt{1 \pm e} = \sqrt{1 \pm \sin \varphi} = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi^2 + \cos^2 \frac{1}{2} \varphi^2 \pm 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi} = \cos \frac{1}{2} \varphi \pm \sin \frac{1}{2} \varphi$$

beachtet wird, über in:

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \sin \frac{1}{2} (F - f) = (\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi) \sin \frac{1}{2} (G - g) \quad \text{A.}$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos \frac{1}{2} (F - f) = (\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi) \cos \frac{1}{2} (G - g) \quad \text{B.}$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \sin \frac{1}{2} (F + f) = (\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi) \sin \frac{1}{2} (G + g) \quad \text{C.}$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos \frac{1}{2} (F + f) = (\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi) \cos \frac{1}{2} (G + g). \quad \text{D.}$$

Unterwirft man diese den folgenden vier Operationen:

I.	II.	III.	IV.
A. $+\sin \frac{1}{2} (F + g)$	$-\cos \frac{1}{2} (F + g)$	$+\cos \frac{1}{2} (F - g)$	$-\sin \frac{1}{2} (F - g)$
B. $+\cos \frac{1}{2} (F + g)$	$+\sin \frac{1}{2} (F + g)$	$+\sin \frac{1}{2} (F - g)$	$+\cos \frac{1}{2} (F - g)$
C. $-\sin \frac{1}{2} (F - g)$	$-\cos \frac{1}{2} (F - g)$	$-\cos \frac{1}{2} (F + g)$	$+\sin \frac{1}{2} (F + g)$
D. $-\cos \frac{1}{2} (F - g)$	$+\sin \frac{1}{2} (F - g)$	$-\sin \frac{1}{2} (F + g)$	$-\cos \frac{1}{2} (F + g),$

so erhält man die nachstehend aufgeführten Gleichungen I.—IV., wie wir nur an der ersten derselben ausführlicher zeigen wollen. Die erste Operation ergibt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos \frac{1}{2} (f + g) - \sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos \frac{1}{2} (f + g) &= \cos \frac{1}{2} \varphi \cos \left( \frac{1}{2} (F - G) + g \right) - \\ &- \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} (F + G) - \cos \frac{1}{2} \varphi \cos \left( \frac{1}{2} (F - G) - g \right) + \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} (F + G) \end{aligned}$$

oder

$$\left( \sqrt{\frac{r_1}{a}} - \sqrt{\frac{r_2}{a}} \right) \cos \frac{1}{2} (f + g) = -2 \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} (F - G) \sin g.$$

Wird nun, wie in den Gl. 5) bis 7) (Seite 157)

$$\sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}} = \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)$$

gesetzt, so folgt:

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} - \sqrt{\frac{r_2}{a}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \left( \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_2}} - \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}} \right) = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} (\operatorname{cotg}(45^\circ + \omega) - \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)) = -2 \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \operatorname{tg} 2\omega$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} + \sqrt{\frac{r_2}{a}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \left( \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_2}} + \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}} \right) = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} (\operatorname{cotg}(45^\circ + \omega) + \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)) = 2 \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \operatorname{sec} 2\omega$$

und aus der letzten Gleichung wird daher:

$$\cos \frac{1}{2}(f + g) \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \operatorname{tg} 2\omega = \cos \frac{1}{2}\varphi \sin \frac{1}{2}(F - G) \sin g.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = M$$

$$\sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = N,$$

so ist das Ergebnis der genannten vier Operationen:

$$M \sin \frac{1}{2}(F - G) = \cos \frac{1}{2}(f + g) \operatorname{tg} 2\omega \quad \text{I.}$$

$$M \cos \frac{1}{2}(F - G) = \sin \frac{1}{2}(f + g) \operatorname{sec} 2\omega \quad \text{II.}$$

$$N \sin \frac{1}{2}(F + G) = \cos \frac{1}{2}(f - g) \operatorname{tg} 2\omega \quad \text{III.}$$

$$N \cos \frac{1}{2}(F + G) = \sin \frac{1}{2}(f - g) \operatorname{sec} 2\omega \quad \text{IV.}$$

Die Größen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen sind durch die Rechnungen behufs Ermittlung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck bekannt geworden. Man kann aus ihnen also

$$M, N, F - G, F + G$$

bestimmen. Aus den beiden ersten folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{N}{M}$$

und

$$\sin g \sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = \frac{M}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{N}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = R$$

und dann:

$$a = \frac{R^2 \sqrt{r_1 r_2}}{\sin g^2}.$$

Aus den beiden letzteren ergibt sich  $F$  und  $G$  und damit zunächst:

$$v_1 = F - f \quad \text{und} \quad v_2 = F + f.$$

Da

$$\varpi = s_1 - v_1 = s_2 - v_2,$$

ist damit die Länge des Perihels bekannt geworden. Endlich wird:

$$E_1 = G - g, \quad E_2 = G + g$$

und damit

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1, \quad M_2 = E_2 - e \sin E_2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} = \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}},$$

was zur Kontrolle dienen kann. Man hat auch

$$M_2 - M_1 = (E_2 - E_1) - e (\sin E_2 - \sin E_1) = 2g - 2e \cos G \sin g$$

und kann daraus  $\mu$  berechnen. Die mittlere Anomalie für die Epoche  $\frac{1}{2}(t_2 + t_1)$  wird dann

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2) = G - e \sin G \cos g.$$

Die erstere Rechnungsart ist jedoch dieser letzteren vorzuziehen.

**51. Die Lambertsche Gleichung für die elliptische Bewegung.** Wir betrachten weiter zwei Örter in der Ellipse und suchen nach Beziehungen zwischen ihren Polarkoordinaten, der Zwischenzeit und den Elementen; führen wir dabei die die beiden Örter verbindende Sehne ein, so stoßen wir auf einen merkwürdigen Satz, den zuerst *Lambert* (Ins. orb. Comet. Proprietates 1761, art. 210, siehe auch Ostwalds Klassiker Nr. 133, Seite 102) aufgefunden hat. Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise der Nr. 49 entnehmen wir derselben zunächst die beiden Gleichungen (Seite 156)

$$\frac{k \sqrt{1+m} (t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g \quad 1)$$

$$\frac{r + r'}{a} = 2(1 - e \cos G \cos g) \quad 2)$$

und suchen dazu einen Ausdruck für die Sehne  $s$  in den exzentrischen Anomalien. Aus

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f$$

oder

$$s^2 = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2$$

folgt:

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = \left(\frac{r + r'}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{rr'} \cos f}{a}\right)^2$$

oder mit Benutzung von 2) und der oben (Seite 155) abgeleiteten Gleichung

$$\frac{\sqrt{rr'} \cos f}{a} = \cos g - e \cos G:$$

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = 4(1 - e \cos g \cos G)^2 - 4(\cos g - e \cos G)^2$$

oder

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = 4 \sin^2 g (1 - e^2 \cos^2 G). \quad 3)$$

Nun führen wir einen Hilfswinkel  $h$  ein, definiert durch

$$\cos h = e \cos G$$

und setzen fest, daß  $h$  zwischen 0 und  $\pi$  liegen, also  $\sin h$  stets positiv sein solle. Da, wenn man nur einen Umlauf in Betracht zieht,  $g$  ebenfalls zwischen 0 und  $\pi$

liegt, so schreiben sich jetzt die drei Gleichungen 1) 2) 3) in folgender unzweideutigen Weise:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2\sin g \cos h \quad 1^a)$$

$$\frac{r+r'}{a} = 2(1 - \cos g \cos h) \quad 2^a)$$

$$\frac{s}{a} = 2\sin g \sin h. \quad 3^a)$$

Da sich hiernach die drei Größen

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{r+r'}{a}, \quad \frac{s}{a}$$

durch zwei ausdrücken lassen,  $g$  und  $h$ , so ist klar, daß zwischen ihnen eine Beziehung bestehen muß. Um diese zu ermitteln, setzen wir

$$h+g = \varepsilon, \quad h-g = \delta, \quad 2g = \varepsilon - \delta,$$

und schreiben damit die drei Gleichungen so:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin(h+g) + \sin(h-g) = (\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta)$$

$$\frac{r+r'+s}{a} = 2(1 - \cos(h+g)) = 4\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad 4)$$

$$\frac{r+r'-s}{a} = 2(1 - \cos(h-g)) = 4\sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Hiernach kann aus den beiden letzten Gleichungen  $\varepsilon$  und  $\delta$  durch  $r+r'$ ,  $s$  und  $a$  ermittelt werden und darauf aus der ersten die Zeit. Dabei bleibt nur eine Zweideutigkeit des Zeichens bestehen, die zuerst geregelt werden muß. Wir setzen voraus, daß die beiden Örter einem und demselben Umlauf angehören, dann ist

$$g < \pi \quad \text{und} \quad G < 2\pi;$$

ferner haben wir schon festgesetzt

$$h < \pi,$$

also wird  $h+g = \varepsilon < 2\pi$  und daher  $\frac{\varepsilon}{2} < \pi$  und  $\sin \frac{\varepsilon}{2}$  positiv. Es ist somit aus der zweiten Gl. 4)  $\sin \frac{\varepsilon}{2}$  stets mit dem positiven Zeichen zu nehmen. Bei  $\sin \frac{\delta}{2}$  dagegen sind zwei Vorzeichen möglich; denn ziehen wir die obige Gleichung

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a} \cos f = \cos g - e \cos G$$

oder

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a} \cos \frac{\varepsilon}{2}(v'-v) = \cos g - \cos h = 2\sin \frac{\varepsilon}{2}(h+g) \sin \frac{\delta}{2}(h-g) = 2\sin \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon \sin \frac{\delta}{2} \delta$$

heran, so zeigt sich, da  $\sin \frac{\varepsilon}{2}$  stets positiv ist, daß  $\sin \frac{\delta}{2} \delta$  immer dasselbe Vorzeichen haben muß, wie  $\cos \frac{\varepsilon}{2}(v'-v)$ , d. h.

$$\sin \frac{\delta}{2} \delta \quad \text{ist positiv, wenn} \quad v'-v < \pi$$

und

$$\sin \frac{\delta}{2} \delta \quad \text{ist negativ, wenn} \quad v'-v > \pi.$$

Wir müssen also setzen

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varepsilon &= + \sqrt{\frac{r+r'+s}{4a}} \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \sqrt{\frac{r+r'-s}{4a}} \quad \begin{array}{l} v'-v < 180^\circ \\ v'-v > 180^\circ. \end{array} \end{aligned} \quad 5)$$

Um nun aus 4) eine geschlossene Gleichung ableiten zu können, müssen wir  $\varepsilon - \sin \varepsilon$  und  $\delta - \sin \delta$  entwickeln. Aus

$$\sin \varepsilon = 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} \varepsilon = 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon^2}$$

folgt:

$$\sin \varepsilon = 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon^4}{3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin^6 \frac{1}{2} \varepsilon^6}{5} - \dots \right);$$

ferner ist bekanntlich:

$$\varepsilon = 2 \left( \sin \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^5 \frac{1}{2} \varepsilon^5 + \dots \right),$$

also wird:

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = 4 \left( \frac{\sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{\sin^5 \frac{1}{2} \varepsilon^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin^7 \frac{1}{2} \varepsilon^7}{7} + \dots \right);$$

eine ebensolche Reihe nimmt man für  $\delta - \sin \delta$ . Werden diese Reihen in die erste Gl. 4) eingetragen und wird 5) dabei benutzt, so entsteht:

$$\begin{aligned} \frac{k \sqrt{1+m} (t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} &= \frac{4}{3} \left( \left( \frac{r+r'+s}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} \mp \left( \frac{r+r'-s}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \\ &+ \frac{4}{10} \left( \left( \frac{r+r'+s}{4a} \right)^{\frac{5}{2}} \mp \left( \frac{r+r'-s}{4a} \right)^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{3}{14} (\dots) + \dots \end{aligned}$$

oder, wenn mit  $a^{\frac{3}{2}}$  multipliziert wird:

$$\begin{aligned} k \sqrt{1+m} (t'-t) &= \frac{1}{6} \left( (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{80} \frac{1}{a} \left( (r+r'+s)^{\frac{5}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{3}{1792} \frac{1}{a^2} \left( (r+r'+s)^{\frac{7}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{7}{2}} \right) + \dots \end{aligned} \quad 6)$$

Hierin gilt das obere Zeichen für Bogen  $v'-v < 180^\circ$ , das untere für  $v'-v > 180^\circ$ .

Die Gleichung 6) stellt den Lambertschen Satz dar. Für die Parabel  $\left(\frac{1}{a} = 0\right)$  wird er besonders einfach:

$$k \sqrt{1+m} (t'-t) = \frac{1}{6} \left( (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} \right);$$

wir werden darauf bei Besprechung der parabolischen Bewegung zurückkommen.

Der allgemeine Lambertsche Satz ist für die Bahnbestimmung im Falle einer gewöhnlichen Planetenellipse wenig geeignet, da seine Reihenentwicklung nicht sehr konvergent ist; hier kann er also nicht fruchtbar gemacht werden, so sehr er sich bei der Parabel bewährt. Dagegen wird er wieder ein sehr schätzenswertes Hilfsmittel bei langgestreckten Ellipsen oder parabelnahen Bahnen; hierzu bedarf er aber noch

einiger Zurichtungen, die wir bei der Besprechung dieser Bahnen kennen lernen werden (Nr. 66).

An dieser Stelle muß noch der merkwürdige Ausdruck erwähnt werden, der sich ergibt, wenn man die Entwicklungen dieser Nummer zu einer Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck =  $y$  heranzieht. Aus den Gl. VI (Seite 138) haben wir oben (Seite 155) bereits abgeleitet:

$$\sqrt{rr'} \cos f = a (\cos g - \cos h);$$

man findet ebenso:

$$\sqrt{rr'} \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin g.$$

Damit aber ergibt sich die doppelte Fläche des von den Radienvektoren eingeschlossenen Dreiecks

$$\begin{aligned} rr' \sin 2f &= 2 rr' \sin f \cos f = 2 a^2 \sqrt{p} (\cos g - \cos h) \sin g \\ &= a^2 \sqrt{p} (\sin 2g - \sin(h+g) + \sin(h-g)) \\ &= a^2 \sqrt{p} (\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)). \end{aligned}$$

Da nun der doppelte Sektor nach der ersten Gl. in 4) (Seite 169) gleich ist:

$$k \sqrt{1+m} \sqrt{p} (t' - t) = a^2 \sqrt{p} ((\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta)),$$

so folgt:

$$y = \frac{(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}{\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}. \quad 7)$$

$\varepsilon$  und  $\delta$  sind durch 5) bestimmt; man kann also sagen:  $y$  hängt ebenso, wie die Zwischenzeit im Lambertschen Satz, lediglich von den zwei Größen:

$$\frac{r+r'}{4a} \quad \text{und} \quad \frac{s}{4a}$$

ab.\*)

## 52. Die Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse als Funktionen der Zeit.

In den Grundgleichungen der Bahnbestimmung treten die Verhältnisse der Flächen der von den heliozentrischen Radienvektoren gebildeten Dreiecke auf. Kann man die Elemente der Bahn schon so weit als bekannt annehmen, daß man damit die Verhältnisse Sektor durch Dreieck ermitteln kann, dann lassen sich damit die Verhältnisse der Dreiecksflächen leicht bilden, da das Verhältnis der Sektoren identisch ist mit dem Verhältnis der Zwischenzeiten. Ist die Bahn aber noch ganz unbekannt, so muß man die Verhältnisse der Dreiecksflächen selbst durch bekannte Größen und durch solche ausdrücken, die auch sonst als Unbekannte in das Problem eintreten. Als solche bieten sich nur die Zwischenzeiten und die Radienvektoren dar, und es wird daher unsere Aufgabe sein, die Dreiecksflächen nach diesen Größen zu entwickeln. Dies ist nur in Gestalt von Reihen möglich, die nach Potenzen der Zwischenzeiten fortschreiten, und wir erkennen daher schon jetzt, daß diese Entwicklungen und damit die darauf basierte Bahnbestimmung nur so lange richtige Resultate geben können, als diese Reihen konvergieren. Wovon dies abhängt, wird später zu besprechen sein.

\*) Callandreaux, Det. des orbites, Seite 16.

Für die doppelte Fläche  $[r r']$  des von den Radienvektoren  $r$  und  $r'$  gebildeten Dreiecks haben wir oben (Seite 171) den Ausdruck erhalten:

$$[r r'] = 2 a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} (\cos g - \cos h) \sin g,$$

den wir vermöge der Bedeutung von  $g$  und  $h$  zunächst wieder auf die exzentrischen Anomalien  $E$  und  $E'$  zurückführen:

$$[r r'] = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} (\sin(E' - E) - 2e \sin \frac{1}{2}(E' - E) \cos \frac{1}{2}(E' - E))$$

und dann folgendermaßen schreiben:

$$[r r'] = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} (\sin(E' - E) - e \sin E' + e \sin E).$$

Wird hier der aus den Keplerschen Gleichungen:

$$E - e \sin E = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t$$

$$E' - e \sin E' = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t'$$

entstehende Ausdruck:

$$- e \sin E' + e \sin E = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t' - t) - (E' - E)$$

eingetragen, so folgt, wenn wieder  $E' - E = 2g$  gesetzt wird:

$$[r r'] = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} \left( \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t' - t) + \sin 2g - 2g \right)$$

oder:

$$[r r'] = \sqrt{p} \left( k \sqrt{1+m} (t' - t) - (2g - \sin 2g) a^{\frac{3}{2}} \right). \quad 1)$$

Hieraus ergibt sich noch ein merkwürdiger Ausdruck für das Verhältnis Sektor zu Dreieck; denn da der doppelte Sektor gleich  $k \sqrt{1+m} \sqrt{p} (t' - t)$  ist, so folgt:

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{2g - \sin 2g}{\frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t' - t)} = 1 - \frac{2g - \sin 2g}{M' - M}, \quad 2)$$

wenn mit  $M$  die mittleren Anomalien bezeichnet werden.

Um einen zweiten Ausdruck für die Dreiecksfläche abzuleiten, beziehen wir das Dreieck auf ein rechtwinkliges in seiner Ebene liegendes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Sonne liegt und dessen  $X$ -Achse durch das Perihel hindurchgeht. Wir nennen  $x$  und  $y$ ,  $x'$  und  $y'$  die Koordinaten der Endpunkte der beiden Radienvektoren  $r$  und  $r'$ , dann ist (Nr. 44 und 46)

$$x = r \cos v = a(\cos E - e)$$

$$y = r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin E \frac{dE}{dt} = -k \sqrt{1+m} \sin E \frac{\sqrt{a}}{r} \quad 3)$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cos \varphi \cos E \frac{dE}{dt} = k \sqrt{1+m} \cos \varphi \cos E \frac{\sqrt{a}}{r}$$

und ganz entsprechende Gleichungen erhält man für  $x'$  und  $y'$ . Setzt man nun an\*):

$$\begin{aligned}x' &= F \cdot x + G \cdot \frac{dx}{dt} \\y' &= F \cdot y + G \cdot \frac{dy}{dt},\end{aligned}\tag{4}$$

wo  $F$  und  $G$  Funktionen der Zeit sind, so ergibt sich nach Eintragung der eben angegebenen Werte von  $x$   $y$   $x'$   $y'$ , und Weglassung der gemeinsamen Faktoren:

$$\begin{aligned}\cos E' - e &= F(\cos E - e) - \frac{Gk\sqrt{1+m}\sin E}{\sqrt{ar}} \\ \sin E' &= F\sin E + \frac{Gk\sqrt{1+m}\cos E}{\sqrt{ar}},\end{aligned}$$

woraus sofort folgt:

$$\cos(E' - E) = F(1 - e\cos E) + e\cos E$$

oder wenn beiderseits 1 subtrahiert und

$$1 - e\cos E = \frac{r}{a}$$

gesetzt wird:

$$\cos(E' - E) - 1 = \frac{r}{a}(F - 1)$$

oder endlich:

$$F = 1 + \frac{a}{r}(\cos 2g - 1)\tag{5}$$

Der Wert für  $G$  ergibt sich, wenn man aus dem Ansatz 4) den Ausdruck  $xy' - x'y$  bildet, der bekanntlich die doppelte Fläche des vom Anfangspunkt und den Punkten  $xy$ ,  $x'y'$  gebildeten Dreiecks, also  $[rr']$  darstellt; es kommt zunächst:

$$xy' - x'y = [rr'] = G\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Nun ist die doppelte Fläche des Elementarsektors zwischen den Punkten  $x$ ,  $y$  und  $x + dx$ ,  $y + dy$  einerseits  $x dy - y dx$  und andererseits (Nr. 44)  $k\sqrt{1+m}Vp dt$ , also wird:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{1+m}Vp$$

und daher

$$G = \frac{[rr']}{k\sqrt{1+m}Vp}$$

oder nach (1)

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{k\sqrt{1+m}}\left(k\sqrt{1+m}(t' - t) - (2g - \sin 2g)a^{\frac{3}{2}}\right) \\ G &= (t' - t) - \frac{2g - \sin 2g}{\mu}.\end{aligned}\tag{6}$$

Die geschlossenen Ausdrücke 5) und 6) von  $F$  und  $G$ , die zuerst von *Kühnert* in Astr. Nachr. Nr. 2266 aufgestellt wurden, müssen nun, da die Elemente unbekannt

\*) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, Seite 500.

sind, als Funktionen der Zwischenzeit dargestellt werden. Hierzu stellen wir dem Ansatz 4) folgenden gegenüber:

$$\begin{aligned} x' &= x + (t' - t) \frac{dx}{dt} + \frac{(t' - t)^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(t' - t)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{(t' - t)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4x}{dt^4} + \dots \\ y' &= y + (t' - t) \frac{dy}{dt} + \frac{(t' - t)^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(t' - t)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{(t' - t)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4y}{dt^4} + \dots \end{aligned} \quad 7)$$

der sich aus dem Taylorschen Satz ergibt, und müssen nun die Differenzialquotienten  $\frac{dx}{dt'}$ ,  $\dots$  entwickeln. Aus

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v$$

folgt durch Differenziation:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{r} \frac{dr}{dt} - y \frac{dv}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{r} \frac{dr}{dt} + x \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \quad 8)$$

woraus, da  $x^2 + y^2 = r^2$  ist, (nach Gl. 9 Seite 127.)

