universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Bahnbestimmung der Himmelskörper

Bauschinger, Julius

Leipzig, 1928

urn:nbn:at:at-ubi:2-6413

DIE

BAHNBESTIMMUNG

DER

HIMMELSKÖRPER

VON

JULIUS BAUSCHINGER

Bibliothek
der Universitäts-Sternwarte
Innsbruck.
Inv.-Nr. B. 205
Syst. Sign.
Schrank II. 7

Universitäts-Sternwarte
Innsbruck

MIT 84 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1906

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, werden vorbehalten.

MEINEM FREUNDE

DR. ERNST MAYER

UNIVERSITÄTSPROFESSOR IN WÜRZBURG

ZUGEEIGNET

INHALT.

Erster Teil.

Die Koordinaten.

Abschnitt I.

Sphärik.

Seite

1. Bogen und Winkel auf der Kugel 1
2. Quadrantendreieck 3
3. Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie 5
4. Abgeleitete Formeln der sphärischen Trigonometrie 8
5. Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie 10
6. Beziehungen zwischen zwei Quadrantendreiecken 11
7. Beziehungen zwischen den sphärischen und den rechtwinkligen Koordinaten . . . 15
8. Kurven auf der Kugelfläche 16

Abschnitt II.

Die astronomischen Koordinatensysteme.

9. Die Systeme des Äquators und der Ekliptik 18
10. Bestimmung eines Punktes in beiden Systemen 18
11. Bestimmung der Lage einer Bahn in beiden Systemen 23
12. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Bahn 26
13. Umwandlung von Koordinaten mit verschiedenen Anfangspunkten. Ephemeridenrechnung 30

Abschnitt III.

Astronomische Zeitrechnung.

14. Die Zeitmessung im allgemeinen 33
15. Sternzeit und mittlere Sonnenzeit 34
16. Die Zeitrechnung mit Jahren 39

Abschnitt IV.

Mechanik.

17. Bewegung eines Punktes 42
18. Bewegung eines starren Körpers 47

Abschnitt V.

Präzession und Nutation der Äquinoktien.

Seite

19. Theorie der Rotation der Erde 51
20. Die Präzession 67
21. Die Nutation 76
22. Umsetzung der Präzessions- und Nutationsformeln in Zahlen 77
23. Reduktion auf den Jahresanfang — auf den wahren Ort 80
24. Folgerungen: Mondmasse. Verhältnis der Trägheitsmomente des Erdkörpers . . 82

Abschnitt VI.

Die Aberration.

25. Die Aberration im allgemeinen 84
26. Die Fixsternaberration. 86
27. Die Planetenaberration und ihre Verbindung mit der Fixsternaberration. 91

Abschnitt VII.

Zusammenwirken von Präzession, Nutation und Aberration.

28. Im Fall der gewöhnlichen Sterne 94
29. Verfahren bei Polsternen 94
30. Beispiele zu den Reduktionsrechnungen 96

Abschnitt VIII.

Die Parallaxe.

31. Parallaxe im allgemeinen 101
32. Parallaxe in Rektaszension und Deklination 103
33. Parallaxe in Länge und Breite 105
34. Korrektion für Sonnenbreite. 106
35. Übergang zum locus fictus 106

Zweiter Teil.

Die heliozentrische Bewegung.

Abschnitt IX.

Geometrie der Kegelschnitte.

36. Entstehung der Kegelschnitte 112
37. Die Ellipse 115
38. Die Hyperbel 118
39. Die Parabel. 121
40. Gesamtbetrachtung der drei Kurven 122

Abschnitt X.

Die Bewegung um die Sonne im allgemeinen.

41. Erstes und zweites Keplersches Gesetz. 124
42. Kriterium für die Art der Bahn. 129
43. Bestimmung der Bahn aus Ort und Geschwindigkeit. 131

Abschnitt XI.

Die Bewegung in der Ellipse.

Seite

44. Die Bewegung in der Ellipse 133
45. Die Keplersche Gleichung 141
46. Die Differenzialquotienten der Polarkoordinaten nach der Zeit 147
47. Die Gaußsche Konstante k; die astronomischen Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse 149
48. Beziehungen zwischen mehreren Orten einer Ellipse und den Elementen 150
49. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Ellipse. 154
50. Bestimmung der elliptischen Elemente 165
51. Die Lambertsche Gleichung für die elliptische Bewegung. 168
52. Die Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse als Funktionen der Zeit 171
53. Die Formeln von Gibbs 179
54. Beziehungen zwischen drei Radienvektoren und den Zwischenzeiten 184

Abschnitt XII.

Die Bewegung in der Parabel.

55. Die Bewegung in der Parabel 186
56. Beziehungen zwischen mehreren Örtern in der Parabel. Die Eulersche Gleichung 191
57. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Parabel 197
58. Bestimmung der parabolischen Elemente 198
59. Das Verhältnis der Dreiecksflächen in der Parabel 200

Abschnitt XIII.

Die Bewegung in der Hyperbel.

60. Die Bewegung in der Hyperbel 201
61. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Hyperbel. 204
62. Bestimmung der Elemente der Hyperbel 207
63. Der Lambertsche Satz für die Hyperbel 209

Abschnitt XIV.

Bewegung in parabelnahen Bahnen.

64. Bewegung in parabelnahen Bahnen 210
65. Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Bahnen. 216
66. Die Lambertsche Gleichung bei parabelnahen Bahnen 217
67. Bestimmung der Elemente bei parabelnahen Bahnen 219
68. Bestimmung der Elemente parabelnaher Bahnen, wenn die große Halbachse bekannt ist 221

Abschnitt XV.

Die Bahn im Raum.

69. Knoten, Neigung, Perihelslänge 223
70. Die Gleichung der Bahnebene 226
71. Die Bahnelemente. 227

Dritter Teil.

Die geozentrische Bewegung.

Abschnitt XVI.

Einzelne Örter.

Seite

72. Ein einzelner geozentrischer Ort. Berechnung einer Ephemeride 229
73. Kriterium für die Zugehörigkeit eines beobachteten Ortes zu einer Bahn 233
74. Zwei geozentrische Örter 235

Abschnitt XVII.

Der Lambertsche Satz von der Krümmung der Bahnen.

75. Drei geozentrische Örter. Der Lambertsche Satz 237
76. Die Formulierung des Lambertschen Satzes von Bruns 241

Abschnitt XVIII.

Die scheinbare Bahn.

77. Die scheinbare Bahn und ihre ausgezeichneten Punkte 244
78. Die Vorausberechnung der Oppositionszeit 247
79. Doppelpunkte und Schleifenbildung 248
80. Der Zodiakus der Bahnen 249

Vierter Teil.

Die Methoden der ersten Bahnbestimmung.

Abschnitt XIX.

Die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen.

81. Feststellung des Problems 252
82. Bedingung der Ebene. Die Grundgleichungen 253
83. Allgemeine Diskussion der Grundgleichungen 258
84. Umformung der Ausdrücke für die geozentrischen Distanzen 262
85. Die Gaußsche Gleichung 266
86. Die Hypothesenrechnung 273
87. Zusammenstellung der Formeln für eine erste Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen 278
88. Beispiel. Planet 1904 OA 282
89. Die Hansensche Analyse 285
90. Zusammenstellung der Formeln für die Hansensche Methode 291
91. Beispiel. Planet (433) Eros 293
92. Eine andere Form der Hypothesenrechnung 297
93. Ausdrücke von Fabritius für die Exzentrizität und die Periheldistanz 302

Seite

94. Bahnbestimmung mit Benutzung der Gibbsschen Formeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen 303
95. Die Formeln von *E. Weiß*. 305
96. Verfahren, wenn Näherungen vorliegen. 310
97. Beispiel für Berechnung einer Bahn, wenn ein provisorisches Elementensystem vorliegt: Komet Brooks (1889 V). 313
98. Variation der geozentrischen Distanzen 316
99. Beispiel zur Variation der geozentrischen Distanzen. 318
100. Die Ausnahmefälle. Die Sicherheit der Bahnbestimmung 320
101. Die mehrfachen Lösungen 322

Abschnitt XX.

Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.

102. Vorbemerkung 326
103. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen 327
104. Übersicht der Formeln für eine Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. . . . 329
105. Beispiel einer Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen: Planet (468). 332

Abschnitt XXI.

Die direkten Methoden der Bahnbestimmung.

106. Die Methode von J. Glauser 336
107. Die Laplacesche Methode 337
108. Umformung von Bruns 340
109. Berechnung der ersten und zweiten Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten 342
110. Bestimmung der Elemente aus den Koordinaten eines Ortes und ihren Geschwindigkeiten 343
111. Baryzentrische Örter 347
112. Übersicht der Formeln für die Laplace-Brunssche Methode 347

Abschnitt XXII.

Die Bestimmung einer parabolischen Bahn.

113. Die Methode von Lambert-Olbers 349
114. Führung der Hypothesenrechnung. Kontrollen 355
115. Übersicht der Formeln zur Berechnung einer ersten parabolischen Bahn. 356
116. Beispiel einer ersten parabolischen Bahn. Komet 1896 IV (Sperra) 359
117. Eine andere Form der Hypothesenrechnung. 361
118. Erste Verbesserung parabolischer Bahnen. 365
119. Beispiel einer parabolischen Bahnverbesserung, wenn Näherungen vorliegen: Komet 1896 I (Perrine-Lamp) 368
120. Der Ausnahmefall 371
121. Beispiel zum Ausnahmefall: Komet 1869 III 373

Abschnitt XXIII.

Berechnung parabelnaher Bahnen.

Seite
122. Übergang von der Parabel auf Ellipse und Hyperbel 375

Abschnitt XXIV.

Bestimmung einer Kreisbahn.

123. Berechnung einer Kreisbahn. Erste Methode 379
124. Bestimmung einer Kreisbahn. Gaußsche Methode. 382
125. Übersicht der Formeln für Berechnung einer Kreisbahn. 384
126. Beispiel einer Kreisbahn: Planet 1901 GL 385
127. Unmöglichkeit einer Kreisbahn. 387

Abschnitt XXV.

Geschichte der Bahnbestimmung.

128. Das Kometenproblem von Newton bis Olbers. 388
129. Die Bahnbestimmung im 19. Jahrhundert. 392

Fünfter Teil.

Die Bahnverbesserung.

Abschnitt XXVI.

Die Ausgleichungsrechnung.

130. Aufgabe. Prinzip der kleinsten Quadratsumme. 394
131. Mittlerer Fehler. Gewicht 395
132. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleichem Gewicht 396
133. Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedenem Gewicht. 399
134. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. 402
135. Der Gaußsche Algorithmus zur Auflösung der Normalgleichungen 410
136. Der Gaußsche Satz über das Gewicht der Unbekannten. 415
137. Bildung der Normalgleichungen. Kontrollmaßregeln 418
138. Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen 423
139. Beispiel für die Durchführung einer Ausgleichung 424

Abschnitt XVII.

Die Bahnverbesserung durch Variation der Elemente.

140. Formulierung des Problems 432
141. Die Grundformeln der Bahnverbesserung 434
142. Die Formeln der Bahnverbesserung. Erste Methode 438
143. Beispiel für eine Bahnverbesserung nach der ersten Methode. Planet (221) Eos. 443
144. Die Formeln der Bahnverbesserung. Zweite Methode 447
145. Beispiel für eine Bahnverbesserung nach der zweiten Methode. Komet Brooks (1889 V) 450
146. Verbesserung von parabelnahen und parabolischen Bahnen 452

Abschnitt XXVIII.

Die Bahnverbesserung durch die Variation der geozentrischen Distanzen.

Seite
147. Formulierung des Problems 462
148. Aufstellung der Grundgleichungen 463
149. Die Differenziale der Verhältnisse der Dreiecksflächen 466
150. Zusammenstellung der Formeln 470
151. Beispiel: (434) Hungaria 472

Sechster Teil.

Theorie der speziellen Störungen.

Abschnitt XXIX.

Mechanische Integration.

152. Bezeichnung. Vorbereitende Entwicklungen 474
153. Formeln für die einfache Integration. 477
154. Formeln für Doppelintegrale 480

Abschnitt XXX.

Berechnung der speziellen Störungen in den Elementen.

155. Einführung. Geschichtliche Bemerkungen. 484
156. Aufstellung der Grundgleichungen für die elliptischen Elemente. 486
157. Berechnung der störenden Kräfte. 499
158. Zusammenstellung der Formeln. 501
159. Beispiel: Störungen von (221) Eos durch Jupiter. 504
160. Variation der Elemente bei Kometenbahnen. 508
161. Verfahren bei Bahnen von geringer Exzentrizität 511
162. Verfahren bei Bahnen von sehr geringer Neigung. 514
163. Variation hyperbolischer Elemente 515

Abschnitt XXXI.

Berechnung der speziellen Störungen in den Polarkoordinaten.

164. Aufstellung der Grundgleichungen 519
165. Berechnung der eingeführten Größen 526
166. Ausführung der Integration 529
167. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in den Polarkoordinaten 530
168. Übergang von den Störungen in den Polarkoordinaten auf Elementenstörungen . 532
169. Zusammenstellung der Formeln. 537

Abschnitt XXXII.

Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten.

Seite

170. Grundgleichungen der Enckeschen Methode 539
171. Ausführung der Integration 541
172. Berechnung der Koordinaten 544
173. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten 547
174. Beispiel: Komet Brooks 1896 VI. 548

Abschnitt XXXIII.

Spezielle Störungen bei Kometenbahnen.

175. Kometenstörungen in den Polarkoordinaten 555
176. Störungen der Kometen in unmittelbarer Nähe der großen Planeten 556
177. Kometenstörungen bei sehr weiter Entfernung des störenden Planeten 563
178. Übertragung der Elemente vom Sonnenmittelpunkt auf den Schwerpunkt von Sonne und störendem Planeten 568

Abschnitt XXXIV.

Die definitive Bahn.

179. Begriff und Bestimmung der definitiven Bahn. 576
180. Beispiel. (221) Eos 577

Siebenter Teil.

Bahnbestimmung der Meteore, Satelliten und Doppelsterne.

Abschnitt XXXV.

Bahnbestimmung der Meteore.

181. Einleitung 579
182. Zenithattraktion. Aberration des Radiationspunktes. Apex 580
183. Bahnbestimmung von Meteorströmen 586
Parabel 587
Ellipse 588
Hyperbel 590
184. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Bahnen von Meteorströmen. 591
185. Bahnbestimmung von Feuerkugeln 593

Abschnitt XXXVI.

Bahnbestimmung der Satelliten.

186. Einleitung 598
187. Bestimmung der Kreisbahn eines Satelliten 599
188. Darstellung der beobachteten Koordinaten durch die Elemente. 602
189. Differenzialformeln der Bahnverbesserung 609

Abschnitt XXXVII.

Bahnbestimmung der Doppelsterne.

Seite

190. Allgemeine Sätze über die Bewegungen bei Doppelsternen 615
191. Beziehungen zwischen der scheinbaren und der wahren Bahnellipse 622
192. Die Bahnbestimmung der Doppelsterne. Allgemeines 625
193. Graphische Methode von Zwiers 626
194. Graphische Methode von Klinkerfues 628
195. Analytische Methode 632
196. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung einer Doppelsternbahn . . . 637
197. Differenzialformeln der Bahnverbesserung 638
198. Veränderliche Eigenbewegung. 639
199. Bahnbestimmung aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius 641
200. Bahnbestimmung aus photometrischen Beobachtungen 649

Sachregister 651

Die in diesem Werk zitierten Tafeln sind in einem besonderen Bande erschienen:

Tafeln zur theoretischen Astronomie,

bearbeitet von J. Bauschinger.

Leipzig, W. Engelmann, 1901.

Berichtigungen.

In Fig. 9 (Seite 26) muß sich der den Winkel C_2' anzeigende Bogen bis zum größten Kreis c_2' erstrecken.

Seite 43 Zeile 5 v. u. statt gedachten lies gedrehten
» 250 Zeile 20 v. o. statt $\cos(u + \omega)$ lies $\cos(u - \omega)$
» 280 In der Formel für y_2 lies h_2 statt h
» 369 Zeile 12 v. o. statt nunmehr lies nur mehr.

Berichtigungen zu den Tafeln.

Seite 35 Zeile 6 v. u. statt g lies g'
» 36 Zeile 15 v. o. statt $m = p \cos\varepsilon$ lies $m = p\cos\varepsilon - \pi \sin\Pi \sin\varepsilon = p_1 \cos\varepsilon - \pi \sin\Pi \operatorname{cosec}\varepsilon$
» 36 Zeile 10 v. o. Der Betrag der Lunisolarpräzession ist: $50''.3684 - 0''.0002150\,(T - 1850.0)$
» 60 Arg. E statt 56 lies 65
» 100 Arg. 0.010 Hyp. statt 9.998 6022 lies 9.998 7022.

Erster Teil.

Die Koordinaten.

Abschnitt I.

Sphärik.

1. Bogen und Winkel auf der Kugel. Zur Beschreibung der Lage und der scheinbaren Bewegungen der Gestirne denkt man sich diese aus dem Mittelpunkt einer Kugel von beliebigem Radius auf ihre Oberfläche projiziert und erreicht dann durch Bestimmung der Lage der Durchschnittspunkte auf der Kugel eine bequeme Festlegung der *Richtungen*, die vom Kugelmittelpunkt nach den Gestirnen gehen. Es ist daher notwendig, daß wir die hauptsächlichsten Beziehungen zwischen Punkten und Hauptkreisen der Kugeloberfläche und die Formeln der sphärischen Trigonometrie in der von den astronomischen Anwendungen geforderten Allgemeinheit kurz zusammenstellen.

Pole eines Hauptkreises (des Grundkreises) nennt man diejenigen beiden Punkte der Kugel, die von der im Mittelpunkt zur Ebene des Kreises errichteten Senkrechten ausgeschnittten werden. Zu ihrer Unterscheidung muß eine Festsetzung getroffen werden und hierzu muß man zuerst den Sinn, in dem die Bogen größter Kreise durchlaufen werden, fixieren. Wir wählen z. B. denjenigen Sinn, in welchem die Erdkugel sich dreht, und nennen *Nordpol* denjenigen Pol, der einem Individuum, das auf einem Hauptkreis im genannten Sinn, den Kopf gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtet, entlang geht, zur Rechten liegt; den anderen Pol heißen wir *Südpol*. Wenn man umgekehrt weiß, welcher von den zwei Polen eines Kreises der Nordpol sein soll, so ist dadurch der Sinn, in dem der Kreis durchlaufen werden soll, festgelegt. Für Grundkreise und Pole gilt der Satz: Alle durch einen Pol gelegten Hauptkreise gehen auch durch den anderen und stehen auf dem Grundkreise senkrecht; der Bogen zwischen Pol und Grundkreis ist auf allen ein Rechter.

Zwei Hauptkreise schneiden sich in zwei Punkten, die auf beiden um einen Halbkreis voneinander abstehen und *Knoten* heißen mögen. Um sie voneinander zu unterscheiden, ist wieder eine Festsetzung nötig. Nehmen wir an, der Sinn der Bogenzählung sei für beide Hauptkreise fixiert, z. B., wie das in der Astronomie üblich ist, in der Weise, daß die Bogen bei der in den größten Kreisen ausgeführten scheinbaren Bewegung wachsen. Dann nennen wir den *aufsteigenden* Knoten des einen

größten Kreises B in bezug auf den anderen E jenen, in welchem das, wie oben, in B sich bewegende Individuum, aus der Halbkugel, welche den Südpol von E enthält, in diejenige, in welcher der Nordpol liegt, gelangt; den anderen nennen wir den *absteigenden*. Der aufsteigende Knoten von B in bezug auf E ist der absteigende von E in bezug auf B und umgekehrt.

Um den *sphärischen Winkel*, welchen zwei Hauptkreise miteinander bilden, unzweideutig zu bestimmen, müssen ebenfalls Festsetzungen gemacht werden. Ziehen wir durch einen Pol Hauptkreise und setzen fest, daß die Bogen in ihnen von diesem Pol aus nur bis 180° oder bis zum anderen Pol gezählt werden sollen, so genügt zur Bestimmung des sphärischen Winkels zwischen zweien derselben die Angabe des Sinnes der Drehung, in welcher von dem einen zum anderen übergegangen werden soll; diese Winkel können dann von 0° bis 360° gezählt werden. — Ist aber der Sinn, in welchem zwei Hauptkreise E und B von 0° bis 360° durchlaufen werden sollen, festgelegt, so nennen wir den Winkel, welchen B mit E bildet, jenen, welcher erstens seinen Scheitel im aufsteigenden Knoten von B auf E hat, zweitens zwischen jenen Zweigen der Hauptkreise liegt, die im Sinn der Zählungsrichtung vom Scheitel wegführen, und drittens zwischen 0° und 180° liegt. Größer als 180° kann nämlich der Winkel nicht sein, ohne daß der Knoten seine Eigenschaft als aufsteigender verliert; der Drehungssinn ist dadurch bestimmt. In der Astronomie wird dieser Winkel die *Neigung* von B gegen E genannt. Die Neigung von B gegen E ist nach dieser Definition gleich der Neigung von E gegen B auch dem Zeichen nach. Ferner sind folgende Sätze ersichtlich:

Die Neigung zweier Hauptkreise ist gleich dem Bogen zwischen ihren gleichnamigen Polen, der kleiner ist als 180°.

Der durch die Pole zweier Kreise gelegte Hauptkreis steht senkrecht auf den Hauptkreisen, die durch jene Pole und die Knoten gelegt werden.

Soll endlich der Winkel zwischen zwei Hauptkreisen ohne jede Beschränkung entweder der Bogen oder des Winkels auf $< 180^\circ$ definiert werden, so ist hierzu sowohl die Angabe des Sinnes, in dem die Kreise durchlaufen werden, als auch des Sinnes der Drehung um ihren gemeinsamen Kugeldurchmesser erforderlich. Der Winkel EB ist derjenige, um welchen E um den Durchmesser im gegebenen Drehungssinn gedreht werden muß, bis E mit B auch dem Sinn nach zusammenfällt. Aus dem mit fixierten Sinnen gemessenen Winkel ε wird $180^\circ + \varepsilon$, wenn der Sinn in einem der Kreise entgegengesetzt genommen wird, und $360^\circ - \varepsilon$, wenn der Drehungssinn der umgekehrte wird. Wird zum Scheitel des Winkels als Pol der Hauptkreis M gesucht, so kann der Winkel durch den Bogen gemessen werden, der von den Schenkeln auf M ausgeschnitten wird. Durch den Drehungssinn ist auch der Sinn der Zählung in M festgesetzt.

Wir stellen noch einige leicht zu beweisende Sätze zusammen, die oft nützlich sind zur Aufsuchung der Pole und ihrer Hauptkreise:

1. Die Pole eines durch zwei Punkte gelegten Hauptkreises sind die Schnittpunkte der Grundkreise jener Pole.

2. Der Grundkreis eines Poles geht durch die Pole aller durch diesen Pol gelegten Kreise.

3. Die zu den Punkten eines Hauptkreises als Polen gehörigen Grundkreise gehen alle durch zwei Punkte, die Pole jenes Hauptkreises.

2. Quadrantendreieck. Wenn man die Schnittpunkte der positiven Achsen x, y, z eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Kugel liegt, mit der Oberfläche der Kugel durch Hauptkreise verbindet, so erhält man ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten und Winkel alle 90° betragen. Durch ein solches Quadrantendreieck kann also ein rechtwinkliges Koordinatensystem immer dann ersetzt werden, wenn es sich nur um Richtungen vom Anfangspunkt aus handelt, nicht um Entfernungen. Wir leiten über diese Quadrantendreiecke einige Sätze ab.

Verbindet man einen Punkt A der Kugel mit den Ecken x, y, z des Quadrantendreiecks durch Bogen größter Kreise:

$$xA = \alpha_1, \quad yA = \alpha_2, \quad zA = \alpha_3,$$

so folgt:

$$\cos \alpha_1^2 + \cos \alpha_2^2 + \cos \alpha_3^2 = 1.$$

Ist B ein zweiter Punkt der Kugel, zu dem $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gehören, so folgt aus dem Satz, daß die Summe der Projektionen eines geschlossenen Polygons auf eine Gerade gleich Null ist, die Relation

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = \cos (AB).$$

Ist $\xi \eta \zeta$ ein zweites Quadrantendreieck auf derselben Kugel und sind dessen Ecken gegen die des ersten durch die Bogen des Diagramms:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

festgelegt, so bestehen die aus obigen beiden Relationen leicht abzuleitenden:

$$\begin{aligned}
&\cos \alpha_1^2 + \cos \alpha_2^2 + \cos \alpha_3^2 = 1 \\
&\cos \beta_1^2 + \cos \beta_2^2 + \cos \beta_3^2 = 1 \\
&\cos \gamma_1^2 + \cos \gamma_2^2 + \cos \gamma_3^2 = 1 \\
\hline
&\cos \alpha_1^2 + \cos \beta_1^2 + \cos \gamma_1^2 = 1 \\
&\cos \alpha_2^2 + \cos \beta_2^2 + \cos \gamma_2^2 = 1 \\
&\cos \alpha_3^2 + \cos \beta_3^2 + \cos \gamma_3^2 = 1 \\
\hline
&\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = 0 \\
&\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 = 0 \\
&\cos \gamma_1 \cos \alpha_1 + \cos \gamma_2 \cos \alpha_2 + \cos \gamma_3 \cos \alpha_3 = 0 \\
\hline
&\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0 \\
&\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0 \\
&\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 = 0
\end{aligned} \qquad 1)$$

von denen die zweite und vierte Gruppe notwendige Folgen der ersten und dritten sind. Man kann auch noch andere Umformungen machen, die wir für späteren Gebrauch gleich hier zusammenstellen. Man erhält sie am einfachsten, wenn man

auf die den beiden Quadrantendreiecken zu Grunde liegenden rechtwinkligen Systeme zurückgeht, die Koordinaten eines und desselben Punktes in dem einen x, y, z, in dem anderen ξ, η, ζ nennt und diese durcheinander ausdrückt. Der Projektionssatz gibt sofort:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\alpha_1 + \eta \cos\beta_1 + \zeta \cos\gamma_1 \\ y &= \xi \cos\alpha_2 + \eta \cos\beta_2 + \zeta \cos\gamma_2 \\ z &= \xi \cos\alpha_3 + \eta \cos\beta_3 + \zeta \cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad 2)$$

und

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos\alpha_1 + y \cos\alpha_2 + z \cos\alpha_3 \\ \eta &= x \cos\beta_1 + y \cos\beta_2 + z \cos\beta_3 \\ \zeta &= x \cos\gamma_1 + y \cos\gamma_2 + z \cos\gamma_3 . \end{aligned} \qquad 3)$$

Da

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

sein muß, so ergeben sich zunächst die schon vorhin abgeleiteten Gruppen. Andererseits muß die Auflösung des ersten Gleichungssystems nach ξ, η, ζ die Werte des zweiten geben. Nennt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta ,$$

so muß also sein:

$$\begin{aligned} \cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\gamma_2 \cos\beta_3 &= \Delta \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_1 \cos\beta_3 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3 &= \Delta \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2 &= \Delta \cos\alpha_3 \end{aligned}$$

u. s. f.

Quadriert und addiert man die angeschriebenen drei Gleichungen, so folgt

$$\Delta^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \Delta = \pm 1 .$$

Über das Zeichen muß eine Festsetzung getroffen werden. Können die beiden Quadrantendreiecke derart durch Drehung zur Deckung gebracht werden, daß ξ auf x, η auf y, ζ auf z zu liegen kommt, dann wird, wie man sich schnell überzeugt, $\Delta = +1$, im entgegengesetzten Fall wird $\Delta = -1$. Wir nehmen an, daß die Quadrantendreiecke die zuerst genannte Eigenschaft besitzen und haben dann:

$$\begin{aligned} \cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2 &= \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_3 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3 &= \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1 &= \cos\alpha_3 \\ \hline \cos\gamma_2 \cos\alpha_3 - \cos\gamma_3 \cos\alpha_2 &= \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_3 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_3 &= \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1 &= \cos\beta_3 \\ \hline \cos\alpha_2 \cos\beta_3 - \cos\alpha_3 \cos\beta_2 &= \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_3 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_3 &= \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1 &= \cos\gamma_3 . \end{aligned} \qquad 4)$$

Von den Beziehungen zwischen den neun Größen $\cos\alpha_1, \ldots$ sind sechs voneinander unabhängig; alle übrigen können aus diesen abgeleitet werden. Wir werden

infolgedessen später zeigen können, daß alle neun Größen durch drei voneinander unabhängige Stücke ausgedrückt werden können.

3. Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie. Wir gehen jetzt zu drei beliebig gelegenen Punkten A, B, C auf der Kugeloberfläche über und untersuchen die Beziehungen zwischen den durch sie bestimmten Bogen größter Kreise und der von diesen eingeschlossenen Winkel. In der Astronomie müssen, um die weitläufige Behandlung von Spezialfällen vermeiden zu können, diese Formeln in der größtmöglichen Allgemeinheit angewendet werden und wir müssen sie daher auch unter dieser Voraussetzung ableiten*).

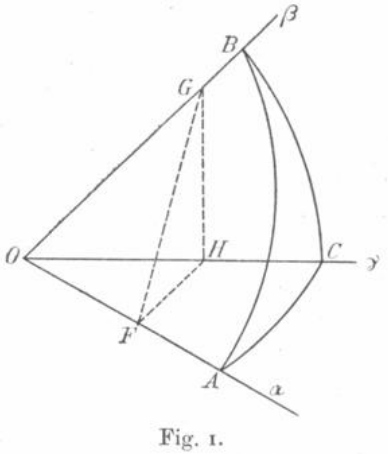


Fig. 1.

Wenn zwei in der Geraden γ (Fig. 1) sich schneidende Ebenen aufeinander senkrecht stehen und man wählt in jeder eine Gerade α bez. β, die sich im Punkte O von γ treffen, so wird eine in dem beliebigen Punkte F von α zu α senkrechte Ebene die andere Ebene in einer Geraden HG schneiden, die senkrecht auf γ steht. Es ist also F die rechtwinklige Projektion von H und G auf α und H die rechtwinklige Projektion von G auf γ; somit folgt, wenn die Winkel zwischen α, β, γ durch die einschließenden Schenkel bezeichnet werden:

$$OF : OG = \cos(\alpha\beta), \qquad OF : OH = \cos(\alpha\gamma), \qquad OH : OG = \cos(\gamma\beta)$$

und zwar gelten diese Gleichungen für beliebige Zählung der Richtung der Strecken in α, β, γ und für beliebigen Drehungssinn der Winkel, da die Verhältnisse von diesen unabhängig sind. Aus den drei Gleichungen folgt aber:

$$\cos(\alpha\beta) = \cos(\alpha\gamma) \cdot \cos(\gamma\beta).$$

Konstruiert man um O die Kugel, die von den Geraden α, β, γ in den Punkten A, B, C getroffen werde, so ist $\cos(AB) = \cos(\alpha\beta)$, ... und daher

$$\cos(AB) = \cos(AC) \cdot \cos(CB) \qquad \text{I.}$$

Diese Formel ist völlig unabhängig vom Sinn der Zählung in den Hauptkreisen AB, AC, CB. Man kann aus ihr alle anderen Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten, für die also dann dieselbe Eigenschaft behauptet werden kann.

Konstruiert man jetzt zu A als Pol den Hauptkreis (Fig. 2), der die Kreise AC, AB, CB in M, N, L schneidet, so ist L der eine Pol von AC, und es ist also: $CL = AM = AN = 90^\circ$ und

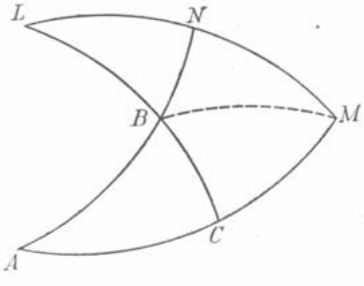


Fig. 2.

$$\cos(BL) = \sin(CB), \qquad \cos(BN) = \sin(AB), \qquad \cos(NL) = \sin(MN).$$

*) Möbius, Gesammelte Werke, Band II, S. 71. 1860.

Wird dies in die Formel I, angewendet auf das bei N rechtwinklige Dreieck BNL, also in

$$\cos(BL) = \cos(BN) \cdot \cos(NL)$$

eingetragen, so folgt:

$$\sin(CB) = \sin(AB) \cdot \sin(MN).$$

(MN) mißt je nach dem für den Hauptkreis ML festgestellten Sinn und je nach dem Drehungssinn des Winkels an A, entweder den einen Winkel bei A oder den diesen zu 360° ergänzenden. Nennen wir den einen Winkel A, so wird also:

$$\sin(CB) = \pm \sin(AB) \sin \mathrm{A} \qquad \text{II.}$$

und es entspricht das obere Zeichen dem einen, das untere dem anderen Drehungssinn. Aus den bei N und C rechtwinkligen Dreiecken BCM und MNB folgt weiter nach I.

$$\cos(CM) \cos(BC) = \cos(MB) = \cos(MN) \cos(NB)$$

und daher

$$\sin(AC) \cdot \cos(BC) = \cos \mathrm{A} \cdot \sin(AB). \qquad \text{III.}$$

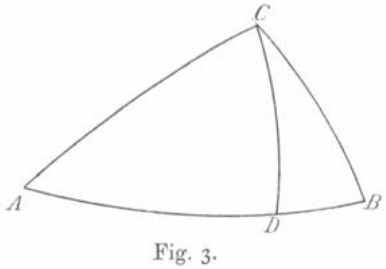


Fig. 3.

Wir gehen jetzt zu drei *beliebig* gelegenen Punkten A, B, C der Kugeloberfläche über und legen durch sie paarweise die Hauptkreise (Fig. 3). Wir legen durch C einen vierten, den Hauptkreis AB in D senkrecht schneidenden Kreis, bestimmen willkürlich den Sinn in allen Hauptkreisen und den *gemeinschaftlichen* Sinn der Drehung bei den Winkeln. Dann gibt II., angewendet auf die bei D rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD:

$$\sin(DC) = \pm \sin(AC) \cdot \sin \mathrm{A} = \mp \sin(BC) \sin \mathrm{B},$$

wo die oberen und die unteren Zeichen zusammengehören, so daß allgemein:

$$\sin(AC) \sin \mathrm{A} = -\sin(BC) \sin \mathrm{B} \qquad \text{IV.}$$

wird.

Ferner ist nach I.

$$\cos(BC) = \cos(DB) \cos(CD) = \cos(AB - AD) \cos(CD).$$

Entwickelt man $\cos(AB - AD)$ und multipliziert das erste Glied mit

$$\cos(CD) = \frac{\cos(AC)}{\cos(AD)} \quad \text{(aus I)}$$

und das zweite mit

$$\cos(CD) = \frac{\sin(AC) \cos \mathrm{A}}{\sin(AD)} \quad \text{(aus III)}$$

so folgt:

$$\cos(BC) = \cos(AB) \cos(AC) + \sin(AB) \sin(AC) \cos \mathrm{A} \qquad \text{V.}$$

Endlich ist nach III.

$$\sin(AC) \cos \mathrm{A} = \sin(AD) \cdot \cos(CD) = \sin(AB - DB) \cos(CD)$$

oder

$$\sin(AC) \cos \mathrm{A} = \sin(AB) \cos(DB) \cos(CD) - \cos(AB) \sin(DB) \cos(CD).$$

Wird hierin

$$\cos(DB)\cos(CD) = \cos(BC) \quad \text{(aus I)}$$
$$\sin(BD)\cos(CD) = \sin(BC)\cos B \quad \text{(aus III)}$$

eingetragen, so folgt:

$$\sin(AC)\cos A = \sin(AB)\cos(BC) + \cos(AB)\sin(BC)\cos B. \qquad \text{VI.}$$

Nachdem bisher nur von den allgemeinen Beziehungen zwischen den von drei Hauptkreisen gebildeten Bogen und Winkeln, nicht aber von einem eigentlichen sphärischen Dreieck die Rede gewesen ist, gehen wir zu den Relationen für dieses letztere selbst über. Dasselbe entsteht, wenn wir drei Punkte A, B, C einer Kugeloberfläche paarweise durch Bogen größter Kreise verbinden. Bevor wir darauf die obigen Formeln anwenden können, muß eine Einigung über den Sinn herbeigeführt werden, da man z. B. unter BC sowohl $\overline{BC}$ als $360^\circ - \overline{BC}$ verstehen kann und da unter dem Winkel bei A sowohl der innere als der äußere, jenen zu 360° ergänzende gemeint sein kann. Unsere Formeln gelten ganz allgemein; wir transkribieren aber jetzt auf einen ganz bestimmten Sinn. Es ist üblich und bequem, die Stücke des Dreiecks folgendermaßen festzusetzen. Man durchlaufe die Peripherie des Dreiecks in einer bestimmten Richtung AB, BC, CA und setze dadurch den Zählungssinn in den Hauptkreisen fest; setzt dann:

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b.$$

Ferner nenne man beim Durchlaufen des Bogens z. B. die linke Seite die innere, und bestimme nun als inneren Winkel jenen, innerhalb dessen die inneren Seiten der Schenkel fallen. Diese inneren Winkel wollen wir mit A, B, C bezeichnen. Dem für unsere allgemeinen Formeln supponierten gleichmäßigen Sinn der Drehungsrichtung entspricht es dann, wenn wir gleichmäßig die drei inneren oder die drei äußeren Winkel verstanden wissen wollen. Dem einen Drehungssinn entsprechen die einen, dem entgegengesetzten die anderen jene zu 360° ergänzenden. Nach der früher für die Winkel A, B, C gegebenen Definition überzeugt man sich nun leicht, daß

$$\mathrm{A} = 180^\circ + A \text{ für den einen Drehungssinn}$$
$$\mathrm{A} = 180^\circ - A \text{ für den anderen Drehungssinn}$$

ist und daß somit

$$\cos \mathrm{A} = -\cos A$$
$$\sin \mathrm{A} = \mp \sin A$$

ist und ebenso für B und C. Damit gehen die Formeln I—VI über in:

1. Formeln für das bei C rechtwinklige Dreieck

$$\begin{cases} \cos a \sin b = \sin c \cos A & \text{(aus III)} \\ \cos a \cos b = \cos c & \text{(aus I)} \\ \sin a = \sin c \sin A & \text{(aus II).} \end{cases} \qquad 1)$$

2. Formeln für das allgemeine Dreieck

sin-Satz:
$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \quad \text{(aus IV)}$$
$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \quad \text{(aus VI)} \qquad 2)$$

cos-Satz:
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{(aus V).}$$

In der letzten Formel vertauschen wir noch die Buchstaben zyklisch, damit sie mit den beiden anderen ein System bildet:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B. \qquad 2\,a)$$

Diese Formeln gelten ihrer Herleitung gemäß allgemein für alle Werte der Bogen und Winkel zwischen 0° und 360°. Bei ihrer Anwendung auf ein vorgelegtes Dreieck erhält man stets die richtigen Werte der gesuchten Stücke, wenn man das Dreieck auf die oben angegebene Weise umläuft und darnach Sinn der Bogen und Winkel bestimmt.

4. Abgeleitete Formeln der sphärischen Trigonometrie. Außer den Hauptformeln werden wir noch einige leicht daraus abzuleitende gebrauchen. Wenn man zu den drei Hauptkreisen, in denen die Seiten des Dreiecks ABC liegen, die Pole konstruiert, und zwar die gleichnamigen für das im selben Sinn umlaufene Dreieck, und den Pol zu AB **C**, zu BC **A** und zu CA **B** nennt, so sind umgekehrt für die Seiten des Dreiecks **ABC** die Ecken des anderen die gleichnamigen Pole und wenn man das Dreieck **ABC** in einem solchen Sinne umläuft, daß A, B, C *dieselben* Pole werden, wie **A**, **B**, **C** vom Dreieck ABC, so werden die Seiten von **ABC** gleich 180° weniger den Winkeln von ABC und die Winkel von **ABC** gleich 180° weniger den Seiten von ABC. Unsere drei Hauptformeln geben daher für das Dreieck **ABC** angeschrieben:

$$\begin{aligned} \sin B \sin a &= \sin A \sin b \\ -\sin B \cos a &= -\sin C \cos A - \cos C \sin A \cos b \\ -\cos B &= \cos C \cos A - \sin C \sin A \cos b, \end{aligned}$$

von denen die erste nichts Neues bringt, die beiden anderen aber zu den Formeln führen:

$$\begin{aligned} \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \end{aligned} \qquad 3)$$

Für das *rechtwinklige* Dreieck ergibt sich daraus, wenn C der rechte Winkel ist:

$$\begin{aligned} \sin B \cos a &= \cos A \\ \sin A \cos b &= \cos B, \end{aligned} \qquad 4)$$

von denen auch eine aus der anderen durch zyklische Vertauschung hervorgeht. Trägt man

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B} \qquad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$$

in

$$\cos c = \cos a \cos b$$

ein, so folgt:

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B. \qquad 5)$$

Aus den bisherigen Formeln mit den daraus durch zyklische Vertauschung der Buchstaben entstehenden, leitet man leicht folgende neue ab*):

*) Gauß, Werke, Band VIII, Seite 290.

$$\begin{aligned}
\sin a\ (\cos C - \cos B) &= (1 + \cos A) \sin (b - c)\\
\sin a\ (\cos C + \cos B) &= (1 - \cos A) \sin (b + c)\\
\sin A\ (\sin b + \sin c) &= \sin a\ (\sin B + \sin C)\\
\sin A\ (\sin b - \sin c) &= \sin a\ (\sin B - \sin C)\\
\sin A\ (\cos c + \cos b) &= (1 + \cos a) \sin (B + C)\\
\sin A\ (\cos c - \cos b) &= (1 - \cos a) \sin (B - C).
\end{aligned}$$

Löst man alles in Faktoren auf und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(b - c) &= P & \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(B + C) &= p\\
\cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(b - c) &= Q & \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(B + C) &= q\\
\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(b + c) &= R & \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(B - C) &= r\\
\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(b + c) &= S & \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(B - C) &= s,
\end{aligned}$$

so schreiben sich die sechs Gleichungen so:

$$\begin{aligned}
&1)\quad PQ = qs & &4)\quad QR = ps\\
&2)\quad RS = pr & &5)\quad PR = pq\\
&3)\quad PS = qr & &6)\quad QS = rs.
\end{aligned}$$

Aus $\frac{1) \times 3)}{6)}$ oder $\frac{1) \times 5)}{4)}$ oder $\frac{3) \times 5)}{2)}$ folgt:

$$P^2 = q^2 \quad \text{oder} \quad P = \pm q$$

und damit: $Q = \pm s$, $S = \pm r$, $R = \pm p$.

Die ausgeschriebenen Formeln, die unter dem Namen der *Gauß*schen oder *Delambre*schen bekannt sind, werden also:

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(b + c) &= \pm \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(B - C)\\
\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(b + c) &= \pm \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(B + C)\\
\cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(b - c) &= \pm \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(B - C)\\
\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(b - c) &= \pm \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(B + C)
\end{aligned} \qquad 6)$$

wo entweder die oberen oder die unteren Zeichen zur Anwendung zu kommen haben. Man überzeugt sich leicht, daß man sowohl wenn daraus A, b, c als wenn a, B, C durch die anderen Stücke gesucht werden, durch beide Systeme dieselben Werte oder um 360° davon verschiedene erhält, so daß man sich auf die Anwendung *eines* Zeichens beschränken kann. Es erleichtert jedoch manchmal die Rechnung, wenn man im Auge behält, daß auch das andere Zeichen richtige Resultate liefert, d. h. daß man *einen* der gegebenen Werte um $\pm$ 360° vermehren darf.

Aus den Gaußschen Gleichungen folgen durch Division die *Napier*schen Analogien:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b + c) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a\\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - c) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}(B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a\\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B + C) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A\\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A\,.
\end{aligned} \qquad 7)$$

5. Die Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie. Wenn man die sechs Stücke eines sphärischen Dreiecks variabel setzt und die Hauptformeln differenziert, erhält man die Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie, die zur Beurteilung der Brauchbarkeit einer Formel für die Rechnung, zur Ermittelung des Einflusses der Fehler beobachteter Stücke auf die gerechneten, und zur Aufstellung der Beziehungen zwischen den Änderungen der Koordinaten und den zugehörigen der Bahnelemente von Nutzen sein werden.

Differenziert man

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

und beachtet, daß

$$\begin{aligned} -\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A &= -\sin a \cos C \\ -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A &= -\sin a \cos B \\ -\sin b \sin c \sin A &= -\sin b \sin a \sin C \end{aligned}$$

so folgt:

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin b \sin C\, dA\,. \qquad 1)$$

Auf gleiche Weise erhält man aus:

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ dA &= -\cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin b \sin C\, da\,. \end{aligned} \qquad 2)$$

Schreibt man den Sinussatz durch Logarithmieren so:

$$\log \sin a + \log \sin B = \log \sin b + \log \sin A$$

und differenziert, so kommt:

$$\operatorname{cotg} a\, da + \operatorname{cotg} B\, dB = \operatorname{cotg} b\, db + \operatorname{cotg} A\, dA\,. \qquad 3)$$

Differenziert man endlich die dritte Hauptgleichung:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A\,,$$

nachdem man sie vorher durch

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

dividiert und dadurch

$$\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A$$

erhalten hat, so kommt nach kurzer Reduktion

$$\sin a\, dB = \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA\,. \qquad 4)$$

Für das *rechtwinklige Dreieck* (rechter Winkel bei C) beschränken wir uns auf die Differenziation der Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos a \sin b &= \sin c \cos A \\ \cos a \cos b &= \cos c \end{aligned}$$

welche gibt:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b\, db - \sin a \sin b\, da &= \cos c \cos A\, dc - \sin c \sin A\, dA \\ -\cos a \sin b\, db - \sin b \cos b\, da &= -\sin c\, dc\,. \end{aligned}$$

Aus der Verbindung dieser beiden folgt nach leichter Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} da &= \cos B\, dc + \sin b\, dA = \cos b \sin A\, dc + \sin b\, dA \\ \cos a\, db &= \frac{\cos A}{\cos a}\, dc - \sin a \cos b\, dA\,. \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

6. Beziehungen zwischen zwei Quadrantendreiecken. Wir gehen auf die oben (Nr. 2) betrachteten zwei Quadrantendreiecke xyz, $\xi\eta\zeta$ zurück und zeigen zunächst, daß deren gegenseitige Lage durch drei voneinander unabhängige Stücke bestimmt werden kann.

Aus $\cos\alpha_3^2 + \cos\beta_3^2 + \cos\gamma_3^2 = 1$ folgt, daß man setzen darf

$$\begin{aligned} \cos\alpha_3 &= \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\beta_3 &= \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\gamma_3 &= \cos\theta \end{aligned} \qquad 1^a)$$

und aus $\cos\gamma_1^2 + \cos\gamma_2^2 + \cos\gamma_3^2 = 1$ folgt ebenso die Richtigkeit von:

$$\begin{aligned} \cos\gamma_1 &= -\sin\theta\sin\psi \\ \cos\gamma_2 &= -\sin\theta\cos\psi \\ \cos\gamma_3 &= \cos\theta\,. \end{aligned} \qquad 1^b)$$

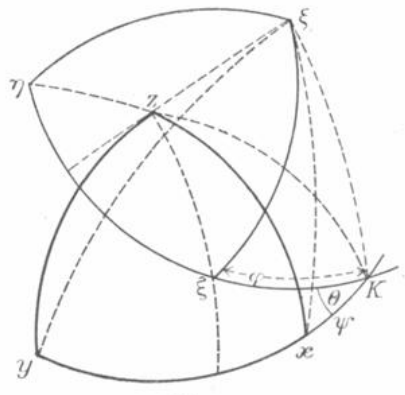


Fig. 4.

Die geometrische Bedeutung der drei Winkel θ, φ, ψ (*Euler*sche Winkel) ist leicht der Fig. 4 zu entnehmen, wenn man unter Anwendung des Kosinussatzes die $\cos\alpha_3$, ... in den Dreiecken ξzK, ηzK, ζzK; $x\zeta K$, $y\zeta K$, $z\zeta K$ ausdrückt: es ist θ die Neigung von $\xi\eta$ gegen xy und φ und ψ stellen die Bogen vom gemeinsamen Knoten K der beiden größten Kreise bis zur ξ- bzw. x-Achse dar. Der Sinn der Zählung ist so festgelegt, daß K der aufsteigende Knoten von $\xi\eta$ auf xy ist.

Die vier übrigen Richtungskosinus lassen sich leicht aus den oben bewiesenen Formeln 4) (Seite 4) ableiten; es ist:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2 \\ \cos\beta_2 &= \cos\gamma_3\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_3 \end{aligned}$$

oder

$$\cos\alpha_1(1 - \cos\gamma_3^2) = -\cos\gamma_1\cos\gamma_3\cos\alpha_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2$$

oder

$$\cos\alpha_1\sin\theta^2 = +\sin\theta^2\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \sin\theta^2\cos\psi\cos\varphi$$

oder

$$\cos\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta\,.$$

Ebenso

$$\begin{aligned} \cos\alpha_2 &= -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\ \cos\beta_1 &= -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \\ \cos\beta_2 &= \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta\,. \end{aligned} \qquad 1^c)$$

Natürlich können diese Beziehungen, nachdem die Bedeutung der θ, φ, ψ festgestellt ist, auch aus den Dreiecken $x\xi K$, $y\xi K$, $x\eta K$, $y\eta K$ abgeleitet werden.

Wir nennen jetzt die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche in den beiden Systemen x, y, z und ξ, η, ζ, dann bestehen nach dem Früheren (Seite 4) zwischen diesen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1 \\ y &= \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2 \\ z &= \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 \\ \eta &= x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 \\ \zeta &= x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3\,. \end{aligned} \right. \qquad 2)$$

Wird der Punkt mit dem Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ fest verbunden gedacht, so daß ξ, η, ζ ihren Wert nicht ändern, so wird bei einer unendlich kleinen Verschiebung

des Systems $\xi\eta\zeta$ auf der Kugel gegen das System xyz der Punkt diese Verschiebung mitmachen und seine Koordinaten x, y, z gegen das unverändert gebliebene System xyz werden Änderungen erlitten haben, deren Betrag aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\delta x &= \xi\,\delta\cos\alpha_1 + \eta\,\delta\cos\beta_1 + \zeta\,\delta\cos\gamma_1\\ \delta y &= \xi\,\delta\cos\alpha_2 + \eta\,\delta\cos\beta_2 + \zeta\,\delta\cos\gamma_2\\ \delta z &= \xi\,\delta\cos\alpha_3 + \eta\,\delta\cos\beta_3 + \zeta\,\delta\cos\gamma_3\end{aligned} \qquad 3)$$

hervorgehen muß. Die neun Größen $\delta\cos\alpha_1, \ldots$ sind natürlich nicht willkürlich, sondern müssen sich alle durch drei unabhängige Verschiebungen ausdrücken lassen z. B. durch $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$; man kann aber auch drei andere nehmen z. B.

$$\begin{aligned}\delta p &= \cos\gamma_1\,\delta\cos\beta_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\beta_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\beta_3\\ \delta q &= \cos\alpha_1\,\delta\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\,\delta\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\,\delta\cos\gamma_3\\ \delta s &= \cos\beta_1\,\delta\cos\alpha_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\alpha_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\alpha_3\,.\end{aligned} \qquad 4)$$

In der Tat ergibt die Variation der Gleichungen 1) (Seite 3) in Verbindung mit den eben angesetzten folgende drei Systeme:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha_1\,\delta\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\,\delta\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3\,\delta\cos\alpha_3 = 0\\ &\cos\beta_1\,\delta\cos\alpha_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\alpha_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\alpha_3 = +\delta s\\ &\cos\gamma_1\,\delta\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\alpha_3 = -\delta q\\ &\cos\alpha_1\,\delta\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\,\delta\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\,\delta\cos\beta_3 = -\delta s\\ &\cos\beta_1\,\delta\cos\beta_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\beta_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\beta_3 = 0\\ &\cos\gamma_1\,\delta\cos\beta_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\beta_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\beta_3 = +\delta p\\ &\cos\alpha_1\,\delta\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\,\delta\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\,\delta\cos\gamma_3 = +\delta q\\ &\cos\beta_1\,\delta\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\gamma_3 = -\delta p\\ &\cos\gamma_1\,\delta\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\gamma_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\gamma_3 = 0\end{aligned}$$

deren Auflösung wegen $\Delta = 1$ und mit Berücksichtigung der Gleichungen 4) Seite 4 ergibt:

$$\begin{aligned}\delta\cos\alpha_1 &= +\cos\beta_1\,\delta s - \cos\gamma_1\,\delta q & \qquad \delta\cos\beta_1 &= +\cos\gamma_1\,\delta p - \cos\alpha_1\,\delta s\\ \delta\cos\alpha_2 &= +\cos\beta_2\,\delta s - \cos\gamma_2\,\delta q & \qquad \delta\cos\beta_2 &= +\cos\gamma_2\,\delta p - \cos\alpha_2\,\delta s\\ \delta\cos\alpha_3 &= +\cos\beta_3\,\delta s - \cos\gamma_3\,\delta q & \qquad \delta\cos\beta_3 &= +\cos\gamma_3\,\delta p - \cos\alpha_3\,\delta s\end{aligned} \qquad 5)$$

$$\begin{aligned}\delta\cos\gamma_1 &= +\cos\alpha_1\,\delta q - \cos\beta_1\,\delta p\\ \delta\cos\gamma_2 &= +\cos\alpha_2\,\delta q - \cos\beta_2\,\delta p\\ \delta\cos\gamma_3 &= +\cos\alpha_3\,\delta q - \cos\beta_3\,\delta p\,.\end{aligned}$$

Die δp, δq, δs ihrerseits lassen sich durch $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ ausdrücken; denn die Gl. 1[a]), 1[b]), 1[c]) Seite 11 ergeben durch Variation:

$$\begin{aligned}\delta\cos\alpha_1 &= \cos\beta_1\,\delta\varphi + \cos\alpha_2\,\delta\psi + \cos\gamma_1\sin\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\alpha_2 &= \cos\beta_2\,\delta\varphi - \cos\alpha_1\,\delta\psi + \cos\gamma_2\sin\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\alpha_3 &= \cos\beta_3\,\delta\varphi + \cos\gamma_3\sin\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\beta_1 &= -\cos\alpha_1\,\delta\varphi + \cos\beta_2\,\delta\psi + \cos\gamma_1\cos\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\beta_2 &= -\cos\alpha_2\,\delta\varphi - \cos\beta_1\,\delta\psi + \cos\gamma_2\cos\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\beta_3 &= -\cos\alpha_3\,\delta\varphi + \cos\gamma_3\cos\varphi\,\delta\theta\\ \delta\cos\gamma_1 &= +\cos\gamma_2\,\delta\psi - \cos\theta\sin\psi\,\delta\theta\\ \delta\cos\gamma_2 &= -\cos\gamma_1\,\delta\psi - \cos\theta\cos\psi\,\delta\theta\\ \delta\cos\gamma_3 &= -\sin\theta\,\delta\theta\end{aligned}$$

und dies in 4) eingesetzt, liefert:

$$\begin{aligned}
\delta p &= -\cos\alpha_3\,\delta\psi + \cos\varphi\,\delta\theta = -\sin\theta\sin\varphi\,\delta\psi + \cos\varphi\,\delta\theta\\
\delta q &= -\cos\beta_3\,\delta\psi - \sin\varphi\,\delta\theta = -\sin\theta\cos\varphi\,\delta\psi - \sin\varphi\,\delta\theta\\
\delta s &= -\cos\gamma_3\,\delta\psi + \delta\varphi \quad = \quad -\cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Einführung der Werte 5) von $\delta\cos\alpha_1, \ldots$ und von $\xi, \ldots$ aus 2) in die Gl. 3) führt auf:

$$\begin{aligned}
\delta x &= -y(\cos\alpha_3\,\delta p + \cos\beta_3\,\delta q + \cos\gamma_3\,\delta s) + z(\cos\alpha_2\,\delta p + \cos\beta_2\,\delta q + \cos\gamma_2\,\delta s)\\
\delta y &= -z(\cos\alpha_1\,\delta p + \cos\beta_1\,\delta q + \cos\gamma_1\,\delta s) + x(\cos\alpha_3\,\delta p + \cos\beta_3\,\delta q + \cos\gamma_3\,\delta s)\\
\delta z &= -x(\cos\alpha_2\,\delta p + \cos\beta_2\,\delta q + \cos\gamma_2\,\delta s) + y(\cos\alpha_1\,\delta p + \cos\beta_1\,\delta q + \cos\gamma_1\,\delta s)\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Wenn man statt der δp, δq, δs die durch

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= \cos\alpha_3\,\delta\cos\alpha_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\beta_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\gamma_2\\
\delta\chi &= \cos\alpha_1\,\delta\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\,\delta\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\,\delta\cos\gamma_3\\
\delta\sigma &= \cos\alpha_2\,\delta\cos\alpha_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\beta_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\gamma_1
\end{aligned} \tag{4a}$$

definierten Größen $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\sigma$ einführt, so erhält man durch eine ähnliche Analyse, wie die eben durchgeführte zunächst:

$$\begin{aligned}
\delta\cos\alpha_1 &= \cos\alpha_2\,\delta\sigma - \cos\alpha_3\,\delta\chi \qquad | \qquad \delta\cos\alpha_2 = \cos\alpha_3\,\delta\pi - \cos\alpha_1\,\delta\sigma\\
\delta\cos\beta_1 &= \cos\beta_2\,\delta\sigma - \cos\beta_3\,\delta\chi \qquad | \qquad \delta\cos\beta_2 = \cos\beta_3\,\delta\pi - \cos\beta_1\,\delta\sigma\\
\delta\cos\gamma_1 &= \cos\gamma_2\,\delta\sigma - \cos\gamma_3\,\delta\chi \qquad | \qquad \delta\cos\gamma_2 = \cos\gamma_3\,\delta\pi - \cos\gamma_1\,\delta\sigma
\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}
\delta\cos\alpha_3 &= \cos\alpha_1\,\delta\chi - \cos\alpha_2\,\delta\pi\\
\delta\cos\beta_3 &= \cos\beta_1\,\delta\chi - \cos\beta_2\,\delta\pi\\
\delta\cos\gamma_3 &= \cos\gamma_1\,\delta\chi - \cos\gamma_2\,\delta\pi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= -\cos\gamma_1\,\delta\varphi - \cos\psi\,\delta\theta = \sin\theta\sin\psi\,\delta\varphi - \cos\psi\,\delta\theta\\
\delta\chi &= -\cos\gamma_2\,\delta\varphi + \sin\psi\,\delta\theta = \sin\theta\cos\psi\,\delta\varphi + \sin\psi\,\delta\theta\\
\delta\sigma &= -\cos\gamma_3\,\delta\varphi + \delta\psi \quad = \quad -\cos\theta\,\delta\varphi + \delta\psi\,.
\end{aligned} \tag{6a}$$

Die Darstellung der δx, δy, δz durch diese wird:

$$\begin{aligned}
\delta x &= y\,\delta\sigma - z\,\delta\chi\\
\delta y &= z\,\delta\pi - x\,\delta\sigma\\
\delta z &= x\,\delta\chi - y\,\delta\pi
\end{aligned} \tag{7a}$$

ist also wesentlich einfacher, als die durch δp, δq, δs. Dieses Verhältnis kehrt sich nun gerade um, wenn die Verrückungen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ des Punktes gegen die Anfangslage des bewegten Systems $\xi\eta\zeta$ aufgesucht werden. Diese werden

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= \cos\alpha_1\,\delta x + \cos\alpha_2\,\delta y + \cos\alpha_3\,\delta z\\
\delta\eta &= \cos\beta_1\,\delta x + \cos\beta_2\,\delta y + \cos\beta_3\,\delta z\\
\delta\zeta &= \cos\gamma_1\,\delta x + \cos\gamma_2\,\delta y + \cos\gamma_3\,\delta z
\end{aligned}$$

und man erhält daraus mit 3) und 5)

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= -\eta\,\delta s + \zeta\,\delta q\\
\delta\eta &= -\zeta\,\delta p + \xi\,\delta s\\
\delta\zeta &= -\xi\,\delta q + \eta\,\delta p
\end{aligned} \tag{8}$$

und dagegen mit 5a)

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= +\eta(\cos\gamma_1\,\delta\pi + \cos\gamma_2\,\delta\chi + \cos\gamma_3\,\delta\sigma) - \zeta(\cos\beta_1\,\delta\pi + \cos\beta_2\,\delta\chi + \cos\beta_3\,\delta\sigma)\\
\delta\eta &= +\zeta(\cos\alpha_1\,\delta\pi + \cos\alpha_2\,\delta\chi + \cos\alpha_3\,\delta\sigma) - \xi(\cos\gamma_1\,\delta\pi + \cos\gamma_2\,\delta\chi + \cos\gamma_3\,\delta\sigma) \quad 8^a)\\
\delta\zeta &= +\xi(\cos\beta_1\,\delta\pi + \cos\beta_2\,\delta\chi + \cos\beta_3\,\delta\sigma) - \eta(\cos\alpha_1\,\delta\pi + \cos\alpha_2\,\delta\chi + \cos\alpha_3\,\delta\sigma)\,.
\end{aligned}$$

Die Bedeutung der eingeführten Stücke δp, δq, δs einerseits und $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\sigma$ andererseits läßt sich leicht aus den Gl. 8) und 7^a) feststellen. Setzt man $\delta q = \delta s = 0$, so folgt aus 8)

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= 0\\
\delta\eta &= -\zeta\,\delta p\\
\delta\zeta &= +\eta\,\delta p
\end{aligned}$$

und daher

$$\sqrt{\delta\eta^2 + \delta\zeta^2} = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}\,\delta p \quad \text{d. h.}$$

durch die Variation δp wird die ξ-Koordinate nicht geändert und der Punkt bleibt in einer zur $\zeta\eta$-Ebene parallelen Ebene; in dieser ändert sich seine Lage um $a\,\delta p$, wenn a den Radius des Kreises bezeichnet, in welchem die Kugel durch die parallel zur $\eta\zeta$-Ebene durch den Punkt gelegte Ebene geschnitten wird; δp ist also der Drehungswinkel um die ξ-Achse. Wir haben somit:

Die Größen δp, δq, δs sind die Drehungswinkel um die Achsen des beweglichen Systems: ξ, η, ζ; und die Größen $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\sigma$ sind die Drehungswinkel um die Achsen des festen Systems: x, y, z. Durch beide können die Verschiebungen in den rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, bezogen auf das feste und das bewegliche System ausgedrückt werden, am einfachsten durch die, welche zum selben System gehören.

Man kann die Bedeutung der δp, ... auch lediglich aus den Definitionsgleichungen 4) und mit bloßer Bezugnahme auf die Bewegung des Systems (nicht des Punktes) ableiten. Geht $\xi\eta\zeta$ in die benachbarte Lage $\xi'\eta'\zeta'$ über, deren Richtungskosinus zum System xyz $\cos\alpha_1 + \delta\cos\alpha_1$, ... sein werden, so wird

$$\cos(\zeta\eta') = \cos\gamma_1(\cos\beta_1 + \delta\cos\beta_1) + \cos\gamma_2(\cos\beta_2 + \delta\cos\beta_2) + \cos\gamma_3(\cos\beta_3 + \delta\cos\beta_3)$$
$$\cos(\zeta\eta') = \cos\gamma_1\,\delta\cos\beta_1 + \cos\gamma_2\,\delta\cos\beta_2 + \cos\gamma_3\,\delta\cos\beta_3 = \delta p.$$

Ebenso:

$$\cos(\eta\zeta') = \cos\beta_1\,\delta\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\,\delta\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\,\delta\cos\gamma_3 = -\delta p\,.$$

Da η' und ζ' unendlich wenig aus $\eta\zeta$ heraustreten, so ist

$$\zeta\eta' = 90^\circ - \eta\eta' \text{ und } \eta\zeta' = 90^\circ + \zeta\zeta'$$

und somit $\delta p = \eta\eta' = \zeta\zeta'$, d. h. gleich der Drehung des Systems um die ξ-Achse. Der Sinn der Drehung ist in unseren Formeln derart angenommen, daß einem vom Mittelpunkt auf das Quadrantendreieck blickenden Beobachter die Drehung um alle Achsen in demselben Sinn erscheint, nämlich in dem, in welchem das Dreieck in der Richtung ξ-η-ζ-ξ umlaufen wird.

Wenn die drei Drehungen δp, δq, δs um bzw. die ξ-, η-, ζ-Achse *zugleich* ausgeführt werden, so können sie durch *eine* Drehung um eine bestimmte Achse ersetzt werden oder, wie man sich ausdrückt, sie setzen sich zu einer resultierenden Drehung zusammen. Die Größe dieser und die Lage der Achse, um die sie statthat, können leicht ermittelt werden. Die Koordinaten des Punktes, durch den die Achsenlage bestimmt ist, müssen sich aus der Überlegung ergeben, daß er bei den

Drehungen in Ruhe bleibt, d. h. daß gleichzeitig $\delta\xi = \delta\eta = \delta\zeta = 0$ ist; für ihn folgt also aus den Gl. 8)

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\delta q}{\delta s}, \quad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{\delta s}{\delta p}, \quad \frac{\xi}{\eta} = \frac{\delta p}{\delta q};$$

seine Richtungskosinus mit den Achsen $\xi\eta\zeta$ sind somit:

$$\frac{\delta p}{\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2}}, \quad \frac{\delta q}{\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2}}, \quad \frac{\delta s}{\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2}}. \tag{9}$$

Ein beliebiger Punkt $\xi\eta\zeta$ wird eine Strecke durchlaufen, deren Quadrat gleich ist: $\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2$ oder nach 8) und leichter Umformung:

$$(\zeta\delta q - \eta\delta s)^2 + (\xi\delta s - \zeta\delta p)^2 + (\eta\delta p - \xi\delta q)^2 =$$
$$(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi\delta p + \eta\delta q + \zeta\delta s)^2.$$

Wählt man den Punkt $\xi\eta\zeta$ in 90° Entfernung von dem durch 9) bestimmten Punkte, so wird

$$\xi\delta p + \eta\delta q + \zeta\delta s = 0$$

und beachtet man, daß $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ gleich dem Quadrat des Kugelradius ist, so wird das Quadrat der auf der Kugeloberfläche durchlaufenen Strecke

$$(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

also der Drehungs*winkel*

$$\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta s^2}. \tag{10}$$

7. Beziehungen zwischen den sphärischen und den rechtwinkligen Koordinaten. Bestimmt man einen Punkt einerseits durch seine rechtwinkligen Koordinaten x, y, z bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, andererseits durch sphärische Koordinaten, gemessen auf einer durch den Punkt gelegten Kugel mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt des ersteren Koordinatensystems, so bestehen zwischen beiden die Beziehungen

$$x = r\cos a$$
$$y = r\cos b$$
$$z = r\cos c$$

wenn r der Radius der Kugel, a, b, c die Winkel zwischen dem Radiusvektor nach dem Punkt und den Achsen des Systems sind. Setzt man

$$\cos a = \cos\delta\cos\alpha$$
$$\cos b = \cos\delta\sin\alpha$$
$$\cos c = \sin\delta$$

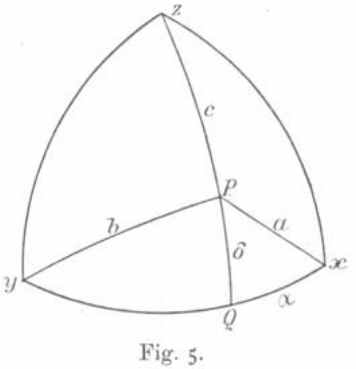


Fig. 5.

wozu man wegen $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$ berechtigt ist, so wird

$$x = r\cos\delta\cos\alpha$$
$$y = r\cos\delta\sin\alpha \tag{11}$$
$$z = r\sin\delta$$

und die α und δ haben folgende Bedeutung (Fig. 5): schneidet der größte Kreis zP den größten Kreis xy in Q, so ist $\delta = 90° - c = PQ$, welches senkrecht auf xy steht und $\alpha = xQ$.

Nimmt man nun an, daß der Punkt xyz seine Lage um dx, dy, dx ändere, so werden auch die Polarkoordinaten r, α, δ andere; man wird die Änderungen leicht durch Differenziation von 11) erhalten:

$$\begin{aligned} dx &= -r\cos\delta\sin\alpha\,d\alpha - r\sin\delta\cos\alpha\,d\delta + \cos\delta\cos\alpha\,dr \\ dy &= +r\cos\delta\cos\alpha\,d\alpha - r\sin\delta\sin\alpha\,d\delta + \cos\delta\sin\alpha\,dr \\ dz &= \qquad\qquad r\cos\delta\,d\delta + \sin\delta\,dr\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus folgt durch leicht ersichtliche Operationen:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{\sin\alpha}{r\cos\delta}dx + \frac{\cos\alpha}{r\cos\delta}dy \\ d\delta &= -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{r}dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{r}dy + \frac{\cos\delta}{r}dz \\ dr &= \cos\alpha\cos\delta\,dx + \sin\alpha\cos\delta\,dy + \sin\delta\,dz\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Formeln gelten, gleichviel ob der Punkt sich um dx, dy, dz verschiebt, oder ob der Anfangspunkt des Koordinatensystems die Bewegungen $-dx$, $-dy$, $-dz$ ausführt.

8. Kurven auf der Kugelfläche*). Wir betrachten jetzt die Bahn, welche ein bewegter Punkt auf einer Kugelfläche vom Radius 1 beschreibt. Ein größter Kreis, welcher die Kurve in dem Punkte A berührt, heißt die »geodätische Tangente« in A; die geodätischen Tangenten in zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Kurve bilden miteinander den »geodätischen Kontingenzwinkel«; dieser, dividiert durch das Bogenelement zwischen den beiden Punkten, gibt die »geodätische Krümmung« der Kurve in A. Die analytischen Ausdrücke für die eben definierten Größen lassen sich leicht aufstellen. Die Koordinaten (Richtungskosinus) a, b, c von A, bezogen auf das Quadrantendreieck, seien Funktionen der Zeit t; der benachbarte Punkt A' der Kurve habe die Koordinaten $a + da$, $b + db$, $c + dc$ und stehe vom ersten um das Bogenelement ds ab. Der durch AA' oder ds gelegte größte Kreis ist die geodätische Tangente in A. Die Richtungskosinus von ds oder die Koordinaten eines Punktes A_1, der von dem parallel zu ds gezogenen Radius der Kugel ausgeschnitten wird, sind

$$\frac{da}{ds},\quad \frac{db}{ds},\quad \frac{dc}{ds}$$

oder wenn die Geschwindigkeit in der Bahn

$$\frac{ds}{dt} = V$$

gesetzt wird:

$$\frac{\frac{da}{dt}}{V} = \frac{a'}{V},\quad \frac{\frac{db}{dt}}{V} = \frac{b'}{V},\quad \frac{\frac{dc}{dt}}{V} = \frac{c'}{V}\,.$$

Sucht man zum größten Kreise AA_1 d. h. zur geodätischen Tangente von A den Nordpol A_0, so bilden AA_1A_0 ein Quadrantendreieck. Sind l, m, n die Koordinaten von A_0, so wird sein:

*) Bruns, Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241.

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$
$$la + mb + nc = 0$$
$$l\frac{a'}{V} + m\frac{b'}{V} + n\frac{c'}{V} = 0$$

also:

$$l = \frac{bc' - cb'}{V}, \quad m = \frac{ca' - ac'}{V}, \quad n = \frac{ab' - ba'}{V}.$$

Der der geodätischen Tangente im Punkte A' entsprechende Punkt A_1, nämlich A_1', wird die Koordinaten haben:

$$\frac{a'}{V} + d\left(\frac{a'}{V}\right), \quad \frac{b'}{V} + d\left(\frac{b'}{V}\right), \quad \frac{c'}{V} + d\left(\frac{c'}{V}\right);$$

A' und A_1' bestimmen die geodätische Tangente von A', wie A und A_1 die von A. Der Kontingenzwinkel, den beide miteinander bilden, ist gleich dem Winkel zwischen ihren Polen oder gleich dem Komplement des Winkels zwischen A_0 und A_1', also gleich:

$$\frac{bc' - cb'}{V}\left(\frac{a'}{V} + d\left(\frac{a'}{V}\right)\right) + \frac{ca' - ac'}{V}\left(\frac{b'}{V} + d\left(\frac{b'}{V}\right)\right) + \frac{ab' - ba'}{V}\left(\frac{c'}{V} + d\left(\frac{c'}{V}\right)\right)$$

oder:

$$\frac{bc' - cb'}{V^2}da' + \frac{ca' - ac'}{V^2}db' + \frac{ab' - ba'}{V^2}dc'.$$

Wird dies mit $ds = Vdt$ dividiert, so entsteht der Ausdruck für die geodätische Krümmung K:

$$K = \frac{1}{V^3}\left(\left(b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt}\right)\frac{d^2a}{dt^2} + \left(c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt}\right)\frac{d^2b}{dt^2} + \left(a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt}\right)\frac{d^2c}{dt^2}\right)$$

oder in Determinantenform geschrieben:

$$V^3K = \begin{vmatrix} a & \frac{da}{dt} & \frac{d^2a}{dt^2} \\ b & \frac{db}{dt} & \frac{d^2b}{dt^2} \\ c & \frac{dc}{dt} & \frac{d^2c}{dt^2} \end{vmatrix}.$$

Es ist noch das Zeichen zu vereinbaren. Wir blicken vom Inneren der Kugel auf die Fläche und durchlaufen die Kurve in der Bewegungsrichtung von A nach A', dann möge rechts die positive, links die negative Seite des größten Kreises AA' liegen. Dreht sich nun die geodätische Tangente beim gleiten von A nach A' nach rechts, so ist die Krümmung positiv und die Kurve wendet ihre konkave Seite nach der positiven Seite des größten Kreises AA' und umgekehrt.

Abschnitt II.

Die astronomischen Koordinatensysteme.

9. Die Systeme des Äquators und der Ekliptik. Die Örter der Gestirne an der Himmelskugel werden auf sphärische Koordinatensysteme bezogen, die durch Erscheinungen am Himmel selbst dargeboten werden. Eine auf der Rotationsachse der Erde senkrechte Ebene, die durch den Mittelpunkt der Sphäre gelegt wird, schneidet diese in einem Hauptkreis, dem *Äquator*, dessen Pole *Nordpol* und *Südpol* heißen. Die Sonne beschreibt im Laufe eines Jahres einen Hauptkreis der Sphäre, welcher *Ekliptik* genannt wird. Beide Hauptkreise kann der Beobachter bestimmen und auf sie die Örter der Gestirne beziehen. Die einfachste Art dieser Beziehung ist die Angabe des senkrechten Abstandes des Gestirnes von den Hauptkreisen, welcher im Fall des Äquators *Deklination*, im Fall der Ekliptik *Breite* genannt wird und von diesen Hauptkreisen aus nach beiden Seiten gegen die Pole zu von 0° bis 90° gezählt wird, wobei man überein gekommen ist, nördliche Abstände positiv, südliche negativ zu rechnen. Die Knoten, in denen sich Ekliptik und Äquator schneiden, heißen die Äquinoktien und zwar jener, in welchem die Sonne in der Richtung ihrer Bewegung vom südlichen Teil des Äquators nach dem nördlichen gelangt, das *Frühlingsäquinoktium* Υ, der andere das *Herbstäquinoktium*. Ersterer ist der aufsteigende Knoten der Ekliptik auf dem Äquator und dient für beide Hauptkreise als bequemer Ausgangspunkt der auf ihnen zu messenden Winkel, da ihn der Beobachter durch die Verbindung der täglichen Bewegung mit der Sonnenbewegung bestimmen kann. Der *Sinn* der Winkelzählung wird so festgelegt, daß einem Individuum, das auf der Innenseite der Kugel mit dem Kopf gegen den Mittelpunkt gerichtet in der Richtung der wachsenden Zählung fortschreitet, der Nordpol zur Rechten liegt. Diese Richtung stimmt überein mit der Drehungsrichtung der Erde und mit der Bewegungsrichtung der Sonne. Der Winkel vom Frühlingsäquinoktium bis zum Fußpunkte der Deklination heißt *Rektaszension* und der Winkel vom selben Punkte bis zum Fußpunkte der Breite heißt *Länge*. Durch Rektaszension α und Deklination δ einerseits und durch Länge λ und Breite β andererseits ist der Ort eines Gestirnes unzweideutig bestimmt. Hauptkreise, die durch die Pole des Äquators und der Ekliptik und das Gestirn gelegt werden, schließen mit den größten Kreisen, die durch dieselben Pole und das Frühlingsäquinoktium gelegt werden, sphärische Winkel ein, die durch α und λ gemessen werden. Die letzteren Hauptkreise stehen auf dem Hauptkreis durch die Pole senkrecht.

10. Bestimmung eines Punktes in beiden Systemen. Die drei Punkte Υ, Nordpol des Äquators P_a und $\alpha = 90^\circ$ $\delta = 0^\circ$ bilden ein Quadrantendreieck $x'y'z'$, in welchem wir die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes S der Kugelfläche vom Radius r, dessen Rektaszension und Deklination α und δ sind, ausdrücken können:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r} &= \cos\delta\,\cos\alpha \\ \frac{y'}{r} &= \cos\delta\,\sin\alpha \\ \frac{z'}{r} &= \sin\delta \end{aligned} \qquad 1)$$

denn beide Seiten stellen die Richtungskosinus des Strahles S gegen die Achsen x', y', z' dar, wie man aus den Dreiecken $x'SD$, $y'SD$ erkennt.

Die drei Punkte Υ, Nordpol der Ekliptik P_e und $\lambda = 90^\circ$ $\beta = 0$ bilden ebenso ein Quadrantendreieck xzy, in welchem sich die rechtwinkligen Koordinaten desselben Punktes, wenn seine Länge und Breite mit λ, β bezeichnet werden, durch

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\beta\,\cos\lambda \\ \frac{y}{r} &= \cos\beta\,\sin\lambda \\ \frac{z}{r} &= \sin\beta \end{aligned} \qquad 2)$$

ausdrücken lassen.

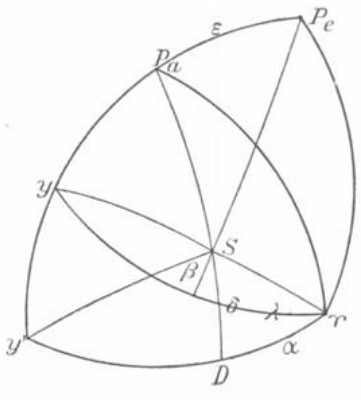


Fig. 6.

Die Richtungskosinus des einen Systems zum andern werden, da hier $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und $\theta = \varepsilon$ wird, wo mit ε der Neigungswinkel der Ekliptik gegen den Äquator oder die sogenannte *Schiefe der Ekliptik* bezeichnet ist:

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha_1 = 1 & \cos\alpha_2 = 0 & \cos\alpha_3 = 0 \\ \cos\beta_1 = 0 & \cos\beta_2 = \cos\varepsilon & \cos\beta_3 = \sin\varepsilon \\ \cos\gamma_1 = 0 & \cos\gamma_2 = -\sin\varepsilon & \cos\gamma_3 = \cos\varepsilon \end{array}$$

und es folgt daher aus den Gl. 2) (S. 11) einerseits

$$\begin{aligned} \cos\delta\,\cos\alpha &= \cos\beta\,\cos\lambda \\ \cos\delta\,\sin\alpha &= \cos\beta\,\sin\lambda\,\cos\varepsilon - \sin\beta\,\sin\varepsilon \\ \sin\delta &= \cos\beta\,\sin\lambda\,\sin\varepsilon + \sin\beta\,\cos\varepsilon \end{aligned} \qquad 3)$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} \cos\beta\,\cos\lambda &= \cos\delta\,\cos\alpha \\ \cos\beta\,\sin\lambda &= \cos\delta\,\sin\alpha\,\cos\varepsilon + \sin\delta\,\sin\varepsilon \\ \sin\beta &= -\cos\delta\,\sin\alpha\,\sin\varepsilon + \sin\delta\,\cos\varepsilon\,. \end{aligned} \qquad 4)$$

Man kann diese Formeln, die den Übergang vom Ekliptikalsystem zum Äquatorealsystem und umgekehrt vermitteln, auch durch Anwendung der drei Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie (Nr. 3) auf das Dreieck SP_aP_e erhalten mit Beachtung, daß

$$\begin{aligned} &P_aP_e = \varepsilon\,, \quad SP_a = 90^\circ - \delta\,, \quad SP_e = 90^\circ - \beta \\ &\measuredangle SP_aP_e = 90^\circ + \alpha\,, \quad \measuredangle P_aP_eS = 90^\circ - \lambda\,. \end{aligned}$$

Dieses Dreieck gibt auch den Winkel am Gestirn: P_aSP_e, den wir mit η bezeichnen wollen, durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \cos\delta \sin\eta &= \cos\lambda \sin\varepsilon \\ \cos\delta \cos\eta &= \cos\beta \cos\varepsilon - \sin\beta \sin\lambda \sin\varepsilon \end{aligned} \qquad 5)$$

oder

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\eta &= \cos\alpha \sin\varepsilon \\ \cos\beta \cos\eta &= \cos\delta \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\alpha \sin\varepsilon . \end{aligned} \qquad 6)$$

Man braucht diesen Winkel, wenn man die differentiellen Änderungen der Koordinaten des einen Systems durch die des andern auszudrücken hat. Die Formeln 2) und 4) der Nr. 5 geben nämlich:

$$\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= -\sin\eta \cdot d\beta + \cos\beta \cos\eta \cdot d\lambda - \sin\delta \cos\alpha \cdot d\varepsilon \\ d\delta &= \cos\eta \cdot d\beta + \cos\beta \sin\eta \cdot d\lambda + \sin\alpha \cdot d\varepsilon \end{aligned} \qquad 7)$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \cos\beta\, d\lambda &= \sin\eta \cdot d\delta + \cos\delta \cos\eta \cdot d\alpha + \sin\beta \cos\lambda \cdot d\varepsilon \\ d\beta &= \cos\eta \cdot d\delta - \cos\delta \sin\eta \cdot d\alpha - \sin\lambda \cdot d\varepsilon . \end{aligned} \qquad 8)$$

Die rechnerische Anwendung der Formeln 3) und 4) ist hinreichend bequem, wenn man Additionslogarithmen benutzt. Ich werde in diesem Werke voraussetzen, daß dies der Fall sei und demgemäß in der Regel von einer Umwandlung der Formeln in solche die nur Produkte enthalten, absehen. Denn der Gebrauch der Additionslogarithmen ist bequemer als die Berechnung eines Hilfswinkels, weil durchschnittlich die Differenzen der Gaußschen Logarithmen beträchtlich kleiner sind, als die der trigonometrischen Tafeln. Es sei aber hier an einem Falle gezeigt, wie eine solche Umwandlung immer leicht ausgeführt werden kann. Nennt man behufs Umwandlung von 4) den Bogen $\curlywedge S = m$ und seine Neigung gegen den Äquator M, so gibt das rechtwinklige Dreieck $\curlywedge$, S, Fußpunkt des Lotes von S auf den Äquator D:

$$\left.\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin\delta \\ \sin m \cos M &= \cos\delta \sin\alpha \\ \cos m &= \cos\delta \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

und es wird daher aus 4)

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta \cos\lambda &= \cos m \\ \cos\beta \sin\lambda &= \sin m \cos(M-\varepsilon) \\ \sin\beta &= \sin m \sin(M-\varepsilon) . \end{aligned}\right\} \qquad 4^{a})$$

Ist N der Winkel desselben Bogens $\curlywedge S = m$ mit der Ekliptik, so folgt ebenso:

$$\left.\begin{aligned} \sin m \sin N &= \sin\beta \\ \sin m \cos N &= \cos\beta \sin\lambda \\ \cos m &= \cos\beta \cos\lambda \end{aligned}\right\}$$

und daher aus 3)

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \cos\alpha &= \cos m \\ \cos\delta \sin\alpha &= \sin m \cos(N+\varepsilon) \\ \sin\delta &= \sin m \sin(N+\varepsilon) . \end{aligned}\right\} \qquad 3^{a})$$

Man kann die Formeln $4^{a})$ und $3^{a})$ kürzer *schreiben*, nämlich so:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} M &= \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha} \\ \operatorname{tg}\lambda &= \frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\beta &= \operatorname{tg}(M-\varepsilon) \sin\lambda \end{aligned} \qquad 4^{b})$$

und

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tg}\lambda \qquad 3^{b})$$

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(N+\varepsilon)\sin\alpha$$

allein der Rechner gewöhnt sich sicherer an die ebenso bequeme ganze Durchrechnung solcher Systeme wie $4^{a})$ und $3^{a})$, da sie ihn der Überlegung über die Wahl des Quadranten, in welchem M bzw. N zu wählen ist, überhebt; denn da $\cos\delta$ bzw. $\cos\beta$ stets positiv sind, kann man m stets zwischen 0° und 180° annehmen, wenn man M bzw. N von 0° bis 360° laufen läßt.

Die Anwendung der Gleichungen 4) bzw. $4^{a})$ oder $4^{b})$ ist eine sehr häufige und zwar sollen sie Größen vermitteln, die die Grundlage weiterer umfangreicher Rechnungen bilden. Es ist daher wichtig, die gewonnenen Resultate scharf zu kontrollieren. Legt man die Gleichungen 4) selbst der Rechnung zugrunde, so erhält man sichere, aber etwas mühsame Kontrollgleichungen durch die Anwendung der Napierschen Analogien auf das Dreieck SP_aP_e:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\alpha)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta+\beta) &= \cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon \\ \cos\tfrac{1}{2}(\lambda-\alpha)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\beta) &= \sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

wovon man sich mit ersterer in der Regel begnügen kann.

Hat man nach $4^{a})$ oder $4^{b})$ gerechnet, so gewährt

$$\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha} = \frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}$$

eine leichte, aber wenig verläßliche Kontrolle; sehr scharfe Kontrollformeln aber erhält man auf folgende Weise. Aus 4) folgt:

$$\cos\beta\sin(\lambda-\alpha) = \cos\delta\sin\alpha\cos\alpha(\cos\varepsilon-1) + \sin\delta\cos\alpha\sin\varepsilon$$

oder nach $4^{a})$

$$\cos\beta\sin(\lambda-\alpha) = -2\sin m\cos M\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^{2} + 2\sin m\sin M\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

oder

und ähnlich:

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\sin(\lambda-\alpha) &= 2\sin m\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin(M-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cos\alpha \\ \sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta) &= \sin m\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos(M-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sec\tfrac{1}{2}(\delta+\beta) \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

In nachfolgendem *Beispiele* sind drei Heidelberger Beobachtungen des Planeten 1904 OA (Astr. Nachr. Bd. 165, Seite 349) in Längen und Breiten verwandelt und zwar vermittels der Formeln 4). Zur Anwendung kamen, wie überhaupt in allen Beispielen dieses Buches, die sechsstelligen Tafeln von Bremiker. Mit Add. und Sub. sind die Additions- bzw. Subtraktionslogarithmen in der Einrichtung der genannten Tafel bezeichnet. Ein geübter Rechner braucht diese Zeilen nicht hinzuschreiben, ebensowenig die tg, wenn nur die Winkel gebraucht werden. Die Zahlen

$\varepsilon = 23^{\circ}\,27'\;\;6''.4$		$\log\sin\varepsilon$	9.59 9858
1904.0		» $\cos\varepsilon$	9.96 2556
$\tfrac{1}{2}\varepsilon = 11^{\circ}\,43'\;33''.2$		» $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon$	9.31 7147

schreibt man auf einen Papierstreifen.

Planet 1904 OA.

M. Z. Berlin	Apr. 19.62201	Mai 5.47806	Mai 19.46833
1904.0 α	209° 22′ 0.″2	206° 16′ 15.″6	204° 6′ 28.″4
1904.0 δ	− 7 16 11.1	− 6 18 24.1	− 5 45 44.1
$\sin\alpha$	9.69 0549$_n$	9.64 6029$_n$	9.61 1145$_n$
$\cos\delta$	9.99 6495	9.99 7364	9.99 7800
$\cos\alpha$	9.94 0267$_n$	9.95 2652$_n$	9.96 0366$_n$
$\cos\delta\sin\alpha$	9.68 7044$_n$	9.64 3393$_n$	9.60 8945$_n$
$\sin\delta$	9.10 2231$_n$	9.04 0802$_n$	9.00 1737$_n$
$\cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon$	9.64 9600$_n$	9.60 5949$_n$	9.57 1501$_n$
$\sin\delta\sin\varepsilon$	8.70 2089$_n$	8.64 0660$_n$	8.60 1595$_n$
Add.	0.04 6435	0.04 4665	0.04 4216
$\cos\beta\sin\lambda$	9.69 6035$_n$	9.65 0614$_n$	9.61 5717$_n$
$\cos\beta\cos\lambda$	9.93 6762$_n$	9.95 0016$_n$	9.95 8166$_n$
$\cos\lambda$	9.93 8070$_n$	9.95 1218$_n$	9.95 9221$_n$
$\operatorname{tg}\lambda$	9.75 9273	9.70 0598	9.65 7551
λ	209° 52′ 35.″1	206° 39′ 3.″9	204° 26′ 33.″6
$-\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon$	9.28 6902	9.24 3251	9.20 8803
$\sin\delta\cos\varepsilon$	9.06 4787$_n$	9.00 3358$_n$	8.96 4293$_n$
Sub.	9.82 4575	9.86 7688	9.87 8488
$\sin\beta$	8.88 9362	8.87 1046	8.84 2781
$\cos\beta$	9.99 8692	9.99 8798	9.99 8945
$\operatorname{tg}\beta$	8.89 0670	8.87 2248	8.84 3836
β	+ 4° 26′ 43.″8	+ 4° 15′ 41.″6	+ 3° 59′ 33.″3
Kontrolle.			
$\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$	209° 37′ 17.″6	206° 27′ 39.″7	204° 16′ 31.″0
$\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)$	+ 0 15 17.4	+ 0 11 24.1	+ 0 10 2.6
$\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	− 1 24 43.6	− 1 1 21.2	− 0 53 5.4
$\frac{1}{2}(\delta-\beta)$	− 5 51 27.4	− 5 17 2.8	− 4 52 38.7
$\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$	9.69 3963$_n$	9.64 8935$_n$	9.61 3970$_n$
$\cos\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$	9.93 9174$_n$	9.95 1938$_n$	9.95 9795$_n$
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$	9.25 6321$_n$	9.26 9085$_n$	9.27 6942$_n$
$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	1.60 8166$_n$	1.74 8389$_n$	1.81 1227$_n$
$\sin\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)_c$	7.64 8155	7.52 0696	7.46 5715
$\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)_c$	+ 0° 15′ 17.″4	+ 0° 11′ 24.″1	+ 0° 10′ 2.″7
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$	9.01 1110$_n$	8.96 6082$_n$	8.93 1117$_n$
$\sec\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)$	4	2	2
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta-\beta)_c$	9.01 1114$_n$	8.96 6084$_n$	8.93 1119$_n$
$\frac{1}{2}(\delta-\beta)_c$	− 5° 51′ 27.″4	− 5° 17′ 2.″8	− 4° 52′ 38.″7

11. Bestimmung der Lage einer Bahn in beiden Systemen. Wird durch den Mittelpunkt der Kugel — im jetzt zu besprechenden Fall in der Regel zusammenfallend mit dem Mittelpunkt der Sonne — eine Ebene gelegt, in der sich die Bahn eines Planeten befindet, so schneidet diese die Kugel in einem Hauptkreis, dessen Lage auf der Kugel auch die Lage der Ebene bestimmt. Die Lage dieses Kreises gegen das Ekliptikalsystem bestimmt man in der Regel durch die *Länge seines aufsteigenden Knotens*: Ω und seine *Neigung* gegen die Ekliptik: i, diese Stücke in dem Nr. 1 festgesetzten Sinn verstanden; die Lage eines Punktes H in ihm ist dann fixiert durch seine Entfernung u vom Knoten K: $KH = u$; durch die Angabe dieses Punktes kann die Lage der Bahn in der Bahnebene selbst fixiert werden, indem man z. B. annimmt, daß derselbe die Projektion des Perihels oder eines anderen Punktes der Bahn an die Sphäre sei. Die drei Stücke Ω, i, u bestimmen dann vollständig die Lage der Bahn im Raum.

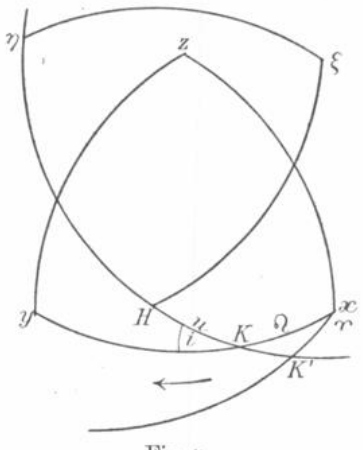


Fig. 7.

Denkt man sich durch den Punkt H die ξ-Achse, durch den Punkt $u + 90^\circ$ des Bahnkreises die η-Achse und durch den nördlichen Pol des Bahnkreises die ζ-Achse eines Systems gelegt, so kann das System $\xi\eta\zeta$ einerseits durch Ω, i, u festgelegt gedacht werden, andererseits aber kann dies auch durch die Richtungskosinus der Punkte ξ, η, ζ gegen die Punkte x, y, z geschehen, wie in Nr. 6 gezeigt wurde. Bezeichnet man dieselben nach dem Diagramm:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

und beachtet, daß hier $\psi = -\Omega$, $\varphi = u$, $\theta = i$ wird, so kommt:

$$
\begin{aligned}
\cos a_1 &= \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i \\
\cos a_2 &= \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i \\
\cos a_3 &= \sin u \sin i \\
\\
\cos b_1 &= -\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos i \\
\cos b_2 &= -\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos i \\
\cos b_3 &= \cos u \sin i \\
\\
\cos c_1 &= \sin\Omega \sin i \\
\cos c_2 &= -\cos\Omega \sin i \\
\cos c_3 &= \cos i .
\end{aligned}
\qquad 1)
$$

Legt man statt der Ekliptik den Äquator zu Grunde und bezeichnet die auf ihn bezüglichen Größen mit einem Akzent: Ω', i', u', a_1', ..., so kommt ebenso:

$$
\begin{aligned}
\cos a_1' &= \cos u' \cos \Omega' - \sin u' \sin \Omega' \cos i' \\
\cos a_2' &= \cos u' \sin \Omega' + \sin u' \cos \Omega' \cos i' \\
\cos a_3' &= \sin u' \sin i' \\
\\
\cos b_1' &= -\sin u' \cos \Omega' - \cos u' \sin \Omega' \cos i' \\
\cos b_2' &= -\sin u' \sin \Omega' + \cos u' \cos \Omega' \cos i' \\
\cos b_3' &= \cos u' \sin i' \\
\\
\cos c_1' &= \sin \Omega' \sin i' \\
\cos c_2' &= -\cos \Omega' \sin i' \\
\cos c_3' &= \cos i' .
\end{aligned}
\qquad 2)
$$

Die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes H der Bahn in bezug auf das Ekliptikalsystem bezeichnen wir mit x, y, z; jene in bezug auf das Äquatorealsystem mit x', y', z'. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos a_1 \\
y &= r \cos a_2 \\
z &= r \cos a_3
\end{aligned}
\qquad \Big| \qquad
\begin{aligned}
x' &= r \cos a_1' \\
y' &= r \cos a_2' \\
z' &= r \cos a_3' .
\end{aligned}
$$

Da nun

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 \\
y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 \\
z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3
\end{aligned}
$$

und für die gegenseitige Lage von Ekliptik zum Äquator die $\cos \alpha_1$, ... oben (Seite 19) bereits aufgestellt sind, so folgt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{x'}{r} &= \cos a_1' = \cos a_1 \\
\frac{y'}{r} &= \cos a_2' = \cos a_2 \cos \varepsilon - \cos a_3 \sin \varepsilon \\
\frac{z'}{r} &= \cos a_3' = \cos a_2 \sin \varepsilon + \cos a_3 \cos \varepsilon .
\end{aligned}
\right\} \qquad 3)
$$

In derselben Weise erhält man durch Betrachtung der anderen Ecken des Systems $\xi \eta \zeta$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\cos b_1' &= \cos b_1 \\
\cos b_2' &= \cos b_2 \cos \varepsilon - \cos b_3 \sin \varepsilon \\
\cos b_3' &= \cos b_2 \sin \varepsilon + \cos b_3 \cos \varepsilon \\
\\
\cos c_1' &= \cos c_1 \\
\cos c_2' &= \cos c_2 \cos \varepsilon - \cos c_3 \sin \varepsilon \\
\cos c_3' &= \cos c_2 \sin \varepsilon + \cos c_3 \cos \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Schreibt man das letzte System aus:

$$
\begin{aligned}
\sin i' \sin \Omega' &= \sin i \sin \Omega \\
\sin i' \cos \Omega' &= \sin i \cos \Omega \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \\
\cos i' &= -\sin i \cos \Omega \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon
\end{aligned}
\qquad 4)
$$

und fügt die Gleichungen für $\cos a_3'$ und $\cos b_3'$ hinzu, die sich sofort in die Form umsetzen lassen

$$\begin{aligned} \sin i' \sin(u' - u) &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\ \sin i' \cos(u' - u) &= \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \end{aligned} \qquad 4^{a})$$

so hat man die Mittel, um aus den Ekliptikalgrößen i, u, Ω die zum Äquator gehörigen zu rechnen. — Die Formeln für die umgekehrte Aufgabe müssen sich ergeben, wenn man statt ε setzt $-\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \sin i' \sin \Omega' \\ \sin i \cos \Omega &= \sin i' \cos \Omega' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \\ \cos i &= \sin i' \cos \Omega' \sin \varepsilon + \cos i' \cos \varepsilon \\ \sin i \sin(u' - u) &= \sin \Omega' \sin \varepsilon \\ \sin i \cos(u' - u) &= -\cos i' \cos \Omega' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon . \end{aligned} \qquad 5)$$

Man kann beide Gruppen von Formeln auch aus dem von Ekliptik, Äquator und Bahn gebildeten Dreieck ableiten, in welchem

$$\Upsilon K = \Omega, \quad \Upsilon K' = \Omega', \quad K'K = u' - u$$
$$\sphericalangle \Upsilon = \varepsilon, \quad \sphericalangle K' = 180^\circ - i', \quad \sphericalangle K = i$$

ist. Noch bequemere Rechenausdrücke aber erhält man aus diesem Dreieck, wenn man sich der Gaußschen Formeln (Nr. 4) bedient; wird $u' - u = \sigma$ gesetzt, so ergeben diese:

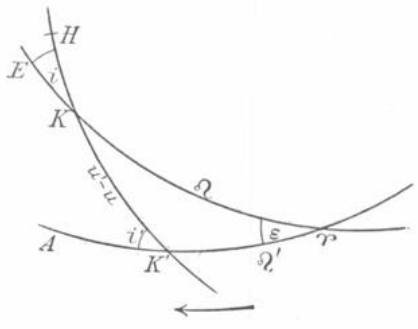


Fig. 8.

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} i' \sin \tfrac{1}{2}(\Omega' + \sigma) &= \cos \tfrac{1}{2}(i - \varepsilon) \sin \tfrac{1}{2} \Omega \\ \cos \tfrac{1}{2} i' \cos \tfrac{1}{2}(\Omega' + \sigma) &= \cos \tfrac{1}{2}(i + \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2} \Omega \\ \sin \tfrac{1}{2} i' \sin \tfrac{1}{2}(\Omega' - \sigma) &= \sin \tfrac{1}{2}(i - \varepsilon) \sin \tfrac{1}{2} \Omega \\ \sin \tfrac{1}{2} i' \cos \tfrac{1}{2}(\Omega' - \sigma) &= \sin \tfrac{1}{2}(i + \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2} \Omega \\ u' &= u + \sigma \end{aligned} \qquad 6)$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}(\Omega + \sigma) &= \sin \tfrac{1}{2}(i' + \varepsilon) \sin \tfrac{1}{2} \Omega' \\ \sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(\Omega + \sigma) &= \sin \tfrac{1}{2}(i' - \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2} \Omega' \\ \cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}(\Omega - \sigma) &= \cos \tfrac{1}{2}(i' + \varepsilon) \sin \tfrac{1}{2} \Omega' \\ \cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(\Omega - \sigma) &= \cos \tfrac{1}{2}(i' - \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2} \Omega' \\ u &= u' - \sigma . \end{aligned} \qquad 7)$$

Die Art, wie diese Formeln am besten zur Anwendung kommen, wird man aus folgendem *Beispiel* erkennen.

Die Elemente des periodischen Kometen Brooks für die Erscheinung 1903

$$\left.\begin{array}{rr} \omega & 343^\circ\, 37'\, 45''.23 \\ \Omega & 18\ \ 3\ 54.35 \\ i & 6\ \ 3\ 44.11 \end{array}\right\} \text{Ekliptik und Äquinoktium 1900.0}$$

sind auf den Äquator zu übertragen. An Stelle von u tritt hier ω, der Abstand des Perihels vom Knoten.

ε	$23^\circ 27' 8''.26$	$\cos\frac{1}{2}i' \sin\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$	9.190 8637	$\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$	$+ 9^\circ 13' 47''.36$
$\frac{1}{2}\Omega$	9 1 57.17	$\cos\frac{1}{2}i' \cos\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$	9.980 0134	$\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$	$- 5\ 23\ 22.45$
$\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$	14 45 26.18	$\cos\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$	9.994 3404	$\frac{1}{2}i'$	14 38 10.80
$\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$	$- 8$ 41 42.07	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$	9.210 8503	Ω'	3 50 24.91
		$\sin\frac{1}{2}i' \sin\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$	$8.375\,3669_n$	σ	14 37 9.81
$\sin\frac{1}{2}\Omega$	9.195 8872	$\sin\frac{1}{2}i' \cos\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$	9.400 6518	i'	29 16 21.60
$\cos\frac{1}{2}\Omega$	9.994 5808	$\cos\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$	9.998 0758	ω'	358 14 55.04
$\sin\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$	9.406 0710	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$	$8.974\,7151_n$		
$\cos\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$	9.985 4326	$\sin\frac{1}{2}i'$	9.402 5760		
$\sin\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$	$9.179\,4797_n$	$\cos\frac{1}{2}i'$	9.985 6730		
$\cos\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$	9.994 9765	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}i'$	9.416 9030		

12. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Bahn. Der Grund, weshalb wir in voriger Nummer zuerst einen weitläufigen Weg eingeschlagen haben, liegt in der jetzt zu behandelnden Aufgabe, die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Bahn im System des Äquators oder der Ekliptik durch u, i, Ω bzw. u', i', Ω' auszudrücken. Hierfür liegen uns nämlich jetzt bereits die Formeln 3) (S. 24) vor, die nur auf eine einfachere Form gebracht werden müssen. Es kommt darauf an, den Bogen u, der für jeden Punkt der Bahn sich ändert, zu trennen von den Größen Ω, i, die für die Bahn konstant sind.

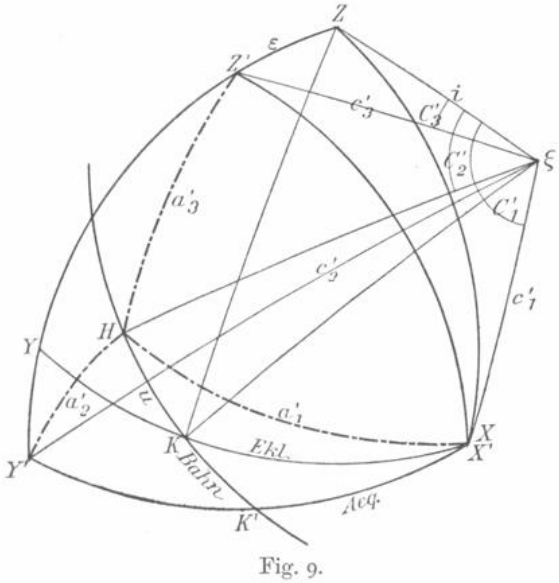


Fig. 9.

Nennt man (Fig. 9) die Winkel

$$X'\zeta Z = C_1'$$
$$Y'\zeta Z = C_2'$$
$$Z'\zeta Z = C_3'$$

und zählt sie um ζ herum in derselben Richtung wie $K\zeta H = u$, so kann man aus den Dreiecken

$$X'H\zeta, \quad Y'H\zeta, \quad Z'H\zeta,$$

in denen $H\zeta = 90^\circ$, $X'\zeta = c_1'$ $Y'\zeta = c_2'$ $Z'\zeta = c_3'$

$$X'H = a_1' \quad Y'H = a_2' \quad Z'H = a_3'$$

$$\sphericalangle X'\zeta H = C_1' + u - 90^\circ, \quad Y'\zeta H = C_2' + u - 90^\circ, \quad Z'\zeta H = C_3' + u - 90^\circ$$

ist, ablesen:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r} &= \cos a_1' = \sin c_1' \sin(C_1' + u) \\ \frac{y'}{r} &= \cos a_2' = \sin c_2' \sin(C_2' + u) \\ \frac{z'}{r} &= \cos a_3' = \sin c_3' \sin(C_3' + u) \end{aligned} \qquad 8)$$

womit die Aufgabe gelöst ist, wenn man noch $c_1', \ldots C_1', \ldots$ durch die Stücke $i\,\Omega$ oder $i'\,\Omega'$, von denen sie einzig und allein abhängig sind, ausgedrückt hat. Hierzu dienen die Dreiecke

$$X'\zeta Z, \quad Y'\zeta Z, \quad Z'\zeta Z,$$

in denen $\zeta Z = i$, $ZZ' = \varepsilon$, $\sphericalangle\, \zeta ZX' = 90^\circ - \Omega$, $\sphericalangle\, \zeta ZY' = \zeta ZZ' = 180^\circ - \Omega$ ist:

$$\begin{aligned}
\sin c_1' \sin C_1' &= \cos\Omega \\
\sin c_1' \cos C_1' &= -\cos i \sin\Omega \\
\cos c_1' &= \sin i \sin\Omega \\
\sin c_2' \sin C_2' &= \cos\varepsilon \sin\Omega \\
\sin c_2' \cos C_2' &= -\sin i \sin\varepsilon + \cos i \cos\varepsilon \cos\Omega \\
\cos c_2' &= -\cos i \sin\varepsilon - \sin i \cos\varepsilon \cos\Omega \\
\sin c_3' \sin C_3' &= \sin\varepsilon \sin\Omega \\
\sin c_3' \cos C_3' &= \sin i \cos\varepsilon + \cos i \sin\varepsilon \cos\Omega \\
\cos c_3' &= \cos i \cos\varepsilon - \sin i \sin\varepsilon \cos\Omega\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Formeln 8) und 9) wird man zur Anwendung bringen, wenn man die rechtwinkligen Äquatorkoordinaten direkt durch die Ekliptikalelemente u, i, Ω auszudrücken wünscht. Hat man aber u, i, Ω bereits nach Nr. 11 in u', i', Ω' umgewandelt, so wird man sich einfachere Ausdrücke verschaffen können, die man durch die Überlegung erhält, daß wenn man in 3) $\varepsilon = 0$ setzt, $\cos a_1' = \cos a_1$, $\cos a_2' = \cos a_2$, $\cos a_3' = \cos a_3$ wird und daß folglich $\cos a_1'$, $\cos a_2'$, $\cos a_3'$ in Äquatorealelementen sich darstellen werden, wenn man in 8) und 9) $\varepsilon = 0$ setzt und die Elemente vertauscht. Es kommt:

$$\frac{x'}{r} = \cos a_1' = \sin c_1' \sin(C_1'' + u')$$

$$\frac{y'}{r} = \cos a_2' = \sin c_2' \sin(C_2'' + u')$$

$$\frac{z'}{r} = \cos a_3' = \sin c_3' \sin(C_3'' + u')$$

$$\begin{aligned}
\sin c_1' \sin C_1'' &= \cos\Omega' \\
\sin c_1' \cos C_1'' &= -\cos i' \sin\Omega' \\
\cos c_1' &= \sin i' \sin\Omega' \\
\sin c_2' \sin C_2'' &= \sin\Omega' \\
\sin c_2' \cos C_2'' &= \cos i' \cos\Omega' \\
\cos c_2' &= -\sin i' \cos\Omega' \\
\sin c_3' \sin C_3'' &= 0 \\
\sin c_3' \cos C_3'' &= \sin i' \\
\cos c_3' &= \cos i'
\end{aligned} \tag{10}$$

$C_3'' = 0$, $c_3' = i'$. Man könnte diese Formeln natürlich auch direkt ableiten aus den Dreiecken $\zeta Z'X'$, $\zeta Z'Y'$; C_1'', C_2'', C_3'' sind die Winkel, welche c_1', c_2', c_3' mit $\zeta Z'$ bilden. Die eben angeschriebenen Formeln lösen auch die Aufgabe, die rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten durch die Ekliptikalelemente darzustellen, man braucht nur die Akzente wegzulassen.

Auf die Gleichungen 8) und 9) oder 10) werden wir später gelegentlich der Ephemeridenrechnung zurückkommen, hier wollen wir nur noch einiges über die Größen $c_1', \ldots, C_1', \ldots,$ welche die *Gaußschen Konstanten**) genannt werden, hinzufügen. Es versteht sich, daß zwischen denselben eine Reihe von Beziehungen stattfinden muß, von denen einige im Interesse der Kontrolle nützlich sind. Aus den Dreiecken $X'Y'\zeta$, $Y'Z'\zeta$, $Z'X'\zeta$ folgt

$$\cos X'Y' = 0 = \cos c_1' \cos c_2' + \sin c_1' \sin c_2' \cos(C_1' - C_2')$$

oder

$$\cos(C_1' - C_2') = -\operatorname{cotg} c_1' \operatorname{cotg} c_2'.$$

Ebenso:

$$\cos(C_2' - C_3') = -\operatorname{cotg} c_2' \operatorname{cotg} c_3'$$
$$\cos(C_3' - C_1') = -\operatorname{cotg} c_3' \operatorname{cotg} c_1'.$$

Ähnlich findet man:

$$\sin(C_1' - C_2') = \frac{\cos c_3'}{\sin c_1' \sin c_2'}$$

. . . . . .

Aus der Verbindung beider Gruppen folgt:

$$\cos c_1'^2 = \operatorname{cotg}(C_1' - C_2') \operatorname{cotg}(C_3' - C_1')$$

. . . . . .

und

$$\sin c_1'^2 = -\frac{\cos(C_2' - C_3')}{\sin(C_1' - C_2') \sin(C_3' - C_1')}$$

. . . . . .

und

$$\operatorname{tg} c_1'^2 = -\frac{\cos(C_2' - C_3')}{\cos(C_1' - C_2') \cos(C_3' - C_1')}$$

. . . . . .

und

$$\operatorname{tg}(C_2' - C_3') \cos c_3' = -\frac{\cos c_1'}{\cos c_2'}.$$

. . . . . .

Wenn man die hierin enthaltene Gleichung:

$$\sin(C_2' - C_3') = \frac{\cos c_1'}{\sin c_2' \sin c_3'}$$

mit der aus 9) folgenden

$$\frac{\sin c_1' \cos C_1'}{\cos c_1'} = -\operatorname{tg} i$$

verbindet, so erhält man die bequemste Kontrollformel:

$$\frac{\sin c_2' \sin c_3' \sin(C_2' - C_3')}{\sin c_1' \cos C_1'} = -\operatorname{tg} i. \qquad 11)$$

Da $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$, so folgt aus den Gleichungen 8) für $u = 0$ und $u = 90°$

$$(\sin c_1' \sin C_1')^2 + (\sin c_2' \sin C_2')^2 + (\sin c_3' \sin C_3')^2 = 1$$
$$(\sin c_1' \cos C_1')^2 + (\sin c_2' \cos C_2')^2 + (\sin c_3' \cos C_3')^2 = 1$$

und aus der Summe dieser beiden:

$$\sin c_1'^2 + \sin c_2'^2 + \sin c_3'^2 = 2,$$

wozu man

$$\cos c_1'^2 + \cos c_2'^2 + \cos c_3'^2 = 1$$

*) Gauß Werke, Bd. VI, Seite 94.

als Eigenschaft der Richtungskosinus nehmen kann. Es sei noch angeführt, daß C_3' gleich dem Bogen der Bahn zwischen Äquator und Ekliptik, oder gleich $u' - u$ ist und daß die in 10) eingeführten Winkel C_1'', C_2'', C_3'' sich von C_1', C_2', C_3' um den Winkel $Z\zeta Z' = C_3' = u' - u$ unterscheiden, so daß

$$\begin{aligned} C_1'' &= C_1' - (u' - u) \\ C_2'' &= C_2' - (u' - u) \\ C_3'' &= 0 \end{aligned}$$

wird.

Wenn der Punkt H nicht im größten Kreis der Bahn liegt, sondern um den Bogen σ senkrecht über ihm, so folgt für seine Richtungskosinus:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r} &= \cos a_1' = \cos X'H' = \sin\sigma \cos c_1' + \cos\sigma \sin c_1' \sin (C_1' + u) \\ \frac{y'}{r} &= \cos a_2' = \cos Y'H' = \sin\sigma \cos c_2' + \cos\sigma \sin c_2' \sin (C_2' + u) \\ \frac{z'}{r} &= \cos a_3' = \cos Z'H' = \sin\sigma \cos c_3' + \cos\sigma \sin c_3' \sin (C_3' + u) . \end{aligned}$$

Ist nun σ sehr klein, etwa der Betrag, um den der Planet infolge der Störungen aus seiner Bahnebene heraustritt, so kann $\cos\sigma = 1$ gesetzt werden und die Formeln werden

$$\begin{aligned} x' &= r \sin c_1' \sin (C_1' + u) + r \cos c_1' \cdot \sin\sigma \\ y' &= r \sin c_2' \sin (C_2' + u) + r \cos c_2' \cdot \sin\sigma \\ z' &= r \sin c_3' \sin (C_3' + u) + r \cos c_3' \cdot \sin\sigma \end{aligned} \qquad 12)$$

d. h. man kann die Koordinaten des Punktes so berechnen, als ob er in der durch Ωi bestimmten Bahnebene sich befände und braucht nur $r \cos c_1' \sin\sigma$, ... den Koordinaten hinzuzufügen. Hierzu werden die $\cos c_1'$, ... gebraucht, deren Berechnung daher in obiger Analyse mit aufgenommen wurde, obwohl sie für die erste Aufgabe nicht nötig waren.

Wir bestimmen endlich die rechtwinkligen Äquatorkoordinaten X', Y', Z' eines Punktes E, der sich in der Ekliptik befindet, also etwa der Erde, von der Sonne aus an die Sphäre vom Radius R projiziert. Nennt man L seine Länge, so wird:

$$\begin{aligned} X' &= R \cos L \\ Y' &= R \sin L \cos\varepsilon \\ Z' &= R \sin L \sin\varepsilon , \end{aligned} \qquad 13)$$

wie man sowohl aus 8) und 9) ableitet, wenn man $i = 0$ und $\Omega + u = L$ setzt, als auch direkt aus dem Dreieck $X'EY'$ ersehen kann. Hat die Erde die Breite B, die als klein betrachtet werden darf, so ergeben die Formeln 12), da $\cos c_1' = 0$, $\cos c_2' = -\sin\varepsilon$, $\cos c_3' = \cos\varepsilon$ wird:

$$\begin{aligned} X' &= R \cos L \\ Y' &= R \sin L \cos\varepsilon - R \sin\varepsilon \sin B \\ Z' &= R \sin L \sin\varepsilon + R \cos\varepsilon \sin B. \end{aligned} \qquad 14)$$

Diese Koordinaten findet man mit umgekehrten Zeichen — als Koordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde — in den Jahrbüchern berechnet vor.

13. Umwandlung von Koordinaten, die sich auf verschiedene Anfangspunkte beziehen. Ephemeridenrechnung. Wir legen um die Sonne S eine Kugel mit dem Radius R, auf welcher sich die Erde im Punkte E befinde, und eine zweite mit dem Radius r, auf welcher sich das Gestirn im Punkte H befinde; die Richtungskosinus von E und H in bezug auf ein Achsensystem $X'Y'Z'$ seien:

$$\frac{X'}{R}, \quad \frac{Y'}{R}, \quad \frac{Z'}{R} \quad \text{und} \quad \frac{x'}{r}, \quad \frac{y'}{r}, \quad \frac{z'}{r}.$$

Die Strahlen SE und SH mögen die Kugel vom Radius 1 in **E** und **H** treffen. Wir nehmen ferner E als Anfangspunkt eines neuen — geozentrischen — Systems, dessen Achsen den vorigen parallel seien, schlagen um denselben eine Kugel mit dem Radius $EH = \varrho$, welche also durch H hindurchgeht; die Richtungskosinus von H in diesem System seien

$$\frac{\xi'}{\varrho}, \quad \frac{\eta'}{\varrho}, \quad \frac{\zeta'}{\varrho}.$$

Dies sind dann auch die Richtungskosinus einer durch S zu EH gezogenen Parallelen, welche die Einheitskugel um S in **G** treffe. Dann ist zunächst klar, daß **G** auf dem durch **E** und **H** hindurchgelegten Hauptkreis der Einheitskugel liegen muß, nämlich dem, der durch die Ebene SEG ausgeschnitten wird.

Ferner muß die Summe der Projektionen der drei Strecken R, ϱ, r, welche das Dreieck SEG zusammensetzen, auf jede der drei Achsen Null sein. Dies führt zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} R\frac{X'}{R} + \varrho\frac{\xi'}{\varrho} - r\frac{x'}{r} &= 0 \\ R\frac{Y'}{R} + \varrho\frac{\eta'}{\varrho} - r\frac{y'}{r} &= 0 \\ R\frac{Z'}{R} + \varrho\frac{\zeta'}{\varrho} - r\frac{z'}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Sind α und δ die im System E bestimmten Koordinaten: Rektaszension und Deklination, also die geozentrischen, beobachtbaren Koordinaten des Gestirnes, so werden die Richtungscosinus

$$\frac{\xi'}{\varrho} = \cos\delta\cos\alpha, \quad \frac{\eta'}{\varrho} = \cos\delta\sin\alpha, \quad \frac{\zeta'}{\varrho} = \sin\delta.$$

Werden diese und dann die Werte 8) für $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ eingetragen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\delta\cos\alpha &= r\sin c_1'\sin(C_1' + u) - X' \\ \varrho\cos\delta\sin\alpha &= r\sin c_2'\sin(C_2' + u) - Y' \\ \varrho\sin\delta &= r\sin c_3'\sin(C_3' + u) - Z'. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Größen $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ finden sich in den Jahrbüchern verzeichnet oder werden aus 13) bez. 14) berechnet; r und u werden aus der heliozentrischen Bewegung des Gestirnes bestimmt, c_1', C_1', ... werden durch 9) (Seite 27) aus der Lage der Bahn abgeleitet. Die Gleichungen 17) ermöglichen also die Bestimmung der geozentrischen Koordinaten ϱ, α, δ, wenn der heliozentrische Ort der Erde und des Gestirnes bekannt ist.

Den Gleichungen 17) ist eine solche Einrichtung gegeben worden, daß sie sich besonders zur Ephemeridenrechnung eignen, d. h. zur Berechnung ganzer Reihen von Örtern. Die Beziehungen zwischen den geozentrischen und den heliozentrischen Örtern der Himmelskörper bilden aber naturgemäß auch die Grundlage der Bahnbestimmung, d. h. jener Theorie, welche aus den beobachteten (geozentrischen) Örtern die auf den Mittelpunkt der Sonne als dem Kraftzentrum bezogene Bahn ermittelt. Hierzu eignen sich die Gleichungen 17) nicht, weil es dann darauf ankommt, die Gleichungen in ihrer größten Einfachheit und mit der geringsten Zahl von Unbekannten zu haben. Um für die Erdörter möglichst einfache Ausdrücke zu haben, wählt man als grundlegendes Koordinatensystem die Ekliptik, auf die dann schließlich auch die Elemente der Bahnlage bezogen erscheinen; ferner drückt man alle Richtungskosinus der Gleichungen 16) gleichmäßig durch Längen und Breiten aus. Wir überblicken alles am einfachsten auf der vorhin konstruierten Einheitskugel. Es sei L die Länge von **E**; die Breite B, die sehr klein ist, kann, wie wir später sehen werden, durch ein einfaches Verfahren streng zu Null angenommen werden; es seien ferner l und b Länge und Breite von **H** (heliozentrische Koordinaten) und λ und β Länge und Breite von **G** (geozentrische Koordinaten), welch letztere nach Nr. 10 aus den beobachteten α und δ durch Rechnung hergestellt werden können. Da dann

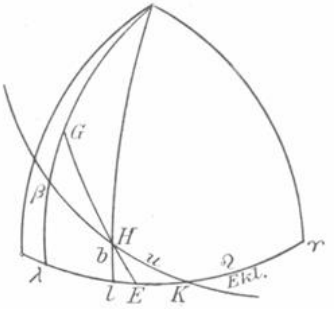


Fig. 10.

$$\frac{\xi}{\varrho} = \cos\beta\cos\lambda\,, \quad \frac{\eta}{\varrho} = \cos\beta\sin\lambda\,, \quad \frac{\zeta}{\varrho} = \sin\beta$$

$$\frac{x}{r} = \cos b\cos l\,, \quad \frac{y}{r} = \cos b\sin l\,, \quad \frac{z}{r} = \sin b$$

$$\frac{X}{R} = \cos L\,, \quad \frac{Y}{R} = \sin L\,, \quad \frac{Z}{R} = 0$$

wird, so schreiben sich die für die Ekliptik hergestellten Gleichungen 16) so:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos\lambda &= r\cos b\cos l - R\cos L \\ \varrho\cos\beta\sin\lambda &= r\cos b\sin l - R\sin L \\ \varrho\sin\beta &= r\sin b\,. \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

Man kann denselben noch verschiedene andere Formen geben, die je nach dem vorliegenden Zweck von Vorteil sind und deshalb hier zusammengestellt sein mögen. Sie beruhen alle auf der Einführung eines Punktes X_1 der Ekliptik in der Länge N, der man verschiedene Spezialwerte erteilen kann. Rechnet man die in der Ekliptik zu zählenden Winkel von diesem Punkte an, so werden die Richtungskosinus in bezug auf die Achsen X_1, $X_1 + 90^\circ$, Z

$$\frac{\xi}{\varrho} = \cos\beta\cos(\lambda - N), \ldots$$

und daher die Gleichungen 16)

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos(\lambda - N) &= r\cos b\cos(l - N) - R\cos(L - N) \\ \varrho\cos\beta\sin(\lambda - N) &= r\cos b\sin(l - N) - R\sin(L - N) \\ \varrho\sin\beta &= r\sin b\,. \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Man kommt auf dieselben Gleichungen, wenn man die beiden ersten Gl. 18) zuerst mit $\cos N$ bezw. $\sin N$, dann mit $\sin N$, bezw. $-\cos N$ multipliziert und jedesmal addiert. Man kann dies kurz so aussprechen: Die Gleichungen 18) bleiben ungeändert, wenn man alle Längen um denselben Betrag ändert.

Wir setzen $N = L$ und erhalten in

$$\left.\begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L)+R\\ r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L)\\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

Gleichungen, welche sich offenbar besonders zur Ermittelung der heliozentrischen Koordinaten r, l, b aus den geozentrischen ϱ, λ, β eignen. Dem gleichen Zweck angepaßte Gleichungen erhält man auch, wenn $N = \lambda$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} r\cos b\cos(l-\lambda) &= \varrho\cos\beta + R\cos(L-\lambda)\\ r\cos b\sin(l-\lambda) &= \quad + R\sin(L-\lambda)\\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Die umgekehrte Aufgabe, aus heliozentrischen Örtern die geozentrischen zu ermitteln, wird man entweder, $N = l$ setzend, mittels

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos(\lambda-l) &= r\cos b - R\cos(L-l)\\ \varrho\cos\beta\sin(\lambda-l) &= \quad - R\sin(L-l)\\ \varrho\sin\beta &= r\sin b \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

lösen, oder man wird, wenn die Elemente der Bahnlage i, Ω und u zur Verfügung stehen, am bequemsten $N = \Omega$ nehmen; hiermit ergibt sich nämlich zuerst:

$$\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos(\lambda-\Omega) &= r\cos b\cos(l-\Omega) - R\cos(L-\Omega)\\ \varrho\cos\beta\sin(\lambda-\Omega) &= r\cos b\sin(l-\Omega) - R\sin(L-\Omega)\\ \varrho\sin\beta &= r\sin b \end{aligned}$$

und wenn man aus Dreieck KHl worin $KH = u$ ist:

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-\Omega) &= \cos u\\ \cos b\sin(l-\Omega) &= \cos i\sin u\\ \sin b &= \sin i\sin u \end{aligned}$$

darin substituiert:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos(\lambda-\Omega) &= r\cos u - R\cos(L-\Omega)\\ \varrho\cos\beta\sin(\lambda-\Omega) &= r\sin u\cos i - R\sin(L-\Omega)\\ \varrho\sin\beta &= r\sin u\sin i\,. \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Besonders zur Berechnung einzelner Örter ist dies die bequemste Form.

Abschnitt III.

Astronomische Zeitrechnung.

14. Die Zeitmessung im allgemeinen. Die Untersuchung der Bewegungen der Himmelskörper setzt den Begriff der *Zeit* voraus; es ist aber nicht Sache der Astronomie, so wenig wie die der Mechanik, zu erklären, was die Zeit *ist*, sondern zu zeigen, wie sie *gemessen* wird. Da die Astronomie die Grundlagen der Zeitmessung für alle Naturwissenschaften zu schaffen hat, müssen wir derselben einen Abschnitt widmen.

Die Zeit kann nur durch die Bewegung eines Körpers gemessen werden, die in ihr ausgeführt ist; die Untersuchung jeder anderen Bewegung ist lediglich ihre Vergleichung mit der gewählten fundamentalen Bewegung. Die Einführung des Begriffes Zeit schafft also nur eine bequemere Ausdrucksweise für diese stets zu wiederholende Vergleichung. Als der Zeitmessung zugrunde zu legende Bewegung empfiehlt sich eine periodische Winkelbewegung, weil dieselbe sich von selbst in der Natur darbietet und bequem kontrolierbar ist und weil die Wahl etwa einer geradlinigen Bewegung bald zu höchst unbequemen Einrichtungen führen müßte. So wird die Zeitmessung einfach zur *Winkelmessung*, zu deren Ausführung geteilte Kreise oder Uhren dienen können. Jedes Zeitmoment und jedes Zeitintervall ist gegeben durch einen Winkel. Man gebraucht daher neben der üblichen Gradteilung des Kreisumfanges in 360° zu $60'$ zu $60''$ auch noch eine sogenannte *Zeitteilung*, bei der der Kreisumfang in 24^h zu 60^m zu 60^s geteilt wird. Das Verhältnis zwischen beiden Teilungen ist hiernach folgendes:

$$1^h = 15^\circ \qquad 1^\circ = 4^m$$
$$1^m = 15' \qquad 1' = 4^s$$
$$1^s = 15'' \qquad 1'' = 0^s.066\ \ldots$$

Der Übergang vom Gradmaß zum Zeitmaß geschieht also durch Division mit 15, der umgekehrte durch Multiplikation mit 15. Das beste Verfahren zur Ausführung dieser häufigen Operation erkennt man aus folgenden Beispielen:

1) $321^\circ 42' 58''.12$ in Zeitmaß zu verwandeln

$$\frac{321^\circ}{15} = 21^h \text{ Rest } 6^\circ, \quad \frac{6 \times 60}{15} = 6 \times 4 = 24^m$$
$$\frac{42'}{15} = 2^m \text{ Rest } 12', \quad \frac{12 \times 60}{15} = 12 \times 4 = 48^s$$
$$\frac{58''.12}{15} = 3^s.875$$
$$21^h\ 26^m\ 51^s.875$$

2) $21^h\ 26^m\ 51^s.875$ in Gradmaß zu verwandeln

$$21^h \times 15 = 315^\circ$$
$$\frac{26^m \times 15}{60} = \frac{26^m}{4} = 6^\circ \text{ Rest } 2^m; \quad 2^m \times 15 = 30'$$

$$\frac{51^s.875 \times 15}{60} = \frac{51^s.875}{4} = 12' \text{ Rest } 3^s.875$$
$$3^s.875 \times 15 = 58''.12$$
$$321^\circ 42' 58''.12.$$

Die Rechnung kann leicht im Kopf ausgeführt werden und ist der mit Tafeln vorzuziehen, obwohl man deren vorfindet. (Siehe »Tafeln« Nr. IX.)

Als die fundamentale Bewegung für die Messung der Zeit hat man seit den ältesten Zeiten die Rotation der Erde um ihre Achse gewählt, also dieselbe Erscheinung, welche das Koordinatensystem des Äquators hervorbringt. Diese Rotation erfolgt um eine im Erdkörper sehr nahezu feste, im Raum zu sich selbst nahe parallel bleibende Achse und es wird angenommen, daß die Rotation eine völlig gleichförmige ist. *Nachgewiesen* kann das letztere nur durch sukzessive Näherung werden, indem man künstlich hervorgerufene Bewegungen (etwa Pendelschwingungen) als gleichmäßig annimmt, mit der Erdbewegung vergleicht und dadurch deren nahe Gleichmäßigkeit erweist, damit wieder zurückschließt auf die Gleichmäßigkeit der künstlichen Bewegung usf. Um die Rotationsbewegung der Erde durch Winkel messen zu können, muß ein Punkt außerhalb der Erde, also an der Himmelssphäre, vereinbart werden und man muß zweitens auf der Erde selbst einen Index oder Zeiger definieren, der stets zugänglich ist. Der Winkel zwischen dem Strahl nach dem vereinbarten Punkt und dem Zeiger mißt die stattgehabte Bewegung und gibt das Maß für die dazu gebrauchte Zeit. Der Index wird in folgender Weise gewonnen. Im Beobachtungsort wird die Lotlinie errichtet und durch sie und die Rotationsachse eine Ebene gelegt — die feste *Meridianebene* des Beobachtungsortes; diese schneidet die Himmelssphäre in einem Hauptkreis, der durch die Pole des Äquators und durch das Zenit — den Schnittpunkt der Lotlinie mit der Sphäre — hindurchgeht und durch diese beiden Punkte definiert ist. Dieser Kreis, den wir kurz *Meridian* nennen wollen, überstreicht mit der rotierenden Erde die Himmelssphäre in der Richtung der Rotationsbewegung, die wir kurz als die West-Ost-Richtung bezeichnen wollen; er dient als fest mit dem Beobachtungsort verbundener Zeiger. Fixpunkte an der Sphäre, die zur Zeitmessung Verwendung finden, sind zwei im Gebrauch, die beide auf dem Äquator liegen: 1. der aufsteigende Knoten der Ekliptik auf dem Äquator oder der *Frühlingspunkt* Υ; 2. der Mittelpunkt S einer fingierten, im Äquator sich gleichmäßig bewegenden Sonne, die stets möglichst nahe an der wahren Sonne bleibt. Beide Punkte sind bewegt und müssen scharf definiert werden; jeder gibt zu einer besonderen Zeiteinteilung Anlaß, die wir nacheinander besprechen wollen. Als allgemeine Definition schicken wir noch voraus, daß der Winkel zwischen dem Zeiger — dem Meridian — und den Punkten Υ oder S oder einem anderen Punkt *Stundenwinkel* genannt wird und daß dieser stets vom Index aus in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung gezählt wird.

15. Sternzeit und mittlere Sonnenzeit. Wie an anderer Stelle näher ausgeführt wird, bewegt sich infolge der Präzession und Nutation der Frühlingspunkt auf dem Äquator zum Teil proportional den Potenzen der Zeit, zum Teil periodisch; seine jeweilige Lage wird als »*wahrer* Frühlingspunkt« bezeichnet und durch den

Winkelabstand vom »*mittleren* Frühlingspunkt« für eine bestimmte Zeitepoche gegeben. Unter dem mittleren Frühlingspunkt versteht man einen fingierten, der entsteht, wenn man ihn nur proportional den Potenzen der Zeit (durch die Präzession) bewegt, von den periodischen Lagenänderungen (durch die Nutation) aber befreit denkt. Wählt man als Epoche

$$E = 1900 \text{ Januar } 0 \quad 0^h \text{ Mittlere Zeit Berlin}$$

und zählt die Zeit in julianischen Jahren t von diesem Moment an, so ist die Lage des *wahren* Frühlingspunktes für die Zeit $E + t$ gegeben durch den auf dem Äquator gemessenen Winkel*)

$$46''.0850\, t + 0''.000\,1395\, t^2 + \text{Nutation in Rektaszension}, \qquad \text{I.}$$

gezählt in der Richtung des Stundenwinkels. Die genauen Definitionen von E und t können erst später (Nr. 16) gegeben werden. Die Bewegung des Frühlingspunktes ist nach Formel I. *keine* gleichmäßige; wegen der Kleinheit des mit t^2 multiplizierten Gliedes und wegen der langsamen Änderung der Nutation ist der Unterschied von einer gleichmäßigen aber sehr gering. — Jetzt können wir die Definitionen einer ersten Zeiteinteilung aussprechen:

1. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über den wahren Frühlingspunkt hinweggeht, ist der Beginn eines Zeitintervalles — des *Sterntages* — dessen Ende mit der nächstfolgenden Koinzidenz von Meridian und Frühlingspunkt zusammenfällt.

2. Der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes mißt die seit Beginn des Sterntages verflossene *Ortssternzeit*.

3. Der Unterschied der Ortssternzeiten zweier Meridiane ist gleich der Längendifferenz λ derselben und zwar hat der östlich gelegene Ort die um λ größere Sternzeit.**)

4. Die Sternzeit θ kann durch jedes Gestirn bestimmt werden, dessen wahre Rektaszension α bekannt und dessen Stundenwinkel t gemessen ist, denn sie ist offenbar gleich der Summe aus t und α:

$$\theta = t + \alpha .$$

Ist $t = 0$, d. h. wird der Moment beobachtet, in welchem der Meridian über das Gestirn hinweggeht, so wird für diesen Moment

$$\theta = \alpha .$$

(Da der beobachtete Ort des Gestirnes durch die Aberration verschoben ist, so muß entweder zum wahren α der Betrag der Aberration hinzugefügt, d. h. das scheinbare α benutzt werden, oder man muß vom gemessenen Stundenwinkel den Betrag der Aberration in Abzug bringen.)

*) Diese und alle späteren Zahlenangaben dieses Abschnittes sind nach der neuesten Regelung dieser Verhältnisse durch *Newcomb* gegeben (vgl. dessen: Tables of the motion of the Earth on its axis and around the Sun, Astr. Papers Vol. VI, 1898; und Determination of the Precessional Constant with the resulting precessional motions, Astr. Papers Vol. VIII, 1898).

**) Wird, wie üblich, die Längendifferenz λ nach Westen positiv, nach Osten negativ von dem Fundamentalmeridian aus bis 180° gezählt, so wird also die Sternzeit im Fundamentalmeridian gleich der Sternzeit des Ortes $+ \lambda$.

Die auf die Bewegung des Frühlingspunktes gegründete Zeiteinteilung ist für das bürgerliche Leben ungeeignet und wird durch eine auf die *Sonne* basierte ersetzt, da diese die auffälligste Erscheinung der Erdrotation, den Wechsel von Tag und Nacht, hervorbringt. Auch für die astronomische Praxis wird diese neue Einteilung angenommen und neben der Sternzeit gebraucht. Ihre Definition und ihr Verhältnis zur Sternzeit sind jetzt auseinanderzusetzen. Die Bewegung der wirklichen Sonne ist zu einer Zeiteinteilung nicht zu verwenden, da sie ungleichförmig ist und in einer zum Äquator geneigten Ebene erfolgt. Man ersetzt sie daher durch eine fingierte, mittlere Sonne, die sich gleichmäßig im Äquator bewegt und stets so nahe als möglich bei der wirklichen Sonne bleibt; dies wird auf folgende Weise erreicht*). Die mittlere Länge der Sonne, gezählt vom mittleren Frühlingspunkt der oben eingeführten Hauptepoche E (1900 Jan. 0, 0^h m. Z. Berlin), behaftet mit dem konstanten Teil der Aberration ($-$ 20.″50) ist für die Zeit $E + t$, wenn t in julianischen Jahren gezählt wird**):

$$L_0 = 279^\circ\,39'\,15.''51 + [3548.''19283 \times 365.25]\,t - \tfrac{1}{2}\,0.''000\,004\,03\,t^2 .$$

Der Betrag der Präzession in Länge in der Zeit von E bis $E + t$ ist ferner***):

$$50.''2564\,t + \tfrac{1}{2}\,0.''0002218\,t^2$$

oder:

$$[0.''13760 \times 365.25]\,t + \tfrac{1}{2}\,0.''000\,2218\,t^2 .$$

Die mittlere Länge der Sonne, gezählt vom mittleren Frühlingspunkt derselben Zeit $E + t$, und wieder behaftet mit Aberration, wird also:

$$L = 279^\circ\,39'\,15.''51 + [3548.''33043 \times 365.25]\,t + 0.''000\,108\,9\,t^2 . \qquad \text{II.}$$

Lassen wir jetzt im Äquator eine fingierte Sonne S mit der gleichförmigen täglichen Bewegung μ sich bewegen, so wird ihre Rektaszension für die Zeit $E + t$, gezählt vom mittleren Frühlingspunkt der Zeit $E + t$ unter Benutzung des Ausdruckes I. für die Präzession in Rektaszension sein:

$$A_0 = C + [\mu \times 365.25 + 46.''0850]\,t + 0.''000\,139\,5\,t^2$$

wo C eine Konstante ist. Diese fingierte Sonne wird stets in der Nähe der durch II. definierten, also auch der wirklichen Sonne, bleiben, wenn man $C = 279^\circ\,39'\,15.''51$ und die Koeffizienten von t in beiden Formeln gleich setzt. Wir definieren also die fingierte mittlere Sonne durch folgenden Ausdruck ihrer mittleren Rektaszension für die Epoche $E + t$

$$A_0 = 279^\circ\,39'\,15.''51 + [3548.''33043 \times 365.25]\,t + 0.''000\,139\,5\,t^2 . \qquad \text{III.}$$

Wird hierzu die Nutation in Rektaszension gefügt, so entsteht in

$$A = A_0 + \text{Nut. in AR.} \qquad \text{III}^a.$$

die wahre Rektaszension desjenigen Punktes des Äquators, der für die Definition der zweiten Zeiteinteilung maßgebend ist; wir nennen ihn kurz »mittlere Sonne«,

---

*) *Leverrier*, De la mesure du temps, Annales de l'Observatoire de Paris Vol. IV, p. 56. *Newcomb*, Fundamental Constants of Astronomy, American Ephemeris for 1897, App. p. 188.

**) *Newcomb*, Tables of the Earth p. 1, Constants etc. p. 187.

***) *Newcomb*, Prec. Constant, Astr. Pap. Vol. VIII, p. 73.

und die durch ihn erhaltene Zeit »*mittlere Sonnenzeit*«. Die Definitionen für dieselbe werden:

1. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über die »mittlere Sonne« hinweggeht, ist der Beginn eines Zeitintervalles — des *mittleren Sonnentages* —, dessen Ende mit der nächstfolgenden Koinzidenz von Meridian und mittlerer Sonne zusammenfällt.

2. Der Stundenwinkel der mittleren Sonne mißt die seit Beginn des mittleren Sonnentages verflossene mittlere Ortzeit.

3. Der Unterschied der mittleren Ortszeiten zweier Meridiane ist gleich der Längendifferenz λ derselben und zwar hat der östlich gelegene die um λ größere mittlere Zeit*).

Die Bestimmung der mittleren Ortszeit geschieht stets durch Vermittelung der Ortssternzeit und es ist daher vor ihrer Erklärung das gegenseitige Verhältnis der beiden Zeitrechnungen festzustellen. Die Formel III. zeigt, daß die mittlere Sonne in jedem mittleren Sonnentag sich um den Winkel

$$3548''.33043$$

in der Richtung der Rotationsbewegung gegen den Frühlingspunkt verschiebt. Da der Index — der Meridian — in einem Sterntag

$$360^{\circ} = 1\,296\,000''$$

beschreibt, so wird der Winkel $3548''.33043$ in

$$\frac{3548.33043}{1\,296\,000} = 0.002\,737\,909 \text{ Sterntagen}$$

beschrieben und es ist daher

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ mittlerer Sonnentag} &= 1.002\,737\,909 \text{ Sterntage,} \\ \text{woraus} \\ 1 \text{ Sterntag} &= 0.997\,269\,567 \text{ mittlere Sonnentage,} \end{aligned}\right\} \quad \text{IV.}$$

oder in Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ mittl. Sonnentag} &= 1^{d}\ 0^{h}\ 3^{m}\ 56^{s}.55\,536 \text{ Sternzeit,} \\ 1 \text{ Sterntag} &= 0\ 23\ 56\ \ 4.09\,058 \text{ mittl. Zeit.} \end{aligned}\right\} \quad \text{IV}^{a}.$$

Vermittelst dieser Beziehungen kann man eine gegebene Anzahl von Stunden, Minuten, Sekunden Sternzeit in Stunden, Minuten, Sekunden mittlerer Zeit verwandeln und umgekehrt; zur Erleichterung dieser Rechnung hat man Tafeln (siehe »Tafeln« Nr. IV und V). Ein mittlerer Tag ist um $3548''.33043 = 3^{m}\,56^{s}.55536$ größer als ein Sterntag; die mittlere Sonne wird daher bei jeder Rotation um diesen Betrag später vom Meridian überstrichen, als der Frühlingspunkt, oder die Fixsterne werden um ihn früher erreicht als die Sonne (Akzeleration der Fixsterne).

Der Ausdruck III^{a}, den wir jetzt in Zeitteilung schreiben:

$$A = 18^{h}\,38^{m}\,37^{s}.034 + [3^{m}\,56^{s}.55\,536 \times 365.25]t + 0^{s}.000\,0093\,t^{2} + \text{Nut. in AR.} \quad \text{V.}$$

gestattet für $0^{h}\,0^{m}\,0^{s}$ mittlere Zeit — mittleren Mittag — jedes Tages, die Rektaszension der mittleren Sonne zu berechnen; in den Jahrbüchern wird diese Angabe

*) Hier gilt dieselbe Bemerkung wie Seite 35.

in der Sonnenephemeride unter der Überschrift »Sternzeit im mittleren Mittag« für den betreffenden Grundmeridian gegeben. Für einen anderen Meridian in λ westlicher Länge vom Grundmeridian ist der Betrag der Bewegung der mittleren Sonne in der Zeit λ also die Größe $\lambda \cdot (3^m 56^s.555)$, wo λ in Bruchteilen des Tages auszudrücken ist, der Angabe für den Grundmeridian hinzuzufügen; ist λ in Bruchteilen einer Stunde ausgedrückt, so wird diese Korrektion

$$\lambda_h \cdot 9^s.85647;$$

sie findet sich im Sternwartenverzeichnis des Berliner Jahrbuches unter der Überschrift »Korr. der Sternzeit« angegeben (ebenso in »Tafeln« Nr. XXXII).

Da nun die Rektaszension der mittleren Sonne A gleich dem im selben Moment stattfindenden Stundenwinkel des Frühlingspunktes ist, so stellt sie die Sternzeit im mittleren Mittag (im Beginn des mittleren Tages) dar. Damit kann der Übergang von einer in Sternzeit gemachten Zeitangabe in eine Angabe in mittlerer Zeit bewerkstelligt werden und umgekehrt. Ist die Sternzeit gegeben, so zieht man davon die Sternzeit im mittleren Mittag des betreffenden Tages ab und verwandelt den Rest nach IV[a] in mittlere Zeit. Ist mittlere Zeit gegeben, so verwandelt man sie nach IV[a] in Sternzeit und fügt die Sternzeit im mittleren Mittag hinzu.

Beispiele.

1) 1904 Juli 1 $5^h 27^m 45^s.81$ mittl. Z. Heidelberg ist in Sternzeit zu verwandeln.

Taf. IV gibt $5^h 27^m 45^s.81$ mittl. Z.-Intervall seit Mittag
$+\ 0\ 53.84$ Red. auf Sternzeit
$5\ 28\ 39.65$ Sternz.-Intervall seit Mittag

Sternzeit im mittl. Mitt. Berlin Juli 1	$6^h 36^m 17^s.37$
Korr. der Sternz. für Heidelberg	$+\ 3.07$
Sternzeit im mittl. Mitt. Heidelberg	$6\ 36\ 20.44$
Seitdem verflossen	$5\ 28\ 39.65$
Sternzeit Heidelberg	$12\ 5\ 0.09$

2) 1904 Jan. 28 $8^h 42^m 15^s.81$ Sternzeit Mt. Hamilton ist in mittlere Zeit zu verwandeln.

Sternzeit im mittl. Mittag Berlin Jan. 28	$20^h 25^m 11^s.50$
Korr. der Sternzeit	$+\ 1\ 28.74$
Sternzeit im mittl. Mittag Mt. Hamilton	$20\ 26\ 40.24$

$32^h 42^m 15^s.81$ Sternzeit Mt. Hamilton.
$-\ 20\ 26\ 40.24$
$12\ 15\ 35.57$
Taf. V $-\ 2\ 0.51$
$12\ 13\ 35.06$ mittl. Zeit Mt. Hamilton.

Die Bestimmung der mittleren Zeit ist nun einfach: man mißt für denselben Moment die Sternzeit und verwandelt diese in mittlere Zeit. Zur Bequemlichkeit wird sie durch mittlere Zeit-Uhren gezeigt, deren Stand durch Sternzeit-Uhren ermittelt wird.

Der Überschuß von $3^m 56^s.55536$ Sternzeit der Dauer eines mittleren Tages über die Dauer eines Sterntages häuft sich in

$$\frac{24^h}{3^m 56^s.55536} = \frac{86400^s}{236^s.55536} = 365.242\,198\,79 \text{ mittleren Tagen}$$

zu einem vollen Sterntage an; man hat also zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit auch die Relation

$$366.242\,198\,79 \text{ Sterntage} = 365.242\,198\,79 \text{ mittlere Tage.}$$

16. Die Zeitrechnung mit Jahren. Die Einteilung der Zeit in Tage gewährt die einfachste und sicherste Zeitrechnung; die Scheu vor großen Zahlen und der Wechsel der Jahreszeiten haben aber noch Zusammenfassungen dieser natürlichen Einheit zu höheren Einheiten veranlaßt, die, soweit sie in die heutige Astronomie Eingang gefunden haben, anzuführen sind.

Die mittlere Sonne und infolge der oben gegebenen Festsetzung auch die wirkliche Sonne durchlaufen den vollen Umkreis von 360° vom Frühlingspunkt bis wieder zum Frühlingspunkt in

$$\frac{1296000}{3548.33043} = \frac{1}{0.002\,737\,909} = 365.242\,198\,79 \text{ mittleren Tagen}$$

$$\text{oder nach IV. in } \frac{1.002\,737\,909}{0.002\,737\,909} = 366.242\,198\,79 \text{ Sterntagen.}$$

Diesen Zeitraum nennt man ein *tropisches Jahr*. Nach einer von Bessel getroffenen Festsetzung beginnt man das tropische Jahr in demjenigen absoluten Moment, in welchem die durch III. definierte Größe A_0, also die mittlere Rektaszension der mittleren Sonne, behaftet mit dem konstanten Teil der Aberration, jeweils den Betrag von $280^\circ = 18^h 40^m$ erreicht. So definiert heißt dieses Jahr auch »annus fictus« oder Besselsches Jahr. Sein Beginn ist somit von keiner Ortszeit abhängig, sondern ein absoluter Zeitpunkt, den man kurz mit z. B. 1904.0 zu bezeichnen pflegt. Wegen des quadratischen Gliedes in A_0 ist es nicht zu allen Zeiten gleich lang, sondern es tritt zu obiger Dauer in mittleren Tagen noch

$$-0^d.000\,000\,061\,4\,t$$

hinzu, wo t in Jahren von 1900 ab zu zählen ist. Der Betrag macht nach 1000 Jahren erst 5^s in der Jahresdauer aus und kann für die heutige Astronomie außer Betracht bleiben.

Sowohl der Anfang als die Dauer des tropischen Jahres bringen wegen der Bruchteile des Tages für die Zeitrechnung einige Unbequemlichkeit mit sich. Man gebraucht daher neben dem tropischen ein Jahr, das aus einer *ganzen* Anzahl von Tagen besteht und mit dem Beginn eines mittleren Tages seinen Anfang nimmt. Die Dauer desselben hat Julius Caesar, beraten durch den alexandrinischen Astronomen Sosigenes, derartig reguliert, daß auf drei Jahre mit 365 Tagen ein Jahr mit 366 Tagen folgen sollte, so daß die durchschnittliche Dauer eines solchen »*julianischen*« Jahres 365.25 Tage beträgt; die Jahre mit 366 Tagen heißen Schaltjahre, die anderen Gemeinjahre. Dieser julianischen Zeitrechnung bedient sich auch die Astronomie zur Datierung für alle Jahre bis zur Einführung der *gregorianischen* Zeitrechnung, von wo ab diese gebraucht wird. Die nach Papst Gregor XIII. benannte, von dem römischen Arzt Luigi *Lilio* vorgeschlagene Reform der julianischen Zeitrechnung

wurde durch das Bestreben hervorgerufen, dem tropischen Jahre näher zu bleiben, als es durch das julianische Jahr möglich ist; der Unterschied zwischen beiden:

$$365^{d}.250\,000\,00 - 365^{d}.242\,198\,79 = 0^{d}.007\,801\,21$$

hatte im 16. Jahrhundert der christlichen Ära eine Differenz von 10 Tagen zwischen der Zählung nach Tagen des tropischen und des julianischen Jahres hervorgerufen. Um dies zu korrigieren und ein ähnliches Auseinandergehen in Zukunft zu verhindern, bestimmte Gregor durch Bulle vom 1. März 1582, daß auf den mit 4. Oktober 1582 bezeichneten Tag sofort der mit 15. Oktober 1582 zu bezeichnende Tag folgen solle, ferner daß der Schalttag in allen durch 100 ohne Rest teilbaren Jahren ausfallen solle mit Ausnahme derjenigen, die durch 400 ohne Rest teilbar sind, welche Schalttage behalten sollen. 100 gregorianische Jahre enthalten also 36524 Tage, 400 gregorianische Jahre aber $4 \times 36524 + 1 = 146097$ Tage, während 400 tropische Jahre $= 146096.879516$ Tagen sind.

Das julianische und das gregorianische Jahr beginnt man in astronomischer Zählweise mit dem durch

$$\text{Januar } 0,\ 0^{h}0^{m}0^{s} \text{ mittlere Ortszeit}$$

bezeichneten Moment, der identisch ist mit

$$\text{Dezember } 31,\ 0^{h}0^{m}0^{s} \text{ mittlere Ortszeit}$$

des vorhergehenden Jahres, und reiht daran die 365 bzw. 366 Tage in der üblichen Bezeichnung durch Monat und Monatstag; der Schalttag wird als 29. Februar eingeführt, der in den Gemeinjahren fehlt.

Die Jahre, auch das tropische, bezeichnet man mit ihrer Ordinalzahl in der christlichen Ära; am Beginn des Jahres X sind also $X - 1$ Jahre seit Beginn der Ära verflossen. Das dem Beginn der Ära unmittelbar vorausgehende Jahr wird von Historikern, Chronologen usw. als das Jahr 1 a. Chr. n., astronomisch aber als das Jahr 0 und die vorhergehenden als $-1, -2, -3, \ldots$ bezeichnet, so daß

$$\text{Jahr Y a. Chr. n. chronologisch} = -Y + 1 \text{ astronomisch ist.}$$

Der Beginn des Jahres $-X$ liegt dann ebenfalls $-X - 1$ Jahre vom Beginn der Ara ab, d. h. mit den Jahreszahlen kann unmittelbar das Intervall in Jahren gebildet werden.

Es ist noch der Beginn des tropischen und julianischen Jahres in Beziehung zu setzen. Nach früherer Festsetzung beginnt das tropische Jahr $E + x$, wenn

$$A_0 = 279^{\circ}39'15''.51 + [3548''.33043 \times 365.25]x + 0''.000\,1395\,x^2 = 280^{\circ} + x \cdot 360^{\circ}$$

geworden ist. $[\ldots]$ ist die Bewegung der mittleren Sonne in einem julianischen Jahr; $3548''.33043$ ist also die Bewegung der mittleren Sonne in einem mittleren Sonnentag; folglich ist die Bewegung in 365 Tagen:

$$360^{\circ} - 14'19''.39305$$

und A_0 wird also für Jan. 0, $0^{h}0^{m}0^{s}$ des Jahres $E + x$, wenn zwischen E und $E + x$ s Schalttage liegen:

$$279^{\circ}39'15''.51 - (14'19''.39305)x + 0''.000\,1395\,x^2 + (59'8''.33043)s.$$

Hierin ist s negativ anzusetzen, wenn x negativ ist.