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{p}.$$

Wird dies nochmals differenziert, so ergibt sich

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad 9)$$

Durch Quadrieren und Addieren von 8) erhält man ferner:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

oder wenn der aus der Differenziation der Ellipsengleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

hervorgehende Ausdruck

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} \sin v r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{k \sqrt{1+m} e}{\sqrt{p}} \sin v$$

darin eingetragen wird:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{k^2 (1+m)}{p} \left(2 \frac{p}{r} + e^2 - 1\right).$$

Hieraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{k^2 (1+m)}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Nimmt man hierzu 9)

$$-y \frac{d^2x}{dt^2} + x \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

so ergibt sich aus der Verbindung beider Gleichungen leicht:

$$\begin{aligned} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right) \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m) \frac{x}{r^2} \frac{dr}{dt} \\ \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right) \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2(1+m) \frac{y}{r^2} \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

oder da aus  $x^2 + y^2 = r^2$  folgt  $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1+m) \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2(1+m) \frac{y}{r^3}.$$

10)

Wir hätten diese Gleichungen auch direkt hinschreiben können, da sie offenbar nichts anderes ausdrücken, als daß die Bewegung des Körpers nach dem Newtonschen Gesetz erfolgt; allein da wir in Nr. 41 (Seite 125) von anderen Grundgleichungen ausgegangen sind, war es nützlich zu zeigen, wie man von den dort erhaltenen Resultaten (den Keplerschen Gesetzen) zu Grundgleichungen von anderer Gestalt gelangen kann, die ihrerseits ebenfalls das Newtonsche Gesetz ausdrücken.

Setzt man die mit  $k\sqrt{1+m}$  multiplizierte Zeit gleich  $\tau$ , so wird:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}$$

und die weiteren Differenziationen, die wir nur für  $x$  anschreiben, ergeben:

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = -\frac{1}{r^3} \frac{dx}{d\tau} + \frac{3x}{r^4} \frac{dr}{d\tau}$$

$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = \frac{x}{r^6} - \frac{12x}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{3x}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{6}{r^4} \frac{dx}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}.$$

11)

Werden alle diese Differenzialquotienten in 7) eingetragen und wird dabei gleichzeitig die Form 4) hergestellt, so erhält man ohne nennenswerte Reduktion:

$$F = 1 - \frac{1}{2} \frac{(r' - r)^2}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{(r' - r)^3}{r^4} \frac{dr}{d\tau} + \frac{(r' - r)^4}{24} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{12}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} \right) + \dots$$

$$G = (r' - r) - \frac{1}{6} \frac{(r' - r)^3}{r^3} + \frac{1}{4} \frac{(r' - r)^4}{r^4} \frac{dr}{d\tau} + \frac{(r' - r)^5}{120} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{36}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{9}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} \right) + \dots$$

12)

wobei wir die Gleichungen 4) gleich auf die Zeit  $\tau$  d. h. auf

$$x' = F \cdot x + G \frac{dx}{d\tau}$$

$$y' = F \cdot y + G \frac{dy}{d\tau}$$

4<sup>a</sup>)

umgeschrieben angenommen haben. Vergleicht man die Gl. 2) und 6) und setzt für  $G$  seinen Wert aus 12), so erkennt man die Richtigkeit des folgenden Ausdruckes für das Verhältniß des Sektors zum Dreiecke  $y$ :

$$\frac{1}{y} = \frac{G}{r' - r} = 1 - \frac{1}{6} \frac{(r' - r)^2}{r^3} + \frac{1}{4} \frac{(r' - r)^3}{r^4} \frac{dr}{d\tau} + \frac{(r' - r)^4}{120} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{36}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{9}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} \right) + \dots$$

Für die Dreiecksfläche endlich ergibt sich aus 4<sup>a</sup>)

$$xy' - yx' = G \left( x \frac{dy}{d\tau} - y \frac{dx}{d\tau} \right) = V\bar{p} \cdot G, \quad (13)$$

wo für  $G$  sein Wert aus 12) einzutreten hat.

Auf Grund der vorausgehenden Entwicklungen ist es leicht, die in der Bahnbestimmung gebrauchten Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse aufzustellen. Es sind drei Punkte in der Bahn zu betrachten, zu denen die Radienvektoren  $r_1, r_2, r_3$  gehören mögen, und deren Koordinaten im obigen System  $x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3$  seien. Die Zeiten, zu denen sie vom Körper eingenommen werden, seien  $t_1, t_2, t_3$ ; die daraus hervorgehenden Zwischenzeiten, multipliziert mit  $k\sqrt{1+m}$ , bezeichnen wir mit:

$$\tau_1 = (t_3 - t_2)k\sqrt{1+m}, \quad \tau_2 = (t_3 - t_1)k\sqrt{1+m}, \quad \tau_3 = (t_2 - t_1)k\sqrt{1+m};$$

die doppelten Flächen der Dreiecke endlich seien  $[r_2r_3], [r_1r_3]$  und  $[r_1r_2]$ .

Die Ausdrücke für diese Flächen sind zunächst so zu gestalten, daß in allen ein und derselbe Radiusvektor und zwar  $r_2$  auftritt, da dieser in der Bahnbestimmung als Unbekannte eingeführt wird. Für  $[r_2r_3]$  hat man in den vorigen Formeln zu nehmen:

$$\begin{aligned} x_3 &= F_3 x_2 + G_3 \frac{dx_2}{d\tau} \\ y_3 &= F_3 y_2 + G_3 \frac{dy_2}{d\tau} \end{aligned} \quad (14)$$

und daher:

$$[r_2r_3] = x_2y_3 - y_2x_3 = V\bar{p} G_3 = V\bar{p} \left( r_1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^4}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right).$$

Für  $[r_1r_2]$  wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1 x_2 + G_1 \frac{dx_2}{d\tau} \\ y_1 &= F_1 y_2 + G_1 \frac{dy_2}{d\tau} \end{aligned} \quad (15)$$

und, da  $\tau' - \tau = -\tau_3$  ist,

$$[r_1r_2] = x_1y_2 - y_1x_2 = -V\bar{p} G_1 = -V\bar{p} \left( -\tau_3 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3^4}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} - \dots \right)$$

oder:

$$[r_1r_2] = V\bar{p} \left( \tau_3 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^3}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_3^4}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right).$$

Für  $[r_1r_3]$  endlich hat man nach 14) und 15)

$$[r_1r_3] = x_1y_3 - y_1x_3 = \left( x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} \right) (F_1 G_3 - G_1 F_3) = V\bar{p} (F_1 G_3 - G_1 F_3).$$

$G_3$  und  $G_1$  sind bereits angegeben; für  $F_3$  und  $F_1$  erhält man aus 12), da für ersteres  $\tau' - \tau = \tau_1$ , für letzteres  $\tau' - \tau = -\tau_3$  zu setzen ist:

$$\begin{aligned} F_3 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \\ F_1 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{r_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \end{aligned}$$

Mithin durch direktes Ausmultiplizieren:

$$[r_1 r_3] = V\bar{p} \left( \tau_2 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right).$$

Wir stellen die drei Ausdrücke nochmals zusammen:

$$\begin{aligned} [r_2 r_3] &= \tau_1 V\bar{p} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right) \\ [r_1 r_2] &= \tau_3 V\bar{p} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right) \\ [r_1 r_3] &= \tau_2 V\bar{p} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_2^2 (\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Für die Zwecke der Bahnbestimmung werden die Verhältnisse der beiden dem Radiusvektor  $r_2$  anliegenden Dreiecke zum großen Dreieck  $[r_1 r_3]$  gebraucht; dieselben ergeben sich aus 16) durch direkte Ausrechnung:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3 (\tau_2 \tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right) \\ n_3 &= \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_1 (\tau_2 \tau_1 - \tau_3^2)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Hieraus folgt für die Summe:

$$n_1 + n_3 = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3} - \frac{1}{2} \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \quad (18)$$

und für den Quotienten:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right). \quad (19)$$

An diese wichtigen Formeln knüpfen wir einige Bemerkungen. Es wurde schon oben (Gl. 5<sup>a</sup>) Seite 153) darauf hingewiesen, daß die Bestimmung des Parameters wesentlich abhängt von dem Inhalt des kleinen Dreiecks, das die drei Punkte der Bahn miteinander bilden. Wir können für dieses Dreieck jetzt einen Ausdruck aufstellen. Nach 16) wird sein doppelter Inhalt nach einiger leichter Reduktion:

$$[r_2 r_3] + [r_1 r_2] - [r_1 r_3] = V\bar{p} \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2 r_2^3} \left( 1 + \frac{\tau_3 - \tau_1}{r_2} \frac{dr_2}{d\tau} - \dots \right), \quad (20)$$

womit sich, wie nebenbei bemerkt sei, folgender elegante und genaue Ausdruck für den Parameter ergibt:

$$p^{\frac{3}{2}} = 8 r_1 r_2 r_3 r_2^3 \frac{\sin \frac{1}{2}(s_3 - s_2) \sin \frac{1}{2}(s_2 - s_1) \sin \frac{1}{2}(s_3 - s_1)}{\tau_1 \tau_2 \tau_3} : \left( 1 + \frac{\tau_3 - \tau_1}{r_2} \frac{dr_2}{d\tau} \right).$$

Der Ausdruck 20) ist von der dritten Ordnung in bezug auf die Zwischenzeiten. Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken 16) für die Dreiecksflächen zu vernachlässigen, wäre also identisch damit, den Parameter des zu bestimmenden Kegelschnittes von vornherein als unendlich groß anzunehmen, d. h. vorauszusetzen, daß der Körper sich in gerader Linie bewege. Jedes Näherungsverfahren muß also mindestens die Glieder dritter Ordnung in 16) bzw. die Glieder zweiter Ordnung in 17) von vornherein berücksichtigen. Dies kann aber auch geschehen, da  $r_2$  ohnehin als Unbekannte



Wir wollen endlich das Stück  $M_2$  des Radiusvektors  $r_2$  zwischen der Sehne  $13$  und dem Punkt  $2$ , d. h. den Pfeil  $f = \overline{M_2}$  berechnen. Ist  $h$  das Lot von  $2$  auf  $\overline{13}$ , so wird

$$f = \frac{h}{\sin SM_3} = \frac{\overline{13}h}{\overline{13} \sin SM_3} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3]}{\overline{1M} \sin SM_3 + \overline{M_3} \sin SM_3}$$

$$= \frac{r_2 ([r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3])}{r_2 (r_1 \sin(v_2 - v_1) + r_3 \sin(v_3 - v_2))} = \frac{r_2 ([r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3])}{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}.$$

Werden hier die Ausdrücke 20) und 16) mit Beiseitelassung der Glieder vierter Ordnung eingetragen, so kommt nach leichter Reduktion:

$$f = \frac{1}{2r_2^2} r_1 r_3 \left( 1 + \frac{1}{6r_2^3} (r_2^2 - 3r_1 r_3) \right)$$

oder bis auf Größen vierter Ordnung genau

$$f = \frac{1}{2r_2^2} r_1 r_3. \quad 21)$$

Wir werden später sehen, daß auf der Möglichkeit, dieses Stück  $f$  aus Messungen am Himmel abzuleiten, alle Bahnbestimmung beruht.

Das Verhältnis des Pfeiles  $M_2$  zur Strecke  $SM$  läßt sich ebenfalls durch die Dreiecksflächen ausdrücken:

$$\frac{f}{SM} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} - 1, \quad 21^a)$$

also nach 18) bis auf Größen vierter Ordnung genau

$$\frac{f}{SM} = \frac{r_1 r_3}{2r_2^3} \quad 21^b)$$

**53. Die Formeln von Gibbs.** Man hat vielfach versucht, statt der Formeln 17) für die Verhältnisse der Dreiecksflächen genauere zu erhalten, um bei der Bahnbestimmung schon bei der ersten Näherung der Wahrheit näher zu kommen. Das war natürlich nur möglich, wenn man statt des einen Radiusvektors  $r_2$  entweder  $r_1$  und  $r_3$  oder alle drei einführte. Die bemerkenswertesten von diesen Formeln sind die von Gibbs\*), der alle drei Radienvektoren benutzt. Man kann sie ohne alle fremdartigen Voraussetzungen kurz wie folgt ableiten. Stellt man die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Bahn statt durch die Gleichungen 4) durch die nach Potenzen der Zeit fortschreitenden Reihen dar, die man mit der vierten Ordnung abbricht:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4 \\ y &= b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + b_4 \tau^4, \end{aligned} \quad (a)$$

so wird:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 2a_2 + 6a_3 \tau + 12a_4 \tau^2$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = 2b_2 + 6b_3 \tau + 12b_4 \tau^2$$

\*) Gibbs, On the det. of ell. orbits; Nat. Ac. of Science, Vol. IV (8. Mem.), 1888.

und daher wegen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{r^3}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{y}{r^3} \\ -\frac{x}{r^3} &= 2a_2 + 6a_3\tau + 12a_4\tau^2 \\ -\frac{y}{r^3} &= 2b_2 + 6b_3\tau + 12b_4\tau^2. \end{aligned} \quad (b)$$

Setzt man die Gl. (a) und (b) für die 3 Punkte  $x_1y_1$ ,  $x_2y_2$ ,  $x_3y_3$  an, indem man die Zeit von der des zweiten Ortes an zählt und wie oben die Zwischenzeiten zwischen 2 und 3 mit  $\tau_1$  und zwischen 1 und 2 mit  $\tau_3$  bezeichnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - a_1\tau_3 + a_2\tau_3^2 - a_3\tau_3^3 + a_4\tau_3^4 \\ x_2 &= a_0 \\ x_3 &= a_0 + a_1\tau_1 + a_2\tau_1^2 + a_3\tau_1^3 + a_4\tau_1^4 \\ -\frac{x_1}{r_1^3} &= 2a_2 - 6a_3\tau_3 + 12a_4\tau_3^2 \\ -\frac{x_2}{r_2^3} &= 2a_2 \\ -\frac{x_3}{r_3^3} &= 2a_2 + 6a_3\tau_1 + 12a_4\tau_1^2 \end{aligned} \quad (c)$$

und ein ebensolches System für die  $y$ . Wenn man aus beiden Systemen von je 6 Gleichungen die 5 Größen  $a_0, \dots, a_4$  bzw.  $b_0, \dots, b_4$  eliminiert, was man mit wenigen Strichen erreicht, wenn man einige Kunstgriffe nicht übersieht, so bleiben folgende Gleichungen übrig, deren Koeffizienten lediglich aus den  $r$  und  $\tau$  sich zusammensetzen, also für beide Gruppen gleich sind:

$$\begin{aligned} x_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) A_1 - x_2 \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) + x_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) A_3 &= 0 \\ y_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) A_1 - y_2 \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) + y_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{\tau_1}{\tau_2}; \quad A_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{\tau_3}{\tau_2};$$

$$B_1 = \frac{1}{12}(-\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2); \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2); \quad B_3 = \frac{1}{12}(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)$$

oder:

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2(\tau_3 - \tau_1)); \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2^2); \quad B_3 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 - \tau_2(\tau_3 - \tau_1))$$

oder:

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2); \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2^2); \quad B_3 = \frac{1}{12}(\tau_2\tau_1 - \tau_3^2).$$

Aus diesen Gleichungen aber folgt, wenn man sie einmal durch die Multiplikatoren  $+y_1$  und  $-x_1$ , dann durch die Multiplikatoren  $+y_3$  und  $-x_3$  miteinander verbindet:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right)(x_1y_2 - x_2y_1) - A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)(x_1y_3 - x_3y_1) &= 0 \\ -\left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right)(x_2y_3 - x_3y_2) + A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)(x_1y_3 - x_3y_1) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = A_3 \frac{1 + \frac{B_3}{r_3^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}}, \quad \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = A_1 \frac{1 + \frac{B_1}{r_1^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}}; \quad (22)$$

die Dreiecke  $[r_1 r_2]$ ,  $[r_2 r_3]$ ,  $[r_1 r_3]$  verhalten sich also wie:

$$x_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) \text{ zu } x_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \text{ zu } x_2 \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right).$$

Die Formeln 22) geben die Verhältnisse der Dreiecksflächen bis auf Größen vierter Ordnung inkl. in den Zwischenzeiten genau an, übertreffen die Gl. 17) also ganz erheblich. Die auf ihnen aufgebaute Methode der ersten Bahnbestimmung hat aber den Nachteil, daß sie keine weitere Verbesserung der Elemente gestattet, wenn die Glieder vierter Ordnung nicht ausreichen, abgesehen davon, daß sie naturgemäß zu viel komplizierteren Formeln für die Rechnung führen muß.

Wenn man in den Formeln 17) statt  $r_2$  die Radienvektoren  $r_1$  und  $r_3$  einführt, dann kann man den Wert des Differenzialquotienten  $\frac{dr_2}{dt}$  wenigstens genähert berücksichtigen und dadurch genauere Formeln erhalten. Dies hat Encke\*) und ausführlicher v. Oppolzer\*\*) in folgender Weise durchgeführt und der Bahnbestimmung zugrunde gelegt. Aus den Entwicklungen

$$r_4 = r_2 - x_3 \frac{dr_2}{dx} + \frac{x_3^2}{2} \frac{d^2 r_2}{dx^2} - \dots$$

$$r_3 = r_2 + x_4 \frac{dr_2}{dx} + \frac{x_4^2}{2} \frac{d^2 r_2}{dx^2} + \dots$$

folgt leicht

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) + \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \frac{dr_2}{dx} + \dots$$

und

$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{r_3 - r_4}{x_2} + \dots,$$

also

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) + \frac{1}{2} \frac{x_3 - x_4}{x_2} (r_3 - r_4) + \dots$$

Führt man dies in 17) und 19) ein, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{x_4}{x_2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{x_2^2 - x_4^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 \frac{x_3 x_1^2}{x_2} \frac{r_3 - r_4}{(r_1 + r_3)^4} + \dots \right) \\ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{x_3}{x_2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{x_2^2 - x_3^2}{(r_1 + r_3)^3} - 4 \frac{x_4 x_3^2}{x_2} \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \dots \right) \\ \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} &= \frac{x_4}{x_3} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_1^2 - x_3^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 x_1 x_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \dots \right). \end{aligned} \quad (23)$$

\*) Berliner Jahrbuch für 1833, Seite 292.

\*\*) v. Oppolzer, Bahnbestimmung, Band I, Seite 100.

Diese Formeln berücksichtigen die Glieder dritter Ordnung vollständig, aber auch sie führen zu einer umständlichen Methode der Bahnbestimmung, außer wenn es sich um eine Parabel handelt, wo die letzte Formel wichtige Dienste leistet.