Um die zur Durchlaufung des Winkels

$$20'44''.49 + (14'19''.39305)x - 0''.0001395x^2 - (59'8''.33043)s$$

nötige Zeit, nämlich

$$\left(\frac{1244''.49}{3548''.33043} + \frac{859''.393}{3548''.33043}\,x - \frac{0''.0001395}{3548''.33043}x^2 - s\right) \text{ Tage}$$

oder $$0^d.35073 + 0^d.24219879\,x - 0^d.0000000393\,x^2 - s$$

liegt also der Beginn des tropischen Jahres später als Januar 0, $0^h\,0^m\,0^s$ mittlere Zeit Berlin des betreffenden Jahres oder als der Beginn des julianischen Jahres für den Berliner Meridian. Nennt man mit Bessel k diejenige Anzahl von Tagen, um welche der Beginn des tropischen Jahres *früher* liegt, als der des julianischen Jahres, so wird:

$$k = -0^d.35073 - 0^d.24219879\,x + 0^d.0000000393\,x^2 + s\,.$$

Diese Angabe gilt für Berlin; für einen Ort, dessen Längendifferenz mit Berlin, *westlich* positiv gezählt, d ist, wird $k + d$ die Zeit vom Beginn des tropischen Jahres bis zum Beginn des julianischen. Die Größe k findet sich in Taf. Nr. XXXI[a] für 1600 bis 2000 p. Chr. n. fertig berechnet vor.

Bei der Bestimmung von s zählt man, wenn $E + x$ ein Schaltjahr ist, dieses bereits mit, erhält also in k dann die Zahl der Tage, um welche der Beginn des tropischen Jahres $E + x$ früher liegt als der Moment Januar 1, $0^h\,0^m\,0^s$ des Schaltjahres $E + x$; *diesen* Moment hat man also dann als Beginn des Schaltjahres in Rechnung zu setzen.

Von der nach tropischen Jahren geteilten Zeit in Verbindung mit dem Sterntag wird hauptsächlich bei Berechnung der sogenannten Reduktionsgrößen Gebrauch gemacht. Hierbei tritt noch ein Begriff auf, den wir gleich an dieser Stelle erläutern wollen, nämlich der des *Normalmeridianes*. Wir haben oben gesehen, daß das julianische Jahr an dem Orte, dessen westliche Längendifferenz von Berlin d ist, um $k + d$ später beginnt als das tropische Jahr (annus fictus), wenn k für Berlin berechnet ist. Ist also m ein bestimmtes Datum im julianischen Jahr für diesen Ort, so entspricht diesem das Datum

$$m + k + d \text{ des annus fictus (dies reductus).}$$

Derjenige Ort der Erde, für welchen in einem bestimmten Jahr $k + d = 0$ wird, welcher also die Länge $-k$ von Berlin hat, hat die Eigenschaft, daß in ihm das julianische und das tropische Jahr gleichzeitig beginnen. Der Anfang des julianischen Jahres ist Jan. 0, $0^h0^m0^s$ Mittl. Zeit, im Anfang des annus fictus ist die Rektaszension der mittleren Sonne $280^o = 18^h40^m0^s$; da nun um $0^h0^m0^s$ die mittlere Sonne im Meridian steht, so ist im genannten Moment in diesem Meridian $18^h40^m0^s$ Sternzeit. Man nennt diesen von Jahr zu Jahr wechselnden Meridian den Normalmeridian und kann sich nun offenbar so ausdrücken:

Im Normalmeridian entspricht der Beginn des julianischen und des tropischen Jahres dem Moment

$0^h\,0^m\,0^s$ Mittlere Ortszeit
und $18\,40\,0$ Ortssternzeit.

Diese Feststellung wird uns später von Nutzen sein.

Die julianische Periode. Um das Intervall weit auseinanderliegender Zeitangaben schnell und sicher bilden zu können, bedient man sich einer Tabelle, welche für jedes Datum des julianischen und gregorianischen Kalenders die Zahl der seit Beginn der sogenannten julianischen Periode verflossenen Tage zu entnehmen gestattet. Diese von dem Chronologen Joseph Scaliger zu anderen Zwecken eingeführte Periode beginnt mit Januar 1 des Jahres -4712 (astr.), liegt also vor allen bekannten astronomischen Ereignissen. Die Differenz der erhaltenen Zahlen gibt das Intervall. (Siehe »Tafeln« Nr. I.)

Abschnitt IV.

Mechanik.

17. Bewegung eines Punktes. Wir wollen die Grundgleichungen der Mechanik im Zusammenhang darstellen, um später die astronomischen Anwendungen nicht unterbrechen zu müssen und Wiederholungen zu vermeiden.

Die Mechanik untersucht die Ortsveränderungen der Materie in ihrer Abhängigkeit von der Zeit; der einfachste Fall ist, wenn die Materie so kleine Dimensionen hat, daß sie gegen die Ortsveränderungen verschwinden, sie selbst also als Punkt betrachtet werden darf; die Aufgabe besteht dann darin, die Koordinaten x, y, z dieses Punktes in bezug auf ein gegebenes festes rechtwinkliges Koordinatensystem als Funktionen der Zeit t zu bestimmen*). Hierzu muß irgend etwas gegeben sein; die Untersuchung der in der Natur vorkommenden Bewegungen hat ergeben, daß dies in der Regel die zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten nach der Zeit sind. Um den mechanischen Begriff derselben festzustellen, betrachten wir zunächst die ersten Differenzialquotienten:

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}, \tag{1}$$

die man die Komponenten der *Geschwindigkeit* nennt, indem man unter Geschwindigkeit allgemein die in der Zeiteinheit zurückgelegte Wegstrecke versteht; dx, dy, dz sind die Projektionen der vom Punkt selbst in der Zeit dt beschriebenen Strecke ds auf die Achsen des Systems. Man hat also:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\,; \tag{2}$$

die Richtung von ds gegen die Achsen ist gegeben durch die Richtungskosinus

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \text{ u. s. f.} \tag{3}$$

---

*) *Kirchhoff*, Mechanik, erste Vorl.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des eben betrachteten Punktes in einem gegen das erste gedrehten System, so daß

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 \\ \eta &= x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 \\ \zeta &= x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad 4)$$

ist, so werden die Komponenten der Geschwindigkeit, bezogen auf dieses zweite System,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{d\xi}{dt} = u\cos\alpha_1 + v\cos\alpha_2 + w\cos\alpha_3 \\ \nu &= \frac{d\eta}{dt} = u\cos\beta_1 + v\cos\beta_2 + w\cos\beta_3 \\ \omega &= \frac{d\zeta}{dt} = u\cos\gamma_1 + v\cos\gamma_2 + w\cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad 5)$$

d. h. sie setzen sich aus den Komponenten bezogen auf das erste System genau so zusammen, wie die Koordinaten. Da im zweiten System ebenfalls

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2 + \omega^2},$$

der rechts stehende Ausdruck aber nach Einsetzung der Werte von μ, ν, ω in $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ übergeht, wenn die Gleichungen 1) Seite 3 beachtet werden, so ist damit bewiesen, daß die Geschwindigkeit vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Die Änderungen der Komponenten der Geschwindigkeit mit der Zeit

$$X = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad 6)$$

also die zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten, nennt man die Komponenten der *Beschleunigung*. Für sie gilt dasselbe, wie für die Geschwindigkeiten, d. h. sie setzen sich zu einer Beschleunigung

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad 7)$$

zusammen, deren Richtungskosinus mit den Achsen

$$\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad 8)$$

sind, und die Komponenten der Beschleunigung im gedachten Koordinatensystem sind:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{d^2\xi}{dt^2} = X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3 \\ H &= \frac{d^2\eta}{dt^2} = X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3 \\ Z &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} = X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3, \end{aligned} \qquad 9)$$

woraus wieder folgt, daß die Beschleunigung vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Wir wollen jetzt annehmen, daß das zweite Koordinatensystem ξ, η, ζ ein bewegliches sei und zwar derart, daß

die η- und die ζ-Achse um die ξ-Achse mit der Geschwindigkeit $\frac{dp}{dt}$

die ζ- und die ξ-Achse um die η-Achse » » » $\frac{dq}{dt}$

die ξ- und die η-Achse um die ζ-Achse » » » $\frac{ds}{dt}$

rotieren; der Sinn der Rotation soll für alle drei Achsen derselbe sein, nämlich der, den wir in Nr. 6 Seite 14 festgestellt haben; in der Anfangslage falle das bewegte System mit dem festen x, y, z zusammen. Wir stellen uns die Aufgabe, *die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen eines Punktes auszudrücken durch die auf das rotierende System sich beziehenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.*

Wir ermitteln zuerst die Geschwindigkeiten, die, auf das System x, y, z bezogen, wie oben mit u, v, w bezeichnet seien. Dieselben setzen sich zusammen aus den Geschwindigkeiten, bezogen auf die ξ-, η-, ζ-Achsen, nämlich $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, und aus den Geschwindigkeiten dieser Achsen selbst, die sich unmittelbar aus den Formeln 8) (Seite 13) zu $-\eta\frac{ds}{dt}+\zeta\frac{dq}{dt}$, ... ergeben, so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\xi}{dt} - \eta\frac{ds}{dt} + \zeta\frac{dq}{dt} \\ v &= \frac{d\eta}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \xi\frac{ds}{dt} \\ w &= \frac{d\zeta}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \eta\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \qquad 10)$$

Die Beschleunigungen, bezogen auf das *bewegliche* System, das für den Augenblick mit dem festen zusammenfallend gedacht werden kann, bilden sich aus den Geschwindigkeiten u, v, w ebenso, wie diese aus den Koordinaten, nämlich aus:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} - v\frac{ds}{dt} + w\frac{dq}{dt} \\ &\frac{dv}{dt} - w\frac{dp}{dt} + u\frac{ds}{dt} \\ &\frac{dw}{dt} - u\frac{dq}{dt} + v\frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

oder nach Eintragung von 10) und einfacher Zusammenziehung:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt} - 2\frac{d\eta}{dt}\frac{ds}{dt} + 2\frac{d\zeta}{dt}\frac{dq}{dt} - \xi\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] - \eta\left[\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}\right] + \zeta\left[\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dp}{dt}\frac{ds}{dt}\right] \\ &\frac{d^2\eta}{dt} - 2\frac{d\zeta}{dt}\frac{dp}{dt} + 2\frac{d\xi}{dt}\frac{ds}{dt} - \eta\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] - \zeta\left[\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dq}{dt}\frac{ds}{dt}\right] + \xi\left[\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{dp}{dt}\right] \qquad 11) \\ &\frac{d^2\zeta}{dt} - 2\frac{d\xi}{dt}\frac{dq}{dt} + 2\frac{d\eta}{dt}\frac{dp}{dt} - \zeta\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right] - \xi\left[\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt}\right] + \eta\left[\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{ds}{dt}\frac{dq}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke 11) vereinfachen sich sehr, wenn wir das bewegte System so definieren: die ξ-Achse gehe stets durch den bewegten Punkt hindurch, der sich in der Entfernung r vom Anfangspunkt befindet; es wird dann ständig:

$$\xi = r, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0$$

und die obigen Ausdrücke für die Beschleunigungen in der Richtung der beweglichen Achsen werden:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] \\ &r\left[\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{dp}{dt}\right] + 2\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt} \\ &-r\left[\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt}\right] - 2\frac{dr}{dt}\frac{dq}{dt}. \end{aligned} \qquad 12)$$

Wenn es sich um die Bewegung eines Punktes handelt, ist es schließlich noch erlaubt, die Drehung um die η-Achse = Null zu setzen, d. h. anzunehmen, daß $\frac{dq}{dt}$ ständig Null sei, dann wird aus 12)

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &r\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{ds}{dt}\right)}{dt} \\ &r\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \qquad 13)$$

Diese drei Größen stellen also dar 1) die Beschleunigung im Radiusvektor r; 2) die Beschleunigung in einer hierzu senkrechten Richtung in der Ebene, die durch die Drehung dp um den Radiusvektor bestimmt ist; 3) die Beschleunigung senkrecht zu dieser Ebene.

Nach dem ersten Gesetz der Bewegung, das von Galilei aus der Erfahrung erkannt, von Newton formuliert worden ist:

»Wenn auf einen Körper nichts einwirkt, dann ändert er seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung nicht«,

kann aus der Beobachtung der ersten Differenzialquotienten der Koordinaten nach der Zeit, nämlich der Geschwindigkeiten, nur der negative Schluß gezogen werden, daß gleichförmige Geschwindigkeiten keiner Erklärung bedürfen und daß sie keinen Aufschluß geben können. Erst ihre Änderungen, die Beschleunigungen, werfen Fragen auf; als erste: welches sind die Ursachen der Beschleunigungen an verschiedenen Körpern? Wenn wir darauf antworten: »Kräfte«, so führen wir nur ein neues Wort ein, ohne über das Wesen derselben etwas aussagen zu wollen oder zu können, aber wir können die Definition für das *Messen* von Kräften einführen: Kräfte, die unter sonst gleichen Bedingungen einem und demselben Körper die gleiche Beschleunigung einprägen, sind gleich. Lassen wir eine solche gemessene Kraft G jetzt auf *verschiedene* Körper unter sonst gleichen Bedingungen wirken, so entsteht die zweite Frage: sind dann die erteilten Beschleunigungen gleich? Hierauf kann nur

die Erfahrung antworten und sie sagt: nein, die Beschleunigungen der einzelnen Körper müssen erst mit gewissen Faktoren multipliziert werden, um untereinander gleich zu werden:

$$m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \cdots$$

Die Größe, der diese Produkte alle gleich werden, kann man die Kraft G nennen, welche die einzelnen Beschleunigungen hervorbringt, denn G selbst ist obiger Definition gemäß an der Beschleunigung eines bestimmten Körpers m gemessen worden und mußte gleich $m\frac{d^2 s}{dt^2}$ gesetzt werden. Die Faktoren $m, m_1, \ldots$ nennt man die *Massen* der Körper; sie können nur gemessen werden durch die Beschleunigungen, welche eine bestimmte Kraft z. B. die Schwerkraft, auf sie ausübt, und man kann sie nicht anders definieren, als daß sie diejenigen Größen sind, die für ein und dieselbe auf verschiedene Körper unter den gleichen Bedingungen wirkende Kraft mit den erteilten Beschleunigungen multipliziert werden müssen, um für alle dasselbe Produkt zu erhalten. In der Gleichung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = G \qquad 14)$$

hat nur die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ eine durch die eingeführten Raum- und Zeiteinheiten bestimmte unabhängige Bedeutung, m und G dagegen sind durchaus erst durch die Gleichung selbst definiert. Man kann für m und G je eine besondere Einheit einführen, die eine ist aber durch die andere gegeben.

Die Gleichung 14) ist der analytische Ausdruck des aus der Erfahrung geschöpften zweiten Newtonschen Grundgesetzes der Bewegung, welches lautet:

»Die Änderung der Bewegung ist der ausgeübten bewegenden Kraft proportional«.

Newton fügt aber in dem Gesetz selbst und in den daran geknüpften Erläuterungen noch folgendes hinzu, welches ebenfalls lediglich als Ausfluß der Erfahrung hingestellt werden muß und für die Anwendung wichtig ist:

»Die Änderung der Bewegung findet in der Richtung statt, in der die Kraft wirkt. Wenn mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, so ist die Wirkung dieselbe, ob sie zusammen und plötzlich oder nacheinander und allmählich angreifen und die Bewegungen setzen sich nach Maßgabe der Richtungen zusammen.«

Werden also die angreifenden Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ in ihre Komponenten $X_1 Y_1 Z_1$; $X_2 Y_2 Z_2$ parallel den Achsen eines Systems zerlegt, so werden die die Bewegung bestimmenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 x}{dt^2} &= X_1 + X_2 + \cdots \\ m\frac{d^2 y}{dt^2} &= Y_1 + Y_2 + \cdots \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} &= Z_1 + Z_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

18. Bewegung eines starren Körpers. Einen starren Körper wollen wir uns zusammengesetzt denken aus einzelnen Bestandteilen, denen die Massen m_1, m_2, ... zukommen und die wir so klein zu wählen haben, daß ihre Dimensionen im speziellen Problem belanglos sind. Bezogen auf ein im Raume festes Koordinatensystem seien die Koordinaten der einzelnen Teilchen $x_1' y_1' z_1'$, $x_2' y_2' z_2'$, ... Werden die Teilchen von äußeren Kräften angegriffen, deren Resultanten die Komponenten X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 parallel den Achsen haben, so bestehen nach dem Vorigen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} m_1 \dfrac{d^2 x_1'}{dt^2} = X_1, & m_1 \dfrac{d^2 y_1'}{dt^2} = Y_1, & m_1 \dfrac{d^2 z_1'}{dt^2} = Z_1 \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2'}{dt^2} = X_2, & m_2 \dfrac{d^2 y_2'}{dt^2} = Y_2, & m_2 \dfrac{d^2 z_2'}{dt^2} = Z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \qquad 1)$$

Summiert man die Gleichungen in x, in y, in z, so kommt:

$$\sum\left(m_n \frac{d^2 x_n'}{dt^2} - X_n\right) = 0, \quad \sum\left(m_n \frac{d^2 y_n'}{dt^2} - Y_n\right) = 0, \quad \sum\left(m_n \frac{d^2 z_n'}{dt^2} - Z_n\right) = 0. \qquad 2)$$

Definiert man den Punkt $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ durch die Gleichungen

$$\xi_0 = \frac{\sum (m_n x_n')}{\sum m_n} \qquad \eta_0 = \frac{\sum (m_n y_n')}{\sum m_n} \qquad \zeta_0 = \frac{\sum (m_n z_n')}{\sum m_n}, \qquad 3)$$

so wird

$$\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \frac{\sum\left(m_n \dfrac{d^2 x_n'}{dt^2}\right)}{\sum m_n}, \qquad \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = \frac{\sum\left(m_n \dfrac{d^2 y_n'}{dt^2}\right)}{\sum m_n}, \qquad \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} = \frac{\sum\left(m_n \dfrac{d^2 z_n'}{dt^2}\right)}{\sum m_n}$$

und man kann daher die Gl. 2) so schreiben:

$$\sum m_n \cdot \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \sum X_n, \quad \sum m_n \cdot \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = \sum Y_n, \quad \sum m_n \cdot \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} = \sum Z_n. \qquad 4)$$

Hierdurch ist die Bewegung des Punktes $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ — des Schwerpunktes des Systems — bestimmt.

Man kann die Gl. 1) auch folgendermaßen miteinander verbinden:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\left[(y_n' Z_n - z_n' Y_n) - m_n\left(y_n' \dfrac{d^2 z_n'}{dt^2} - z_n' \dfrac{d^2 y_n'}{dt^2}\right)\right] = 0 \\ \sum\left[(z_n' X_n - x_n' Z_n) - m_n\left(z_n' \dfrac{d^2 x_n'}{dt^2} - x_n' \dfrac{d^2 z_n'}{dt^2}\right)\right] = 0 \\ \sum\left[x_n' Y_n - y_n' X_n) - m_n\left(x_n' \dfrac{d^2 y_n'}{dt^2} - y_n' \dfrac{d^2 x_n'}{dt^2}\right)\right] = 0 \end{array}\right\} \qquad 5)$$

und diese Gleichungen in solche überführen, welche nur die relativen Koordinaten der einzelnen Massenteilchen zu ihrem Schwerpunkt enthalten. In der Tat, nennt man diese relativen Koordinaten x_n, y_n, z_n, so daß:

$$x_n' = \xi_0 + x_n, \quad y_n' = \eta_0 + y_n, \quad z_n' = \zeta_0 + z_n$$

wird, so erhält man nach Einsetzung dieser Werte in 5) mit Beachtung von 4) und mit weiterer Beachtung, daß nach 3)

$$\sum m_n x_n = 0, \quad \sum m_n y_n = 0, \quad \sum m_n z_n = 0$$

und daher auch

$$\sum m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = 0\,, \quad \sum m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = 0\,, \quad \sum m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = 0$$

sein muß:

$$\begin{aligned}
\sum\left[(y_n Z_n - z_n Y_n) - m_n\left(y_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} - z_n \frac{d^2 y_n}{dt^2}\right)\right] &= 0\,,\\
\sum\left[(z_n X_n - x_n Z_n) - m_n\left(z_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} - x_n \frac{d^2 z_n}{dt^2}\right)\right] &= 0\,, \qquad 6)\\
\sum\left[(x_n Y_n - y_n X_n) - m_n\left(x_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} - y_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}\right)\right] &= 0\,.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Gestaltung wie 5), aber sie haben den Vorzug, die relative Bewegung des Systems in Bezug auf seinen Schwerpunkt getrennt zu geben von der Bewegung des Schwerpunktes selbst, die durch die Gleichungen 4) kennen gelehrt wird. Da diese Gleichungen 4) sich von den in voriger Nr. betrachteten nicht unterscheiden, so brauchen wir uns betreffs Untersuchung der Bewegung eines Körpers, der äußeren Kräften ausgesetzt ist, nur mehr mit den Gleichungen 6) zu befassen. Diese können durch eine zweckmäßige Koordinatentransformation in andere übergeführt werden, die der Behandlung zugänglicher sind. Zu dieser kommen wir durch folgende Überlegung.

Wir ziehen durch den Anfangspunkt — den Schwerpunkt des Systems — eine beliebige Gerade, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschließt. Das Quadrat der Entfernung d_n des Punktes $x_n y_n z_n$ von ihr wird dann:

$$d_n^2 = (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) - (x_n \cos\alpha + y_n \cos\beta + z_n \cos\gamma)^2$$

oder

$$\begin{aligned}
d_n^2 = x_n^2 \sin\alpha^2 + y_n^2 \sin\beta^2 + z_n^2 \sin\gamma^2 - 2 x_n y_n \cos\alpha \cos\beta - 2 x_n z_n \cos\alpha \cos\gamma -\\
- 2 y_n z_n \cos\beta \cos\gamma
\end{aligned}$$

und das *Trägheitsmoment* des Systems in bezug auf die Gerade $\alpha\beta\gamma$ kann also folgendermaßen angesetzt werden:

$$\begin{aligned}
T = \sum m_n d_n^2 = \sin\alpha^2 \sum m_n x_n^2 + \sin\beta^2 \sum m_n y_n^2 + \sin\gamma^2 \sum m_n z_n^2\\
- 2\cos\alpha\cos\beta \sum m_n x_n y_n - 2\cos\alpha\cos\gamma \sum m_n x_n z_n - 2\cos\beta\cos\gamma \sum m_n y_n z_n\,.
\end{aligned}$$

Trägt man auf der Geraden $\alpha\beta\gamma$ die Strecke $\frac{1}{\sqrt{T}}$ vom Anfangspunkt aus ab, so hat der Endpunkt die Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{T}}\,, \quad \mathfrak{y} = \frac{\cos\beta}{\sqrt{T}}\,, \quad \mathfrak{z} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{T}}\,.$$

Werden die hieraus sich ergebenden Werte von $\cos\alpha, \ldots$ in T eingetragen und beachtet, daß $\sin\alpha^2 = \cos\beta^2 + \cos\gamma^2, \ldots$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}^2 \sum m_n (y_n^2 + z_n^2) + \mathfrak{y}^2 \sum m_n (x_n^2 + z_n^2) + \mathfrak{z}^2 \sum m_n (x_n^2 + z_n^2) -\\
- 2\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sum m_n x_n y_n - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z} \sum m_n x_n z_n - 2\mathfrak{y}\mathfrak{z} \sum m_n y_n z_n = 1\,.
\end{aligned}$$

Die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, die man für alle möglichen Geraden $\alpha\beta\gamma$ konstruiert, liegen also auf einem Ellipsoid, dessen Gleichung bezogen auf das System der bisherigen Achsen die angesetzte ist. Nun ist bekannt, daß die Gleichung eines Ellipsoids in der Gestalt

$$\mathfrak{x}'^2 \sum m_n (\eta_n^2 + \zeta_n^2) + \mathfrak{y}'^2 \sum m_n (\xi_n^2 + \zeta_n^2) + \mathfrak{z}'^2 \sum m_n (\xi_n^2 + \eta_n^2) = 1$$

erscheint, sobald man ein System zugrunde legt, dessen Achsen mit den Hauptachsen des Ellipsoides zusammenfallen. Dieses System hat also die Eigenschaft, daß in ihm

$$\sum m_n \xi_n \eta_n = 0, \quad \sum m_n \xi_n \zeta_n = 0, \quad \sum m_n \eta_n \zeta_n = 0 \qquad 7)$$

wird. Auf dieses System $\xi \eta \zeta$ wollen wir die Gleichungen 6) transformieren; man transformiert sie damit auf die »Hauptträgheitsachsen« des vorgelegten starren Systems, die fest mit ihm verbunden sind, sich selbst aber im Raum bewegen. Nach den Formeln der Nr. 2 setzen wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\alpha_1 \xi + \cos\beta_1 \eta + \cos\gamma_1 \zeta \\ y &= \cos\alpha_2 \xi + \cos\beta_2 \eta + \cos\gamma_2 \zeta \\ z &= \cos\alpha_3 \xi + \cos\beta_3 \eta + \cos\gamma_3 \zeta \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

und haben hier ξ, η, ζ als Konstante in bezug auf die Zeit, $\cos\alpha_1, \ldots$ aber als Funktionen der Zeit zu betrachten, so daß wird:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \xi \frac{d^2 \cos\alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \cos\beta_1}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \cos\gamma_1}{dt^2}. \qquad 9)$$

Nennen wir ferner die Komponenten der Kräfte nach den neuen Achsen Ξ, H, Z, so wird nach Gl. 9) (Seite 43)

$$X = \Xi \cos\alpha_1 + H \cos\beta_1 + Z \cos\gamma_1 \qquad 10)$$

. . . . . .

Werden 8) 9) 10) in 6) eingetragen und dabei 7) und die Relationen zwischen den Richtungskosinus beachtet, so kommt (mit Weglassung des Index n)

$$\sum \left[\cos\alpha_1 (\eta Z - \zeta H) + \cos\beta_1 (\zeta \Xi - \xi Z) + \cos\gamma_1 (\xi H - \eta \Xi)\right] =$$
$$= \sum \left[m\xi^2 \left(\cos\alpha_2 \frac{d^2 \cos\alpha_3}{dt^2} - \cos\alpha_3 \frac{d^2 \cos\alpha_2}{dt^2}\right) + m\eta^2 \left(\cos\beta_2 \frac{d^2 \cos\beta_3}{dt^2} - \cos\beta_3 \frac{d^2 \cos\beta_2}{dt^2}\right) + \right.$$
$$\left. + m\zeta^2 \left(\cos\gamma_2 \frac{d^2 \cos\gamma_3}{dt^2} - \cos\gamma_3 \frac{d^2 \cos\gamma_2}{dt^2}\right)\right],$$

$$\sum \left[\cos\alpha_2 (\eta Z - \zeta H) + \cos\beta_2 (\zeta \Xi - \xi Z) + \cos\gamma_2 (\xi H - \eta \Xi)\right] =$$
$$= \sum \left[m\xi^2 \left(\cos\alpha_3 \frac{d^2 \cos\alpha_1}{dt^2} - \cos\alpha_1 \frac{d^2 \cos\alpha_3}{dt^2}\right) + m\eta^2 \left(\cos\beta_3 \frac{d^2 \cos\beta_1}{dt^2} - \cos\beta_1 \frac{d^2 \cos\beta_3}{dt^2}\right) + \right.$$
$$\left. + m\zeta^2 \left(\cos\gamma_3 \frac{d^2 \cos\gamma_1}{dt^2} - \cos\gamma_1 \frac{d^2 \cos\gamma_3}{dt^2}\right)\right],$$

$$\sum \left[\cos\alpha_3 (\eta Z - \zeta H) + \cos\beta_3 (\zeta \Xi - \xi Z) + \cos\gamma_3 (\xi H - \eta \Xi)\right] =$$
$$= \sum \left[m\xi^2 \left(\cos\alpha_1 \frac{d^2 \cos\alpha_2}{dt^2} - \cos\alpha_2 \frac{d^2 \cos\alpha_1}{dt^2}\right) + m\eta^2 \left(\cos\beta_1 \frac{d^2 \cos\beta_2}{dt^2} - \cos\beta_2 \frac{d^2 \cos\beta_1}{dt^2}\right) + \right.$$
$$\left. + m\zeta^2 \left(\cos\gamma_1 \frac{d^2 \cos\gamma_2}{dt^2} - \cos\gamma_2 \frac{d^2 \cos\gamma_1}{dt^2}\right)\right].$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ und addiert, dann mit $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$ und addiert, endlich mit $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$, $\cos\gamma_3$ und addiert, so erscheinen drei neue Gleichungen, die wir gleich unter Benutzung folgender Abkürzungen anschreiben. Wir setzen wie in Gl. 4) Seite 12:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \cos\gamma_1 \frac{d\cos\beta_1}{dt} + \cos\gamma_2 \frac{d\cos\beta_2}{dt} + \cos\gamma_3 \frac{d\cos\beta_3}{dt} \\ \frac{dq}{dt} &= \cos\alpha_1 \frac{d\cos\gamma_1}{dt} + \cos\alpha_2 \frac{d\cos\gamma_2}{dt} + \cos\alpha_3 \frac{d\cos\gamma_3}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \cos\beta_1 \frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \cos\beta_2 \frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \cos\beta_3 \frac{d\cos\alpha_3}{dt} \end{aligned}\right\}, \qquad 11)$$

so daß nach den dortigen Erläuterungen die $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ die Drehungsgeschwindigkeiten um die ξ-, η-, ζ-Achse darstellen. Wir bezeichnen ferner die Hauptträgheitsmomente, d. h. diejenigen um die Hauptachsen ξ, η, ζ mit A, B, C, so daß

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum m(\eta^2 + \zeta^2) \\ B &= \sum m(\zeta^2 + \xi^2) \\ C &= \sum m(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

wird. Dann erscheint das Resultat der angedeuteten Operationen in folgender Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2p}{dt^2} + (C-B)\frac{dq}{dt}\frac{ds}{dt} &= \sum(\eta Z - \zeta H) \\ B\frac{d^2q}{dt^2} + (A-C)\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt} &= \sum(\zeta \Xi - \xi Z) \\ C\frac{d^2s}{dt^2} + (B-A)\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} &= \sum(\xi H - \eta \Xi) \end{aligned}\right\}. \qquad 13)$$

Diese Gleichungen sind unter dem Namen der *Euler*schen Differentialgleichungen für die Rotationsbewegung bekannt, und bilden die Grundlage für die Untersuchung der Präzession und Nutation.

Abschnitt V.

Präzession und Nutation der Äquinoktien.

19. Theorie der Rotation der Erde. Die eingeführten Koordinatensysteme der Ekliptik und des Äquators sind im Raum beweglich; es ändern sich daher die Koordinaten der Gestirne auch infolge dieser Bewegung, die in Abzug gebracht werden muß, wenn man die reine Bewegung der Gestirne kennen lernen will. Die analytische Behandlung des Problems der Bewegung des Erdäquators und der Ekliptik trennt diese Bewegung in zwei Klassen: in solche, die für sehr lange Zeiträume als proportional der Zeit betrachtet werden können und in solche, die nach den Sinus und Kosinus rasch variabler Winkel entwickelt werden müssen; die ersteren (säkularen) Bewegungen werden zusammengefaßt unter dem Namen *Präzession*, die letzteren (periodischen) unter dem Namen *Nutation*. Ein Koordinatensystem, das durch Anbringung der Präzession auf eine andere Epoche gebracht ist, heißt ein *mittleres* System und die Sternörter, die in bezug auf ein solches System mitgeteilt sind, heißen mittlere für die betreffende Zeit. Das rasch veränderliche Koordinatensystem, welches die durch die Glieder der Nutation dargestellten Bewegungen mitmachend gedacht ist, heißt ein *wahres* System und die darauf bezogenen Sternörter heißen *wahre*. Die Beobachtungen liefern stets wahre Örter; um nun mehrere derselben miteinander verbinden zu können und daraus die reine Bewegung der Gestirne abzuleiten, ist es üblich, alle Beobachtungen einer bestimmten Klasse auf ein mittleres System für eine bestimmte Epoche zu reduzieren.

Ihrer Ursache nach kann man die genannten Bewegungen in solche unterscheiden, welche von der Bewegung der Erdachse im Raum, also von der Anziehung von Sonne und Mond auf das Erdsphäroid herrühren, und in solche, welche aus der Bewegung der Ekliptik im Raum infolge der Anziehung der Planeten auf die Erde entstehen. Die Mechanik des Himmels untersucht diese beiden Erscheinungen, hier wollen wir uns nur so weit mit ihnen befassen, als es zum Verständnis der Präzession und Nutation erforderlich ist, und mit der Theorie der *Rotation der Erde* den Anfang machen.

Die Mechanik (Nr. 18) lehrt, daß man die allgemeine Bewegung eines starren Körpers sich zusammengesetzt denken kann aus einer fortschreitenden seines Schwerpunktes und aus einer drehenden um diesen; ferner daß diese letztere Bewegung, mit der wir es hier allein zu tun haben, gegeben ist durch drei von den Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes unabhängige Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (Gl. 13) Seite 50). Wir führen darin, als für das vorliegende Problem am geeignetsten, die Eulerschen Winkel φ, ψ, θ ein, durch die das bewegliche System $\xi\eta\zeta$ gegen das feste xyz nach Nr. 6 bestimmt ist und die nach den Gl. 6) dieser Nr. mit den p, q, s in folgendem Zusammenhang stehen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}+\cos\varphi\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{dq}{dt} &= -\sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}-\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{ds}{dt} &= -\cos\theta\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Um auch die rechten Seiten der Eulerschen Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}L &= \sum(\eta_n Z_n - \zeta_n H_n)\\ M &= \sum(\zeta_n \Xi_n - \xi_n Z_n)\\ N &= \sum(\xi_n H_n - \eta_n \Xi_n)\end{aligned}$$

in den Variabeln φ, ψ, θ auszudrücken, haben wir zuerst die Komponenten der auf die Massenteilchen m_n einwirkenden Kräfte zu ermitteln. Als solche kommen hier nur in betracht anziehende Kräfte, die von einem Kraftzentrum aus wirken, das wir als Punkt mit der Masse M betrachten. Die Koordinaten desselben im System $\xi\eta\zeta$ seien ξ_0, η_0, ζ_0, dann wird, wenn die Wirkung nach dem Newtonschen Gesetz erfolgt,

$$\begin{aligned}\Xi_n &= k^2\frac{Mm_n}{r_n^3}(\xi_0-\xi_n)\\ H_n &= k^2\frac{Mm_n}{r_n^3}(\eta_0-\eta_n)\\ Z_n &= k^2\frac{Mm_n}{r_n^3}(\zeta_0-\zeta_n),\end{aligned}$$

worin

$$r_n^2 = (\xi_0-\xi_n)^2+(\eta_0-\eta_n)^2+(\zeta_0-\zeta_n)^2.$$

Die L, M, N gehen somit nach leichter Reduktion über in:

$$L = k^2 M\zeta_0\sum m_n\frac{\eta_n-\eta_0}{r_n^3} - k^2 M\eta_0\sum m_n\frac{\zeta_n-\zeta_0}{r_n^3}$$

. . . . . .

oder nach Einführung der Funktion:

$$U = k^2 M\sum\frac{m_n}{r_n}$$

— der Kräftefunktion — in:

$$\left.\begin{aligned}L &= \zeta_0\frac{\partial U}{\partial\eta_0}-\eta_0\frac{\partial U}{\partial\zeta_0}\\ M &= \xi_0\frac{\partial U}{\partial\zeta_0}-\zeta_0\frac{\partial U}{\partial\xi_0}\\ N &= \eta_0\frac{\partial U}{\partial\xi_0}-\xi_0\frac{\partial U}{\partial\eta_0}.\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Nennt man x_0, y_0, z_0 die Koordinaten von M im festen Koordinatensystem, so daß

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= \cos\alpha_1 x_0+\cos\alpha_2 y_0+\cos\alpha_3 z_0\\ \eta_0 &= \cos\beta_1 x_0+\cos\beta_2 y_0+\cos\beta_3 z_0\\ \zeta_0 &= \cos\gamma_1 x_0+\cos\gamma_2 y_0+\cos\gamma_3 z_0\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

wird, so ist ersichtlich, daß die ξ_0, η_0, ζ_0 Funktionen von $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ... und damit von φ, ψ, θ sind (Gl. 1) Seite 11); dagegen sind die Koordinaten der Massen-

teilchen ξ_n, η_n, ζ_n hiervon unabhängig, da das Massensystem mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbunden ist. Es wird also sein:

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \xi_0}\frac{d\xi_0}{d\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \eta_0}\frac{d\eta_0}{d\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_0}\frac{d\zeta_0}{d\varphi} \qquad 4)$$

und ebenso für $\frac{dU}{d\psi}$ und $\frac{dU}{d\theta}$.

Nun ist nach 3)

$$\frac{d\xi_0}{d\varphi} = x_0\frac{d\cos\alpha_1}{d\varphi} + y_0\frac{d\cos\alpha_2}{d\varphi} + z_0\frac{d\cos\alpha_3}{d\varphi}$$

oder nach den bekannten Ausdrücken für $\cos\alpha_1, \ldots$ in φ, ψ, θ (Gl. 1) Seite 11)

$$\frac{d\xi_0}{d\varphi} = x_0\cos\beta_1 + y_0\cos\beta_2 + z_0\cos\beta_3 = \eta_0 .$$

Auf diese Weise erhält man:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi_0}{d\varphi} = \eta_0 , && \frac{d\eta_0}{d\varphi} = -\xi_0 , && \frac{d\zeta_0}{d\varphi} = 0\\
&\frac{d\xi_0}{d\psi} = \cos\beta_3\zeta_0 - \cos\gamma_3\eta_0 , && \frac{d\eta_0}{d\psi} = \cos\gamma_3\xi_0 - \cos\alpha_3\zeta_0 , && \frac{d\zeta_0}{d\psi} = \cos\alpha_3\eta_0 - \cos\beta_3\xi_0\\
&\frac{d\xi_0}{d\theta} = \sin\varphi\,\zeta_0 , && \frac{d\eta_0}{d\theta} = \cos\varphi\,\zeta_0 , && \frac{d\zeta_0}{d\theta} = -\sin\varphi\,\xi_0 - \cos\varphi\,\eta_0
\end{aligned}$$

und nach Einsetzung in 4) und Beachtung von 2)

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\varphi} &= N\\
\frac{dU}{d\psi} &= -\sin\varphi\sin\theta\,L - \cos\varphi\sin\theta\,M - \cos\theta\,N\\
\frac{dU}{d\theta} &= \cos\varphi\,L - \sin\varphi\,M .
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach L, M, N ergibt die rechten Seiten der Eulerschen Gleichungen, die wir nun in dieser Form als Grundlage des Folgenden nochmals zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{d^2p}{dt^2} + (C-B)\frac{dq}{dt}\frac{ds}{dt} &= -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dU}{d\psi} + \cos\theta\frac{dU}{d\varphi}\right) + \cos\varphi\frac{dU}{d\theta}\\
B\frac{d^2q}{dt^2} + (A-C)\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dU}{d\psi} + \cos\theta\frac{dU}{d\varphi}\right) - \sin\varphi\frac{dU}{d\theta}\\
C\frac{d^2s}{dt^2} + (B-A)\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} &= \frac{dU}{d\varphi}\\
\frac{dp}{dt} &= -\sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}\\
\frac{dq}{dt} &= -\sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\\
\frac{ds}{dt} &= -\cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} .
\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Der Integration dieses Systems muß die Aufstellung der Differenzialquotienten der Kräftefunktion nach φ, ψ, θ vorangehen. Zu dem Ende ist

$$U = k^2 M \sum \frac{m_n}{r_n}$$

zu entwickeln. Nennt man ϱ_n die Entfernung des Teilchens m_n vom Anfangspunkt — dem Schwerpunkt des Massensystems —, r_0 die Entfernung des anziehenden Körpers vom selben Punkt, so wird:

$$r_n^2 = r_0^2 + \varrho_n^2 - 2(\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n),$$

also:

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_0}\left(1 - 2\frac{\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n}{r_0^2} + \frac{\varrho_n^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da die Dimensionen der Erde gegen ihre Entfernung von den hier in betracht kommenden anziehenden Körpern, Sonne und Mond, klein sind, kann dieser Ausdruck nach den Potenzen der kleinen Größe

$$2\frac{\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n}{r_0^2} - \frac{\varrho_n^2}{r_0^2}$$

entwickelt werden. Wenn man bei den Gliedern dritter Ordnung stehen bleibt, was mehr als ausreichend ist, dann ergibt sich nach Eintragung in U:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3$$

$$U_0 = k^2 M \sum \frac{m_n}{r_0}$$

$$U_1 = k^2 M \sum m_n \frac{\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n}{r_0^3}$$

$$U_2 = \tfrac{3}{2} k^2 M \sum m_n \frac{(\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n)^2}{r_0^5} - \tfrac{1}{2} k^2 M \sum m_n \frac{\varrho_n^2}{r_0^3}$$

$$U_3 = \tfrac{5}{2} k^2 M \sum m_n \frac{(\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n)^3}{r_0^7} - \tfrac{3}{2} k^2 M \sum m_n \varrho_n^2 \frac{\xi_0 \xi_n + \eta_0 \eta_n + \zeta_0 \zeta_n}{r_0^5},$$

wo U_0, U_1, ... beziehungsweise von der 0ten, 1ten, ... Ordnung sind. Da der Anfangspunkt im Schwerpunkt des Massensystems liegt, also

$$\sum m_n \xi_n = 0, \qquad \sum m_n \eta_n = 0, \qquad \sum m_n \zeta_n = 0$$

ist, so wird

$$U_1 = 0.$$

Macht man weiter die Voraussetzung, daß das Massensystem der m_n symmetrisch in bezug auf das Achsensystem $\xi\eta\zeta$ angeordnet ist, wie das zweifellos bei der Erde der Fall ist, so wird jedem Teilchen mit den Koordinaten ξ_n, η_n, ζ_n eines mit den Koordinaten $-\xi_n$, $-\eta_n$, $-\zeta_n$ entsprechen und es wird also in U_3 zu jedem Glied

ein Glied

$$+ c m_n \xi_n^{\varkappa} \eta_n^{\lambda} \zeta_n^{\nu} \qquad \varkappa + \lambda + \nu = 3$$

$$c m_n (-\xi_n)^{\varkappa} (-\eta_n)^{\lambda} (-\zeta_n)^{\nu} \qquad \varkappa + \lambda + \nu = 3$$

vorhanden sein, welches absolut genommen gleich groß ist, aber das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt; diese Glieder heben sich also gegenseitig auf und es wird auch

$$U_3 = 0$$

angenommen werden dürfen. — Betreff der Glieder zweiter Ordnung U_2 erinnern wir daran, daß das Koordinatensystem der ξ, η, ζ mit den Hauptträgheitsachsen des Massensystems zusammenfällt, daß also:

$$\sum m_n \xi_n \eta_n = 0\,, \qquad \sum m_n \eta_n \zeta_n = 0\,, \qquad \sum m_n \zeta_n \xi_n = 0$$

und ferner, daß aus den Gl. 12) (Seite 50) folgt:

$$\sum m_n \xi_n^2 = \tfrac{1}{2}(B + C - A)$$
$$\sum m_n \eta_n^2 = \tfrac{1}{2}(C + A - B)$$
$$\sum m_n \zeta_n^2 = \tfrac{1}{2}(A + B - C)$$

und somit:

$$\sum m_n \varrho_n^2 = \sum m_n (\xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2) = \tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

wird, worin mit A, B, C die Hauptträgheitsmomente bezeichnet sind; dies ergibt:

$$U_2 = \tfrac{3}{4}\frac{k^2 M}{r_0^5}((B+C-A)\xi_0^2 + (C+A-B)\eta_0^2 + (A+B-C)\zeta_0^2) - \tfrac{1}{4}\frac{k^2 M}{r_0^3}(A+B+C).$$

Macht man weiter die Annahme, der durch die Tatsachen noch nicht widersprochen wurde, daß die Erde ein Rotationsellipsoid ist, dessen kleine Achse die ζ-Achse ist, so wird $A = B$. Endlich ist

$$U_0 = \frac{k^2 M}{r_0} \sum m_n = \frac{k^2 ME}{r_0}\,,$$

wo E die Gesamtmasse der Erde bedeutet. Aus allen diesen Erwägungen folgt für U der einfache Ausdruck

$$U = \frac{k^2 ME}{r_0} + \tfrac{3}{4}\frac{k^2 M}{r_0^5}(C(\xi_0^2 + \eta_0^2) + (2A - C)\zeta_0^2) - \tfrac{1}{4}\frac{k^2 M}{r_0^3}(2A + C)\,.$$

Da in den Eulerschen Gleichungen lediglich die Differenzialquotienten von U nach φ, ψ, θ vorkommen, so wird man in U noch diejenigen Glieder außer Betracht lassen können, welche φ, ψ, θ nicht enthalten; nun sind aber A und C rein geometrische Größen, die nur von der Gestalt des Erdkörpers abhängen; ferner ist r_0 die Entfernung des anziehenden Körpers vom Schwerpunkt der Erde; alle diese sind von φ, ψ, θ unabhängig und der bei der Differenziation in Betracht kommende Teil von U ist also:

$$\overline{U} = \tfrac{3}{4}\frac{k^2 M}{r_0^5}(C(\xi_0^2 + \eta_0^2) + (2A - C)\zeta_0^2)\,.$$

Man kann diesen durch Addition und Subtraktion von $C\zeta_0^2$ innerhalb der Klammer und Beachtung von $\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = r_0^2$ in

$$\overline{U} = \tfrac{3}{4}\frac{k^2 M}{r_0^5}(Cr_0^2 + 2(A - C)\zeta_0^2)$$

überführen und auch hierin noch das erste von φ, ψ, θ unabhängige Glied weglassen, so daß schließlich

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{d\varphi} &= 3\,\frac{k^2 M}{r_0^{\,5}}\,(A-C)\,\zeta_0\,\frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi}\\ \frac{dU}{d\psi} &= 3\,\frac{k^2 M}{r_0^{\,5}}\,(A-C)\,\zeta_0\,\frac{\partial \zeta_0}{\partial \psi}\\ \frac{dU}{d\theta} &= 3\,\frac{k^2 M}{r_0^{\,5}}\,(A-C)\,\zeta_0\,\frac{\partial \zeta_0}{\partial \theta}\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

wird. Nun ist nach 3) (Seite 52) und nach 1b) (Seite 11)

$$\zeta_0 = \cos\gamma_1 x_0 + \cos\gamma_2 y_0 + \cos\gamma_3 z_0 = -\sin\theta\sin\psi x_0 - \sin\theta\cos\psi y_0 + \cos\theta z_0\,,$$

woraus sofort

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0$$

folgt. Die anderen Ausdrücke 6) werden wir später ihrer endgültigen Form entgegenführen, vorläufig aber von dem eben erhaltenen Resultat und der gemachten Annahme $A = B$ zur Umgestaltung der Eulerschen Gleichungen 5) Gebrauch machen. Diese werden jetzt:

$$\begin{aligned}A\frac{d^2 p}{dt^2} + (C-A)\frac{dq}{dt}\frac{ds}{dt} &= -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} + \cos\varphi\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\\ A\frac{d^2 q}{dt^2} + (A-C)\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} - \sin\varphi\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\\ C\frac{d^2 s}{dt^2} &= 0\,.\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung gibt integriert

$$\frac{ds}{dt} = \omega \qquad 7)$$

d. h. wenn die Erde als Rotationsellipsoid angenommen wird, dann ist die Rotationsgeschwindigkeit um die Hauptträgheitsachse ζ konstant, welches die einwirkenden äußeren Kräfte auch sein mögen. Dieses Resultat in die beiden ersten Gleichungen eingetragen, gibt, wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{C-A}{A}\,\omega = \mu$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 p}{dt^2} + \mu\frac{dq}{dt} &= -\frac{\sin\varphi}{A}\,\frac{\dfrac{\partial U}{\partial \psi}}{\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{A}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\\ \frac{d^2 q}{dt^2} - \mu\frac{dp}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{A}\,\frac{\dfrac{\partial U}{\partial \psi}}{\sin\theta} - \frac{\sin\varphi}{A}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\end{aligned}\right\}. \qquad 8)$$

Die Integration dieser Gleichungen gelingt nur durch sukzessive Näherung, die auf ähnliche Weise geleitet wird, wie im Problem der translatorischen Bewegung d. h. durch die Methode der Variation der Konstanten. Man nimmt zuerst an, daß äußere einwirkende Kräfte nicht vorhanden sind, was identisch ist mit der Annahme $U = 0$. Die Gleichungen 8) werden dann

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p}{dt^2} + \mu\frac{dq}{dt} &= 0\\ \frac{d^2 q}{dt^2} - \mu\frac{dp}{dt} &= 0\end{aligned}$$

und können leicht integriert werden. Man hat zuerst

$$\frac{dp}{dt}\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \qquad 9)$$

und dann:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \mu\omega\sigma^2$$

wo σ eine neue Konstante ist. Hieraus sieht man, daß gesetzt werden darf:

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\cos\chi$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\sin\chi$$

wo χ eine Hilfsvariable vorstellt. Dies gibt in

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu\frac{dq}{dt} = 0$$

eingetragen, nach Weglassung des gemeinsamen Faktors:

$$\frac{d\chi}{dt} = \mu$$

oder integriert:

$$\chi = \mu t - \mu h,$$

wo mit h die Integrationskonstante bezeichnet ist. Es wird also jetzt

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\cos\mu h\cos\mu t + \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\sin\mu h\sin\mu t$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\cos\mu h\sin\mu t - \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\sin\mu h\cos\mu t$$

oder, wenn statt der Konstanten σ und h zwei andere eingeführt werden, die durch

$$a = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\cos\mu h$$

$$b = \sqrt{\mu\omega}\,\sigma\sin\mu h$$

definiert sind,

$$\frac{dp}{dt} = a\cos\mu t + b\sin\mu t$$

$$\frac{dq}{dt} = a\sin\mu t - b\cos\mu t. \qquad 10)$$

Diese Ausdrücke können nun auch als die Integrale der vollständigen Gleichungen 8) angesehen werden, sofern man a und b derartig als Funktionen der Zeit bestimmt, daß die Formen 10) den Gleichungen 8) genügen. Um diese Funktionen zu ermitteln, differenzieren wir 10) nach der Zeit

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\mu\frac{dq}{dt} + \frac{da}{dt}\cos\mu t + \frac{db}{dt}\sin\mu t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = +\mu\frac{dp}{dt} + \frac{da}{dt}\sin\mu t - \frac{db}{dt}\cos\mu t$$

und tragen dies in 8) ein

$$\frac{da}{dt}\cos\mu t+\frac{db}{dt}\sin\mu t=-\frac{\sin\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial\psi}\frac{}{\sin\theta}+\frac{\cos\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial\theta},$$

$$\frac{da}{dt}\sin\mu t-\frac{db}{dt}\cos\mu t=-\frac{\cos\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial\psi}\frac{}{\sin\theta}-\frac{\sin\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial\theta};$$

daraus ergibt sich sofort:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\sin(\mu t+\varphi)}{A\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}+\frac{\cos(\mu t+\varphi)}{A}\frac{\partial U}{\partial\theta}\\ \frac{db}{dt}&=+\frac{\cos(\mu t+\varphi)}{A\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}+\frac{\sin(\mu t+\varphi)}{A}\frac{\partial U}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}. \qquad 11)$$

Die Benutzung dieser Gleichungen setzt die Kenntnis von φ, θ, $\frac{\partial U}{\partial\psi}$ und $\frac{\partial U}{\partial\theta}$ als Funktionen der Zeit voraus. Für φ ergibt die letzte der Gleichungen 1) (Seite 52)

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ds}{dt}+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\cos\theta\frac{d\psi}{dt};$$

also nach der Integration

$$\varphi=\varphi_0+\omega t+\int\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\,dt.$$

Die Integrationskonstante φ_0 kann Null gesetzt werden, da wir die Erde als Rotationsellipsoid angenommen haben und daher die ξ-Achse durch einen beliebigen ihrer Meridiane legen können. Fügt man noch

$$\mu t=\frac{C-A}{A}\omega t$$

hinzu, so wird

$$\mu t+\varphi=\frac{C}{A}\omega t+\int\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\,dt.$$

Die beiden Glieder rechts sind von sehr verschiedener Größe; denn nimmt man einen Sterntag als Zeiteinheit, so wird

$$\omega=360\times 60\times 60=1\,296\,000'';$$

für $\frac{d\psi}{dt}$ aber liefert die direkte Beobachtung etwa $0''.12$. Da $\frac{C}{A}>1$, so liefert also das zweite Glied nur eine kleine Korrektion zum weit überwiegenden ersten hinzu, in erster Näherung wird man es gänzlich übergehen dürfen; setzt man $\frac{C}{A}\omega+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}=\mu'$, so wird streng $\mu t+\varphi=\mu'\cdot t$ und ein Näherungswert von μ' ist $\frac{C}{A}\omega$.

Was die $\frac{\partial U}{\partial\psi}$ und $\frac{\partial U}{\partial\theta}$ anlangt, so müssen zu deren Ermittelung die Gl. 6) herangezogen werden; wir erkennen ohne weiteres, daß es keine Schwierigkeiten machen

wird unter Heranziehung der Bewegungstheorien der störenden Körper Sonne und Mond, die rechten Seiten dieser Gleichungen in Funktionen der Zeit umzusetzen. Die Ausführung auf später verschiebend, führen wir zuerst die Gleichungen des Problems, die jetzt in 10) und 11) konzentriert sind, ihrer Endform entgegen. Es bietet Vorteile, diese Gleichungen zu vereinigen und zugleich an Stelle der p und q die eigentlich in letzter Linie gesuchten Größen ψ und θ einzuführen.

Aus den Gl. 5) entnimmt man leicht:

$$\begin{aligned} \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= -\sin\varphi\,\frac{dp}{dt} - \cos\varphi\,\frac{dq}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= +\cos\varphi\,\frac{dp}{dt} - \sin\varphi\,\frac{dq}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{ds}{dt} + \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} \end{aligned} \qquad 12)$$

oder nach Eintragung von 10)

$$\begin{aligned} \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= -a\sin(\mu t+\varphi) + b\cos(\mu t+\varphi) \\ \frac{d\theta}{dt} &= +a\cos(\mu t+\varphi) + b\sin(\mu t+\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \operatorname{cotg}\theta\,(-a\sin(\mu t+\varphi) + b\cos(\mu t+\varphi)). \end{aligned} \qquad 12^a)$$

Um hier 11) einführen zu können, muß man differenzieren, wobei wir von obigem Resultat $\mu t+\varphi = \mu' t$ Gebrauch machen wollen:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt} &= -\mu'(a\cos\mu' t + b\sin\mu' t) - \sin\mu' t\,\frac{da}{dt} + \cos\mu' t\,\frac{db}{dt} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= +\mu'(-a\sin\mu' t + b\cos\mu' t) + \cos\mu' t\,\frac{da}{dt} + \sin\mu' t\,\frac{db}{dt} \end{aligned}$$

oder mittels 11)

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt} &= -\mu'\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{A\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial\psi} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \mu'\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{A}\,\frac{\partial U}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

Wird hier für μ' sein strenger Wert $\dfrac{C}{A}\,\omega + \cos\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}$ substituiert und beachtet, daß:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

oder

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{C\omega}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial\psi} - \frac{A}{C\omega}\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} - \frac{A}{C\omega}\,\frac{d\left(\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{C\omega}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{A}{C\omega}\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right) + \frac{A}{C\omega}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\right). \end{aligned} \qquad 13)$$

Diese Gleichungen sind streng richtig, ihre strenge Integration aber bereitet unüberwindliche Schwierigkeiten. Man muß den Weg der allmählichen Annäherung beschreiten, der sich hier einfach genug darbietet. Die Beobachtung zeigt, daß $\frac{d\theta}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ kleine Größen sind; man wird also behufs Erlangung einer Annäherung in obigen Gleichungen die zweiten Glieder rechter Hand, die von der zweiten Ordnung sind, weglassen. Es sei übrigens gleich hier bemerkt, daß man nach Ermittelung der Zahlenwerte sich überzeugt, daß sie auch bei strenger Durchführung der zweiten Annäherung nichts Nennenswertes ergeben. Die dritten Glieder geben im Integral der Gl. 13)

$$-\frac{A}{C\omega}\sin\theta\frac{d\psi}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{A}{C\omega}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt}; \tag{14}$$

um uns von ihrem Einflusse ein Bild machen zu können, haben wir uns mit den tatsächlichen Verhältnissen, wie sie bei der Erde liegen, zu beschäftigen.

Das feste Koordinatensystem xyz lassen wir mit dem System der Ekliptik für eine bestimmte Epoche zusammenfallen; diese Zeitangabe ist nötig, weil die Ekliptik infolge der Störungen der Planeten nicht fest im Raum liegt, worauf später zurückzukommen sein wird. Das bewegliche System $\xi\eta\zeta$ ist nach unserer Analyse zusammenfallend mit den Hauptträgheitsachsen des als Rotationsellipsoid vorausgesetzten Erdkörpers, so daß die ζ-Achse mit der kleinen Hauptachse, die $\xi\eta$-Ebene mit der dazu senkrechten Symmetrieebene identisch ist. Durch unsere Gleichungen wird die Rotationsbewegung des Erdkörpers um seinen Schwerpunkt untersucht und die bisherigen Resultate sind, daß die Drehungsbewegung um die ζ-Achse sich mit konstanter Geschwindigkeit ω vollzieht und daß der Winkel

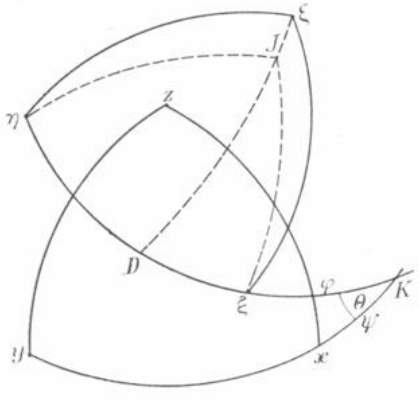


Fig. 11.

$$\varphi = \left(\omega + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}\right)t$$

sich nahe proportional der Zeit ändert, wenn $\frac{d\psi}{dt}$ eine kleine Größe ist. Die Größen ψ und θ bestimmen die Lage der Symmetrieebene des Ellipsoids gegen die feste Ekliptik und unsere Gleichungen werden uns gestatten, sie zu bestimmen, abgesehen von den Integrationskonstanten, die der Beobachtung entnommen werden müssen.

Die Rotationen um die drei Achsen ξ, η, ζ mit den Geschwindigkeiten $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ setzen wir nach Seite 15 zu einer Resultante zusammen.

Die Lage der Achse J, um welche diese stattfindet — der *instantanen* Drehungsachse — ist gegeben durch ihre Richtungskosinus gegen die ξ-, η-, ζ-Achsen, nämlich

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dp}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}}$$

oder nach 7) und 10)

$$\cos\alpha = \frac{a\cos\mu t + b\sin\mu t}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a\sin\mu t - b\cos\mu t}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}.$$

Die Rotation um *diese* Achse J ist es, welche wir bei der Erde beobachten; die zu ihr senkrechte Ebene ist der Äquator, der zunächst nicht zusammenfällt mit dem Äquator des Rotationsellipsoids — der $\xi\eta$-Ebene. Das in einem Punkte der Erdoberfläche errichtete Lot schließt mit dem erstgenannten Äquator einen Winkel ein, der Polhöhe genannt wird.

Bestimmen wir die Lage des Rotationspoles J zum geometrischen ζ durch $\zeta J = \gamma$ und durch den Winkel $\Gamma = \xi D$, welchen der größte Kreis ζJ mit $\zeta\xi$ bildet, so wird:

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\Gamma = \frac{a\cos\mu t + b\sin\mu t}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}$$

$$\cos\beta = \sin\gamma\sin\Gamma = \frac{a\sin\mu t - b\cos\mu t}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+\omega^2}}.$$

Sind äußere Kräfte nicht vorhanden ($U = 0$), so gibt die Integration von 11)

$$a = a_0 = m_0\cos\sigma_0, \qquad b = b_0 = m_0\sin\sigma_0,$$

wo a_0 und b_0 oder m_0 und σ_0 Konstante sind; und es wird daher die Rotationsgeschwindigkeit um die instantane Achse J eine Konstante

$$\sqrt{a_0^2+b_0^2+\omega^2} = \omega_0$$

und ebenso der Winkel γ, den wir

$$\gamma_0 = \arccos\frac{\omega}{\omega_0}$$

nennen wollen; ferner wird:

$$\sin\gamma_0\cos\Gamma_0 = \frac{m_0}{\omega_0}\cos(\mu t - \sigma_0)$$

$$\sin\gamma_0\sin\Gamma_0 = \frac{m_0}{\omega_0}\sin(\mu t - \sigma_0),$$

woraus

$$\sin\gamma_0 = \frac{m_0}{\omega_0}$$

$$\Gamma_0 = \mu t - \sigma_0.$$

Diese Gleichungen sagen, daß die Achse J um ζ unter den gemachten Voraussetzungen eine Kegelfläche von dem konstanten Öffnungswinkel γ_0 mit gleichförmiger Geschwindigkeit μ beschreibt; die Periode dieser Bewegung ist:

$$\frac{2\pi}{\mu}, \qquad \mu = \omega\frac{C-A}{A}.$$

Wir werden später zeigen, daß μ aus Beobachtungen bestimmt werden kann und daß sich findet $\mu = 0.02076$; das gibt für die Periode 305 mittlere Sonnentage. (*Euler*sche Periode.) Der Winkel γ_0 muß und kann durch direkte Polhöhenmessungen ermittelt werden; es hat sich herausgestellt, daß ein Glied von dieser Periode, das auch nur den Betrag von 0.″1 erreicht, nicht existiert; die beobachteten Polhöhenschwankungen, die übrigens den Betrag von 0.″3 auch nicht überschreiten, haben nicht diese Periode, müssen also anderen Ursachen zugeschrieben werden.

Dies vorausgesetzt, nehmen wir die Glieder 14) vor und substituieren darin 12[a]), für a und b in erster Näherung die ungestörten, konstanten Werte

$$a_0 = m_0 \cos \sigma_0 , \qquad b_0 = m_0 \sin \sigma_0$$

benutzend; dann wird aus ihnen:

$$\frac{A}{C\omega} m_0 \sin (\mu t + \varphi - \sigma_0) \quad \text{und} \quad \frac{A}{C\omega} \frac{m_0}{\sin \theta} \cos (\mu t + \varphi - \sigma_0) .$$

Aus obigem Zahlenwert für $\mu = \omega \dfrac{C - A}{A}$ folgt, da ω sehr groß ist, daß A und C sehr nahe gleich sein müssen; in den vorliegenden Gliedern, die wegen der Größe von ω sicher sehr klein sind, wird man also ohne Bedenken $A = C$ setzen dürfen. Ferner ist $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a_0^2 - b_0^2} = \sqrt{\omega_0^2 - m_0^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \sin \gamma_0^2} = \omega_0 \cos \gamma_0$ wegen der durch Beobachtung konstatierten Kleinheit von γ_0 ($< 0.''1$) von ω_0 nicht zu unterscheiden. Also wird aus den Gliedern, wenn noch $\dfrac{m_0}{\omega_0} = \sin \gamma_0$ beachtet wird:

$$\sin \gamma_0 \sin (\mu t + \varphi - \sigma_0) \quad \text{und} \quad \frac{\sin \gamma_0}{\sin \theta} \cos (\mu t + \varphi - \sigma_0) .$$

μ ist klein, die Periode dieser Glieder ist also sehr nahe gleich der von φ, d. h. gleich der Rotationsdauer der Erde. Ist somit γ_0 von Null verschieden, so entstehen dadurch in ψ und θ Glieder, deren Periode sehr nahe ein Tag ist und die verschwinden, sobald die instantane Rotationsachse mit der ζ-Achse des Ellipsoids zusammenfällt. Die Beobachtung zeigt nun, daß diese Achsen so nahe zusammenfallen, daß sie praktisch kaum getrennt werden können. Nimmt man dazu, daß die Beobachtungen zur Bestimmung von ψ und θ sich auf die instantane Drehungsachse beziehen *müssen* und nicht auf die ζ-Achse, daß man also ψ und θ für erstere bestimmt, so ist man gezwungen, das strenge Zusammenfallen beider Achsen zu supponieren; das hat aber das Verschwinden der dritten Glieder in 13) zur Folge.

Die vorangegangenen Erwägungen berechtigen uns jetzt, die Gleichungen 13) in folgender einfacher Gestalt anzusetzen*):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= + \frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} \\ \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} , \end{aligned} \qquad 15)$$

*) *Poisson*, Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Mém. de l'Institut t. VII, IX) 1827—1830.

die auch für die strenge Durchführung genügt. Behufs Integration derselben müssen $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi}$ und $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}$ als Funktionen der Zeit eingeführt werden, wozu die Gl. 6) heranzuziehen sind. Wir führen gleichzeitig statt x_0, y_0, z_0 die Polarkoordinaten des anziehenden Körpers durch

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos b_0 \cos l_0 \\ y_0 &= r_0 \cos b_0 \sin l_0 \\ z_0 &= r_0 \sin b_0 \end{aligned}$$

ein und erhalten zunächst:

$$\zeta_0 = -r_0 \sin\theta \cos b_0 \sin(\psi + l_0) + r_0 \cos\theta \sin b_0$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \psi} &= -r_0 \sin\theta \cos b_0 \cos(\psi + l_0) \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial \theta} &= -r_0 \cos\theta \cos b_0 \sin(\psi + l_0) - r_0 \sin\theta \sin b_0 . \end{aligned}$$

Trägt man diese drei Ausdrücke in 6) ein, so erscheint:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{3k^2 M}{r_0^3}(A-C)\{\sin\theta\cos b_0 \sin(\psi+l_0) - \cos\theta \sin b_0\}\cos b_0 \cos(\psi + l_0)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{3k^2 M}{r_0^3}(A-C)\{\sin\theta\cos b_0 \sin(\psi+l_0) - \cos\theta \sin b_0\}\{\operatorname{cotg}\theta \cos b_0 \sin(\psi+l_0) + \sin b_0\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &\{\sin\theta \cos b_0 \sin(l_0 + \psi) - \cos\theta \sin b_0\}\cos b_0 \cos(l_0 + \psi) = K \\ &\{\sin\theta \cos b_0 \sin(l_0 + \psi) - \cos\theta \sin b_0\}\{\operatorname{cotg}\theta \cos b_0 \sin(l_0 + \psi) + \sin b_0\} = Q , \end{aligned} \qquad 16)$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} &= 3k^2(A - C)M\frac{K}{r_0^3} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= 3k^2(A - C)M\frac{Q}{r_0^3} . \end{aligned}$$

Als anziehende Körper kommen nun zwei in betracht, die Sonne und der Mond, deren Wirkungen sich einfach summieren. Wenn man also alle auf die Sonne bezüglichen Größen mit den bisherigen Buchstaben bezeichnet, den zum Mond gehörigen aber einen oberen Index beifügt (also r_0', l_0', b_0', M', K', Q'), so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} &= 3k^2(A - C)\left\{M\frac{K}{r_0^3} + M'\frac{K'}{r_0'^3}\right\} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= 3k^2(A - C)\left\{M\frac{Q}{r_0^3} + M'\frac{Q'}{r_0'^3}\right\} \end{aligned}$$

und nach Einsetzung dieser Größen in 15)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{3k^2}{\omega}\frac{C - A}{C}\left\{M\frac{K}{r_0^3} + M'\frac{K'}{r_0'^3}\right\} \\ \frac{d\psi}{dt} &= +\frac{3k^2}{\omega}\frac{C - A}{C}\left\{M\frac{Q}{r_0^3} + M'\frac{Q'}{r_0'^3}\right\} . \end{aligned}$$

Führt man hier zur Erleichterung späterer Umformungen die großen Halbachsen der Sonnen- und Mondbahn a und a' ein und setzt zur Abkürzung die Konstanten:

$$\frac{3}{2}\,\frac{k^2}{\omega}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{M}{a^3} = \varkappa$$
$$\frac{M'}{M}\,\frac{a^3}{a'^3} = \lambda\,, \qquad 17)$$

so wird daraus:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\varkappa\left(2K\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 + 2K'\lambda\left(\frac{a'}{r_0'}\right)^3\right)$$
$$\frac{d\psi}{dt} = +\varkappa\left(2Q\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 + 2Q'\lambda\left(\frac{a'}{r_0'}\right)^3\right). \qquad 18)$$

Die Größen $\frac{a}{r_0}$ und $\frac{a'}{r_0'}$ zieht man aus der elliptischen Bewegung von Sonne und Mond, da die periodischen Störungen dieser Größen zu klein sind, um hier Merkbares zu geben; das Gleiche gilt von den in K, Q, K', Q' enthaltenen Polarkoordinaten l_0, b_0, l_0', b_0'. Bei diesen letzteren Größen entsteht nur noch die Schwierigkeit, daß sie sich auf die feste, der Untersuchung zugrunde liegende xy-Ebene — die Ekliptik für eine bestimmte Zeit $t = 0$ — beziehen, während es wünschenswert ist, in den Schlußformeln diese Größen bezogen auf die Ekliptik für die Zeit t zu haben, da diese aus den Tafeln für Sonne und Mond hervorgehen. Um diese Transformation durchzuführen, bezeichnen wir die auf die Ekliptik für t bezogenen Polarkoordinaten von Sonne und Mond mit l, b, l', b' und bestimmen die Lage der Ekliptik für t gegen die feste für $t = 0$ durch Neigung der ersteren gegen die letztere: (π) und durch die Länge des aufsteigenden Knotens der ersteren auf der letzteren, gezählt vom Äquinoktium für $t = 0$ aus: Π_0. Durch dieses Äquinoktium legen wir die feste x-Achse, von der aus l_0 und l_0' gezählt werden. Die Größen (π) und Π_0 gehen aus der Theorie der Sonnenbewegung hervor und rühren von den Störungen der übrigen Planeten auf die Erde her; wir setzen sie als bekannt voraus und werden später ihre Zahlenwerte ableiten, bemerken aber hier schon, daß (π) außerordentlich klein ist, so daß sein Quadrat fast immer vernachlässigt werden kann.

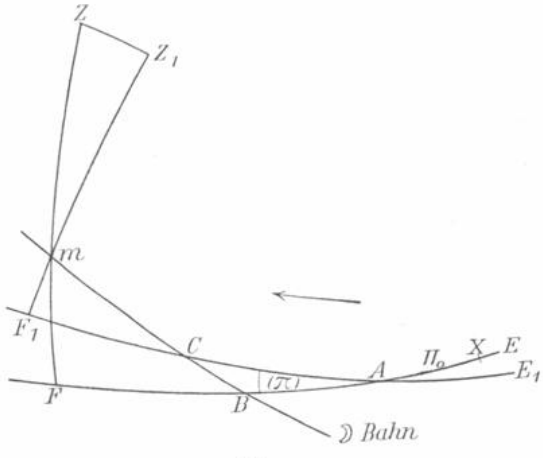


Fig. 12.

Z ist der Pol der Ekliptik E für $t = 0$; Z_1 sei der Pol der Ekliptik E_1 für die Zeit t; BC sei die Mondbahn für die Zeit t, m der Ort des Mondes in ihr. Sind F und F_1 die Fußpunkte der größten Kreise Zm und Z_1m auf E und E_1, so ist

$$XF = l_0', \quad Fm = b_0'$$
$$XA + AC + Cm = l', \quad F_1m = b',$$

l' ist die Länge des Mondes in seiner Bahn; seine eigentliche Länge: $XA + AC + CF_1$ bezeichnen wir mit L'. Nun gibt das Dreieck ZZ_1m

$$\begin{aligned}\cos b_0' \cos(l_0' - \Pi_0) &= \cos b' \cos(L' - \Pi_0)\\ \cos b_0' \sin(l_0' - \Pi_0) &= \cos b' \sin(L' - \Pi_0)\cos(\pi) - \sin b' \sin(\pi)\\ \sin b_0' &= \cos b' \sin(L' - \Pi_0)\sin(\pi) + \sin b' \cos(\pi)\,.\end{aligned} \qquad *)$$

Wir bezeichnen weiter mit Ω' die Länge des Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik E_1:

$$\Omega' = XA + AC$$

und mit c' die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik E_1; dann gibt das Dreieck CF_1m:

$$\begin{aligned} \cos b' \cos(L' - \Omega') &= \cos(l' - \Omega') \\ \cos b' \sin(L' - \Omega') &= \sin(l' - \Omega') \cos c' \\ \sin b' &= \sin(l' - \Omega') \sin c' . \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung rechts mit

$$1 = \sin\frac{c'^2}{2} + \cos\frac{c'^2}{2}$$

und schreibt in der zweiten

$$\cos c' = \cos\frac{c'^2}{2} - \sin\frac{c'^2}{2}$$

dann folgt leicht, wenn man folgende Operationen ausführt:

1. Gl.	$\cos(\Omega' - \Pi_0)$	$\sin(\Omega' - \Pi_0)$
2. Gl.	$-\sin(\Omega' - \Pi_0)$	$+\cos(\Omega' - \Pi_0)$

$$\cos b' \cos(L' - \Pi_0) = \cos\frac{c'^2}{2} \cos(l' - \Pi_0) + \sin\frac{c'^2}{2} \cos(l' + \Pi_0 - 2\Omega')$$

$$\cos b' \sin(L' - \Pi_0) = \cos\frac{c'^2}{2} \sin(l' - \Pi_0) - \sin\frac{c'^2}{2} \sin(l' + \Pi_0 - 2\Omega')$$

$$\sin b' = \sin(l' - \Omega') \sin c' .$$

Dies in den Gl. *) (Seite 64) rechts substituiert, führt auf:

$$\cos b_0' \cos(l_0' - \Pi_0) = \cos\frac{c'^2}{2} \cos(l' - \Pi_0) + \sin\frac{c'^2}{2} \cos(l' + \Pi_0 - 2\Omega')$$

$$\cos b_0' \sin(l_0' - \Pi_0) = \cos\frac{c'^2}{2} \sin(l' - \Pi_0)\cos(\pi) - \sin\frac{c'^2}{2} \sin(l' + \Pi_0 - 2\Omega')\cos(\pi) - \sin(l' - \Omega')\sin c' \sin(\pi)$$

$$\sin b_0' = \cos\frac{c'^2}{2} \sin(l' - \Pi_0)\sin(\pi) - \sin\frac{c'^2}{2} \sin(l' + \Pi_0 - 2\Omega')\sin(\pi) + \sin(l' - \Omega')\sin c' \cos(\pi) .$$

Die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik c' beträgt etwa 5°; wir wollen daher diese Formeln dadurch vereinfachen, daß wir nach Potenzen von c' entwickeln; dabei vernachlässigen wir c'^3 mit dem Bemerken, daß die Entwicklungen weiter geführt wurden, aber die Unmerkbarkeit der daraus folgenden Glieder sich ergeben hat. Wir vernachlässigen auch $(\pi)^2$ und $c'(\pi)$; dann kommt:

$$\begin{aligned} \cos b_0' \cos(l_0' - \Pi_0) &= \left(1 - \frac{c'^2}{4}\right) \cos(l' - \Pi_0) + \frac{c'^2}{4} \cos(l' + \Pi_0 - 2\Omega') \\ \cos b_0' \sin(l_0' - \Pi_0) &= \left(1 - \frac{c'^2}{4}\right) \sin(l' - \Pi_0) - \frac{c'^2}{4} \sin(l' + \Pi_0 - 2\Omega') \qquad 19) \\ \sin b_0' &= (\pi) \sin(l' - \Pi_0) + c' \sin(l' - \Omega') . \end{aligned}$$

Nun ist nach 16) (Seite 63)

$$K' = \{\sin\theta \cos b_0' \sin(l_0' + \psi) - \cos\theta \sin b_0'\} \cos b_0' \cos(l_0' + \psi)$$
$$Q' = \{\sin\theta \cos b_0' \sin(l_0' + \psi) - \cos\theta \sin b_0'\} \{\operatorname{cotg}\theta \cos b_0' \sin(l_0' + \psi) + \sin b_0'\}.$$

Setzt man hier allenthalben

$$l_0' + \psi = (l_0' - \Pi_0) + (\Pi_0 + \psi),$$

löst die sin und cos dieses Argumentes auf und trägt überall 19) ein, so erhält man K' und Q' ausgedrückt durch l'. Die Ausdrücke für K und Q werden einfacher, da man für die Sonne $e = 0$ zu setzen hat. Die Anführung dieser Entwicklungen muß hier unterbleiben, da sie zu viel Raum in Anspruch nehmen.

Damit die Integration ausgeführt werden kann, ist in K, Q, K', Q' die Zeit einzuführen. Es seien für Sonne und Mond

n und n' die mittleren täglichen Bewegungen,
L_0 und L_0' die mittleren Längen für die Epoche,
ϖ und ϖ' die Längen der Perihele,
e und e' die Bahnexzentrizitäten,

ferner

$$g = L_0 + nt - \varpi$$
und $$g' = L_0' + n't - \varpi'$$

die mittleren Anomalien, dann gibt die Theorie der elliptischen Bewegung folgende Entwicklungen:

$$l = L_0 + nt + 2e \sin g + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2g + \cdots$$
$$l' = L_0' + n't + 2e' \sin g' + \tfrac{5}{4} e'^2 \sin 2g' + \cdots$$

und

$$\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 = 1 + \tfrac{3}{2} e^2 + 3e \cos g + \tfrac{9}{2} e^2 \cos 2g + \cdots$$
$$\left(\frac{a'}{r_0'}\right)^3 = 1 + \tfrac{3}{2} e'^2 + 3e' \cos g' + \tfrac{9}{2} e'^2 \cos 2g' + \cdots.$$

Man kann sich auf die angeschriebenen Glieder beschränken und durchweg e^3 vernachlässigen. Die periodischen Ungleichheiten der Elemente von Sonne und Mond sind zu klein, um hier eine Rolle zu spielen, wie ausführliche Durchrechnungen gezeigt haben*); dagegen nimmt man die säkularen Änderungen der Exzentrizität der Erdbahn, der Länge des Mondknotens und die Bewegungen der Ekliptik mit; wir setzen:

$$e = e_0 + e_1 t, \qquad (\pi) \sin \Pi_0 = \sigma t + \sigma' t^2$$
$$(\pi) \cos \Pi_0 = \tau t + \tau' t^2$$

und erhalten schließlich nach Ausführung aller angezeigten Substitutionen folgende Endresultate aus 18):

---

*) Man sehe hier insbesondere: *Oppolzer*, Bahnbestimmung Bd. I, S. 167.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = & -\varkappa(1+\lambda)\cos\theta(\sigma\cos\psi+\tau\sin\psi)t \\
& -\varkappa\sin\theta\sin 2(nt+L_0+\psi) \\
& -\varkappa\lambda\sin\theta\sin 2(n't+L_0'+\psi) \\
& -\varkappa\lambda c'\cos\theta\sin(\mathfrak{Q}'+\psi)-\tfrac{1}{2}\varkappa\lambda c'^2\sin\theta\sin 2(\mathfrak{Q}'+\psi) \\
\frac{d\psi}{dt} = & \{\varkappa(1+\tfrac{3}{2}e_0^2)+\varkappa\lambda(1+\tfrac{3}{2}e'^2-\tfrac{3}{2}c'^2)\}\cos\theta+ \\
& +\left\{\varkappa(1+\lambda)(\sigma\sin\psi-\tau\cos\psi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}+3\varkappa e_0 e_1\cos\theta\right\}t \\
& -\varkappa\cos\theta\cos 2(nt+L_0+\psi)+3\varkappa e_0\cos\theta\cos g \\
& -\varkappa\lambda\cos\theta\cos 2(n't+L_0'+\psi)+3\varkappa\lambda e'\cos\theta\cos g' \\
& -\varkappa\lambda c'\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\cos(\mathfrak{Q}'+\psi)-\tfrac{1}{2}\varkappa\lambda c'^2\cos\theta\cos 2(\mathfrak{Q}'+\psi)\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Schreiben wir diese nach Einführung leicht ersichtlicher Abkürzungen so:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= 2\mathrm{N}t+\frac{d\Theta}{dt} \\
\frac{d\psi}{dt} &= \mathrm{A}+2\mathrm{B}t+\frac{d\Psi}{dt}\,,
\end{aligned}
$$

so gibt die Integration:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \theta_0+\mathrm{N}t^2+\Theta \\
\psi &= \psi_0+\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2+\Psi\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Wir haben hier die mit der Zeit multiplizierten Glieder — die säkularen — getrennt von den rein periodischen und wollen sie nun auch getrennt weiter diskutieren. Man faßt die ersteren unter dem Namen der *Lunisolarpräzession*, letztere unter dem Namen *Lunisolarnutation* zusammen. Die Gl. 21) in Verbindung mit dem schon früher erhaltenen Resultat

$$\varphi = \omega t+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}t$$

lösen allgemein das vorgelegte Problem. Wir haben uns dabei, um nicht übermäßig Raum in Anspruch zu nehmen, auf die Angabe derjenigen Glieder beschränkt, die bei der Eintragung der Zahlenwerte Merkliches ergeben.

20. Die Präzession. Wir betrachten zuerst die Glieder

$$
\begin{aligned}
\theta_m &= \theta_0+\mathrm{N}t^2 \\
\psi_m &= \psi_0+\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2\,.
\end{aligned}
$$

Wir haben bei der Integration die N, A, B konstant gesetzt, obwohl sie θ und ψ, welches Funktionen der Zeit sind, enthalten, und müssen dieses Verfahren rechtfertigen. In der Tat sind σ und τ, wie wir unten sehen werden, so außerordentlich klein, daß in erster Näherung $\theta = \theta_0 =$ einer Konstanten gesetzt werden darf und daß dies für sehr lange Zeiträume ausreicht. Dasselbe darf in A und B geschehen. Der Wert von ψ ist zwar größer, nämlich rund 50″ für ein Jahr; er ist aber in A, B, N mit so kleinen Faktoren multipliziert, daß man erst nach sehr langen Zeiträumen davon Notiz zu nehmen hat; für die jetzige astronomische Praxis kann man darin unbedenklich $\sin\psi = 0$ und $\cos\psi = 1$ setzen. Auch die periodischen Stücke Θ und Ψ sind, wie wir unten sehen werden, so klein, daß die säkularen Teile als davon unabhängig betrachtet werden dürfen.

Ferner wollen wir jetzt statt des Winkels θ die in der Astronomie übliche »Schiefe der Ekliptik« ε einführen. Ausgehend von unseren allgemeinen Formeln in Nr. 6 haben wir θ den Winkel genannt, den die $\xi\eta$-Ebene im aufsteigenden Knoten dieser letzteren auf der xy-Ebene (in der Richtung der Bewegungen gezählt) mit dieser letzteren bildet; ε aber ist umgekehrt der Winkel, den die Ekliptik mit dem Äquator bildet; folglich ist $\varepsilon = -\theta$.

Endlich legen wir die bisher willkürlich gelassene x-Achse so, daß sie durch den Schnitt des Äquators für die Zeit $t = 0$ mit der Ekliptik für $t = 0$ hindurchgeht; dann wird offenbar $\psi_0 = 0$.

Nach all diesen Erwägungen können wir nun unsere Formeln wie folgt ansetzen:

wo:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_m &= \varepsilon_0 + \nu t^2 \\ \psi_m &= \alpha t + \beta t^2 \\ \nu &= \tfrac{1}{2}\varkappa(1+\lambda)\cos\varepsilon_0 \cdot \sigma \\ \alpha &= \{\varkappa(1+\tfrac{3}{2}e_0^2) + \varkappa\lambda(1+\tfrac{3}{2}e'^2 - \tfrac{3}{2}c'^2)\}\cos\varepsilon_0 \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\varkappa(1+\lambda)\tau\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + \tfrac{3}{2}\varkappa e_0 e_1 \cos\varepsilon_0 . \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

Durch ε_m und ψ_m ist die Lage des »mittleren« Äquators für die Zeit t gegen die feste Ekliptik für die Zeit $t = 0$ bestimmt. Den Schnitt des mittleren Äquators für die Zeit $t = 0$ mit der Ekliptik für $t = 0$ nennt man das mittlere Äquinoktium für $t = 0 : \Upsilon$; durch ihn haben wir die x-Achse gelegt. Die genannte durch die Formeln I. fixierte Lage für $t = t$ kann der Beobachter aber weder beobachten noch verwenden, sondern dieser braucht die Lage des Äquators für t gegen die Ekliptik für t, d. h. er braucht den Schnitt dieser beiden Ebenen, also das Äquinoktium für $t : \Upsilon_1$. Die Fixierung dieses Punktes ist einfach, denn die Lage der beiden ihn definierenden größten Kreise ist durch Π_0, (π) einerseits und ε_m, ψ_m andererseits gegen die feste Ekliptik festgelegt. Um uns kurz ausdrücken zu können, nennen wir E und A Ekliptik und Äquator für $t = 0$, E_1 und A_1 Ekliptik und Äquator für $t = t$. Wir fällen von Υ_1 das Lot $\Upsilon_1 D$ auf E und nennen $D\Upsilon = \psi_1$; wir nennen ferner ε_1 den Winkel von E_1 gegen A_1, also die *mittlere Schiefe der Ekliptik* für t. Wir bezeichnen endlich den Bogen $K\Upsilon_1$ mit a; da infolge der Bewegung der Ekliptik (die durch die Störungen der Planeten hervorgerufen wird) das Äquinoktium für t statt in K sich in Υ_1 befindet, nennt man dieses Stück a die *Präzession durch die Planeten*. Man hat jetzt im Dreieck $KA\Upsilon_1$:

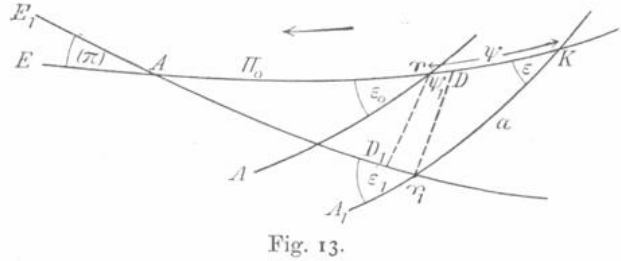


Fig. 13.

$$KA = \Pi_0 + \psi, \qquad K\Upsilon_1 = a, \qquad \sphericalangle K = \varepsilon, \qquad \sphericalangle A = (\pi), \qquad \sphericalangle \Upsilon_1 = 180^\circ - \varepsilon_1$$

und daher

$$\cos\varepsilon_1 = \cos\varepsilon\cos(\pi) - \sin\varepsilon\sin(\pi)\cos(\Pi_0 + \psi) \tag{a}$$

$$\sin a = \frac{\sin(\pi)}{\sin\varepsilon_1}\sin(\Pi_0 + \psi). \tag{b}$$

Ferner hat man im rechtwinkligen Dreieck $KD\curlywedge_1$

$$KD = \psi - \psi_1$$

und daher

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi_1) = \operatorname{tg} a \cos\varepsilon\,. \qquad (c)$$

Vernachlässigt man $(\pi)^3$, so kann (a) so geschrieben werden:

$$\cos\varepsilon_1 - \cos\varepsilon = -(\pi)\sin\varepsilon\cos(\Pi_0 + \psi) - \frac{(\pi)^2}{2}\cos\varepsilon\,,$$

woraus ersichtlich, daß $\varepsilon_1 - \varepsilon$ von der Ordnung (π) ist; setzt man daher

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon)$$

und entwickelt wieder unter Vernachlässigung von $(\varepsilon_1 - \varepsilon)^3$, so erhält man leicht:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon = (\pi)\cos(\Pi_0 + \psi) + \operatorname{cotg}\varepsilon\,\frac{(\pi)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{2}$$

oder wenn man im zweiten Gliede rechts, welches zweiter Ordnung ist, für $\varepsilon_1 - \varepsilon$ seinen Näherungswert $(\pi)\cos(\Pi_0 + \psi)$ einsetzt:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + (\pi)\cos(\Pi_0 + \psi) + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varepsilon\,\sin(\Pi_0 + \psi)^2(\pi)^2\,. \qquad \text{II.}$$

Hierdurch ist ε_1 gegeben.

Die Gleichung (b) gibt mit derselben Genauigkeit:

$$a = \frac{(\pi)\sin(\Pi_0 + \psi)}{\sin(\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon))} = \frac{(\pi)\sin(\Pi_0 + \psi)}{\sin\varepsilon\,(1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon)\operatorname{cotg}\varepsilon)}$$

oder:

$$a = \frac{(\pi)\sin(\Pi_0 + \psi)}{\sin\varepsilon} - (\pi)^2\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon^2}\sin(\Pi_0 + \psi)\cos(\Pi_0 + \psi)\,. \qquad \text{III.}$$

Endlich gibt (c) $\psi - \psi_1 = a\cos\varepsilon$, also:

$$\psi_1 = \psi - (\pi)\operatorname{cotg}\varepsilon\sin(\Pi_0 + \psi) + (\pi)^2\operatorname{cotg}\varepsilon^2\sin(\Pi_0 + \psi)\cos(\Pi_0 + \psi)\,. \qquad \text{IV.}$$

Die Formeln II. und IV. lösen das Problem, lassen sich aber noch etwas vereinfachen. In den mit (π) multiplizierten Gliedern setzen wir nach I. $\psi = \alpha t$ und daher

$$\begin{aligned}\cos(\Pi_0 + \psi) &= \cos\Pi_0 - \alpha t\sin\Pi_0\\ \sin(\Pi_0 + \psi) &= \sin\Pi_0 + \alpha t\cos\Pi_0\,,\end{aligned}$$

ferner $\varepsilon = \varepsilon_0$; in den mit $(\pi)^2$ multiplizierten Gliedern setzen wir $\psi = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$; dann kommt, wenn man noch wie früher

$$\begin{aligned}(\pi)\sin\Pi_0 &= \sigma t + \sigma' t^2\\ (\pi)\cos\Pi_0 &= \tau t + \tau' t^2\end{aligned}$$

annimmt, und für ε und ψ in den ersten Gliedern die Werte aus I. heranzieht:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + Qt + Q't^2\\ \psi_1 &= \quad\ Pt + P't^2\\ Q &= \tau\\ Q' &= \nu + \tau' - \sigma\alpha + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varepsilon_0\,\sigma^2\\ P &= \alpha - \operatorname{cotg}\varepsilon_0\,\sigma\\ P' &= \beta - \operatorname{cotg}\varepsilon_0(\sigma' + \alpha\tau) + \sigma\tau\operatorname{cotg}\varepsilon_0{}^2\,.\end{aligned} \qquad \text{V.}$$

Man nennt ψ_1 die *allgemeine Präzession*. In der Tat stellt diese Größe, wenn wir uns $\curlywedge$ auf E_1 nach D_1 projiziert denken, wegen der Kleinheit von (π), den Gesamt-

betrag $D\Upsilon = \Upsilon_1 D_1$ dar, um welchen das Äquinoktium auf der *beweglichen* Ekliptik nach rückwärts schreitet.

Für die Präzession durch die Planeten ergibt sich ebenso aus III.

$$a = \frac{\sigma}{\sin\varepsilon}\, t + \frac{1}{\sin\varepsilon}\,(\sigma' + \alpha\tau - \operatorname{cotg}\varepsilon\cdot\sigma\tau)\, t^2 . \qquad \text{V}^a.$$

Nachdem wir die Lagenänderungen der Koordinatenebenen durch die Präzession festgestellt haben, gehen wir jetzt zur Bestimmung des Einflusses derselben auf die Koordinaten der Gestirne über und zwar betrachten wir zuerst die Änderungen der Längen und Breiten.

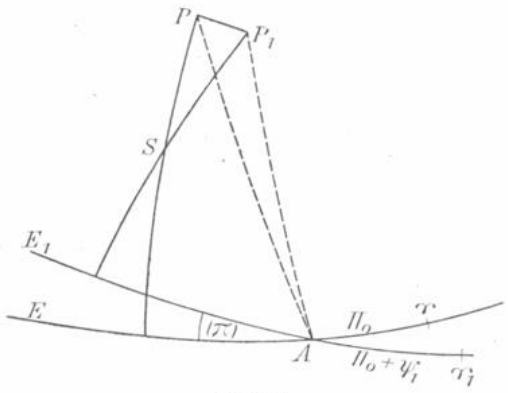


Fig. 14.

Es seien L und B Länge und Breite eines Gestirnes bezogen auf die Ekliptik E und das Äquinoktium Υ für die Zeit o, l und b Länge und Breite desselben Gestirnes bezogen auf die Ekliptik E_1 und das Äquinoktium Υ_1 für die Zeit t, dann ist in dem Dreieck zwischen dem Gestirn S und den Polen P und P_1 von E und E_1:

$$PP_1 = (\pi),\quad PS = 90^\circ - B,\quad P_1S = 90^\circ - b,$$
$$\sphericalangle P = 90^\circ + L - \Pi_0,\quad \sphericalangle P_1 = 90^\circ - (l - \Pi_0 - \psi_1)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\cos b\cos(l - \Pi_0 - \psi_1) &= \cos B\cos(L - \Pi_0)\\
\cos b\sin(l - \Pi_0 - \psi_1) &= \cos B\sin(L - \Pi_0)\cos(\pi) + \sin B\sin(\pi)\\
\sin b &= -\cos B\sin(L - \Pi_0)\sin(\pi) + \sin B\cos(\pi).
\end{aligned}$$

Diese Formeln sind streng; man braucht sie jedoch nur im Falle sehr polnaher Gestirne heranzuziehen; sonst genügt fast immer der Gebrauch der daraus hervorgehenden Differenzialformeln (Nr. 5). Man erhält hier, wenn L und B konstant gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
d(l - \Pi_0 - \psi_1) &= -d\Pi_0 + \sin(\pi)\operatorname{tg} b\sin(l - \Pi_0 - \psi_1)\, d\Pi_0 + \operatorname{tg} b\cos(l - \Pi_0 - \psi_1)\, d(\pi)\\
db &= \sin\pi\cos(l - \Pi_0 - \psi_1)\, d\Pi_0 - \sin(l - \Pi_0 - \psi_1)\, d(\pi)
\end{aligned}$$

oder, da man $\sin(\pi) = (\pi)$ als lineare Funktion der Zeit betrachten, also gleich $t\frac{d(\pi)}{dt}$ setzen darf:

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} &= \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tg} b\cos\left(l - \Pi_0 - \psi_1 - t\frac{d\Pi_0}{dt}\right)\cdot\frac{d(\pi)}{dt}\\
\frac{db}{dt} &= -\sin\left(l - \Pi_0 - \psi_1 - t\frac{d\Pi_0}{dt}\right)\cdot\frac{d(\pi)}{dt}.
\end{aligned}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\Pi_0 + \psi_1 + t\frac{d\Pi_0}{dt} = \Pi$$

so wird einfacher:

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} &= \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tg} b\cos(\Pi - l)\cdot\frac{d(\pi)}{dt}\\
\frac{db}{dt} &= \sin(\Pi - l)\cdot\frac{d(\pi)}{dt}.
\end{aligned}$$

Nennt man

l_0, b_0 Länge und Breite bezogen auf mittl. Äquin. u. Ekl. für die Zeit T
$l,\ b$ » » » » » » » » » » » » » $T+t$

so gibt die Integration der Gleichungen zwischen den Grenzen T und $T+t$

$$l = l_0 + \left(\frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tg} b \cos(\Pi - l)\frac{d(\pi)}{dt}\right)t$$
$$b = b_0 + \sin(\Pi - l)\frac{d(\pi)}{dt}\,t. \qquad \text{VI.}$$

Wir haben hierbei $\frac{d\psi_1}{dt}$, l, b, Π, $\frac{d(\pi)}{dt}$ als konstant angenommen, was sie nicht sind. Die Formeln VI. geben aber selbst für sehr lange Zwischenzeiten t völlig exakte Werte, wenn man darin rechts für $\frac{d\psi_1}{dt}$, l, b, Π, $\frac{d(\pi)}{dt}$ diejenigen Werte gebraucht, welche der Zeit $T+\frac{t}{2}$ entsprechen. Es folgt dies sofort aus den Mittelwertsätzen der Integralrechnung.

Wir fügen hier gleich die Formeln ein für die Überführung der die *Lage einer Bahnebene* bestimmenden Stücke von Ekliptik und Äquinoktium einer Epoche auf eine andere. Nennt man Ω_0, i_0, ω_0 die Elemente für die Ausgangsepoche T, Ω, i, ω diejenigen, die sich auf Ekliptik und Äquinoktium für $T+t$ beziehen, so hat man nach den Napierschen Analogien, angewendet auf das von E, E_1 und der Bahn gebildete Dreieck, wenn man $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ setzt:

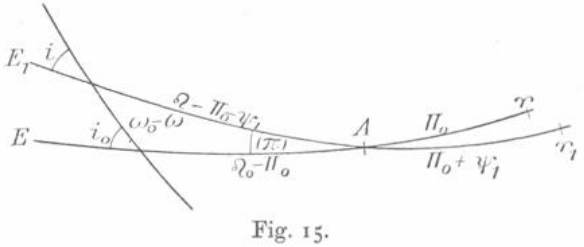


Fig. 15.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega - \Pi_0 - \psi_1 - \Delta\omega) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_0 + (\pi))}{\cos\frac{1}{2}(i_0 - (\pi))}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi_0)$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega - \Pi_0 - \psi_1 + \Delta\omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}(i_0 + (\pi))}{\sin\frac{1}{2}(i_0 - (\pi))}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi_0)$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(i - i_0) = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\Omega_0 + \Omega - 2\Pi_0 - \psi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega + \psi_1)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\pi).$$

Man wird aber auch hier fast immer mit einfacheren Formeln ausreichen, die sich aus den Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie ergeben; man erhält nach diesen, wenn man die Differenziale der Ausgangselemente Null setzt:

$$d\Omega = d\psi_1 - \cos i\, d\omega \qquad \text{(a)}$$
$$di = -\cos(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\, d(\pi) \qquad \text{(b)}$$
$$d\omega = -\sin(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\sin i\, d(\pi) - \cos i\,(d\Omega - d\psi_1).$$

Setzt man in die letzte Formel die erste ein, so kommt:

$$d\omega = -\sin(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\operatorname{cosec} i\, d(\pi) \qquad \text{(c)}$$

und somit:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{cotg} i \sin(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\frac{d(\pi)}{dt}$$
$$\frac{di}{dt} = -\cos(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\frac{d(\pi)}{dt}$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\sin(\Omega - \Pi_0 - \psi_1)\operatorname{cosec} i \frac{d(\pi)}{dt}$$

und zwischen den Grenzen T und $T+t$ integriert

$$\Omega = \Omega_0 + \left(\frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{cotg} i \sin(\Omega - \Pi)\frac{d(\pi)}{dt}\right)t$$
$$i = i_0 - \cos(\Omega - \Pi)\frac{d(\pi)}{dt}\,t \qquad \text{VII.}$$
$$\omega = \omega_0 - \sin(\Omega - \Pi)\operatorname{cosec} i \frac{d(\pi)}{dt}\,t\,.$$

Betreff der Werte von $\frac{d\psi_1}{dt}$, Π, $\frac{d(\pi)}{dt}$, i, Ω, die man rechts zu verwenden hat, gilt das oben Gesagte.

Wir wenden uns nun zu den durch die Präzession hervorgerufenen Änderungen der Koordinaten im System des Äquators. Nennen wir α und δ Rektaszension und Deklination des vorhin betrachteten Gestirnes in bezug auf den Äquator und das Äquinoktium für die Zeit $T+t$, so wird unter Beibehalt der vorhin eingeführten Bezeichnungen in dem Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik für T, dem Pol des Äquators für $T+t$ und dem Gestirn:

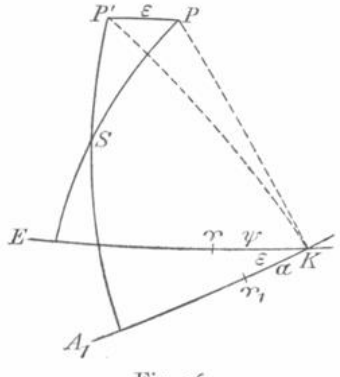


Fig. 16.

$$PP' = \varepsilon, \quad PS = 90^\circ - B, \quad P'S = 90^\circ - \delta$$
$$\sphericalangle P = 90^\circ - L - \psi\,; \quad \sphericalangle P' = 90^\circ + \alpha + a$$

und daher:

$$\cos\delta\cos(\alpha + a) = \cos B \cos(L + \psi),$$
$$\cos\delta\sin(\alpha + a) = \cos B \sin(L + \psi)\cdot\cos\varepsilon - \sin B \sin\varepsilon,$$
$$\sin\delta = \cos B \sin(L + \psi)\cdot\sin\varepsilon + \sin B\cos\varepsilon.$$

Wir werden diese Formeln nachher gebrauchen, um auch für polnahe Gestirne passende Formeln abzuleiten, vorläufig aber wollen wir die Differenzialformeln des genannten Dreiecks benutzen; dabei werden L, B und ε konstant gesetzt; ε ist zwar streng genommen nicht konstant, aber wie später sich erweisen wird, ist die Änderung eine verschwindend kleine, die in langen Zeiträumen nichts Merkbares geben kann.

$$d(\alpha + a) = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\ \operatorname{tg}\delta\ \sin(\alpha + a))\,d\psi$$
$$d\delta = \cos(\alpha + a)\sin\varepsilon\cdot d\psi.$$

Statt $\sin(\alpha + a)$ und $\cos(\alpha + a)$ kann man in den mit $d\psi$ multiplizierten Gliedern $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ schreiben. Dann wird

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{da}{dt} + (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\ \operatorname{tg}\delta\ \sin\alpha)\frac{d\psi}{dt}$$
$$\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha\ \sin\varepsilon\frac{d\psi}{dt}$$

oder wenn man

$$\cos\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = m = \text{Präzession in Rektaszension},$$

$$\sin\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt} = n = \text{Präzession in Deklination}$$

setzt:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n\,\mathrm{tg}\,\delta\,\sin\alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n\,\cos\alpha\,. \end{aligned} \qquad \text{VIII.}$$

Hierdurch sind die Änderungen von α und δ für die Zeiteinheit gegeben. Den Gesamtbetrag der Präzession zwischen zwei Zeitpunkten $T+t$ und $T+t'$ erhält man daraus durch Integration zwischen den Grenzen $T+t$ und $T+t'$; es wird dann:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + (m + n\,\mathrm{tg}\,\delta\,\sin\alpha)\,(t'-t) \\ \delta' &= \delta + n\,\cos\alpha\,(t'-t) \end{aligned} \qquad \text{IX.}$$

hierin muß man in den mit $(t'-t)$ multiplizierten Gliedern für m, n, α, δ die zur Zeit $T + \frac{t+t'}{2}$ gehörigen Werte nehmen.

Gebräuchlicher noch ist es, Reihenentwicklungen nach den Potenzen der Zwischenzeit vorzunehmen. Nennt man wie bisher α und δ Rektaszension und Deklination für die Zeit $T+t$, α' und δ' die für die Zeit $T+t'$, so kann man nach dem Taylorschen Satz setzen:

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(t'-t) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t'-t)^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}(t'-t)^3 + \cdots$$

$$\delta' = \delta + \frac{d\delta}{dt}(t'-t) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2}(t'-t)^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3\delta}{dt^3}(t'-t)^3 + \cdots$$

Mehr als die angebenen Glieder benutzt man nie, indem es, wenn man höhere Potenzen mitnehmen müßte, bequemer wird, nach den strengen Formeln zu rechnen, die wir nachher angeben werden. Die auftretenden Differenzialquotienten kann man leicht nach VIII. berechnen. Die ersten durch VIII. selbst gegebenen heißt man die »Präzession in Rektaszension und Deklination« für die Zeit $T+t$. Für die zweiten findet man durch Differenziation:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{n^2}{206\,265}\sin 2\alpha\,(\tfrac{1}{2} + \mathrm{tg}\,\delta^2) + \frac{mn}{206\,265}\,\mathrm{tg}\,\delta\,\cos\alpha + \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt}\,\mathrm{tg}\,\delta\,\sin\alpha$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{n^2}{206\,265}\sin\alpha^2\,\mathrm{tg}\,\delta - \frac{mn}{206\,265}\sin\alpha + \frac{dn}{dt}\cos\alpha\,.$$

Die Ausdrücke $\left(100\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ bez. $\left(100\,\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)$ nennt man »Variatio saecularis«. Die dritten Differenzialquotienten werden schon recht compliziert; da sie selten gebraucht werden, begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß sie in Bessels Tabulae Regiomontanae p. X zu finden sind. Den Ausdruck $\frac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}\,100^3$ nennt man »drittes Glied«. — Die Präzession, die Variatio saecularis und das dritte Glied findet man in der Regel schon

in den Sternkatalogen angegeben. Die Reduktion eines Sternortes auf ein anderes Äquinoktium vollzieht sich dann nach der Formel:

$$\alpha' = \alpha + (t' - t) \times \text{Präz.} + \frac{(t' - t)^2}{200} \times \text{Var. saec.} + \left(\frac{t' - t}{100}\right)^3 \times \text{dritt. Gl.} \qquad \text{X.}$$

Verschiedene andere Erleichterungen für diese häufig auszuführenden Reduktionen bieten sich dem Rechner von selbst dar.

Bei polnahen Sternen (etwa für $\delta > 80^\circ$) versagen die bisherigen Formeln; man muß sich dann der strengen Formeln bedienen, die wir jetzt, aber mit möglichster Kürze ableiten, da sie verhältnismäßig wenig gebraucht werden. Aus dem bereits oben benutzten Dreieck erhält man:

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L + \psi) &= \cos\delta \cos(\alpha + a) \\ \cos B \sin(L + \psi) &= \cos\delta \sin(\alpha + a) \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon \\ \sin B &= -\cos\delta \sin(\alpha + a) \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon ; \end{aligned}$$

ebenso besteht zwischen L, B und den zu $T + t'$ gehörigen α', δ' der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L + \psi') &= \cos\delta' \cos(\alpha' + a') \\ \cos B \sin(L + \psi') &= \cos\delta' \sin(\alpha' + a') \cos\varepsilon' + \sin\delta' \sin\varepsilon' \\ \sin B &= -\cos\delta' \sin(\alpha' + a') \sin\varepsilon' + \sin\delta' \cos\varepsilon' , \end{aligned}$$

wenn mit ψ', α', ε' die zur Zeit $T + t'$ gehörigen Größen bezeichnet werden. Leitet man aus beiden Systemen die Werte $\cos B \cos L$, $\cos B \sin L$, $\sin B$ ab und setzt sie einander gleich, so erscheinen nach einiger Reduktion die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \cos(\alpha' + a') &= \cos\delta \cos(\alpha + a) \cos(\psi' - \psi) - \cos\delta \sin(\alpha + a) \cos\varepsilon \sin(\psi' - \psi) \\ &\quad - \sin\delta \sin\varepsilon \sin(\psi' - \psi) \\ \cos\delta' \sin(\alpha' + a') &= \cos\delta \cos(\alpha + a) \sin(\psi' - \psi) \cos\varepsilon' \\ &\quad + \cos\delta \sin(\alpha + a) (\cos(\psi' - \psi) \cos\varepsilon \cos\varepsilon' + \sin\varepsilon \sin\varepsilon') \\ &\quad + \sin\delta (\cos(\psi' - \psi) \sin\varepsilon \sin\varepsilon' - \cos\varepsilon \cos\varepsilon') \\ \sin\delta' &= \cos\delta \cos(\alpha + a) \sin(\psi' - \psi) \sin\varepsilon' \\ &\quad + \cos\delta \sin(\alpha + a) (\cos(\psi' - \psi) \cos\varepsilon \cos\varepsilon' - \sin\varepsilon \sin\varepsilon') \\ &\quad + \sin\delta (\cos(\psi' - \psi) \sin\varepsilon \sin\varepsilon' + \cos\varepsilon \cos\varepsilon') . \end{aligned}$$

Man kann diese durch Einführung einiger Hilfsgrößen auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \sin(\alpha' + a' - z') &= \cos\delta \sin(\alpha + a + z) \\ \cos\delta' \cos(\alpha' + a' - z') &= \cos\delta \cos(\alpha + a + z) \cos\vartheta - \sin\delta \sin\vartheta \\ \sin\delta' &= \cos\delta \cos(\alpha + a + z) \sin\vartheta + \sin\delta \cos\vartheta \end{aligned}$$

worin:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{z' + z}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\psi' - \psi}{2} \cos\varepsilon \qquad \text{XI.} \\ \operatorname{tg} \frac{z' - z}{2} &= \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\psi' - \psi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')} (\varepsilon' - \varepsilon) \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') \sin \tfrac{1}{2}(z + z') . \end{aligned}$$

Hat man eine *Bahnebene* durch die Stücke Ω_0', i_0', ω_0' auf den Äquator und das Äquinoktium für eine Zeit T bezogen und will sie auf den Äquator und das

Äquinoktium für $T+t$ überführen: Ω', i', ω', so betrachtet man ebenso wie bei der Ekliptik das zwischen den beiden Äquatoren und der Bahn liegende Dreieck. Nennt man Π' die Rektaszension des aufsteigenden Knotens K' von A_1 auf A, auf A von Υ aus gemessen, so sind die Seiten dieses Dreieckes:

$$\Pi' - \Omega_0', \quad \omega' - \omega_0',$$
$$\Pi' + \psi \cos\varepsilon - a - \Omega'$$

und die Winkel:

$$i', \qquad (\pi'), \qquad 180^\circ - i_0'.$$

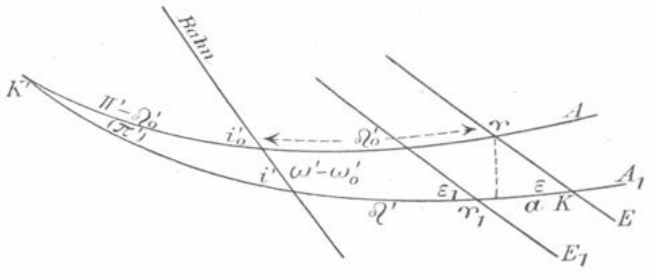


Fig. 17.

Wir wollen für diese Transformation, die selten vorkommt, nur die aus den Differenzialformeln sich ergebenden ableiten. Da der Winkel ε, welchen der Äquator mit der festen Ekliptik bildet, nahezu konstant ist, kann $\Pi' = 90^\circ$ und $(\pi') = \psi \sin\varepsilon$ angenommen werden. Dann ergeben die Formeln:

$$\cos\varepsilon \frac{d\psi}{dt} - \frac{da}{dt} - \frac{d\Omega'}{dt} = \cos i'\, d\omega'$$

$$\frac{di'}{dt} = -\sin\Omega' \frac{d(\pi')}{dt} = -\sin\Omega' \sin\varepsilon \frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = \cos\Omega' \operatorname{cosec} i' \frac{d(\pi')}{dt} = \cos\Omega' \operatorname{cosec} i' \sin\varepsilon \frac{d\psi}{dt}$$

oder

$$\frac{d\Omega'}{dt} = m - n\cos\Omega' \operatorname{cotg} i'$$

$$\frac{di'}{dt} = -n\sin\Omega'$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = n\cos\Omega' \operatorname{cosec} i',$$

und integriert:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega_0' + (m - n\cos\Omega' \operatorname{cotg} i')\, t \\ i' &= i_0' - n\sin\Omega' \cdot t \\ \omega' &= \omega_0' + n\cos\Omega' \operatorname{cosec} i' \cdot t. \end{aligned} \qquad \text{XII.}$$

Auf der rechten Seite hat man für m, n, Ω', i' die der Zeit $T+t$ zukommenden Werte zu nehmen. —

Handelt es sich um sehr lange Zwischenzeiten, so kann die direkte Anwendung der Formeln VI, VII, IX, XII etwas unsicher werden. In diesen seltenen Fällen wird man entweder die Zwischenzeit in mehrere Abschnitte teilen und für jeden derselben nach den gegebenen Vorschriften verfahren, oder aber man kann Formeln verwenden, welche die Glieder höherer Ordnung berücksichtigen. Betreff dieser letzteren sei auf Oppolzers Lehrbuch der Bahnbestimmung Band I, zweite Auflage verwiesen. —

Zur Erleichterung der Anwendung von VI, VII, IX, XII dient Tafel XXX in der Tafelsammlung. Es ist zu beachten, daß dort $\frac{d(\pi)}{dt}$ mit π bezeichnet ist.

21. Die Nutation. Die in den Formeln 20) (Seite 67) enthaltenen periodischen Glieder werden, wenn wir darin ebenfalls die Schiefe der Ekliptik ε und zwar in anbetracht der Kleinheit der Glieder einen konstanten Wert derselben einführen:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \varkappa\lambda c' \cos\varepsilon \sin(\Omega' + \psi) - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda c'^2 \sin\varepsilon \sin 2(\Omega' + \psi)\\ &\quad - \varkappa \sin\varepsilon \sin 2(nt + L_0 + \psi) - \varkappa\lambda \sin\varepsilon \sin 2(n't + L_0' + \psi)\\ \frac{d\,{}^1\!\Psi}{dt} &= \varkappa\lambda c' \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon} \cos(\Omega' + \psi) - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda c'^2 \cos\varepsilon \cos 2(\Omega' + \psi)\\ &\quad - \varkappa \cos\varepsilon \cos 2(nt + L_0 + \psi) + 3\varkappa e_0 \cos\varepsilon \cos g\\ &\quad - \varkappa\lambda \cos\varepsilon \cos 2(n't + L_0' + \psi) + 3\varkappa\lambda e' \cos\varepsilon \cos g'.\end{aligned}$$

Hierin darf $\psi = \alpha t$ benutzt werden; wir nehmen im folgenden an, daß α bereits in n und n' mit enthalten sei. — Die Länge des Mondknotens Ω' durchläuft in einem Zeitraum von $18\frac{2}{3}$ Jahren mit gleichmäßiger Geschwindigkeit den vollen Umkreis in retrograder Bewegung; wir setzen daher

$$\Omega' + \psi = \Omega_0' - \chi t.$$

Die Integration kann dann ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}E &= + \frac{\varkappa\lambda c' \cos\varepsilon}{\chi} \cos(\Omega_0' - \chi t) - \frac{\varkappa\lambda c'^2 \sin\varepsilon}{4\chi} \cos 2(\Omega_0' - \chi t)\\ &\quad + \frac{\varkappa \sin\varepsilon}{2n} \cos 2(L_0 + nt) + \frac{\varkappa\lambda \sin\varepsilon}{2n'} \cos 2(L_0' + n't)\\ {}^1\!\Psi &= - \frac{\varkappa\lambda c' \cos 2\varepsilon}{\chi \sin\varepsilon} \sin(\Omega_0' - \chi t) + \frac{\varkappa\lambda c'^2 \cos\varepsilon}{4\chi} \sin 2(\Omega_0' - \chi t)\\ &\quad - \frac{\varkappa \cos\varepsilon}{2n} \sin 2(L_0 + nt) + \frac{3\varkappa e_0 \cos\varepsilon}{n} \sin g\\ &\quad - \frac{\varkappa\lambda \cos\varepsilon}{2n'} \sin 2(L_0' + n't) + \frac{3\varkappa\lambda e' \cos\varepsilon}{n'} \sin g'.\end{aligned} \qquad \text{XIII.}$$

Die erste Formel gibt die Nutation in Schiefe, die zweite die Nutation in Länge. Die Hauptglieder in beiden sind die ersten, von der Länge des Mondknotens abhängigen. Vermöge derselben beschreibt jedes Gestirn um seinen mittleren Ort in der Umlaufsdauer der Mondknoten eine Ellipse, die Nutationsellipse. Wie schon oben erwähnt, heißt der Punkt, in welchem Aquator und Ekliptik sich schneiden würden, wenn die Nutation nicht vorhanden wäre, das *mittlere Äquinoktium* und die Schiefe, die dann stattfinden würde, die *mittlere Schiefe*. Dagegen heißt der Punkt, in welchem der Äquator die Ekliptik wirklich schneidet, das *wahre Äquinoktium* und die entsprechende Schiefe die *wahre Schiefe* der Ekliptik. Da die Nutation die Lage der Ekliptik nicht berührt, sondern nur den Äquator bewegt, so werden durch die Nutation die *Breiten* der Gestirne nicht geändert und die *Längen* für alle Gestirne um den konstanten Betrag ${}^1\!\Psi$.

Der Einfluß der Nutation auf die Rektaszension und Deklination der Gestirne wird am einfachsten durch Differenzialformeln erhalten. Da

$$\Delta\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon$$
$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{d\delta}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon$$

und die hierin auftretenden Differenzialquotienten (nach Seite 20)

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos\varepsilon + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon\,, \qquad \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg}\delta\cos\alpha$$
$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \cos\alpha\sin\varepsilon\,, \qquad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin\alpha$$

sind, so ergeben sich die gewünschten Formeln, wenn $\Delta\lambda = \Psi$, $\Delta\varepsilon = E$ gesetzt wird. Sie auf ihre kürzeste Form zu bringen, wird sich aber erst nach Einsetzung der Zahlenwerte empfehlen.

22. Umsetzung der Präzessions- und Nutationsformeln in Zahlen. Die in den Formeln V eingeführte Größe

$$P = \alpha - \operatorname{cotg}\varepsilon_0\cdot\sigma = \{\varkappa(1+\tfrac{3}{2}e_0^2) + \varkappa\lambda(1+\tfrac{3}{2}e'^2 - \tfrac{3}{2}c'^2)\}\cos\varepsilon_0 - \operatorname{cotg}\varepsilon_0\cdot\sigma\,,$$

also der Faktor, der im Ausdruck der allgemeinen Präzession mit der ersten Potenz der Zeit multipliziert ist, heißt die *Präzessionskonstante*; sie kann und muß aus den Beobachtungen abgeleitet werden. Wegen der Säkularänderung der Exzentrizität der Erdbahn ist sie keine eigentliche Konstante, sondern gilt für eine bestimmte Epoche. Wir stellen die hauptsächlichsten Bestimmungen, sämtlich auf die Epoche 1850 reduziert, zusammen:

Bessel, Tab. Reg.	50.″2346
O. Struve-Peters	50.2522
Leverrier	50.2357
L. Struve	50.2283
Newcomb	50.2453.

Während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die Struve-Peterssche Konstante fast allgemein in Gebrauch; mit Beginn des 20. Jahrhunderts ist man zur Newcombschen Konstanten*) übergegangen; diese soll auch im folgenden zugrunde gelegt werden.

Die in der Nutation in Schiefe (Formeln XIII) mit dem cos der Länge des Mondknotens multiplizierte Größe

$$\mathfrak{N} = \frac{\varkappa\lambda c'\cos\varepsilon}{\chi}$$

heißt die *Nutationskonstante* und muß ebenfalls direkt aus den Beobachtungen abgeleitet werden. Auf der Pariser Konferenz zur Vereinbarung der astronomischen Konstanten hat man den Wert 9.″21 als gegenwärtig zuverlässigsten adoptiert.

Zur Berechnung der in unseren Formeln vorkommenden Faktoren sind ferner folgende Angaben aus den Theorien von Sonne und Mond erforderlich, die wir den Sonnentafeln von Newcomb und den Mondtafeln von Hansen entnehmen. Alle diese Angaben beziehen sich auf die Epoche 1850 und auf das julianische Jahr als Zeiteinheit.

*) *Newcomb*, A new det. of the Precessional Constant, Astr. Pap. Vol. VIII. S. 72.

Exzentrizität der Erdbahn:

$$\begin{aligned} e_0 &= \quad 0.016\,771\,9 \\ e_1 &= -\,0.000\,000\,418 \end{aligned} \qquad e = e_0 + e_1 t .$$

Mittlere Schiefe der Ekliptik:

$$\varepsilon_0 = 23^\circ\,27'\,31''.68 .$$

Mittlere Bewegung der Erde inkl. Präzession:

$$\begin{aligned} n &= 1\,295\,977''.4322 \\ &\quad +\,50.2453 \\ &\overline{1\,296\,027.6775} = 6.283\,319\,6 \text{ Einheiten des Radius.} \end{aligned}$$

Bewegung der Ekliptik*):

$$(\pi)\ \sin \Pi_0 = +\,0''.05341\,t + \overset{\sigma}{0''.000}\,019\,34\,t^2$$

$$(\pi)\ \cos \Pi_0 = -\,0.46838\,t + \overset{\pi'}{0.000}\,005\,62\,t^2 .$$

Exzentrizität der Mondbahn:

$$e' = 0.054\,844 .$$

Neigung der Mondbahn:

$$c' = 0.089\,826 \text{ Einheiten des Radius.}$$

Bewegung des Mondknotens:

$$\chi = 0.337\,5712 \text{ Einheiten des Radius.}$$

Mittlere Bewegung des Mondes:

$$n' = 83.99\,685 \text{ Einheiten des Radius.}$$

Hiermit findet man nach I. und V.

$$\begin{aligned} \alpha = [9.96\,2716]\varkappa + [9.95\,9224]\varkappa\lambda &= P + \sigma \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \\ \sigma \operatorname{cotg} \varepsilon_0 &= +\ 0''.1231 \\ P &= \underline{+\ 50.2453} \\ P + \sigma \operatorname{cotg} \varepsilon_0 &= +\ 50''.3684 \end{aligned}$$

und nach der Definition der Nutationskonstante:

$$\mathfrak{N} = [9.38\,757]\varkappa\lambda$$

und somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} [9.96\,2716]\varkappa + [9.95\,9224]\varkappa\lambda &= +\ 50''.3684 \\ [9.38\,757\ ]\varkappa\lambda &= +\ 9.21 \end{aligned}$$

Die Auflösung derselben ergibt:

$$\begin{aligned} \varkappa\lambda &= [1.57\,669] \\ \varkappa &= [1.24\,189] = +\ 17''.455 \\ \lambda &= [0.33\,480] . \end{aligned}$$

Nun sind alle in unseren Formeln auftretenden Faktoren berechenbar. Wir stellen sie im folgenden zusammen mit dem Bemerken, daß t in Jahren von 1850 ab zu zählen ist.

---

*) *Newcomb*, Constants p. 186.

Lunisolarpräzession (Form. I.)

$$\text{in Schiefe: } \varepsilon = 23^\circ 27' 31''.68 + 0''.000\,0065\,t^2,$$
$$\text{in Länge: } \psi = 50''.3684\,t - 0''.000\,1075\,t^2.$$

Für das Jahr $1850 + t$ beträgt die einjährige Lunisolarpräzession in Länge:

$$\frac{d\psi}{dt} = 50''.3684 - 0''.000\,2150\,t.$$

Allgemeine Präzession (Form. V.)

Mittlere Schiefe der Ekliptik:

$$\varepsilon_1 = 23^\circ 27' 31''.68 - 0''.468\,38\,t - 0''.000\,0008\,2\,t^2.$$

Allgemeine Präzession in Länge:

$$\psi_1 = 50''.2453\,t + 0''.000\,1109\,t^2.$$

Für das Jahr $1850 + t$ beträgt die einjährige allgemeine Präzession in Länge:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = p = 50''.2453 + 0''.000\,2218\,t.$$

Präzession durch die Planeten (Form. V^a.)

$$a = + 0''.13\,417\,t - 0''.000\,2380\,t^2$$
$$\frac{da}{dt} = + 0''.13\,417 - 0''.000\,4760\,t.$$

Einjährige Präzession in Rektaszension und Deklination:

$$m = \cos\varepsilon \frac{d\psi}{dt} - \frac{da}{dt} = 46''.0711 + 0''.000\,2788\,t$$
$$n = \sin\varepsilon \frac{d\psi}{dt} = 20''.0511 - 0''.000\,0856\,t.$$

Lage der Erdbahn gegen die Ekliptik von 1850. Aus obigen Zahlenangaben für $(\pi)\sin\Pi_0$ und $(\pi)\cos\Pi_0$ folgt

$$\Pi_0 = 173^\circ 29'.68 - 0'.2897\,t$$
$$\pi = \frac{d(\pi)}{dt} = + 0''.47141 - 0''.000\,006\,79\,t$$
$$(\pi) = + 0''.47141\,t - 0''.000\,003\,40\,t^2$$

und daher

$$\Pi = \Pi_0 + \psi_1 + t\frac{d\Pi_0}{dt} = 173^\circ 29'.68 + 0'.5477\,t.$$

Die Größen $p = \frac{d\psi_1}{dt}$, m, n, Π, $\pi = \frac{d(\pi)}{dt}$, ε_1 (dort mit ε bezeichnet) finden sich in Taf. XXX der »Tafeln« von 1600—2100 tabuliert.

Die Formeln XIII für die Nutation in Schiefe und Länge setzen wir in Zahlen um, indem wir zugleich, wie üblich, die mittlere Länge des Mondknotens mit ☊, die mittlere Länge der Sonne mit ☉, des Mondes mit ☽, des Perihels der Sonnenbahn mit l', der Mondbahn mit l'' bezeichnen; es folgt dann:

Nutation in Schiefe:

$$E = +\,9''.210\cos\Omega - 0''.090\cos 2\Omega + 0''.546\cos 2\odot + 0''.088\cos 2\mathbb{)}\,.$$

Nutation in Länge:

$$\Psi = -\,17''.232\sin\Omega + 0''.207\sin 2\Omega - 1''.257\sin 2\odot - 0''.204\sin 2\mathbb{)} + 0''.128\sin(\odot - \Gamma) + 0''.068\sin(\mathbb{)} - \Gamma')\,. \qquad \text{XIII}^{a}.$$

Es sind hier die für 1900 gültigen Werte der Koeffizienten angesetzt; auf die geringen Änderungen, welche einige infolge der Säkularänderungen der Neigung der Mondbahn und der Exzentrizität der Erdbahn erfahren, gehen wir nicht ein.

Die Formeln für die Nutation in Rektaszension und Deklination werden nach den früheren Angaben (Seite 77):

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha = &-\,15''.809\sin\Omega - \operatorname{tg}\delta\,(6''.858\sin\alpha\sin\Omega + 9''.210\cos\alpha\cos\Omega)\\
&+\,0.190\sin 2\Omega + \operatorname{tg}\delta\,(0.082\sin\alpha\sin 2\Omega + 0.090\cos\alpha\cos 2\Omega)\\
&-\,1.153\sin 2\odot - \operatorname{tg}\delta\,(0.500\sin\alpha\sin 2\odot + 0.546\cos\alpha\cos 2\odot)\\
&-\,0.187\sin 2\mathbb{)} - \operatorname{tg}\delta\,(0.081\sin\alpha\sin 2\mathbb{)} + 0.088\cos\alpha\cos 2\mathbb{)})\\
&+\,(0.117 + 0.051\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)\sin(\odot - \Gamma)\\
&+\,(0.062 + 0.027\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)\sin(\mathbb{)} - \Gamma')\,,\\
\Delta\delta = &-\,6''.858\cos\alpha\sin\Omega + 9''.210\sin\alpha\cos\Omega\\
&+\,0.082\cos\alpha\sin 2\Omega - 0.090\sin\alpha\cos 2\Omega\\
&-\,0.500\cos\alpha\sin 2\odot + 0.546\sin\alpha\cos 2\odot\\
&-\,0.081\cos\alpha\sin 2\mathbb{)} + 0.088\sin\alpha\cos 2\mathbb{)}\\
&+\,0.051\cos\alpha\sin(\odot - \Gamma)\\
&+\,0.027\cos\alpha\sin(\mathbb{)} - \Gamma')\,.
\end{aligned} \qquad \text{XIV.}$$

Die weitere Verarbeitung dieser Formeln erfolgt in Nr. 23.

23. Reduktion auf den Jahresanfang. Reduktion auf den wahren Ort. Zur bequemen Berechnung der Nutationsausdrücke werden nach *Bessel* in den astronomischen Jahrbüchern Einrichtungen getroffen, die wir kurz auseinandersetzen wollen.

Ein wahrer Ort wird in den mittleren für dasselbe Datum verwandelt, indem man den Betrag der Nutation von ihm abzieht; solche auf verschiedene mittlere Aquinoktien bezogenen Örter würde man nicht einer und derselben Untersuchung zugrunde legen können, da sie sich auf verschiedene Koordinatensysteme beziehen. Man verbindet daher mit der Befreiung eines Ortes von der Nutation die Reduktion auf ein bestimmtes mittleres für alle Örter gleiches Äquinoktium und wählt hierzu das des Anfanges des tropischen Jahres (annus fictus). Auf diese Weise gelingt es einfach, alle in demselben Jahre angestellten Beobachtungen auf *ein* Koordinatensystem zu beziehen (*Reduktion auf den Jahresanfang*). Liegen die Beobachtungen in verschiedenen Jahren, so reduziert man sie zuerst auf den betreffenden Jahresanfang und bringt dann alle durch bloße Anbringung der Präzession auf dasselbe mittlere Äquinoktium, das feste der ganzen Untersuchung zugrunde gelegte. Zu dieser letzteren Operation bedarf es keiner besonderen Einrichtungen, da die Präzessionsformeln einfach genug sind.

Hat man einen mittleren auf den Jahresanfang bezogenen Ort in einen wahren für ein bestimmtes Datum zu verwandeln, so bringt man ihn zuerst durch die Präzession auf den Jahresanfang des betreffenden Datums und dann durch Anbringung der Nutation und der Präzession auf das wahre Äquinoktium des Datums (Reduktion auf den wahren Ort). Offenbar sind die Reduktion auf den Jahresanfang und die Reduktion auf den wahren Ort absolut einander gleich und haben entgegengesetztes Vorzeichen. Wir wollen, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, das Vorzeichen in den nachfolgenden Formeln so wählen, daß es der Reduktion auf den wahren Ort entspricht, wie dies auch in den Jahrbüchern üblich ist; ferner wollen wir uns auf das System des Äquators beschränken, da dies in der Praxis allein vorkommt.

Wenn mit τ die Zeit bezeichnet wird von Anfang des annus fictus bis zum Datum, ausgedrückt in Teilen des tropischen Jahres, dann wird die Reduktion auf den wahren Ort des Datums nach den Formeln IX und XIV:

$$\alpha' - \alpha = \tau (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) + \text{Lunisolarnutation in AR.}$$
$$\delta' - \delta = \tau n \cos \alpha + \text{Lunisolarnutation in Dekl.}$$

Setzt man:

$$A = \tau - \frac{6''.858}{n} \sin \mathfrak{Q} + \frac{0''.082}{n} \sin 2\mathfrak{Q} - \frac{0''.500}{n} \sin 2\odot + \frac{0''.051}{n} \sin (\odot - \Gamma)$$
$$\left[- \frac{0''.081}{n} \sin 2\mathfrak{D} + \frac{0''.027}{n} \sin (\mathfrak{D} - \Gamma') \right]$$

$$B = - 9''.210 \cos \mathfrak{Q} + 0''.090 \cos 2\mathfrak{Q} - 0''.546 \cos 2\odot \quad [- 0''.088 \cos 2\mathfrak{D}]$$

$$E = - \left(15''.809 - \frac{m}{n} 6''.858 \right) \sin \mathfrak{Q} + \left(0''.190 - \frac{m}{n} 0''.082 \right) \sin 2\mathfrak{Q}$$
$$- \left(1''.153 - \frac{m}{n} 0''.500 \right) \sin 2\odot + \left(0''.117 - \frac{m}{n} 0''.051 \right) \sin (\odot - \Gamma)$$
$$\left[- \left(0''.187 - \frac{m}{n} 0''.081 \right) \sin 2\mathfrak{D} + \left(0''.062 - \frac{m}{n} 0''.027 \right) \sin (\mathfrak{D} - \Gamma') \right],$$

worin die in [ ] gesetzten Glieder bei der Berechnung der A, B, E zuweilen übergangen und gesondert berücksichtigt werden; ferner:

$$a = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha, \qquad a' = n \cos \alpha,$$
$$b = \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \qquad b' = - \sin \alpha,$$

dann wird

$$\alpha' - \alpha = Aa + Bb + E$$
$$\delta' - \delta = Aa' + Bb'. \qquad \text{XV.}$$

Es ist ersichtlich, daß die A, B, E vom Sternort unabhängig sind, dagegen aber Funktionen der Zeit, der veränderlichen Größen $\mathfrak{Q}$, $\odot$, $\mathfrak{D}$, Γ, Γ' und der nahe konstanten Größen m, n, ε; diese A, B, E werden von den astronomischen Jahrbüchern von Tag zu Tag mitgeteilt, und zwar für die Sterntage des annus fictus, für die sie leicht berechenbar sind; da diesen das Datum in mittlerer Zeit meistens beigeschrieben ist, kann man sie daraus für jede vorgelegte Zeit interpolieren. Die

a, b, a', b' sind nur vom Sternort abhängig, können also für einen Fixstern längere Zeit, mindestens aber ein Jahr, als konstant angenommen werden.

Setzt man

$$f = mA + E$$
$$g \cos G = nA$$
$$g \sin G = B,$$

so wird:

$$\alpha' - \alpha = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta$$
$$\delta' - \delta = g \cos(G + \alpha), \qquad \text{XVI.}$$

welche Formeln für bewegte Gestirne bequemer im Gebrauch sind; es werden daher in den Jahrbüchern auch die Größen f, g, G von Tag zu Tag mitgeteilt.

Die kleinen von der Mondlänge abhängigen und daher rasch veränderlichen Glieder in A, B und E kann man, da sie bei der Interpolation störend sind, zuerst weglassen und wenn man die Rechnung ganz scharf führen will, gesondert berücksichtigen; setzt man sie gleich A', B' (die in E sind ganz unmerklich) bzw. f', g', G', so geben diese Zusatzglieder:

$$[\alpha' - \alpha] = A'a + B'b = f' + g' \sin(G' + \alpha) \operatorname{tg} \delta$$
$$[\delta' - \delta] = A'a' + B'b' = g' \cos(G' + \alpha).$$

Die A', B', f', g', G' werden in den Jahrbüchern mit dem Argument ☽ tabuliert.

Die »Tafeln« Nr. XXXI^{b-e} bieten bequeme Hilfsmittel, um die f, g, G für jedes Datum rasch berechnen zu können, unabhängig von den Jahrbüchern. Über ihre Einrichtung ist die Einleitung nachzulesen.

24. Folgerungen: Mondmasse, Verhältnis der Trägheitsmomente des Erdkörpers. Die ermittelten Zahlenwerte von

$$\varkappa = \tfrac{3}{2} \frac{k^2}{\omega} \frac{C - A}{C} \frac{M}{a^3} = 17''.455$$

$$\lambda = \frac{M'}{M} \frac{a^3}{a'^3} = [0.33480]$$

geben noch Anlaß zur Ableitung einiger Resultate, von denen wir oben teilweise Gebrauch gemacht haben. Nimmt man als Einheit die Erdmasse, so ist nach dem dritten Keplerschen Gesetz:

$$n'^2 a'^3 = k^2 (1 + M')$$
$$n^2 a^3 = k^2 (1 + M).$$

Da M eine sehr große Zahl ist, so können wir M statt $M + 1$ setzen und erhalten:

$$M = \frac{n^2 a^3}{k^2};$$

ferner gibt die erste Gleichung

$$a'^3 = \frac{k^2 (1 + M')}{n'^2}.$$

Werden diese beiden Angaben in den Ausdruck für λ eingesetzt, so wird daraus:

$$\lambda = \frac{M'}{1 + M'} \frac{n'^2}{n^2} .$$

Mit den bekannten mittleren Bewegungen von Sonne und Mond ergibt sich hieraus die Mondmasse, ausgedrückt in Teilen der Erdmasse:

$$M' = \frac{1}{81.5} .$$

Setzt man ferner $k^2 M = n^2 a^3$ in den Ausdruck für $\varkappa$ ein, so wird daraus:

$$\varkappa = \tfrac{3}{2} \frac{n^2}{\omega} \frac{C - A}{C} .$$

Mit den bekannten Werten von n, ω und $\varkappa$ folgt hieraus:

$$\frac{C - A}{C} = 0.003284$$

und

$$\frac{C - A}{A} = 0.003295 .$$

Für $\mu = \omega \dfrac{C - A}{A}$ folgt hieraus, wenn wir für ω den mittleren Sonnentag als Zeiteinheit zugrunde legen, also

$$\omega = 2\pi \frac{366 \cdot 25}{365 \cdot 25} = 6.3006$$

setzen:

$$\mu = 0.02076 ,$$

wie oben bereits angegeben wurde.

Abschnitt VI.

Die Aberration.

25. Die Aberration im allgemeinen. Die Gestirne werden uns durch die Lichtwellen sichtbar, die sie aussenden; diese Wellen brauchen Zeit, um Raum zurückzulegen. Die Messung ihrer Richtung, die von einem ebenfalls mit endlicher Geschwindigkeit sich bewegenden Beobachtungsort — der Erde — aus erfolgt, erheischt daher die Beachtung einiger dabei auftretenden Erscheinungen, die man unter dem Namen Aberration zusammenfaßt.

Der Lichtstrahl, den ein leuchtender Körper von der Stelle P aussendet, gehe zur Zeit T von ihm ab, gelange zur Zeit t nach dem Objektivende a der Visierlinie und zur Zeit t' nach dem Okularende b'. Zu denselben Zeiten befinde sich das Objektivende der Visierlinie in bzw. A, a, a', so daß die Strecken Pa und Aa sowie ab' und aa' in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, die einen vom Licht, die anderen von der Erde; dabei bewegt sich das Licht geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit; dasselbe werden wir von der Erde annehmen dürfen, wenn die Zwischenzeiten $t - T$ und $t' - t$ klein sind; für die letztere wenigstens trifft dies stets zu. Die Visierlinie ab wird während der Zeit $t' - t$ also zu sich selbst parallel bleiben und in die Lage $a'b'$ übergehen; die Richtung $b'a'$ oder was dasselbe ist, die Richtung ba wird an den beiden Kreisen, durch welche die Richtung einer Geraden im Raum festgelegt werden kann, abgelesen. Diese beobachtete Richtung ist aber nicht identisch mit der Richtung des Lichtstrahles, welche nach obigem ab' oder die Diagonale des Parallelogramms $aba'b'$ ist. Die Visierlinie mußte in der Richtung der Erdbewegung um den Winkel $ab'a'$ *vor*gehalten werden, damit der Lichtstrahl das hintere Ende der Visierlinie treffen konnte. Man nennt die beobachtete Richtung ba die »scheinbare« (gewöhnlich bezeichnet z. B. mit α apparens $= \alpha$ app.), die wirkliche Richtung $b'a$ aber die »wahre«, und dementsprechend auch die Koordinaten. Der Winkel $ab'a'$ heißt der Aberrationswinkel; derselbe hängt außer von der Richtung des Lichtstrahles nur vom *Verhältnis* der Strecken aa' und ab oder, da diese beiden in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, nur vom Verhältnis der Erdgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit ab, nicht also etwa von der Länge der Visierlinie.

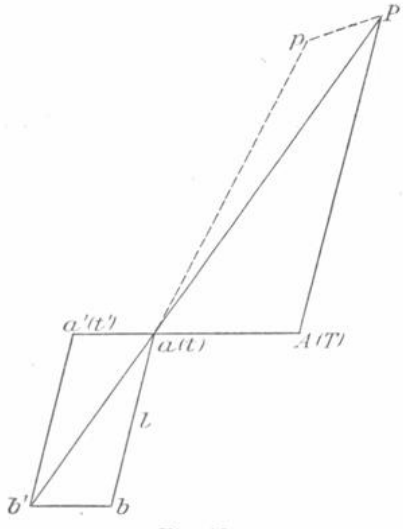


Fig. 18.

Liegt der lichtaussendende Körper P so nahe an der Erde, daß auch die Zeit $t - T$ so klein ist, daß während derselben die Erde mit gleichförmiger Geschwindig-

keit bewegt und in derselben Geraden Aa gedacht werden darf wie aa', so ist nach dem oben Bemerkten

$$\frac{Aa}{aa'} = \frac{Pa}{ab'}$$

und daher PA parallel zu $a'b'$ oder ab. Beachtet man, daß AP die Richtung von der Erde zur Zeit T nach der Lage des Körpers zur Zeit T, also die wahre Richtung des Körpers zur Erde darstellt, ferner daß $t - T$ oder $t' - T$ (die sich nicht merklich voneinander unterscheiden können) die Zeit ist, welche das Licht vom beobachteten Körper bis zur Erde braucht (*Aberrationszeit Ab.*), so ist folgender grundlegende Satz durch das eben dargelegte erwiesen:

Der scheinbare Ort für die Zeit t ist identisch mit dem wahren Ort für die Zeit $T = t - Ab$.

Die Anwendung dieses Satzes auf die Lösung der Aufgabe, aus scheinbaren Örtern wahre und umgekehrt zu ermitteln, setzt zweierlei voraus: 1. daß die Bedingung, unter der der Satz gilt, erfüllt ist, 2. daß die Entfernung bekannt ist, aus der die Aberrationszeit berechnet werden muß.

Was den ersten Punkt anlangt, so kann man für die Aberration, welche aus der Bewegung der Erde um die Sonne hervorgeht, die genannte Bedingung für alle Körper, welche innerhalb der Grenzen des Sonnensystems sich befinden, als erfüllt ansehen; denn auch noch für die Aberrationszeit des Neptun, die im Maximum 4.3 Stunden beträgt, bleibt der Einfluß der Krümmung der Erdbahn unter 0″.03, also unter der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler*). Handelt es sich aber um Körper, die jenseits des Sonnensystems stehen, also um Fixsterne, dann darf der Satz keine Anwendung finden und es muß ein anderes Verfahren eingeschlagen werden, auf das wir gleich zu sprechen kommen. Für die Aberration, die aus der Rotation der Erde um ihre Achse hervorgeht, trifft die Bedingung ebenfalls nicht zu; diese Aberration wird aber, wie wir später sehen werden, stets in anderer Weise berücksichtigt.

Was den zweiten Punkt anlangt, so ist für die *Fixsterne* die Entfernung in der Regel nicht bekannt, und wenn sie bekannt ist, so ist sie doch so groß, daß die erste Voraussetzung nicht erfüllt ist; für die Fixsterne ist also obiger Satz unbrauchbar. Da aber die Fixsterne ihren Ort an der Sphäre nur sehr wenig ändern, ihr Ort für T also als identisch mit dem Ort für t angenommen werden kann, so fällt wegen ihrer großen Entfernung selbst für Aberrationszeiten, welche Jahre, also ganze Umlaufsdauern der Erde umfassen, die Richtung PA mit der Richtung Pab' zusammen und man kann somit die Richtung $b'a$ als die wahre für die Zeit T betrachten, die man allerdings in den seltensten Fällen kennt und daher durch t ersetzt; so lange man den Unterschied zwischen t und T als konstant ansehen kann, hat dies auch für die Untersuchung der lateralen Eigenbewegung der Fixsterne keine Folgen. Da der Unterschied zwischen t und T für verschiedene Fixsterne aber jedenfalls sehr verschiedene Werte annehmen kann, so muß man im Auge behalten, daß der Anblick des Fixsternhimmels kein synoptischer ist. — Für die Fixsterne ist man also gezwungen, als einzige Wirkung der Aberration das Vorstellen der Visierlinie infolge

*) Siehe *Battermann*, Beiträge zur Aberrationslehre S. 20.

der Bewegung der Erde anzunehmen: die »Aberration der Fixsterne«; ihre Berechnung d. h. also die Ermittelung des Winkels $ab'a'$ für verschiedene Richtungen werden wir unten zeigen. — Für die *Körper des Sonnensystems* ist die Entfernung von der Erde entweder bekannt, dann gibt obiger Satz das bequeme Mittel, einen gemessenen scheinbaren Ort in einen wahren oder umgekehrt einen berechneten wahren Ort in einen scheinbaren zu verwandeln; oder sie ist nicht bekannt, dann muß man sich die Gesamtwirkung der Aberration in zwei Teile zerlegt denken: einen ersten, die Fixsternaberration, den man berechnen kann, und der die gemessene scheinbare Richtung $b'a'$ in $b'a$ überzuführen gestattet und der also die wahre Richtung von der Erde zur Zeit t nach dem Ort des Gestirnes zur Zeit T kennen lehrt; und einen zweiten, der so lange unbekannt bleibt, bis die Entfernung ermittelt ist: die »Planetenaberration«. Zur getrennten nachträglichen Berücksichtigung dieser letzteren bietet sich folgender Weg dar, sobald die Entfernung bekannt geworden ist: Man berechnet die Aberrationszeit $t - T = Ab$ und fügt den scheinbaren Koordinaten des Körpers die geozentrische Bewegung in der Zeit Ab hinzu; dann hat man den wahren Ort für t; denn der scheinbare Ort für t ist identisch mit dem wahren für T; wird ihm also die Bewegung in $t - T$ hinzugefügt, so erscheint der wahre Ort für t. Dieser Weg ist aber selten gangbar, da die geforderte geozentrische Bewegung in der Regel nicht zur Verfügung steht. Es ist dann, namentlich bei ersten Bahnbestimmungen nützlicher, den von Fixsternaberration befreiten Ort beizubehalten und ihn als wahren zur Zeit T gehörigen Ort des Planeten, wie er von der Erde zur Zeit t gesehen wird, zu behandeln.

Diese Erwägungen zeigen, daß es trotz des oben bewiesenen Hauptsatzes notwendig ist, die Erscheinung, die aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes folgt, in zwei gesonderte zu zerlegen: die Fixsternaberration, die aus den Bewegungen der Erde folgt und natürlich auch bei allen anderen Körpern auftritt, und die Planetenaberration, die daraus hervorgeht, daß zur Beobachtungszeit der eingelaufenen Wellen der bewegte Körper einen anderen Ort im Raume einnimmt als zur Zeit, wo die Wellen von ihm ausgingen.

26. Die Fixsternaberration. Nach den obigen Darlegungen besteht die Fixsternaberration in dem Unterschied der Richtungen ba und $b'a$, in denen der Punkt a von den beiden Stellen b und b' aus gesehen wird, welche die Erde am Anfang und am Ende der Zwischenzeit $t' - t$ einnimmt, welche das Licht braucht, um die Länge l des Fernrohrs zu durchlaufen; und zwar stellt $b'a$ die wahre, ba die scheinbare Richtung des Strahles dar. Um diese beiden Richtungen zu fixieren, legen wir durch b' als Anfangspunkt ein vorläufig beliebiges Koordinatensystem und bestimmen sie durch die in der XY-Ebene gemessenen Winkel α und α' der Projektionen von $b'a$ und ba auf die XY-Ebene mit der X-Achse und durch die Winkel δ und δ', welche die Richtungen $b'a$ und ba mit diesen Projektionen bilden; dann stellen

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha\,, \qquad \Delta\delta = \delta' - \delta$$

den Betrag der Fixsternaberration vor in dem Sinne, daß dieser zum wahren Ort zu addieren ist, um den scheinbaren zu erhalten; da diese Unterschiede stets klein sind,

können sie nach den Formeln 13), Seite 16, durch die Verrückungen des Anfangspunktes $-\Delta x$, $-\Delta y$, $-\Delta z$ von b' nach b ausgedrückt werden:

$$\Delta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{l\cos\delta}\Delta x + \frac{\cos\alpha}{l\cos\delta}\Delta y$$
$$\Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{l}\Delta x - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{l}\Delta y + \frac{\cos\delta}{l}\Delta z.$$

Nennt man $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Komponenten der Geschwindigkeit der Erde, und μ die Geschwindigkeit des Lichtes, so wird

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}(t'-t), \qquad \Delta y = \frac{dy}{dt}(t'-t), \qquad \Delta z = \frac{dz}{dt}(t'-t)$$
$$l = \mu(t'-t)$$

und daher:

$$\Delta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\mu\cos\delta}\frac{dx}{dt} + \frac{\cos\alpha}{\mu\cos\delta}\frac{dy}{dt}$$
$$\Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dx}{dt} - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dy}{dt} + \frac{\cos\delta}{\mu}\frac{dz}{dt}. \qquad 1)$$

Dies sind die Hauptformeln, aus denen sich durch Spezialisierung des Koordinatensystems und der Bewegung der Erde alle besonderen ableiten lassen. Wir betrachten zwei Koordinatensysteme, das der Ekliptik und das des Äquators, und zwei Bewegungen der Erde, die translatorische um die Sonne oder die jährliche und die rotatorische um ihre Achse oder die tägliche.

Jährliche Aberration in Länge und Breite. An Stelle von α und δ treten Länge und Breite λ und β. Die Bewegung der Erde um die Sonne bezogen auf die Ekliptik ist durch

$$x = -R\cos\odot$$
$$y = -R\sin\odot$$
$$z = 0$$

gegeben, wenn R die Entfernung der Erde von der Sonne und $180^\circ + \odot$ die Länge der Erde, also $\odot$ die Länge der Sonne bezeichnet; daraus folgt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dR}{dt}\cos\odot + R\sin\odot\frac{d\odot}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dR}{dt}\sin\odot - R\cos\odot\frac{d\odot}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Die hierin auftretenden Koordinaten und Differenzialquotienten müssen der Theorie der elliptischen Bewegung der Sonne entnommen werden. Es sei $a = 1$ die große Halbachse, φ der Exzentrizitätswinkel, Γ die Länge des Perigäums der Sonnenbahn, v und M die wahre und die mittlere Anomalie, dann wird:

$$\odot = v + \Gamma, \qquad \frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dR}{dt} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin v\frac{dM}{dt}, \qquad \frac{d\odot}{dt} = \frac{\cos\varphi}{R^2}\frac{dM}{dt}$$

und somit:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(-\sin\varphi\,\sin v\,\cos\odot + \frac{\cos\varphi^2}{R}\sin\odot\right)\frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi\,\sin v\,\sin\odot + \frac{\cos\varphi^2}{R}\cos\odot\right)\frac{dM}{dt}.$$

Nun folgt aus

$$R = \frac{\cos\varphi^2}{1+\sin\varphi\,\sin v}:$$
$$\frac{\cos\varphi^2}{R} = 1+\sin\varphi\,\sin v;$$

wird dies eingetragen und $\odot - v = \Gamma$ beachtet, so folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi\,\sin\Gamma + \sin\odot)\frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi\,\cos\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Hauptformeln führt nach kurzer Reduktion auf:

$$\lambda' - \lambda = -\frac{1}{\mu\,\cos\beta\,\cos\varphi}(\cos(\lambda-\odot) + \sin\varphi\,\cos(\lambda-\Gamma))\frac{dM}{dt}$$
$$\beta' - \beta = \frac{\sin\beta}{\mu\,\cos\varphi}(\sin(\lambda-\odot) + \sin\varphi\,\sin(\lambda-\Gamma))\frac{dM}{dt}.$$

Wird als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag eingeführt, so stellt $\frac{dM}{dt}$ die mittlere tägliche Bewegung dar; ihr Zahlenwert ist $3548''.19283$; ferner ist $\varphi = 0^\circ 57' 35''.3$, also $\log\cos\varphi = 9.999939$ und $\log\sin\varphi = 8.22404$. In der Größe

$$\frac{1}{\mu\,\cos\varphi}\cdot\frac{dM}{dt} = A,$$

welche die *Aberrationskonstante* heißt, ist also nur noch die Lichtgeschwindigkeit μ durch Zahlen auszudrücken. Man kann μ durch astronomische Beobachtungen bestimmen und findet, daß das Licht die astronomische Längeneinheit in $498^s.5 = 0^d.00577$ durchläuft; der in einem Tage zurückgelegte Weg oder μ ist also gleich $\frac{1}{0.00577}$. Mit diesen Zahlen folgt:

$$A = 20''.47.$$

A kann aber auch direkt durch Beobachtungen ermittelt werden und bietet dann einen Weg, die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen. Der angegebene Wert wird gegenwärtig in den Jahrbüchern gebraucht. Mit ihm werden die Formeln für die jährliche Aberration in Länge und Breite:

$$\lambda' - \lambda = -(20''.47\,\cos(\lambda-\odot) + 0''.343\,\cos(\lambda-\Gamma))\sec\beta$$
$$\beta' - \beta = (20.47\,\sin(\lambda-\odot) + 0.343\,\sin(\lambda-\Gamma))\sin\beta \qquad 2)$$

$$\Gamma = 279^\circ 30' \text{ für } 1800$$
$$= 281\ 13 \quad » \quad 1900$$
$$= 282\ 56 \quad » \quad 2000.$$

Für die Fixsterne sind die zweiten Glieder konstant und sind in den aus den mittleren Örtern der Fixsternkataloge abgeleiteten Längen und Breiten schon enthalten; für sie wird also die Reduktion auf den scheinbaren Ort durch

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\,20''.47 \cos(\lambda - \odot) \sec\beta \\ \beta' - \beta &= +\,20.47 \sin(\lambda - \odot) \sin\beta \end{aligned} \qquad 3)$$

gefunden. Für die Sonne wird $\lambda = \odot$ und $\beta = 0$ und daher die Aberration in Länge und Breite

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda)_\odot &= -\,20''.47 - 0''.343 \cos(\odot - \Gamma) \\ (\beta' - \beta)_\odot &= 0\,. \end{aligned} \qquad 4)$$

Jährliche Aberration in Rektaszension und Deklination. Wählt man den Äquator als Grundebene, so werden die α und δ der Hauptformeln Rektaszension und Deklination des Gestirnes. Die Koordinaten der Erde werden, wenn wie vorher die Länge der Sonne mit $\odot$ und die Schiefe der Ekliptik mit ε bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} x &= -\,R \cos\odot \\ y &= -\,R \sin\odot \cos\varepsilon \\ z &= -\,R \sin\odot \sin\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da man ε als konstant betrachten kann, lassen sich die Geschwindigkeiten in bezug auf den Äquator sofort aus den oben angegebenen ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad \frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi \sin\Gamma + \sin\odot)\frac{dM}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}(\sin\varphi \sin\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}(\sin\varphi \sin\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt} \end{aligned}$$

und die Eintragung in die Hauptformeln führt auf:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\,20''.47\ (\sin\alpha \sin\odot + \cos\alpha \cos\odot \cos\varepsilon) \sec\delta \\ &\quad [-\,0.343\ (\sin\alpha \sin\Gamma + \cos\alpha \cos\Gamma \cos\varepsilon) \sec\delta] \\ \delta' - \delta &= +\,20''.47\ (\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) \cos\odot - 20''.47\ \cos\alpha \sin\delta \sin\odot \\ &\quad [-\,0.343\ (\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) \cos\Gamma - 0.343 \cos\alpha \sin\delta \sin\Gamma]\,. \end{aligned} \qquad 5)$$

Die in die zweiten Zeilen gesetzten von der Sonnenlänge unabhängigen Glieder sind für jeden Fixstern konstant und in dem mittleren Ort der Fixsternkataloge bereits enthalten. Bei der Reduktion eines solchen mittleren Ortes auf den scheinbaren sind diese Glieder also wegzulassen. Will man dagegen umgekehrt einen durch Anschluß an einen Fixstern beobachteten scheinbaren Ort eines Wandelgestirnes *vollständig* vom Einfluß der Fixsternaberration befreien, so muß man diese Glieder mitnehmen; sie sind zwar, außer in der Nähe des Poles, klein und werden daher häufig vernachlässigt, aber sie sind für die Wandelgestirne in verschiedenen Punkten der scheinbaren Bahn von verschiedener Größe und daher von Einfluß auf die Bahn; sie müssen also bei scharfen *ersten* Bahnbestimmungen (nur bei solchen kommt diese Reduktion in Frage) berücksichtigt werden, wozu unten die Mittel angegeben werden.