Eine vergleichende Kritik der Formeln 17) 22) und 23) hat *E. Weiß*\*) gegeben.

Wenn man die Analyse, die wir oben zur Ableitung der Gibbsschen Formeln durchgeführt haben, mit einem Gliede weniger ausführt, also mit dem Ansatz

$$x = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3,$$

so kann man aus den ebenso wie dort aufzustellenden 6 Gleichungen (c) (Seite 180) nicht nur die vier Größen  $a_0, \dots, a_3$ , sondern noch einen Radiusvektor z. B.  $r_2$  eliminieren. Man kommt dann auf die Gleichung

$$\tau_1 \left( 1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_4^2}{6r_1^3} \right) x_1 - \tau_2 x_2 + \tau_3 \left( 1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{6r_3^3} \right) x_3 = 0$$

und leitet daraus wie dort folgende Formeln ab:

$$\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_4^2}{6r_1^3} \right) \\ \frac{[r_4 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{6r_3^3} \right). \end{aligned} \quad 24)$$

Die Ähnlichkeit mit 17) ist in die Augen springend, sie stehen auch, natürlich abgesehen von dem unbekanntem mit  $\frac{dr_2}{dt}$  multiplizierten Gliede, denselben an Genauigkeit nicht nach.

Reduziert man den Ansatz noch um ein Glied, setzt also:

$$x = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2,$$

so werden die 6 Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - a_1 \tau_3 + a_2 \tau_3^2 \\ x_2 &= a_0 \\ x_3 &= a_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_1^2 \\ -\frac{x_1}{r_1^3} &= 2a_2 \\ -\frac{x_2}{r_2^3} &= 2a_2 \\ -\frac{x_3}{r_3^3} &= 2a_2 \end{aligned}$$

und wenn man hier die Größen  $a_0, a_1, a_2, r_1$  und  $r_3$  eliminiert, so bleibt die Gleichung übrig:

$$x_1 \tau_1 - x_2 \tau_2 \left( 1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2r_2^3} \right) + x_3 \tau_3 = 0,$$

\*) Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschr. Ak. d. W. Wien, Band 60, Seite [353]. 1893.

aus der folgt:

$$\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2r_2^3} \right) \\ \frac{[r_4 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2r_2^3} \right). \end{aligned} \quad 25)$$

Dies sind die Werte, welche der ersten Näherung in der Gaußschen Methode zugrunde liegen; denn in der Theoria motus art. 134 wird gesetzt

$$\begin{aligned} P &= \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \\ Q &= \left( \frac{[r_1 r_2]}{[r_4 r_3]} + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} - 1 \right) r_2^3 = \tau_1 \tau_3, \end{aligned}$$

welche Gleichungen sich unmittelbar aus 25) ergeben. Die Gl. 17) enthalten die Glieder zweiter Ordnung vollständig; die Gl. 25) aber nicht, denn der Unterschied ist

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{1}{r_2^3} \left( \frac{1}{6} (\tau_2^2 - \tau_1^2) - \frac{\tau_1 \tau_3}{2} \right) = \frac{1}{6} \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{1}{r_2^3} \tau_3 (\tau_3 - \tau_1)$$

bzw.

$$\frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{1}{r_2^3} \left( \frac{1}{6} (\tau_2^2 - \tau_3^2) - \frac{\tau_1 \tau_3}{2} \right) = -\frac{1}{6} \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{1}{r_2^3} \tau_1 (\tau_3 - \tau_1),$$

verschwindet also nur bei gleichen Zwischenzeiten. Es ist also gerechtfertigt, die genauern und ebenso einfachen Gl. 17) statt 25) zu benutzen, wie Encke zuerst vorgeschlagen hat.

Zwischen den Verhältnissen (17):

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1 \quad \text{und} \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3$$

besteht eine einfache Beziehung, die vom Differenzialquotienten  $\frac{dr_2}{d\tau}$  unabhängig und doch bis auf Größen vierter Ordnung in den Zwischenzeiten genau ist. Man erhält sie leicht, wenn man die Gl. 16) in folgender Weise miteinander verbindet:

$$\begin{aligned} \tau_3^4 [r_1 r_3] + \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) [r_1 r_2] &= V\bar{p} \left( \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2) - \frac{1}{6r_2^3} \tau_1 \tau_2^3 \tau_3^3 \dots \right) \\ \tau_1^4 [r_1 r_3] - \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) [r_2 r_3] &= V\bar{p} \left( \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2) - \frac{1}{6r_2^3} \tau_3 \tau_2^3 \tau_1^3 \dots \right) \end{aligned}$$

und diese Gleichungen dann durcheinander dividiert:

$$\frac{\tau_3^4 + \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) n_3}{\tau_1^4 - \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) n_1} = \frac{\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_3^2}{6r_2^3}}{\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_1^2}{6r_2^3}}.$$

Wird hier kreuzweise ausmultipliziert und gehörig reduziert, so kommt:

$$\left( \tau_1 \tau_2 - \tau_3^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_3^2}{6r_2^3} \right) n_1 + \left( \tau_3 \tau_2 - \tau_1^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_1^2}{6r_2^3} \right) n_3 = \tau_1^2 - \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 - \frac{\tau_3^2 \tau_1^2}{6r_2^3}. \quad 26)$$

**54. Beziehungen zwischen drei Radienvektoren und den Zwischenzeiten** sind häufig von Nutzen und können in verschiedenen Genauigkeitsgraden aufgestellt werden. Aus den Ansätzen

$$r_1 = r_2 - \tau_3 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{1.2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} - \dots$$

$$r_3 = r_2 + \tau_1 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{1.2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} + \dots$$

folgt leicht:

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2}.$$

Da nach Seite 149

$$\frac{d^2 r_2}{d\tau^2} = \frac{e \cos v_2}{r_2^2},$$

so wird, wenn die Bahn genähert bekannt ist, die Formel

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2} \frac{e \cos v_2}{r_2^2} \quad 1)$$

bis auf Größen dritter Ordnung inkl. genau sein. Vernachlässigt man Größen dritter Ordnung, so wird

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2. \quad 2)$$

Setzt man an

$$r_1^2 = r_2^2 - \tau_3 \frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{1.2} \frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} - \dots$$

$$r_3^2 = r_2^2 + \tau_1 \frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{1.2} \frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} + \dots,$$

so erhält man ebenso nach den Formeln Seite 149

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2 + \tau_1 \tau_2 \tau_3 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right), \quad 3)$$

also wieder mit Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2. \quad 4)$$

Eine genauere Formel erhält man durch ein Verfahren, das dem bei der Ableitung der Gibbsschen Formel eingeschlagenen ähnlich ist. Macht man nämlich den Ansatz

$$r^2 = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4,$$

so folgt

$$\frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2a_2 + 6a_3 \tau + 12a_4 \tau^2 = 2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Zählt man  $\tau$  von der Zeit des mittleren Radiusvektors aus, so wird für

$$\begin{array}{lll} \tau = -\tau_3 & r^2 = r_1^2 & \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{a} \right) \\ \tau = 0 & r^2 = r_2^2 & \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right) \\ \tau = +\tau_1 & r^2 = r_3^2 & \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{a} \right) \end{array}$$

und man erhält daher die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a_0 - \tau_3 a_1 + \tau_3^2 a_2 - \tau_3^3 a_3 + \tau_3^4 a_4 \\ r_2^2 &= a_0 \\ r_3^2 &= a_0 + \tau_1 a_1 + \tau_1^2 a_2 + \tau_1^3 a_3 + \tau_1^4 a_4 \\ \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 - 3\tau_3 a_3 + 6\tau_3^2 a_4 \\ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 \\ \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 + 3\tau_1 a_3 + 6\tau_1^2 a_4. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus die fünf Größen  $a_0, \dots, a_4$ , so resultiert die Gleichung:

$$A_1 r_1^2 \left(1 - \frac{2B_1}{r_1^3}\right) + A_3 r_3^2 \left(1 - \frac{2B_3}{r_3^3}\right) - r_2^2 \left(1 + \frac{2B_2}{r_2^3}\right) + \frac{\tau_1 \tau_3}{a} = 0, \quad 5)$$

die bis auf Größen vierter Ordnung genau ist und offenbar eine Erweiterung von 3) darstellt. Die  $A$  und  $B$  haben dieselben Werte wie Seite 180, nämlich

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}, & A_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \\ B_1 &= \frac{1}{12}(\tau_2 \tau_3 - \tau_1^2), & B_2 &= \frac{1}{12}(\tau_1 \tau_3 + \tau_2^2), & B_3 &= \frac{1}{12}(\tau_2 \tau_1 - \tau_3^2). \end{aligned}$$

Bei kleinen Exzentrizitäten wird man 5) so schreiben:

$$\begin{aligned} A_1 r_1^2 \left(1 - \frac{2B_1}{r_1^3}\right) + A_3 r_3^2 \left(1 - \frac{2B_3}{r_3^3}\right) - r_2^2 \left(1 - \frac{2B_2'}{r_2^3}\right) - \tau_1 \tau_3 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a}\right) &= 0 \quad 6) \\ B_2' &= \frac{1}{12}(\tau_1 \tau_3 - (\tau_3 - \tau_1)^2). \end{aligned}$$

Kennt man also die große Achse einer Bahn genähert, so gewähren 5) oder 6) bequeme Mittel, um aus zwei Radienvektoren einen dritten abzuleiten.

## Abschnitt XII.

## Die Bewegung in der Parabel.

**55. Die Bewegung in der Parabel.** Um die Bewegung in der Parabel kennen zu lernen, ist die Gl. 9) (Seite 127)

$$r^2 \frac{ds}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{p} \quad 1)$$

unter der Voraussetzung zu integrieren, daß  $r$  und  $s$  durch die Gleichung der Parabel (12) Seite 128) miteinander verbunden sind:

$$r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}(s-\varpi)} \quad 2)$$

wo  $q = \frac{p}{2}$  die Periheldistanz bezeichnet. Setzt man  $s - \varpi = v$ , wo  $v$  auch hier die wahre Anomalie genannt wird, so folgt durch Einsetzung von 2) in 1)

$$\frac{q^2}{\cos \frac{v}{2}} dv = k \sqrt{1+m} \sqrt{2q} dt.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$2q^2 \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{v^3}{2} \right) = k \sqrt{1+m} \sqrt{2q} t + c,$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{v^3}{2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \frac{v^2}{2}} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{v^2}{2} \frac{1}{\cos \frac{v^2}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \frac{v^2}{2}} \left( \sin \frac{v^2}{2} + \cos \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2 \cos \frac{v^2}{2}}. \end{aligned}$$

Nennt man  $T$  den Moment, wo der Körper durch das Perihel geht, so muß für  $t = T$   $v = 0$  sein; damit bestimmt sich die Konstante  $c$  zu  $-k \sqrt{1+m} \sqrt{2q} T$  und die Gleichung wird, wenn überdies  $m = 0$  gesetzt wird, da wir bei den hier in Betracht kommenden Körpern die Masse niemals werden bestimmen können,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}. \quad 3)$$

Diese Gleichung, die der Keplerschen bei der Ellipse entspricht, liefert die wahre Anomalie direkt durch die seit dem Periheldurchgang verfllossene Zeit. Es gelingt hier durch einen einfachen Kunstgriff eine direkte Auflösung. Setzt man nämlich

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = 2 \cotg 2\gamma$$

und beachtet, daß

$$2 \cotg 2\gamma = \frac{2(\cos \gamma^2 - \sin \gamma^2)}{2 \sin \gamma \cos \gamma} = \cotg \gamma - \operatorname{tg} \gamma,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg} \frac{1}{2}v^3 &= (\operatorname{cotg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma) + \frac{1}{3}(\operatorname{cotg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma)^3 \\ &= \frac{1}{3}(\operatorname{cotg} \gamma^3 - \operatorname{tg} \gamma^3); \end{aligned}$$

und setzt man weiter

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg} \frac{1}{2}v^3 = \frac{1}{3}(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{2}{3}\operatorname{cotg} \beta.$$

Die Gleichung 3) kann also so geschrieben werden

$$\frac{2}{3}\operatorname{cotg} \beta = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k} \frac{q^{\frac{3}{2}}}{t - T}$$

und ihre ganze Auflösung würde also durch folgendes Formelsystem bewerkstelligt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k} \frac{q^{\frac{3}{2}}}{t - T} & \log \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k} &= 1.7388423 \\ \operatorname{tg} \gamma &= \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}v &= 2 \operatorname{cotg} 2\gamma. \end{aligned} \quad 4)$$

Man kann hieraus sowohl  $v$  ermitteln, wenn  $t$  gegeben ist, als auch umgekehrt die zu der wahren Anomalie  $v$  gehörige, seit dem Periheldurchgang verfllossene Zeit  $t - T$ .

Der Radiusvektor wird stets durch

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}v} \quad 5)$$

gefunden, nachdem  $v$  bereits ermittelt ist.

In der Regel bedient man sich des Formelsystems 4) nicht, sondern man benutzt eine *Tafel*, die unter dem Namen der Barkerschen\*) bekannt ist. Schreibt man nämlich 3) in der Form

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2}v^3 = \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}} = M,$$

so läßt sich die Auflösung dieser Gleichung nach  $M$  oder nach  $v$  einer *Tafel* entnehmen, welche mit dem Argument  $v$  das  $M$  tabuliert. Die umfangreichste *Tafel* dieser Art ist die von Oppolzer, welche von  $10''$  zu  $10''$  fortschreitet. Die älteren Ausgaben der Barkerschen *Tafel* tabulieren in der Regel nicht  $M$  sondern

$$\frac{75k}{\sqrt{2}} M \quad \left( \log \frac{75k}{\sqrt{2}} = 9.9601277 \right);$$

dementsprechend hat man natürlich den Wert zu bilden, mit dem man in die *Tafel* eingeht, bzw. bei der Berechnung von  $t - T$  zu verfahren.

Man kann auch umgekehrt  $M$  als Argument nehmen und  $v$  tabulieren; die *Tafel* erhält dann wesentlich geringeren Umfang, ohne an Bequemlichkeit viel zu verlieren. In der *Tafelsammlung* (Taf. XV) ist eine solche *Tafel* aufgenommen, deren Einrichtung und Gebrauch dort nachzulesen ist.

\*) *Barker*, An account of the discoveries concerning Planets with the way to find their orbits. London 1757.

Wenn  $M$  sehr groß wird, d. h. wenn sich  $v$  der Grenze  $180^\circ$  nähert, dann werden alle Tafeln zur Ermittlung der wahren Anomalie in der parabolischen Bewegung unbequem und zuletzt unbrauchbar. Zur Abhilfe hat man verschiedene Mittel vorgeschlagen, das bequemste dürfte das von *Bessel* angegebene sein. Schreibt man die Gl. 3) in der Form

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 (1 + 3 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^2) = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}$$

und multipliziert und dividiert links mit

$$(1 + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^2)^3 = \left( \frac{2}{\sin v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v} \right)^3,$$

dann geht sie über in:

$$\frac{8}{3 \sin v^3} \frac{1 + 3 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^2}{(1 + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^2)^3} = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Nähert sich nun  $v$  der Grenze  $180^\circ$ , dann wird der zweite Faktor links nahe gleich 1 und der Wert von  $w$ , der sich aus der Auflösung der Gleichung

$$\frac{8}{3 \sin w^3} = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}$$

ergibt, wird also nur einer kleinen Korrektur  $\delta$  bedürfen, um in  $v$  überzugehen.  $\delta$  kann man leicht mit dem Argument  $w$  tabulieren (Taf. XVI der Sammlung). Die Rechnung wird sich somit nach folgendem Schema vollziehen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{q^{\frac{3}{2}}}{t - T} \\ \sin w &= \sqrt[3]{\frac{8 \sqrt{2}}{3} \frac{1}{k M}} \\ w &\text{ im II. Quadr.} \\ v &= w + \delta \end{aligned} \right\} \log \frac{8 \sqrt{2}}{3 k} = 2.3409023 \quad 6)$$

( $\delta$  aus Taf. XVI).

Die umgekehrte Aufgabe, zu einer gegebenen wahren Anomalie die seit der Perihelzeit  $T$  verflossene Zeit  $t - T$  zu ermitteln, kann natürlich mittels der Barker'schen Tafel gelöst werden. Man kann aber auch direkt nach

$$t - T = q^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \right) \quad 7)$$

oder nach Einsetzung der Zahlenwerte, nach

$$t - T = q^{\frac{3}{2}} ([1.9149336] \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + [1.4378123] \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3)$$

rechnen. Bei Werten von  $v$  nahe an  $180^\circ$  wird man die direkte Rechnung am bequemsten finden, wenn man 7) in der Form schreibt:

$$\begin{aligned} t - T &= \frac{\sqrt{2}}{3k} q^{\frac{3}{2}} \frac{1 + 3 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^2}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} v^3} \\ \log \frac{\sqrt{2}}{3k} &= 1.4378123; \end{aligned} \quad 8)$$

dies wird sich besonders empfehlen, wenn der Radiusvektor bekannt ist, aus dem sich ergibt

$$\cos \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{r}{q}} \quad \text{und dann} \quad \cotg \frac{1}{2}v = \frac{\cos \frac{1}{2}v}{\sin \frac{1}{2}v}.$$

Liegt  $t$  vor dem Periheldurchgang, so zählt man  $t - T$  und ebenso die zugehörige wahre Anomalie negativ, während die absoluten Werte dieselben sind, wie für die entsprechenden Zeiten nach dem Periheldurchgang.

### Beispiele.

1. Für den Kometen 1896 I ist

$$\begin{aligned} T &= 1896 \text{ Jan. } 31.79848 \\ \log q &= 9.768740; \end{aligned}$$

man berechne die wahre Anomalie und den Radiusvektor für 1896 Mai 2.5

a) ohne Tafel nach 4).

$$\begin{aligned} t - T &+ 91^{\text{d}}70152 \\ q^{\frac{3}{2}} &9.6531100 \\ t - T &1.9623765 \\ &7.6907335 \\ \text{tg } \beta &9.4295758 \\ \frac{1}{2}\beta &7^{\circ}31'30''.58 \\ \text{tg } \frac{1}{2}\beta &9.1209004 \\ \text{tg } \gamma &9.7069668 \\ 2\gamma &53^{\circ}58'43''.54 \\ \text{cotg } 2\gamma &9.8615995 \\ \text{tg } \frac{1}{2}v &0.1626295 \\ v &110^{\circ}58'15''.26 \end{aligned}$$

b) Mit einer Tafel nach der Barkerschen Einrichtung. Man hat zu rechnen  $\frac{75k}{\sqrt{2}} \frac{t-T}{q^{\frac{3}{2}}}$  und mit diesem Argument aus der Tafel  $v$  zu interpolieren.

$$\begin{aligned} t - T &+ 91^{\text{d}}70152 \\ \log(t - T) &1.9623765 \\ q^{\frac{3}{2}} &9.6531100 \\ &2.3092665 \\ \text{Arg.} &2.2693942 \\ v &110^{\circ}58'15''.34 \end{aligned}$$

c) Mit der Oppolzerschen Tafel; das Argument ist  $\log M = \log \frac{t-T}{q^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned} t - T &1.9623765 \\ q^{\frac{3}{2}} &9.6531100 \\ M &2.3092665 \\ v &110^{\circ}58'15''.34 \end{aligned}$$

d) Mit Tafel XV; das Argument ist  $\log M = \log \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}$

$\log M$	2.309 2665	$\log A$	5.385 23
	110° 57' 10".63		6.425 70
	+ 1		4.704
$v$	110 58 15.33		

Berechnung des Radiusvektors nach 5):

$\cos v$	9.553 7546 <sub>n</sub>	oder	$\frac{v}{2}$	55° 29' 7".67
$1 + \cos v$	9.807 6066		$\cos \frac{1}{2}v$	9.753 2883
$2q$	0.069 7700		$\cos \frac{1}{2}v^2$	9.506 5766
$r$	0.262 1634		$q$	9.768 7400
			$r$	0.262 1634

2. Man berechne für denselben Kometen die wahre Anomalie 10000 Tage nach dem Periheldurchgang. Nach den Formeln 6) wird:

$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 1100
$t - T$	4.000 0000
$\frac{1}{M}$	5.653 1100
	7.994 0123
$\sin w$	9.331 3374
$w$	167° 36' 59".06
Taf. XVI	+ 6.08
$v$	167 37 5.14

3. Bei einer ersten Bahnbestimmung desselben Kometen wurde gefunden

$$\log q = 9.768 874$$

und für die Zeit der letzten Beobachtung

$$t = 1896 \text{ Febr. } 21.71344 \quad v = 54^\circ 48' 8''.2.$$

Man ermittle daraus die Zeit des Periheldurchganges.