Zur leichteren Berechnung der Formeln 5) setzt man:

$$\begin{aligned} C &= -\,20''.47 \cos\odot \cos\varepsilon \\ D &= -\,20.47 \sin\odot \\ c &= \cos\alpha \sec\delta \\ d &= \sin\alpha \sec\delta \\ c' &= \operatorname{tg}\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta \\ d' &= \cos\alpha \sin\delta \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} h \sin H &= -\,20''.47 \cos\odot \cos\varepsilon \\ h \cos H &= -\,20.47 \sin\odot \\ i &= -\,20.47 \cos\odot \sin\varepsilon \end{aligned}$$

und erhält dann:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= c\,C + d\,D = h \sin(H + \alpha) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= c'\,C + d'\,D = h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta\,, \end{aligned} \qquad 6)$$

wenn von den in [...] gesetzten Gliedern einstweilen abgesehen wird. Man kann von der einen oder der anderen Form Gebrauch machen; in der Regel benutzt man für Fixsterne, wo die c, d, c', d' für längere Zeit als konstant angenommen werden können, die Form $cC + dD$, ...; für Wandelgestirne zieht man dagegen die andere Form vor, weil man dann der Berechnung von c, ... für jeden Ort überhoben ist. Die vom Gestirnsort unabhängigen, aber mit der Zeit veränderlichen Größen C, D bzw. h, H, i werden für jeden Tag des Jahres in den Ephemeridensammlungen mitgeteilt und können auch leicht in Tafeln gebracht werden, entweder mit dem Argument $\odot$ oder bequemer für die Tage des »annus fictus«. (Siehe »Tafeln« Nr. XXXIb.)

Den von der Sonnenlänge unabhängigen nahezu konstanten und nur vom Sternort abhängigen Gliedern [...] kann man leicht dieselbe Form geben:

$$\begin{aligned} [\alpha' - \alpha] &= h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sec\delta \\ [\delta' - \delta] &= h_0 \cos(H_0 + \alpha) \sin\delta + i_0 \cos\delta\,. \end{aligned} \qquad 7)$$

Die Größen H_0, h_0, i_0 entnimmt man folgendem Täfelchen:

	$\log h_0$	H_0	i_0
1800	9.534	$351^\circ.3$	$-\,0''.022$
1900	9.534	349.7	$-\,0.026$
2000	9.534	348.1	$-\,0.030$

das mit den in den Formeln 2) angegebenen Werten von I' berechnet ist.

Tägliche Aberration in Rektaszension und Deklination. Diese wird hervorgerufen durch die Drehung der Erde um ihre Achse; in dem Koordinatensystem, dessen Z-Achse mit dieser Rotationsachse der Erde zusammenfällt, dessen XY-Ebene also im Erdäquator liegt; legen wir die X-Achse noch durch den Frühlingspunkt, dann werden die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche, der um ϱ vom Erdmittelpunkt entfernt ist, dessen geozentrische Breite φ ist, und der momentan die Sternzeit ϑ zählt:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi \cos\vartheta \\ y &= \varrho \cos\varphi \sin\vartheta \\ z &= \varrho \sin\varphi\,, \end{aligned}$$

denn ϑ ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Man hat also:

$$\frac{dx}{dt} = -\varrho \cos\varphi \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \varrho \cos\varphi \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

$\frac{d\vartheta}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde, die in der von uns oben eingeführten Zeiteinheit, dem mittleren Sonnentag, auszudrücken ist. Da in einem Sterntage die Bewegung $360 \times 60 \times 60$ Bogensekunden beträgt und 1 mittlerer Tag = 1.002 737 909 Sterntage ist (siehe Nr. 15 Seite 37), so ist

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 360 \times 60 \times 60 \times 1.002\,738\,9 \text{ Bogensekunden.}$$

Der Radius ϱ der Erde, die hier als Kugel angenommen werden kann, ist in astronomischen Einheiten auszudrücken. Da dieser Radius in der Entfernung 1 unter dem Winkel 8″.80 (Sonnenparallaxe) gesehen wird, so ist

$$\varrho = \sin 8''.80 = \frac{8.80}{206\,264.8}.$$

Trägt man diese Zahlenwerte in obige Ausdrücke für die Geschwindigkeiten und diese und den oben abgeleiteten Wert von μ in die Hauptformeln 1) ein, so wird daraus nach leichter Reduktion:

$$\alpha' - \alpha = \left(\frac{8.80}{206\,264.8}\, 1\,296\,000 \times 1.002\,737\,9 \times 0.005\,770\right)'' \cos\varphi \cos(\vartheta - \alpha) \sec\delta$$
$$\delta' - \delta = \left(\frac{8.80}{206\,264.8}\, 1\,296\,000 \times 1.002\,737\,9 \times 0.005\,770\right)'' \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \sin\delta.$$

Somit ergeben sich nach Ausrechnung des Zahlenausdruckes für die tägliche Aberration in α und δ folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0''.320 \cos\varphi \cos(\vartheta - \alpha) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= 0.320 \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \sin\delta. \end{aligned} \qquad 8)$$

Diese Korrektionen werden, als vom Beobachtungsort abhängig, stets bereits vom Beobachter angebracht; die von ihm mitgeteilten scheinbaren Örter sind also für tägliche Aberration schon korrigiert.

27. Die Planetenaberration und ihre Verbindung mit der Fixsternaberration. Während, wie oben auseinandergesetzt, bei Fixsternen nur die Fixsternaberration den Unterschied zwischen dem scheinbaren und dem wahren Ort bedingt, muß bei den Körpern des Sonnensystems, die sich rasch bewegen, außerdem dem Umstande Rechnung getragen werden, daß der beobachtete Ort nicht der Beobachtungszeit t entspricht, sondern einer Zeit, die um die Aberrationszeit früher liegt, daß dieser Ort aber von der Erde zur Zeit t gesehen wird. Die Aberrationszeit (auch Lichtzeit genannt) ist:

$$\begin{aligned} Ab. &= 498^{s}5 \times \Delta \qquad (\log 498^{s}5 = 2.69767) \\ &= 0^{d}005770 \times \Delta \qquad (\log 0.005770 = 7.76118 - 10) \end{aligned}$$

wobei Δ die Entfernung des Gestirnes von der Erde, ausgedrückt in astronomischen Einheiten, bedeutet. Je nachdem nun die Entfernung Δ bekannt oder unbekannt ist, hat man eine der folgenden drei Methoden zur Anwendung zu bringen. (Gauß, Theoria motus art. 118.) Dieselben ergeben sich unmittelbar aus den früheren Erläuterungen und berücksichtigen gleichzeitig beide Arten von Aberration.

1. Man erhält aus einem scheinbaren Ort, gemessen zur Zeit t, einen wahren dadurch, daß man ihn von der Fixsternaberration befreit; dies ist dann der wahre Ort, gehörig zur Zeit $t - Ab.$ und gesehen von dem zu t gehörigen Erdort. Rechnet man mit solchen Örtern eine Bahn unter Zugrundelegung der zu t gehörigen Erdörter, so wird man, sobald in erster Näherung die Distanzen Δ bekannt geworden sind, von den Beobachtungszeiten t die Lichtzeiten in Abzug bringen und mit diesen reduzierten Zeiten die Rechnung zu Ende führen; man erhält dann die Bahn unter voller Berücksichtigung der Aberration. Der Vorzug dieser Methode ist, daß man die Erdörter und alle davon abhängigen Größen nur für die Zeiten t zu berechnen braucht; sie empfiehlt sich besonders bei ersten Bahnbestimmungen, wo über die Distanzen vorher noch nichts bekannt ist und setzt offenbar nur voraus, daß man die Distanzen erhält, bevor es nötig ist, von den reduzierten Zeiten Gebrauch zu machen.

2. Man erhält nach dem oben bewiesenen Hauptsatz aus einem scheinbaren zur Zeit t gehörigen Ort einen wahren dadurch, daß man den ungeänderten Ort der Zeit $t - Ab.$ zuschreibt; es ist dies dann der wahre zur Zeit $t - Ab.$ gehörige Ort, gesehen von dem zur Zeit $t - Ab.$ gehörigen Erdort. Bei Bahnbestimmungen wird man von dieser Methode nur dann Gebrauch machen können, wenn aus einer vorangegangenen Bahnbestimmung, die man etwa mit völliger Vernachlässigung der Aberration durchgeführt hat, die Distanzen so genähert bekannt geworden sind, als es zur Berechnung der Lichtzeiten erforderlich ist. Dann bietet diese Methode die größte Bequemlichkeit, indem die Örter selbst ungeändert bleiben und die Erdörter von vornherein für die Zeiten $t - Ab.$ berechnet werden. Außerdem aber macht man von ihr fast ausschließlich Gebrauch, wenn es sich darum handelt, Beobachtungen mit dem Resultate einer Rechnung, also einer Ephemeride, zu vergleichen. Gibt eine solche wahre Örter (wie es fast immer der Fall ist), so kann man die beobachteten scheinbaren Örter direkt mit ihr vergleichen, wenn man statt der Beobachtungszeiten die um die Lichtzeiten gekürzten nimmt; denn für diese letzteren sind die scheinbaren Örter die wahren.

3. Man erhält aus einem scheinbaren zur Zeit t gehörigen Ort einen wahren dadurch, daß man zu ihm die geozentrische in der Lichtzeit $Ab.$ ausgeführte Bewegung addiert; dieser korrigierte Ort ist der wahre für die Zeit t, gesehen von dem zu t gehörigen Erdort, wie unmittelbar aus dem Hauptsatz folgt. Diese Methode ist die unbequemste, weil sie nicht nur die Kenntnis der Distanz, sondern auch die der geozentrischen Bewegung voraussetzt, welch letztere bei Bahnbestimmungen nur angenommen werden kann, wenn eine große Zahl von Beobachtungen zur Verfügung steht. Man wird daher auf diese Methode nur reflektieren, wenn es erforderlich ist, die Zeiten t

beizubehalten. — Außerdem wird man von dem Prinzip dieser Methode nur Gebrauch machen, wenn es sich darum handelt, eine Ephemeride *scheinbarer* Örter zu rechnen, die also mit ungeänderten Zeiten direkt mit der Beobachtung vergleichbar sein sollen. Hat man nämlich eine Ephemeride *wahrer* Örter für bestimmte äquidistante Zeitmomente berechnet, so erhält man daraus die scheinbaren Örter für dieselben Zeiten, wenn man aus der Ephemeride die Örter für die Zeitmomente $t - \Delta b$. interpoliert. Ist m die tägliche Bewegung in einer Koordinate, so rechnet man also nach:

$$\text{Scheinbarer Ort für } t = \text{Wahrer Ort für } t - 0.005\,770\,\Delta \cdot m .$$

Die letzte Formel gibt noch Anlaß zu einer Bemerkung betreffs der Aberration der Sonne; für diese ist in Länge:

$$m = \frac{d\odot}{dt} = \frac{\cos\varphi}{R^2}\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi R}\,(1 + \sin\varphi\,\cos(\odot - \Gamma))\;3548''.193$$

und $\Delta = R$, somit:

$$\text{Scheinbare Sonne} = \text{Wahre Sonne} - \frac{0.005770}{\cos\varphi}\,3548''.193\,(1 + \sin\varphi\,\cos(\odot - \Gamma))$$

oder

$$\text{Scheinbare Sonne} = \text{Wahre Sonne} - 20''.47 - 0''.343\,\cos(\odot - \Gamma)\,. \qquad 9)$$

Dies ist dieselbe Formel wie 4), wo wir nur die Fixsternaberration betrachteten. In der Tat kann bei der Sonne die Planetenaberration nichts ausmachen, da sie in bezug auf die bewegt gedachte Erde ruht, also als Fixstern figuriert. Wollte man umgekehrt die Erde als ruhend betrachten, so würde offenbar die Fixsternaberration in Wegfall kommen und nur die Planetenaberration zu berücksichtigen sein, was direkt zur Formel 9) führt.

Bei der Sonne kommt also entweder die eine oder die andere Aberrationswirkung in Wegfall, je nachdem wir eine bewegte Erde oder eine bewegte Sonne annehmen; das Resultat ist für beide Betrachtungsweisen dasselbe.

Abschnitt VII.

Zusammenwirkung von Präzession, Nutation und Aberration.

28. Im Fall der gewöhnlichen Sterne. Um den auf das mittlere Äquinoktium eines Jahresanfanges bezogenen Ort eines Gestirnes in einen wahren für ein Datum in diesem Jahr zu verwandeln, hat man ihm Präzession und Nutation nach den Formeln XV oder XVI (Seite 81) hinzuzufügen; die Überführung dieses wahren Ortes in den scheinbaren wird durch die Formeln 6) (Seite 90) bewirkt. Bei *Fixsternen*, die den Polen nicht zu nahe stehen, werden beide Operationen gewöhnlich mitsammen vollzogen, indem man sich zur Überführung eines mittleren Ortes für den Jahresanfang auf den *scheinbaren* für ein Datum desselben Jahres der Formeln bedient (Reduktion auf den scheinbaren Ort, Red. ad l. app.):

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + E + [A'a + B'b] \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' \qquad + [A'a' + B'b'] \end{aligned} \qquad 1)$$

oder:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= f + g \sin(G+\alpha) \operatorname{tg}\delta + h \sin(H+\alpha) \sec\delta + [f' + g' \sin(G'+\alpha) \operatorname{tg}\delta] \\ \delta' - \delta &= \quad g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin\delta + i \cos\delta + [g' \cos(G'+\alpha)]. \end{aligned} \qquad 2)$$

Bei Berechnung der Ephemeriden von Planeten und Kometen, die zur Vergleichung mit Beobachtungen dienen sollen, läßt man die Aberrationsglieder weg, berechnet also nur den wahren Ort, da die beobachteten scheinbaren Örter für die um die Aberrationszeit gekürzte Beobachtungszeit zu wahren Örtern werden, die also unmittelbar mit der Ephemeride verglichen werden können.

Ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d. h. ein beobachteter scheinbarer Ort auf den mittleren des Jahresanfangs überzuführen, so hat man den nach 1) oder 2) berechneten Reduktionsgrößen nur das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben (Reduktion auf den Jahresanfang). Verwandelt man scheinbare Planeten- und Kometenörter dadurch in wahre, daß man von der Beobachtungszeit die Lichtzeit abzieht, dann besteht die Reduktion auf den Jahresanfang nur aus den Gliedern

$$\begin{aligned} -(Aa + Bb + E) &= -(f + g \sin(G+\alpha) \operatorname{tg}\delta) \\ -(Aa' + Bb') &= -g \cos(G+\alpha). \end{aligned}$$

29. Verfahren bei Polsternen. Bei Sternen, welche den Polen nahe stehen, für welche also $\sec\delta$ und $\operatorname{tg}\delta$ große Zahlen werden, genügen die in voriger Nummer abgeleiteten einfachen Formeln nicht. Abgesehen davon, daß bei ihnen die Glieder $[A'a + B'b]$ nicht übergangen werden dürfen, da sie wegen des in ihnen auftretenden Faktors $\operatorname{tg}\delta$ Merkliches geben, dürfen auch die Glieder zweiter Ordnung der Aberration, also in der Entwicklung

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2} \Delta\varepsilon^2 + \frac{d^2\alpha}{d\lambda\, d\varepsilon} \Delta\lambda\, \Delta\varepsilon + \cdots,$$

die mit $\Delta\lambda^2$, $\Delta\varepsilon^2$, $\Delta\lambda \cdot \Delta\varepsilon$ multiplizierten Glieder nicht vernachlässigt werden; ferner werden auch die Glieder merklich, die dadurch entstehen, daß man bei der Berechnung

der Aberration den mittleren Ort verwendet, statt wie es sein sollte den wahren (also Glieder die vom Produkt der Aberration in die Nutation abhängen). Man kann diese Glieder entwickeln und in einfache Tafeln bringen, bequemer erscheint es aber immerhin, namentlich wenn Tafeln nicht zur Hand sind, die umständliche Rechnung durch Anwendung der Methode von *Fabritius* zu vermeiden.

Führt man statt der Koordinaten α, δ für den Jahresanfang die rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta\cos\alpha \\ y &= \cos\delta\sin\alpha \\ z &= \sin\delta \end{aligned}$$

ein, so wird

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\sin\alpha\cos\delta\,\Delta\alpha - \cos\alpha\sin\delta\,\Delta\delta + \cdots \\ \Delta y &= \quad\cos\alpha\cos\delta\,\Delta\alpha - \sin\alpha\sin\delta\,\Delta\delta + \cdots \end{aligned} \qquad 3)$$

Versteht man unter $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die nach den gewöhnlichen Formeln 1) oder 2) berechneten Reduktionen auf den scheinbaren Ort, so stellen Δx, Δy die Reduktionen auf den scheinbaren Ort für die rechtwinkligen Koordinaten dar und zwar genügen zu ihrer Berechnung die angeschriebenen Glieder erster Ordnung, da hier keine vergrößernden Faktoren vorkommen.

Beziehen sich α', δ', x', y' auf den scheinbaren Ort, so wird:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha'\cos\delta' = x + \Delta x = \cos\alpha\cos\delta + \Delta x \\ y' &= \sin\alpha'\cos\delta' = y + \Delta y = \sin\alpha\cos\delta + \Delta y \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \cos\alpha'\cos\delta' &= \cos\alpha\cos\delta + \Delta x \\ \sin\alpha'\cos\delta' &= \sin\alpha\cos\delta + \Delta y\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) &= -\sin\alpha\,\Delta x + \cos\alpha\,\Delta y \\ \cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) &= \quad\cos\alpha\,\Delta x + \sin\alpha\,\Delta y + \cos\delta \end{aligned} \qquad 4)$$

und mit Rücksicht auf 3)

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\cos\delta\,\Delta\alpha}{\cos\delta - \sin\delta\,\Delta\delta}$$

oder

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\Delta\alpha}{1 - \operatorname{tg}\delta\,\Delta\delta}\,. \qquad 5)$$

Multipliziert man die erste Gleichung in 4) mit $\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ und die zweite mit $\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ und addiert, so kommt

$$\cos\delta' = \cos\delta + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}\left(\Delta x\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) + \Delta y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\right)$$

oder nach Eintragung der Werte von Δx und Δy:

$$\cos\delta' - \cos\delta = \cos\delta\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\cdot\Delta\alpha - \sin\delta\cdot\Delta\delta\,.$$

Ersetzt man hier $\cos\delta' - \cos\delta$ durch

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$

oder durch

$$-(\delta'-\delta)\sin\delta\,,$$

was bei der Kleinheit der Glieder gestattet ist, so folgt:

$$\delta' - \delta = \Delta\delta - \operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \cdot \Delta\alpha . \qquad 6)$$

Durch 5) und 6) erhält man die strengen Reduktionen auf den scheinbaren Ort. Beschränkt man sich auf die Mitnahme der Glieder zweiter Ordnung, so kann man durch Entwicklung von 5) und 6) erhalten

$$\alpha' - \alpha = \Delta\alpha + \operatorname{tg}\delta \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta\delta \cdot \sin 1''$$
$$\delta' - \delta = \Delta\delta - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}\delta \cdot \Delta\alpha^2 \cdot \sin 1'' .$$

Drückt man $\Delta\alpha$ in Zeitsekunden aus, so wird in Zahlen:

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)^s &= (\Delta\alpha)^s + [4.6856_{-10}] \operatorname{tg}\delta\, (\Delta\alpha)^s\, \Delta\delta \\ (\delta' - \delta)'' &= (\Delta\delta)'' - [6.7367_{-10}] \operatorname{cotg}\delta\, [(\Delta\alpha)^s]^2 .\end{aligned} \qquad 7)$$

30. Beispiele zu den Reduktionsrechnungen.

1. Die heliozentrischen Koordinaten eines Planeten

$$l_0 = 59^\circ\,10'\,31''.62 \qquad b_0 = +\,10^\circ\,21'\,15''.82 ,$$

die sich auf mittlere Ekliptik und Äquinoktium für 1860.0 beziehen, sind auf Ekliptik und Äquinoktium für 1900.0 zu übertragen.

Es kommen die Formeln VI (Seite 71):

$$l = l_0 + \left(p + \operatorname{tg} b \cos(\Pi - l) \frac{d(\pi)}{dt}\right) t$$
$$b = b_0 + \sin(\Pi - l) \frac{d(\pi)}{dt}\, t$$

zur Anwendung.

p, Π, $\frac{d(\pi)}{dt}$ sind entweder nach den Formeln (Seite 79) zu berechnen oder der Tafel XXX für 1880.0 zu entnehmen.

p	$= 50''.2519$	Π	$173^\circ\,46'.11$	$\Pi - l_0$	$114^\circ\,35'.58$
$\log \frac{d(\pi)}{dt}$	$= 9.67321$	l_0	$59\ 10.53$	b_0	$+\,10\ 21.26$

Man rechnet zuerst (l) und (b) genähert, indem man rechts statt l und b setzt l_0 und b_0:

$\operatorname{tg} b_0$	9.26176		$+\,50''.2519$	
$\cos(\Pi - l_0)$	9.61927_n	8.55424_n	$-\,0.0358$	
$\frac{d(\pi)}{dt}$	9.67321		$+\,50.2161 \times 40 = +\,33'\,28''.64$	
$\sin(\Pi - l_0)$	9.95870	9.63191	$+\,0.4285 \times 40 = +\,17.14$	
	$(l) = 59^\circ\,44'\ 0''.26$		$(b) = +\,10^\circ\,21'\,32''.96$	

$$\bar{l} = \tfrac{1}{2}(l_0 + (l)) = 59^\circ\,27'\,15''.94 \qquad \bar{b} = \tfrac{1}{2}(b_0 + (b)) = +\,10^\circ\,21'\,24''.39 .$$

Mit diesen Werten wird die Rechnung wiederholt:

Π $173^\circ 46'.11$
$\bar{l}$ $59\ 27.27$
$\Pi - \bar{l}$ $114\ 18.84$
$\bar{b}$ $+\ 10\ 21.41$

$\operatorname{tg} \bar{b}$	9.26187		$+\ 50.2519$
$\cos(\Pi - \bar{l})$	9.61462_n	8.54970_n	$-\ 0.0355$
$\frac{d(\pi)}{dt}$	9.67321		$+\ 50.2164 \times 40 = +\ 33'\ 28''.66$
$\sin(\Pi - \bar{l})$	9.95966	9.63287	$+\ 0.4294 \times 40 = +\ 17.18$
	$l = 59^\circ 44'\ 0''.28$		$b = +\ 10^\circ\ 21'\ 33''.00.$

Dadurch, daß man die erste Näherung genauer rechnet, als eigentlich nötig ist, erhält man eine Kontrolle.

2. Die Elemente des Kometen 1889 V

$\left.\begin{array}{rr} \omega_0 = & 343^\circ 47'\ 23''.39 \\ \Omega_0 = & 17\ 56\ 17.50 \\ i_0 = & 6\ 3\ 31.04 \end{array}\right\}$ Ekliptik und mittl. Äquin. 1890.0

sind auf Ekliptik und mittl. Äquin. 1900.0 zu übertragen.

Zur Anwendung kommen die Formeln VII (Seite 72).

Aus Tafel XXX entnimmt man für 1895.0:

$p = 50''.2552$, $\log \frac{d(\pi)}{dt}$ 9.67312, Π $173^\circ 54'.32$
Ω $17\ 56.29$

Erste Näherung:

$\operatorname{cotg} i$	0.97413	0.25712_n	$50''.2552$
$\sin(\Omega - \Pi)$	9.60987_n		$-\ 1.8077$
			$48.4475 \times 10 = +\ 8'\ 4''.47\ \Delta\Omega$
$\frac{d(\pi)}{dt}$	9.67312	9.63374	$+\ 0''.430 \times 10 = +\ 4''.30\ \Delta i$
$\cos(\Omega - \Pi)$	9.96062_n		
$\operatorname{cosec} i$	0.97655	0.25954	$+\ 1''.818 \times 10 = +\ 18''.18\ \Delta\omega$

$(\omega) = 343^\circ 47'\ 41''.57$
$(\Omega) = 18\ 4\ 21.97$
$(i) = 6\ 3\ 35.34$

Zweite Näherung: $\overline{\Omega} = 18^\circ 0'.33$ $\bar{i} = 6^\circ 3'.55$ $\overline{\Omega} - \Pi = 204^\circ 6'.01$

$\operatorname{cotg} i$	0.97409	0.25822_n	$50''.2552$
$\sin(\Omega - \Pi)$	9.61101_n		$-\ 1.8123$
			$48.4429 \times 10 = +\ 8'\ 4''.43\ \Delta\Omega$
$\frac{d(\pi)}{dt}$	9.67312	9.63351	$+\ 0.4300 \times 10 = +\ 4.30\ \Delta i$
$\cos(\Omega - \Pi)$	9.96039_n		
$\operatorname{cosec} i$	0.97652	0.26065	$+\ 1.8224 \times 10 = +\ 18.22\ \Delta\omega$

$\left.\begin{array}{rr} \omega = & 343^\circ 47'\ 41''.61 \\ \Omega = & 18\ 4\ 21.93 \\ i = & 6\ 3\ 35.34 \end{array}\right\}$ Ekliptik und mittl. Äquin. 1900.0

3. Der Ort des Fixsternes A. G. Christiania Nr. 1551

$$1875.0 \qquad \alpha = 9^h 47^m 10^s.36 \qquad \delta = +68^\circ 21' 11''.0$$

ist auf das mittl. Äquin. für 1906.0 zu übertragen. Wir wollen die Aufgabe auf mehrere Arten lösen.

a) Unter Anwendung der Formeln IX (Seite 73) entnimmt man aus Tafel XXX m und n für 1890.5:

$$m^s = 3.07216, \qquad \log n^s = 0.125973, \qquad \log n'' = 1.302064.$$

Erste Näherung:

$\alpha = 146^\circ 47' 35''.4$	$\sin\alpha$	9.73 8514	0.26 5832 $+ 3^s.07216$
$\delta = +68\ 21\ 11.0$	n^s	0.12 5973	$+ 1.84430$
	$\operatorname{tg}\delta$	0.40 1345	$+ 4.91646$
	n''	1.30 2064	$+ 2^m 32^s.41$
	$\cos\alpha$	$9.92\ 2570_n$	$1.22\ 4635_n - 16''.7739$
			$- 8' 39''.99$
	(α)	$9^h 49^m 42^s.77$	$(\delta) + 68^\circ 12' 31''.0$

Zweite Näherung:

$\bar\alpha = 9^h 48^m 26^s.56$	$\sin\bar\alpha$	9.73 4814	0.26 0537 $+ 3^s.07216$
$\bar\alpha = 147^\circ\ 6' 38''.4$	n^s	0.12 5973	$+ 1.82195$
$\bar\delta = +68\ 16\ 51.0$	$\operatorname{tg}\bar\delta$	0.39 9750	$+ 4.89411$
	n''	1.30 2064	$+ 2^m 31^s.717$
	$\cos\bar\alpha$	$9.92\ 4135_n$	$1.22\ 6199 - 16''.8345$
			$- 8' 41''.87$

$$1906.0 \qquad \alpha' = 9^h 49^m 42^s.077; \qquad \delta' = +68^\circ 12' 29''.13.$$

b) Hat man viele Örter von derselben Epoche t auf die nämliche Epoche t' zu übertragen, so lohnt es sich, nach einem Vorschlag von *Kreutz* die Formeln IX. so zu schreiben:

$$\alpha' = \alpha + [m^s(t' - t)] + [n^s(t' - t)] \sin\bar\alpha \operatorname{tg}\bar\delta$$
$$\delta' = \delta + [n''(t' - t)] \cos\bar\alpha;$$

dann kann man die Größen [...] ein für allemal berechnen. Im Berliner Jahrbuch findet man sie für die Hauptkatalogepochen t in jedem Jahrgang berechnet vor. Für obiges Beispiel stellt sich die Rechnung so:

$\bar\alpha = 9^h 48^m 27^s$	$\sin\alpha$	9.73479	$\cos\alpha$	$9.92\ 414_n$
$\bar\delta = +68^\circ 16' 50''$	$\operatorname{tg}\delta$	0.39974	$n''(t' - t)$	2.79 343
	$n^s(t' - t)$	1.61734		
		1.75187		$2.71\ 757_n$
		$+ 56^s.477$		
	$m^s(t' - t)$	$+ 1^m 35.237$		
		$+ 2\ 31.714$		$- 8' 41''.88$

$$1906.0 \qquad \alpha' = 9^h 49^m 42^s.074 \qquad + 68^\circ 12' 29''.12.$$

c) Die Anwendung der Formeln X (S. 74) wird hier besonders bequem, da in dem Katalog, dem der Sternort entnommen ist, die einjährige Präzession für 1875, die Var. saec. und das 3. Glied sich berechnet vorfinden; mit diesen Zahlen stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

$+ 4^s.9171 \times 31 = 2^m 32^s.430$	$- 16''.779 \times 31 = - 8' 40''.15$
$- 0.1435 \times \frac{31^2}{200} = - 0.689$	$- 0.386 \times \frac{31^2}{200} = - 1.85$
$+ 0.105 \times \left(\frac{31}{100}\right)^3 = + 0.003$	$+ 0.55 \times \left(\frac{31}{200}\right)^3 = + 0.02$
$2\ 31.744$	$- 8\ 41.98$

Ist wie hier und in der Mehrzahl der Fälle das dritte Glied unmerklich, dann wird man nach

$$\alpha' = \alpha + (t' - t)\left\{\text{Präz.} + \frac{t' - t}{2}\,\frac{\text{Var. saec.}}{100}\right\}$$

rechnen, wo $\{\ldots\}$ die Präzession für $\frac{t + t'}{2}$ ist. Rechnet man diese mit genäherten α und δ direkt, so kann man die Angaben des Kataloges auch entbehren. Ist die Präzession für t und t' bekannt, so ist das Mittel aus beiden die Präzession für $\frac{t + t'}{2}$. Im vorliegenden Fall wird:

$$\begin{aligned} + 4^s.9171 - 15.5 \times 0^s.001435 &= + 4^s.9171 - 0^s.0222 \\ + 4^s.8949 \times 31 &= + 2^m 31^s.741 \\ - 16''.779 - 15.5 \times 0''.00386 &= - 16''.779 - 0''.060 \\ - 16''.839 \times 31 &= -8' 42''.01. \end{aligned}$$

Die hier gefundenen Zahlen stimmen mit den in a) und b) nicht völlig überein; es rührt dies daher, daß die Präzessionsangaben des Kataloges mit den Struveschen Präzessionskonstanten berechnet sind, während wir dort die Newcombschen Werte zugrunde gelegt haben.

Die Berechnung der einjährigen Präzession, der Säkularvariation und des 3. Gliedes, die man ausführen muß, wenn im Katalog diese Angaben nicht gemacht sind oder nicht benutzt werden können, können durch Tafeln sehr erleichtert werden, von denen wir folgende nennen:

Becker, Tafeln zur Berechnung der Präzession. Annalen der Sternwarte Straßburg, Bd. II.

Downing, Precession Tables adapted to Newcombs value of the Precessional constant and reduced to the Epoch 1910.0. Edinburgh 1899.

Gould, Precession Tables. Ann. Observ. Argent. T. VIII.

Kloock, Tafel für das dritte Glied der Präzession. Publ. Sternwarte Kiel. Nr. V.

4. Der mittlere Ort für 1906.0

$$\alpha = 9^h 49^m 42^s.074 \qquad \delta = +\,68^\circ 12' 29''.12$$

soll in den scheinbaren für 1906 Februar 10, 12^h M. Z. Berlin verwandelt werden.

Man entnehme die f, g, ... dem Jahrbuch und ordne die Rechnung nach den Formeln 2) (Seite 94) in folgender Weise an:

$\operatorname{tg}\delta$	0.3981	G	$103^\circ\ 1'$	$\sec\delta$	0.4303		
$\sin(G+\alpha)$	9.9742_n	α	147 25	$\sin(H+\alpha)$	9.9952		
$\log g$	0.8598	H	311 5	$\log h$	1.2891	$\log i$	0.8035_n
$\cos(G+\alpha)$	9.5249_n	$G+\alpha$	250 26	$\cos(H+\alpha)$	9.1697_n	$\cos\delta$	9.5697
		$H+\alpha$	98 30	$\sin\delta$	9.9678		
	1.2321_n	δ	$+\,68^\circ 12'.5$		1.7146		
	0.3847_n				0.4266_n		0.3732_n

f	$-\ 3''.78$	$g\cos(G+\alpha)$	$-\ 2''.42$
$g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta$	$-\ 17.06$	$h\cos(H+\alpha)\sin\delta$	$-\ 2.67$
$h\sin(H+\alpha)\sec\delta$	$+\ 51.83$	$i\cos\delta$	$-\ 2.36$
	$+\ 30''.99$		$-\ 7.45$

Red. ad l. app. $\Delta\alpha = +\ 2^s.066$ $\qquad \Delta\delta = -\ 7''.45$

α app. $9^h 49^m 44^s.140$ $\qquad \delta$ app. $+\,68^\circ 12' 21''.67$.

5. Der scheinbare Ort des Planeten (121) Hermione 1902 Febr. 19 $7^h 41^m 44^s$ M. Z. Berlin α app. $= 9^h 3^m 48^s.61$, δ app. $= +\,25^\circ 51' 19''.8$ soll auf das mittlere Äquinoktium 1902.0 reduziert werden, wenn die Entfernung von der Erde Δ als bekannt angenommen werden kann:

$$\log\Delta = 0.45298.$$

Die Lichtzeit wird:

$\log\Delta$	0.45298
$\log 498^s.5$	2.69767
Lichtzeit	$1414^s.6 = 23^m 34^s.6$.

Für die Zeit $7^h 41^m 44^s - 23^m 35^s = 7^h 18^m 9^s =$ Febr. 19.30427 ist also der angegebene Ort ein wahrer, der nun noch durch Subtraktion von

$$\Delta\alpha = f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta \qquad \text{von } \alpha$$

und von

$$\Delta\delta = g\cos(G+\alpha) \qquad \text{von } \delta$$

auf das mittlere Äquinoktium 1902.0 zu bringen ist:

	$f = +\ 17''.26$	$\operatorname{tg}\delta$	1.0114	G	$43^\circ\ 6'$
$g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta$	$+\ 1.75$	$\sin(G+\alpha)$	8.2196	α	135 57
	$+\ 19''.01$	$\log g$	1.0114	$G+\alpha$	179 3
$\Delta\alpha$	$+\ 1^s.27$	$\cos(G+\alpha)$	9.9999_n	δ	$+\,25$ 51
$\Delta\delta$	$-\ 10''.3$		0.2424		
			1.0113_n		

1902 Febr. 19.30427 $\qquad \alpha = 9^h 3^m 47^s.34 \qquad \delta = +\,25^\circ 51' 30''.1$

(Mittl. Äquin. 1902.0).

Abschnitt VIII.

Die Parallaxe.

31. Parallaxe im allgemeinen. Wir werden uns hier mit dem Problem der Parallaxe nur so weit beschäftigen, als es für die Ausführung der Reduktion von Planeten- und Kometenbeobachtungen notwendig ist. Im allgemeinen versteht man unter Parallaxe den Unterschied der Richtungen, unter denen ein Punkt erscheint, wenn er von zwei verschiedenen Standpunkten aus beobachtet wird. Erscheint das Gestirn S von A aus in der Richtung AS, von B aus in der Richtung BS und zieht man BS' parallel AS, so ist der genannte Unterschied der Richtungen gleich dem Winkel SBS', der also Parallaxe heißt. Dieser Winkel ist gleich dem Winkel bei S und man kann daher Parallaxe auch definieren als den Winkel, unter dem am Gestirn die Verbindungslinie der Standpunkte erscheint. Ist die Entfernung AB gegen die Entfernung des Gestirnes verschwindend klein, so ist die Parallaxe Null und man braucht auf die Verschiedenheit des Standpunktes keine Rücksicht zu nehmen. Das ist der Fall bei den meisten Fixsternen, auch wenn man die Änderung des Standpunktes durch die jährliche Bewegung der Erde in Betracht zieht. Für die näheren Gestirne, die Körper des Sonnensystems, dagegen kommt schon die Änderung des Standpunktes auf der Oberfläche der Erde in Betracht. Um Beobachtungen dieser Gestirne, die von verschiedenen Beobachtungsorten aus vorgenommen wurden, miteinander vergleichen zu können, ist man übereingekommen, sie so zu reduzieren, als ob sie alle von einem bestimmten Punkte aus, dem Erdmittelpunkte, angestellt wären. Diese Reduktion der Beobachtungen auf den Erdmittelpunkt oder die Ermittelung der Parallaxe im engeren Sinne wird uns hier ausschließlich beschäftigen. Dabei darf die Erde nicht als Kugel vorausgesetzt werden; wir müssen deshalb einige Entwickelungen über das Erdellipsoid vorausschicken.

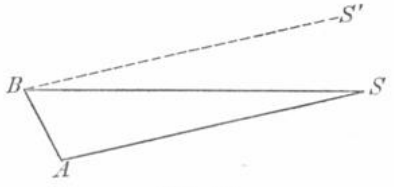


Fig. 19.

Die Oberflächenform der Erde kann man sich durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden denken. Nach der Bestimmung von Bessel sind die große und kleine Halbachse a und b dieser Ellipse von folgenden Dimensionen:

$$a = 6\,377\,397.15 \text{ Meter}$$
$$b = 6\,356\,078.96 \quad »$$

Die Zahl

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{299.15}$$

nennt man die Abplattung der Erde. Die Exzentrizität der erzeugenden Ellipse

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

steht mit der Abplattung in der Beziehung

$$e = \sqrt{1 - (1 - \alpha)^2} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}$$

oder umgekehrt

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}\,.$$

Um einen Ort auf der Erdoberfläche durch Koordinaten auf den Erdmittelpunkt zu beziehen, legen wir den Anfangspunkt eines Koordinatensystems in den Erdmittelpunkt, die XY-Ebene so in den Äquator, daß die X-Achse durch den Frühlingspunkt geht und die Y-Achse nach 90° Rektaszension; die Z-Achse fällt dann mit der Rotationsachse der Erde zusammen und zugleich mit der kleinen Achse des Erdellipsoides. Der Winkel, den die Meridianebene eines Ortes mit der ZX-Ebene bildet, ist dann der Stundenwinkel des Frühlingspunktes oder die Ortssternzeit θ. Bezeichnet man weiter die Entfernung des Ortes vom Erdmittelpunkt mit ϱ und den Winkel, den ϱ mit seiner Projektion auf den Äquator bildet mit φ', so werden die rechtwinkligen Koordinaten des Ortes:

$$x = \varrho \cos\varphi' \cos\theta$$
$$y = \varrho \cos\varphi' \sin\theta$$
$$z = \varrho \sin\varphi'\,.$$

Ehe wir an die Verwendung dieser Formeln gehen, muß gezeigt werden, wie ϱ und φ' aus bekannten Stücken berechnet werden können; wir betrachten zu dem Ende den Meridianschnitt durch den Beobachtungsort M, und führen dort ein ebenes rechtwinkliges System mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt der Erde, der ξ-Achse im Äquator und der η-Achse in der Rotationsachse ein. Dann ist:

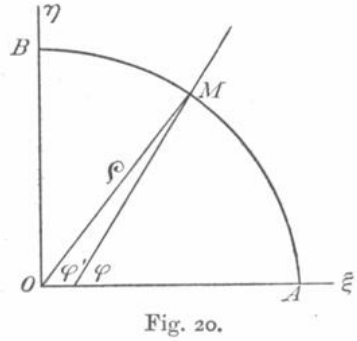


Fig. 20.

$$OA = a\,,\quad OB = b\,,\quad OM = \varrho\,,\quad AOM = \varphi'\,.$$

Errichtet man in M die Vertikale, so ist deren Winkel mit dem Äquator die geographische Breite oder Polhöhe: φ, welche gemessen werden kann; man wird also suchen, φ', welches die verbesserte Polhöhe oder die geozentrische Breite heißt, durch φ auszudrücken.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

folgt durch Differenziation:

$$\frac{2\xi}{a^2}\,d\xi + \frac{2\eta}{b^2}\,d\eta = 0$$

oder

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\eta}\,\frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi'\,.$$

Da aber

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\cot\varphi$$

ist, so folgt

$$\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi' = \cot\varphi$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = (1-\alpha)^2\operatorname{tg}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi \qquad 1)$$

oder in Zahlen:

$$\operatorname{tg}\varphi' = [9.997\,091\,6_{-10}]\operatorname{tg}\varphi.$$

Ferner kann man die Ellipsengleichung so schreiben:

$$\xi^2 = \frac{a^2}{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{\eta^2}{\xi^2}} = \frac{a^2}{1+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi'}\operatorname{tg}\varphi'^2}$$

woraus:

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg}\varphi'}};$$

also

$$\varrho = \xi\sec\varphi' = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi'-\varphi)}}. \qquad 2)$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) kann man φ' und ϱ einfach genug berechnen; man kann aber auch Reihenentwickelungen dafür ableiten und Tabellen aufstellen (Albrecht, Hilfstafeln zur geographischen Ortsbestimmung, 3. Aufl. Taf. 35[b]). In »Tafeln« Nr. XXXII findet man für die bedeutenderen Sternwarten diese Größen berechnet vor.

Gewöhnlich wird ϱ angegeben, indem man a als Einheit einführt. Das nach 1) und 2) berechnete ϱ bezieht sich auf die Meeresoberfläche; hat der Ort eine Seehöhe von h Metern, so ist dem ϱ in Einheiten des Äquatorialhalbmessers die Korrektion:

$$\frac{h}{6\,377\,397.15} = [3.19536_{-10}]\cdot h$$

oder dem $\operatorname{Log}\varrho$ die Korrektion

$$0.000\,000\,068\,1\cdot h$$

hinzuzufügen. —

Das Verhältnis der Einheit, in der wir hier ϱ ausgedrückt haben, zu der allgemeinen astronomischen Längeneinheit, der großen Halbachse der Erdbahn, ist gegeben durch π, wenn mit $\pi = 8''.80$ die Äquatorialhorizontalparallaxe der Sonne bezeichnet wird; es ist dies nämlich die Größe, unter welcher vom Mittelpunkte der Sonne aus der Halbmesser des Erdäquators erscheint, wenn die Sonne sich im Horizont eines Punktes des Erdäquators befindet. Es stellt somit

$$\varrho\sin\pi = \frac{\varrho\cdot\pi}{206\,264.8}$$

die Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt in astronomischen Einheiten dar, und die früher abgeleiteten Kordinaten von M in bezug auf den Erdmittelpunkt werden damit:

$$\begin{aligned} x &= \varrho\pi\sin 1''\cos\varphi'\cos\theta \\ y &= \varrho\pi\sin 1''\cos\varphi'\sin\theta \\ z &= \varrho\pi\sin 1''\sin\varphi'. \end{aligned} \qquad 3)$$

32. Parallaxe in Rektaszension und Deklination. Wir werden die Formeln hierfür nur unter der Voraussetzung ableiten, daß die Parallaxe so klein ist, daß sie

mit Differenzialen identifiziert werden darf. Dies ist für alle Körper des Sonnensystems der Fall mit Ausnahme des Mondes. Von diesem letzteren sehen wir also hier ab.

Wird ein Gestirn zur Ortssternzeit θ von dem Punkte M der Erdoberfläche aus in der Rektaszension α', der Deklination δ' und der Entfernung Δ' gesehen, so beziehen sich diese Koordinaten auf ein System, welches parallel dem früher eingeführten liegt und in dem nur der Anfangspunkt von O nach M verrückt worden ist. Sind α, δ, Δ die Koordinaten desselben Gestirnes in dem System mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt der Erde O, so stellen $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$, $\Delta - \Delta'$ die Parallaxen in diesen Koordinaten dar, in dem Sinne, wie sie an die gemessenen Örter angebracht werden müssen, um die auf den Erdmittelpunkt bezogenen zu erhalten. Kann man sie als Differenziale auffassen, so gelingt ihre Berechnung unmittelbar durch die Formeln 13) (Seite 16), wenn für dx, dy, dz die Verrückungen 3) des Anfangspunktes gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\alpha - \alpha' &= \frac{\varrho\pi \sin 1''}{\Delta' \cos\delta'} \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha') \\
\delta - \delta' &= -\frac{\varrho\pi \sin 1''}{\Delta'} \cos\varphi' \sin\delta' \cos(\theta - \alpha') + \frac{\varrho\pi \sin 1''}{\Delta'} \sin\varphi' \cos\delta' \qquad 4) \\
\Delta - \Delta' &= \varrho\pi \sin 1'' \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\theta - \alpha') + \varrho\pi \sin 1'' \sin\varphi' \sin\delta' .
\end{aligned}$$

Diese Formeln geben $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$, $\Delta - \Delta'$ in Teilen des Radius und es ist zu beachten, daß ϱ in Einheiten des Äquatorialhalbmessers der Erde, Δ und Δ' in astronomischen Einheiten zu verstehen sind und $\pi = 8''.80$ zu setzen ist. Um $\alpha - \alpha'$ und $\delta - \delta'$ in Sekunden zu erhalten, ist rechts mit $\sin 1''$ zu dividieren. Um die vielgebrauchten Formeln für die Anwendung bequemer zu gestalten, stehen mehrere Wege offen. Setzt man

$$\begin{aligned}
\beta \sin\gamma &= \sin\varphi' \\
\beta \cos\gamma &= \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha'),
\end{aligned}$$

so wird, gleich in Sekunden verwandelt, und zwar $(\alpha - \alpha')$ in Zeitsekunden:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta' \cdot (\alpha - \alpha')^s &= \left(\frac{\varrho\pi \cos\varphi'}{15}\right) \sin(\theta - \alpha') \sec\delta' \\
\Delta' \cdot (\delta - \delta')'' &= (\varrho\pi \sin\varphi') \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin\gamma},
\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

worin

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\gamma &= \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos(\theta - \alpha')}, \qquad \gamma < 180^\circ .
\end{aligned}\right\}$$

Die Größen $\frac{1}{15}\varrho\pi\cos\varphi'$ und $\varrho\pi\sin\varphi'$ kann man für jede Sternwarte ein für allemal berechnen. In »Tafel« Nr. XXXII findet man sie für die hauptsächlichsten Sternwarten zusammengestellt. Die dritte Formel in 4) gibt in astronomischen Einheiten:

$$\Delta - \Delta' = \varrho\pi \sin 1'' \sin\varphi' \frac{\cos(\gamma - \delta')}{\sin\gamma} .$$

Dieser Unterschied ist fast immer so klein, daß er nicht beachtet zu werden braucht; man kann daher in 5) Δ statt Δ' setzen, welch ersteres durch die Bahnelemente direkt bekannt wird. Ist Δ bekannt, so kann man durch 5) $(\alpha - \alpha')^s$ und

$(\delta - \delta')''$ fertig berechnen; ist es nicht bekannt, so pflegen die Beobachter die sogenannten parallaktischen Faktoren

$$\log [\Delta(\alpha - \alpha')^s] \quad \text{und} \quad \log [\Delta(\delta - \delta')'']$$

anzugeben, mittels welcher es nach bekannt gewordenem Δ leicht ist, die Parallaxen zu ermitteln.

Handelt es sich um die Berechnung vieler Parallaxen für ein und dieselbe Sternwarte, so kann man noch etwas einfacher verfahren. Tabuliert man sich nämlich mit dem Argumente: Stundenwinkel $= \theta - \alpha'$ die Größen

$$\begin{aligned} T &= \quad \varrho\pi \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha') \\ D &= -\varrho\pi \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha') \end{aligned}$$

etwa von 10^m zu 10^m, und rechnet ein für allemal die Konstante:

$$D' = \varrho\pi \sin\varphi',$$

so geben die Formeln 4) sofort:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot (\alpha - \alpha')^s &= \tfrac{1}{15} \cdot T \sec\delta' \\ \Delta \cdot (\delta - \delta')'' &= D \sin\delta' + D' \cos\delta'. \end{aligned} \qquad 6)$$

T und D kann man in *eine* Tafel bringen, da offenbar:

$$D \text{ für } \theta - \alpha' = T \text{ für } (\theta - \alpha') - 90^\circ.$$

Man kann also D mit dem Argument $(\theta - \alpha') - 90^\circ$ der Tafel für T entnehmen. Solche Tafeln finden sich auf jeder Sternwarte; im »Handwörterbuch der Astronomie« von Valentiner Band IV findet man eine Sammlung derselben.

Die dritte Formel 4) gibt in astronomischen Einheiten:

$$\Delta - \Delta' = -D \sin 1'' \cos\delta' + D' \sin 1'' \sin\delta'.$$

33. Parallaxe in Länge und Breite. Die eben abgeleiteten Formeln gelten auch für das Ekliptikalsystem, wenn man nur statt der Koordinaten des Beobachtungsortes im Äquatorialsystem ϱ, θ, φ' jene im Ekliptikalsystem, die wir mit ϱ, Δ, Φ bezeichnen wollen, einführt; diese letzteren ergeben sich aus den ersteren, die durch Sternzeit und verbesserte Breite bekannt sind, durch die gewöhnlichen Verwandlungsformeln 4) (Seite 19):

$$\left.\begin{aligned} \cos\Phi \cos\Delta &= \cos\varphi' \cos\theta \\ \cos\Phi \sin\Delta &= \cos\varphi' \sin\theta \cos\varepsilon + \sin\varphi' \sin\varepsilon \\ \sin\Phi \quad\;\; &= -\cos\varphi' \sin\theta \sin\varepsilon + \sin\varphi' \cos\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

oder 4^a) (Seite 20):

$$\left.\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin\varphi' \\ \sin m \cos M &= \cos\varphi' \sin\theta \\ \cos m \quad\;\; &= \cos\varphi' \cos\theta \\ \cos\Phi \cos\Delta &= \cos m \\ \cos\Phi \sin\Delta &= \sin m \cos(M - \varepsilon) \\ \sin\Phi \quad\;\; &= \sin m \sin(M - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Man hat hernach aus den Formeln 4) (Seite 104), wenn man auch noch α und δ durch λ und β ersetzt:

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda - \lambda')'' &= \frac{\varrho\pi \cos\Phi}{\cos\beta'} \sin(\Delta - \lambda') \\ \Delta'(\beta - \beta')'' &= -\varrho\pi \cos\Phi \sin\beta' \cos(\Delta - \lambda') + \varrho\pi \sin\Phi \cos\beta' \\ \Delta - \Delta' &= \varrho\pi \sin 1'' \cos\Phi \cos\beta' \cos(\Delta - \lambda') + \varrho\pi \sin 1'' \sin\Phi \sin\beta' . \end{aligned} \qquad 8)$$

Da diese Formeln fast nie zur Verwendung kommen, sollen sie nicht weiter verfolgt werden.

34. Korrektion für Sonnenbreite. Ein dem Problem der Parallaxe ganz ähnliches ist das der Wegschaffung der Sonnenbreiten, das wir daher gleich an dieser Stelle behandeln wollen. Bekanntlich sind die Sonnenbreiten B sehr kleine Winkel, die sich wenig über $1''$ erheben, bei exakter Rechnung aber doch nicht übergangen werden dürfen. Um nun hierbei nicht von den allgemeinen Formeln für beliebig große Breiten Gebrauch machen zu müssen, wodurch manche Ausdrücke unnötig kompliziert würden, schlägt man folgendes Verfahren ein, infolge dessen die Sonnenbreiten streng gleich Null gesetzt werden dürfen. Man korrigiert die beobachteten *Breiten* des Planeten oder Kometen so, als ob sie von der heliozentrischen Breite o der Erde aus angestellt wären, während sie tatsächlich von der heliozentrischen Breite $-B''$ der Erde aus angestellt sind, wenn mit B'' die Sonnenbreite bezeichnet wird. Ist R der Radiusvektor der Erde von der Sonne, dann wird der lineare Abstand der Erde von der Ebene der Ekliptik gleich $-R \sin B''$. Legt man durch ihn und den Planetenort eine (zur Ekliptik senkrechte) Ebene, nennt die gemessene Breite β', die dem Ort der Erde in der Ekliptik entsprechende β, die Entfernung des Planeten Δ, so hat man nach Gl. 13) (Seite 16) die infolge der Verschiebung $dz = -R \sin B''$ eintretende Änderung von β':

$$\beta - \beta' = -\frac{\cos\beta'}{\Delta} R \sin B''$$

oder wegen der Kleinheit von B'' und da hier immer $R = 1$ gesetzt werden darf:

$$\beta - \beta' = -\frac{B'' \cos\beta'}{\Delta} . \qquad 9)$$

Wird β' um diesen Betrag korrigiert, so hat man die von einem Punkt der Ekliptik aus gemessene Breite β und es kann infolge dessen die zugehörige Sonnenbreite Null gesetzt werden.

35. Übergang zum locus fictus. Wenn die Entfernung des Gestirnes von der Erde noch völlig unbekannt ist, wie stets vor ersten Bahnbestimmungen, ist es nach den eben abgeleiteten Formeln nicht möglich, den direkt gemessenen Ort von dem Einfluß der Parallaxe und der Sonnenbreite zu befreien. Wenn man dann die Parallaxe bis zur Kenntnisnahme der genäherten Entfernungen nicht ganz vernachlässigen will, kann man nach einem Vorschlage von Gauß (Theoria motus art. 72) folgenden Weg einschlagen, der gleichzeitig die Möglichkeit bietet, die Sonnenbreiten streng gleich Null setzen zu dürfen.

Wir setzen voraus, daß die beobachteten Koordinaten des Planeten in Länge und Breite: λ und β übergeführt seien und nennen die Entfernung des Gestirnes vom Beobachtungsort: Δ_0; ebenso habe man die geozentrischen Koordinaten des Beobachtungsortes M im Ekliptikalsystem nach den Formeln 7) ermittelt: Δ, Φ, $\varrho\pi \sin 1''$. Endlich seien die Sonnenkoordinaten vom Erdzentrum O aus: L_0, B_0, R_0, welches die direkt in den Ephemeriden stehenden Größen sind. Man führt nun den sogenannten »locus fictus« F ein, welches der Schnittpunkt der Visierlinie vom Beobachtungsort M nach dem Planeten mit der Ekliptik ist. Von diesem Punkt F aus wird die Sonnenbreite Null, die Koordinaten λ und β des Planeten bleiben ungeändert und nur dessen Entfernung von F wird eine andere, als von M aus; wir nennen sie Δ; die Koordinaten der Sonne ändern sich ebenfalls; wir nennen die von F aus gesehenen L, o, R. Führt man also F als fingierten Beobachtungsort ein, dann kann man λ und β beibehalten, kann die Sonnenbreite Null setzen und hat nur die Sonnenkoordinaten L_0 und R_0 um die Beträge $L - L_0$ und $R - R_0$ zu korrigieren und ferner zu beachten, daß die Beobachtungszeit für F um $(\Delta - \Delta_0)\,498^s5$ später anzusetzen ist als für M.

Um $L - L_0$, $R - R_0$, $\Delta - \Delta_0$ zu bestimmen, bedient man sich wieder am einfachsten der Formeln 13) (Seite 16) und hat hierzu zuerst die Verschiebung von F gegen O aufzustellen. Da nun die Koordinaten von O in bezug auf M:

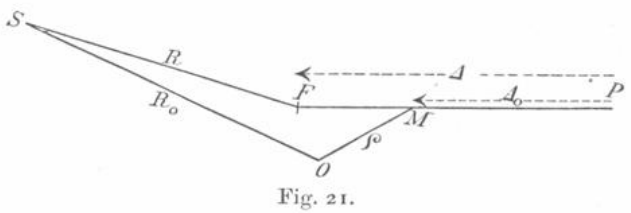


Fig. 21.

$$-\varrho\pi \sin 1'' \cos\Delta \cos\Phi, \qquad -\varrho\pi \sin 1'' \sin\Delta \cos\Phi, \qquad -\varrho\pi \sin 1'' \sin\Phi$$

und die Koordinaten von F in bezug auf M

$$-(\Delta - \Delta_0)\cos\lambda\cos\beta, \qquad -(\Delta - \Delta_0)\sin\lambda\cos\beta, \qquad -(\Delta - \Delta_0)\sin\beta$$

sind, so sind die Koordinaten von F in bezug auf O:

$$\begin{aligned}
&\varrho\pi \sin 1'' \cos\Delta \cos\Phi - (\Delta - \Delta_0)\cos\lambda\cos\beta\\
&\varrho\pi \sin 1'' \sin\Delta \cos\Phi - (\Delta - \Delta_0)\sin\lambda\cos\beta\\
&\varrho\pi \sin 1'' \sin\Phi \qquad\quad - (\Delta - \Delta_0)\sin\beta
\end{aligned}$$

und diesen Verschiebungen des Anfangspunktes der Zählung der Sonnenkoordinaten entsprechen nach den zitierten Formeln folgende Änderungen derselben:

$$L - L_0 = \frac{1}{R_0 \cos B_0}\left(\varrho\pi \sin 1'' \cos\Phi \sin(L_0 - \Delta) - (\Delta - \Delta_0)\cos\beta \sin(L_0 - \lambda)\right) 206264''.8$$

$$\begin{aligned}
-B_0 = {} & \frac{\sin B_0}{R_0}\left(\varrho\pi \sin 1'' \cos\Phi \cos(L_0 - \Delta) - (\Delta - \Delta_0)\cos\beta\cos(L_0 - \lambda)\right) 206264''.8 -\\
& - \frac{\cos B_0}{R_0}\left(\varrho\pi \sin 1'' \sin\Phi - (\Delta - \Delta_0)\sin\beta\right) 206264''.8 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R - R_0 = {} & -\cos B_0\left(\varrho\pi \sin 1'' \cos\Phi \cos(L_0 - \Delta) - (\Delta - \Delta_0)\cos\beta\cos(L_0 - \lambda)\right)\\
& - \sin B_0\left(\varrho\pi \sin 1'' \sin\Phi - (\Delta - \Delta_0)\sin\beta\right).
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Ausdrücke haben wir bereits in Sekunden verwandelt. Da B_0 den Betrag von 1″ nur wenig überschreitet, kann man immer $\cos B_0 = 1$ und $\sin B_0 = B_0 \sin 1''$ setzen. Ferner erkennt man, daß das erste Glied der zweiten Gleichung von der zweiten Ordnung ist, also wegbleiben kann; diese Gleichung gibt dann:

$$\Delta - \Delta_0 = -\frac{R_0}{\sin\beta}\left(B_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi\right)\sin 1''. \qquad 10)$$

Wird dies in die erste und dritte Gleichung eingetragen, so folgt unter Beachtung, daß das letzte Glied der dritten Gleichung ebenfalls von der zweiten Ordnung ist, also hier übergangen werden kann:

$$L - L_0 = \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\sin(L_0 - \Delta) + \frac{\sin(L_0-\lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left(B_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi\right) \qquad 11)$$

$$R - R_0 = -R_0\left(\frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\cos(L_0-\Delta) + \frac{\cos(L_0-\lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left(B_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi\right)\right)\sin 1''.$$

$\pi = 8''.80$ und B_0 sind in Bogensekunden einzusetzen. Da in den Jahrbüchern $\log R_0$ angegeben ist, so ist es zweckmäßig, einen Ausdruck für $\log R - \log R_0$ aufzustellen. Nennt man die kleine Größe

$$\left(\frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\cos(L_0-\Delta) + \frac{\cos(L_0-\lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left(B_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi\right)\right)\sin 1''$$

$\nu \sin 1''$, so wird

$$R - R_0 = -R_0\,\nu\sin 1''$$

oder

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \nu\sin 1''$$

oder

$$\operatorname{Log} R - \operatorname{Log} R_0 = -M\nu\sin 1'', \qquad \operatorname{Log} M = 9.63778_{-10},$$

wo M der Modulus der Briggsschen Logarithmen ist. Drückt man $\operatorname{Log} R - \operatorname{Log} R_0$ in Einheiten der 7. Dezimale aus, so wird:

$$\operatorname{Log} R - \operatorname{Log} R_0 = -[1.32335]\nu. \qquad 12)$$

Mittels 10) erhält man die Korrektion der Beobachtungszeit $(\Delta - \Delta_0)\,498^s.5$, die aber in den meisten Fällen so klein ist, daß sie übergangen werden kann. Wenn $\beta = 0$ ist oder überhaupt, wenn die Breite des beobachteten Gestirnes sehr klein ist, dann kann offenbar dieses Verfahren nicht zur Anwendung gelangen.

Wir stellen die Formeln für die Reduktion auf den locus fictus nochmals zusammen. Die Sonnenkoordinaten L_0 und R_0 und die Beobachtungszeit sind zu korrigieren um:

$$L - L_0 = \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\sin(L_0-\Delta) + \frac{\sin(\lambda - L_0)}{\operatorname{tg}\beta}\left\{\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi - B_0\right\}$$

$\operatorname{Log} R - \operatorname{Log} R_0 = -[1.32335]\nu$ in Einheiten der 7. Dezimale

$$\nu = \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\cos(L_0-\Delta) - \frac{\cos(\lambda - L_0)}{\operatorname{tg}\beta}\left\{\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi - B_0\right\} \qquad 13)$$

$$\Delta t = \frac{R_0}{\sin\beta}\left\{\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi - B_0\right\}[2.44675_{-10}] \text{ in Bruchteilen des Tages.}$$

Da man nur selten ganz scharfe erste Bahnbestimmungen auszuführen hat, wird von diesen Formeln nur wenig Gebrauch gemacht. Wir wollen sie durch Berechnung des »locus fictus« für drei Planetenörter erläutern, die wir später einer Bahnbestimmung zugrunde legen werden. Die drei Beobachtungen des Planeten (433) Eros

			α app.	δ app.	
1898 Aug. 15	$12^h23^m\ 8^s$	M.Z. Kiel	$21^h24^m38^s.73$	$-6°23'14''.8$	A.N. 147,141
Aug. 26	9 55 7	» Kiel	21 5 9.23	−6 17 51.5	» 147,254
Sept. 6	9 14 51	» Straßburg	20 49 14.39	−6 19 17.3	» 147,281

wurden zunächst auf das mittlere Äquinoktium 1898.0 gebracht und von der Fixsternaberration befreit (nach den Formeln 2) Seite 94). Die Reduktionen auf den Jahresanfang ergaben sich zu:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Aug. 15	$-4^s.40$	$-19''.97$
Aug. 26	−4.43	−19.21
Sept. 6	−4.36	−18.41

Die Beobachtungszeiten wurden in mittlere Zeit Berlin und in Bruchteile des Tages verwandelt und mit diesen die Sonnenörter aus dem Berliner Jahrbuch entnommen. Man erhielt so die Zahlen folgender Tabelle:

M. Z. Berlin	α 1898.0	δ 1898.0	L_0 1898.0	$\log R_0$	B_0
1898 Aug. 15.52508	$321°\ 8'35''.0$	$-6°23'34''.8$	$143°\ 5'27''.13$	0.005 3263	$-0''.39$
26.42229	316 16 12.0	−6 18 10.7	153 35 43.79	0.004 3185	−0.24
37.40094	312 17 30.4	−6 19 35.8	164 13 32.25	0.003 1708	+0.33

Die Verwandlung der Äquatorialkoordinaten α und δ in Länge und Breite mit der mittleren Schiefe der Ekliptik für 1898.0: $\varepsilon = 23°27'8''.98$ ergab nach den Formeln 4[a]) (Seite 20)

	λ 1898.0	β 1898.0	$\operatorname{tg}\beta$
Aug. 15.52508	$321°28'\ 2''.41$	$+\ 8°23'\ 40''.08$	9.168 9936
26.42229	316 49 9.20	+ 9 56 48.63	9.243 9567
37.40094	312 57 17.54	+11 2 28.99	9.290 3240

Nun folgt die Berechnung des locus fictus nach den Formeln 7) und 13).

	Aug. 15 Kiel	Aug. 26 Kiel	Aug. 37 Straßburg
m. Ortszeit	$12^h23^m\ 8^s$	$9^h55^m\ 7^s$	$9^h14^m51^s$
Taf. IV	+2 2	+1 38	+1 31
St.-Z. m. M.	9 35 33	10 18 55	11 2 18
Orts-St.-Z. θ	22 0 43	20 15 40	20 18 40
» » θ	$330°10'.8$	$303°55'.0$	$304°40'.0$
$\log\varrho$	9.9990	9.9990	9.9992
φ'	$+54°9'.6$	$+54°9'.6$	$+48°23'.6$

$\sin\varepsilon \sin\theta$	9.6966_n	9.9190_n	9.9151_n
$9.5998 \cos\theta$	9.9383	9.7466	9.7550
$\cos\varepsilon \sin\varphi'$	9.9089	9.9089	9.8738
$9.9626 \cos\varphi'$	9.7675	9.7675	9.8221
$\cos\varphi' \sin\theta$	9.4641_n	9.6865_n	9.7372_n
$\cos\varphi' \sin\theta \cos\varepsilon$	9.4267_n	9.6491_n	9.6998_n
$\sin\varphi' \sin\varepsilon$	9.5087	9.5087	9.4736
$\cos\Phi \sin\mathcal{A}$	8.7444	9.0903_n	9.3083_n
$\cos\Phi \cos\mathcal{A}$	9.7058	9.5141	9.5771
$\cos\mathcal{A}$	9.9974	9.9712	9.9447
$\mathcal{A}$	$+ 6^\circ 14.'2$	$- 20^\circ 39.'0$	$- 28^\circ 18.'0$
$-\cos\varphi' \sin\theta \sin\varepsilon$	9.0639	9.2863	9.3370
$\sin\varphi' \cos\varepsilon$	9.8715	9.8715	9.8364
$\sin\Phi$	9.9343	9.9719	9.9559
$\cos\Phi$	9.7084	9.5429	9.6324
Φ	$59^\circ 16.'3$	$69^\circ 34.'5$	$64^\circ 36.'0$
$\pi = 8.''80$ $\log\pi$ 0.9445 — $\frac{\varrho\pi}{R_0}$	0.9382	0.9392	0.9405
$\frac{\varrho\pi}{R_0} \sin\Phi$	$+ 7.''46$	$+ 8.''14$	$+ 7.''88$
$- B_0$	+ 0.39	+ 0.24	− 0.33
$\{\ldots\}$	+ 7.85	+ 8.38	+ 7.55
$\log\{\ldots\}$	0.8949	0.9232	0.8779
$\operatorname{tg}\beta$	9.1690	9.2440	9.2903
$\lambda - L_0$	$178^\circ 22.'6$	$163^\circ 13.'4$	$148^\circ 43.'8$
$\sin(\quad)$	8.4522	9.4603	9.7152
.....	1.7259	1.6792	1.5876
$\cos(\quad)$	9.9998_n	9.9811_n	9.9318_n
$\frac{\varrho\pi}{R_0} \cos\Phi$	0.6466	0.4821	0.5729
$L_0 - \mathcal{A}$	$136^\circ 51.'3$	$174^\circ 14.'7$	$192^\circ 31.'5$
$\sin(\quad)$	9.8350	9.0012	9.3362_n
$\cos(\quad)$	9.8631_n	9.9978_n	9.9896_n
$L - L_0$ I	$+ 3.''03$	$+ 0.''30$	$- 0.''81$
$L - L_0$ II	+ 1.51	+ 13.78	+ 20.08
$L - L_0$	+ 4.54	+ 14.08	+ 19.27
ν I	$- 3.''23$	$- 3.''02$	$- 3.''65$
ν II	+ 53.18	+ 45.74	+ 33.07
$\log\nu$	1.6986	1.6306	1.4686
$(\operatorname{Log} R - \log R_0)_{\text{VII}}$	− 1052	− 900	− 619
$\sin\beta$	9.1643	9.2374	9.2822
$R_0 : \sin\beta$	0.8410	0.7669	0.7210
$\frac{R_0}{\sin\beta}\{\quad\}$	1.7359	1.6901	1.5989
Δt	$+ 0^d.000\,0015$	$+ 0^d.000\,0014$	$+ 0^d.000\,0011$

Die zum locus fictus gehörigen Sonnenörter werden also:

1898	L	$\lg R$
Aug. 15.52508	143° 5′ 31″.67	0.005 2211
» 26.42229	153 35 57.87	0.004 2285
» 37.40094	164 13 51.52	0.003 1089

Die Korrektionen der Beobachtungszeiten sind unmerklich.

Es wurde schon hervorgehoben, daß man das eben auseinandergesetzte Verfahren des Übergangs auf den locus fictus nicht einschlagen kann, wenn die Breiten β Null oder klein ($< 1°$) sind. Will man in einem solchen Fall völlig streng verfahren, dann wird man nach einem Vorschlag von *Oppolzer* (Lehrbuch der Bahnbestimmung Band 1, 2. Aufl. Seite 273) die mit Parallaxe behafteten Planetenörter beibehalten, aber nun auch den aus den Jahrbüchern entnommenen Sonnenörtern, die sich auf den Erdmittelpunkt beziehen, die den Beobachtungsörtern und Zeiten entsprechenden Parallaxen hinzufügen. Hierzu können die Formeln 8) herangezogen werden, wonach die mit Parallaxe behafteten Sonnenörter L', B', R' sich aus den Jahrbuchangaben L_0, B_0, R_0 wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} L' &= L_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\sin(\Lambda - L_0) \\ B' &= B_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin\Phi \\ R' &= R_0 - \varrho\pi\cos\Phi\cos(\Lambda - L_0)\sin 1'' \end{aligned} \qquad 14)$$

oder statt letzterer Formel bequemer:

$$\operatorname{Log} R' = \operatorname{Log} R_0 - \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos\Phi\cos(\Lambda - L_0)\sin 1'' \text{ Mod.}$$

$$\operatorname{Log} 10^7 \text{ Mod. } \sin 1'' = 1.32335$$

$$\pi = 8''.80,$$

wo bei Benutzung dieses Zahlenwertes die Korrektion von Log R_0 in Einheiten der 7. Dezimale erscheint. Bei der Ableitung von 14) aus 8) haben wir die stets unmerklichen Glieder, die mit dem Produkt von π mit B_0 behaftet sind, weggelassen.

Zweiter Teil.

Die heliozentrische Bewegung.

Abschnitt IX.

Geometrie der Kegelschnitte.

36. Entstehung der Kegelschnitte. Die Untersuchung der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne wird uns zu dem Resultate führen, daß dieselbe in Kegelschnitten erfolgt. Es erscheint daher notwendig, eine kurze Theorie dieser Kurven vorauszuschicken und zwar mit besonderer Rücksicht auf die astronomischen Verhältnisse. Die älteste Definition dieser Kurven, als Schnitte eines Kegelmantels, wird sich am besten als Grundlage unserer Entwicklungen eignen.

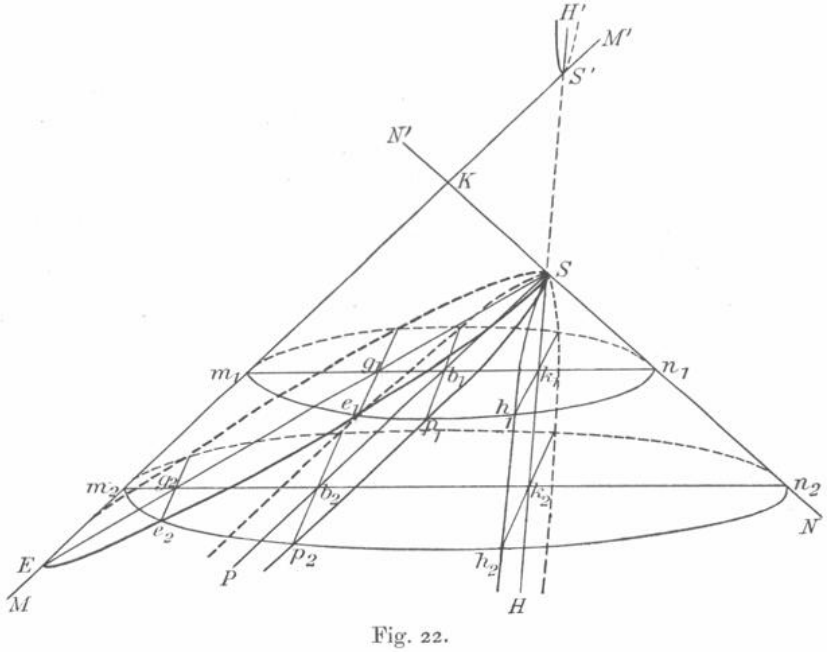


Fig. 22.

Aus dem Mantel eines geraden Kreiskegels (Fig. 22) schneiden eine durch seine Achse gelegte Ebene die Mantellinien MM' und NN' und beliebig viele senkrecht zur Achse gezogene Ebenen die Kreislinien $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, ... aus. Der Schnitt von

senkrecht zur Ebene $MM'NN'$ gelegten Ebenen mit dem Kegelmantel führt dann, wenn wir von Ebenen, die durch die Spitze K gehen, absehen, auf Kurven, die Kegelschnitte, von denen wir sofort drei charakteristische Formen unterscheiden: 1. Schneidet die Ebene die beiden Mantellinien MM' und NN' auf derselben Seite der Spitze K oder ist der Winkel, den ihre Schnittlinie SE mit der Ebene $MM'NN'$ mit der Mantellinie SN bildet, größer als der Öffnungswinkel des Kegels, dann entsteht eine geschlossene Kurve SE, die *Ellipse*, von der ein Spezialfall der *Kreis* ist, wenn die Schnittebene gleichzeitig senkrecht auf der Achse steht. 2. Ist die Ebene parallel zur Mantellinie MM', also der Winkel ihrer Schnittgeraden mit SN gleich dem Öffnungswinkel, so entsteht eine Kurve SP, die *Parabel*, die sich nach *einer* Richtung ins Unendliche erstreckt. 3. Schneidet die Ebene die Mantellinien auf verschiedenon Seiten von K oder ist der Winkel der Schnittlinie SH mit der Mantellinie NN' kleiner als der Öffnungswinkel, so entsteht eine Kurve SH, $S'H'$, die *Hyperbel*, welche aus zwei Ästen besteht, die beide sich ins Unendliche erstrecken.

Aus der Entstehung der Kurven ergibt sich sofort eine Haupteigenschaft, die wir getrennt für die drei Formen ableiten.

1. *Ellipse.* Sind e_1 und e_2 beliebige Punkte der Kurve, $m_1 e_1 n_1$, $m_2 e_2 n_2$ die durch sie gelegten Kegelkreise, so ist

$$\overline{g_1 e_1}^2 = m_1 g_1 \cdot n_1 g_1$$
$$\overline{g_2 e_2}^2 = m_2 g_2 \cdot n_2 g_2 ,$$

also:

$$\frac{\overline{g_1 e_1}^2}{\overline{g_2 e_2}^2} = \frac{m_1 g_1}{m_2 g_2} \cdot \frac{n_1 g_1}{n_2 g_2} = \frac{E g_1}{E g_2} \cdot \frac{S g_1}{S g_2} ,$$

somit:

$$\frac{\overline{g_1 e_1}^2}{E g_1 \cdot S g_1} = \frac{\overline{g_2 e_2}^2}{E g_2 \cdot S g_2} ,$$

d. h. für jeden Punkt der Ellipse besitzt dieses Verhältnis denselben Wert, den wir mit c bezeichnen wollen. Legt man durch S als Anfangspunkt in die Ebene der Kurve ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen X-Achse mit SE zusammenfällt, so kann die eben gefundene Eigenschaft der Koordinaten x, y eines Kurvenpunktes durch

$$\frac{y^2}{x(2a - x)} = c$$

ausgedrückt werden, wenn man $SE = 2a$ setzt. Setzt man weiter $ac = p$, so wird daraus:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2 , \qquad 1$$

was wir die Scheitelgleichung der Ellipse nennen wollen.