Die direkte Rechnung nach 7) ergibt:

$\frac{1}{2}v$	27° 24' 4".1
$\text{tg } \frac{1}{2}v$	9.714 645
$\text{tg } \frac{1}{2}v^3$	9.143 935
	1.629 579
	0.581 747
Summe	1.666 834
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
$t - T$	1.320 144
	+ 20.89990
also T	1896 Jan. 31.81354

Mit Taf. XV findet man:

$\log M_0$	1.667	$v_0$	54° 49' 3'' 50
		$v - v_0$	1.7427 <sub>n</sub>
		$\log A$	5.5229
		$M - M_0$	- 0.000 166
		$\log M$	1.666 834
		$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
		$t - T$	+ 20.89990
		$T$	1896 Jan. 31.81354

Mit einer Barkerschen Tafel ergibt sich unmittelbar:

$\log \frac{75k}{V_2} M$	1.626 9618
$\frac{75k}{V_2}$	9.960 1277
$M$	1.666 8341
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
$t - T$	+ 20.89990
$T$	1896 Jan. 31.81354.

**56. Beziehungen zwischen mehreren Orten in der Parabel. Die Eulersche Gleichung.** Zwischen dem Element  $q$ , welches die Parabel ihrer Größe nach bestimmt, den Polarkoordinaten einzelner Punkte der Kurve und der Zwischenzeit, welche zur Beschreibung der Bogen gebraucht wird, gibt es eine große Zahl von Beziehungen, deren meiste *Lambert* in seinem Werke *Ins. orbitae Cometarum proprietates 1761* (Ostwalds Klassiker Nr. 133) zusammengestellt hat. Wir wollen davon diejenigen, die für die heutige Bahnbestimmung von Nutzen sind, kennen lernen und beginnen mit dem Satz, den wir schon oben als Spezialfall aus der entsprechenden Formel für die Ellipse abgeleitet haben.

Wir nennen die zu den Zeiten  $t$  und  $t'$  gehörigen wahren Anomalien  $v$  und  $v'$ , Radienvektoren  $r$  und  $r'$ , die Sehne zwischen den Endpunkten derselben  $s$  und  $v' - v = 2f$ , dann wird in der Parabel der doppelte im Zeitraum  $t' - t$  überstrichene Sektor

$$k(t' - t) \sqrt{2q} = \int_v^{v'} r^2 dv = \int_v^{v'} \frac{q^2}{\cos^{\frac{1}{2}} v^3} dv$$

oder nach Ausführung der schon oben behandelten Integration:

$$k(t' - t) \sqrt{2q} = 2q^2 \left( \operatorname{tg} \frac{1}{2} v' + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'^3 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \right).$$

Hier suchen wir nun  $r$ ,  $r'$  und  $s$  einzuführen. Es ist:

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2$$

oder

$$4rr' \cos f^2 = (r + r')^2 - s^2 = (r + r' + s)(r + r' - s)$$

also:

$$2\sqrt{rr'} \cos f = \pm \sqrt{(r + r' + s)(r + r' - s)}. \quad (\text{a})$$

Ferner ist

$$\sin f^2 = \sin \frac{1}{2} (v' - v)^2 = \cos \frac{1}{2} v'^2 + \cos \frac{1}{2} v^2 - 2 \cos \frac{1}{2} (v' - v) \cos \frac{1}{2} v' \cos \frac{1}{2} v$$

oder

$$\sin f^2 = \frac{q}{r'} + \frac{q}{r} - 2 \cos f \frac{q}{\sqrt{rr'}} = \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'}}{rr'} q.$$

Setzt man hier für  $r + r'$  den Ausdruck

$$r + r' = \frac{1}{2} ((r + r' + s) + (r + r' - s))$$

und für  $2 \cos f \sqrt{rr'}$  den Ausdruck (a), so kommt, wenn noch die Wurzel ausgezogen wird:

$$2 \sqrt{rr'} \sin f = \sqrt{2q} (\sqrt{r + r' + s} \mp \sqrt{r + r' - s}). \quad (b)$$

Schreibt man nun den obigen Ausdruck für den doppelten parabolischen Sektor so:

$$k(t' - t) \sqrt{2q} = 2q^2 (\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v) \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'\right)$$

oder:

$$k(t' - t) \sqrt{2q} = 2q^2 (\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v' + \frac{1}{3} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v)^2\right)$$

und beachtet, daß:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \frac{\sin \frac{1}{2} (v' - v)}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'} = \frac{\sqrt{rr'} \sin f}{q}$$

und

$$1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v' = \frac{\cos \frac{1}{2} (v' - v)}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'} = \frac{\sqrt{rr'} \cos f}{q},$$

so findet man leicht:

$$\begin{aligned} k(t' - t) \sqrt{2q} &= 2q^2 \frac{\sqrt{rr'} \sin f}{q} \left( \frac{\sqrt{rr'} \cos f}{q} + \frac{1}{3} \frac{rr' \sin f^2}{q^2} \right) \\ &= 2 \sin f \cos f rr' + \frac{2}{3} \frac{\sin f^3}{q} \sqrt{rr'^3}. \end{aligned} \quad (c)$$

Ehe wir hier die Gl. (a) und (b) und damit die Sehne  $s$  einführen, womit, wie sich herausstellen wird, die Periheldistanz  $q$  eliminiert wird, wollen wir zeigen, daß die rechte Seite von (c) auf einen von  $q$  unabhängigen Ausdruck hingeführt werden kann. Zu dem Ende leiten wir einen merkwürdigen Ausdruck für  $q$  ab\*).

Setzt man für einen Augenblick

$$\frac{1}{2} (v' + v) = F \quad \text{neben} \quad \frac{1}{2} (v' - v) = f,$$

so wird:

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \frac{\cos \frac{1}{2} v'}{\cos \frac{1}{2} v} = \frac{\cos \frac{1}{2} (F + f)}{\cos \frac{1}{2} (F - f)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \frac{1}{2} f}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \frac{1}{2} f}$$

woraus:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{(\sqrt{r'} + \sqrt{r}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} f}.$$

Trägt man dies in

$$\cos F = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} F^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} F^2}, \quad \sin F = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} F}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} F^2}$$

ein, so erhält man rasch:

$$\cos F = \frac{2 \sqrt{rr'} - (r + r') \cos f}{r + r' - 2 \sqrt{rr'} \cos f}, \quad \sin F = \frac{(r' - r) \sin f}{r + r' - 2 \sqrt{rr'} \cos f}.$$

\*) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, p. 476.

Da nun

$$q = \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v' = \frac{1}{2} \sqrt{rr'} (\cos f + \cos F),$$

so folgt nach kurzer Reduktion

$$q = \frac{rr' \sin f^2}{r + r' - 2 \sqrt{rr'} \cos f}. \quad (d)$$

Wird dies im letzten Gliede von (c) eingetragen, so entsteht folgender Ausdruck für den doppelten parabolischen Sektor\*):

$$\frac{2}{3} \sqrt{rr'} \sin f (r + r' + \sqrt{rr'} \cos f) \quad (e)$$

und wenn dies noch mit

$$\sqrt{2q} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{rr'} \sin f}{\sqrt{r + r' - 2 \sqrt{rr'} \cos f}}$$

dividiert wird, folgender Ausdruck für die Zwischenzeit:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k(t' - t) = (r + r' + \sqrt{rr'} \cos f) \sqrt{r + r' - 2 \sqrt{rr'} \cos f}. \quad (f)$$

Bemerkenswert ist, daß er sowohl von  $q$  als von der Perihelzeit völlig unabhängig ist.

Wir führen in (c) jetzt durch (a) und (b) die Sehne ein; schneller kommt man zum Ziel, wenn man (c) in der Form (e) benutzt, wir wollen diese Zwischenrechnung aber nicht heranziehen. Wird zur Abkürzung

$$\sqrt{r + r' + s} = m, \quad \sqrt{r + r' - s} = n$$

gesetzt, so kommt:

$$2 \sqrt{rr'} \cos f = \pm mn, \quad 2 \sqrt{rr'} \sin f = \sqrt{2q} (m \mp n)$$

und daher:

$$k(t' - t) \sqrt{2q} = q \sqrt{2q} (m \mp n) \left( \pm \frac{mn}{2q} + \frac{1}{3} \frac{(m \mp n)^2}{2q} \right)$$

oder:

$$6k(t' - t) = (m \mp n) ((m \mp n)^2 \pm 3mn) = m^3 \mp n^3$$

oder:

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

Durch Einführung der Sehne hat sich also die Periheldistanz aus der ganzen Gleichung weggehoben und es ist eine Beziehung zwischen der Summe der Radienvektoren, der Sehne und der Zwischenzeit entstanden. Dieselbe wurde zuerst von *Euler* (Miscell. Berolin. T. VII, p. 20, 1743) aufgefunden, aber nicht benutzt; später hat *Lambert* (Orb. Com. § 83, 1761) sie selbständig entwickelt und ihre Wichtigkeit für die Bahnbestimmung gezeigt. *Lagrange* (l. c.), *Gauß* (Theoria mot. art. 108) und *Encke* (Berl. Jahrb. für 1833) haben analytische Ableitungen gegeben.

Was das doppelte Zeichen anlangt, so gilt hier dasselbe, was wir schon bei der Ellipse (Seite 170) fanden, nämlich daß das obere Zeichen für  $v' - v < 180^\circ$ , das untere für  $v' - v > 180^\circ$  zu nehmen ist. In der Anwendung kommt fast nur der erste Fall vor.

\*) *Lambert*, Orb. Com. § 29; *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, p. 478.

Lambert hat die Eulersche Gleichung 9) in eine Reihe entwickelt (Orb. Com. art. 125). Beachtet man nur das obere Zeichen, so wird, da die ungeraden Glieder sich aufheben

$$6k(t' - t) = 3 \left( s(r + r')^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4.6} s^3(r + r')^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3.5}{4.6.8.10} s^5(r + r')^{-\frac{7}{2}} - \dots \right),$$

oder

$$\frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = \left( \frac{s}{r + r'} \right) - \frac{1}{4.6} \left( \frac{s}{r + r'} \right)^3 - \frac{1.3.5}{4.6.8.10} \left( \frac{s}{r + r'} \right)^5 - \dots$$

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man, wenn

$$\frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = \eta$$

gesetzt wird:

$$\frac{s}{r + r'} = \eta + \frac{1}{24}\eta^3 + \frac{5}{384}\eta^5 + \frac{59}{9216}\eta^7 + \dots$$

Encke (Berl. Jahrbuch für 1833, S. 267) hat diese Reihe so geschrieben:

$$s = \frac{2k(t' - t)}{\sqrt{r + r'}} \left( 1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \frac{59}{9216}\eta^6 + \dots \right)$$

und zeigt, daß der zweite Faktor

$$\mu = 1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \frac{59}{9216}\eta^6 + \dots,$$

der bei kleinen Zwischenzeiten sich wenig von 1 unterscheiden wird, leicht tabuliert werden kann. In der Tat findet man dafür auf folgende Weise einen endlichen Ausdruck. Wird

$$\frac{s}{r + r'} = \sin \gamma$$

gesetzt, so geht 9) über in:

$$\frac{6k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} \mp (1 - \sin \gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

Da  $\gamma$  stets kleiner als  $90^\circ$  ist, so kann man

$$(1 \pm \sin \gamma) = 1 \pm 2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma = (\cos \frac{1}{2}\gamma \pm \sin \frac{1}{2}\gamma)^2$$

gebrauchen und findet damit:

$$\frac{6k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = (\cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\gamma)^3 \mp (\cos \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\gamma)^3.$$

Nimmt man zuerst das obere Zeichen und entwickelt die Kuben, so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{6k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} &= 6 \cos \frac{1}{2}\gamma^3 \sin \frac{1}{2}\gamma + 2 \sin \frac{1}{2}\gamma^3 \\ &= 6 \sin \frac{1}{2}\gamma - 4 \sin \frac{1}{2}\gamma^3. \end{aligned}$$

Dividiert man beiderseits mit  $2^{\frac{3}{2}}$  und setzt

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} = \sin x,$$

so folgt:

$$\frac{6}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = 3 \sin x - 4 \sin x^3 = \sin 3x.$$

Macht man also  $3x = \Theta$ , so wird folgendes System bestehen:

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} \\ \sin \frac{1}{2} \gamma &= \sqrt{2} \sin \frac{1}{3} \Theta \\ s &= (r + r') \sin \gamma, \end{aligned} \quad 10)$$

aus dem die Sehne bequem berechnet werden kann. Da andererseits nach obigem:

$$s = \frac{2k(t' - t)}{\sqrt{r + r'}} \mu, \quad 11)$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} \mu &= \sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \gamma} \\ &= 2 \sqrt{2} \sin \frac{1}{3} \Theta \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{3} \Theta} = 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3} \Theta \sqrt{\cos \frac{2}{3} \Theta} \end{aligned}$$

oder wenn nach der ersten Gl. 10)

$$\frac{2k(t' - t)}{2^{\frac{3}{2}}(r + r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} \sin \Theta$$

beachtet wird:

$$\mu = \frac{3 \sin \frac{1}{3} \Theta \sqrt{\cos \frac{2}{3} \Theta}}{\sin \Theta}.$$

Da

$$\sin \Theta = \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \eta,$$

so kann man  $\mu$  leicht mit dem Argument  $\eta$  tabulieren. Encke hat eine solche Tafel berechnet; sie ist als Taf. XXII der Sammlung einverleibt. Die Berechnung der Sehne gestaltet sich hiernach einfach so:

$$\eta = \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} \quad \log 2k = 8.5366114 \quad 12)$$

$$s = (r + r') \eta \mu$$

$\mu$  mit Arg.  $\eta$  aus Taf. XXII.

Reicht die Tafel nicht aus, so rechnet man nach 10) oder nach der geschlossenen Form:

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \frac{6}{\sqrt{8}} \frac{k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} \\ s &= \frac{6k(t' - t)}{\sqrt{r + r'}} \frac{\sin \frac{1}{3} \Theta \sqrt{\cos \frac{2}{3} \Theta}}{\sin \Theta}. \end{aligned} \quad 13)$$

Kommt das untere Zeichen in Frage, was selten genug der Fall sein wird, so gibt die Entwicklung:

$$\frac{6k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = 6 \cos \frac{1}{2} \gamma - 4 \cos \frac{1}{2} \gamma^3$$

oder

$$\frac{6k(t' - t)}{2^{\frac{3}{2}}(r + r')^{\frac{3}{2}}} = 3 \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} - 4 \left( \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} \right)^3,$$

oder wenn

$$\sin \frac{1}{3}\Theta = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}}$$

gesetzt wird, wie vorhin:

$$\left. \begin{aligned} \frac{6k(t' - t)}{2^{\frac{3}{2}}(r + r')^{\frac{3}{2}}} &= \sin \Theta \\ \cos \frac{1}{2}\gamma &= \sqrt{2} \sin \frac{1}{3}\Theta \\ s &= (r + r') \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

Da  $\gamma$  stets kleiner als  $90^\circ$  ist, so folgt aus der zweiten Gleichung 10), daß man im ersten Falle (oberes Zeichen:  $v' - v < 180^\circ$ ) für  $\Theta$  stets den Wert aus der ersten Gl. 10) zu nehmen habe, der kleiner ist als  $90^\circ$ ; dagegen folgt aus der zweiten Gl. 14) (unteres Zeichen:  $v' - v > 180^\circ$ ), daß man für  $\Theta$  den zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  sich ergebenden Wert zu wählen hat.

Übrigens folgt sowohl aus  $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2} \sin \frac{1}{3}\Theta$  als aus  $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2} \sin \frac{1}{3}\Theta$ :

$$\sin \gamma = 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3}\Theta \sqrt{\cos \frac{2}{3}\Theta}$$

und das System 13) gilt somit allgemein für beide Fälle, nur hat man für  $v' - v < 180^\circ$   $\Theta$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  und für  $v' - v > 180^\circ$   $\Theta$  zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  zu nehmen.

Die ursprüngliche Form 9) der Eulerschen Gleichung hat gerade für die Fälle, wo sie am häufigsten gebraucht wird, nämlich für kleine Werte der Sehne, den Nachteil, daß sich daraus  $6k(t' - t)$  als Differenz zweier nahe gleich großen Zahlen nur unsicher berechnen läßt; die Enckesche Form ist hiervon frei und wird daher jetzt ausschließlich bei der Bahnbestimmung benutzt. Man erhält dadurch direkt den Wert der Sehne aus den Radienvektoren und der Zwischenzeit; die umgekehrte Aufgabe, die Zwischenzeit aus der Sehne und den Radienvektoren zu berechnen, läßt sich zwar mittels Durchrechnung des Systems 10) in umgekehrter Reihenfolge lösen, kann aber durch Benutzung einer von Nicolai entworfenen Tafel (Astr. Nachr. Bd. 10, S. 233) wesentlich erleichtert werden (Taf. XXIV der Sammlung). Nach 13) ist:

$$k(t' - t) = \frac{1}{6} \sqrt{r + r'} s \frac{\sin \Theta}{\sin \frac{1}{3}\Theta \sqrt{\cos \frac{2}{3}\Theta}} = \sqrt{r + r'} s \frac{1}{2\mu}$$

und außerdem findet man leicht

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\gamma \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma \right) = Q;$$

man kann also  $Q$  mit dem Argument  $\log \sin \gamma$  tabulieren und hat dann einfach:

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{s}{r + r'} \\ k(t' - t) &= \sqrt{r + r'} s Q \end{aligned} \right\} \quad 15)$$

$Q$  mit Arg.  $\log \sin \gamma$  aus Taf. XXIV.

Die Benutzung der Tafel hebt den oben berührten Mißstand bei der Berechnung der Zwischenzeit auf; in Fällen, wo die Tafel nicht ausreicht, kann man direkt nach g) rechnen.

**57. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Parabel.** Wird wie früher der Winkel zwischen den beiden Radienvektoren  $r$  und  $r'$  gleich  $2f$  gesetzt, so wird nach Seite 193 die Fläche des parabolischen Sektors

$$\frac{1}{3} \sqrt{rr'} \sin f (r + r' + \sqrt{rr'} \cos f)$$

und die Fläche des zugehörigen Dreiecks

$$rr' \sin f \cos f,$$

also das Verhältnis beider

$$y = \frac{1}{3} \frac{r + r' + \sqrt{rr'} \cos f}{\sqrt{rr'} \cos f}. \quad 1)$$

Man kann diesen Ausdruck noch mannigfach umgestalten. Sind die wahren Anomalien  $v$  und  $v'$ , so wird:

$$r = q \sec \frac{1}{2} v^2$$

$$r' = q \sec \frac{1}{2} v'^2$$

$$f = \frac{1}{2} (v' - v)$$

und daher:

$$y = \frac{1}{3} \frac{\sec \frac{1}{2} v^2 + \sec \frac{1}{2} v'^2 + \sec \frac{1}{2} v \sec \frac{1}{2} v' \cos \frac{1}{2} (v' - v)}{\sec \frac{1}{2} v \sec \frac{1}{2} v' \cos \frac{1}{2} (v' - v)}$$

oder

$$y = \frac{1}{3} \frac{3 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'}.$$

Setzt man für den Augenblick

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = x$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' = x + \zeta,$$

so wird

$$y = \frac{3 + 3x^2 + 3x\zeta + \zeta^2}{3 + 3x^2 + 3x\zeta} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\zeta^2}{1 + x^2 + x\zeta}$$

oder

$$y = 1 + \frac{1}{3} \frac{(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v)^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'} = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} f^2 (1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v').$$

Ersetzt man hier  $1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v'$  durch

$$1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} (f + \frac{1}{2} v) = \frac{\sec \frac{1}{2} v^2}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} f},$$

so kommt

$$y = 1 + \frac{1}{3} \frac{\sec \frac{1}{2} v^2 \operatorname{tg} f^2}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} f} \quad 2)$$

(Lambert, Beiträge Teil 3, Seite 266; Ostwald, Klassiker Nr. 133, Seite 137); ersetzt man es aber durch den oben bereits abgeleiteten Wert

$$1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v' = \frac{\sqrt{rr'} \cos f}{q},$$

so erscheint:

$$y = 1 + \frac{1}{3} \frac{\sin f^2}{q \cos f} \sqrt{rr'}. \quad 3)$$

Man kann diesen Ausdruck direkt aus (c) (Seite 192) ableiten, wenn man durch die doppelte Fläche des Dreiecks  $2rr' \sin f \cos f$  dividiert. Endlich kann man in 1) auch den früher bereits benutzten Winkel  $\gamma$ , der durch

$$\sin \gamma = \frac{s}{r + r'}$$

definiert ist, einführen und dadurch einen besonders einfachen Ausdruck erhalten. Ersetzt man nämlich in

$$\cos \gamma^2 = 1 - \sin \gamma^2 = \frac{(r + r')^2 - s^2}{(r + r')^2}$$

$s^2$  durch

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2,$$

so folgt:

$$\cos \gamma^2 = \frac{4rr' \cos f^2}{(r + r')^2}$$

oder

$$\sqrt{rr'} \cos f = \frac{1}{2}(r + r') \cos \gamma.$$

Dies gibt in 1) eingetragen:

$$y = \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{1}{2} \cos \gamma}{\frac{1}{2} \cos \gamma}$$

oder

$$y = \frac{1}{3} (1 + 2 \sec \gamma) \quad 4)$$

(Encke, Berl. Jahrb. f. 1833, Seite 290).