2. *Parabel.* Hier wird

$$\frac{\overline{b_1 p_1}^2}{\overline{b_2 p_2}^2} = \frac{m_1 b_1 \cdot n_1 b_1}{m_2 b_2 \cdot n_2 b_2} = \frac{S b_1}{S b_2} ,$$

d. h.

$$\frac{\overline{b_1 p_1}^2}{Sb_1} = \frac{\overline{b_2 p_2}^2}{Sb_2} = 2p$$

oder

$$y^2 = 2px. \qquad 2)$$

(Scheitelgleichung der Parabel.)

3. *Hyperbel.*

$$\frac{\overline{k_1 h_1}^2}{\overline{k_2 h_2}^2} = \frac{m_1 k_1 \cdot n_1 k_1}{m_2 k_2 \cdot n_2 k_2} = \frac{(SS' + Sk_1)}{(SS' + Sk_2)} \cdot \frac{Sk_1}{Sk_2},$$

d. h.

$$\frac{\overline{k_1 h_1}^2}{(SS' + Sk_1)\, Sk_1} = \frac{\overline{k_2 h_2}^2}{(SS' + Sk_2)\, Sk_2} = c;$$

in einem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in S liegt, wird also, wenn $SS' = 2a$ und $ac = p$ gesetzt wird:

$$\frac{y^2}{x(2a + x)} = c$$

oder

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2. \qquad 3)$$

(Scheitelgleichung der Hyperbel.)

Vergleicht man die Gl. 1)—3), so sieht man, daß sie alle in der Form

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$$

enthalten sind, wenn man im Fall der Ellipse a positiv, im Fall der Parabel a unendlich und im Fall der Hyperbel a negativ vorausgesetzt.

Verschiebt man bei der Ellipse und Hyperbel den Anfangspunkt der Koordinatensystems um die Strecke a, d. h. verlegt man ihn in die Mitte der Linien SE bez. SS' und nennt die neuen Koordinaten ξ und η, so wird

bei der Ellipse: $x = \xi + a, \quad y = \eta$
bei der Hyperbel: $x = \xi - a, \quad y = \eta$

und die Gleichungen der Kurven im neuen Koordinatensystem werden daher:

$$\text{Ellipse:} \quad \eta^2 = pa - \frac{p}{a} \xi^2$$

$$\text{Hyperbel:} \quad \eta^2 = -pa + \frac{p}{a} \xi^2$$

oder wenn $pa = b^2$ gesetzt wird:

$$\text{Ellipse:} \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \qquad 4)$$

$$\text{Hyperbel:} \quad \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \qquad 5)$$

Dies sind die Mittelpunktsgleichungen der Kegelschnitte. Bei der Parabel fällt der Mittelpunkt ins Unendliche, kann also nicht zum Anfangspunkt gemacht werden.

Wir diskutieren nun die Gl. 4) 5) 2) jede für sich.

37. Die Ellipse. Löst man die Gl. 4) nach η bez. ξ auf, so kommt:

$$\eta = \pm b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}$$

oder

$$\xi = \pm a \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}$$

d. h. die Kurve ist symmetrisch in bezug auf beide Koordinatenachsen. Für $\xi = 0$ folgt $\eta = \pm b$ und für $\eta = 0$ folgt $\xi = \pm a$, d. h. a und b sind die in den Koordinatenachsen gelegenen Halbachsen. Wächst ξ, so nimmt der absolute Wert von y ab, bis er für $\xi = \pm a$ zu Null wird. In den Punkten $\xi = \pm a$, $\eta = 0$ schließen sich also die ober- und unterhalb der X-Achse verlaufenden Zweige der Kurve zusammen. Werten von ξ, die größer sind als a, entsprechen keine reellen Werte von η mehr. Wächst η, so nimmt der absolute Betrag von ξ ab, bis er für $\eta = \pm b$ zu Null wird. In den Punkten $\eta = \pm b$, $\xi = 0$ schließen sich also die links und rechts der Y-Achse verlaufenden Zweige der Kurve zusammen. Werten von η, die größer sind als b, entsprechen keine reellen ξ mehr. Die Kurve ist also geschlossen, die X- und Y-Achsen sind Symmetrieachsen und die ihn ihnen gelegenen Halbmesser a und b sind die größten bez. kleinsten, die auftreten können. Man nennt sie daher große und kleine Halbachse. Führt man Mittelpunktspolarkoordinaten ein durch

$$\xi = -\varrho \cos\theta, \qquad \eta = \varrho \sin\theta,$$

wo also θ von der negativen Seite der X-Achse oder von der Richtung vom Mittelpunkt M nach dem Scheitel S aus gezählt wird, so wird die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\varrho^2 \cos\theta^2}{a^2} + \frac{\varrho^2 \sin\theta^2}{b^2} = 1$$

oder:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin\theta^2};$$

hieraus erkennt man den eben ausgesprochenen Satz am schnellsten; offenbar wird ϱ am größten für $\theta = 0$ ($\varrho = a$) und am kleinsten für $\theta = 90°$ ($\varrho = b$). Wird $a = b$, so daß die Gleichung der Kurve sich auf

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \qquad 6)$$

reduziert, so wird

$$\varrho^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad \varrho = a,$$

d. h. die Kurve ist ein *Kreis*.

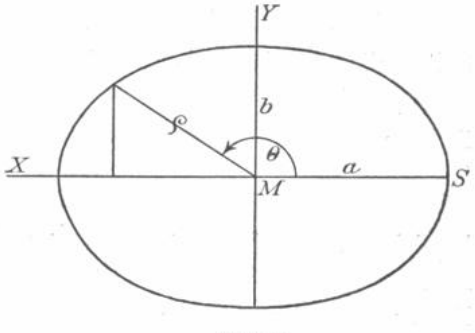


Fig. 23.

Beliebige durch den Anfangspunkt gezogene Durchmesser der Ellipse werden in ihm halbiert, ebenso wie die in den Achsen gelegenen. Der Anfangspunkt ist daher Mittelpunkt der Kurve.

Zieht man eine Schar paralleler Sehnen, so liegen deren Halbierungspunkte auf einem Durchmesser der Ellipse, der *konjugierter Durchmesser* genannt wird zu dem,

welcher der Sehnenschar angehört. Die an den Enden eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel zum konjugierten Durchmesser.

Führt man einen Parameter E ein, so können die Koordinaten der Punkte der Ellipse in der Form

$$\xi = -a\cos E, \qquad \eta = b\sin E \tag{7}$$

geschrieben werden, denn offenbar erhält man hieraus durch Elimination von E die Ellipsengleichung. Um die geometrische Bedeutung von E zu erkennen, schlagen wir um die große Achse $2a$ als Durchmesser einen Kreis, dessen Gleichung sein wird

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Einem bestimmten $\xi = MP$ entspricht dann in der Ellipse der Punkt N mit

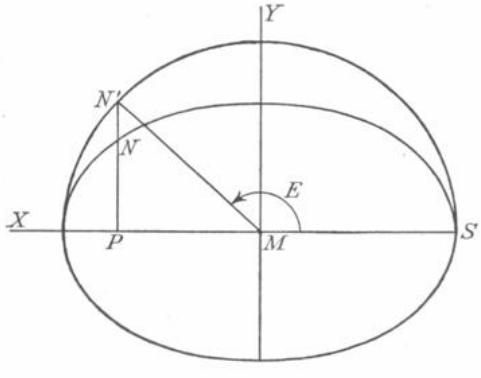


Fig. 24.

$$\eta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}$$

und im Kreis der Punkt N' mit

$$\eta' = \sqrt{a^2 - \xi^2},$$

d. h. die Ordinaten beider Kurven verhalten sich wie $b : a$. Also wird:

$$PN = \eta = b\sin E = \frac{b}{a}PN'$$

oder

$$\sin E = \frac{PN'}{a} = \frac{PN'}{MN'},$$

d. h. E ist jener Winkel, den der zum Punkt N' gehörige Halbmesser mit der X-Achse einschließt und zwar mit dem negativen Teil derselben oder dem, der nach dem Scheitel S führt, da $MP = -a\cos E$.

Mittels des Winkels E erhält man die einfachste Konstruktion der Ellipse.

Aus obigem Satz folgt sofort, daß auch der Inhalt der Ellipse sich zum Inhalt des über der großen Achse konstruierten Kreises wie $b : a$ verhält, d. h. daß der Inhalt der Ellipse $= ab\pi$ ist.

Trägt man auf der großen Achse der Ellipse vom Mittelpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke $\sqrt{a^2 - b^2}$ ab, so erhält man zwei Punkte, F und F', die man *Brennpunkte* der Kurve nennt und die offenbar von dem Endpunkte der kleinen Achse um die Strecke $\sqrt{b^2 - (a^2 - b^2)} = a$ abstehen. Wir wollen die Strecke kurz mit

$$ae = \sqrt{a^2 - b^2}$$

bezeichnen, wo also e eine Zahl < 1 ist und *Exzentrizität* genannt wird. Die Entfernung r eines Punktes N der Ellipse vom Brennpunkte F, der beim Scheitel S liegt, wird gefunden aus:

$$r^2 = \eta^2 + (\xi + ae)^2$$

oder wenn aus der Gleichung der Ellipse

$$\eta^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\xi^2$$

eingetragen wird:

$$r^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\xi^2 + \xi^2 + a^2 - b^2 + 2ae\xi$$

oder

$$r^2 = e^2\xi^2 + a^2 + 2ae\xi = (a + e\xi)^2$$

$$r = a + e\xi .$$

Ebenso findet man als Entfernung r' vom anderen Brennpunkt F''

$$r' = a - e\xi .$$

Es wird also

$$r + r' = 2a ,$$

d. h. die Summe der beiden Radienvektoren, die von den Brennpunkten nach einem Punkt der Ellipse gezogen werden, ist konstant, nämlich gleich der großen Achse.

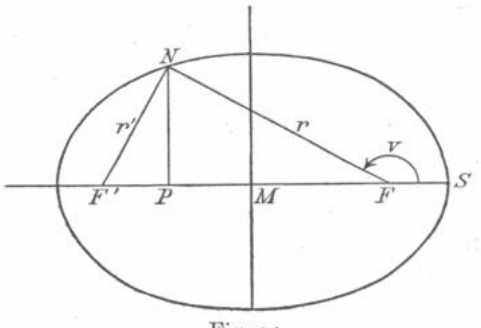


Fig. 25.

Wir verschieben jetzt den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems nach dem einen Brennpunkt F; dann ist der Zusammenhang der neuen Koordinaten X, Y mit den Mittelpunktskoordinaten ξ, η:

$$X = \xi + ae , \qquad Y = \eta . \tag{8}$$

Es wird daher der Radiusvektor r

$$r = a + e\xi = a + e(X - ae) = a(1 - e^2) + eX .$$

Nennt man v den Winkel, den r mit der Richtung von F nach dem Scheitel S bildet, so daß r, v die Brennpunktspolarkoordinaten eines Punktes sind, so wird $X = -r\cos v$ und daher

$$r = a(1 - e^2) - er\cos v$$

oder

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v} , \tag{9}$$

welches die Gleichung der Ellipse in Brennpunktspolarkoordinaten ist. Für $v = 0$ wird $r = a(1 - e)$; der entsprechende Punkt der Ellipse, der *eine* Endpunkt der grossen Achse, liegt dem Brennpunkt F am nächsten und heißt Perihel; für $v = 180^\circ$ wird $r = a(1 + e)$; der entsprechende Punkt der Kurve, der *andere* Endpunkt der großen Achse, ist am weitesten von F entfernt und heißt Aphel; die sie verbindende Linie, in welcher die große Achse liegt, heißt Apsidenlinie. Für $v = 90^\circ$ wird

$$r = a(1 - e^2) ;$$

man nennt diese Konstante den *Parameter* der Ellipse. Der Zusammenhang derselben mit der in der Scheitelgleichung 1) der Ellipse eingeführten Konstante p ergibt sich sofort, wenn wir $b^2 = pa$ in $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ eintragen:

$$p = a(1 - e^2) . \tag{10}$$

Die Gleichung der Ellipse kann also auch

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \tag{11}$$

geschrieben werden.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes werden:

$$X = -r\cos v, \qquad Y = +r\sin v;$$

also wird nach 7) und 8)

$$r\cos v = a\cos E - ae, \qquad r\sin v = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{12}$$

und durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen:

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{13}$$

In der Astronomie bezeichnet man E als exzentrische, v als wahre Anomalie.

38. Die Hyperbel. Löst man die Mittelpunktsgleichung 5) der Hyperbel, nämlich

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

nach ξ und η auf,

$$\eta = \pm b\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} - 1}, \quad \xi = \pm a\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}},$$

so erkennt man, daß zu jedem Werte von ξ zwei nur dem Vorzeichen nach verschiedene Werte von η gehören und umgekehrt. Zugleich sehen wir, daß der erste reelle Wert von η sich erst für $\xi = \pm a$ ergibt, nämlich $\eta = 0$; in dem ganzen von den Linien $\xi = +a$ und $\xi = -a$ begrenzten Parallelstreifen kann also kein Punkt der Kurve liegen. Ferner ersieht man, daß die beiden Achsen auch hier Symmetrieachsen sind; aber während die X-Achse die Kurve trifft und zwar in den Scheitelpunkten $\xi = \pm a$, $\eta = 0$, liegt die andere ganz außerhalb des reellen Teiles der Kurve. Das Stück der X-Achse zwischen den beiden Scheiteln heißt Hauptachse der Hyperbel und ist gleich $2a$. Geht man durch

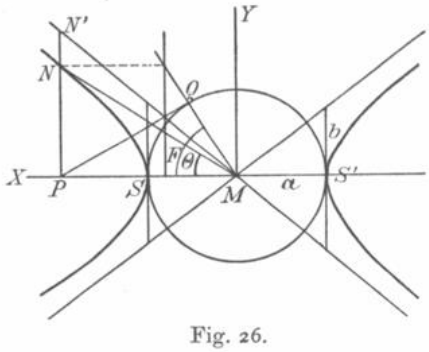


Fig. 26.

$$\xi = \varrho\cos\theta, \quad \eta = \varrho\sin\theta$$

auf die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten über und schreibt sie

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos\theta^2 - a^2\sin\theta^2},$$

so erkennt man, daß reelle Werte von ϱ sich nur ergeben, so lange θ zwischen $+\theta_0$ und $-\theta_0$ und zwischen $180^\circ - \theta_0$ und $180^\circ + \theta_0$ liegt, wo

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{b}{a}. \tag{14}$$

Für $\theta = \theta_0$, $-\theta_0$, $180^\circ - \theta_0$ und $180^\circ + \theta_0$ erhält man $\varrho = \infty$ und für alle außerhalb der genannten Grenzen liegende θ wird ϱ imaginär; die Kurve liegt also zwischen den zwei durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, die durch

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{b}{a}$$

bestimmt sind, oder durch

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \frac{b}{a}.$$

Auf diesen Geraden, den Asymptoten der Kurve, liegen die unendlich fernen Punkte derselben. Betrachtet man die Gleichungen der Asymptoten

$$\eta = \pm \frac{b}{a}\xi$$

und der Kurve

$$\eta = \pm \frac{b}{a}\,\xi\sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}},$$

so erkennt man die Beziehung der Hyperbel zu ihren Asymptoten. Für ein beliebiges $\xi > a$ wird immer das zur Kurve gehörige η absolut genommen kleiner sein, als das zur Asymptote gehörige: dieser Unterschied wird aber um so kleiner, je größer ξ wird und er verschwindet ganz, wenn $\xi = \infty$ geworden ist; also außerhalb der Asymptoten kann kein Punkt der Kurve liegen; die Kurve schmiegt sich an die Asymptoten immer mehr und mehr an, bis sie dieselben im Unendlichen berührt. Zugleich erkennen wir die geometrische Bedeutung von b: Länge des im Scheitel der Kurve zur X-Achse errichteten Lotes bis zur Asymptote; in der Tat gibt die Gleichung der Asymptote für $\xi = a$ den Wert $\eta = b$.

Führt man einen Parameter F ein, so können die Punkte der Hyperbel durch

$$\xi = a \sec F, \quad \eta = b \operatorname{tg} F$$

dargestellt werden; denn es wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{1}{\cos F^2} - \frac{\sin F^2}{\cos F^2} = 1.$$

Um die geometrische Bedeutung von F zu erkennen, schlagen wir um die Hauptachse $2a$ als Durchmesser einen Kreis und ziehen vom Endpunkt der Abszisse ξ eine Tangente PQ an ihn; dann ist $F = \sphericalangle PMQ$; denn $\xi = a \sec F$; ferner hat der der Abszisse ξ entsprechende Punkt N' der Asymptote die Ordinate $\eta' = \xi \operatorname{tg}\theta_0$ $= \xi \cdot \frac{b}{a}$ und folglich der Punkt der Hyperbel die Ordinate: $\eta = \frac{b}{a}\xi\sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}}$ $= \frac{b}{a} a \sec F \sqrt{1 - \cos F^2} = b \operatorname{tg} F$. Konstruktion der Hyperbel (siehe Fig. 27).

Trägt man auf der Hauptachse der Hyperbel vom Mittelpunkt M aus nach beiden Seiten die Strecke

$$ae = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{16}$$

ab, wo also jetzt die Exzentrizität $e > 1$ ist, so erhält man die Brennpunkte F' und F'', ebenfalls auf der konkaven Seite der Kurve liegend. Sind wieder r und r' die Radienvektoren eines Punktes der Kurve nach den Brennpunkten, so findet man ähnlich wie vorhin

$$r^2 = (\xi e - a)^2,$$

oder

$$r = \xi e - a$$

und ebenso

$$r' = e\xi + a.$$

Bei der Hyperbel wird also

$$r' - r = 2a,$$

d. h. die Differenz der beiden Radienvektoren ist eine Konstante gleich der Hauptachse.

Verschiebt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems nach dem Brennpunkt F, dann ist der Zusammenhang der neuen Koordinaten X, Y mit den Mittelpunktskoordinaten ξ, η

$$X = \xi - ae, \quad Y = \eta \qquad 17)$$

und es wird daher der Radiusvektor:

$$r = e\xi - a = e(X + ae) - a$$
$$= a(e^2 - 1) + eX.$$

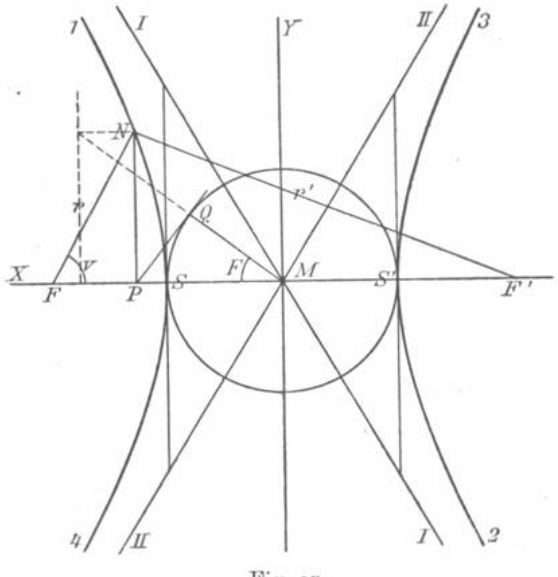


Fig. 27.

Nennt man v den Winkel, den r mit der negativen Richtung der X-Achse, also mit der Richtung von F' nach dem Scheitel S bildet, so wird $X = r\cos(180^\circ - v) = -r\cos v$ und daher

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos v}, \qquad 18)$$

welches die Gleichung der Hyperbel in Brennpunktspolarkoordinaten ist. Für $v = 0$ ergibt sich $r = a(e - 1)$ und dieser Punkt der Hyperbel heißt auch hier Perihel. Wächst v, so ergeben sich aus 18) zunächst die Punkte des Kurventeiles 1 bis zu dem Werte $\cos v = -\frac{1}{e}$; hier wird $r = \infty$, d. h. der Radiusvektor wird der Asymptote I parallel. Für den Winkel, den die Asymptote mit der X-Achse bildet, ergibt sich also hier der Wert v_0 aus $\cos v_0 = -\frac{1}{e}$; es stimmt dies mit der früheren Bestimmung 14)

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{b}{a}$$

überein, denn $\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\theta_0^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{e}$ und $\theta_0 = 180^\circ - v_0$. Wächst v weiter, so ergeben sich negative Werte von r, die auf den zweiten Zweig der Kurve, nämlich die Teile 2 und 3 führen; endlich wird r zur Asymptote II parallel, erhält wieder positive Werte und gibt die Punkte des Teiles 4. Für $v = 90^\circ$ wird $r = a(e^2 - 1)$; diese Strecke, die auch hier Parameter heißt, ist, wie aus $pa = b^2$ und $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ hervorgeht, gleich der in der Scheitelgleichung 3) eingeführten Konstanten p, so daß 18) auch

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \qquad 19)$$

geschrieben werden kann, d. h. genau so wie die Ellipsengleichung 11), nur daß hier $e > 1$ ist.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes werden

$$X = -r\cos v \quad \text{und} \quad Y = r\sin v,$$

also nach 15) und 17)

$$r\cos v = a\left(e - \frac{1}{\cos F}\right), \qquad r\sin v = b\,\mathrm{tg}\,F = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F \tag{20}$$

und durch Quadrieren und Addieren:

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right). \tag{21}$$

39. Die Parabel. Aus der Scheitelgleichung 2) der Parabel:

$$y^2 = 2px$$

ergibt sich wegen

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

die Symmetrie der Kurve in Bezug auf die X-Achse und wegen

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

daß jedem y nur ein Wert von x entspricht, der für absolut genommen gleich große, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte von y derselbe ist. Für negative x wird y imaginär, die Kurve liegt also ganz auf der einen Seite der Y-Achse. Für $x = \infty$ wird auch $y = \infty$; die Kurve erstreckt sich also nach einer Seite ins Unendliche.

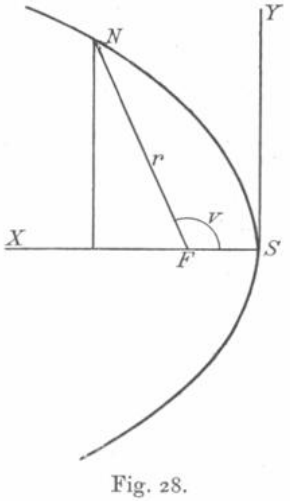


Fig. 28.

Der Abszisse $x = \frac{p}{2}$ entspricht $y = \pm p$. Der Punkt $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$ der Abszissenachse hat also dieselbe bei der Ellipse und Hyperbel nachgewiesene Eigenschaft, daß die zugehörige Ordinate der Kurve gleich dem Parameter p ist. Wir nennen ihn ebenfalls den Brennpunkt F der Parabel. Bei der Ellipse ist sein Abstand vom Scheitel S gleich $a(1-e)$, bei der Hyperbel gleich $a(e-1)$; da bei der Ellipse $p = a(1-e^2)$, bei der Hyperbel $p = a(e^2-1)$ ist, so wird der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel in der Ellipse und in der Hyperbel gleich $\frac{p}{1+e}$. Wollen wir also den Begriff der Exzentrizität auch bei der Parabel einführen, so haben wir $e = 1$ zu setzen. Wir können mithin die Parabel als die Übergangskurve zwischen Ellipse und Hyperbel bezeichnen, indem

$e < 1$ eine Ellipse,
$e = 1$ eine Parabel,
$e > 1$ eine Hyperbel

gibt. Da $p = \pm a(1 - e^2)$ in allen drei Kurven endlich herauskommen muß, so muß bei der Parabel $a = \infty$ angenommen werden, wie wir schon oben konstatiert haben.

Der Radiusvektor r vom Brennpunkt nach einem Punkt der Parabel wird

$$r^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2,$$

woraus

$$r = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Hiernach kann man die Parabel am einfachsten konstruieren.

Verlegt man den Anfangspunkt vom Scheitel nach dem Brennpunkt, so werden die neuen Koordinaten

$$X = x - \frac{p}{2}, \quad Y = y$$

und der Radiusvektor stellt sich daher zu:

$$r = x + \tfrac{1}{2}p = \left(X + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2} = p + X.$$

Nennt man v den Winkel, den r mit der negativen X-Achse oder mit der Richtung von F nach dem Scheitel bildet, so wird $X = r\cos(180^\circ - v) = -r\cos v$ und daher

$$r = \frac{p}{1 + \cos v}, \tag{22}$$

d. h. wir erhalten für die Parabel dieselbe Brennpunktspolargleichung wie für Ellipse und Hyperbel, wenn wir beachten, daß hier $e = 1$ ist. Mit Hilfe der Gl. 22) kann man wieder den Verlauf der Kurve verfolgen, insbesondere wird für $v = 0$ $r = \frac{1}{2}p$, für $v = 90^\circ$ $r = p$, wie wir schon oben kennen gelernt haben. Es ist bei der Parabel üblich, statt p den Abstand des Brennpunkts vom Scheitel, nämlich $\frac{1}{2}p = q$ oder die Periheldistanz zu benutzen; die Gl. 22) wird dann

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}v}. \tag{23}$$

40. Gesamtbetrachtung der drei Kurven. Die auf den einen Brennpunkt bezogenen Gleichungen der drei Kurven:

$$\begin{aligned} &\text{Ellipse:} \quad r = a(1 - e^2) + eX \\ &\text{Hyperbel:} \quad r = a(e^2 - 1) + eX \\ &\text{Parabel:} \quad r = p + X \end{aligned}$$

zeigen, daß sie die gemeinsame Form

$$r = a(1 - e^2) + eX$$

haben, wobei zu beachten ist, daß wir X in der Richtung vom Scheitel nach dem Brennpunkt positiv gezählt haben. Da r positiv herauskommen muß, so muß dann für $e < 1$ die große Halbachse a positiv (Ellipse), für $e > 1$ dieselbe Größe negativ (Hyperbel) und für $e = 1$ unendlich groß (Parabel) angenommen werden. Drehen wir das Koordinatensystem um den Brennpunkt, so wird

$$r = a(1 - e^2) + e(\alpha\xi + \beta\eta);$$

oder

$$r = A + B\xi + C\eta$$

ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein durch seinen einen Brennpunkt gelegtes rechtwinkliges Koordinatensystem.

Stellen wir die Brennpunktspolargleichungen zusammen, so finden wir, daß sie alle lauten:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

wo v von der Apsidenlinie aus zu zählen ist und zwar von der Richtung vom Brennpunkt nach dem Perihel aus. Die Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $e \gtreqless 1$ ist.

Es erscheint nützlich, noch den Übergang der einen Kurvenart in die andere zu betrachten. Zu dem Ende halten wir den Scheitel S und den ihm nächstliegenden Brennpunkt F fest und ziehen alle Kurven, welche durch S hindurchgehen und F zu dem einen Brennpunkt haben. Die Distanz $FS = q$ ist gleich $a(1 - e) = \frac{p}{1 + e}$. Ist $e = 0$, so wird $r = p = a = q$, d. h. es entsteht ein Kreis, der den Mittelpunkt in F und den Radius q hat; ist e von Null verschieden, aber < 1, so hat a, die Entfernung des Mittelpunktes der Kurve vom Scheitel S einen positiven Wert, der um so größer wird, je mehr e wächst; der Mittelpunkt und der andere Brennpunkt rücken in der Richtung SF immer weiter hinaus: die Form der Kurve streckt sich. Der Parameter wächst ebenfalls vom Werte q, den er beim Kreis hat, zum Werte $q(1 + e)$ (Ellipse). Wird $e = 1$, so muß a unendlich angenommen werden, d. h. der Mittelpunkt und der zweite Brennpunkt sind ins Unendliche gerückt, der Parameter nimmt den Wert $p = 2q$ an (Parabel). Wächst e über 1 hinaus, so muß a negativ angenommen werden, d. h. der Mittelpunkt ist auf der anderen Seite von S anzunehmen, als auf der F liegt. Dieser und der zweite Brennpunkt sind bei wenig von 1 sich unterscheidendem e in großer negativer Entfernung von S und rücken mit wachsendem e an dieses heran, d. h. a wird absolut genommen mit wachsendem e ständig kleiner, bis für $e = \infty$ $a = 0$ anzunehmen ist. Der Parameter dagegen wächst von dem Werte, den er für die Parabel inne hatte, mit wachsendem e zum Werte $p = q(1 + e)$, der für $e = \infty$ ebenfalls unendlich groß ist (Hyperbel mit einer Doppelgeraden als Grenzkurve).

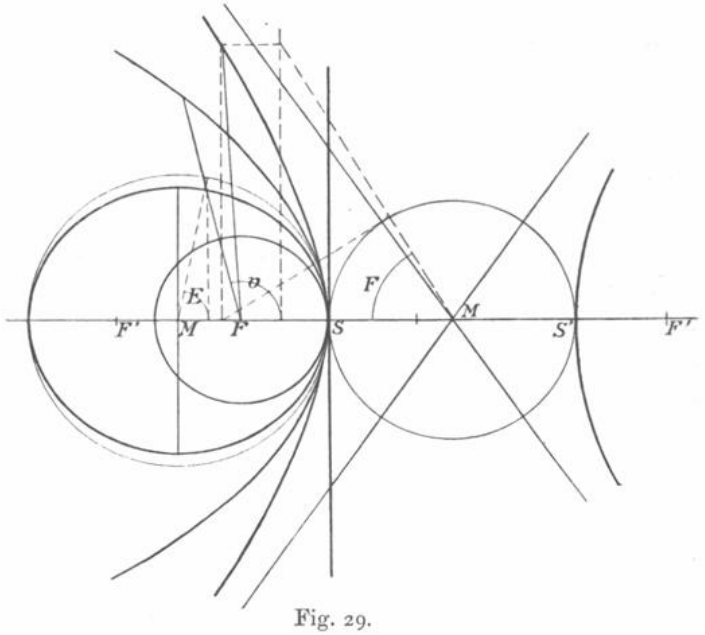


Fig. 29.

Abschnitt X.

Die Bewegung um die Sonne im allgemeinen.

41. Erstes und zweites Keplersches Gesetz. Um die Bewegung eines Körpers im Sonnensystem zu untersuchen, nehmen wir zuerst an, daß außer ihm und der Sonne kein weiterer Körper vorhanden sei und daß beide als Punkte betrachtet werden können; die Ursache der Bewegung sei lediglich die gegenseitige Anziehung, welche die beiden Körper aufeinander ausüben und welche nach dem Newtonschen Gesetz wirken soll. Nach diesem Gesetz wirkt zwischen beiden Körpern eine Kraft, deren Richtung mit ihrer Verbindungslinie zusammenfällt und deren Intensität proportional ist ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung. Andererseits ist die Kraft, welche die Sonne S mit der Masse M auf den Körper P mit der Masse m ausübt, gleich dem Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung, welche diese Kraft dem Körper P mitteilt (Nr. 17). Hebt man beiderseits den Faktor m, so stellt sich die Beschleunigung von P dar als Produkt aus dem Proportionalitätsfaktor des Newtonschen Gesetzes und der Masse der Sonne, dividiert durch das Quadrat der gegenseitigen Entfernung. Ferner ist die Kraft, welche der Körper P auf die Sonne ausübt, gleich dem Produkt aus der Masse M und der Beschleunigung, welche diese Kraft der Sonne mitteilt. Hebt man hier beiderseits den Faktor M, so stellt sich die Beschleunigung von S dar als Produkt aus dem Proportionalitätsfaktor des Newtonschen Gesetzes und der Masse des Körpers m, dividiert durch das Quadrat der gegenseitigen Entfernung. Die Beschleunigung findet in beiden Fällen in der Verbindungslinie statt, aber das erste Mal in der Richtung von P nach S, das zweite Mal in der Richtung von S nach P. Nimmt man diese letztere Richtung in der Verbindungslinie als die positive an, so hat man die erstere negativ zu zählen, d. h. die beiden Beschleunigungen werden, wenn k^2 der Proportionalitätsfaktor und r die gegenseitige Entfernung ist:

$$\text{Beschleunigung von } P\text{: } -\frac{k^2 M}{r^2} \text{ und Beschleunigung von } S\text{: } +\frac{k^2 m}{r^2}.$$

Die relative Beschleunigung von P in bezug auf S wird also

$$-\frac{k^2 M}{r^2} - \frac{k^2 m}{r^2} = -\frac{k^2 (M + m)}{r^2} \qquad 1)$$

und findet in der Verbindungslinie statt. Wenn nur die Newtonsche Anziehung wirksam ist, findet in *keiner* anderen Richtung eine Beschleunigung statt.

Da uns kein Mittel zur Verfügung steht, absolute Örter im Raum zu bestimmen, so müssen wir die anfänglich gestellte Aufgabe dahin abändern, daß wir die relative Bewegung von P in bezug auf S kennen lernen wollen. Wir legen deshalb ein bewegliches Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ durch S als Anfangspunkt, so daß die positive ξ-Achse stets mit der Verbindungslinie $SP = r$ — dem Radiusvektor — zusammenfällt; die Drehungsgeschwindigkeit um die ζ-Achse sei mit $\frac{ds}{dt}$, die um die ξ-Achse

mit $\frac{dp}{dt}$ bezeichnet; die Drehungsgeschwindigkeit um die η-Achse kann gleich Null gesetzt werden, da es sich um die Bewegung eines Punktes handelt, die durch drei Stücke vollständig dargestellt werden kann. Unter diesen Voraussetzungen stellen die Ausdrücke 13) (S. 45) die Beschleunigungen nach den drei Achsen dar und da im vorliegenden Falle nur die längs der ξ-Achse den Wert 1) hat, die anderen aber Null sind, so entstehen die drei Gleichungen:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = 0 \qquad 2)$$

$$r\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt} = 0.$$

Nimmt man an, daß niemals ein Zusammenstoß der zwei Körper stattfindet und daß der Körper P sich nicht ständig in unendlicher Entfernung von S befinde, mit anderen Worten, daß r im allgemeinen einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitze, dann giebt die Integration der zweiten Gleichung:

$$r^2\frac{ds}{dt} = 2c_1 \qquad 3)$$

wenn mit c_1 eine Konstante bezeichnet wird. Da hieraus hervorgeht, daß $\frac{ds}{dt}$ im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so folgt aus der dritten Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = 0, \qquad 4)$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit um die ξ-Achse ist ständig gleich Null oder der Punkt geht aus der $\xi\eta$-Ebene, in der er sich im ersten Zeitteilchen bewegt haben möge, niemals heraus, mit anderen Worten:

Der Punkt P bewegt sich in einer Ebene, die durch S geht.

Die in der Form

$$\tfrac{1}{2}r^2ds = c_1dt \qquad 3^a)$$

geschriebene Gl. 3) läßt folgende Interpretation zu. Die linke Seite stellt den Flächeninhalt des von zwei aufeinanderfolgenden Radienvektoren gebildeten Elementarsektors von der Öffnung ds dar, wobei ds den auf dem Kreis vom Radius 1 zwischen den Radienvektoren liegenden Bogen bedeutet; die rechte Seite ist proportional der zur Beschreibung des Sektors gebrauchten Zeit; also der Satz:

Die Bewegung des Punktes geht so vor sich, daß vom Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume überstrichen werden.

Dieser unter dem Namen des *ersten Keplerschen Gesetzes* (Kepler, Astronomia nova 1609) bekannte Satz gilt, wie schon Kepler wußte und wie aus unserer Ableitung unmittelbar hervorgeht, für jede Zentralbewegung, gleichviel nach welchem Gesetz diese erfolgt.

Um die Differenzialgleichung der ebenen Kurve zu erhalten, in der P sich bewegt, muß man aus den Gl. 2) die Zeit eliminieren. Nun ist

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -r^2 \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

also nach 3)

$$\frac{dr}{dt} = -2c_1 \frac{d\frac{1}{r}}{ds},$$

und wenn nach der Zeit differenziert wird:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2c_1 \frac{d^2\frac{1}{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}$$

oder wieder nach 3)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{(2c_1)^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds^2}.$$

Wird dies und

$$r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(2c_1)^2}{r^3}$$

in die erste Gleichung 2) eingetragen, so wird daraus:

$$-\frac{(2c_1)^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds^2} - \frac{(2c_1)^2}{r^3} = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}$$

oder

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds^2} + \frac{1}{r} = \frac{k^2(M+m)}{(2c_1)^2}. \qquad 5)$$

Diese Differenzialgleichung der Kurve läßt sich sofort integrieren:

$$\frac{1}{r} - \frac{k^2(M+m)}{(2c_1)^2} = c_2\cos(s - c_3),$$

wo mit c_2 und c_3 zwei neue Konstanten bezeichnet sind. Also hat man:

$$r = \frac{\frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)}}{1 + \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)}\cos(s - c_3)}. \qquad 6)$$

Nach Nr. 40 ist dies die Polargleichung eines Kegelschnittes, dessen Parameter

$$p = \frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)}, \qquad 7)$$

dessen Exzentrizität

$$e = \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)} \qquad 8)$$

ist und dessen einer Brennpunkt mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems, also hier mit der Sonne zusammenfällt. Ein spezieller Fall des hieraus hervorgehenden Satzes:

Der Körper bewegt sich in einem Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht,

ist für die elliptische Planetenbewegung von Kepler auf empirischem Wege aufgefunden worden (Astronomia nova 1609) und unter dem Namen des *zweiten Keplerschen Gesetzes* bekannt.

Durch 7) ist die Bedeutung der in 3) eingeführten Konstante $2c_1$ ermittelt; wir wollen statt $2c_1$ im folgenden p als Konstante gebrauchen und infolgedessen die Gleichung 3) in folgender Form schreiben:

$$r^2 \frac{ds}{dt} = k\sqrt{M+m}\sqrt{p}. \tag{9}$$

Ferner ist nach 8)

$$e = pc_2,$$

so daß man auch statt der bisherigen Konstanten c_2 die neue e einführen kann; geschieht dies, so wird die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(s-c_3)}.$$

Man kann, ohne die Allgemeinheit zu verletzen, e als positive Größe betrachten; für $s-c_3 = 0$ nimmt dann der Radiusvektor r seinen kleinsten Wert

$$r_1 = \frac{p}{1+e}$$

und für $s-c_3 = \pi$ seinen größten Wert

$$r_2 = \frac{p}{1-e}$$

an; die entsprechenden Punkte der Kurve nennt man die *Apsiden* und speziell den ersteren das *Perihel*, den letzteren das *Aphel*. Die sie verbindende Gerade, die durch den Anfangspunkt geht, heißt *Apsidenlinie*. Die Länge dieser Linie ist

$$r_1 + r_2 = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

und heißt die *große Achse* der Bahn, die wir mit $2a$ bezeichnen wollen, so daß

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{oder} \quad p = a(1-e^2) \tag{10}$$

wird. — Für $s - c_3 = \frac{\pi}{2}$ wird $r = p$ oder der Parameter ist gleich dem auf der Apsidenlinie senkrecht stehenden Radiusvektor.

Da der Richtung des Perihels der Wert $s = c_3$ entspricht, nennt man c_3 die Länge des Perihels; wir wollen es kurz mit ϖ bezeichnen und haben dann als definitive Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(s-\varpi)}. \tag{11}$$

Andere, mitunter dienliche Formen dieser Gleichung sind:

$$r = \frac{p}{1+e-2e\sin\frac{1}{2}(s-\varpi)^2} = \frac{p}{1-e+2e\cos\frac{1}{2}(s-\varpi)^2}$$
$$= \frac{p}{(1+e)\cos\frac{1}{2}(s-\varpi)^2 + (1-e)\sin\frac{1}{2}(s-\varpi)^2}.$$

Der Mittelpunkt der großen Achse steht vom Anfangspunkt um die Strecke ab:

$$a - a(1 - e) = ae,$$

welche die geometrische Bedeutung von e gibt.

Die Kurve nimmt drei charakteristische Formen an, jenachdem e kleiner, gleich oder größer als 1 ist.

Wenn $e < 1$ ist, ergibt sich für jeden Wert von s ein endlicher Wert von r; die Kurve liegt also im Endlichen und ist geschlossen; die Kurve ist eine *Ellipse*.

Wenn $e = 1$ ist, tritt für $s - \varpi = \pi$ ein unendlich großer Wert des Radiusvektors auf; die Kurve schickt also Zweige ins Unendliche. Die große Achse wird unendlich groß, der Parameter aber bleibt endlich. Für $s - \varpi = 0$ wird $r_1 = \frac{p}{2}$, d. h. die Distanz von der Sonne bis zum Perihel — die Periheldistanz — ist gleich dem halben Parameter. Nennt man q diese Periheldistanz, so wird $p = 2q$ und daher die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{p}{1 + \cos(s - \varpi)} = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}(s - \varpi)}. \qquad 12)$$

Die Kurve ist eine *Parabel*.

Ist $e > 1$ — der Fall der *Hyperbel* —, so wird, da p nach 7), wenigstens wenn nur anziehende Kräfte in Betracht gezogen werden, eine wesentlich positive Größe ist, die Konstante a negativ. Bis zu dem Punkte, wo $\cos(s - \varpi)$ im zweiten Quadranten den Wert $-\frac{1}{e}$ annimmt, bleibt der Wert von r positiv und endlich; dann tritt an der genannten Stelle ein unendlich großer Wert des Radiusvektors ein und darüber hinaus wird dieser negativ für alle weiteren Werte von $s - \varpi$, bis dessen cos im dritten Quadranten wieder gleich $-\frac{1}{e}$ geworden ist; darauf folgen wieder endliche positive Werte des Radiusvektors. Die genannten negativen Werte von r führen zu Kurvenpunkten, die zwischen den rückwärtigen Verlängerungen der zu $\cos(s - \varpi) = -\frac{1}{e}$ gehörigen beiden Radienvektoren liegen und werden erhalten, wenn man den absoluten Wert des Radiusvektors nach der entgegengesetzten Seite abträgt. r_2 (für $s - \varpi = \pi$) fällt somit in dieselbe Richtung wie r_1 und die Entfernung der beiden zugehörigen Kurvenpunkte wird daher:

$$|r_2| - r_1 = \left|\frac{p}{1 - e}\right| - \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{e - 1} - \frac{p}{1 + e} = -\frac{2p}{1 - e^2} = -2a.$$

Astronomisch haben negative Radienvektoren keine Bedeutung und insofern hat der zweite Kurventeil nur eine formale Existenz. Er gewinnt aber physikalisches Interesse, wenn man statt anziehender Zentralkräfte abstoßende, die nach demselben Gesetz wirken, annimmt. In der ursprünglichen Gleichung ändert sich dann nur das Zeichen von k^2:

$$r = \frac{-\frac{(2c_1)^2}{k^2(M + m)}}{1 - \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M + m)} \cos(s - c_3)}$$

oder wenn nach wie vor

$$\frac{(2c_1)^2}{k^2(M+m)} = p, \quad \frac{(2c_1)^2 c_2}{k^2(M+m)} = e$$

gesetzt wird,

$$r = \frac{p}{e\cos(s-\varpi) - 1}.$$

Diese Gleichung liefert positive Werte von r nur wenn $e > 1$, d. h. abstoßende Kräfte haben stets eine hyperbolische Bewegung zur Folge. Diese Werte für r entsprechen für $s - \varpi$ den vorhin für $180^\circ + s - \varpi$ erhaltenen und durch Zeichenwechsel zu absoluten Beträgen gemachten, d. h. sie entsprechen dem zweiten Zweig der Hyperbel, welcher dem abstoßenden Punkt die convexe Seite zukehrt.

42. Kriterium für die Art der Bahn. Um ein Kriterium für das Eintreten der drei eben besprochenen Kurven zu erhalten, multipliziert man die erste Gleichung 2) mit $\frac{dr}{dt}$ und fügt dazu die mit $r\frac{ds}{dt}$ multiplizierte zweite Gleichung, dann kommt:

$$\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt} + r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

oder:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right) = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} + c'. \qquad 13)$$

Hierin stellt die linke Seite das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn dar, ausgedrückt durch die Komponenten im Radiusvektor und senkrecht dazu: $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{ds}{dt}$. Setzt man diese Geschwindigkeit v, so wird 13)

$$v^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} + c'.$$

Um die Bedeutung von c' aufzudecken, stellen wir v^2 auch noch auf andere Art dar. Ist $d\sigma$ das Kurvenelement, so wird

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 ds^2.$$

Nun folgt aus 11) durch Differenziation:

$$dr = \frac{pe\sin(s-\varpi)}{(1 + e\cos(s-\varpi))^2}ds = \frac{r^2}{p}e\sin(s-\varpi)ds;$$

also wird:

$$d\sigma^2 = r^4\left(\frac{e^2\sin(s-\varpi)^2}{p^2} + \frac{1}{r^2}\right)ds^2,$$

oder wenn nach 11)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^2}\left(1 + e^2\cos(s-\varpi)^2 + 2e\cos(s-\varpi)\right)$$

substituiert wird:

$$d\sigma^2 = \frac{r^4}{p^2}\left(2 + 2e\cos(s-\varpi) - (1-e^2)\right)ds^2$$

oder endlich nach 11) und 10)

$$d\sigma^2 = \frac{r^4}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) ds^2.$$

Wird dies durch dt^2 dividiert, so erscheint links $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = v^2$ und rechts wird nach 9)

$$r^4\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k^2(M+m)p$$

gesetzt werden können, so daß schließlich kommt:

$$v^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \qquad 14)$$

Aus dieser mit 13) identischen Gleichung ersieht man folgendes: Wenn a positiv und endlich ist (Ellipse), dann wird $v^2 < \frac{2k^2(M+m)}{r}$, wenn a negativ und endlich ist (Hyperbel), dann wird $v^2 > \frac{2k^2(M+m)}{r}$, wenn a unendlich groß ist (Parabel), dann wird $v^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r}$. Demnach *hängt die Art der Bahn lediglich von der in der Entfernung r von der Sonne stattfindenden Geschwindigkeit ab, indem*

$$v^2 < \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Ellipse}$$

$$v^2 > \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Hyperbel}$$

$$v^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} \text{ einer Parabel}$$

entspricht.

Der für die Art der Kurve maßgebende Ausdruck

$$\frac{2k^2(M+m)}{r}$$

besitzt eine physikalische Bedeutung. Wenn ein Massenteilchen aus dem Unendlichen in gerader Linie auf einen mit der Zentralkraft $\frac{k^2(M+m)}{r^2}$ ausgestatteten Körper fällt, so kann die Geschwindigkeit v_0 desselben in der Entfernung r leicht gefunden werden; in der Tat ist:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2(M+m)}{r^2}$$

oder

$$2\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2k^2(M+m)}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

oder integriert:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r} + c. \qquad 15)$$

Geht der Körper im Unendlichen vom Zustand der Ruhe aus, so folgt $c = 0$ und daher wird seine Geschwindigkeit in der Entfernung r gefunden aus:

$$v_0^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r}. \qquad 15^a)$$

Geht also durch den Punkt in der Entfernung r von der Zentralkraft in beliebiger Richtung ein Körper mit der Geschwindigkeit v, so bewegt er sich in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem v^2 kleiner, größer oder gleich v_0^2 ist.

Man kann auch folgendermaßen schließen. Die Differenz von 14) und 15[a]) gibt:

$$v_0^2 - v^2 = \frac{k^2(M+m)}{a},$$

oder, wenn nach 7) und 10)

$$k^2(M+m) = \frac{(2c_1)^2}{p} = \frac{(2c_1)^2}{a(1-e^2)}$$

gesetzt wird:

$$v_0^2 - v^2 = \frac{(2c_1)^2}{a^2(1-e^2)};$$

hiernach ist die vom Körper beschriebene Kurve

eine Ellipse $(e < 1)$, wenn $v^2 < v_0^2$,
eine Hyperbel $(e > 1)$, wenn $v^2 > v_0^2$
oder eine Parabel $(e = 1)$, wenn $v^2 = v_0^2$ ist.

Die Gleichung 14) läßt auch noch folgende interessante Interpretation zu. Schlägt man mit dem Radius $2a$ um das Kraftzentrum einen Kreis, und läßt von den Punkten desselben vom Zustand der Ruhe ausgehend, das Massenteilchen nach dem Zentrum fallen, so erhält es im Schnittpunkte der Falllinie mit jeder Ellipse, die $2a$ zur großen Achse und das Zentrum zum einen Brennpunkt hat, eine Geschwindigkeit, die jener der elliptischen Bewegung in der Bahn gleich ist. Denn ist die Geschwindigkeit in der Entfernung $2a$ Null, so bestimmt sich jetzt das c der Gleichung 15) aus

$$\frac{2k^2(M+m)}{2a} + c = 0$$

und die in der Entfernung r erlangte Geschwindigkeit wird also:

$$k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

welches nach 14) auch die der elliptischen Bewegung ist. Der Satz gilt auch noch für die Parabel, wo $\frac{1}{a} = 0$ ist (Satz von Schröder van der Kolk, Astr. Nachr. Nr. 1426).

43. Bestimmung der Bahn aus Ort und Geschwindigkeit. Mittels der bisher erlangten Integrale der Gl. 2) läßt sich folgender wichtige Satz erweisen:

Ist für einen Punkt P in gegebener Entfernung r von der Sonne S Größe und Richtung der Geschwindigkeit bekannt, so kann damit seine Bahn ermittelt werden. In der Tat, fällt man von S aus das Lot $SQ = n$ auf die Richtung der Geschwindigkeit, so wird einerseits (Fig. 30):

$$\sin QP'S = \frac{n}{r}$$

und andererseits:

$$\sin QP'S = \frac{r\,ds}{d\sigma},$$

also:

$$n = \frac{r^2 ds}{d\sigma} = \frac{r^2 \frac{ds}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{k\sqrt{M+m}\sqrt{p}}{v}.$$

Hieraus ergibt sich p, wenn n, v, k als bekannt angenommen werden. Ferner folgt aus

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{und} \quad v^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

a und e. Errichtet man in P zur Bahnrichtung das Lot PN' und macht $\sphericalangle SPN' = \sphericalangle N'PS'$, so geht PS' durch den zweiten Brennpunkt S', und dieser selbst wird durch seine Entfernung von P, nämlich

$$PS' = 2a - r$$

erhalten; die Verbindungslinie SS' gibt die Richtung der Apsidenlinie und damit die Lage der Bahn. Im Fall der Parabel wird die Richtung der Achse durch eine Parallele gegeben, die durch S zu PS' gezogen wird. Im Fall der Hyperbel ist der Winkel SPN' an dem äußeren Teil der Normalen PN'' anzutragen, so daß $\sphericalangle N''PS'' = SPN'$ wird, und dann

$$PS'' = 2a + r$$

zu machen. — Damit ist gezeigt, daß mit den gegebenen Stücken in jedem Fall die Bahn rechnerisch und graphisch ermittelt werden kann.

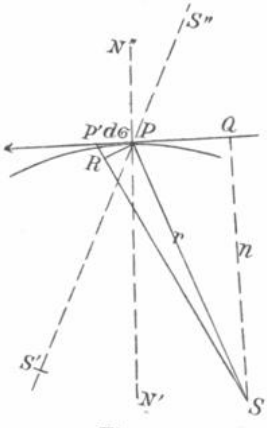


Fig. 30.

Wir haben bis jetzt drei Integrale der Differenzialgleichungen 2) ermittelt und dementsprechend drei unabhängige Konstante a, e, ϖ eingeführt. Die vierte Integration erfordert für die drei verschiedenen Kurven eine gesonderte Behandlung, zu der wir nun übergehen.

Abschnitt XI.

Die Bewegung in der Ellipse.

44. Die Bewegung in der Ellipse. Es ist das Integral der Gleichung 9)

$$\tfrac{1}{2} r^2 ds = \tfrac{1}{2} k \sqrt{M+m}\sqrt{p}\, dt$$

aufzustellen unter der Annahme, daß der Körper sich in einer Ellipse, also einer geschlossenen Kurve bewegt. Da die linke Seite den Elementarsektor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radienvektoren vorstellt, so kann das Integral leicht aufgestellt werden, wenn man die Integration über die Zeit eines ganzen Umlaufes des Körpers erstreckt; es erscheint dann nämlich links die Fläche der Ellipse und rechts die Umlaufszeit T:

$$ab\pi = \tfrac{1}{2} k \sqrt{M+m}\sqrt{p}\, T,$$

wo b die kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet. Ersetzt man b durch $\sqrt{ap}$ (Nr. 37), so wird aus der Gleichung:

$$a^{\frac{3}{2}}\pi = \tfrac{1}{2} k \sqrt{M+m}\, T$$

oder

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(M+m)}{4\pi^2}. \qquad 16)$$

Kann man, wie dies im Sonnensystem der Fall ist, die Massen m als sehr klein gegen die Sonnenmasse M betrachten, so steht auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Größe, die sehr nahe konstant ist. Nimmt man sie in erster Näherung als eine Konstante, so hat man das *dritte Keplersche Gesetz* (Harmonices mundi 1619):

Die Kuben der großen Achsen der in Ellipsen um die Sonne laufenden Himmelskörper verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufszeiten.

Nennt man a', T', m' die zu einem zweiten um die Sonne laufenden Körper gehörigen Stücke, so ist die strenge Form des Gesetzes:

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{T^2(M+m)}{T'^2(M+m')} = \cdots \qquad 17)$$

Um aber den Ort des Planeten für eine beliebige Zeit angeben zu können, muß man die Gl. 9) über beliebige Zeiträume integrieren. Zu dem Zwecke wollen wir zuerst statt der Umlaufszeit den Winkel einführen, der im Mittel in der Zeiteinheit zurückgelegt wird; da der Radiusvektor in der Zeit T den Umkreis 2π zurücklegt, so wird dieser Winkel

$$\mu = \frac{2\pi}{T}. \qquad 18)$$

Aus der Gleichung 16) folgt dann:

$$\mu^2 a^3 = k^2(M+m), \qquad 19)$$

d. h. wenn die Massen m zu vernachlässigen sind, verhalten sich die Kuben der großen Achsen umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Bewegungen.

Dies vorausgesetzt, eliminieren wir mittels der in der Form

$$r^4\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k^2(M+m)p$$

geschriebenen Gleichung 9) aus der Gleichung 13) bez. 14) nämlich

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

die Größe $r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}\right).$$

Multipliziert man dies mit r^2 und beachtet 19) so kommt:

$$\frac{r^2}{\mu^2 a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2ar - r^2 - ap = 2ar - r^2 - a^2 + a^2e^2,$$

letzteres mit Berücksichtigung von $p = a(1-e^2)$; also ist:

$$\frac{r^2}{\mu^2 a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = a^2e^2 - (a-r)^2.$$

Um hier integrieren zu können, führt man statt r eine neue Variable ein, nämlich die durch

$$a - r = ae\cos E \qquad 20)$$

definierte Variable E; mit dieser wird:

$$\frac{dr}{dt} = ae\sin E\frac{dE}{dt}$$

und

$$(a-r)^2 = a^2e^2 - a^2e^2\sin E^2,$$

so daß die Differenzialgleichung in die Form

$$\frac{r}{\mu a}\frac{dE}{dt} = 1$$

oder wenn nach 20) $\frac{r}{a} = 1 - e\cos E$ gesetzt wird, in die Form

$$(1 - e\cos E)\,dE = \mu\,dt$$

übergeht. Diese gibt durch Integration:

$$E - e\sin E = \mu t + c, \qquad 21)$$

wo c eine neue Integrationskonstante bezeichnet. Den Winkel $\mu t + c = M$ nennt man die *mittlere Anomalie*. Zählt man die Zeit von dem Momente t_0 an, den wir als *Epoche* bezeichnen wollen, so kann man 21) auch schreiben:

$$E - e\sin E = \mu(t - t_0) + c \qquad 22)$$

und es bedeutet hiernach die Konstante c die mittlere Anomalie für die Zeit der Epoche. Die Konstante μ, die in 22) noch vorkommt, ist keine neue unabhängige Konstante, denn sie hängt durch die Gl. 19) mit a zusammen.

Wenn c, die vierte unabhängige Integrationskonstante des Problems, bekannt ist, kann aus der Gl. 22) für jede beliebige Zeit t der Winkel E ermittelt werden; damit aber gestaltet sich die vollständige Lösung der Aufgabe folgendermaßen. Die Gl. 20):

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad 20)$$

ergibt den Radiusvektor. Da die Beziehung zwischen diesem und der Variabeln s bereits durch die Gl. 11)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(s - \varpi)} \qquad 11)$$

bekannt ist, so muß auch letztere sich durch E ausdrücken lassen. In der Tat folgt aus

$$r = a(1 - e\cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(s - \varpi)}:$$
$$1 - e^2 = (1 - e\cos E)\,(1 + e\cos(s - \varpi))$$

oder nach Auflösung der rechten Seite:

$$\cos(s - \varpi) = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}. \qquad 23)$$

Die Gl. 20) und 23) lösen die Aufgabe, sind aber unbequem. Multipliziert man 23) mit r in der Form 20), so kommt

$$r\cos(s - \varpi) = a(\cos E - e). \qquad 24)$$

Quadriert man 20) und zieht die ebenfalls quadrierte Gl. 24) davon ab, so erhält man:

$$r^2 \sin(s - \varpi)^2 = a^2 \sin E^2 - a^2 e^2 \sin E^2$$

oder

$$r\sin(s - \varpi) = a\sqrt{1 - e^2}\sin E. \qquad 25)$$

Durch 24) und 25) erhält man r und s gleichzeitig. Man kann noch eine Reihe derartiger Relationen aufstellen; wir gehen darauf aber erst ein, wenn wir die geometrische Bedeutung der bisher eingeführten Größen festgestellt haben.

Wir haben die Variable s in der Gestalt $\frac{ds}{dt}$, der Drehungsgeschwindigkeit um die ζ-Achse, eingeführt und dann nachgewiesen, daß der Körper P in der $\xi\eta$-Ebene, in der er seine erste Elementarbewegung ausführte, dauernd bleibt. Nehmen wir also eine feste Richtung ξ_0 als Anfangslage der ξ-Achse an, so wird s den Winkel der beweglichen ξ-Achse, also des Radiusvektors, mit dieser festen Richtung bezeichnen. Die Konstante ϖ haben wir als Wert des Winkels s, den dieser im Perihel der Kurve annimmt, erkannt. In nebenstehender Figur 31 wird also $\sphericalangle\, \xi_0 SP = s$, $\xi_0 S\Pi = \varpi$ und daher $s - \varpi = \Pi SP$ gleich dem Winkel des Radiusvektors mit der Richtung nach dem Perihel. Man nennt diesen Winkel, den wir in Zukunft mit v bezeichnen wollen, die *wahre Anomalie*. Durch die Koordinaten r und v ist ein Punkt der Ellipse bestimmt; die Gleichungen 24) und 25), nämlich:

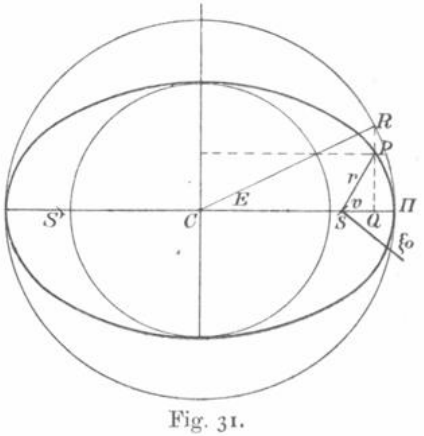


Fig. 31.

$$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$
$$r\cos v = a(\cos E - e) \qquad 26)$$

zeigen, wie sie mit dem Hilfswinkel E zusammenhängen. Damit läßt sich dessen geometrische Bedeutung leicht feststellen. Verlängert man das von P auf die Apsidenlinie gefällte Lot PQ nach der anderen Seite, bis es den um die große Achse als Durchmesser gezogenen Kreis in R schneidet, und verbindet man R mit dem Zentrum C des Kreises, so ist der Winkel von CR mit der Apsidenlinie gleich dem Winkel E; denn

$$SQ = CQ - CS$$

oder

$$r \cos v = a \cos E - ae,$$

in Übereinstimmung mit der zweiten Gl. 26. Man nennt E die exzentrische Anomalie (von ex centro). Der Zusammenhang von E mit der Zeit ist durch 22)

$$E - e \sin E = \mu(t - t_0) + c = M \qquad 22)$$

gegeben. Daraus folgt, daß für $E = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ M ebenfalls diese Werte annimmt, d. h. daß auch die mittlere Anomalie gleich der wahren und der exzentrischen von der Richtung nach dem Perihel an gezählt wird. Aus

$$M = \mu(t - t_0) + c = 2\varkappa\pi \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt

$$t = t_0 + \frac{2\varkappa\pi - c}{\mu},$$

woraus sich die Zeiten der Durchgänge durch das Perihel ergeben. Die Periode derselben ist natürlich die Umlaufsdauer $\frac{2\pi}{\mu} = T$. Fällt die Epoche t_0 mit einer dieser Durchgangszeiten zusammen, so wird

$$c = 2\varkappa\pi. \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Größe μ ist durch die Gleichung 19) oder durch

$$\mu = \frac{k\sqrt{M + m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben; sie erscheint hier zunächst in Teilen des Radius ausgedrückt; multipliziert man sie mit der Anzahl von Sekunden, die auf einen Bogen von der Länge des Radius kommen, d. h. mit 206 264.8, so ist sie in Sekunden verwandelt und stellt dann den Winkel dar, um den die mittlere Anomalie in jeder Zeiteinheit wächst; sie heißt daher »*mittlere Bewegung*«. Offenbar erhält man die mittlere Anomalie, wenn man μ mit der seit dem letzten Periheldurchgang verflossenen Zeit multipliziert.

Das gegenseitige Verhalten der drei Winkel, die wir mit wahrer, exzentrischer und mittlerer Anomalie bezeichnet haben, ergibt sich leicht aus den aufgestellten Gleichungen. Im Perihel sind alle drei gleich Null, mit wachsender wahrer Anomalie wachsen auch die beiden anderen, aber so, daß bis zum Aphel die exzentrische kleiner bleibt als die wahre und die mittlere kleiner als die exzentrische; im Aphel selbst werden alle drei gleichzeitig gleich 180°; von hier an aber bis wieder zum Perihel ist die exzentrische Anomalie immer größer als die wahre und die mittlere größer als die exzentrische. Oder: im ersten Halbkreis ist die wahre Anomalie größer als die mittlere, im zweiten umgekehrt die mittlere größer als die wahre; die exzentrische liegt stets zwischen beiden; $v - M$ wird *Mittelpunktsgleichung* genannt. Auch

das ist ersichtlich: gehören v, M, E zusammen, so entsprechen auch $360^\circ - v$, $360^\circ - M$, $360^\circ - E$ einander.

Wir wollen nun noch weitere Beziehungen zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie und dem Radiusvektor aufstellen. Dabei empfiehlt es sich, den durch

$$e = \sin\varphi$$

definierten sogenannten Exzentrizitätswinkel φ einzuführen, der offenbar der Winkel ist, den die von einem Endpunkt der kleinen Achse nach dem Mittelpunkt und dem einen Brennpunkt gezogenen Strahlen miteinander einschließen. Es wird dann:

$$1 \pm e = 1 \pm \sin\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \pm 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\cos\tfrac{1}{2}\varphi = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2$$

$$\sqrt{1-e^2} = \cos\varphi, \quad \sqrt{1+e} = \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\sqrt{1-e} = \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

ferner

der Parameter $p = a\cos\varphi^2$

die kleine Halbachse $b = a\cos\varphi$.

Die bisherigen Formeln werden in dieser Schreibweise:

$$r = \frac{a\cos\varphi^2}{1 + \sin\varphi\cos v} \qquad \text{I.}$$

$$r = a(1 - \sin\varphi\cos E) \qquad \text{II.}$$

$$\begin{aligned} r\cos v &= a(\cos E - \sin\varphi) \\ r\sin v &= a\cos\varphi\sin E. \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

Bildet man aus

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$$

die Ausdrücke

$$1 + \cos v = 2\cos\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1 - e\cos E} = \frac{(1-e)\,2\cos\tfrac{1}{2}E^2}{1 - e\cos E}$$

$$1 - \cos v = 2\sin\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1 - e\cos E} = \frac{(1+e)\,2\sin\tfrac{1}{2}E^2}{1 - e\cos E},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}v &= \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1 - e\cos E}}\cos\tfrac{1}{2}E \\ \sin\tfrac{1}{2}v &= \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1 - e\cos E}}\sin\tfrac{1}{2}E \end{aligned} \qquad \text{IV.}$$

und daher

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \qquad \text{V.}$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\sin E \sec\tfrac{1}{2}E^2.$$

Multipliziert man IV. mit

$$\sqrt{r} = \sqrt{a}\sqrt{1 - e\cos E},$$

so erscheint:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E \\ \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\sqrt{a(1+e)}\sin E\sec\tfrac{1}{2}E \end{aligned}\right\} \quad \text{VI.}$$

oder

$$\begin{aligned} \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi)\cos\tfrac{1}{2}E \\ \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}\varphi)\sin\tfrac{1}{2}E. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}(v - E) &= \sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin E \\ \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}(v - E) &= \sqrt{a}\,(\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos E) \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v - E) = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sin E}{1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\cos E}.$$

Verbindet man die beiden Gleichungen VI. durch die Multiplikatoren $-\sin\tfrac{1}{2}E$ und $\cos\tfrac{1}{2}E$, beziehungsweise $\sin\tfrac{1}{2}E$ und $\cos\tfrac{1}{2}E$, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(v - E) &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{a}{r}}\sin E = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v \\ \text{und} \\ \sin\tfrac{1}{2}(v + E) &= \cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{a}{r}}\sin E = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v. \end{aligned}\right\} \quad \text{VII.}$$

Aus all diesen Formeln wird man je nach dem vorliegenden Fall die Auswahl treffen. Handelt es sich um die Berechnung des Radiusvektors und der wahren Anomalie aus der exzentrischen, eine Aufgabe, die ständig bei der Ephemeridenrechnung zu lösen ist, so wird im allgemeinen die Anwendung der Gruppen III. oder VI. die schnellste Rechnung gewähren; erstere sind namentlich dann wohl überhaupt die bequemsten, wenn man Additionslogarithmen verwendet, letztere wird man nur dann wählen, wenn viele Örter zu rechnen sind, weil sonst die Berechnung der Hilfsgrößen $\sqrt{a(1-e)}$ und $\sqrt{a(1+e)}$ sich nicht lohnt. Man kann auch r aus II. und v aus V. berechnen oder r aus II. und dann v mittels der ersten Gl. VII. und wird letzteren Weg namentlich dann einschlagen, wenn die äußerste Genauigkeit erfordert wird. Endlich kann man v aus V. und dann r aus I. bestimmen. — Eine besondere Kontrolle dieser Rechnungen ist gewöhnlich, besonders bei Ephemeridenrechnungen, nicht erforderlich, da man durch Bildung der Differenzen des für äquidistante Zeiten berechneten v leicht jede Unregelmäßigkeit bemerkt. Für einzelne Örter rechnet man nach zwei der angegebenen Methoden. Wir führen nun ein *Beispiel* nach allen angeführten Methoden durch.

Für den periodischen Kometen Brooks war 1896 Juni 17.5

$\log a$	0.567 3639
φ	27° 59′ 51.″29
$\sin\varphi$	9.671 5748
$\cos\varphi$	9.945 9447
$a\cos\varphi$	0.513 3086
$a\sin\varphi$	0.238 9387
$\frac{1}{2}\varphi$	13° 59′ 55.″65
$\sin\frac{1}{2}\varphi$	9.383 6384
$\cos\frac{1}{2}\varphi$	9.986 9064
p	0.459 2533

$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$	58° 59′ 55.″65
$\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	0.221 2055
$1 + \sin\varphi$	0.167 1502
$1 - \sin\varphi$	9.724 7392
$\sqrt{a(1+\sin\varphi)}$	0.367 2570
$\sqrt{a(1-\sin\varphi)}$	0.146 0515

Nach III.

E	325° 16′ 50.″86
$\sin E$	9.755 5357$_n$
$\cos E$	9.914 8470
Sub.	0.367 6648
$\cos E - e$	9.547 1822
$r\sin v$	0.268 8443$_n$
$r\cos v$	0.114 5461
$\cos v$	9.758 9100
* $\operatorname{tg} v$	0.154 2982$_n$
v	305° 1′ 46.″03
r	0.355 6361

Nach VI.

E	325° 16′ 50.″86
$\frac{1}{2}E$	162 38 25.43
$\sin\frac{1}{2}E$	9.474 7521
$\cos\frac{1}{2}E$	9.979 7536$_n$
$\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}v$	9.842 0091
$\sqrt{r}\cos\frac{1}{2}v$	0.125 8051$_n$
$\cos\frac{1}{2}v$	9.947 9870
* $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$	9.716 2040$_n$
$\frac{1}{2}v$	152° 30′ 53.″03
v	305 1 46.07
$\sqrt{r}$	0.177 8181
r	0.355 6362

Nach II. und V.

E	325° 16′ 50.″86
$\cos E$	9.914 8470
$e\cos E$	9.586 4218
$1 - e\cos E$	9.788 2724
r	0.355 6363
$\frac{1}{2}E$	162° 38′ 25.″43
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$	9.494 9985
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$	9.716 2040
* $\frac{1}{2}v$	152° 30′ 53.″03
v	305 1 46.07

Nach II. und VII.

E	325° 16′ 50.″86
$\cos E$	9.914 8470
$ae\cos E$	0.153 7857
Sub.	0.211 7276
r	0.355 6363
$\sqrt{\frac{a}{r}}$	0.105 8638
$\sin E$	9.755 5357$_n$
$\sin\frac{1}{2}(v-E)$	9.245 0379$_n$
$v - E$	− 20° 15′ 4.″78
v	305 1 46.08

Nach V. und I.

E	325° 16′ 50.″86
$\frac{1}{2}E$	162 38 25.43
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$	9.494 9985
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$	9.716 2040
v	305° 1′ 46.″07
$\cos v$	9.758 9101
$e\cos v$	9.430 4849
$1 + e\cos v$	0.103 6170
r	0.355 6363

Die mit * bezeichneten Zeilen schreibt ein geübter Rechner nicht an. Konstante Logarithmen sind in der Rechnung nicht angegeben; man hat diese zur Benutzung für die fortlaufende Rechnung auf den unteren Rand eines Papierstreifens aufgeschrieben.

Die umgekehrte Aufgabe, die exzentrische Anomalie aus der wahren zu ermitteln, kommt weit seltener vor. Man kann sich hierzu der Formel V.:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

bedienen, es ist aber, besonders bei kleiner Exzentrizität, sicherer, die Formel aus VII.

$$\sin\tfrac{1}{2}(v - E) = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v$$

heranzuziehen, vorausgesetzt, daß r gegeben oder aus I. berechnet ist; der Vorteil dieses Weges tritt besonders dann hervor, wenn man aus der exzentrischen Anomalie dann weiter auch die mittlere aus $M = E - e\sin E$ zu berechnen hat, was meistens der Fall ist; man braucht dann $\sin E$, das man einerseits durch direktes Aufschlagen des aus VII. folgenden Wertes von E, andererseits aber ohne erhebliche Mehrarbeit aus III:

$$\sin E = \frac{r\sin v}{a\cos\varphi} = \frac{r}{p}\cos\varphi\sin v$$

erhalten kann, wodurch eine Kontrolle erzielt wird. Wir behandeln obiges Beispiel, indem wir jetzt

$\log a$	0.567 3639
$\sin\varphi$	9.671 5748
$\cos\varphi$	9.945 9447
e''	4.985 9999

$\sin\frac{1}{2}\varphi$	9.383 6384
p	0.459 2533
v	305° 1′ 46″.08

als bekannt voraussetzen und E und M suchen:

v	305° 1′ 46″.07
$\cos v$	9.758 9101
$e\cos v$	9.430 4849
$1 + e\cos v$	0.103 6170
$\frac{r}{p}$	9.896 3830
$\sqrt{\frac{r}{p}}$	9.948 1915
$\sin v$	$9.913\ 2081_n$
$\sin\frac{1}{2}(v-E)$	$9.245\ 0380_n$
$v - E$	−20° 15′ 4″.80

E	325° 16′ 50″.87
$\sin E$	$9.755\ 3357_n$

Kontrolle

$\frac{r}{p}\cos\varphi$	9.842 3277
$\sin v$	$9.913\ 2081_n$
$\sin E$	$9.755\ 5358_n$
$e''\sin E$	$4.741\ 5356_n$
	−15° 19′ 8″.74
M	340 35 59.61

Wir leiten noch einen genäherten Wert für die *Mittelpunktsgleichung* $v - M$ ab, der bei kleinen Exzentrizitäten von Nutzen ist. Da $\operatorname{tg} s = s + \frac{1}{3}\operatorname{tg} s^3 + \cdots$, so folgt *mit Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung* aus der oben gegebenen Beziehung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v - E) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\sin E}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos E}$$

sofort:

$$v - E = 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sin E + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2\sin 2E + \cdots.$$

Wird dies mit

$$E - M = e\sin E$$

verbunden, so ergibt sich

$$v - M = (e + 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\sin E + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2\sin 2E + \cdots$$

oder wenn wieder mit Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung

$$2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = e$$

gesetzt wird:

$$v - M = 2e \sin E + \tfrac{1}{4}e^2 \sin 2E + \cdots.$$

Wird rechts E durch M ersetzt, so gibt eine einfache Entwicklung

$$v - M = 2e \sin M + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2M + \cdots$$

und ebenso, wenn es durch v ersetzt wird:

$$v - M = 2e \sin v + \cdots.$$

Auf die allgemeinen Entwicklungen einzugehen, ist hier nicht am Platz.

45. Die Keplersche Gleichung. Die Bestimmung der exzentrischen Anomalie E aus der seit dem Perihelsdurchgang verflossenen Zeit oder der mittleren Anomalie M, wird durch die Gl. 22)

$$E - e \sin E = M$$

geboten, die unter dem Namen der *Kepler*schen bekannt ist. Wenn darin E und M in Graden, . . . ausgedrückt sind, muß auch $e \sin E$ so ausgedrückt werden, was am einfachsten geschieht, indem man den in Sekunden verwandelten, d. h. mit 206 264″.8 multiplizierten Wert von $e = \sin \varphi$ benutzt. Die Gleichung ist eine transzendente, also direkt nicht auflösbar, es gibt aber sehr viele Methoden, den Wert von E durch sukzessive Näherung zu erlangen. Da der astronomische Rechner die Keplersche Gleichung namentlich bei Herstellung von Ephemeriden sehr häufig aufzulösen hat, wollen wir die bewährtesten dieser Methoden besprechen. Eine graphische Darstellung der hier vorliegenden Verhältnisse wird uns sofort einen wichtigen Fingerzeig geben und außerdem zu einer brauchbaren graphischen Methode der Auflösung verhelfen. Wir tragen auf der Abszissenachse OX die Bogen und als zugehörige Ordinaten deren Sinus auf, d. h. wir konstruieren die Sinuskurve; macht man dann den Bogen $OA = M$ und zieht durch A eine Linie AC der Art, daß $\sphericalangle XAC = \psi$ wird, wo ψ durch $\operatorname{cotg} \psi = e$ bestimmt ist — eine Konstruktion, die am einfachsten auf die in der Figur angegebene Weise ausgeführt wird —, so erkennt man, wenn C der Schnitt dieser Linie mit der Sinuskurve und OB die zugehörige Abszisse ist, sofort:

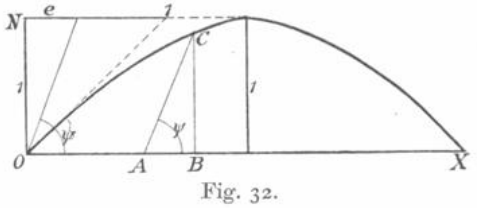


Fig. 32.

$$\operatorname{cotg} \psi = e = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\sin \overline{OB}} = \frac{\overline{OB} - M}{\sin \overline{OB}}$$

oder:

$$\overline{OB} - e \sin \overline{OB} = M,$$

d. h. $\overline{OB}$ wird die exzentrische Anomalie, wenn M die mittlere ist. Die hieraus sich ergebende Methode der graphischen Bestimmung von E (zuerst angegeben von Waterstone, Monthly Not. Vol. X, 1850 und Dubois, Astr. Nachr. Nr. 1404) findet

man ausführlich erläutert und mit der nötigen Sinuskurve ausgestattet in den »Tafeln« Nr. XIII. Hier wollen wir aus der graphischen Darstellung nur den Schluß ziehen, daß offenbar bei Exzentrizitäten in der Nähe von 1 und bei kleinen Werten von M der Schnitt von AC mit der Sinuskurve nur sehr unsicher festgestellt werden kann, daß also E sich dann aus der Keplerschen Gleichung nicht bestimmen läßt. Wir werden also zwei Fälle zu unterscheiden haben: kleine Exzentrizitäten, wo die Keplersche Gleichung immer aufgelöst werden kann, und große in der Nähe von 1 befindliche Exzentrizitäten, wo für kleine M überhaupt ein anderes Verfahren eingeschlagen werden muß. Wir betrachten vorläufig nur den ersten Fall und kommen auf den zweiten erst später zurück.

Der Weg der sukzessiven Näherung setzt den Besitz eines *ersten* Näherungswertes voraus und dann eine rasch fördernde Methode, ihn zum wahren zu verbessern. Was ersteren anbelangt, so kann man ihn, wie oben erläutert, graphisch erhalten, oder man kann ihn aus Tabellen entnehmen, die mit den zwei Argumenten e und M angelegt sind; eine solche Tabelle ist in Taf. X in den »Tafeln« oder in weitaus größerem Umfang in den »Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems von *J. J. Åstrand*, mit einer Einleitung von *H. Bruns*« geboten. Sind keine solchen Hilfsmittel zur Hand, so wird man davon Gebrauch machen, daß E zwischen den Grenzen M und $M \pm e''$ liegen muß, wo e'' die in Sekunden ausgedrückte Exzentrizität bezeichnet und wo das obere Zeichen im ersten, das untere im zweiten Halbkreis zu nehmen ist; bei kleiner Exzentrizität wird also schon M oder ein schätzungsweise vermehrter oder verminderter Wert eine Näherung darstellen. Es gibt auch mehrere Methoden, die durch eine kleine direkte Rechnung einen sehr guten Näherungswert verschaffen, so zunächst das *Encke*sche Verfahren (Astr. Nachr. Nr. 714), das beliebig weit ausgebaut werden kann (siehe *N. Herz*, Astr. Nachr. Nr. 2354), aber dann aufhört bequem zu sein. In diesem wird

$$E - M = x$$

gesetzt, worauf die Keplersche Gleichung die Form

$$x = e \sin(M + x),$$

oder nach Entwicklung des sin die Form:

$$x = e \sin M(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots) + e \cos M(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots)$$

annimmt; diese gibt:

$$x = e \sin M + e \cos M x - \tfrac{1}{2} e \sin M x^2 - \tfrac{1}{6} e \sin M \operatorname{cotg} M x^3 + \cdots$$

oder

$$x = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} - \frac{1}{2}\frac{e \sin M}{1 - e \cos M} x^2 - \frac{1}{6}\frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \operatorname{cotg} M x^3 + \cdots;$$

wird

$$\frac{e \sin M}{1 - e \cos M} = \operatorname{tg} y$$

und in den höheren Gliedern $x = \operatorname{tg} y$ gesetzt, so folgt:

$$x = \operatorname{tg} y - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} y^3 - \tfrac{1}{6} \operatorname{cotg} M \operatorname{tg} y^4 + \cdots;$$

einen ebenso genauen, aber einfacheren Ausdruck erhält man hieraus, wenn man $\sin y = \eta$ statt $\operatorname{tg} y$ einführt; da

$$\operatorname{tg} y = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \eta + \tfrac{1}{2}\eta^3 + \cdots, \quad \operatorname{tg} y^3 = \eta^3 + \cdots, \quad \operatorname{tg} y^4 = \eta^4 + \cdots,$$

so wird

$$x = \eta - \tfrac{1}{6}\operatorname{cotg} M \eta^4 + \cdots$$

und man hat daher folgendes einfache System zur Erlangung eines Näherungswertes durchzurechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \\ \eta &= \operatorname{tg} y \cos y \\ x &= \alpha\eta + \beta \operatorname{cotg} M \eta^4, \end{aligned} \qquad \text{A.}$$

wobei die Zahlenwerte von α und β, wenn x gleich in Sekunden erscheinen soll, folgendermaßen zu nehmen sind:

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 5.3144251 \\ \log \beta &= 4.5362\,74_n . \end{aligned}$$

Nimmt man obiges Beispiel (Seite 140) vor, wo

$$\begin{aligned} \log e &= \log \sin \varphi = 9.6715748 \\ \log e'' &\qquad\quad = 4.9859999 , \end{aligned}$$

so wird für $M = 340^\circ\, 35'\, 59.''61$ die Rechnung sich folgendermaßen stellen:

$\sin M$	9.5213511_n	η	9.4305287_n
$\cos M$	9.9746139	η^4	7.7221148
$e \cos M$	9.6461887	$\operatorname{cotg} M$	0.4532628_n
$1 : (1 - e \cos M)$	0.2539739	$\operatorname{cotg} M\eta^4$	8.1753776_n
$e \sin M$	9.1929259_n	$\alpha\eta$	$-\ 15^\circ 26'\ 24.''51$
$\operatorname{tg} y$	9.4468998_n	$\beta \operatorname{cotg} M\eta^4$	$+\ \ 8\ 34.82$
$\cos y$	9.9836289	$E - M$	$-\ 15\ 17\ 49.69$

Dieser Wert weicht nur wenig mehr als $1'$ von dem wahren ab und kann leicht durch eine der im folgenden anzugebenden Methoden zum wahren verbessert werden.

Ein zweites, ziemlich ähnliches Verfahren hat *Tietjen* angegeben (Veröff. des Rechen-Institutes Nr. 1). Setzt man hier ebenfalls $E = M + x$, so wird

$$x = e \sin(M + x) = e \sin M \cos x + e \cos M \sin x ,$$

oder

$$\frac{x}{\cos x} = e \sin M + e \cos M \operatorname{tg} x ;$$

wird hiervon

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

subtrahiert, so folgt:

$$\frac{x - \sin x}{\cos x} = e \sin M - (1 - e \cos M) \operatorname{tg} x ,$$

oder

$$\operatorname{tg} x = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} - \frac{x - \sin x}{\cos x (1 - e \cos M)} .$$

Wird x_0 aus

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$$

berechnet, so folgt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} - \frac{(x - \sin x) \cos x_0}{(1 - e \cos M) \cos x \cos x_0},$$

oder

$$\sin (x - x_0) = - \frac{(x - \sin x) \cos x_0}{1 - e \cos M}.$$

Nun ist

$$x - \sin x = (x_0 - \sin x_0) + (x - x_0) - (\sin x - \sin x_0)$$

$$= (x_0 - \sin x_0) + (x - x_0) - 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

Beachtet man, daß x und x_0 sich nur um Größen dritter Ordnung voneinander unterscheiden, wenn die Exzentrizität erster Ordnung genannt wird, so wird man statt des $\sin \frac{1}{2}(x - x_0)$ den Bogen setzen dürfen und dann erhalten:

$$x - \sin x = (x_0 - \sin x_0) + 2 (x - x_0) \sin^2 \tfrac{1}{4}(x + x_0)^2.$$

Wird dies oben eingetragen und außerdem

$$\frac{\cos x_0}{1 - e \cos M} = A$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$(x - x_0) = - (x_0 - \sin x_0) A - 2 A (x - x_0) \sin^2 \tfrac{1}{4}(x - x_0)^2$$

oder

$$x - x_0 = - \frac{(x_0 - \sin x_0) A}{1 + 2 A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2}.$$

Da genähert

$$\frac{1}{1 + 2 A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2} = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x_0^2 = \cos x_0,$$

so wird in

$$x - x_0 = - \frac{(x_0 - \sin x_0) A \cos x_0}{\cos x_0 \left(1 + 2 A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2\right)}$$

der Nenner sehr nahe gleich 1 sein. Da ferner bekanntlich

$$x_0 - \sin x_0 = \tfrac{1}{6} \sin x_0^3 + \tfrac{3}{40} \sin x_0^5 + \cdots,$$

so wird man

$$(x_0 - \sin x_0) \cos x_0 = C \sin x_0^3$$

setzen dürfen, und es wird C eine wenig veränderliche, mit dem Argument x_0 leicht tabulierbare Größe sein. Es folgt dann schließlich die fast strenge Formel:

$$x - x_0 = - \frac{A C \sin x_0^3}{\cos x_0 \left(1 + 2 A \sin^2 \frac{1}{4}(x + x_0)^2\right)}.$$

Die zweckmäßigste Anwendung derselben wird sein, den Nenner gleich 1 zu setzen und aus

$$x = x_0 - A C \sin x_0^3$$

den Näherungswert der exzentrischen Anomalie abzuleiten, der dann, wie unten angegeben, weiter verbessert wird. Eine Variante dieser Methode ist, zu setzen:

$$\sigma = C \sin x_0^3 \cos x_0$$

und σ zu tabulieren; es wird dann:

$$x = x_0 - \frac{\sigma}{1 - e\cos M}.$$

Die Taf. XI gibt $\log C$, bereits in Bogensekunden ausgedrückt; die Taf. XII gibt σ. Wir stellen die Formeln dieser Methode zusammen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_0 &= \frac{e\sin M}{1 - e\cos M} \\ A &= \frac{\cos x_0}{1 - e\cos M} \\ E &= M + x_0 - A\,C\sin x_0{}^3 \\ & \quad C \text{ aus Taf. XI} \end{aligned} \qquad \text{B.}$$

oder:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_0 &= \frac{e\sin M}{1 - e\cos M} \\ E &= M + x_0 - \frac{\sigma}{1 - e\cos M} \\ & \quad \sigma \text{ aus Taf. XII.} \end{aligned} \qquad \text{C.}$$

Für Exzentrizitätswinkel unter 15° geben diese Formeln für eine fünfstellige Rechnung den genauen Wert, für sechs- und siebenstellige Rechnung einen so guten Näherungswert, daß man mit *einer* weiteren Näherung am Ziel ist. Für größere Exzentrizitäten kommt man ebenso weit, wenn man die früher angegebene strengere Formel benutzt, es ist aber rechnerisch vorteilhafter, B. oder C. zu benutzen und eine Näherung mehr zu machen.

Beispiel: Nimmt man wieder die obigen Zahlen (Seite 143):

$$\begin{aligned} \log e &= 9.6715748 \\ M &= 340^\circ 35' 59''.61, \end{aligned}$$

so wird hier:

$\sin M$	9.5213511_n
$\cos M$	9.9746139
$e\cos M$	9.6461887
$1:(1 - e\cos M)$	0.2539739
$e\sin M$	9.1929259_n
$\operatorname{tg} x_0$	9.4468998_n
x_0	$-15^\circ 38' 0''.25$
$\sin x_0$	9.4305286_n
$\cos x_0$	9.9836289

A	0.237603
C	4.534492
$\sin x_0{}^3$	8.291586_n
$-A\,C\sin x_0{}^3$	3.063681
	$+19' 17''.93$
$E - M$	$-15^\circ 18' 42''.32$

Dieser Wert weicht nur $26''$ vom wahren ab.

Die bisher besprochenen Methoden zur Erlangung eines ersten Näherungswertes für E braucht man nur anzuwenden, wenn vereinzelte Werte zu rechnen sind oder am Anfang der Berechnung einer Ephemeride. Hat man aber für viele äquidistante Werte von M die E zu rechnen, so wird man nach Durchrechnung der zwei bis drei ersten Fälle für die folgenden durch Extrapolation der Größen $E - M$, Werte von E finden, die bereits bis auf wenige Sekunden an die Wahrheit herankommen, also leicht verbessert werden können. Hat man z. B. gefunden:

	M	E
Dez. 15	$10^{\circ}\,38'\,28''.69$	$19^{\circ}\,44'\,34''.45$
19	$11\;\;11\;\;59.32$	$20\;\;44\;\;32.60$
23	$11\;\;45\;\;29.95$	$21\;\;44\;\;12.21$
27	$12\;\;19\;\;\;0.58$	$22\;\;43\;\;32.69$

so legt man das Schema an:

	$E-M$	Δ'	Δ''	Δ'''
Dez. 15	$9^{\circ}\;6'\;5''.76$			
		$+\;26'\;27''.52$		
19	$9\;\;32\;\;33.28$		$-\;18''.54$	
		$+\;26\;\;\;8.98$		$-\;0''.59$
23	$9\;\;58\;\;42.26$		$-\;19.13$	$-\;0.59$
		$+\;25\;\;49.85$		
27	$10\;\;24\;\;32.11$		$-\;19.72$	
		$+\;25\;\;30.13$		
31	$10\;\;50\;\;\;2.24$			

und findet für Dez. 31. den kursiv eingetragenen Wert, der

$$E = 12^{\circ}\,52'\,31''.21 + 10^{\circ}\,50'\,2''.24 = 23^{\circ}\,42'\,33''.45$$

gibt und nur $0''.13$ von dem wahren Wert abweicht.

Die Verbesserung des Näherungswertes zum wahren geschieht am einfachsten durch Bildung des Differenzialquotienten $\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E}$; rechnet man nämlich mit dem Näherungswert E_1 den zugehörigen Wert von M, nämlich $M_1 = E_1 - e''\sin E_1$, so ist offenbar sehr nahe

$$E - E_1 = (M - M_1)\frac{dE}{dM}$$

und $E_1 + (E - E_1)$ wird dem strengen Werte um so näher liegen, je genauer E_1 bereits war. Die Berechnung von $\frac{1}{1 - e\cos E}$ ist leicht auszuführen; fertig berechnet gibt diesen Ausdruck die Taf. XIV; in den Åstrandschen Tafeln wird er durch die ersten Differenzen geboten. Nach einem Vorschlag von Gauß (Theoria motus art. 11) benutzt man zur empirischen Bildung des Differenzialquotienten die logarithmischen Differenzen. Sei E_1 der genäherte, $E_1 + x = E$ der strenge Wert, dann notiere man bei Entnahme von $\log\sin E_1$ die logarithmische Differenz in Einheiten der letzten Stelle für $1''$ Änderung von E_1 mit ihrem Zeichen und nenne sie d (dieses wird positiv im ersten und vierten, negativ im zweiten und dritten Quadranten sein), ferner ebenso in Einheiten derselben Dezimale die Änderung von $\log e''\sin E_1$ für 1 Einheit der Zahl $e''\sin E_1$ und nenne sie D (stets positiv), dann ist

$$e''\sin(E_1 + x) = e''\sin E_1 + \frac{d}{D}x,$$

wo x in Sekunden ausgedrückt gedacht ist; also wird

$$E_1 + x = M + e''\sin(E_1 + x) = M + e''\sin E_1 + \frac{d}{D}x$$

oder

$$x = (M + e''\sin E_1 - E_1)\frac{D}{D - d}$$

oder wenn

$$M + e''\sin E_1 = E_2$$

gesetzt wird:

$$x = (E_2 - E_1)\frac{D}{D-d}.$$

Der wahre Wert wird also:

$$E = E_2 + (E_2 - E_1)\frac{D}{D-d}\cdot\frac{d}{D}$$

oder

$$E = E_2 + (E_2 - E_1)\frac{d}{D-d}.$$

Wir wollen nur die Gaußsche Methode durch ein Beispiel erläutern. Es sei wie oben (Seite 143)

$$\begin{array}{rl} M & 340^\circ 35' 59''.61 \\ \log e & 9.671\,5748 \\ \log e'' & 4.985\,9999 \end{array}$$

und als Näherungswert von E werde der dort gefundene

$$E_1 = 340^\circ 35' 59''.61 - 15^\circ 17' 49''.69$$

genommen, den man abrunden wird auf:

$$\begin{array}{rll} E_1 & 325^\circ 18' 10''.00 & \\ \sin E_1 & 9.755\,2952_n & d = +\,30.5 \\ e'' \sin E_1 & 4.741\,2951_n & \\ e'' \sin E_1 & -\,15^\circ 18' 38''.21 & D = +\,79.0 \\ E_2 & 325\ 17\ 21.40 & \\ E_2 - E_1 & -\,48''.60 & \frac{d}{D-d} = +\frac{30.5}{48.5} = [9.7986] \\ \frac{d}{D-d}(E_2 - E_1) & -\,30''.56 & \\ E & 325^\circ 16' 50''.84 & \\ \sin E & 9.755\,5358_n & \\ e'' \sin E & 4.741\,5357_n & \\ e'' \sin E & -\,15^\circ 19' 8''.76 & \\ M + e'' \sin E & 325\ 16\ 50.85\,. & \end{array}$$

Der strenge Wert ist also $E = 325^\circ 16' 50''.85 + \frac{5}{8}0''.01$.

Um die wahre Anomalie aus der mittleren zu erhalten, haben wir die Zwischengröße der exzentrischen Anomalie eingeführt. Man kann aber auch den Unterschied $v - M$ in Reihen entwickeln, wodurch man die wahre Anomalie unmittelbar erhält. Dieses Verfahren empfiehlt sich aber nur bei ganz kleinen Exzentrizitäten, wie sie bei den großen Planeten auftreten, weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen. Zu erwähnen ist aber, daß *Tietjen* ausführliche Tafeln konstruiert hat (Veröff. des Rechen-Instituts Nr. 1), die für die Exzentrizitätswinkel von $0^\circ 0'$ bis $20^\circ 20'$ von $20'$ zu $20'$ fortschreitend $v - M$ zu entnehmen gestatten, allerdings nur mit einer Genauigkeit, wie sie etwa für rohere Ephemeriden und Störungsrechnungen ausreichend ist.

46. Die Differenzialquotienten der Polarkoordinaten nach der Zeit werden häufig gebraucht und mögen daher an dieser Stelle im Zusammenhang abgeleitet werden.

Da sich s von der wahren Anomalie v nur um eine Konstante unterscheidet, gibt die Gl. 9) (Seite 127) unmittelbar

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}{r^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p}(1+e\cos v)\right)$$

$$= +r^2\frac{e}{p}\sin v\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}e\sin v$$

$$= \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}}\operatorname{tg}\varphi\sin v.$$

Wird nochmals differenziert, so kommt:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}{r^3}\frac{dr}{dt} = -\frac{2k^2(1+m)}{r^3}e\sin v$$

und

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}e\cos v\frac{dv}{dt} = \frac{k^2(1+m)}{r^2}e\cos v.$$

Eine elegante Gleichung erhält man auch, wenn man die Differenzialquotienten von r^2 bildet:

$$\frac{dr^2}{dt} = 2r\frac{dr}{dt} = \frac{2k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}er\sin v$$

oder wenn

$$r\sin v = a\cos\varphi\sin E$$

substituiert wird:

$$\frac{dr^2}{dt} = 2k\sqrt{1+m}\,e\sqrt{a}\sin E.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2k\sqrt{1+m}\,e\sqrt{a}\cos E\frac{dE}{dt}$$

oder da aus

$$E - e\sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}t$$

sich ergibt

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{a}{r} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}}\frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = \frac{2k^2(1+m)e\cos E}{r}$$

oder wenn $r = a - ae\cos E$ beachtet wird:

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2k^2(1+m)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Wir stellen die Formeln nochmals zusammen:

$$\text{Ellipse:}\quad \frac{dv}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\frac{\sqrt{p}}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\frac{e\sin v}{\sqrt{p}} = k\sqrt{1+m}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin v}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{2e\sin v}{r^3}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = k^2(1+m)\frac{e\cos v}{r^2}$$

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = k^2(1+m)\,2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Wir fügen gleich die Werte für die Parabel an, da sie sich hieraus ergeben, wenn man $e = 1$ setzt. Wir führen gleichzeitig die Periheldistanz $q = \frac{1}{2}p$ ein:

$$\text{Parabel:}\quad \frac{dv}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\frac{\sqrt{2q}}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\frac{\sin v}{\sqrt{2q}}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{2\sin v}{r^3}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = k^2(1+m)\frac{\cos v}{r^2}$$

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = k^2(1+m)\frac{2}{r}.$$

47. Die Gaußsche Konstante k; die astronomischen Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse. Die in den Grundgleichungen 2) (Seite 125) eingeführte Konstante k, welche die Gravitationskonstante des Sonnensystems heißt, kann jetzt bestimmt werden. Zunächst sind aber die Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse festzusetzen, die wir dieser Bestimmung zugrunde legen wollen. Wir bestimmen als

Einheit der Zeit den mittleren Sonnentag,
Einheit der Länge die halbe große Achse der Erdbahn,
Einheit der Masse die Sonnenmasse.

Dann wird in der auf den Planeten Erde angewendeten Gleichung 16) (Seite 133)

$$k = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{M+m}\,T}$$

zu setzen sein $a = 1$, $M = 1$, m die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse, T die Umlaufszeit der Erde um die Sonne oder das siderische Jahr, ausgedrückt in mittleren Sonnentagen. Nach den Annahmen von Gauß (Theoria motus art. 1) ist:

$$m = \frac{1}{354\,710} = 0.000\,002\,8192$$

$$T = 365.256\,3835$$

und es stellt sich daher die Berechnung von k folgendermaßen

$$\begin{array}{ll} \log 2\pi & 0.798\,179\,8684 \\ \text{compl. } \log T & 7.437\,402\,1852 \\ \text{compl. } \log \sqrt{1+m} & 9.999\,999\,3878 \\ \hline \log k = & 8.235\,581\,4414_{-10} \\ k = & 0.017\,202\,09895 \end{array}$$

Sehr häufig tritt k in Verbindungen ein, die durch Multiplikation mit 206 264.806 aus Teilen des Radius in Sekunden zu verwandeln sind. Man führt dies am einfachsten dadurch aus, daß man k, ausgedrückt in Sekunden, benutzt. Dieser Wert ist

$$k'' = 3548''.18761$$
$$\log k'' = 3.550\,006\,5746$$

und ist offenbar wegen Gl. 19) (Seite 133), die hier wird:

$$\mu = k''\sqrt{1+m}$$

sehr nahe gleich der mittleren täglichen Bewegung der Erde.

Mit den angegebenen Zahlenwerten nennt man k wohl auch die Gaußsche Konstante.

Die Angaben, welche Gauß der Bestimmung von k zugrunde gelegt hat, sind gegenwärtig veraltet und müßten durch andere ersetzt werden; da eine derartige Änderung von k, die wegen der Unsicherheit der Erdmasse doch nie als eine definitive gelten könnte, manche Nachteile hat, zieht man es vor, k als absolute Konstante beizubehalten und dafür die Längeneinheit derart zu ändern, daß die Gleichung 16) bestehen bleibt trotz der neuen Annahmen über m und T. Die Längeneinheit ist nach dieser Übereinkunft durch k bestimmt; in ihr ausgedrückt wird die halbe große Achse der Erdbahn nicht genau gleich 1, sondern eine hiervon etwas abweichende Zahl. Da diese Abweichung sehr klein ist (mit den Annahmen, die Newcomb gemacht hat, wird $\log a = 0.000\,000\,013$, Astr. Papers, Vol. VI, S. 10) ist sie eine leichter zu ertragende Unbequemlichkeit, als die Änderung der fundamentalen Konstanten k.

Durch Einführung einer anderen Zeiteinheit kann man es dahin bringen, daß $k = 1$ wird, was bei theoretischen Untersuchungen zur Vereinfachung der Schreibweise beiträgt und daher vielfach benutzt wird. Diese Zeiteinheit ist offenbar

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{0.017\,202\,098\,95} = 58.132\,44087 \text{ mittlere Sonnentage.}$$

48. Beziehungen zwischen mehreren Orten einer Ellipse und den Elementen. Wir haben bisher *einen* Ort in der Ellipse betrachtet und gezeigt, wie er durch die Elemente der Bahn und die Zeit ermittelt werden kann; wir wollen jetzt *zwei* und *drei* Orte in ihren Beziehungen zu den Bahnelementen untersuchen, dabei aber mit Rücksicht auf unsere Hauptaufgabe, die Bahnbestimmung, folgende Bemerkung vorausschicken. Eine Ellipse ist nach Lage und Größe in ihrer Ebene vollständig bestimmt, wenn die drei Elemente: Länge des Perihel, Exzentrizität und Parameter bekannt sind. Zur Bestimmung einer Ellipse sind also drei Gleichungen

zwischen diesen Elementen einerseits und anderweitig bekannt gewordenen Größen andererseits notwendig. Die ersten Entwicklungen der Bahnbestimmung weisen darauf hin, daß die ihrer Größe und Lage nach gegebenen Radienvektoren, vom Brennpunkt nach den Ellipsenorten gezogen, die natürlichsten Größen der letzteren Art sind. Deren Verbindung mit den genannten Elementen liefert Gleichungen von der Form

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(s - \varpi).$$

Demnach würden drei Paare von Größen s und r nötig sein, um die nötigen Gleichungen zur Bestimmung von p, e, ϖ aufstellen zu können. Kann man eines der Elemente als bekannt annehmen, so braucht man nur noch zwei Paare s, r, um die Ellipse völlig zu bestimmen; diese Daten würden also auch ermöglichen, die *Zeit* zu berechnen, die der Radiusvektor braucht, um von der einen Lage in die andere überzugehen. Daraus geht umgekehrt hervor, daß man aus zwei ihrer Größe und Lage nach bekannten Radienvektoren und der Zwischenzeit jenes Element und dann auch die übrigen, also die ganze Bahn muß berechnen können. Hieraus ist klar, daß die Lösung dieser Aufgabe in den Mittelpunkt gerückt werden muß, und daß aus der großen Zahl von Beziehungen zwischen mehreren Orten der Bahn diejenigen heranzuziehen sind, die hierzu beitragen können.

Dasjenige Element, welches zuerst bestimmt zu werden pflegt, ist der Parameter p; durch ihn und durch zwei nach Lage und Größe gegebene Radienvektoren die beiden anderen Elemente e und ϖ auszudrücken, gelingt wie folgt. Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_1} - 1 &= e\cos(s_1 - \varpi) \\ \frac{p}{r_2} - 1 &= e\cos(s_2 - \varpi) \end{aligned} \qquad 1)$$

werden, wenn

$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1, \quad \frac{p}{r_2} - 1 = q_2$$

und $s_2 - \varpi = (s_1 - \varpi) + (s_2 - s_1)$ gesetzt wird:

$$e\cos(s_1 - \varpi) = q_1$$

$$e\cos(s_1 - \varpi)\cos(s_2 - s_1) - e\sin(s_1 - \varpi)\sin(s_2 - s_1) = q_2$$

oder:

$$\begin{aligned} e\cos(s_1 - \varpi) &= q_1 \\ e\sin(s_1 - \varpi) &= \frac{q_1\cos(s_2 - s_1) - q_2}{\sin(s_2 - s_1)}. \end{aligned} \qquad 2)$$

Hieraus ergibt sich gleichzeitig e und ϖ. Man kann aber auch ϖ durch

$$\operatorname{tg}(s_1 - \varpi) = \operatorname{cotg}(s_2 - s_1) - \frac{q_2}{q_1\sin(s_2 - s_1)}$$

oder:

$$\operatorname{tg}(s_1 - \varpi) = \operatorname{cotg}(s_2 - s_1) - \frac{r_1}{r_2}\frac{p - r_2}{p - r_1}\frac{1}{\sin(s_2 - s_1)} \qquad 3)$$

ermitteln und dann e durch:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1\cos(s_1 - \varpi) - r_2\cos(s_2 - \varpi)}, \qquad 4)$$

wovon 3) unmittelbar durch Division der Gleichungen 2), und 4) durch Gleichsetzung von $p = r_1 e \cos(s_1 - \varpi) + r_1 = r_2 e \cos(s_2 - \varpi) + r_2$ entsteht. Oder endlich man erhält durch addieren und subtrahieren von 1)

$$2e \cos\frac{s_2 - s_1}{2} \cos\left(\frac{s_2 + s_1}{2} - \varpi\right) = \frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} - 2$$
$$2e \sin\frac{s_2 - s_1}{2} \sin\left(\frac{s_2 + s_1}{2} - \varpi\right) = \frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_2}$$

und daraus wieder ϖ und e gleichzeitig.

Können demgemäß zwei Radienvektoren nach Größe und Lage als bekannt angenommen werden, und außerdem die von vornherein bekannte Zwischenzeit, so kommt alles darauf an, den Parameter zu ermitteln. Man kann sogar zeigen, daß ein Näherungswert desselben genügt. Denn rechnet man mittels eines solchen nach 2) die zugehörigen Werte von e und ϖ, so kann daraus die Zwischenzeit abgeleitet werden; stimmt diese mit der bekannten überein, so ist mit dem Näherungswerte von p bereits der richtige getroffen gewesen, wenn nicht, so kann man durch ein einfaches Näherungsverfahren allmählich zum wahren Wert von p fortschreiten.

Durch diese Überlegungen sind wir dahin geführt, den Beziehungen des Parameters zu den Radienvektoren, den zwischen ihnen liegenden Winkeln und den Zwischenzeiten das Hauptaugenmerk zuzuwenden.

Nehmen wir fürs erste drei Radienvektoren r_1, r_2, r_3 mit ihren Bestimmungswinkeln s_1, s_2, s_3, so führen die drei Gleichungen:

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e \cos(s_1 - \varpi)$$
$$\frac{p}{r_2} = 1 + e \cos(s_2 - \varpi)$$
$$\frac{p}{r_3} = 1 + e \cos(s_3 - \varpi)$$

zu einem eleganten Ausdruck von p; denn multipliziert man sie der Reihe nach mit $\sin(s_3 - s_2)$, $-\sin(s_3 - s_1)$, $\sin(s_2 - s_1)$ und addiert, so kommt wegen des bekannten Satzes

$$\cos A \sin(C - B) + \cos B \sin(A - C) + \cos C \sin(B - A) = 0,$$

der für beliebige Winkel A, B, C gilt:

$$p = \frac{\sin(s_3 - s_2) - \sin(s_3 - s_1) + \sin(s_2 - s_1)}{\frac{1}{r_1}\sin(s_3 - s_2) - \frac{1}{r_2}\sin(s_3 - s_1) + \frac{1}{r_3}\sin(s_2 - s_1)}.$$

Hierin wird der Zähler

$$2 \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos\tfrac{1}{2}(s_3 - s_2) - 2 \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos(\tfrac{1}{2}s_3 + \tfrac{1}{2}s_2 - s_1)$$
$$= 4 \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_2) \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_1) \sin\tfrac{1}{2}(s_2 - s_1)$$

und wenn man daher Zähler und Nenner mit $r_1 r_2 r_3$ multipliziert, so erscheint:

$$p = \frac{4 r_1 r_2 r_3 \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_2) \sin\tfrac{1}{2}(s_3 - s_1) \sin\tfrac{1}{2}(s_2 - s_1)}{r_2 r_3 \sin(s_3 - s_2) - r_1 r_3 \sin(s_3 - s_1) + r_1 r_2 \sin(s_2 - s_1)}. \qquad 5)$$

Da $\frac{1}{2} r_2 r_3 \sin(s_3 - s_2)$ die Fläche des Dreiecks darstellt, welches von den Radienvektoren r_2, r_3 und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte gebildet wird, usf., so stellt der Nenner dieses Ausdruckes offenbar die doppelte Fläche des von den Endpunkten der drei Radienvektoren gebildeten Dreiecks dar, ist also, wenn die Radienvektoren nahe aneinander liegen, sehr klein. Kleine Fehler in $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$ würden also sehr beträchtliche in p hervorrufen, weshalb sich der Ausdruck 5) zur Berechnung von p nicht eignet, außer wenn die Radienvektoren beträchtliche Winkel miteinander bilden. Übrigens kann 5), wenn man die erwähnten doppelten Dreiecksflächen mit $[r_2 r_3]$, $[r_1 r_3]$, $[r_1 r_2]$ bezeichnet, auch so geschrieben werden:

$$p = \frac{[r_2 r_3]\,[r_1 r_3]\,[r_1 r_2]}{[r_2 r_3] - [r_1 r_3] + [r_1 r_2]} \cdot \frac{1}{2\, r_1 r_2 r_3 \cos\frac{1}{2}(s_3 - s_2) \cos\frac{1}{2}(s_3 - s_1) \cos\frac{1}{2}(s_2 - s_1)} \qquad 5^a)$$

oder so:

$$p = \frac{r_1 [r_2 r_3] - r_2 [r_1 r_3] + r_3 [r_1 r_2]}{[r_2 r_3] - [r_1 r_3] + [r_1 r_2]}, \qquad 5^b)$$

die sich zur Berechnung von p natürlich ebensowenig eignen, wie 5).

Zu einem anderen Ausdruck für p bietet die Gl. 9) (Seite 127)

$$r^2\, ds = k \sqrt{1 + m}\, \sqrt{p}\, dt$$

die Hand. Wenn man nämlich zwischen den Grenzen s_1 und s_2 linkerhand und den zugehörigen Zeiten t_1 und t_2 rechterhand integriert, so hat man in

$$\int_{s_1}^{s_2} r^2\, ds = k \sqrt{1 + m}\, \sqrt{p}\, (t_2 - t_1)$$

einen Ausdruck für p, sobald es gelingt das linksstehende Integral, welches offenbar die doppelte Fläche des elliptischen Sektors zwischen den Radienvektoren r_1 und r_2 darstellt, auszuwerten. *Gauß* hat hierzu unter Heranziehung der Cotesschen Formeln für mechanische Quadratur und unter Benutzung der Gl. 5) zur Ermittlung des zu $\frac{s_1 + s_2}{2}$ gehörigen Radiusvektors $\bar{r}$ eine Methode ausgearbeitet (Theoria motus art. 85 bis 87), indem er setzt:

$$\int_{s_1}^{s_2} r^2\, ds = \tfrac{1}{6} (r_1^2 + 4\bar{r}^2 + r_2^2)\, (s_2 - s_1),$$

und einen ähnlichen Weg hat *Euler**) in seinen Abhandlungen über Bahnbestimmung eingeschlagen; da diese Methoden aber durch neuere und bessere völlig in den Hintergrund gedrängt sind, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Moulton hat neuerdings den Gedanken der direkten Auswertung des Integrales wieder aufgenommen (Astr. Journal Nr. 510, 1901), indem er r^2 in eine Potenzreihe von $s - s_2$ entwickelt:

$$r^2 = r_2^2 + c'(s - s_2) + c''(s - s_2)^2$$

---

*) *Euler*, Theoria motus planetarum et cometarum ...; Recherches sur la vraie orbite de la comète de 1769 ....

und die Koeffizienten c' und c'' durch die Radienvektoren r_1 und r_3 und die zugehörigen Winkel s_1 und s_3 bestimmt. Die Gleichungen

$$r_1^2 = r_2^2 + c'(s_1 - s_2) + c''(s_1 - s_2)^2$$
$$r_3^2 = r_2^2 + c'(s_3 - s_2) + c''(s_3 - s_2)^2$$

geben, wenn zur Abkürzung

$$s_3 - s_2 = \sigma_1, \quad s_3 - s_1 = \sigma_2, \quad s_2 - s_1 = \sigma_3$$

gesetzt wird:

$$-c'\sigma_3 + c''\sigma_3^2 = r_1^2 - r_2^2$$
$$+c'\sigma_1 + c''\sigma_1^2 = r_3^2 - r_2^2,$$

woraus:

$$c' = -\frac{r_1^2\sigma_1 + r_3^2\sigma_3 - r_2^2(\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$
$$c'' = \frac{r_1^2\sigma_1 + r_3^2\sigma_3 - r_2^2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}.$$

Da

$$\int r^2\,ds = r_2^2(s - s_2) + \tfrac{1}{2}c'(s - s_2)^2 + \tfrac{1}{3}c''(s - s_2)^3$$

und daher

$$\int_{s_1}^{s_3} r^2\,ds = \sigma_1 r_2^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 c' + \tfrac{1}{3}\sigma_1^3 c'' + \sigma_3 r_2^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_3^2 c' + \tfrac{1}{3}c''\sigma_3^3,$$

so folgt:

$$k\sqrt{1+m}\,(t_3 - t_1)\sqrt{p} = r_2^2\sigma_2 + \frac{c'}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \frac{c''}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_3^3)$$

und nach Substitution der Werte von c' und c'':

$$k\sqrt{1+m}\,(t_3 - t_1)\sqrt{p} = \frac{1}{6}\frac{\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}\left(r_2^2\sigma_2^2 + r_1^2\sigma_1(2\sigma_3 - \sigma_1) + r_3^2\sigma_3(2\sigma_1 - \sigma_3)\right). \quad 6)$$

Da in der Entwicklung von r^2 die Glieder dritter, ... Ordnung übergangen sind, ist 6) natürlich nur ein Näherungsausdruck; betreff Untersuchung seiner Genauigkeit muß auf die zitierte Abhandlung verwiesen werden; hier sei nur erwähnt, daß er bei kleinen Planeten noch bei Zwischenzeiten von 40 Tagen gute Resultate liefert; ist eine erste Näherung der Elemente bekannt geworden, dann können auch die höheren Glieder berechnet und damit seine Genauigkeit wesentlich erhöht werden; allein die hierzu dienenden Formeln sind bereits sehr kompliziert.

49. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Ellipse. Wir kommen jetzt zu denjenigen Methoden, den Parameter p zu ermitteln, welche sich des Verhältnisses zwischen dem elliptischen Sektor zwischen zwei Radienvektoren und dem zugehörigen Dreieck bedienen. Daß die Einführung dieses Verhältnisses von großem Nutzen ist, scheint zuerst *Lambert* 1772 in seinen »Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik Teil 3« *) bemerkt zu haben; nachher haben Gauß, Encke, Hansen u. a. die Methode ausgebaut. Wir wollen diese wichtigen Entwicklungen kennen lernen und beginnen mit der *Gaußschen* (Theoria motus art. 88—94).

*) Siehe *Ostwalds* Klassiker Nr. 133, Seite 133.

Sind r und r' die Radienvektoren, die zu den seit dem Durchgang durchs Perihel verflossenen Zeiten t und t' gehören und ist $2f$ der von beiden eingeschlossene Winkel, dann ist $k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\,(t'-t)$ die doppelte Fläche des Sektors und $rr'\sin 2f$ die doppelte Fläche des Dreiecks, und das Verhältnis der beiden

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\,(t'-t)}{rr'\sin 2f} \qquad 1)$$

führt zu einem Werte von $\sqrt{p}$, sobald es gelingt y lediglich durch r, r', $t'-t$ und $2f$ auszudrücken. Hierzu muß in 1) p als Funktion dieser Größen dargestellt werden, was in einem geschlossenen Ausdruck nur durch Einführung einer neuen Unbekannten, des Unterschiedes der exzentrischen Anomalien, geschehen kann. Zur Elimination derselben muß dann eine zweite Gleichung aufgestellt werden. Diese beiden Gleichungen leiten wir zuerst ab. Aus den für die Zeiten t und t' aufgestellten Gleichungen VI. (Seite 138) nämlich

$$\begin{aligned}
\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E\\
\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E\\
\sqrt{r'}\cos\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E'\\
\sqrt{r'}\sin\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E'
\end{aligned}$$

wo die v die wahren, die E die exzentrischen Anomalien bezeichnen, folgt durch eine leicht ersichtliche Operation:

$$\sqrt{rr'}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) = a\cos\tfrac{1}{2}(E'-E) - ae\cos\tfrac{1}{2}(E'+E)$$

oder wenn

$$\begin{array}{l|l} v'-v = 2f & v'+v = 2F \\ E'-E = 2g & E'+E = 2G \end{array}$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{rr'}\cos f = a\cos g - ae\cos G.$$

Ganz ähnlich findet sich:

$$\sqrt{rr'}\cos F = a\cos G - ae\cos g.$$

Multipliziert man diese letzte Gleichung mit e und addiert sie zur ersten, so folgt

$$\sqrt{rr'}\cos f + e\sqrt{rr'}\cos F = a(1-e^2)\cos g = p\cos g$$

oder

$$e\cos F = -\cos f + \frac{p}{\sqrt{rr'}}\cos g$$

und ganz ähnlich

$$e\cos G = \cos g - \frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos f.$$

Wenn man jetzt die Gleichungen für die Radienvektoren in den wahren Anomalien

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v \quad \text{und} \quad \frac{p}{r'} = 1 + e\cos v'$$

addiert:

$$\frac{p(r+r')}{rr'} = 2 + 2e\cos f\cos F$$

und den eben erhaltenen Wert von $e \cos F$ einträgt, so ergibt sich

$$\frac{p(r+r')}{rr'} = 2 - 2\cos f^2 + \frac{2p}{\sqrt{rr'}} \cos g \cos f$$

oder:

$$p = \frac{2 \sin f^2 rr'}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g}.$$

Dieses p in die quadrierte Gleichung 1) eingetragen führt auf folgende erste Hauptgleichung:

$$y^2 = \frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{2rr' \cos f^2 (r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g)},$$

die wir bald durch Einführung von Hilfsgrößen einfacher schreiben werden. Um zur zweiten Hauptgleichung zu gelangen, addieren wir zunächst die Gleichungen für die Radienvektoren in den exzentrischen Anomalien

$$r = a - ae \cos E$$
$$r' = a - ae \cos E'$$
$$r + r' = 2a - 2ae \cos g \cos G$$

und erhalten durch Eintragung des obigen Ausdruckes für $e \cos G$

$$r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g = 2a \sin g^2$$

oder unter Heranziehung der ersten Grundgleichung:

$$\frac{1}{a} = \frac{4 \sin g^2 rr' \cos f^2 y^2}{k^2(1+m)(t'-t)^2}. \qquad 1^a)$$

Werden jetzt die Keplerschen Gleichungen

$$\mu t = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t = E - e \sin E$$

$$\mu t' = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t' = E' - e \sin E'$$

voneinander subtrahiert:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g$$

und wird wieder für $e \cos G$ sein Wert eingetragen, so kommt:

$$\frac{k\sqrt{1+m}(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2\frac{\sqrt{rr'}}{a} \sin g \cos f$$

oder wenn a durch den eben abgeleiteten Wert eliminiert wird:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}{k^2(1+m)(t'-t)^2}(y^3 - y^2).$$

Dies ist die zweite Grundgleichung. Ehe wir sie mit der ersten zusammen weiter behandeln, wollen wir beide durch Einführung einiger Hilfsgrößen einfacher schreiben. Zunächst setzen wir den in der zweiten auftretenden Faktor

$$\frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3} = m \qquad 2)$$

und führen diesen auch in der ersten ein, womit sie wird:

$$y^2 = \frac{4m\cos f\sqrt{rr'}}{r+r'-2\sqrt{rr'}\cos f\cos g} = \frac{m}{\dfrac{r+r'}{4\cos f\sqrt{rr'}} - \frac{1}{2}\cos g}.$$

Setzt man dann weiter:

$$\frac{r+r'}{4\cos f\sqrt{rr'}} - \tfrac{1}{2} = l, \qquad 3)$$

so wird daraus

$$y^2 = \frac{m}{l+\sin\frac{1}{2}g^2}, \qquad \text{I.}$$

während die zweite Hauptgleichung sich so schreibt:

$$y^3 - y^2 = m\frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3}. \qquad \text{II.}$$

Die Hilfsgröße l läßt sich auf mannigfache Weise für die Rechnung bequemer gestalten; wir stellen einige Formen zusammen, ohne uns mit der einfachen Ableitung derselben aufzuhalten:

$$\left.\begin{aligned}\sec\gamma &= \frac{r+r'}{2\cos f\sqrt{rr'}}\\ l &= \tfrac{1}{2}(\sec\gamma - 1)\end{aligned}\right\} \quad 4) \qquad \left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(45^\circ+\omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}\\ l &= \frac{\sin\frac{1}{2}f^2 + \operatorname{tg} 2\omega^2}{\cos f}\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(45^\circ+\omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}\\ \operatorname{tg} q &= \frac{\operatorname{tg} 2\omega}{\sin\frac{1}{2}f}\\ l &= \sin\tfrac{1}{2}f^2\sec f\sec q^2\end{aligned}\right\} \quad 6) \qquad \left.\begin{aligned}2\operatorname{tg}\omega &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} - \sqrt[4]{\frac{r}{r'}}\\ \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\frac{1}{2}f}\\ l &= \sin\tfrac{1}{2}f^2\sec f\sec B^2\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Die Gleichungen I. und II. lösen das vorgelegte Problem, denn sie enthalten zwei Unbekannte y und g, so daß durch Elimination von g das gesuchte Verhältnis y durch bekannte Größen dargestellt wird. Da die eine Gleichung transzendent ist, muß die Auflösung indirekt oder durch Reihenentwicklung geführt werden. Ist $2g$ ein großer Winkel, so wird man auf ersterem Wege, der der kürzere ist, keinerlei Schwierigkeiten begegnen, denn $2g - \sin 2g$ wird sich ohne Genauigkeitsverlust für angenommene Werte von g mittels der gewöhnlichen Tafeln der trigonometrischen Funktionen berechnen lassen; in diesem Falle, wo also eine große heliozentrische Bewegung vorliegt, wird man erstens über einen guten Näherungswert von $2g$ bereits verfügen und zweitens wird dann nicht y, sondern der genaue Wert von $2g$ eigentlich der für die weitere Rechnung (die Elementenbestimmung, siehe unten Nr. 50), belangreiche sein. Nach einem Vorschlag von Oppolzer (Bahnbestimmung, Bd. I, S. 84) eliminiert man dann aus I. und II. besser y und schreibt:

$$\frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3} = X, \quad l+\sin\tfrac{1}{2}g^2 = Y,$$

womit

$$y = XY \mp 1$$

und dann nach I.

$$m = (XY+1)^2 Y \qquad 8)$$

wird. Diese Gl. 8) enthält nur mehr g als Unbekannte und kann leicht durch Versuche aufgelöst werden, indem man g so lange variiert, bis sie befriedigt ist. Will man y hierauf doch bestimmen, was am leichtesten durch Anwendung von I. gelingt, so wird man zu beachten haben, daß für $2g > 180^\circ$ wegen

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}\,(t'-t)}{rr'\sin 2f}$$

der Wert von y negativ anzusetzen ist.

Ist dagegen $2g$ ein kleiner Winkel, etwa kleiner als 60°, was bei ersten Bahnbestimmungen immer der Fall sein muß, dann läßt sich dieses Verfahren nicht durchführen, da man $2g - \sin 2g$ nicht mit der nötigen Genauigkeit den Tafeln entnehmen kann. Man muß also zur Reihenentwicklung schreiten, was auf mannigfache Art geschehen kann. Gauß entwickelt den Ausdruck

$$X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$$

nach Potenzen der kleinen Größe

$$x = \sin \tfrac{1}{2} g^2 .$$

Um die Koeffizienten dieser Reihenentwicklung zu erhalten, differenziiert man

$$\sin g^3 \cdot X = 2g - \sin 2g ,$$

woraus hervorgeht:

$$3X \cos g \sin g^3 + \sin g^3 \frac{dX}{dg} = 2 - 2\cos 2g = 4 \sin g^2$$

oder

$$\sin g \cdot \frac{dX}{dg} = 4 - 3X \cos g \sin g .$$

Da nun

$$\frac{dx}{dg} = \sin \tfrac{1}{2} g \cos \tfrac{1}{2} g = \tfrac{1}{2} \sin g ,$$

so folgt:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{8 - 6X\cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1-2x)}{2x(1-x)} ,$$

oder

$$(2x - 2x^2)\frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X .$$

Setzt man also:

$$X = \tfrac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \cdots) ,$$

so folgt die Gleichung:

$$\tfrac{8}{3}(\alpha x + (2\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \cdots)$$
$$= (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)x^2 + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \cdots ,$$

welche identisch sein muß und daher durch Gleichsetzung der zu gleichen Potenzen von x gehörigen Koeffizienten die Beziehungen liefert:

$$\alpha = \tfrac{6}{5}, \quad \beta = \tfrac{8}{7}\alpha, \quad \gamma = \tfrac{10}{9}\beta, \quad \delta = \tfrac{12}{11}\gamma ,$$

deren Gesetz ersichtlich ist. Es wird somit:

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}x + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}x^2 + \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^3 + \cdots ,$$

oder

$$X = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}x^2 + \cdots\right).$$

Es ist dies nicht die konvergenteste Entwickelung, die man für X aufstellen kann; so besitzt z. B.

$$X = \frac{1}{3\cos\frac{1}{2}g^2}\left(1 + \frac{1}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}g^2 - \frac{1}{5.7}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}g^4 + \frac{3}{5.7.9}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}g^6 - \frac{3.5}{5.7.9.11}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}g^8 + \cdots\right)$$

(siehe Hansen, Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers art. 29 und Fabritius, Astr. Nachr. Bd. 129, 49) eine weit stärkere Konvergenz; allein für den vorliegenden Fall ist sie die geeignetste, weil auch die Formel I. die Größe x enthält. Die Gl. I. und II. können jetzt so geschrieben werden:

$$x = \frac{m}{y^2} - l \qquad \text{I}^a.$$

$$y - 1 = \frac{m}{y^2}X \qquad \text{II}^a.$$

und es wird sich nur noch darum handeln, ein angemessenes Näherungsverfahren zur Bestimmung von y auszumitteln, wozu vor allem die Größenordnung festzusetzen ist. Nennt man den Bogen g von der ersten Ordnung, so wird x von der zweiten, und setzt man mit Gauß:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}(x - \xi) + \left(\frac{6}{5}(x - \xi)\right)^2 + \cdots\right),$$

so folgt durch Vergleichung mit obiger Entwickelung, daß

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \cdots$$

eine Größe der vierten Ordnung ist. Hierauf baut sich folgendes Verfahren auf. Setzt man in dem eben aufgestellten Ausdruck von X den Wert von x aus I^a. ein, so kommt:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}\frac{m}{y^2} + \frac{6}{5}l + \frac{6}{5}\xi} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m}{y^2}}$$

oder

$$\frac{m}{y^2}X = \frac{\frac{10}{9}}{y^2\frac{\frac{5}{6} + l + \xi}{m} - 1}$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \qquad 9)$$

$$\frac{m}{y^2}X = \frac{\frac{10}{9}h}{y^2 - h}.$$

Wird dies mit II^a. verglichen, so folgt:

$$y - 1 = \frac{\frac{10}{9}h}{y^2 - h}$$

oder:

$$y^3 - y^2 - hy - \tfrac{1}{9}h = 0. \qquad 10)$$

Da für $2f < 180^\circ$, was hier stets vorausgesetzt wird, m positiv ist, und ebenso l, so ist auch h positiv; diese kubische Gleichung in y hat also nur eine positive Wurzel, welche den Wert von y darstellen wird, da dieses für $2f < 180^\circ$ positiv herauskommen muß. Man kann diese Wurzel oder noch besser y^2 mit dem Argument h tabulieren; dies hat Gauß in einer Tafel der Theoria motus getan, welche in »Taf. XIX« reproduziert ist. Kann man also h als bekannt annehmen, dann ist die Aufgabe gelöst. Nun ist h aber nach 9) noch von ξ abhängig, welches unbekannt ist; aber wie hervorgehoben, ist ξ von der vierten Ordnung, kann somit in erster Näherung gleich Null gesetzt werden; mit dem Näherungswerte

$$(h) = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

muß sich also ein Näherungswert von y^2 ergeben, der seinerseits wegen

$$x = \frac{m}{y^2} - l$$

zu einem Näherungswert von x führt. Stellt man schließlich ξ als Funktion von x dar, so kann das Näherungsverfahren jetzt mit dem Werte 9) von h fortgesetzt werden, bis eine Änderung der Zahlenwerte nicht mehr eintritt, womit der strenge Wert von y erreicht ist. In der Regel ist dies schon nach dem ersten Schritt der Fall. Um ξ als Funktion von x zu erhalten, zieht man (nach Gauß im Berliner Jahrbuch für 1814) am einfachsten die Definitionsgleichung:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}$$

heran und schreibt sie in der Gestalt:

$$\xi = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}.$$

Für den Zähler dieses Bruches bekommt man nach Einsetzung der Reihenentwicklung für X

$$\tfrac{8}{105}x^2\left(1 + 2\cdot\frac{8}{9}x + 3\cdot\frac{8.10}{9.11}x^2 + 4\cdot\frac{8.10.12}{9.11.13}x^3 + 5\cdot\frac{8.10.12.14}{9.11.13.15}x^4 + \cdots\right);$$

setzt man also die Reihe in der Klammer gleich A, womit

$$xX - \tfrac{5}{6}X + \tfrac{10}{9} = \tfrac{8}{105}x^2A$$

wird, so folgt

$$X = \frac{\frac{4}{3}(1 - \frac{12}{175}x^2A)}{1 - \frac{6}{5}x}$$

und daher:

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}x^2A\,(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}x^2A}.$$

Gauß hat ξ mit dem Argument x in eine Tafel gebracht, die als »Taf. XX« in die Sammlung aufgenommen wurde.

Zusammenstellung der Gaußschen Methode.

$$m = \frac{k^2(t'-t)^2}{(2\cos f\sqrt{rr'})^3}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}, \qquad \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} 2\omega}{\sin \frac{1}{2} f}$$

$$l = \sin \tfrac{1}{2} f^2 \sec f \sec q^2 \qquad \text{A.}$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \qquad (\text{zuerst } \xi = 0).$$

Aus Tafel XIX $\log y^3$ mit Arg. h

$$x = \frac{m}{y^3} - l$$

Aus Tafel XX ξ mit Arg. x.

Die Tafeln XIX und XX sind so weit ausgedehnt, daß über ihre Grenze hinaus das oben beschriebene indirekte Verfahren eintreten kann. Für große Bogen empfiehlt es sich, statt mit $\xi = 0$ mit dem zu $(x) = \sin \frac{1}{2} f^2$ gehörigen ξ zu beginnen, da man dann eine Näherung erspart.

Tietjen hat (Berl. Jahrbuch 1879) bemerkt, daß man viel weniger umfangreiche Tafeln gebraucht, wenn man das Gaußsche Verfahren in folgender Weise modifiziert. Schreibt man die Gl. 10) in der Form

$$\frac{(y-1)y^3}{y + \frac{1}{9}} = h$$

und setzt

$$y = 1 + z,$$

so wird daraus:

$$\frac{z(1+z)^3}{z + \frac{10}{9}} = h$$

oder

$$\frac{z(1+z)^3}{1 + \frac{9}{10} z} = \frac{10}{9} h.$$

Nun ist

$$(1+z)^3 = (1 + \tfrac{9}{10} z)(1 + \tfrac{11}{10} z) + \tfrac{1}{100} z^2,$$

also wird aus der letzten Gleichung:

$$z(1 + \tfrac{11}{10} z) + \tfrac{1}{100} \frac{z^3}{1 + \frac{9}{10} z} = \tfrac{10}{9} h. \qquad 11)$$

Soweit ist die Gleichung streng und wir werden sie auch nachher in dieser Strenge weiter behandeln. Vorher aber wollen wir daraus den bequemen Kettenbruch ableiten, den *Hansen* (Bahnbestimmung Art. 29) auf einem anderen Wege gefunden hat. Da nämlich z von der zweiten Ordnung ist, so ist das dritte Glied linker Hand reichlich von der sechsten Ordnung und kann daher bei kleineren Bogen weggelassen werden. Dann aber wird:

$$z(1 + \tfrac{11}{10} z) = \tfrac{10}{9} h$$

oder

$$z = \frac{\frac{10}{9} h}{1 + \frac{11}{10} z} = \cfrac{\frac{10}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \frac{11}{9} h}} \cdots$$

und daher:

Der Hansensche Kettenbruch

$$y = 1 + \tfrac{10}{11} \cdot \cfrac{\tfrac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\tfrac{11}{9}h}{1 + \tfrac{11}{9}h \cdot \ldots}}$$

$$\log \tfrac{10}{11} = 9.958\,6073$$
$$\log \tfrac{11}{9} = 0.087\,1502$$
$$\log \tfrac{5}{6} = 9.920\,8188$$

B.

Für h nimmt man $\frac{m}{\frac{5}{6} + l}$, da in allen Fällen, wo der Kettenbruch anwendbar ist, ξ gleich Null gesetzt werden darf. Die Anwendung des Kettenbruches gibt auch für siebenstellige Rechnung bis zu Bogen $2f = 20^\circ$ noch völlig strenge Werte; bis zu Bogen von 30° aber kann man mit sechsstelliger Rechnung gehen. Die Berechnung geschieht sehr bequem mit Additionslogarithmen.

Will man die Gleichung 11) streng beibehalten, so wird man setzen:

$$\tfrac{11}{10}x = x_1 \qquad \tfrac{11}{9}h = h_1$$

und dann erhalten:

$$x_1(1 + x_1) = h_1 - \frac{x_1^3}{121\,(1 + \frac{9}{11}x_1)} = h_2$$

und:

$$x_1 = \cfrac{h_2}{1 + \cfrac{h_2}{1 + \cfrac{h_2}{1 + \cdots}}}.$$

Um diesen Kettenbruch anzuwenden, kann man zuerst $h_2 = h_1$ setzen, damit einen genäherten Wert von x_1 erhalten, dann h_2 berechnen usf. und an angemessener Stelle ξ berücksichtigen. Bei größeren Bogen aber, wo man allein auf dieses strengere Verfahren zu rekurrieren braucht, wird die Berechnung des Kettenbruches nicht kurz und man wird daher lieber zu folgendem trigonometrischen Verfahren greifen: Setzt man zuerst

$$x_1'(x_1' + 1) = h_1$$

so wird, wenn ψ aus

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\sqrt{h_1}$$

berechnet wird:

$$x_1' = \frac{\sin \psi^2}{\cos 2\psi} = \sqrt{h_1} \operatorname{tg} \psi\,.$$

Bezeichnet man also den strengen Wert von x_1, der aus $x_1(x_1 + 1) = h_2$ hervorgeht, mit

$$x_1 = \alpha x_1' = \alpha\sqrt{h_1} \operatorname{tg} \psi = \alpha\sqrt{\tfrac{11}{9}}\sqrt{h} \operatorname{tg} \psi\,,$$

so wird

$$x = \tfrac{10}{11}x_1 = \alpha\sqrt{\tfrac{100}{99}}\sqrt{h} \operatorname{tg} \psi = a\sqrt{h} \operatorname{tg} \psi$$

und a wird ein veränderlicher Faktor sein, der aber von der Einheit nicht sehr verschieden ist und sich daher bequem in eine Tafel bringen läßt. Diese Tafel ist in XXI gegeben und wesentlich kürzer als die Gaußsche. Auch die Tafel für ξ läßt sich kürzer gestalten, wenn man $\xi = bx^2$ setzt und b tabuliert; auch diese ist in XXI aufgenommen.

Zusammenstellung des Tietjenschen Verfahrens.

$$2\operatorname{tg}\omega = \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} - \sqrt[4]{\frac{r}{r'}}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\frac{1}{2}f}$$

$$l = (\sin\tfrac{1}{2}f)^2 \sec f \sec B^2$$

$$m = \frac{k^2(t'-t)^2}{(2\sqrt{rr'}\cos f)^3}, \quad h = \frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi} \qquad \text{C.}$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\sqrt{\tfrac{11}{9}}\sqrt{h} \qquad \log 2\sqrt{\tfrac{11}{9}} = 0.344\,6051$$

$$y = 1 + a\sqrt{h}\operatorname{tg}\psi \qquad (a \text{ mit Arg. } h \text{ aus Taf. XXI})$$

$$x = \frac{m}{y^2} - l$$

$$\xi = bx^2 \qquad (b \text{ mit Arg. } x \text{ aus Taf. XXI}).$$

Encke (Berl. Jahrb. für 1854 Art. 15—17, auch Ostwalds Klassiker Nr. 141, S. 32) hat für y eine Reihenentwicklung gegeben, die für kurze Zwischenzeiten sehr bequem ist und daher noch angegeben werden möge, da sie sich aus dem Gaußschen Algorithmus rasch ergibt. Setzt man nämlich den Wert von x aus I^a. (Seite 159) in die Reihenentwicklung für X in II^a. ein, so erscheint:

$$y = 1 + \frac{m}{y^2}\left(\frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\left(\frac{m}{y^2} - l\right) + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{m}{y^2} - l\right)^2 + \cdots\right).$$

Nun ist nach 2), 3), 4) (Seite 156—157)

$$m = \frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{(2\cos f\sqrt{rr'})^3} = \frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{((r+r')\cos\gamma)^3} \quad \text{und}$$

$$l = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma}, \quad \text{wenn } \cos\gamma = \frac{2\cos f\sqrt{rr'}}{r+r'};$$

setzt man also

$$\eta = \frac{(t'-t)^2}{(r+r')^3},$$

so wird

$$m = \frac{\eta}{\cos\gamma^3}k^2(1+m)$$

und daher:

$$y = 1 + \frac{\eta k^2(1+m)}{y^2\cos\gamma^3}\left\{\frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\left(\frac{k^2(1+m)\eta}{y^2\cos\gamma^3} - \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma}\right) + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{k^2(1+m)\eta}{y^2\cos\gamma^3} - \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Kehrt man diese Reihe um und ordnet nach Potenzen von η, so kommt:

$$\log\text{nat. } y = \tfrac{4}{3}k^2(1+m)\eta + \tfrac{32}{5}\left(\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{4}{9}k^2(1+m)\eta\right)k^2(1+m)\eta$$
$$+ \tfrac{736}{35}\left(\sin\tfrac{1}{2}\gamma^4 - \tfrac{89}{69}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 k^2(1+m)\eta + \tfrac{799}{1863}k^4(1+m)^2\eta^2\right)k^2(1+m)\eta.$$

Da η von der zweiten Ordnung ist und γ von der ersten, so ist dieser Ausdruck genau bis auf Glieder der sechsten Ordnung. Die Faktoren $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$, ... kann man mit Hilfe der Subtraktionslogarithmen leicht berücksichtigen. Diese geben nämlich mit dem Argument $\log a$ den Wert $\log\frac{a}{a-1}$; ist folglich $a = \sec\gamma$, so geben diese Tafeln sofort durch einmaliges Eingehen mit dem Argument $\log\sec\gamma$ den Ausdruck

$\log \frac{\sec\gamma}{\sec\gamma - 1} = \log \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = \Gamma$. Geht man jetzt in obiger Formel zum Briggsschen Logarithmus über und setzt alle Koeffizienten in Zahlen um, wobei $1 + m$ mit 1 identifiziert wird, so läßt sich die Reihe, wenn die siebente Dezimale des Briggsschen Logarithmus als Einheit genommen wird, so schreiben:

Die Enckesche Reihe:

$$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{rr'}\cos f}{r + r'}, \quad \Gamma = \log \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}$$

(Γ mit Arg. $\log \sec\gamma$ aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen)

$$\eta = \frac{(t' - t)^2}{(r + r')^3}$$

$$\begin{aligned} \log y = \quad & a'\eta && \text{2. Ord.} \\ & + a''\eta \; - b''\eta^2 && \text{4. »} \\ & + a'''\eta \; - b'''\eta^2 + c'''\eta^3 && \text{6. »} \end{aligned} \qquad \text{D.}$$

wo, wenn die siebente Dezimale als Einheit genommen wird:

$\log a' = 3.233\,8859$		
$\log a'' = 3.614\,0972 - \Gamma$	$\log b'' = 0.034\,1076$	
$\log a''' = 3.829\,6970 - 2\Gamma$	$\log b''' = 0.712\,4306 - \Gamma$	$\log c''' = 7.006\,4167_{-10}$

Bei kleinen Planeten (bei Kometen wird man diese Methode nicht anwenden) reicht man bei etwa 30-tägiger Zwischenzeit und sechsstelliger Rechnung mit dem einen Glied

$$\log y = a'\eta$$

völlig aus; bei Zwischenzeiten bis zu 60 Tagen reichen ebenso die Glieder

$$\log y = a'\eta + a''\eta - b''\eta^2.$$

In den weitaus meisten Fällen der Praxis gewährt diese Entwicklung also eine sehr kurze Rechnung. Bei größeren Zwischenzeiten wird man aber die Gaußsche Methode vorziehen.

Beispiele zu den Methoden *A*, *B*, *C* finden sich bei den Tafeln. Dagegen wollen wir hier ein solches nach der Enckeschen Reihe durchführen.

$t' - t = 41^d.19894$, $\log r = 0.466\,845$, $\log r' = 0.461\,914$, $2f = 8^\circ 38' 26''.6$

r	0.466 845	a'	3.233 886
r'	0.461 914	η	0.933 524
$r + r'$	0.765 416	a''	1.069 813
$2\sqrt{rr'}$	0.765 410	η^2	1.867 048
$\cos f$	9.998 764	b''	0.034 108
$\cos\gamma$	9.998 758		
Γ	2.544 284	$a''\eta$	+ 100.8
		$-b''\eta^2$	— 79.6
$t' - t$	1.614 886	VII.	
$(t' - t)^2$	3.229 772	$a'\eta$	14703.1
$(r + r')^3$	2.296 248	$\log y$	0.001 4724

Die Glieder vierter Ordnung $(a''\eta - b''\eta^2)$ machen hier also nur mehr 2 Einheiten der 6. Stelle aus; die der sechsten Ordnung sind gänzlich verschwindend.

50. Bestimmung der elliptischen Elemente. Nachdem wir gezeigt haben, wie das Verhältnis des Sektors zum Dreieck durch die Zwischenzeit, zwei Radienvektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt werden kann, wenden wir uns zur Benutzung dieses Ausdruckes für die Bestimmung der elliptischen Elemente. Die Gl. 1) (Seite 155) gibt unmittelbar für den Parameter:

$$p = \left(\frac{r_1 r_2 \sin 2f\, y}{k\sqrt{1+m}\,(t_2 - t_1)}\right)^2 \qquad 1)$$

und ebenso findet man aus 1ª) (Seite 156) den Ausdruck für die große Halbachse:

$$a = \frac{k^2(1+m)(t_2 - t_1)^2}{4\sin g^2 r_1 r_2 \cos f^2 y^2}, \qquad 1^a)$$

der die Berechnung von g aus

$$\sin \tfrac{1}{2} g^2 = x$$

voraussetzt. Da $p = a\cos\varphi^2$, kann man aus 1) und 1ª) die Exzentrizität finden, jedoch ist für kleine Exzentrizitäten der entstehende Ausdruck ungeeignet. Es ist vorzuziehen, e und ϖ vermittels des schon oben (Seite 151) auseinandergesetzten Verfahrens zu bestimmen, worauf man a durch

$$a = \frac{p}{\cos\varphi^2} \qquad 2)$$

ermitteln kann. Durch ϖ werden die wahren Anomalien v_1 und v_2 bekannt, die durch die Gl. VII. (Seite 138)

$$\begin{aligned} \sin(v_1 - E_1) &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{\frac{r_1}{p}} \sin v_1 \\ \sin(v_2 - E_2) &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{\frac{r_2}{p}} \sin v_2 \end{aligned} \qquad 3)$$

zu den exzentrischen Anomalien E_1 und E_2 führen. Aus diesen folgen die mittleren Anomalien

$$\begin{aligned} M_1 &= E_1 - e\sin E_1 \\ M_2 &= E_2 - e\sin E_2 \end{aligned}$$

und dann die mittlere tägliche Bewegung

$$\mu = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1},$$

die mit der aus

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}$$

zu ermittelnden übereinstimmen muß.

Dieser Weg der Elementenbestimmung kann an Kürze der Rechnung kaum überboten werden; es gibt aber ein von Gauß angegebenes Verfahren (Theoria motus Nr. 96), das ihm an Symmetrie überlegen ist und daher nicht übergangen werden

kann. Die Entwicklungen schließen sich eng an die in Nr. 49 durchgeführten an. Setzt man wie dort

$$v_2 - v_1 = 2f \qquad v_2 + v_1 = 2F$$
$$E_2 - E_1 = 2g \qquad E_2 + E_1 = 2G,$$

so wird:

$$v_1 = F - f \qquad E_1 = G - g$$
$$v_2 = F + f \qquad E_2 = G + g$$

und die Gl. VI. (Seite 138):

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \sin\tfrac{1}{2}v_1 = \sqrt{1+e} \sin\tfrac{1}{2}E_1$$
$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos\tfrac{1}{2}v_1 = \sqrt{1-e} \cos\tfrac{1}{2}E_1$$
$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \sin\tfrac{1}{2}v_2 = \sqrt{1+e} \sin\tfrac{1}{2}E_2$$
$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos\tfrac{1}{2}v_2 = \sqrt{1-e} \cos\tfrac{1}{2}E_2$$

gehen daher, wenn noch

$$\sqrt{1 \pm e} = \sqrt{1 \pm \sin\varphi} = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \pm 2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi} = \cos\tfrac{1}{2}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

beachtet wird, über in:

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \sin\tfrac{1}{2}(F-f) = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \sin\tfrac{1}{2}(G-g) \qquad \text{A.}$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos\tfrac{1}{2}(F-f) = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \cos\tfrac{1}{2}(G-g) \qquad \text{B.}$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \sin\tfrac{1}{2}(F+f) = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \sin\tfrac{1}{2}(G+g) \qquad \text{C.}$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos\tfrac{1}{2}(F+f) = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \cos\tfrac{1}{2}(G+g). \qquad \text{D.}$$

Unterwirft man diese den folgenden vier Operationen:

	I.	II.	III.	IV.
A.	$+\sin\frac{1}{2}(F+g)$	$-\cos\frac{1}{2}(F+g)$	$+\cos\frac{1}{2}(F-g)$	$-\sin\frac{1}{2}(F-g)$
B.	$+\cos\frac{1}{2}(F+g)$	$+\sin\frac{1}{2}(F+g)$	$+\sin\frac{1}{2}(F-g)$	$+\cos\frac{1}{2}(F-g)$
C.	$-\sin\frac{1}{2}(F-g)$	$-\cos\frac{1}{2}(F-g)$	$-\cos\frac{1}{2}(F+g)$	$+\sin\frac{1}{2}(F+g)$
D.	$-\cos\frac{1}{2}(F-g)$	$+\sin\frac{1}{2}(F-g)$	$-\sin\frac{1}{2}(F+g)$	$-\cos\frac{1}{2}(F+g)$,

so erhält man die nachstehend aufgeführten Gleichungen I.—IV., wie wir nur an der ersten derselben ausführlicher zeigen wollen. Die erste Operation ergibt:

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos\tfrac{1}{2}(f+g) - \sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos\tfrac{1}{2}(f+g) = \cos\tfrac{1}{2}\varphi \cos\left(\tfrac{1}{2}(F-G)+g\right) -$$
$$- \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}(F+G) - \cos\tfrac{1}{2}\varphi \cos\left(\tfrac{1}{2}(F-G)-g\right) + \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}(F+G)$$

oder

$$\left(\sqrt{\frac{r_1}{a}} - \sqrt{\frac{r_2}{a}}\right) \cos\tfrac{1}{2}(f+g) = -2 \cos\tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(F-G) \sin g.$$

Wird nun, wie in den Gl. 5) bis 7) (Seite 157)

$$\sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}} = \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)$$

gesetzt, so folgt:

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} - \sqrt{\frac{r_2}{a}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\left(\sqrt[4]{\frac{r_1}{r_2}} - \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}}\right) = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\,(\operatorname{cotg}(45^\circ+\omega) - \operatorname{tg}(45^\circ+\omega)) = -2\sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\operatorname{tg} 2\omega$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}} + \sqrt{\frac{r_2}{a}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\left(\sqrt[4]{\frac{r_1}{r_2}} + \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}}\right) = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\,(\operatorname{cotg}(45^\circ+\omega) + \operatorname{tg}(45^\circ+\omega)) = 2\sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\sec 2\omega$$

und aus der letzten Gleichung wird daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+g)\sqrt[4]{\frac{r_1 r_2}{a^2}}\operatorname{tg} 2\omega = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\,\sin\tfrac{1}{2}(F-G)\sin g\,.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,\sin g\sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = M$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\sin g\sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = N,$$

so ist das Ergebnis der genannten vier Operationen:

$$M\sin\tfrac{1}{2}(F-G) = \cos\tfrac{1}{2}(f+g)\operatorname{tg} 2\omega \qquad \text{I.}$$
$$M\cos\tfrac{1}{2}(F-G) = \sin\tfrac{1}{2}(f+g)\sec 2\omega \qquad \text{II.}$$
$$N\sin\tfrac{1}{2}(F+G) = \cos\tfrac{1}{2}(f-g)\operatorname{tg} 2\omega \qquad \text{III.}$$
$$N\cos\tfrac{1}{2}(F+G) = \sin\tfrac{1}{2}(f-g)\sec 2\omega\,. \qquad \text{IV.}$$

Die Größen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen sind durch die Rechnungen behufs Ermittelung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck bekannt geworden. Man kann aus ihnen also

$$M,\ N,\ F-G,\ F+G$$

bestimmen. Aus den beiden ersten folgt:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{N}{M}$$

und

$$\sin g\sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_2}} = \frac{M}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi} = \frac{N}{\sin\tfrac{1}{2}\varphi} = R$$

und dann:

$$a = \frac{R^2\sqrt{r_1 r_2}}{\sin g^2}.$$

Aus den beiden letzteren ergibt sich F und G und damit zunächst:

$$v_1 = F - f \quad \text{und} \quad v_2 = F + f.$$

Da

$$\varpi = s_1 - v_1 = s_2 - v_2\,,$$

ist damit die Länge des Perihels bekannt geworden. Endlich wird:

$$E_1 = G - g, \quad E_2 = G + g$$

und damit

$$M_1 = E_1 - e\sin E_1\,, \quad M_2 = E_2 - e\sin E_2\,.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} = \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}},$$

was zur Kontrole dienen kann. Man hat auch

$$M_2 - M_1 = (E_2 - E_1) - e\,(\sin E_2 - \sin E_1) = 2g - 2e\cos G \sin g$$

und kann daraus μ berechnen. Die mittlere Anomalie für die Epoche $\frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ wird dann

$$\tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) = G - e \sin G \cos g\,.$$

Die erstere Rechnungsart ist jedoch dieser letzteren vorzuziehen.

51. Die Lambertsche Gleichung für die elliptische Bewegung. Wir betrachten weiter zwei Örter in der Ellipse und suchen nach Beziehungen zwischen ihren Polarkoordinaten, der Zwischenzeit und den Elementen; führen wir dabei die die beiden Örter verbindende Sehne ein, so stoßen wir auf einen merkwürdigen Satz, den zuerst *Lambert* (Ins. orb. Comet. Proprietates 1761, art. 210, siehe auch Ostwalds Klassiker Nr. 133, Seite 102) aufgefunden hat. Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise der Nr. 49 entnehmen wir derselben zunächst die beiden Gleichungen (Seite 156)

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e\cos G \sin g \qquad 1)$$

$$\frac{r+r'}{a} = 2\,(1 - e\cos G\cos g) \qquad 2)$$

und suchen dazu einen Ausdruck für die Sehne s in den exzentrischen Anomalien. Aus

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2f$$

oder

$$s^2 = (r + r')^2 - 4rr'\cos f^2$$

folgt:

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = \left(\frac{r+r'}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{rr'}\cos f}{a}\right)^2$$

oder mit Benutzung von 2) und der oben (Seite 155) abgeleiteten Gleichung

$$\frac{\sqrt{rr'}\cos f}{a} = \cos g - e\cos G:$$

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = 4\,(1 - e\cos g\cos G)^2 - 4(\cos g - e\cos G)^2$$

oder

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = 4\sin g^2\,(1 - e^2\cos G^2). \qquad 3)$$

Nun führen wir einen Hilfswinkel h ein, definiert durch

$$\cos h = e\cos G$$

und setzen fest, daß h zwischen 0 und π liegen, also $\sin h$ stets positiv sein solle. Da, wenn man nur einen Umlauf in Betracht zieht, g ebenfalls zwischen 0 und π

liegt, so schreiben sich jetzt die drei Gleichungen 1) 2) 3) in folgender unzweideutigen Weise:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2\sin g\cos h \qquad 1^a)$$

$$\frac{r+r'}{a} = 2\,(1-\cos g\cos h) \qquad 2^a)$$

$$\frac{s}{a} = 2\sin g\sin h\,. \qquad 3^a)$$

Da sich hiernach die drei Größen

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{r+r'}{a}, \quad \frac{s}{a}$$

durch zwei ausdrücken lassen, g und h, so ist klar, daß zwischen ihnen eine Beziehung bestehen muß. Um diese zu ermitteln, setzen wir

$$h+g=\varepsilon\,, \quad h-g=\delta\,, \quad 2g=\varepsilon-\delta\,,$$

und schreiben damit die drei Gleichungen so:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin(h+g) + \sin(h-g) = (\varepsilon-\sin\varepsilon) - (\delta-\sin\delta)$$

$$\frac{r+r'+s}{a} = 2\,(1-\cos(h+g)) = 4\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \qquad 4)$$

$$\frac{r+r'-s}{a} = 2\,(1-\cos(h-g)) = 4\sin\tfrac{1}{2}\delta^2.$$

Hiernach kann aus den beiden letzten Gleichungen ε und δ durch $r+r'$, s und a ermittelt werden und darauf aus der ersten die Zeit. Dabei bleibt nur eine Zweideutigkeit des Zeichens bestehen, die zuerst geregelt werden muß. Wir setzen voraus, daß die beiden Örter einem und demselben Umlauf angehören, dann ist

$$g<\pi \quad \text{und} \quad G<2\pi\,;$$

ferner haben wir schon festgesetzt

$$h<\pi\,,$$

also wird $h+g=\varepsilon<2\pi$ und daher $\frac{1}{2}\varepsilon<\pi$ und $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ positiv. Es ist somit aus der zweiten Gl. 4) $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ stets mit dem positiven Zeichen zu nehmen. Bei $\sin\frac{1}{2}\delta$ dagegen sind zwei Vorzeichen möglich; denn ziehen wir die obige Gleichung

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos f = \cos g - e\cos G$$

oder

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) = \cos g - \cos h = 2\sin\tfrac{1}{2}(h+g)\sin\tfrac{1}{2}(h-g) = 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\delta$$

heran, so zeigt sich, da $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ stets positiv ist, daß $\sin\frac{1}{2}\delta$ immer dasselbe Vorzeichen haben muß, wie $\cos\frac{1}{2}(v'-v)$, d. h.