Da nach 12) (Seite 195)

$$\sin \gamma = \frac{s}{r + r'} = \eta \mu,$$

so kann man  $y$  ebenso wie  $\mu$  mit dem Argument

$$\eta = \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}}$$

tabulieren und erhält so  $y$  gleichzeitig mit der Sehne. Diese Tabulierung ist in Taf. XXII<sup>a</sup> ausgeführt.

**58. Bestimmung der parabolischen Elemente.** Die Ermittlung der Elemente der Parabel durch zwei ihrer Größe und Lage nach gegebene Radienvektoren  $r_1$  und  $r_2$  erledigt sich nach den vorausgehenden Entwicklungen sehr rasch. Ein erster ganz einfacher Weg ist, von den Gleichungen:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} v_2}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

auszugehen; setzt man nämlich

$$v_2 = v_1 + 2f,$$

wo  $2f$  wie oben der von den beiden Radienvektoren eingeschlossene Winkel ist, so wird aus der zweiten Gleichung

$$\frac{\cos \frac{1}{2} v_1 \cos f - \sin \frac{1}{2} v_1 \sin f}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos f - \frac{\sin \frac{1}{2} v_1}{\sqrt{q}} \sin f = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cotg f - \frac{1}{\sqrt{r_2}} \operatorname{cosec} f.$$

Dazu

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

1)

liefert die Mittel  $q$  und  $v_1$  zu berechnen. Aus

$$\varpi = s_1 - v_1 \quad 2)$$

folgt dann die Länge des Perihels, und aus:

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1^3 = \frac{t_1 - T}{q^{\frac{3}{2}}} = M_1 \quad 3)$$

eventuell mit Benutzung der Barkerschen Tafel die Durchgangszeit durchs Perihel

$$T = t_1 - M_1 q^{\frac{3}{2}}.$$

$\varpi$  und  $T$  ergeben sich auch aus den entsprechenden Gleichungen für  $v_2$ , wenn man dieses durch  $v_1 + 2f$  berechnet.

Ein anderer Weg bietet sich durch die Zusammenstellung folgender oben (Seite 192) abgeleiteter Gleichungen dar:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f) \sin F &= (r_2 - r_1) \sin f \\ (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f) \cos F &= 2\sqrt{r_1 r_2} - (r_1 + r_2) \cos f \\ (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f) q &= r_1 r_2 \sin^2 f. \end{aligned} \quad 4)$$

Aus den beiden ersten folgt  $F$  und  $r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f$ , welche letztere Größe zur Kontrolle auch direkt berechnet werden kann, und aus der dritten ergibt sich  $q$ . Aus:

$$v_1 = F - f, \quad v_2 = F + f$$

ergeben sich dann  $v_1$  und  $v_2$ , mittels derer man wie vorhin zu  $\varpi$  und  $T$  gelangt.

Ein dritter Weg endlich bedient sich des Verhältnisses Sektor durch Dreieck  $y$ . Dieses spielt also hier nicht die große Rolle wie bei der elliptischen Bewegung, sondern kann entbehrt werden, wenn man die anderen Methoden anwendet. Da einerseits

$$\frac{k(t_2 - t_1) \sqrt{2q}}{r_1 r_2 \sin 2f} = y$$

und andererseits nach Gl. 4) (Seite 198)

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{s}{r_1 + r_2} = r_1 \mu \\ y &= \frac{1}{3} (1 + 2 \sec \gamma) \end{aligned}$$

ist, wo die Sehne  $s$  bei der Bahnbestimmung ohnehin berechnet werden muß, so folgt:

$$2q = \left( \frac{r_1 r_2 \sin z f \cdot y}{k(t_2 - t_1)} \right)^2. \quad 7)$$

Die übrigen Elemente bestimmt man wie vorhin. In der Regel wird man sich also des Ausdruckes 7) nur zur Kontrolle bedienen.

**59. Das Verhältnis der Dreiecksflächen in der Parabel** braucht nicht besonders abgeleitet zu werden, denn die Resultate der Nr. 52 gelten ihrer Entstehung gemäß für alle um die Sonne laufenden Himmelskörper.

Ebenso können die Beziehungen zwischen drei Radienvektoren der Parabel unmittelbar den Entwicklungen der Nr. 54 entnommen werden, indem man  $\frac{1}{a} = 0$  setzt. Man erhält aus Formel 3) (Seite 184)

$$r_1 r_1^2 + r_3 r_3^2 = r_2 r_2^2 + \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2}, \quad 1)$$

genau bis auf Glieder dritter Ordnung inkl., und aus Formel 5) (Seite 185)

$$A_1 r_1^2 \left( 1 - \frac{2B_1}{r_1^3} \right) + A_3 r_3^2 \left( 1 - \frac{2B_3}{r_3^3} \right) = r_2^2 \left( 1 + \frac{2B_2}{r_2^3} \right), \quad 2)$$

genau bis auf Glieder vierter Ordnung inkl. Die Anwendung beider setzt einen Näherungswert des gesuchten Radiusvektors voraus.

## Abschnitt XIII.

## Die Bewegung in der Hyperbel.

**60. Die Bewegung in der Hyperbel.** Im Fall der Hyperbel, wo die Exzentrizität  $e$  größer ist als 1, wird, wie wir oben (Seite 128) bereits konstatiert haben, die Konstante  $a$  negativ. Die bei der Ellipse eingeführten Hilfsgrößen  $\varphi$  und  $E$  würden also imaginär. Es empfiehlt sich daher, andere Hilfsgrößen zu gebrauchen. Führt man zunächst den Winkel  $\psi$  ein, definiert durch

$$\cos \psi = \frac{1}{e}, \quad 1)$$

so wird die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

sofort in folgender Form geschrieben werden können:

$$r = \frac{p \cos \psi}{\cos \psi + \cos v} = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v + \psi) \cos \frac{1}{2}(v - \psi)}, \quad 2)$$

aus der ersichtlich ist, daß von  $v = 0$  bis  $v = 180^\circ - \psi$  der Radiusvektor  $r$  stets wachsende positive Werte annimmt, daß für  $v = 180^\circ - \psi$  selbst der Radiusvektor unendlich groß wird, daß er dann von da an bis  $v = 180^\circ + \psi$  stets negative Werte annimmt, die einem zweiten hier nicht weiter in Betracht kommenden Zweig der Kurve entsprechen (siehe Seite 128), und daß von  $v = 180^\circ + \psi$  bis  $360^\circ$  wieder positive Werte von  $r$  sich ergeben. Wir betrachten hier nur den Zweig der Kurve, der zu Werten von  $v$  zwischen  $180^\circ + \psi$  und  $180^\circ - \psi$  gehört; für die letztere Grenze verschwindet der erste der beiden Faktoren  $\cos \frac{1}{2}(v + \psi)$  und  $\cos \frac{1}{2}(v - \psi)$  und für die erstere der zweite; für  $v = 0$  werden beide einander gleich. Setzt man daher

$$u = \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} \quad 3)$$

so wird  $u = 1$  für  $v = 0$ , und gleichen Werten von  $v$ , aber von entgegengesetzten Vorzeichen, entsprechen reziproke Werte von  $u$ ; ferner während  $v$  von  $180^\circ + \psi$  bis  $180^\circ - \psi$  sich bewegt, geht  $u$  von Null bis Unendlich. Diese Größe empfiehlt sich also als Hilfsgröße. Wir führen gleich noch eine zweite ein, die der exzentrischen Anomalie bei der Ellipse entspricht und definiert ist durch

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v. \quad 4)$$

Deren geometrische Bedeutung haben wir bereits Seite 119 kennen gelernt. Endlich wollen wir den absoluten Wert der Konstanten  $a$ , die negativ ist und nach wie vor als große Halbachse bezeichnet werden soll, mit  $a$  bezeichnen. Dann ist

$$p = a(1 - e^2) = -a(1 - e^2) = a(e^2 - 1) = a \operatorname{tg}^2 \psi$$

oder

$$a = p \operatorname{cotg} \psi^2; \quad 5)$$

die Periheldistanz  $q$  wird:

$$q = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2} \psi^2} = \frac{p \cos \psi}{1 + \cos \psi} = \frac{p}{e + 1} = a(e - 1).$$

Zwischen  $u$  und  $F$  bestehen folgende Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \frac{u-1}{u+1} \quad (6)$$

und umgekehrt:

$$u = \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} F}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} F} = \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F), \quad (7)$$

und ferner noch:

$$\frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) = \frac{1 + \cos \psi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v + \psi) \cos \frac{1}{2}(v - \psi)} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} F = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right).$$

Jetzt können leicht die Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten einerseits und den Hilfsgrößen  $F$  oder  $u$  andererseits aufgestellt werden. Wenn man in 8) auf beiden Seiten einmal 1 subtrahiert und dann addiert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{\frac{p}{(e-1) \cos F}} \sin \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{a(e+1)}{\cos F}} \sin \frac{1}{2} F \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{\frac{p}{(e+1) \cos F}} \cos \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{a(e-1)}{\cos F}} \cos \frac{1}{2} F \end{aligned} \quad (9)$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} (u-1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a(e+1)}{u}} (u-1) \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} (u+1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a(e-1)}{u}} (u+1). \end{aligned} \quad (10)$$

Aus der Multiplikation der Gleichungen dieser beiden Gruppen erhält man die ersten Gleichungen der beiden nachstehenden Systeme und aus der Verbindung von 2) und 8) die zweiten:

$$\begin{aligned} r \sin v &= p \cotg \psi \operatorname{tg} F = a \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} F \\ r \cos v &= p \cotg \psi^2 \left( e - \frac{1}{\cos F} \right) = a \left( e - \frac{1}{\cos F} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} r \sin v &= \frac{1}{2} p \cotg \psi \left( u - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \psi \left( u - \frac{1}{u} \right) \\ r \cos v &= \frac{1}{2} p \cotg \psi^2 \left( 2e - u - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{2} a \left( 2e - u - \frac{1}{u} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Endlich erhält man durch Quadrieren und Addieren von 9) bzw. 10)

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} r &= a \left( \frac{e}{\cos F} - 1 \right) \\ r &= \frac{1}{2} a \left( e \left( u + \frac{1}{u} \right) - 2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

und aus 6)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v &= \operatorname{cotg}^{\frac{1}{2}} \psi \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} F = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} F \\ \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v &= \operatorname{cotg}^{\frac{1}{2}} \psi \frac{u-1}{u+1} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{u-1}{u+1} \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die Integration der Gl. 9) (Seite 127) im Falle der Hyperbel leicht erledigt werden. Wir erhalten dadurch die Beziehung zwischen der Zeit und den Hilfsgrößen  $u$  oder  $F$ , welche in Verbindung mit einer geeigneten Auswahl aus den Formeln 9) bis 14) die ganze Aufgabe lösen. Wird die Formel 7)

$$u = \frac{\cos^{\frac{1}{2}}(v - \psi)}{\cos^{\frac{1}{2}}(v + \psi)}$$

logarithmisch differenziert:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}(v + \psi) - \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}(v - \psi)) dv$$

und dann mittels 2) transformiert:

$$\frac{du}{u} = \frac{r \operatorname{tg} \psi}{p} dv,$$

so kann man die Gleichung 9)

$$r^2 dv = k \sqrt{1+m} \sqrt{p} dt$$

zunächst in der Form:

$$\frac{rp}{\operatorname{tg} \psi} \frac{du}{u} = k \sqrt{1+m} \sqrt{p} dt$$

und nach Substitution von  $r$  aus 13) und  $p$  aus 5) in der Form

$$a^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} e \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right) - \frac{1}{u} \right) du = k \sqrt{1+m} dt$$

schreiben, die leicht der Integration unterworfen werden kann:

$$\left( \frac{1}{2} e \left( u - \frac{1}{u} \right) - \log \operatorname{nat.} u \right) = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t + c.$$

Im Perihel wird  $u = 1$ , also die linke Seite dieser Gleichung Null. Nennt man also die Durchgangszeit durchs Perihel  $T$ , so wird die Integrationskonstante

$$c = - \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} T;$$

multipliziert man gleichzeitig mit dem Modulus Mod der Briggschen Logarithmen, so erscheint die Gleichung schließlich in der Form:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Mod} e \left( u - \frac{1}{u} \right) - \operatorname{Log} u = \frac{\operatorname{Mod} k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T) \quad 15)$$

oder wenn statt  $u$  durch 7) und 8)  $F$  eingeführt wird:

$$\operatorname{Mod} e \operatorname{tg} F - \operatorname{Log} \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F) = \frac{\operatorname{Mod} k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T). \quad 16)$$

Durch die wieder am zweckmäßigsten durch Versuche geleistete Auflösung dieser transzendenten Gleichungen wird  $u$  bzw.  $F'$  durch die Zeit bestimmt und hierauf  $r$  und  $v$  durch eines der Systeme 9) bis 14). Ist umgekehrt die wahre Anomalie  $v$  gegeben und soll daraus die Zeit ermittelt werden, so wird man  $u$  aus 7) (und gleichzeitig  $r$  aus 2)) und dann  $t - T$  aus 15) oder man wird  $F'$  aus 6) (und  $r$  aus 11)) und dann  $t - T$  aus 16) bestimmen.

Wir gehen auf diese Rechnungen hier nicht näher ein, da hyperbolische Bewegungen am Himmel nur unter Verhältnissen vorkommen, wo man von anderen Vorschriften Gebrauch machen muß, deren Erläuterung erst später (Nr. 64) zu geben ist.

**61. Das Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Hyperbel** kann in ganz ähnlicher Weise behandelt werden, wie dieselbe Aufgabe bei der Ellipse (Nr. 49). Indem wir hier nur der Analyse von Gauß (Theoria motus art. 99—103) folgen, behalten wir die bei der Ellipse eingeführten Bezeichnungen  $p, v, v', f = \frac{1}{2}(v' - v), F' = \frac{1}{2}(v' + v)$  (nicht zu verwechseln mit dem Hilfswinkel  $F'$ ),  $r, r', t' - t$  bei, nennen die große Halbachse, wie in voriger Nummer,  $-a$  und setzen die Exzentrizität  $e = \frac{1}{\cos \psi}$ ; die Hilfsgröße  $u$  sei für den ersten Ort mit  $\frac{C}{e}$ , für den zweiten mit  $Ce$  bezeichnet. Dann geben die Gl. 10) (S. 202)

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{2}v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e-1)a}{r}} \left( \sqrt{\frac{C}{e}} + \sqrt{\frac{e}{C}} \right) \\ \sin \frac{1}{2}v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e+1)a}{r}} \left( \sqrt{\frac{C}{e}} - \sqrt{\frac{e}{C}} \right) \\ \cos \frac{1}{2}v' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e-1)a}{r'}} \left( \sqrt{Ce} + \sqrt{\frac{1}{Ce}} \right) \\ \sin \frac{1}{2}v' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e+1)a}{r'}} \left( \sqrt{Ce} - \sqrt{\frac{1}{Ce}} \right),\end{aligned}$$

woraus man sofort ableitet:

$$\begin{aligned}\sin F' &= \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{e^2-1}{rr'}} \left( C - \frac{1}{C} \right) \\ \sin f &= \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{e^2-1}{rr'}} \left( e - \frac{1}{e} \right) \\ \cos F' &= \frac{a}{2\sqrt{rr'}} \left( e \left( C + \frac{1}{C} \right) - \left( C + \frac{1}{C} \right) \right) \\ \cos f &= \frac{a}{2\sqrt{rr'}} \left( e \left( C + \frac{1}{C} \right) - \left( e + \frac{1}{e} \right) \right); \end{aligned}$$

ferner gibt die Gl. 13) (S. 202)

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= \frac{1}{2}e \left( \frac{C}{e} + \frac{e}{C} \right) - 1 \\ \frac{r'}{a} &= \frac{1}{2}e \left( Ce + \frac{1}{Ce} \right) - 1,\end{aligned}$$

woraus

$$\frac{r' - r}{a} = \frac{1}{2}e \left( C - \frac{1}{C} \right) \left( e - \frac{1}{e} \right)$$

$$\frac{r' + r}{a} = \frac{1}{2}e \left( C + \frac{1}{C} \right) \left( e + \frac{1}{e} \right) - 2.$$

Verbindet man die letzte Gleichung mit obiger für  $\cos f$ , so folgt:

$$a = \frac{r' + r - \left( e + \frac{1}{e} \right) \cos f \sqrt{rr'}}{\frac{1}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right)^2}$$

oder wenn wie bei der Ellipse

$$\frac{r + r'}{4\sqrt{rr'} \cos f} - \frac{1}{2} = l$$

gesetzt wird, indem wir nur den Fall eines positiven  $\cos f$ , also  $v' - v < 180^\circ$  betrachten:

$$a = \frac{8 \left( l - \frac{1}{4} \left( \sqrt{e} - \sqrt{\frac{1}{e}} \right)^2 \right) \cos f \sqrt{rr'}}{\left( e - \frac{1}{e} \right)^2}.$$

Subtrahiert man die für die Zeiten  $t$  und  $t'$  angesetzten Gleichungen 15) (Seite 203):

$$\frac{1}{2}e \left( \frac{C}{e} - \frac{e}{C} \right) - \log \frac{C}{e} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T)$$

$$\frac{1}{2}e \left( Ce - \frac{1}{Ce} \right) - \log Ce = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} (t' - T)$$

voneinander:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}e \left( C + \frac{1}{C} \right) \left( e - \frac{1}{e} \right) - 2 \log e,$$

eliminiert  $C$  mittels obiger Gleichung für  $\cos f$ :

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left( e - \frac{1}{e} \right) \cos f \sqrt{rr'}}{a} + \frac{1}{2} \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right) - 2 \log e,$$

und ersetzt endlich  $a$  durch den oben abgeleiteten Wert, so erscheint, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{4} \left( \sqrt{e} - \sqrt{\frac{1}{e}} \right)^2 = z, \quad \frac{e^2 - \frac{1}{e^2} - 4 \log e}{\frac{1}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right)^3} = Z, \quad \frac{k^2(1+m)(t' - t)^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3} = m$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{m} = \sqrt{l - z} + (\sqrt{l - z})^3 Z,$$

worin  $Z$  folgende Funktion von  $z$  ist:

$$Z = \frac{(1 + 2z)\sqrt{z} + z^2 - \log(\sqrt{1+z} + \sqrt{z})}{2(z + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Bedeutung von  $e$  ist es um so weniger von 1 verschieden, je näher die beiden Orte einander liegen. Nehmen wir diesen Fall an, so wird  $x$  eine kleine Größe sein, nach deren Potenzen wir  $Z$  entwickeln wollen. Differenziert man

$$2(x + x^2)^{\frac{3}{2}} Z = (1 + 2x) \sqrt{x + x^2} - \log(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}),$$

so folgt:

$$2(x + x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dZ}{dx} + 3Z(1 + 2x) \sqrt{x + x^2} = 4\sqrt{x + x^2}$$

oder

$$(2x + 2x^2) \frac{dZ}{dx} = 4 - (3 + 6x)Z.$$

Daraus sieht man, daß  $Z$  in derselben Weise von  $-x$  abhängt, wie bei der Ellipse (siehe Seite 158)  $X$  von  $x$ , so daß man ebenso wie dort erhält:

$$Z = \frac{4}{3} - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^2 - \dots;$$

und wenn

$$Z = \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{6}{5}(x + \zeta)}$$

gesetzt wird, so wird  $\zeta$  sich ebenso durch  $-x$  bestimmen, wie dort  $\xi$  durch  $x$ . Gauß hat auch für  $\zeta$  eine Tafel berechnet, die sich in Taf. XX unter der Überschrift »Hyperbel« vorfindet und in die mit  $x$  als Argument eingegangen werden muß.

Diese Entwicklungen vorausgesetzt, quadrieren wir den Ausdruck für das Verhältnis des Sektors zum Dreieck (siehe Gl. 1) Seite 155)

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t' - t)}{rr' \sin 2f},$$

ersetzen  $p$  durch  $a(e^2 - 1)$  und führen die vorhin definierte Abkürzung  $m$  ein, dann kommt zunächst:

$$y^2 = m \frac{2 \cos f a (e^2 - 1)}{\sin^2 f \sqrt{rr'}}.$$

Wird hier

$$\sin^2 f = \frac{1}{4} a^2 \frac{e^2 - 1}{rr'} \left( e - \frac{1}{c} \right)^2$$

und

$$a = \frac{8(l-x) \cos f \sqrt{rr'}}{\left( e - \frac{1}{c} \right)^2}$$

eingetragen, so folgt

$$y^2 = \frac{m}{l-x} \quad \text{oder} \quad -x = \frac{m}{y^2} - l. \quad \text{I.}$$

Wird dies mit der vorhin abgeleiteten Gleichung

$$\sqrt{m} = \sqrt{l-x} + (\sqrt{l-x})^3 Z$$

verbunden, so ergibt sich

$$y - 1 = \frac{m}{y^2} Z, \quad \text{II.}$$

d. h. wir haben in I. und II. dieselben Gleichungen zur Bestimmung von  $y$ , wie für die Ellipse, nur daß an Stelle von  $x$  tritt  $-x$ ; es kann also zu ihrer Auflösung dasselbe Verfahren eingeschlagen werden, wie für die Ellipse, d. h. wir setzen

$$h = \frac{m}{\frac{s}{6} + l + \zeta},$$

entnehmen damit, zuerst  $\zeta = 0$  setzend, aus Tafel XIX  $y^2$ , berechnen damit  $x$  aus

$$-x = \frac{m}{y^2} - l,$$

entnehmen mit  $x$  als Argument aus Tafel XX, Kolumne Hyperbel,  $\zeta$ , berechnen damit einen genaueren Wert von  $h$  usf.

Da  $x$  positiv ist, so ist die Größe

$$\frac{m}{y^2} - l$$

im Fall der Hyperbel negativ; im Fall der Ellipse ist sie positiv, da  $x$  (Seite 158) positiv ist. In der Parabel, wo  $e = 1$ ,  $\psi = 0$ , also  $u = 1$  und  $c = 1$  wird, folgt  $x = 0$ . Diese Größe gibt also ein Kriterium für die Art des Kegelschnittes ab, indem

$$\begin{aligned} \frac{m}{y^2} - l &= \text{positiv einer Ellipse,} \\ &= 0 \quad \text{einer Parabel,} \\ &= \text{negativ einer Hyperbel} \end{aligned}$$

entspricht.

**62. Die Bestimmung der Elemente der Hyperbel** erledigt sich in derselben Weise wie bei der Ellipse. Zunächst ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{4} \left( \sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 = x$$

der Wert von  $c$

$$c = 1 + 2x + 2\sqrt{x + x^2};$$

durch Einführung des Hilfswinkels  $n$

$$\operatorname{tg} 2n = 2\sqrt{x + x^2}$$

wird bequemer:

$$c = \operatorname{tg} 2n + \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2n^2} = \operatorname{tg} (45^\circ + n). \quad 1)$$

Weiter wird aus der Gl. Seite 206:

$$p = \left( \frac{r_1 r_2 y \sin 2f}{k(t_2 - t_1)} \right)^2 \quad 2)$$

oder auch, wenn  $m$  eingeführt wird:

$$p = \frac{y^2 \sin f \operatorname{tg} f \sqrt{r_1 r_2}}{2m} = \frac{\sin f \operatorname{tg} f \sqrt{r_1 r_2}}{2(l - x)}.$$

Da  $c - \frac{1}{c} = \operatorname{tg} (45^\circ + n) - \operatorname{cotg} (45^\circ + n) = 2 \operatorname{tg} 2n$ , so folgt aus der Gl. Seite 205:

$$a = \frac{2(l - x) \cos f \sqrt{r_1 r_2}}{\operatorname{tg} 2n^2}$$

und daher

$$\sqrt{e^2 - 1} = \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{\operatorname{tg} f \operatorname{tg} 2n}{2(l-x)}, \quad 3)$$

woraus sich die Exzentrizität ergibt. Die wahren Anomalien  $v_1$  und  $v_2$  bekommt man folgendermaßen. Wenn man aus den Gleichungen Seite 204 und 205

$$\begin{aligned} \sin f &= \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{e^2 - 1}{r_1 r_2}} \left( c - \frac{1}{c} \right) \\ \frac{r_2 - r_1}{a} &= \frac{1}{2} e \left( C - \frac{1}{C} \right) \left( c - \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

$c - \frac{1}{c}$  eliminiert, so erhält man zur Bestimmung von  $C$  die Gleichung:

$$C - \frac{1}{C} = \frac{(r_2 - r_1) \sqrt{e^2 - 1}}{e \sin f \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{\sin \psi (r_2 - r_1)}{\sin f \sqrt{r_1 r_2}}$$

oder:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2N &= \frac{\sin \psi (r_2 - r_1)}{2 \sin f \sqrt{r_1 r_2}} \\ C &= \operatorname{tg} (45^\circ + N) \end{aligned} \quad 4)$$

oder wenn, wie bei der Ellipse, der Hilfswinkel  $\omega$  durch

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \omega) = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2N &= \frac{2 \sin \psi \operatorname{tg} 2\omega}{\sin f \cos 2\omega} \\ C &= \operatorname{tg} (45^\circ + N). \end{aligned} \quad 4^a)$$

Die für die beiden Örter geltenden Hilfsgrößen

$$u_1 = \frac{C}{c} \quad \text{und} \quad u_2 = Ce$$

sind jetzt als bekannt anzunehmen und ergeben durch die Gleichung 14) (Seite 203)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \frac{u - 1}{u + 1} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi}$$

die wahren Anomalien, nämlich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 &= \frac{C - c}{C + c} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} = \frac{\sin(N - n)}{\cos(N + n)} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 &= \frac{Ce - 1}{Ce + 1} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} = \frac{\sin(N + n)}{\cos(N - n)} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} \end{aligned} \quad 5)$$

Kontrolle  $v_2 - v_1 = 2f$ .

Man kann sich auch der Hilfsgröße  $F$  bedienen und nach

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F_1) &= u_1 = \frac{C}{c} \\ \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F_2) &= u_2 = Ce \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} F_1 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} F_2 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi} \end{aligned}$$

rechnen, doch ist der erste Weg der kürzere. Aus  $v_1$  und  $v_2$  folgt die Länge des Perihels

$$\varpi = s_1 - v_1 = s_2 - v_2. \quad (6)$$

Die Durchgangszeit durchs Perihel endlich ergibt sich aus Gl. 15) (Seite 203), angewendet auf die beiden Örter:

$$t_1 - T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \text{Mod} \frac{e}{2} \left( u_1 - \frac{1}{u_1} \right) - \text{Log} u_1 \right)$$

$$t_2 - T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \text{Mod} \frac{e}{2} \left( u_2 - \frac{1}{u_2} \right) - \text{Log} u_2 \right)$$

oder nach Einsetzung der Werte von  $u_1$  und  $u_2$ :

$$t_1 - T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \frac{2e \cos(N+n) \sin(N-n)}{\cos 2N \cos 2n} \text{Mod} - \text{Log} \frac{\text{tg}(45^\circ + N)}{\text{tg}(45^\circ + n)} \right)$$

$$t_2 - T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \frac{2e \cos(N-n) \sin(N+n)}{\cos 2N \cos 2n} \text{Mod} - \text{Log} (\text{tg}(45^\circ + N) \text{tg}(45^\circ + n)) \right)$$

Da die halbe Summe dieser beiden Ausdrücke

$$\frac{t_1 + t_2}{2} - T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \frac{e \text{tg} 2N}{\cos 2n} \text{Mod} - \text{Log} \text{tg}(45^\circ + N) \right) \quad (7)$$

sich am einfachsten rechnet, wird man sie zur Berechnung von T verwenden. Die Differenz

$$t_2 - t_1 = \frac{2 a^{\frac{3}{2}}}{k \text{Mod}} \left( \frac{e \text{tg} 2n}{\cos 2N} \text{Mod} - \text{Log} \text{tg}(45^\circ + n) \right)$$

kann dann zur Kontrolle dienen.

**63. Der Lambertsche Satz für die Hyperbel.** Wie für die Ellipse und Parabel kann auch für die Hyperbel eine Beziehung zwischen der Zwischenzeit, der Summe der Radienvektoren und der Sehne abgeleitet werden, welche nur mehr die Halbachse enthält. Die direkte Ableitung ist ganz ähnlich der für die Ellipse durchgeführten (siehe Gauß, Theoria motus art. 109); wir wollen hier darauf wegen der seltenen Anwendung nicht eingehen und bemerken nur, daß man den Satz für die Hyperbel erhält, wenn man in dem für die Ellipse statt  $a - a$  setzt. Es wird:

$$k \sqrt{1+m} (t' - t) = \frac{1}{6} \left( (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{80} \frac{1}{a} \left( (r+r'+s)^{\frac{5}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$+ \frac{3}{1792} \frac{1}{a^2} \left( (r+r'+s)^{\frac{7}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{7}{2}} \right) - \dots$$

und das obere Zeichen gilt für  $v' - v < 180^\circ$  und das untere für  $v' - v > 180^\circ$ .

## Abschnitt XIV.

## Bewegung in parabelnahen Bahnen.

**64. Bewegung in parabelnahen Bahnen.** Die Formeln, die wir für die Ermittlung der Polarkoordinaten  $v$  und  $r$  aus der Zeit in der elliptischen und hyperbolischen Bewegung abgeleitet haben, versagen in rechnerischer Beziehung, sobald die Exzentrizität  $e$  sich der Einheit nähert; man muß daher für diese, in der Natur nicht seltenen, sogenannten »parabelnahen« Bahnen, besondere Vorschriften aufstellen. Wenn man die Keplersche Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

differenziert:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E},$$

so erkennt man, daß bei diesen Bahnen für kleine Werte von  $E$  die versuchsweise Auflösung dieser Gleichung deshalb mißlich wird, weil  $M$  als Differenz zweier nahe gleich großen Größen zu rechnen ist und weil der Korrektionsfaktor zur Verbesserung von  $E$ , nämlich  $1 : (1 - e \cos E)$  groß wird. Schreibt man mit *Bruns* (Åstrand, Hilfstafeln, S. IX) die Keplersche Gleichung so:

$$M = E - \sin E + (1 - e) \sin E$$

und beschafft sich ein Mittel, um  $E - \sin E$  sicher zu bilden, so wird der erstgenannte Übelstand vermieden, und man kann mit Hilfe der *regula falsi* rasch zum Ziel kommen. (Siehe »Tafeln« S. 17.) Andere Verfahren beruhen auf dem Umstand, daß die wahre Anomalie in der parabelnahen Bahn sich nur wenig von der parabolischen von gleicher Periheldistanz unterscheidet und daß daher der Unterschied zwischen beiden als Reihe, die nach einer passenden Funktion der Exzentrizität fortschreitet, entwickelt und tabuliert werden kann; es ist dies das *Simpson-Besselsche* Verfahren (Bessel, Ges. Abh. Bd. 1, S. 9), wo nach Potenzen von  $1 - e$  entwickelt wird, und das konvergenterere und genauere *Brünnowsche* Verfahren (Astr.

Notices Nr. 2 und 23), wo nach Potenzen von  $\frac{1 - e}{1 + e}$  entwickelt wird. *Oppolzer*

(Bahnbestimmung Bd. I, S. 65) und *W. Ebert* (Klinkerfues, Bahnbest. 2. Aufl. S. 49) führen die Gleichung zwischen  $t$  und  $v$  direkt auf die Form der Barkerschen Gleichung über. Vor allen diesen Methoden behauptet die *Gaußsche* (Theoria motus Nr. 37—46) den Vorzug der Allgemeinheit und Schärfe und soll daher allein hier zur Darstellung kommen.

Wenn  $E$  groß ist (etwa  $> 60^\circ$ ), dann treten die oben genannten Hindernisse der Auflösung der Keplerschen Gleichung nicht auf; die jetzt auseinanderzusetzende Methode braucht also nur kleine Werte von  $E$  in Betracht zu ziehen.

Um zuerst die *Ellipse* zu behandeln, schreiben wir die Keplersche Gleichung in der Form

$$E - e \sin E = \frac{k \sqrt{1 + m} (t - T)}{a^{\frac{3}{2}}},$$

wo offenbar  $T$  die Durchgangszeit durchs Perihel, also  $t - T$  die seit dieser verflossene Zeit bedeutet. Vernachlässigt man die Masse  $m$ , was bei den hier in Betracht kommenden Körpern stets geschehen kann, und führt die Periheldistanz  $q$  ein, die nach Gl. 20) (Seite 134) gegeben ist durch

$$q = a(1 - e),$$

so läßt sich der Gleichung folgende Gestalt geben:

$$(1 - e) \left( \frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E \right) + \left( \frac{1}{10} + \frac{9}{10} e \right) (E - \sin E) = k(t - T) \left( \frac{1 - e}{q} \right)^{\frac{3}{2}}$$

oder:

$$\frac{1}{10} (9E + \sin E) + \frac{1}{10} \frac{1 + 9e}{1 - e} (E - \sin E) = \frac{k(t - T) \sqrt{1 - e}}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man nun

$$A = 15 \frac{E - \sin E}{9E + \sin E} \quad (a)$$

$$B = \frac{9E + \sin E}{20 \sqrt{A}} \quad (b)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w^2 = \frac{1 + 9e}{5(1 - e)} A \quad (c)$$

so findet man leicht, daß die Gleichung übergeht in:

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3 = \frac{(t - T) \sqrt{\frac{1}{10}(1 + 9e)}}{q^{\frac{3}{2}} B}, \quad (d)$$

die mit Hilfe der Barkerschen Tafel nach  $w$  aufgelöst werden kann, sobald  $B$  bekannt ist. Wir untersuchen die Größenordnung von  $B$ , indem wir  $E$  als eine kleine Größe erster Ordnung betrachten. Es ist

$$9E + \sin E = 10E - \frac{1}{6} E^3 + \frac{1}{120} E^5 - \dots$$

$$E - \sin E = \frac{1}{6} E^3 - \frac{1}{120} E^5 + \frac{1}{5040} E^7 - \dots;$$

folglich wird:

$$A = \frac{1}{4} E^2 - \frac{1}{120} E^4 - \frac{1}{20160} E^6 - \dots$$

$$B = 1 + \frac{3}{2880} E^4 - \dots,$$

d. h.  $A$  ist von der zweiten Ordnung und  $B$  unterscheidet sich von 1 nur um eine Größe der vierten Ordnung. Darauf baut sich folgendes Näherungsverfahren auf. Man setzt zuerst  $B = 1$  und bestimmt damit  $w$  aus (d), dann  $A$  aus (c) und  $B$  aus (b); damit wird die Rechnung wiederholt, bis sie steht. Dadurch kommt man in den Besitz des wahren Wertes von  $A$ , der zur weiteren Lösung der Aufgabe, die wahre Anomalie  $v$  zu bestimmen, wie folgt dienen kann. Da

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E,$$

so empfiehlt es sich augenscheinlich,  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} E$  mit  $A$  in Verbindung zu bringen. Setzt man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2 = \tau,$$

so wird:

$$\sin E = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2} = \frac{2 \sqrt{x}}{1+x} = 2 \sqrt{x} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$$

und

$$E = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} = 2 \sqrt{x} (1 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{7} x^3 + \dots);$$

also:

$$15 (E - \sin E) = 2 \sqrt{x} (10x - \frac{60}{5} x^2 + \frac{90}{7} x^3 - \dots)$$

und

$$9E + \sin E = 2 \sqrt{x} (10 - \frac{12}{3} x + \frac{14}{5} x^2 - \frac{16}{7} x^3 + \dots)$$

und folglich durch Division:

$$A = \frac{15 (E - \sin E)}{9E + \sin E} = x - \frac{4}{5} x^2 + \frac{24}{35} x^3 - \frac{1592}{2625} x^4 + \dots$$

Kehrt man diese Reihe um, so folgt:

$$\frac{A}{x} = 1 - \frac{4}{5} A + \frac{8}{175} A^2 + \frac{8}{525} A^3 + \frac{1896}{336875} A^4 + \dots$$

oder, wenn die Größe vierter Ordnung

$$\frac{8}{175} A^2 + \frac{8}{525} A^3 + \frac{1896}{336875} A^4 + \dots = C$$

gesetzt wird:

$$\frac{A}{x} = 1 - \frac{4}{5} A + C.$$

Somit wird:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{A}{1 - \frac{4}{5} A + C}}$$

oder nach (c)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e} \cdot \frac{5(1-e)}{1+9e}} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} w}{\sqrt{1 - \frac{4}{5} A + C}},$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \sigma \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} w, \quad (e)$$

wenn

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{5} A + C}} \quad (f)$$

gesetzt wird. Hier kann gleich die Bestimmung von  $r$  mit angefügt werden; nach Gl. VI (Seite 138) ist:

$$r = q \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = q \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2) \cos \frac{1}{2} v^2},$$

also:

$$r = \frac{1}{1+x} \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{1 - \frac{4}{5} A + C}{1 + \frac{1}{5} A + C} \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}$$

oder

$$r = \frac{q}{(v \cos \frac{1}{2} v)^2}, \quad (g)$$

wenn

$$v = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{5} A + C}{1 - \frac{4}{5} A + C}} \quad (h)$$

gesetzt wird.

Ehe wir zusammenfassen, zeigen wir, daß  $B$  als Funktion von  $A$  dargestellt werden kann. Es ist

$$\sqrt{A} = \sqrt{r} \left( 1 - \frac{2}{5} \tau + \frac{46}{175} \tau^2 - \frac{104}{525} \tau^3 + \dots \right)$$

und daher

$$B = \frac{9E + \sin E}{20\sqrt{A}} = 1 + \frac{3}{175} \tau^2 - \frac{62}{2625} \tau^3 + \dots,$$

woraus:

$$B = 1 + \frac{3}{175} A^2 + \frac{2}{525} A^3 + \dots \quad (i)$$

Da hiernach  $B$  mit dem Argument  $A$  leicht tabuliert werden kann, so erledigt sich der oben beschriebene Näherungsprozeß zur Ermittlung des wahren Wertes von  $A$  sehr rasch. Ist aber dieser erlangt und hat man  $\sigma$  und  $\nu$  ebenfalls mit Argument  $A$  nach (f) und (h) tabuliert (was zuerst *Marth* Astr. Nachr. Bd. 43, S. 115 ausgeführt hat), so folgen  $v$  und  $r$  durch (e) und (g). Die hier als wünschenswert erkannten Tabulierungen sind in Taf. XVII gegeben. Wir stellen die Formeln zur Berechnung eines Ortes nochmals zusammen. Mit einem bei Ephemeridenrechnungen sich von selbst anbietenden Näherungswert von  $w$ , oder in Ermangelung eines solchen mit dem aus

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3 = \frac{t - T}{q^2} \sqrt{\frac{1}{10} (1 + 9e)}$$

mittelst der Barkerschen Tafel gefundenen Werte von  $w$  rechnet man

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^2,$$

entnimmt damit  $B$  aus Taf. XVII, sucht dann  $w$  von neuem aus

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3 = \frac{t - T}{q^2} \frac{\sqrt{\frac{1}{10} (1 + 9e)}}{B},$$

rechnet  $A$  usf., bis die Rechnung steht. Mit dem definitiven Wert von  $A$  entnimmt man  $\sigma$  und  $\nu$  aus Taf. XVII und hat dann

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sigma \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w$$

$$r = \frac{q}{(\nu \cos \frac{1}{2} v)^2}$$

oder auch:

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \nu \sin \frac{1}{2} v = \sigma \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \nu \cos \frac{1}{2} v = 1.$$

Die umgekehrte Aufgabe, nämlich die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit  $t - T$  aus  $v$  zu ermitteln, erledigt sich leicht mit denselben Hilfsmitteln. Es kommt offenbar nur darauf an, einen ersten Näherungswert von  $A$  zu erhalten; ein solcher ist aber nach obiger Reihenentwicklung, wenn Glieder vierter Ordnung übergangen werden:

$$\tau = \operatorname{tg} \frac{1}{2} E^2 = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2.$$

Entnimmt man mit diesem der Taf. XVII  $\sigma$  und rechnet:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w = \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v}{\sigma \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}}, \quad (e)$$

so folgt ein strengerer Wert von  $A$  durch

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w^2,$$

mit dem man wieder  $\sigma$  entnimmt. Dies wird so lange fortgesetzt, bis sich  $\sigma$  nicht mehr ändert, worauf man gleichzeitig  $B$  entnimmt. Dann gibt (e) den strengen Wert von  $w$ ; mit diesem als Argument entnimmt man nach Gl. (d) (Seite 211) der Barker'schen Tafel

$$M = \frac{t - T \sqrt{\frac{1}{10}(1+9e)}}{q^{\frac{3}{2}} B},$$

woraus

$$t - T = \frac{MBq^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{10}}(1+9e)}.$$

Der Fall der parabelnahen *Hyperbel* wird in ganz analoger Weise behandelt wie der der Ellipse. Die Gleichung zwischen der Zeit und der Hilfsgröße  $u$  (Seite 203)

$$\frac{1}{2}e \left(u - \frac{1}{u}\right) - \log \operatorname{nat.} u = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t - T) = k \left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}}(t - T)$$

läßt sich so schreiben:

$$(e-1) \left(\frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{9}{10} \log u\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e\right) \left(\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right) - \log u\right) = k \left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}}(t - T).$$

Wird  $\log u$  als Größe erster Ordnung angesehen, so werden die beiden Klammerausdrücke von der ersten beziehungsweise dritten Ordnung und daher wird

$$A = \frac{6 \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right) - \log u}{4 \frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{9}{10} \log u} \quad (a)$$

von der zweiten Ordnung, und

$$B = \frac{\frac{1}{10} \left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{9}{10} \log u}{2\sqrt{A}} \quad (b)$$

wird sich von 1 nur um eine Größe der vierten Ordnung unterscheiden. Setzt man noch

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w^2 = \frac{1+9e}{5(e-1)} A, \quad (c)$$

so führt man obige Gleichung leicht in folgende Form über:

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w^3 = \frac{t - T \sqrt{\frac{1}{10}(1+9e)}}{q^{\frac{3}{2}} B}, \quad (d)$$

die mittels der Barkerschen Tafel nach  $w$  aufgelöst werden kann, sobald  $B$  bekannt ist. Nun ist in erster Näherung  $B$  gleich 1 und allgemein kann es als Funktion von  $A$  dargestellt und tabuliert werden. Bestimmt man also mit dem ersten Näherungswert von  $w$  aus (d), indem man  $B = 1$  setzt, die Größe  $A$  aus (c):

$$A = \frac{5(e-1)}{1+9e} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w^2,$$

sucht den zugehörigen Wert von  $B$ , löst (d) nochmals auf usf., so erhält man schließlich den wahren Wert von  $A$ , der zum wahren Wert von  $v$  in folgender Weise führt. Da nach Gl. 14) (Seite 203)

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1} \frac{u-1}{u+1}},$$

so wird man  $A$  mit

$$r = \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^2$$

in Verbindung bringen. Man erhält ähnlich, wie bei der Ellipse:

$$\frac{A}{r} = 1 + \frac{4}{5}A + \frac{8}{175}A^2 - \frac{8}{525}A^3 + \frac{1896}{336875}A^4 - \dots$$

oder  $\frac{A}{r} = 1 + \frac{4}{5}A + C$ . Somit wird:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \sqrt{r} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{1 + \frac{4}{5}A + C}}$$

oder nach (c)

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v = \sqrt{\frac{5(e+1)}{1+9e}} \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w}{\sqrt{1 + \frac{4}{5}A + C}}$$

oder endlich, wenn

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{5}A + C}}$$

gesetzt wird:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v = \sqrt{\frac{5(e+1)}{1+9e}} \sigma \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w.$$

Zur Berechnung von  $r$  bedient man sich am sichersten und bequemsten der Formel

$$r = \frac{p}{1+e \cos v} = \frac{q(1+e)}{1+e \cos v}.$$

Die nach dieser Methode erforderlichen Tabulierungen von  $B$  und  $\sigma$  mit dem Argument  $A$  sind in Taf. XVIII gegeben.

Zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Perihelzeit aus der wahren Anomalie zu ermitteln, ist in Taf. XVIII die hier mit  $r$ , in der Tafel mit T bezeichnete Größe aufgenommen worden, welche aus

$$r = \frac{e-1}{e+1} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v^2$$

gefunden wird und sofort zu einem fast strengen Wert von  $\sigma$  führt. Wird mittels desselben  $w$  aus

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} w = \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v}{\sigma \sqrt{\frac{5(e+1)}{1+9e}}}$$

berechnet und sodann  $A$  aus

$$A = \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3 \frac{5(e-1)}{1+9e},$$

so gibt die Tafel mit diesem Argument  $A$  die strengen Werte von  $\sigma$  und  $B$ . Damit rechnet man den strengen Wert von  $w$  und bestimmt dann aus Gl. (d) den Wert von  $t - T$ . Hierbei kann man sich der Barkerschen Tafel bedienen, indem man den zu  $w$  gehörigen Wert von  $M$  aufsucht und dann hat:

$$t - T = \frac{MBq^{\frac{3}{2}}}{V_{\frac{1}{10}}(1+9e)}.$$

Vergleicht man die für die Hyperbel abgeleiteten Formeln mit denen für die Ellipse, so erkennt man, daß erstere aus den letzteren sich ergeben, wenn man in diesen  $A$ ,  $\tau$  und  $\frac{5(1-e)}{1+9e}$  negativ nimmt. Das folgt schon daraus, daß in der Ellipse

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E,$$

in der Hyperbel aber

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

und somit

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

ist; wir konnten also, wenn wir nicht imaginäre Größen hätten vermeiden wollen, aus den Formeln für die Ellipse sofort jene für die Hyperbel abschreiben.

**65. Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Bahnen.** Das eben auseinandergesetzte Gaußsche Verfahren zur Berechnung der Polarkoordinaten  $v$  und  $r$  in parabelnahen Bahnen läßt an Schärfe nichts zu wünschen übrig, bei Herstellung einer längeren Ephemeride ist es aber trotz einiger sich von selbst anbietenden Erleichterungen etwas mühsam, wenn Ort für Ort nach demselben gerechnet wird. Das ist nun aber nach einer Bemerkung von *Krueger* (Astr. Nachr. Bd. 117, S. 309) nicht notwendig, sondern man kann alle weiteren  $v$  sich durch einen einfachen Kunstgriff verschaffen, wenn man etwa die drei ersten durch den Gaußschen Algorithmus erhalten hat. Da nämlich der Radiusvektor sich sehr regelmäßig ändert, kann man ihn leicht für das folgende Intervall extrapolieren und damit dann

$$w \frac{dv}{dt} = w \frac{k'' Vq(1+e)}{r^2}$$

berechnen ( $w =$  Intervall der Ephemeride in Tagen); wird die Reihe der  $w \frac{dv}{dt}$  der mechanischen Quadratur unterworfen, so erhält man die  $v$ . Rechnet man dann  $r$  durch

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e \cos v}$$

und findet Übereinstimmung mit dem extrapolierten Wert, so ist  $v$  streng richtig, wenn nicht, dann wird mit dem neuen  $r$  die Rechnung wiederholt. Man kann auf diese Weise große Strecken der Ephemeride berechnen, ohne auch nur die mittlere

Anomalie anzusetzen. Von Zeit zu Zeit wird man zur Kontrolle ein  $v$  nach dem Gaußschen Verfahren rechnen. Betreff Einzelheiten der Ausführung sei auf die Tafeln Seite 22 verwiesen, wo auch ein Beispiel durchgeführt ist.

**66. Die Lambertsche Gleichung bei parabelnahen Bahnen.** In den Nummern 51 und 63 haben wir den Lambertschen Satz für die elliptische und hyperbolische Bewegung abgeleitet, der eine merkwürdige Beziehung zwischen der Zwischenzeit  $t' - t$  einerseits und zwei Radienvektoren  $r$  und  $r'$ , der zwischen ihnen liegenden Sehne  $s$  und der großen Halbachse  $a$  andererseits darstellt. Wie wir schon hervorgehoben haben, ist dieser Satz für die Bahnbestimmung im allgemeinen von geringer Bedeutung, im Falle parabelnaher Bahnen, also großer  $a$ , aber leistet er sehr schätzenswerte Dienste. In der Form der Reihenentwicklung 6) (Seite 170) ist er allerdings auch dann nicht zu verwenden, da sie eine zu geringe Konvergenz besitzt, und in der endlichen Form 4) (Seite 169), nämlich:

$$\frac{k(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = (\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta) \quad 1)$$

$$+ \sqrt{\frac{r + r' + s}{4a}} = \sin \frac{1}{2} \varepsilon \quad 2)$$

$$\pm \sqrt{\frac{r + r' - s}{4a}} = \sin \frac{1}{2} \delta \quad \begin{array}{l} v' - v < 180^\circ \\ v' - v > 180^\circ \end{array} \quad 3)$$

wird er für die numerische Rechnung gerade im Falle großer  $a$  ungeeignet, da dann  $\varepsilon$  und  $\delta$  kleine Winkel werden, ihr Unterschied von den  $\sin$  also mit den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln nicht mit genügender Schärfe berechnet werden kann. Dieser Mißstand läßt sich aber durch einfache Umgestaltungen beseitigen. Eine erste besteht darin, daß man die Gleichung 1) in folgender Form schreibt:

$$6k(t' - t) = (4a \sin \frac{1}{2} \varepsilon)^{\frac{3}{2}} 3 \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{4 \sin \frac{1}{2} \varepsilon^3} - (4a \sin \frac{1}{2} \delta)^{\frac{3}{2}} 3 \frac{\delta - \sin \delta}{4 \sin \frac{1}{2} \delta^3}$$

oder nach 2) und 3)

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} Q_\varepsilon \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_\delta \quad \begin{array}{l} v' - v < 180^\circ \\ v' - v > 180^\circ \end{array}$$

$$Q_\varepsilon = \frac{3(\varepsilon - \sin \varepsilon)}{4 \sin \frac{1}{2} \varepsilon^3}$$

$$Q_\delta = \frac{3(\delta - \sin \delta)}{4 \sin \frac{1}{2} \delta^3}$$

und  $Q_\varepsilon$  und  $Q_\delta$  in geeigneter Weise entwickelt und tabuliert. Aus der oben (Seite 170) abgeleiteten Entwicklung

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = 4 \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^7}{7} + \dots \right)$$

folgt:

$$Q_\varepsilon = 1 + 3 \left( \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^2}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^4}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon^6}{9} + \dots \right),$$

woraus man  $Q_\varepsilon$  leicht mit dem Argument  $\sin \frac{1}{2}\varepsilon^2$  berechnen kann. Taf. XXIII gibt diese Werte. Die Anwendung der Lambertschen Gleichung verlangt dann einfach die Durchrechnung der Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\varepsilon^2 &= \frac{r + r' + s}{4a} \\ \sin \frac{1}{2}\delta^2 &= \frac{r + r' - s}{4a} \end{aligned} \tag{4}$$

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} Q_\varepsilon \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_\delta$$

$Q_\varepsilon$  und  $Q_\delta$  mit den Argumenten  $\sin \frac{1}{2}\varepsilon^2$  bzw.  $\sin \frac{1}{2}\delta^2$  aus Taf. XXIII.

Im Fall der Hyperbel ( $a$  negativ) werden  $\sin \frac{1}{2}\varepsilon^2$  und  $\sin \frac{1}{2}\delta^2$  negativ; die Reihe für  $Q_\varepsilon$  erhält dann abwechselnd positive und negative Glieder. In Taf. XXIII sind diese  $Q_\varepsilon$  unter der Überschrift Hyperbel ebenfalls angeführt und müssen mit dem absoluten Werte von  $\sin \frac{1}{2}\varepsilon^2$  als Argument entnommen werden.

Die Anwendung des Systems 4) kann nur dann unsicher werden, wenn die Sehne  $s$  klein ist, da dann  $t' - t$  als die Differenz zweier nahe gleich großen Zahlen zu ermitteln ist. In diesem Fall empfiehlt sich eine andere Umformung der Lambertschen Gleichung, nämlich diejenige, die *Marth* (Astr. Nachr. Bd. 65, S. 321) vorgeschlagen und mit Tafeln ausgestattet hat. Hier werden zunächst die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung 6) (Seite 170) in folgender Weise entwickelt. Setzt man

$$\frac{s}{r + r'} = \sin \gamma$$

und nennt  $i$  eine ganze ungerade Zahl, so wird:

$$\begin{aligned} (r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} &= (r + r')^{\frac{i}{2}} \left( (1 + \sin \gamma)^{\frac{i}{2}} - (1 - \sin \gamma)^{\frac{i}{2}} \right) \\ &= (r + r')^{\frac{i}{2}} \cos \frac{1}{2}\gamma^i \left( \left( \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma^2} \right)^{\frac{i}{2}} - \left( \frac{1 - \sin \gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma^2} \right)^{\frac{i}{2}} \right) \end{aligned}$$

oder, da  $\sin \gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma}$  und  $\frac{1}{\cos \frac{1}{2}\gamma^2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma^2$ :

$$(r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} = (r + r')^{\frac{i}{2}} \cos \frac{1}{2}\gamma^i \left( (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma)^{\frac{i}{2}} - (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma)^{\frac{i}{2}} \right).$$

Wird rechts entwickelt und beachtet, daß  $i$  ungerade ist, so kommt nach leichter Zusammenziehung:

$$\begin{aligned} &(r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} = \\ &= (r + r')^{\frac{i}{2}} \sin \gamma \cos \frac{1}{2}\gamma^{i-2} \left( i + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\gamma^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{i(i-1)}{1.2} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma^{i-3} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma^{i-1} \right) \end{aligned}$$

$$= (r + r')^{\frac{i}{2}} \sin \gamma W_i.$$

Speziell wird, wenn  $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma^2 = v$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} W_3 &= \cos \frac{1}{2}\gamma (3 + v) \\ W_5 &= \cos \frac{1}{2}\gamma^3 (5 + 10v + v^2) \\ W_7 &= \cos \frac{1}{2}\gamma^5 (7 + 35v + 21v^2 + v^3) \\ &\dots \end{aligned}$$

Nach Eintragung dieser Entwicklungen in die Gl. 6) (Seite 170) kommt nach kurzer Reduktion:

$$k(t' - t) = s \sqrt{r+r'} \frac{1 + \frac{1}{3}x}{2\sqrt{1+x}} \left( 1 + \frac{r+r'}{8a} \frac{1 + 2x + \frac{1}{5}x^2}{(1 + \frac{1}{3}x)(1+x)} + \frac{3}{2} \left( \frac{r+r'}{8a} \right)^2 \frac{1 + 5x + 3x^2 + \frac{1}{7}x^3}{(1 + \frac{1}{3}x)(1+x)^2} \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \left( \frac{r+r'}{8a} \right)^3 \frac{1 + \frac{28}{3}x + 14x^2 + 4x^3 + \frac{1}{9}x^4}{(1 + \frac{1}{3}x)(1+x)^3} + \dots \right)$$

oder

$$k(t' - t) = s \sqrt{r+r'} Q \cdot V.$$

Hierin ist

$$Q = \frac{1 + \frac{1}{3}x}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\gamma \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 \right)$$

gesetzt, so daß

$$k(t' - t) = s \sqrt{r+r'} Q$$

der parabolischen Bewegung  $\left(\frac{1}{a} = 0\right)$  entspricht, wie wir auch schon Seite 196 gesehen haben. Der Faktor  $V$ , welcher gleich ist dem gesamten Klammerausdruck, rührt von der Abweichung der Bahn von der Parabel her und muß in geeigneter Weise tabuliert werden. Marth wählt, wie hier nicht weiter auseinandergesetzt werden soll, die Form:

$$\operatorname{Log} V = \frac{r+r'}{a} Q_1 R_1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2 Q_2 R_2,$$

wo  $Q_1$  und  $Q_2$  ebenso wie  $Q$  Funktionen von  $\frac{s}{r+r'}$ ,  $R_1$  und  $R_2$  Funktionen von  $\frac{r+r'}{a}$  sind. Die Tafeln XXIV geben diese Größen, aber nur in einer Ausdehnung, die bei kleinen Werten der Sehne ausreicht; für große Sehnen muß man den Tafeln eine bedeutende Ausdehnung geben, so daß dann das vorhin beschriebene Verfahren 4) zweckmäßiger erscheint. Reicht auch dieses nicht aus, so wird die Anwendung der Lambertschen Gleichung in der Form 1) keine Schwierigkeit bereiten.

**67. Bestimmung der Elemente bei parabelnahen Bahnen.** Besondere Entwicklungen für das Verhältnis Sektor durch Dreieck brauchen für diese Bahnen nicht ausgeführt zu werden, da die in den Nrn. 49 und 61 für die Ellipse und die Hyperbel gegebenen Vorschriften auch dafür völlig ausreichen; wir können also hier  $y$  und die bei seiner Bestimmung vorkommenden Größen als bekannt voraussetzen. Dagegen empfiehlt es sich, das Verfahren der Elementenbestimmung mehr dem bei der Parabel gegebenen anzunähern. Zur Bestimmung des Parameters hat man in allen Fällen (Seite 165, 207)

$$p = \left( \frac{r_1 r_2 \sin 2f \cdot y}{k \sqrt{1+m}(t_2 - t_1)} \right)^2; \quad 1)$$

man kann aber noch einen anderen Ausdruck anführen, der hier gute Dienste leistet, nämlich den Seite 156 für die Ellipse abgeleiteten:

$$p = \frac{2 r_1 r_2 \sin f^2}{r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g}; \quad 2)$$

das hierbei gebrauchte  $g$  wird entweder durch das Seite 157 auseinandergesetzte Näherungsverfahren oder, wenn  $y$  mit den Gaußschen Tafeln berechenbar ist, aus

$$x = \sin \frac{1}{2} g^2 = \frac{m}{y^2} - l$$

gewonnen. In der bei der Hyperbel adoptierten Schreibweise wird die Gleichung, wie leicht aus Seite 207 hervorgeht,

$$p = \frac{2 r_1 r_2 \sin^2 f}{r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f (1 + 2x)} \quad 3)$$

wo

$$-x = \frac{m}{y^2} - l.$$

Zur Ermittlung von  $e$  und den wahren Anomalien ist das einfachste Verfahren wohl das schon Seite 151 abgeleitete, d. h. in der hier angewendeten Bezeichnungsweise die Rechnung nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} e \sin v_1 &= \left( \frac{p}{r_1} - 1 \right) \cotg 2f - \left( \frac{p}{r_2} - 1 \right) \operatorname{cosec} 2f \\ e \cos v_1 &= \frac{p}{r_1} - 1 \\ v_2 &= v_1 + 2f \\ \varpi &= s_1 - v_1 = s_2 - v_2. \end{aligned} \quad 4)$$

Man kann aber auch Formeln aufstellen, die den Gl. 4) (Seite 199) für die Parabel entsprechen. Aus

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 + e \cos v_1}{p}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1 + e \cos v_2}{p}$$

folgt durch Addieren und Subtrahieren, wenn wie immer  $v_2 - v_1 = 2f$ ,  $v_1 + v_2 = 2F$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= \frac{2}{p} (1 + e \cos f \cos F) \\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{2}{p} e \sin f \sin F. \end{aligned}$$

Trägt man hier für  $p$  obigen Wert 2) ein, so gehen diese Gleichungen nach einfacher Reduktion in folgende über:

$$\begin{aligned} e (r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g) \sin F &= (r_2 - r_1) \sin f \\ e (r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g) \cos F &= 2 \cos g \sqrt{r_1 r_2} - (r_1 + r_2) \cos f \end{aligned} \quad 5)$$

woraus  $e$  und  $F$  unter Benutzung des bei der Berechnung von  $y$  erhaltenen  $g$  ermittelt werden können. Es folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} v_1 &= F - f, & v_2 &= F + f \\ \varpi &= s_1 - v_1 = s_2 - v_2. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Durchgangszeit durchs Perihel aus den wahren Anomalien ist schon oben Seite 213 und 215 auseinandergesetzt worden.

**68. Bestimmung der Elemente parabelnaher Bahnen, wenn die große Halbachse bekannt ist.** Kann die große Halbachse als bekannt angenommen werden entweder weil die Umlaufszeit bekannt ist oder weil man bestimmte Hypothesen über  $a$  der Bahnbestimmung zugrunde legen will, so erfährt die Bestimmung der Elemente einige Modifikationen. Zunächst bemerkt man, daß der Winkel  $2f$  zwischen den beiden Radienvektoren  $r_1$  und  $r_2$  außer auf die gewöhnliche Weise als Differenz zwischen den Längen in der Bahn auch durch die Sehne zwischen den Endpunkten der Radienvektoren gefunden werden kann. Da diese Sehne  $s$  im vorliegenden Fall fast immer bekannt sein wird, ist es angemessen, den Ausdruck

$$\operatorname{tg} f = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r_1}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{r_2}{\sigma}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)}} \quad 1)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + s)$$

zur Ermittlung von  $2f$  zu verwenden, sei es auch nur zur Kontrolle.

Ferner bedarf es hier offenbar der Berechnung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck überhaupt nicht; denn aus den vorhin (Seite 220) aufgestellten Gleichungen

$$2e \sin f \sin F = p \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$2e \cos f \cos F = p \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - 2$$

folgt, wenn man

$$\frac{1}{\sin f} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 \sin f} = w \sin W \quad 2)$$

$$\frac{1}{\cos f} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2 \cos f} = w \cos W$$

setzt:

$$e \sin F = \frac{1}{2} p w \sin W$$

$$e \cos F = \frac{1}{2} p w \cos W - \frac{1}{\cos f}$$

oder

$$e \sin(F - W) = \sin W \sec f$$

$$e \cos(F - W) = \frac{1}{2} p w - \cos W \sec f;$$

hieraus folgt ferner:

$$e^2 = \left(\frac{1}{2} p w\right)^2 - p w \cos W \sec f + \sec^2 f,$$

also, da  $e^2 = 1 - \frac{p}{a}$ :

$$\frac{1}{2} p w = \cos W \sec f - \frac{1}{aw} \mp \sqrt{\left(\cos W \sec f - \frac{1}{aw}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 f};$$

dies gibt oben eingetragen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e \sin(F - W) &= \sin W \sec f \\ e \cos(F - W) &= -\frac{1}{aw} \mp \sqrt{\left(\cos W \sec f - \frac{1}{aw}\right)^2 - \operatorname{tg} f^2}, \end{aligned} \quad 3)$$

aus denen  $e$  und  $F'$  bestimmt werden können.

Es ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem die heliozentrische Bewegung zwischen den Orten kleiner oder größer als  $180^\circ$  ist. Aus  $F'$  und  $f$  ergeben sich die wahren Anomalien  $v_1$  und  $v_2$ :

$$v_1 = F' - f, \quad v_2 = F' + f,$$

dann die Länge des Perihels:

$$\bar{\omega} = s_1 - v_1 = s_2 - v_2$$

und endlich die Periheldistanz

$$q = a(1 - e).$$

Die Ermittlung der Durchgangszeit durchs Perihel aus  $v_1$  oder  $v_2$  erfolgt wie Seite 213 und 215.

## Abschnitt XV.

## Die Bahn im Raum.

**69. Knoten, Neigung, Perihelslänge.** Nachdem wir in Nr. 41 S. 125 nachgewiesen hatten, daß die Bewegung eines Himmelskörpers um die Sonne in einer durch diese hindurchgehenden Ebene stattfindet, solange angenommen wird, daß lediglich die beiden Körper aufeinander einwirken, konnten wir zunächst die Bewegung *in* dieser Ebene untersuchen, wie in den Abschnitten XI—XIV geschehen ist. Es erübrigt also noch, die Lage dieser Ebene im Raum zu bestimmen und die Lage der Bahnkurve in ihrer Ebene zu fixieren. Wir haben bereits in Nr. 11 die hierzu geeignetsten Mittel angegeben: um die Sonne wird eine Kugel mit beliebigem Radius beschrieben und auf dieser ein bestimmtes Koordinatensystem etwa das der Ekliptik angenommen; die Bahnebene schneidet diese Kugel in einem größten Kreis, der durch die Länge seines aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik:  $\Omega$  und seine Neigung gegen diese:  $i$  unzweideutig festgelegt ist und dadurch zugleich die Bahnebene im Raum fixiert. Wird ein ausgezeichnete Punkt der Bahnkurve, in der Regel das Perihel, ebenfalls an die Sphäre projiziert und wird der projizierte Punkt, der im größten Kreis der Bahn liegen muß, durch seinen Abstand vom genannten Knoten bestimmt, so ist dadurch die Lage der Bahn in ihrer Ebene gegeben. Man nennt dieses Stück den Abstand des Perihels von Knoten und bezeichnet es mit  $\omega$ . Den gebrochenen Bogen

$$\varpi = \omega + \Omega$$

nennt man die Länge des Perihels.

Bei der Betrachtung der Bewegung in der Bahnebene haben wir die Koordinate  $s$ , d. h. den Winkel zwischen dem Radiusvektor  $r$  und der  $\xi$ -Achse von einer beliebigen Lage der  $\xi$ -Achse aus gezählt. Wir wollen jetzt diese Lage so bestimmen, daß ihr Abstand vom Knoten, nach rückwärts gerechnet, gleich  $\Omega$  wird. Es wird dann:

$$s = \Omega + \omega + v = \varpi + v$$

wo  $v$  die wahre Anomalie darstellt. Den Bogen vom Knoten bis zum Schnitt des Radiusvektors mit der Kugel nennt man *Argument der Breite*; es sei im folgenden mit  $u$  bezeichnet; offenbar ist

$$u = \omega + v = \varpi - \Omega + v.$$

Nebstehende Figur 34 zeigt die bisher beschriebenen Stücke:

$\vee E$  = Ekliptik.

$\xi_0 H$  = Bahn.

$\vee$  = Frühlingspunkt.

$\vee K = \xi_0 K = \Omega$  = Länge des Knotens.

$\sphericalangle HKE = i$  = Neigung der Bahn.

$KP = \omega$  = Abstand des Perihels vom Knoten.

$PH = v$  = wahre Anomalie.

$KH = \omega + v = u$  = Argument der Breite.

$\vee K + KP = \xi_0 K + KP = \xi_0 P = \varpi$  = Länge des Perihels.

$\xi_0 H = \vee K + KH = s = \Omega + u = \Omega + \omega + v = \varpi + v$  = Länge in der Bahn.

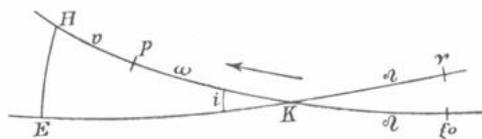


Fig. 34.

Durch die Bahnbestimmung wird die Lage des Radiusvektors, also des Punktes  $H$  gegen die Ekliptik durch heliozentrische Länge und Breite  $l$  und  $b$  gegeben, d. h. wenn  $HE$  senkrecht zur Ekliptik gezogen wird, durch die Stücke  $\sphericalangle E = l$  und  $EH = b$ . Es ist daher der Zusammenhang zwischen diesen und den Elementen  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  oder  $\varpi$  aufzustellen. In dem rechtwinkligen Dreieck  $KEH$  hat man:

$$\begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin u \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos u \\ \sin b &= \sin i \sin u, \end{aligned} \quad 1)$$

woraus hervorgeht, daß  $l - \Omega$  und  $u$  stets in demselben Quadranten liegen, solange  $i$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt, daß dagegen  $l - \Omega$  und  $360^\circ - u$  demselben Quadranten angehören, wenn  $i$  zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  liegt. Wenn man also die aus obigen hervorgehenden Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \cos i \operatorname{tgu} \\ \operatorname{tgb} &= \operatorname{tgi} \sin(l - \Omega) \end{aligned} \quad 2)$$

anwendet, kann in der ersteren ein Zweifel über den Quadranten nicht entstehen. Aus den Formeln 1) folgen leicht:

$$\begin{aligned} \sin(u - (l - \Omega)) &= 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(l - \Omega) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \sin b \cos(l - \Omega) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \operatorname{tgb} \cos u \\ \sin(u + (l - \Omega)) &= 2 \cos \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(l - \Omega) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} i \sin b \cos(l - \Omega) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} i \operatorname{tgb} \cos u, \end{aligned} \quad 3)$$

die zuweilen zur Berechnung von  $l$  Verwendung finden.

Wenn  $u = \omega + v$  durch die wahre Anomalie und das Element  $\omega$  gegeben ist und außerdem  $i$  und  $\Omega$  bekannt sind, dann geben die Gleichungen 1) oder 2) die Koordinaten  $l$  und  $b$ . Die umgekehrte Aufgabe, aus heliozentrischen Koordinaten  $l$ ,  $b$  die Elemente  $\Omega$ ,  $i$  und das Argument der Breite  $u$  (welches mittels der anderweitig bekannt gewordenen wahren Anomalie  $v$  dann auf  $\omega = u - v$  oder  $\varpi = u - v + \Omega$  führt) zu bestimmen, erfordert offenbar die Kenntnis zweier Örter  $l_1$ ,  $b_1$  und  $l_2$ ,  $b_2$ . Diese geben zuerst nach 2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tgi} \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tgb}_1 \\ \operatorname{tgi} \sin(l_2 - \Omega) &= \operatorname{tgb}_2, \end{aligned} \quad 4)$$

welche auf verschiedene Weise nach  $i$  und  $\Omega$  aufgelöst werden können. Schreibt man die zweite so:

$$\operatorname{tgb}_2 = \operatorname{tgi} \sin(l_1 - \Omega + l_2 - l_1) = \operatorname{tgi} \sin(l_1 - \Omega) \cos(l_2 - l_1) + \operatorname{tgi} \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_2 - l_1)$$

oder

$$\operatorname{tgb}_2 = \operatorname{tgb}_1 \cos(l_2 - l_1) + \operatorname{tgi} \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_2 - l_1),$$

so erhält man die zweite der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgi} \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tgb}_1 \\ \operatorname{tgi} \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\operatorname{tgb}_2 - \operatorname{tgb}_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)}, \end{aligned} \quad 5)$$

die gleichzeitig  $\Omega$  und  $i$  mit voller Sicherheit geben. Ist  $l_1$ ,  $b_1$  der der Zeit nach vorausgehende Ort und kennt man die Richtung, in welcher der Himmelskörper sich von  $l_1$ ,  $b_1$  nach  $l_2$ ,  $b_2$  bewegt, so ist die Entscheidung über den Quadranten, in dem  $i$  liegt, leicht zu treffen. Denn die Richtung der Bewegung bestimmt, welcher Knoten

der aufsteigende oder absteigende sei, und es wird dann bei einer Bewegung, die in der Richtung der Längenzählung erfolgt (direkte Bewegung)  $i < 90^\circ$  und bei der entgegengesetzten (retrograden) Bewegung  $i > 90^\circ$  anzunehmen sein. Sind nur die Koordinaten gegeben, nicht aber die Richtung, in der der Übergang von der einen zur anderen erfolgte, dann können der aufsteigende und absteigende Knoten nicht voneinander unterschieden werden und es bleibt also auch der Quadrant von  $i$  zweifelhaft.

Man kann aus den Gl. 4) die Länge des Knotens  $\Omega$  auch unabhängig von  $i$  bestimmen. Denn durch Addition und Subtraktion der Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} i \sin\left(\frac{i}{2}(l_1 + l_2) - \Omega\right) \cos\frac{i}{2}(l_1 - l_2) &= \operatorname{tg} b_1 + \operatorname{tg} b_2 \\ 2 \operatorname{tg} i \cos\left(\frac{i}{2}(l_1 + l_2) - \Omega\right) \sin\frac{i}{2}(l_1 - l_2) &= \operatorname{tg} b_1 - \operatorname{tg} b_2 \end{aligned}$$

und daher:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}(l_1 + l_2) - \Omega\right) = \frac{\operatorname{tg} b_2 + \operatorname{tg} b_1}{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1} \operatorname{tg}\frac{i}{2}(l_2 - l_1); \quad 6)$$

wenn man die Breiten  $b_1$  und  $b_2$  selbst bestimmt hat und nicht ihre Tangenten, rechnet man bequemer nach:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}(l_1 + l_2) - \Omega\right) = \frac{\sin(b_2 + b_1)}{\sin(b_2 - b_1)} \operatorname{tg}\frac{i}{2}(l_2 - l_1). \quad 7)$$

Die Neigung  $i$  muß nach Ermittlung von  $\Omega$  aus:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin(l_1 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tg} b_2}{\sin(l_2 - \Omega)} \quad 8)$$

bestimmt werden. Der Quadrant von  $\Omega$ , den die Gl. 6) bzw. 7) unentschieden lassen, muß nach obigem so bestimmt werden, daß  $\operatorname{tg} i$  bei direkter Bewegung positiv, bei retrograder aber negativ wird.

Die Argumente der Breite  $u_1$  und  $u_2$  ergeben sich nach Bestimmung von  $\Omega$  und  $i$  durch eine geeignete Auswahl aus folgenden Formeln, die man alle leicht aus 1) ableiten kann:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u_1 &= \frac{\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)}{\cos i} & \operatorname{tg} u_2 &= \frac{\operatorname{tg}(l_2 - \Omega)}{\cos i} \\ \sin u_1 &= \frac{\sin b_1}{\sin i} & \sin u_2 &= \frac{\sin b_2}{\sin i} \\ \cos u_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega) & \cos u_2 &= \cos b_2 \cos(l_2 - \Omega) \\ \sin(u_2 + u_1) &= \frac{\cos b_1 \cos b_2}{\cos i} \sin(l_2 + l_1 - 2\Omega) \\ \sin(u_2 - u_1) &= \frac{\cos b_1 \cos b_2}{\cos i} \sin(l_2 - l_1). \end{aligned} \quad 9)$$

Der Quadrant von  $u$  bestimmt sich entweder nach der schon oben gegebenen Regel oder noch einfacher durch die Überlegung, daß bei positiven Breiten  $u$  zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ , bei negativen zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$  liegen muß.

Aus  $u$  folgt die Lage des Perihels durch

$$\omega = u - v \quad \text{oder} \quad \varpi = u + \Omega - v.$$

## 70. Die Gleichung der Bahnebene. Stellt

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der Bahnebene in dem der Ekliptik zugehörigen rechtwinkligen Koordinatensystem vor, so kann man die Koeffizienten  $A, B, C$  leicht ermitteln. Hat man die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte:  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$  gerechnet, die der Ebene angehören sollen, so hat man:

$$A : B : C = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Hat man wie bei der Bahnbestimmung drei Punkte  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, x_3 y_3 z_3$  zur Verfügung, so kann man  $A, B, C$  symmetrisch aus:

$$A : B : C = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (11)$$

ermitteln. Der Zusammenhang von  $A, B, C$  mit den Bestimmungsstücken  $\varrho$  und  $i$  der Bahn ergibt sich leicht, wenn man

$$A \frac{x}{r} + B \frac{y}{r} + C \frac{z}{r} = 0$$

oder

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$$

schreibt, wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel des beliebigen Radiusvektors  $r$  mit den Achsen sind. Da diese aber durch

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos \alpha = \cos u \cos \varrho - \sin u \sin \varrho \cos i \\ \frac{y}{r} &= \cos \beta = \cos u \sin \varrho + \sin u \cos \varrho \cos i \\ \frac{z}{r} &= \cos \gamma = \sin u \sin i \end{aligned} \quad (12)$$

gegeben sind und die Gleichung

$$A(\cos u \cos \varrho - \sin u \sin \varrho \cos i) + B(\cos u \sin \varrho + \sin u \cos \varrho \cos i) + C \sin u \sin i = 0$$

für jeden Wert von  $u$  gelten muß, so folgt:

$$\begin{aligned} u = 0 & \quad A \cos \varrho + B \sin \varrho = 0 \\ u = 90^\circ & \quad -A \sin \varrho \cos i + B \cos \varrho \cos i + C \sin i = 0, \end{aligned}$$

woraus:

$$\frac{A}{C} = \frac{\sin i \sin \varrho}{\cos i}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{\sin i \cos \varrho}{\cos i}.$$

Die Gleichung der Ebene wird also:

$$\sin i \sin \varrho x - \sin i \cos \varrho y + \cos i z = 0. \quad (13)$$

Wünscht man die Argumente der Breite  $u$  durch rechtwinklige Koordinaten auszudrücken, so bieten hierzu die Gl. 12) die Hand; denn man entnimmt denselben:

$$\begin{aligned} r \sin u &= \frac{z}{\sin i} \\ r \cos u &= x \cos \varrho + y \sin \varrho. \end{aligned} \quad (14)$$

**71. Die Bahnelemente.** Überblicken wir am Schluß dieses Teiles die Lösung der behandelten Aufgabe: »die Differenzialgleichungen 2) (Seite 125) der Bewegung eines Körpers von gegebener Masse um die Sonne zu integrieren und das Integral im Hinblick auf die Aufgabe der Bahnbestimmung zu studieren«, so erkennen wir, daß die genannte Bewegung von sechs Konstanten abhängig ist, den Integrationskonstanten der drei Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Wir zählen diese Konstanten, welche die Bahnelemente genannt werden, im folgenden nochmals auf, indem wir zuerst die vier Konstanten nennen, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen und dann die zwei, welche die Bahnebene im Raum angeben:

1. Die halbe große Achse  $a$  beziehungsweise die dadurch gegebene mittlere Bewegung  $\mu$ .

2. Die Exzentrizität  $e$ . In der Parabel, wo  $a$  unendlich groß und  $e$  gleich 1 ist, tritt an Stelle dieser beiden Elemente der Parameter  $p$  oder die Periheldistanz  $q$ .

3. Die Länge des Perihels  $\varpi$  oder der Abstand des Perihels vom Knoten  $\omega$ .

4. Die Epoche  $t_0$  oder die Zeitangabe, zu welcher sich der Körper in einem bestimmten Punkte seiner Bahn befindet. In der Ellipse gibt man hierzu die mittlere Anomalie  $M_0$  für eine bestimmte Zeit. In der Hyperbel und Parabel pflegt man die Zeit des Periheldurchganges  $T$  anzugeben.

5. Die Länge des Knotens  $\Omega$ , gezählt auf der Ekliptik oder einer anderen Grundebene.

6. Die Neigung gegen die Ekliptik oder die angenommene Grundebene:  $i$ .

Eine Zusammenstellung des vollständigen Integrales, getrennt nach den drei Kurven, wird die Übersicht erleichtern.

#### A. Ellipse:

$$\mu = \frac{k'' \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$M_0 + \mu(t - t_0) = E - e \sin E$$

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$r \cos v = a(\cos E - e)$$

$$s = \Omega + \omega + v = \varpi + v$$

$$u = s - \Omega = \omega + v = \varpi - \Omega + v$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega).$$

#### B. Parabel:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} v^3 = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}} (t - T)$$

$$r = \frac{q}{\cos^{\frac{1}{2}} v^2}$$

$$u = \omega + v$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega).$$

## C. Hyperbel:

$$\mu = \frac{\text{Mod } k'' \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Mod } e \text{ tg } F - \text{Log } \text{tg} (45^\circ + \frac{1}{2}F) = \mu(t - T)$$

$$r \sin v = a \sqrt{e^2 - 1} \text{ tg } F$$

$$r \cos v = a \left( e - \frac{1}{\cos F} \right)$$

$$u = \omega + v$$

$$\text{tg}(l - \varOmega) = \cos i \text{ tg } u$$

$$\text{tg } b = \text{tg } i \sin(l - \varOmega).$$

Wir haben hier natürlich nur je eine von den mannigfachen Formen, die wir kennen lernten, aufgenommen.

Man ersieht, daß bei bekannten Elementen für jede Zeit  $t$  die heliozentrischen Polarkoordinaten  $r$ ,  $l$ ,  $b$  berechnet werden können. Der Übergang auf den geozentrischen Ort ist bereits in Nr. 13 gezeigt worden.