$\sin\frac{1}{2}\delta$ ist positiv, wenn $v'-v<\pi$

und $\sin\frac{1}{2}\delta$ ist negativ, wenn $v'-v>\pi$.

Wir müssen also setzen

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = +\sqrt{\frac{r+r'+s}{4a}}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\delta = \pm\sqrt{\frac{r+r'-s}{4a}} \qquad \begin{matrix} v'-v<180^\circ \\ v'-v>180^\circ. \end{matrix} \qquad 5)$$

Um nun aus 4) eine geschlossene Gleichung ableiten zu können, müssen wir $\varepsilon - \sin\varepsilon$ und $\delta - \sin\delta$ entwickeln. Aus

$$\sin\varepsilon = 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{1-\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2}$$

folgt:

$$\sin\varepsilon = 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{1} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4}{3} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6}{5} - \cdots\right);$$

ferner ist bekanntlich:

$$\varepsilon = 2\left(\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^5 + \cdots\right),$$

also wird:

$$\varepsilon - \sin\varepsilon = 4\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^5}{5} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^7}{7} + \cdots\right);$$

eine ebensolche Reihe nimmt man für $\delta - \sin\delta$. Werden diese Reihen in die erste Gl. 4) eingetragen und wird 5) dabei benutzt, so entsteht:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}\left(\left(\frac{r+r'+s}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}\right) +$$
$$+ \frac{4}{10}\left(\left(\frac{r+r'+s}{4a}\right)^{\frac{5}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{4a}\right)^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3}{14}\left(\cdots\right) + \cdots$$

oder, wenn mit $a^{\frac{3}{2}}$ multipliziert wird:

$$k\sqrt{1+m}\,(t'-t) = \frac{1}{6}\left((r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{80}\frac{1}{a}\left((r+r'+s)^{\frac{5}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3}{1792}\frac{1}{a^2}\left((r+r'+s)^{\frac{7}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{7}{2}}\right) + \cdots. \qquad 6)$$

Hierin gilt das obere Zeichen für Bogen $v'-v<180^\circ$, das untere für $v'-v>180^\circ$. Die Gleichung 6) stellt den Lambertschen Satz dar. Für die Parabel $\left(\frac{1}{a}=0\right)$ wird er besonders einfach:

$$k\sqrt{1+m}\,(t'-t) = \frac{1}{6}\left((r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\right);$$

wir werden darauf bei Besprechung der parabolischen Bewegung zurückkommen.

Der allgemeine Lambertsche Satz ist für die Bahnbestimmung im Falle einer gewöhnlichen Planetenellipse wenig geeignet, da seine Reihenentwicklung nicht sehr konvergent ist; hier kann er also nicht fruchtbar gemacht werden, so sehr er sich bei der Parabel bewährt. Dagegen wird er wieder ein sehr schätzenswertes Hilfsmittel bei langgestreckten Ellipsen oder parabelnahen Bahnen; hierzu bedarf er aber noch

einiger Zurichtungen, die wir bei der Besprechung dieser Bahnen kennen lernen werden (Nr. 66).

An dieser Stelle muß noch der merkwürdige Ausdruck erwähnt werden, der sich ergibt, wenn man die Entwicklungen dieser Nummer zu einer Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck $= y$ heranzieht. Aus den Gl. VI (Seite 138) haben wir oben (Seite 155) bereits abgeleitet:

$$\sqrt{rr'}\cos f = a(\cos g - \cos h);$$

man findet ebenso:

$$\sqrt{rr'}\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin g.$$

Damit aber ergibt sich die doppelte Fläche des von den Radienvektoren eingeschlossenen Dreiecks

$$\begin{aligned} rr'\sin 2f &= 2rr'\sin f\cos f = 2a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\cos g - \cos h)\sin g \\ &= a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\sin 2g - \sin(h+g) + \sin(h-g)) \\ &= a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)). \end{aligned}$$

Da nun der doppelte Sektor nach der ersten Gl. in 4) (Seite 169) gleich ist:

$$k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\,(t'-t) = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,((\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta)),$$

so folgt:

$$y = \frac{(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}{\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}. \qquad 7)$$

ε und δ sind durch 5) bestimmt; man kann also sagen: y hängt ebenso, wie die Zwischenzeit im Lambertschen Satz, lediglich von den zwei Größen:

$$\frac{r+r'}{4a} \quad \text{und} \quad \frac{s}{4a}$$

ab.*)

52. Die Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse als Funktionen der Zeit. In den Grundgleichungen der Bahnbestimmung treten die Verhältnisse der Flächen der von den heliozentrischen Radienvektoren gebildeten Dreiecke auf. Kann man die Elemente der Bahn schon so weit als bekannt annehmen, daß man damit die Verhältnisse Sektor durch Dreieck ermitteln kann, dann lassen sich damit die Verhältnisse der Dreiecksflächen leicht bilden, da das Verhältnis der Sektoren identisch ist mit dem Verhältnis der Zwischenzeiten. Ist die Bahn aber noch ganz unbekannt, so muß man die Verhältnisse der Dreiecksflächen selbst durch bekannte Größen und durch solche ausdrücken, die auch sonst als Unbekannte in das Problem eintreten. Als solche bieten sich nur die Zwischenzeiten und die Radienvektoren dar, und es wird daher unsere Aufgabe sein, die Dreiecksflächen nach diesen Größen zu entwickeln. Dies ist nur in Gestalt von Reihen möglich, die nach Potenzen der Zwischenzeiten fortschreiten, und wir erkennen daher schon jetzt, daß diese Entwicklungen und damit die darauf basierte Bahnbestimmung nur so lange richtige Resultate geben können, als diese Reihen konvergieren. Wovon dies abhängt, wird später zu besprechen sein.

*) *Callandreau*, Det. des orbites, Seite 16.

Für die doppelte Fläche $[r\,r']$ des von den Radienvektoren r und r' gebildeten Dreiecks haben wir oben (Seite 171) den Ausdruck erhalten:

$$[r\,r'] = 2\,a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\cos g - \cos h)\sin g,$$

den wir vermöge der Bedeutung von g und h zunächst wieder auf die exzentrischen Anomalien E und E' zurückführen:

$$[r\,r'] = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\sin(E'-E) - 2e\sin\tfrac{1}{2}(E'-E)\cos\tfrac{1}{2}(E'-E))$$

und dann folgendermaßen schreiben:

$$[r\,r'] = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\,(\sin(E'-E) - e\sin E' + e\sin E).$$

Wird hier der aus den Keplerschen Gleichungen:

$$E - e\sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\,t$$

$$E' - e\sin E' = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\,t'$$

entstehende Ausdruck:

$$-e\sin E' + e\sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t'-t) - (E'-E)$$

eingetragen, so folgt, wenn wieder $E' - E = 2g$ gesetzt wird:

$$[r\,r'] = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\left(\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t'-t) + \sin 2g - 2g\right)$$

oder:

$$[r\,r'] = \sqrt{p}\left(k\sqrt{1+m}\,(t'-t) - (2g - \sin 2g)\,a^{\frac{3}{2}}\right). \qquad 1)$$

Hieraus ergibt sich noch ein merkwürdiger Ausdruck für das Verhältnis Sektor zu Dreieck; denn da der doppelte Sektor gleich $k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}(t'-t)$ ist, so folgt:

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{2g - \sin 2g}{\dfrac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t'-t)} = 1 - \frac{2g - \sin 2g}{M' - M}, \qquad 2)$$

wenn mit M die mittleren Anomalien bezeichnet werden.

Um einen zweiten Ausdruck für die Dreiecksfläche abzuleiten, beziehen wir das Dreieck auf ein rechtwinkliges in seiner Ebene liegendes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Sonne liegt und dessen X-Achse durch das Perihel hindurchgeht. Wir nennen x und y, x' und y' die Koordinaten der Endpunkte der beiden Radienvektoren r und r', dann ist (Nr. 44 und 46)

$$x = r\cos v = a(\cos E - e)$$
$$y = r\sin v = a\cos\varphi\sin E$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin E\frac{dE}{dt} = -k\sqrt{1+m}\sin E\frac{\sqrt{a}}{r} \qquad 3)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos\varphi\cos E\frac{dE}{dt} = k\sqrt{1+m}\cos\varphi\cos E\frac{\sqrt{a}}{r}$$

und ganz entsprechende Gleichungen erhält man für x' und y'. Setzt man nun an*):

$$\begin{aligned} x' &= \mathrm{F}\cdot x + \mathrm{G}\cdot\frac{dx}{dt} \\ y' &= \mathrm{F}\cdot y + \mathrm{G}\cdot\frac{dy}{dt}, \end{aligned} \qquad 4)$$

wo F und G Funktionen der Zeit sind, so ergibt sich nach Eintragung der eben angegebenen Werte von $x\ y\ x'\ y'$, und Weglassung der gemeinsamen Faktoren:

$$\cos E' - e = \mathrm{F}(\cos E - e) - \frac{\mathrm{G}k\sqrt{1+m}\sin E}{\sqrt{a}r}$$

$$\sin E' = \mathrm{F}\sin E \qquad + \frac{\mathrm{G}k\sqrt{1+m}\cos E}{\sqrt{a}r},$$

woraus sofort folgt:

$$\cos(E' - E) = \mathrm{F}(1 - e\cos E) + e\cos E$$

oder wenn beiderseits 1 subtrahiert und

$$1 - e\cos E = \frac{r}{a}$$

gesetzt wird:

$$\cos(E' - E) - 1 = \frac{r}{a}(\mathrm{F} - 1)$$

oder endlich:

$$\mathrm{F} = 1 + \frac{a}{r}(\cos 2g - 1) \qquad 5)$$

Der Wert für G ergibt sich, wenn man aus dem Ansatz 4) den Ausdruck $xy' - x'y$ bildet, der bekanntlich die doppelte Fläche des vom Anfangspunkt und den Punkten xy, $x'y'$ gebildeten Dreiecks, also $[rr']$ darstellt; es kommt zunächst:

$$xy' - x'y = [rr'] = \mathrm{G}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Nun ist die doppelte Fläche des Elementarsektors zwischen den Punkten x, y und $x + dx$, $y + dy$ einerseits $xdy - ydx$ und andererseits (Nr. 44) $k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\,dt$, also wird:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{1+m}\sqrt{p}$$

und daher

$$\mathrm{G} = \frac{[rr']}{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}$$

oder nach (1)

$$\mathrm{G} = \frac{1}{k\sqrt{1+m}}\left(k\sqrt{1+m}\ (t' - t) - (2g - \sin 2g)\,a^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\mathrm{G} = (t' - t) - \frac{2g - \sin 2g}{\mu}. \qquad 6)$$

Die geschlossenen Ausdrücke 5) und 6) von F und G, die zuerst von *Kühnert* in Astr. Nachr. Nr. 2266 aufgestellt wurden, müssen nun, da die Elemente unbekannt

*) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, Seite 500.

sind, als Funktionen der Zwischenzeit dargestellt werden. Hierzu stellen wir dem Ansatz 4) folgenden gegenüber:

$$\begin{aligned} x' &= x + (t'-t)\frac{dx}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(t'-t)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{(t'-t)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4x}{dt^4} + \cdots \\ y' &= y + (t'-t)\frac{dy}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(t'-t)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{(t'-t)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4y}{dt^4} + \cdots \end{aligned} \qquad 7)$$

der sich aus dem Taylorschen Satz ergibt, und müssen nun die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dt}, \cdots$ entwickeln. Aus

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v$$

folgt durch Differenziation:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{r}\frac{dr}{dt} - y\frac{dv}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{r}\frac{dr}{dt} + x\frac{dv}{dt}, \end{aligned} \qquad 8)$$

woraus, da $x^2 + y^2 = r^2$ ist, (nach Gl. 9 Seite 127.)

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{dv}{dt} = k\sqrt{1+m}\sqrt{p}.$$

Wird dies nochmals differenziert, so ergibt sich

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \qquad 9)$$

Durch Quadrieren und Addieren von 8) erhält man ferner:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

oder wenn der aus der Differenziation der Ellipsengleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

hervorgehende Ausdruck

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p}\sin v\, r^2\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}\,e}{\sqrt{p}}\sin v$$

darin eingetragen wird:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{k^2(1+m)}{p}\left(2\frac{p}{r} + e^2 - 1\right).$$

Hieraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2(1+m)}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Nimmt man hierzu 9)

$$-y\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

so ergibt sich aus der Verbindung beider Gleichungen leicht:

$$\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2(1+m)\frac{x}{r^2}\frac{dr}{dt}$$
$$\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2(1+m)\frac{y}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

oder da aus $x^2+y^2=r^2$ folgt $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2(1+m)\frac{x}{r^3}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2(1+m)\frac{y}{r^3}\,. \qquad 10)$$

Wir hätten diese Gleichungen auch direkt hinschreiben können, da sie offenbar nichts anderes ausdrücken, als daß die Bewegung des Körpers nach dem Newtonschen Gesetz erfolgt; allein da wir in Nr. 41 (Seite 125) von anderen Grundgleichungen ausgegangen sind, war es nützlich zu zeigen, wie man von den dort erhaltenen Resultaten (den Keplerschen Gesetzen) zu Grundgleichungen von anderer Gestaltung gelangen kann, die ihrerseits ebenfalls das Newtonsche Gesetz ausdrücken.

Setzt man die mit $k\sqrt{1+m}$ multiplizierte Zeit gleich τ, so wird:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{x}{r^3}$$
$$\frac{d^2y}{d\tau^2}=-\frac{y}{r^3}$$

und die weiteren Differenziationen, die wir nur für x anschreiben, ergeben:

$$\frac{d^3x}{d\tau^3}=-\frac{1}{r^3}\frac{dx}{d\tau}+\frac{3x}{r^4}\frac{dr}{d\tau}$$
$$\frac{d^4x}{d\tau^4}=\frac{x}{r^6}-\frac{12x}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{3x}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}+\frac{6}{r^4}\frac{dx}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}. \qquad 11)$$

Werden alle diese Differenzialquotienten in 7) eingetragen und wird dabei gleichzeitig die Form 4) hergestellt, so erhält man ohne nennenswerte Reduktion:

$$\mathrm{F}=1-\frac{1}{2}\frac{(\tau'-\tau)^2}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{(\tau'-\tau)^3}{r^4}\frac{dr}{d\tau}+\frac{(\tau'-\tau)^4}{24}\left(\frac{1}{r^6}-\frac{12}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{3}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)+\cdots$$
$$\mathrm{G}=(\tau'-\tau)-\frac{1}{6}\frac{(\tau'-\tau)^3}{r^3}+\frac{1}{4}\frac{(\tau'-\tau)^4}{r^4}\frac{dr}{d\tau}+\frac{(\tau'-\tau)^5}{120}\left(\frac{1}{r^6}-\frac{36}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{9}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)+\cdots \qquad 12)$$

wobei wir die Gleichungen 4) gleich auf die Zeit τ d. h. auf

$$\left.\begin{aligned}x'&=\mathrm{F}\cdot x+\mathrm{G}\frac{dx}{d\tau}\\ y'&=\mathrm{F}\cdot y+\mathrm{G}\frac{dy}{d\tau}\end{aligned}\right\} \qquad 4^a)$$

umgeschrieben angenommen haben. Vergleicht man die Gl. 2) und 6) und setzt für G seinen Wert aus 12), so erkennt man die Richtigkeit des folgenden Ausdruckes für das Verhältnis des Sektors zum Dreiecke y:

$$\frac{1}{y}=\frac{\mathrm{G}}{\tau'-\tau}=1-\frac{1}{6}\frac{(\tau'-\tau)^2}{r^3}+\frac{1}{4}\frac{(\tau'-\tau)^3}{r^4}\frac{dr}{d\tau}+\frac{(\tau'-\tau)^4}{120}\left(\frac{1}{r^6}-\frac{36}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{9}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)+\cdots$$

Für die Dreiecksfläche endlich ergibt sich aus 4a)

$$xy' - yx' = G\left(x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}\right) = \sqrt{p}\cdot G, \qquad 13)$$

wo für G sein Wert aus 12) einzutreten hat.

Auf Grund der vorausgehenden Entwicklungen ist es leicht, die in der Bahnbestimmung gebrauchten Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse aufzustellen. Es sind drei Punkte in der Bahn zu betrachten, zu denen die Radienvektoren r_1, r_2, r_3 gehören mögen, und deren Koordinaten im obigen System x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 seien. Die Zeiten, zu denen sie vom Körper eingenommen werden, seien t_1, t_2, t_3; die daraus hervorgehenden Zwischenzeiten, multipliziert mit $k\sqrt{1+m}$, bezeichnen wir mit:

$$\tau_1 = (t_3 - t_2)\,k\sqrt{1+m}, \quad \tau_2 = (t_3 - t_1)\,k\sqrt{1+m}, \quad \tau_3 = (t_2 - t_1)\,k\sqrt{1+m};$$

die doppelten Flächen der Dreiecke endlich seien $[r_2r_3]$, $[r_1r_3]$ und $[r_1r_2]$.

Die Ausdrücke für diese Flächen sind zunächst so zu gestalten, daß in allen ein und derselbe Radiusvektor und zwar r_2 auftritt, da dieser in der Bahnbestimmung als Unbekannte eingeführt wird. Für $[r_2r_3]$ hat man in den vorigen Formeln zu nehmen:

$$\begin{aligned} x_3 &= F_3x_2 + G_3\frac{dx_2}{d\tau} \\ y_3 &= F_3y_2 + G_3\frac{dy_2}{d\tau} \end{aligned} \qquad 14)$$

und daher:

$$[r_2r_3] = x_2y_3 - y_2x_3 = \sqrt{p}\,G_3 = \sqrt{p}\left(\tau_1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1^4}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right).$$

Für $[r_1r_2]$ wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1x_2 + G_1\frac{dx_2}{d\tau} \\ y_1 &= F_1y_2 + G_1\frac{dy_2}{d\tau} \end{aligned} \qquad 15)$$

und, da $\tau' - \tau = -\tau_3$ ist,

$$[r_1r_2] = x_1y_2 - y_1x_2 = -\sqrt{p}\,G_1 = -\sqrt{p}\left(-\tau_3 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3^3}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_3^4}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} - \cdots\right)$$

oder:

$$[r_1r_2] = \sqrt{p}\left(\tau_3 - \frac{1}{6}\frac{\tau_3^3}{r_2^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_3^4}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right).$$

Für $[r_1r_3]$ endlich hat man nach 14) und 15)

$$[r_1r_3] = x_1y_3 - y_1x_3 = \left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right)(F_1G_3 - G_1F_3) = \sqrt{p}\,(F_1G_3 - G_1F_3).$$

G_3 und G_1 sind bereits angegeben; für F_3 und F_1 erhält man aus 12), da für ersteres $\tau' - \tau = \tau_1$, für letzteres $\tau' - \tau = -\tau_3$ zu setzen ist:

$$\begin{aligned} F_3 &= 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2}\frac{\tau_1^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots \\ F_1 &= 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots. \end{aligned}$$

Mithin durch direktes Ausmultiplizieren:

$$[r_1 r_3] = \sqrt{p}\left(\tau_2 - \frac{1}{6}\frac{\tau_2^3}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_2^3(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right).$$

Wir stellen die drei Ausdrücke nochmals zusammen:

$$\begin{aligned}
[r_2 r_3] &= \tau_1\sqrt{p}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right)\\
[r_1 r_2] &= \tau_3\sqrt{p}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_3^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right) \qquad 16)\\
[r_1 r_3] &= \tau_2\sqrt{p}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_2^2(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Für die Zwecke der Bahnbestimmung werden die Verhältnisse der beiden dem Radiusvektor r_2 anliegenden Dreiecke zum großen Dreieck $[r_1 r_3]$ gebraucht; dieselben ergeben sich aus 16) durch direkte Ausrechnung:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2-\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_3(\tau_2\tau_3-\tau_1^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right)\\
n_3 &= \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2-\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_1(\tau_2\tau_1-\tau_3^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right).
\end{aligned} \qquad 17)$$

Hieraus folgt für die Summe:

$$n_1 + n_3 = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots \qquad 18)$$

und für den Quotienten:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1^2-\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_1^3+\tau_3^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \cdots\right). \qquad 19)$$

An diese wichtigen Formeln knüpfen wir einige Bemerkungen. Es wurde schon oben (Gl. 5[a]) Seite 153) darauf hingewiesen, daß die Bestimmung des Parameters wesentlich abhängt von dem Inhalt des kleinen Dreiecks, das die drei Punkte der Bahn miteinander bilden. Wir können für dieses Dreieck jetzt einen Ausdruck aufstellen. Nach 16) wird sein doppelter Inhalt nach einiger leichter Reduktion:

$$[r_2 r_3] + [r_1 r_2] - [r_1 r_3] = \sqrt{p}\,\frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2^3}\left(1 + \frac{\tau_3-\tau_1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau} - \cdots\right), \qquad 20)$$

womit sich, wie nebenbei bemerkt sei, folgender elegante und genaue Ausdruck für den Parameter ergibt:

$$p^{\frac{3}{2}} = 8 r_1 r_2 r_3 r_2^3\,\frac{\sin\frac{1}{2}(s_3-s_2)\sin\frac{1}{2}(s_2-s_1)\sin\frac{1}{2}(s_3-s_1)}{\tau_1\tau_2\tau_3} : \left(1 + \frac{\tau_3-\tau_1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}\right).$$

Der Ausdruck 20) ist von der dritten Ordnung in bezug auf die Zwischenzeiten. Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken 16) für die Dreiecksflächen zu vernachlässigen, wäre also identisch damit, den Parameter des zu bestimmenden Kegelschnittes von vornherein als unendlich groß anzunehmen, d. h. vorauszusetzen, daß der Körper sich in gerader Linie bewege. Jedes Näherungsverfahren muß also mindestens die Glieder dritter Ordnung in 16) bzw. die Glieder zweiter Ordnung in 17) von vornherein berücksichtigen. Dies kann aber auch geschehen, da r_2 ohnehin als Unbekannte

ins Problem aufzunehmen ist. Dagegen können schon die folgenden Glieder in der ersten Näherung nicht mehr berücksichtigt werden, da die Bildung von $\frac{dr_2}{d\tau}$ die Kenntnis der Elemente voraussetzt. —

Die ersten für die Bahnbestimmung notwendigen Glieder kann man sich auch auf folgende einfachere Weise aus den geschlossenen Ausdrücken 5) und 6) von F und G verschaffen. Wenn man nämlich

$$F = 1 + \frac{a}{r}(\cos 2g - 1)$$

$$G = (\tau' - \tau) - a^{\frac{3}{2}}(2g - \sin 2g)$$

nach Potenzen von $2g = E' - E$ entwickelt:

$$F = 1 - \frac{a}{r}\frac{(E'-E)^2}{2} + \frac{a}{r}\frac{(E'-E)^4}{24} - \cdots$$

$$G = (\tau' - \tau) - a^{\frac{3}{2}}\left(\frac{(E'-E)^3}{6} - \frac{(E'-E)^5}{120} + \cdots\right)$$

und beachtet, daß aus $E - e\sin E = \frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}$ folgt

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}(1 - e\cos E)} = \frac{1}{\sqrt{a}r},$$

also für kleine Zwischenzeiten genähert

$$E' - E = \frac{\tau' - \tau}{\sqrt{a}r}$$

gesetzt werden kann, so lassen sich F und G folgendermaßen schreiben:

$$F = 1 - \frac{1}{2}\frac{(\tau'-\tau)^2}{r^3} + \cdots$$

$$G = (\tau' - \tau) - \frac{1}{6}\frac{(\tau'-\tau)^3}{r^3} + \cdots.$$

Damit erhält man ebenso wie vorhin die zwei ersten Glieder in den Ausdrücken 16) und 17). Man kann daraus schließen, daß die in der Bahnbestimmung zur Anwendung gelangenden Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecke für Zwischenzeiten von der Ordnung der Differenziale streng sind. —

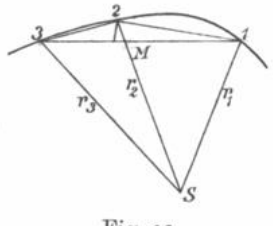


Fig. 33.

Wenn man von den Punkten 3 und 1 Lote auf den mittleren Radiusvektor r_2 fällt, so verhalten sich deren Längen und folglich auch die Abschnitte, in welche die Sehne 13 vom mittleren Radiusvektor zerlegt wird, wie die Flächen der Dreiecke $[r_2 r_3]$ und $[r_1 r_2]$; d. h. das Verhältnis dieser Abschnitte ist durch die Formel 19) gegeben. Man schließt daraus, daß die Abschnitte der Sehne sich bis auf Größen zweiter Ordnung wie die zugehörigen Zwischenzeiten verhalten und daß dies bis auf Größen dritter Ordnung zutrifft, wenn die Zwischenzeiten gleich sind. Dieser Satz spielt in der älteren Bahnbestimmung (Newton) eine große Rolle. —

Wir wollen endlich das Stück $M2$ des Radiusvektors r_2 zwischen der Sehne 13 und dem Punkt 2, d. h. den Pfeil $f = \overline{M2}$ berechnen. Ist h das Lot von 2 auf $\overline{13}$, so wird

$$f = \frac{h}{\sin SM3} = \frac{\overline{13}\,h}{\overline{13}\sin SM3} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3]}{\overline{1M}\sin SM3 + \overline{M3}\sin SM3}$$
$$= \frac{r_2([r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3])}{r_2(r_1 \sin(v_2 - v_1) + r_3 \sin(v_3 - v_2))} = \frac{r_2([r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3])}{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}.$$

Werden hier die Ausdrücke 20) und 16) mit Beiseitelassung der Glieder vierter Ordnung eingetragen, so kommt nach leichter Reduktion:

$$f = \frac{1}{2r_2^2}\tau_1\tau_3\left(1 + \frac{1}{6r_2^3}(r_2^2 - 3\tau_1\tau_3)\right)$$

oder bis auf Größen vierter Ordnung genau

$$f = \frac{1}{2r_2^2}\tau_1\tau_3. \qquad 21)$$

Wir werden später sehen, daß auf der Möglichkeit, dieses Stück f aus Messungen am Himmel abzuleiten, alle Bahnbestimmung beruht.

Das Verhältnis des Pfeiles $M2$ zur Strecke SM läßt sich ebenfalls durch die Dreiecksflächen ausdrücken:

$$\frac{f}{SM} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} - 1, \qquad 21^a)$$

also nach 18) bis auf Größen vierter Ordnung genau

$$\frac{f}{SM} = \frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3} \qquad 21^b)$$

53. Die Formeln von Gibbs. Man hat vielfach versucht, statt der Formeln 17) für die Verhältnisse der Dreiecksflächen genauere zu erhalten, um bei der Bahnbestimmung schon bei der ersten Näherung der Wahrheit näher zu kommen. Das war natürlich nur möglich, wenn man statt des einen Radiusvektors r_2 entweder r_1 und r_3 oder alle drei einführte. Die bemerkenswertesten von diesen Formeln sind die von *Gibbs**), der alle drei Radienvektoren benutzt. Man kann sie ohne alle fremdartigen Voraussetzungen kurz wie folgt ableiten. Stellt man die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Bahn statt durch die Gleichungen 4) durch die nach Potenzen der Zeit fortschreitenden Reihen dar, die man mit der vierten Ordnung abbricht:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 \\ y &= b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + b_4\tau^4, \end{aligned} \qquad (a)$$

so wird:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 2a_2 + 6a_3\tau + 12a_4\tau^2$$
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = 2b_2 + 6b_3\tau + 12b_4\tau^2$$

*) *Gibbs*, On the det. of ell. orbits; Nat. Ac. of Science, Vol. IV (8. Mem.), 1888.

und daher wegen:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}$$

$$-\frac{x}{r^3} = 2a_2 + 6a_3\tau + 12a_4\tau^2$$

$$-\frac{y}{r^3} = 2b_2 + 6b_3\tau + 12b_4\tau^2. \tag{b}$$

Setzt man die Gl. (a) und (b) für die 3 Punkte x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 an, indem man die Zeit von der des zweiten Ortes an zählt und wie oben die Zwischenzeiten zwischen 2 und 3 mit τ_1 und zwischen 1 und 2 mit τ_3 bezeichnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - a_1\tau_3 + a_2\tau_3^2 - a_3\tau_3^3 + a_4\tau_3^4 \\ x_2 &= a_0 \\ x_3 &= a_0 + a_1\tau_1 + a_2\tau_1^2 + a_3\tau_1^3 + a_4\tau_1^4 \\ -\frac{x_1}{r_1^3} &= 2a_2 - 6a_3\tau_3 + 12a_4\tau_3^2 \\ -\frac{x_2}{r_2^3} &= 2a_2 \\ -\frac{x_3}{r_3^3} &= 2a_2 + 6a_3\tau_1 + 12a_4\tau_1^2 \end{aligned} \tag{c}$$

und ein ebensolches System für die y. Wenn man aus beiden Systemen von je 6 Gleichungen die 5 Größen $a_0, \ldots, a_4$ bzw. $b_0, \ldots, b_4$ eliminiert, was man mit wenigen Strichen erreicht, wenn man einige Kunstgriffe nicht übersieht, so bleiben folgende Gleichungen übrig, deren Koeffizienten lediglich aus den r und τ sich zusammensetzen, also für beide Gruppen gleich sind:

$$x_1\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)A_1 - x_2\left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) + x_3\left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)A_3 = 0$$

$$y_1\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)A_1 - y_2\left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) + y_3\left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)A_3 = 0.$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{\tau_1}{\tau_2}; \qquad A_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{\tau_3}{\tau_2};$$

$B_1 = \frac{1}{12}(-\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2)$; $B_2 = \frac{1}{12}(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2)$; $B_3 = \frac{1}{12}(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)$

oder:

$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2(\tau_3 - \tau_1))$; $B_2 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2^2)$; $B_3 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 - \tau_2(\tau_3 - \tau_1))$

oder:

$$B_1 = \tfrac{1}{12}(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2); \quad B_2 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2^2); \quad B_3 = \tfrac{1}{12}(\tau_2\tau_1 - \tau_3^2).$$

Aus diesen Gleichungen aber folgt, wenn man sie einmal durch die Multiplikatoren $+y_1$ und $-x_1$, dann durch die Multiplikatoren $+y_3$ und $-x_3$ miteinander verbindet:

$$\left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right)(x_1y_2 - x_2y_1) - A_3\left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)(x_1y_3 - x_3y_1) = 0$$

$$-\left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right)(x_2y_3 - x_3y_2) + A_1\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)(x_1y_3 - x_3y_1) = 0$$

oder

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = A_3 \frac{1 + \frac{B_3}{r_3^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}}, \qquad \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = A_1 \frac{1 + \frac{B_1}{r_1^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}}; \tag{22}$$

die Dreiecke $[r_1 r_2]$, $[r_2 r_3]$, $[r_1 r_3]$ verhalten sich also wie:

$$\tau_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) \text{ zu } \tau_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \text{ zu } \tau_2 \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right).$$

Die Formeln 22) geben die Verhältnisse der Dreiecksflächen bis auf Größen vierter Ordnung inkl. in den Zwischenzeiten genau an, übertreffen die Gl. 17) also ganz erheblich. Die auf ihnen aufgebaute Methode der ersten Bahnbestimmung hat aber den Nachteil, daß sie keine weitere Verbesserung der Elemente gestattet, wenn die Glieder vierter Ordnung nicht ausreichen, abgesehen davon, daß sie naturgemäß zu viel komplizierteren Formeln für die Rechnung führen muß.

Wenn man in den Formeln 17) statt r_2 die Radienvektoren r_1 und r_3 einführt, dann kann man den Wert des Differenzialquotienten $\frac{dr_2}{dt}$ wenigstens genähert berücksichtigen und dadurch genauere Formeln erhalten. Dies hat Encke*) und ausführlicher *v. Oppolzer***) in folgender Weise durchgeführt und der Bahnbestimmung zugrunde gelegt. Aus den Entwickelungen

$$r_1 = r_2 - \tau_3 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} - \cdots$$

$$r_3 = r_2 + \tau_1 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} + \cdots$$

folgt leicht

$$r_2 = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3) + \tfrac{1}{2}(\tau_3 - \tau_1) \frac{dr_2}{d\tau} + \cdots$$

und

$$\frac{dr_2}{d\tau} = \frac{r_3 - r_1}{\tau_2} + \cdots,$$

also

$$r_2 = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3) + \tfrac{1}{2} \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2} (r_3 - r_1) + \cdots$$

Führt man dies in 17) und 19) ein, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$\begin{aligned}
\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 \frac{\tau_3 \tau_1^2}{\tau_2} \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right) \\
\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} - 4 \frac{\tau_1 \tau_3^2}{\tau_2} \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right) \\
\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} &= \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 \tau_1 \tau_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right).
\end{aligned} \tag{23}$$

*) Berliner Jahrbuch für 1833, Seite 292.

**) *v. Oppolzer*, Bahnbestimmung, Band I, Seite 100.

Diese Formeln berücksichtigen die Glieder dritter Ordnung vollständig, aber auch sie führen zu einer umständlichen Methode der Bahnbestimmung, außer wenn es sich um eine Parabel handelt, wo die letzte Formel wichtige Dienste leistet.

Eine vergleichende Kritik der Formeln 17) 22) und 23) hat *E. Weiß**) gegeben.

Wenn man die Analyse, die wir oben zur Ableitung der Gibbsschen Formeln durchgeführt haben, mit einem Gliede weniger ausführt, also mit dem Ansatz

$$x = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3,$$

so kann man aus den ebenso wie dort aufzustellenden 6 Gleichungen (c) (Seite 180) nicht nur die vier Größen $a_0, \ldots a_3$, sondern noch einen Radiusvektor z. B. r_2 eliminieren. Man kommt dann auf die Gleichung

$$\tau_1 \left(1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{6 r_1^3}\right) x_1 - \tau_2 x_2 + \tau_3 \left(1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{6 r_3^3}\right) x_3 = 0$$

und leitet daraus wie dort folgende Formeln ab:

$$\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{6 r_1^3}\right) \\ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{6 r_3^3}\right). \end{aligned} \qquad 24)$$

Die Ähnlichkeit mit 17) ist in die Augen springend, sie stehen auch, natürlich abgesehen von dem unbekannten mit $\frac{dr_2}{dt}$ multiplizierten Gliede, denselben an Genauigkeit nicht nach.

Reduziert man den Ansatz noch um ein Glied, setzt also:

$$x = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2,$$

so werden die 6 Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - a_1 \tau_3 + a_2 \tau_3^2 \\ x_2 &= a_0 \\ x_3 &= a_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_1^2 \\ -\frac{x_1}{r_1^3} &= 2 a_2 \\ -\frac{x_2}{r_2^3} &= 2 a_2 \\ -\frac{x_3}{r_3^3} &= 2 a_2 \end{aligned}$$

und wenn man hier die Größen a_0, a_1, a_2, r_1 und r_3 eliminiert, so bleibt die Gleichung übrig:

$$x_1 \tau_1 - x_2 \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right) + x_3 \tau_3 = 0,$$

---

*) Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschr. Ak. d. W. Wien, Band 60, Seite [353]. 1893.

aus der folgt:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right)$$
$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right). \qquad 25)$$

Dies sind die Werte, welche der ersten Näherung in der Gaußschen Methode zugrunde liegen; denn in der Theoria motus art. 134 wird gesetzt

$$P = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1}$$
$$Q = \left(\frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} - 1\right) r_2^3 = \tau_1 \tau_3 ,$$

welche Gleichungen sich unmittelbar aus 25) ergeben. Die Gl. 17) enthalten die Glieder zweiter Ordnung vollständig; die Gl. 25) aber nicht, denn der Unterschied ist

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{1}{r_2^3}\left(\frac{1}{6}(\tau_2^2 - \tau_1^2) - \frac{\tau_1 \tau_3}{2}\right) = \frac{1}{6}\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{1}{r_2^3}\tau_3(\tau_3 - \tau_1)$$

bzw.

$$\frac{\tau_3}{\tau_2}\frac{1}{r_2^3}\left(\frac{1}{6}(\tau_2^2 - \tau_3^2) - \frac{\tau_1 \tau_3}{2}\right) = -\frac{1}{6}\frac{\tau_3}{\tau_2}\frac{1}{r_2^3}\tau_1(\tau_3 - \tau_1),$$

verschwindet also nur bei gleichen Zwischenzeiten. Es ist also gerechtfertigt, die genauern und ebenso einfachen Gl. 17) statt 25) zu benutzen, wie Encke zuerst vorgeschlagen hat.

Zwischen den Verhältnissen (17):

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1 \quad \text{und} \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3$$

besteht eine einfache Beziehung, die vom Differenzialquotienten $\frac{dr_2}{d\tau}$ unabhängig und doch bis auf Größen vierter Ordnung in den Zwischenzeiten genau ist. Man erhält sie leicht, wenn man die Gl. 16) in folgender Weise miteinander verbindet:

$$\tau_3^4 [r_1 r_3] + \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3)[r_1 r_2] = \sqrt{p}\left(\tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2) - \frac{1}{6 r_2^3}\tau_1 \tau_2^3 \tau_3^3 \ldots\right)$$
$$\tau_1^4 [r_1 r_3] - \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3)[r_2 r_3] = \sqrt{p}\left(\tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2) - \frac{1}{6 r_2^3}\tau_3 \tau_2^3 \tau_1^3 \ldots\right)$$

und diese Gleichungen dann durcheinander dividiert:

$$\frac{\tau_3^4 + \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) n_3}{\tau_1^4 - \tau_2^3 (\tau_1 - \tau_3) n_1} = \frac{\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_3^2}{6 r_2^3}}{\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}}.$$

Wird hier kreuzweise ausmultipliziert und gehörig reduziert, so kommt:

$$\left(\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_3^2}{6 r_2^3}\right) n_1 + \left(\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2 - \frac{\tau_2^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}\right) n_3 = \tau_1^2 - \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 - \frac{\tau_3^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}. \qquad 26)$$

54. Beziehungen zwischen drei Radienvektoren und den Zwischenzeiten sind häufig von Nutzen und können in verschiedenen Genauigkeitsgraden aufgestellt werden. Aus den Ansätzen

$$r_1 = r_2 - \tau_3 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{1.2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} - \cdots$$

$$r_3 = r_2 + \tau_1 \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{1.2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2} + \cdots$$

folgt leicht:

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2} \frac{d^2 r_2}{d\tau^2}.$$

Da nach Seite 149

$$\frac{d^2 r_2}{d\tau^2} = \frac{e \cos v_2}{r_2^2},$$

so wird, wenn die Bahn genähert bekannt ist, die Formel

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2} \frac{e \cos v_2}{r_2^2} \qquad 1)$$

bis auf Größen dritter Ordnung inkl. genau sein. Vernachlässigt man Größen dritter Ordnung, so wird

$$\tau_1 r_1 + \tau_3 r_3 = \tau_2 r_2 . \qquad 2)$$

Setzt man an

$$r_1^2 = r_2^2 - \tau_3 \frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{1.2} \frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} - \cdots$$

$$r_3^2 = r_2^2 + \tau_1 \frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{1.2} \frac{d^2 r_2^2}{d\tau^2} + \cdots,$$

so erhält man ebenso nach den Formeln Seite 149

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2 + \tau_1 \tau_2 \tau_3 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right), \qquad 3)$$

also wieder mit Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2 . \qquad 4)$$

Eine genauere Formel erhält man durch ein Verfahren, das dem bei der Ableitung der Gibbsschen Formel eingeschlagenen ähnlich ist. Macht man nämlich den Ansatz

$$r^2 = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4,$$

so folgt

$$\frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2a_2 + 6a_3 \tau + 12 a_4 \tau^2 = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Zählt man τ von der Zeit des mittleren Radiusvektors aus, so wird für

$$\tau = -\tau_3 \qquad r^2 = r_1^2 \qquad \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\tau = 0 \qquad r^2 = r_2^2 \qquad \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\tau = +\tau_1 \qquad r^2 = r_3^2 \qquad \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = 2 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{a} \right)$$

und man erhält daher die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a_0 - \tau_3 a_1 + \tau_3^2 a_2 - \tau_3^3 a_3 + \tau_3^4 a_4 \\ r_2^2 &= a_0 \\ r_3^2 &= a_0 + \tau_1 a_1 + \tau_1^2 a_2 + \tau_1^3 a_3 + \tau_1^4 a_4 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 - 3\tau_3 a_3 + 6\tau_3^2 a_4 \\ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 \\ \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{a}\right) &= a_2 + 3\tau_1 a_3 + 6\tau_1^2 a_4 . \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus die fünf Größen $a_0, \ldots a_4$, so resultiert die Gleichung:

$$A_1 r_1^2 \left(1 - \frac{2B_1}{r_1^3}\right) + A_3 r_3^2 \left(1 - \frac{2B_3}{r_3^3}\right) - r_2^2 \left(1 + \frac{2B_2}{r_2^3}\right) + \frac{\tau_1 \tau_3}{a} = 0, \qquad 5)$$

die bis auf Größen vierter Ordnung genau ist und offenbar eine Erweiterung von 3) darstellt. Die A und B haben dieselben Werte wie Seite 180, nämlich

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad A_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$B_1 = \tfrac{1}{12}(\tau_2 \tau_3 - \tau_1^2), \qquad B_2 = \tfrac{1}{12}(\tau_1 \tau_3 + \tau_2^2), \qquad B_3 = \tfrac{1}{12}(\tau_2 \tau_1 - \tau_3^2).$$

Bei kleinen Exzentrizitäten wird man 5) so schreiben:

$$A_1 r_1^2 \left(1 - \frac{2B_1}{r_1^3}\right) + A_3 r_3^2 \left(1 - \frac{2B_3}{r_3^3}\right) - r_2^2 \left(1 - \frac{2B_2'}{r_2^3}\right) - \tau_1 \tau_3 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a}\right) = 0 \qquad 6)$$

$$B_2' = \tfrac{1}{12}\left(\tau_1 \tau_3 - (\tau_3 - \tau_1)^2\right).$$

Kennt man also die große Achse einer Bahn genähert, so gewähren 5) oder 6) bequeme Mittel, um aus zwei Radienvektoren einen dritten abzuleiten.

Abschnitt XII.

Die Bewegung in der Parabel.

55. Die Bewegung in der Parabel. Um die Bewegung in der Parabel kennen zu lernen, ist die Gl. 9) (Seite 127)

$$r^2 \frac{ds}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p} \qquad 1)$$

unter der Voraussetzung zu integrieren, daß r und s durch die Gleichung der Parabel (12) Seite 128) miteinander verbunden sind:

$$r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}(s-\varpi)^2} \qquad 2)$$

wo $q = \frac{p}{2}$ die Periheldistanz bezeichnet. Setzt man $s - \varpi = v$, wo v auch hier die wahre Anomalie genannt wird, so folgt durch Einsetzung von 2) in 1)

$$\frac{q^2}{\cos\frac{v^4}{2}}\,dv = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{2q}\,dt.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$2q^2\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{v^3}{2}\right) = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{2q}\,t + c,$$

denn

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{v^3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{v^2}{2}} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{v^2}{2}\,\frac{1}{\cos\frac{v^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{v^4}{2}}\left(\sin\frac{v^2}{2} + \cos\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2\cos\frac{v^4}{2}}.$$

Nennt man T den Moment, wo der Körper durch das Perihel geht, so muß für $t = \mathrm{T}$ $v = 0$ sein; damit bestimmt sich die Konstante c zu $-k\sqrt{1+m}\,\sqrt{2q}\,\mathrm{T}$ und die Gleichung wird, wenn überdies $m = 0$ gesetzt wird, da wir bei den hier in Betracht kommenden Körpern die Masse niemals werden bestimmen können,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \frac{k}{\sqrt{2}}\,\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}. \qquad 3)$$

Diese Gleichung, die der Keplerschen bei der Ellipse entspricht, liefert die wahre Anomalie direkt durch die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit. Es gelingt hier durch einen einfachen Kunstgriff eine direkte Auflösung. Setzt man nämlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = 2\operatorname{cotg} 2\gamma$$

und beachtet, daß

$$2\operatorname{cotg} 2\gamma = \frac{2(\cos\gamma^2 - \sin\gamma^2)}{2\sin\gamma\cos\gamma} = \operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma,$$

so wird:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = (\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma) + \tfrac{1}{3}(\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma)^3$$
$$= \tfrac{1}{3}(\operatorname{cotg}\gamma^3 - \operatorname{tg}\gamma^3);$$

und setzt man weiter

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \tfrac{1}{3}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta) = \tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}\beta.$$

Die Gleichung 3) kann also so geschrieben werden

$$\tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}\beta = \frac{k}{\sqrt{2}}\,\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k}\,\frac{q^{\frac{3}{2}}}{t-\mathrm{T}}$$

und ihre ganze Auflösung würde also durch folgendes Formelsystem bewerkstelligt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k}\,\frac{q^{\frac{3}{2}}}{t-\mathrm{T}} \qquad \log\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k} = 1.7388423$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta} \qquad 4)$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = 2\operatorname{cotg}2\gamma.$$

Man kann hieraus sowohl v ermitteln, wenn t gegeben ist, als auch umgekehrt die zu der wahren Anomalie v gehörige, seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit $t - \mathrm{T}$.

Der Radiusvektor wird stets durch

$$r = \frac{2q}{1+\cos v} = \frac{q}{\cos\tfrac{1}{2}v^2} \qquad 5)$$

gefunden, nachdem v bereits ermittelt ist.

In der Regel bedient man sich des Formelsystems 4) nicht, sondern man benutzt eine *Tafel*, die unter dem Namen der Barkerschen*) bekannt ist. Schreibt man nämlich 3) in der Form

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}} = M,$$

so läßt sich die Auflösung dieser Gleichung nach M oder nach v einer Tafel entnehmen, welche mit dem Argument v das M tabuliert. Die umfangreichste Tafel dieser Art ist die von Oppolzer, welche von 10″ zu 10″ fortschreitet. Die älteren Ausgaben der Barkerschen Tafel tabulieren in der Regel nicht M sondern

$$\frac{75k}{\sqrt{2}}M \qquad \left(\log\frac{75k}{\sqrt{2}} = 9.9601277\right);$$

dementsprechend hat man natürlich den Wert zu bilden, mit dem man in die Tafel eingeht, bzw. bei der Berechnung von $t - \mathrm{T}$ zu verfahren.

Man kann auch umgekehrt M als Argument nehmen und v tabulieren; die Tafel erhält dann wesentlich geringeren Umfang, ohne an Bequemlichkeit viel zu verlieren. In der Tafelsammlung (Taf. XV) ist eine solche Tafel aufgenommen, deren Einrichtung und Gebrauch dort nachzulesen ist.

*) *Barker*, An account of the discoveries concerning Planets with the way to find their orbits. London 1757.

Wenn M sehr groß wird, d. h. wenn sich v der Grenze 180° nähert, dann werden alle Tafeln zur Ermittelung der wahren Anomalie in der parabolischen Bewegung unbequem und zuletzt unbrauchbar. Zur Abhilfe hat man verschiedene Mittel vorgeschlagen, das bequemste dürfte das von *Bessel* angegebene sein. Schreibt man die Gl. 3) in der Form

$$\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3(1+3\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^2)=\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}$$

und multipliziert und dividiert links mit

$$(1+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^2)^3=\left(\frac{2}{\sin v\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}\right)^3,$$

dann geht sie über in:

$$\frac{8}{3\sin v^3}\frac{1+3\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2}{(1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2)^3}=\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Nähert sich nun v der Grenze 180°, dann wird der zweite Faktor links nahe gleich 1 und der Wert von w, der sich aus der Auflösung der Gleichung

$$\frac{8}{3\sin w^3}=\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}$$

ergibt, wird also nur einer kleinen Korrektion δ bedürfen, um in v überzugehen. δ kann man leicht mit dem Argument w tabulieren (Taf. XVI der Sammlung). Die Rechnung wird sich somit nach folgendem Schema vollziehen:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{M}=\dfrac{q^{\frac{3}{2}}}{t-\mathrm{T}} & \\ \sin w=\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{k}\dfrac{1}{M}} & \log\dfrac{8}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{k}=2.3409023 \\ w \text{ im II. Quadr.} & \\ v=w+\delta & (\delta \text{ aus Taf. XVI}). \end{array}\right\} \quad 6)$$

Die umgekehrte Aufgabe, zu einer gegebenen wahren Anomalie die seit der Perihelzeit T verflossene Zeit $t-\mathrm{T}$ zu ermitteln, kann natürlich mittels der Barkerschen Tafel gelöst werden. Man kann aber auch direkt nach

$$t-\mathrm{T}=q^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v+\frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\right) \quad 7)$$

oder nach Einsetzung der Zahlenwerte, nach

$$t-\mathrm{T}=q^{\frac{3}{2}}([1.9149336]\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v+[1.4378123]\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3)$$

rechnen. Bei Werten von v nahe an 180° wird man die direkte Rechnung am bequemsten finden, wenn man 7) in der Form schreibt:

$$\left.\begin{array}{l} t-\mathrm{T}=\dfrac{\sqrt{2}}{3k}q^{\frac{3}{2}}\dfrac{1+3\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^3} \\ \log\dfrac{\sqrt{2}}{3k}=1.4378123; \end{array}\right\} \quad 8)$$

dies wird sich besonders empfehlen, wenn der Radiusvektor bekannt ist, aus dem sich ergibt

$$\cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{r}{q}} \quad \text{und dann} \quad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v = \frac{\cos\frac{1}{2}v}{\sin\frac{1}{2}v}.$$

Liegt t vor dem Periheldurchgang, so zählt man $t - \mathrm{T}$ und ebenso die zugehörige wahre Anomalie negativ, während die absoluten Werte dieselben sind, wie für die entsprechenden Zeiten nach dem Periheldurchgang.

Beispiele.

1. Für den Kometen 1896 I ist

$$\mathrm{T} = 1896 \text{ Jan. } 31.79848$$
$$\log q = 9.768740;$$

man berechne die wahre Anomalie und den Radiusvektor für 1896 Mai 2.5

a) ohne Tafel nach 4).

$t - \mathrm{T}$	$+ 91^{d}.70152$
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 1100
$t - \mathrm{T}$	1.962 3765
	7.690 7335
$\operatorname{tg}\beta$	9.429 5758
$\frac{1}{2}\beta$	$7^{\circ}\,31'\,30''.58$
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$	9.120 9004
$\operatorname{tg}\gamma$	9.706 9668
2γ	$53^{\circ}\,58'\,43''.54$
$\operatorname{cotg} 2\gamma$	9.861 5995
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$	0.162 6295
v	$110^{\circ}\,58'\,15''.26$

b) Mit einer Tafel nach der Barkerschen Einrichtung. Man hat zu rechnen $\frac{75k}{\sqrt{2}}\,\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}$ und mit diesem Argument aus der Tafel v zu interpolieren.

$t - \mathrm{T}$	$+ 91^{d}.70152$
$\log(t - \mathrm{T})$	1.962 3765
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 1100
	2.309 2665
Arg.	2.269 3942
v	$110^{\circ}\,58'\,15''.34$

c) Mit der Oppolzerschen Tafel; das Argument ist $\log M = \log\frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}$

$t - \mathrm{T}$	1.962 3765
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 1100
M	2.309 2665
v	$110^{\circ}\,58'\,15''.34$

d) Mit Tafel XV; das Argument ist $\log M = \log \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}$

$\log M$	2.309 2665	$\log A$	5.38523
	110° 57′ 10.″63		6.42570
	+ 1 4.704		
v	110 58 15.33		

Berechnung des Radiusvektors nach 5):

$\cos v$	$9.553\,7546_n$	oder $\frac{v}{2}$	55° 29′ 7.″67
$1 + \cos v$	9.807 6066	$\cos \frac{1}{2}v$	9.753 2883
$2q$	0.069 7700	$\cos \frac{1}{2}v^2$	9.506 5766
r	0.262 1634	q	9.768 7400
		r	0.262 1634

2. Man berechne für denselben Kometen die wahre Anomalie 10000 Tage nach dem Periheldurchgang. Nach den Formeln 6) wird:

$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 1100
$t - T$	4.000 0000
$\frac{1}{M}$	5.653 1100
	7.994 0123
$\sin w$	9.331 3374
w	167° 36′ 59.″06
Taf. XVI	+ 6.08
v	167 37 5.14

3. Bei einer ersten Bahnbestimmung desselben Kometen wurde gefunden

$$\log q = 9.768\,874$$

und für die Zeit der letzten Beobachtung

$$t = 1896 \text{ Febr. } 21.71344 \qquad v = 54° 48′ 8.″2 .$$

Man ermittle daraus die Zeit des Periheldurchganges.

Die direkte Rechnung nach 7) ergibt:

$\frac{1}{2}v$	27° 24′ 4.″1
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$	9.714 645
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v^3$	9.143 935
	1.629 579
	0.581 747
Summe	1.666 834
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
$t - T$	1.320 144
	+ 20.89990
also T	1896 Jan. 31.81354

Mit Taf. XV findet man:

$\log M_0$	1.667	v_0	$54^\circ 49' 3''.50$
		$v - v_0$	1.7427n
		$\log A$	5.5229
		$M - M_0$	− 0.000 166
		$\log M$	1.666 834
		$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
		$t - \mathrm{T}$	+ 20.89990
		T	1896 Jan. 31.81354

Mit einer Barkerschen Tafel ergibt sich unmittelbar:

$\log \frac{75k}{\sqrt{2}} M$	1.626 9618
$\frac{75k}{\sqrt{2}}$	9.960 1277
M	1.666 8341
$q^{\frac{3}{2}}$	9.653 310
$t - \mathrm{T}$	+ 20.89990
T	1896 Jan. 31.81354.

56. Beziehungen zwischen mehreren Örtern in der Parabel. Die Eulersche Gleichung. Zwischen dem Element q, welches die Parabel ihrer Größe nach bestimmt, den Polarkoordinaten einzelner Punkte der Kurve und der Zwischenzeit, welche zur Beschreibung der Bogen gebraucht wird, gibt es eine große Zahl von Beziehungen, deren meiste *Lambert* in seinem Werke Ins. orbitae Cometarum proprietates 1761 (Ostwalds Klassiker Nr. 133) zusammengestellt hat. Wir wollen davon diejenigen, die für die heutige Bahnbestimmung von Nutzen sind, kennen lernen und beginnen mit dem Satz, den wir schon oben als Spezialfall aus der entsprechenden Formel für die Ellipse abgeleitet haben.

Wir nennen die zu den Zeiten t und t' gehörigen wahren Anomalien v und v', Radienvektoren r und r', die Sehne zwischen den Endpunkten derselben s und $v' - v = 2f$, dann wird in der Parabel der doppelte im Zeitraum $t' - t$ überstrichene Sektor

$$k(t' - t)\sqrt{2q} = \int_v^{v'} r^2\, dv = \int_v^{v'} \frac{q^2}{\cos^4 \frac{1}{2} v}\, dv$$

oder nach Ausführung der schon oben behandelten Integration:

$$k(t' - t)\sqrt{2q} = 2q^2 \left(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} v\right).$$

Hier suchen wir nun r, r' und s einzuführen. Es ist:

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2$$

oder

$$4rr' \cos f^2 = (r + r')^2 - s^2 = (r + r' + s)(r + r' - s)$$

also:

$$2\sqrt{rr'} \cos f = \pm \sqrt{(r + r' + s)}\, \sqrt{(r + r' - s)}. \qquad \text{(a)}$$

Ferner ist

$$\sin f^2 = \sin \tfrac{1}{2}(v' - v)^2 = \cos \tfrac{1}{2} v'^2 + \cos \tfrac{1}{2} v^2 - 2 \cos \tfrac{1}{2}(v' - v) \cos \tfrac{1}{2} v' \cos \tfrac{1}{2} v$$

oder

$$\sin f^2 = \frac{q}{r'} + \frac{q}{r} - 2 \cos f \frac{q}{\sqrt{rr'}} = \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'}}{rr'} q .$$

Setzt man hier für $r + r'$ den Ausdruck

$$r + r' = \tfrac{1}{2}\left((r + r' + s) + (r + r' - s)\right)$$

und für $2 \cos f \sqrt{rr'}$ den Ausdruck (a), so kommt, wenn noch die Wurzel ausgezogen wird:

$$2 \sqrt{rr'} \sin f = \sqrt{2q}\left(\sqrt{r + r' + s} \mp \sqrt{r + r' - s}\right). \tag{b}$$

Schreibt man nun den obigen Ausdruck für den doppelten parabolischen Sektor so:

$$k(t' - t)\sqrt{2q} = 2q^2 (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v)(1 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v'^2 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v')$$

oder:

$$k(t' - t)\sqrt{2q} = 2q^2 (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v)\left(1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' + \tfrac{1}{3} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v)^2\right)$$

und beachtet, daß:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(v' - v)}{\cos \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v'} = \frac{\sqrt{rr'} \sin f}{q}$$

und

$$1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(v' - v)}{\cos \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v'} = \frac{\sqrt{rr'} \cos f}{q},$$

so findet man leicht:

$$\begin{aligned} k(t' - t)\sqrt{2q} &= 2q^2 \frac{\sqrt{rr'} \sin f}{q}\left(\frac{\sqrt{rr'} \cos f}{q} + \frac{1}{3} \frac{rr' \sin f^2}{q^2}\right) \\ &= 2 \sin f \cos f\, rr' + \frac{2}{3} \frac{\sin f^3}{q} \sqrt{rr'^3}. \end{aligned} \tag{c}$$

Ehe wir hier die Gl. (a) und (b) und damit die Sehne s einführen, womit, wie sich herausstellen wird, die Periheldistanz q eliminiert wird, wollen wir zeigen, daß die rechte Seite von (c) auf einen von q unabhängigen Ausdruck hingeführt werden kann. Zu dem Ende leiten wir einen merkwürdigen Ausdruck für q ab*).

Setzt man für einen Augenblick

$$\tfrac{1}{2}(v' + v) = F \quad \text{neben} \quad \tfrac{1}{2}(v' - v) = f,$$

so wird:

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \frac{\cos \tfrac{1}{2} v'}{\cos \tfrac{1}{2} v} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(F + f)}{\cos \tfrac{1}{2}(F - f)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f}{1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f}$$

woraus:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{(\sqrt{r'} + \sqrt{r}) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f}.$$

Trägt man dies in

$$\cos F = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F^2}, \quad \sin F = \frac{2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F}{1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F^2}$$

ein, so erhält man rasch:

$$\cos F = \frac{2\sqrt{rr'} - (r + r') \cos f}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f}, \quad \sin F = \frac{(r' - r) \sin f}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f}.$$

*) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, p. 476.

Da nun

$$q = \sqrt{rr'}\cos\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v' = \tfrac{1}{2}\sqrt{rr'}\,(\cos f + \cos F)\,,$$

so folgt nach kurzer Reduktion

$$q = \frac{rr'\sin f^2}{r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f}\,. \tag{d}$$

Wird dies im letzten Gliede von (c) eingetragen, so entsteht folgender Ausdruck für den doppelten parabolischen Sektor*):

$$\frac{2}{3}\sqrt{rr'}\sin f\,(r + r' + \sqrt{rr'}\cos f) \tag{e}$$

und wenn dies noch mit

$$\sqrt{2q} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{rr'}\sin f}{\sqrt{r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f}}$$

dividiert wird, folgender Ausdruck für die Zwischenzeit:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}k(t' - t) = (r + r' + \sqrt{rr'}\cos f)\sqrt{r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f}\,. \tag{f}$$

Bemerkenswert ist, daß er sowohl von q als von der Perihelzeit völlig unabhängig ist.

Wir führen in (c) jetzt durch (a) und (b) die Sehne ein; schneller kommt man zum Ziel, wenn man (c) in der Form (e) benutzt, wir wollen diese Zwischenrechnung aber nicht heranziehen. Wird zur Abkürzung

$$\sqrt{r + r' + s} = m\,, \quad \sqrt{r + r' - s} = n$$

gesetzt, so kommt:

$$2\sqrt{rr'}\cos f = \pm\, mn\,, \quad 2\sqrt{rr'}\sin f = \sqrt{2q}\,(m \mp n)$$

und daher:

$$k(t' - t)\sqrt{2q} = q\sqrt{2q}\,(m \mp n)\left(\pm\,\frac{mn}{2q} + \frac{1}{3}\,\frac{(m \mp n)^2}{2q}\right)$$

oder:

$$6k(t' - t) = (m \mp n)\,((m \mp n)^2 \pm 3mn) = m^3 \mp n^3$$

oder:

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{9}$$

Durch Einführung der Sehne hat sich also die Periheldistanz aus der ganzen Gleichung weggehoben und es ist eine Beziehung zwischen der Summe der Radienvektoren, der Sehne und der Zwischenzeit entstanden. Dieselbe wurde zuerst von *Euler* (Miscell. Berolin. T. VII, p. 20, 1743) aufgefunden, aber nicht benutzt; später hat *Lambert* (Orb. Com. § 83, 1761) sie selbständig entwickelt und ihre Wichtigkeit für die Bahnbestimmung gezeigt. Lagrange (l. c.), Gauß (Theoria mot. art. 108) und Encke (Berl. Jahrb. für 1833) haben analytische Ableitungen gegeben.

Was das doppelte Zeichen anlangt, so gilt hier dasselbe, was wir schon bei der Ellipse (Seite 170) fanden, nämlich daß das obere Zeichen für $v' - v < 180^\circ$, das untere für $v' - v > 180^\circ$ zu nehmen ist. In der Anwendung kommt fast nur der erste Fall vor.

*) *Lambert*, Orb. Com. § 29; *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV, p. 478.

Lambert hat die Eulersche Gleichung 9) in eine Reihe entwickelt (Orb. Com. art. 125). Beachtet man nur das obere Zeichen, so wird, da die ungeraden Glieder sich aufheben

$$6k(t'-t) = 3\left(s(r+r')^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4.6}s^3(r+r')^{-\frac{3}{2}} - \frac{1\cdot3\cdot5}{4.6.8.10}s^5(r+r')^{-\frac{7}{2}} - \cdots\right),$$

oder

$$\frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{s}{r+r'}\right) - \frac{1}{4.6}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{4.6.8.10}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^7 - \cdots$$

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man, wenn

$$\frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \eta$$

gesetzt wird:

$$\frac{s}{r+r'} = \eta + \tfrac{1}{24}\eta^3 + \tfrac{5}{384}\eta^5 + \tfrac{59}{9216}\eta^7 + \cdots$$

Encke (Berl. Jahrbuch für 1833, S. 267) hat diese Reihe so geschrieben:

$$s = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}(1 + \tfrac{1}{24}\eta^2 + \tfrac{5}{384}\eta^4 + \tfrac{59}{9216}\eta^6 + \cdots)$$

und gezeigt, daß der zweite Faktor

$$\mu = 1 + \tfrac{1}{24}\eta^2 + \tfrac{5}{384}\eta^4 + \tfrac{59}{9216}\eta^6 + \cdots,$$

der bei kleinen Zwischenzeiten sich wenig von 1 unterscheiden wird, leicht tabuliert werden kann. In der Tat findet man dafür auf folgende Weise einen endlichen Ausdruck. Wird

$$\frac{s}{r+r'} = \sin\gamma$$

gesetzt, so geht 9) über in:

$$\frac{6k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = (1+\sin\gamma)^{\frac{3}{2}} \mp (1-\sin\gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

Da γ stets kleiner als 90° ist, so kann man

$$(1 \pm \sin\gamma) = 1 \pm 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma \pm \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2$$

gebrauchen und findet damit:

$$\frac{6k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3 \mp (\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3.$$

Nimmt man zuerst das obere Zeichen und entwickelt die Kuben, so kommt:

$$\frac{6k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 6\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^3$$
$$= 6\sin\tfrac{1}{2}\gamma - 4\sin\tfrac{1}{2}\gamma^3.$$

Dividiert man beiderseits mit $2^{\frac{3}{2}}$ und setzt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} = \sin x,$$

so folgt:

$$\frac{6}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 3\sin x - 4\sin x^3 = \sin 3x\,.$$

Macht man also $3x = \Theta$, so wird folgendes System bestehen:

$$\begin{aligned} \sin\Theta &= \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} \\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{2}\,\sin\tfrac{1}{3}\Theta \\ s &= (r+r')\sin\gamma, \end{aligned} \qquad 10)$$

aus dem die Sehne bequem berechnet werden kann. Da andererseits nach obigem:

$$s = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}\,\mu\,, \qquad 11)$$

so folgt:

$$\frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}}\,\mu = \sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{1-\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}$$

$$= 2\sqrt{2}\,\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{1-2\sin\tfrac{1}{3}\Theta^2} = 2^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}$$

oder wenn nach der ersten Gl. 10)

$$\frac{2k(t'-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{3}\sin\Theta$$

beachtet wird:

$$\mu = \frac{3\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}}{\sin\Theta}\,.$$

Da

$$\sin\Theta = \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}}\,\eta\,,$$

so kann man μ leicht mit dem Argument η tabulieren. Encke hat eine solche Tafel berechnet; sie ist als Taf. XXII der Sammlung einverleibt. Die Berechnung der Sehne gestaltet sich hiernach einfach so:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} \qquad \log 2k = 8.5366114 \\ s &= (r+r')\,\eta\,\mu \\ &\quad \mu \text{ mit Arg. } \eta \text{ aus Taf. XXII.} \end{aligned} \qquad 12)$$

Reicht die Tafel nicht aus, so rechnet man nach 10) oder nach der geschlossenen Form:

$$\begin{aligned} \sin\Theta &= \frac{6}{\sqrt{8}}\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} \\ s &= \frac{6k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}\,\frac{\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}}{\sin\Theta}\,. \end{aligned} \qquad 13)$$

Kommt das untere Zeichen in Frage, was selten genug der Fall sein wird, so gibt die Entwicklung:

$$\frac{6k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 6\cos\tfrac{1}{2}\gamma - 4\cos\tfrac{1}{2}\gamma^3$$

oder

$$\frac{6k(t'-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 3\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3,$$

oder wenn

$$\sin\tfrac{1}{3}\Theta = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}}$$

gesetzt wird, wie vorhin:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{6k(t'-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \sin\Theta \\ v'-v > 180^\circ \qquad\qquad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{2}\sin\tfrac{1}{3}\Theta \\ s = (r+r')\sin\gamma\,. \end{array}\right\} \quad 14)$$

Da γ stets kleiner als 90° ist, so folgt aus der zweiten Gleichung 10), daß man im ersten Falle (oberes Zeichen: $v'-v<180^\circ$) für Θ stets *den* Wert aus der ersten Gl. 10) zu nehmen habe, der kleiner ist als 90°; dagegen folgt aus der zweiten Gl. 14) (unteres Zeichen: $v'-v>180^\circ$), daß man für Θ den zwischen 90° und 180° sich ergebenden Wert zu wählen hat.

Übrigens folgt sowohl aus $\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2}\sin\frac{1}{3}\Theta$ als aus $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2}\sin\frac{1}{3}\Theta$:

$$\sin\gamma = 2^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}$$

und das System 13) gilt somit allgemein für beide Fälle, nur hat man für $v'-v<180^\circ$ Θ zwischen 0° und 90° und für $v'-v>180^\circ$ Θ zwischen 90° und 180° zu nehmen.

Die ursprüngliche Form 9) der Eulerschen Gleichung hat gerade für die Fälle, wo sie am häufigsten gebraucht wird, nämlich für kleine Werte der Sehne, den Nachteil, daß sich daraus $6k(t'-t)$ als Differenz zweier nahe gleich großen Zahlen nur unsicher berechnen läßt; die Enckesche Form ist hiervon frei und wird daher jetzt ausschließlich bei der Bahnbestimmung benutzt. Man erhält dadurch direkt den Wert der Sehne aus den Radienvektoren und der Zwischenzeit; die umgekehrte Aufgabe, die Zwischenzeit aus der Sehne und den Radienvektoren zu berechnen, läßt sich zwar mittels Durchrechnung des Systems 10) in umgekehrter Reihenfolge lösen, kann aber durch Benutzung einer von *Nicolai* entworfenen Tafel (Astr. Nachr. Bd. 10, S. 233) wesentlich erleichtert werden (Taf. XXIV der Sammlung). Nach 13) ist:

$$k(t'-t) = \frac{1}{6}\sqrt{r+r'}\,s\,\frac{\sin\Theta}{\sin\tfrac{1}{3}\Theta\sqrt{\cos\tfrac{2}{3}\Theta}} = \sqrt{r+r'}\,s\,\frac{1}{2\mu}$$

und außerdem findet man leicht

$$\frac{1}{2\mu} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,(1+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2) = Q;$$

man kann also Q mit dem Argument $\log\sin\gamma$ tabulieren und hat dann einfach:

$$\left.\begin{array}{c} \sin\gamma = \dfrac{s}{r+r'} \\ k(t'-t) = \sqrt{r+r'}\,s\,Q \\ Q \text{ mit Arg. } \log\sin\gamma \text{ aus Taf. XXIV.} \end{array}\right\} \quad 15)$$

Die Benutzung der Tafel hebt den oben berührten Mißstand bei der Berechnung der Zwischenzeit auf; in Fällen, wo die Tafel nicht ausreicht, kann man direkt nach 9) rechnen.

57. Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Parabel. Wird wie früher der Winkel zwischen den beiden Radienvektoren r und r' gleich $2f$ gesetzt, so wird nach Seite 193 die Fläche des parabolischen Sektors

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{rr'}\,\sin f\,(r + r' + \sqrt{rr'}\,\cos f)$$

und die Fläche des zugehörigen Dreiecks

$$rr'\,\sin f\,\cos f,$$

also das Verhältnis beider

$$y = \frac{1}{3}\cdot\frac{r + r' + \sqrt{rr'}\,\cos f}{\sqrt{rr'}\,\cos f}. \qquad 1)$$

Man kann diesen Ausdruck noch mannigfach umgestalten. Sind die wahren Anomalien v und v', so wird:

$$r = q\,\sec\tfrac{1}{2}v^2$$
$$r' = q\,\sec\tfrac{1}{2}v'^2$$
$$f = \tfrac{1}{2}(v' - v)$$

und daher:

$$y = \frac{1}{3}\,\frac{\sec\tfrac{1}{2}v^2 + \sec\tfrac{1}{2}v'^2 + \sec\tfrac{1}{2}v\,\sec\tfrac{1}{2}v'\,\cos\tfrac{1}{2}(v' - v)}{\sec\tfrac{1}{2}v\,\sec\tfrac{1}{2}v'\,\cos\tfrac{1}{2}(v' - v)}$$

oder

$$y = \frac{1}{3}\,\frac{3 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v'^2 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v'}{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v'}.$$

Setzt man für den Augenblick

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = x$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v' = x + \zeta,$$

so wird

$$y = \frac{3 + 3x^2 + 3x\zeta + \zeta^2}{3 + 3x^2 + 3x\zeta} = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{\zeta^2}{1 + x^2 + x\zeta}$$

oder

$$y = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v' - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v)^2}{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v'} = 1 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}f^2\,(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v').$$

Ersetzt man hier $1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v'$ durch

$$1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}(f + \tfrac{1}{2}v) = \frac{\sec\tfrac{1}{2}v^2}{1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}f},$$

so kommt

$$y = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{\sec\tfrac{1}{2}v^2\,\operatorname{tg}f^2}{1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}f} \qquad 2)$$

(Lambert, Beiträge Teil 3, Seite 266; Ostwald, Klassiker Nr. 133, Seite 137); ersetzt man es aber durch den oben bereits abgeleiteten Wert

$$1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\sqrt{rr'}\,\cos f}{q},$$

so erscheint:

$$y = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{\sin f^2}{q\,\cos f}\sqrt{rr'}. \qquad 3)$$

Man kann diesen Ausdruck direkt aus (c) (Seite 192) ableiten, wenn man durch die doppelte Fläche des Dreiecks $2rr' \sin f \cos f$ dividiert. Endlich kann man in 1) auch den früher bereits benutzten Winkel γ, der durch

$$\sin\gamma = \frac{s}{r + r'}$$

definiert ist, einführen und dadurch einen besonders einfachen Ausdruck erhalten. Ersetzt man nämlich in

$$\cos\gamma^2 = 1 - \sin\gamma^2 = \frac{(r + r')^2 - s^2}{(r + r')^2}$$

s^2 durch

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2,$$

so folgt:

$$\cos\gamma^2 = \frac{4rr' \cos f^2}{(r + r')^2}$$

oder

$$\sqrt{rr'} \cos f = \tfrac{1}{2}(r + r') \cos\gamma.$$

Dies gibt in 1) eingetragen:

$$y = \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{1}{2}\cos\gamma}{\frac{1}{2}\cos\gamma}$$

oder

$$y = \tfrac{1}{3}(1 + 2 \sec\gamma) \qquad 4)$$

(Encke, Berl. Jahrb. f. 1833, Seite 290).

Da nach 12) (Seite 195)

$$\sin\gamma = \frac{s}{r + r'} = \eta\mu,$$

so kann man y ebenso wie μ mit dem Argument

$$\eta = \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}}$$

tabulieren und erhält so y gleichzeitig mit der Sehne. Diese Tabulierung ist in Taf. XXII^a ausgeführt.

58. Bestimmung der parabolischen Elemente. Die Ermittelung der Elemente der Parabel durch zwei ihrer Größe und Lage nach gegebene Radienvektoren r_1 und r_2 erledigt sich nach den vorausgehenden Entwickelungen sehr rasch. Ein erster ganz einfacher Weg ist, von den Gleichungen:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}v_2}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

auszugehen; setzt man nämlich

$$v_2 = v_1 + 2f,$$

wo $2f$ wie oben der von den beiden Radienvektoren eingeschlossene Winkel ist, so wird aus der zweiten Gleichung

$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1 \cos f - \sin\frac{1}{2}v_1 \sin f}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}\cos f - \frac{\sin\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}}\sin f = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{q}}\sin\tfrac{1}{2}v_1 &= \frac{1}{\sqrt{r_1}}\operatorname{cotg} f - \frac{1}{\sqrt{r_2}}\operatorname{cosec} f.\\ \text{Dazu}\qquad\\ \frac{1}{\sqrt{q}}\cos\tfrac{1}{2}v_1 &= \frac{1}{\sqrt{r_1}}\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

liefert die Mittel q und v_1 zu berechnen. Aus

$$\varpi = s_1 - v_1 \qquad 2)$$

folgt dann die Länge des Perihels, und aus:

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1{}^3 = \frac{t_1 - \mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}} = M_1 \qquad 3)$$

eventuell mit Benutzung der Barkerschen Tafel die Durchgangszeit durchs Perihel

$$\mathrm{T} = t_1 - M_1 q^{\frac{3}{2}}.$$

ϖ und T ergeben sich auch aus den entsprechenden Gleichungen für v_2, wenn man dieses durch $v_1 + 2f$ berechnet.

Ein anderer Weg bietet sich durch die Zusammenstellung folgender oben (Seite 192) abgeleiteter Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned}(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)\sin F &= (r_2 - r_1)\sin f\\ (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)\cos F &= 2\sqrt{r_1 r_2} - (r_1 + r_2)\cos f\\ (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)\, q &= r_1 r_2 \sin f^2.\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Aus den beiden ersten folgt F und $r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f$, welch letztere Größe zur Kontrole auch direkt berechnet werden kann, und aus der dritten ergibt sich q. Aus:

$$v_1 = F - f, \qquad v_2 = F + f$$

ergeben sich dann v_1 und v_2, mittels derer man wie vorhin zu ϖ und T gelangt.

Ein dritter Weg endlich bedient sich des Verhältnisses Sektor durch Dreieck y. Dieses spielt also hier nicht die große Rolle wie bei der elliptischen Bewegung, sondern kann entbehrt werden, wenn man die anderen Methoden anwendet. Da einerseits

$$\frac{k(t_2 - t_1)\sqrt{2q}}{r_1 r_2 \sin 2f} = y$$

und andererseits nach Gl. 4) (Seite 198)

$$\sin\gamma = \frac{s}{r_1 + r_2} = \eta\mu$$
$$y = \tfrac{1}{3}(1 + 2\sec\gamma)$$

ist, wo die Sehne s bei der Bahnbestimmung ohnehin berechnet werden muß, so folgt:

$$2q = \left(\frac{r_1 r_2 \sin 2f \cdot y}{k(t_2 - t_1)}\right)^2. \qquad 7)$$

Die übrigen Elemente bestimmt man wie vorhin. In der Regel wird man sich also des Ausdruckes 7) nur zur Kontrolle bedienen.

59. Das Verhältnis der Dreiecksflächen in der Parabel braucht nicht besonders abgeleitet zu werden, denn die Resultate der Nr. 52 gelten ihrer Entstehung gemäß für alle um die Sonne laufenden Himmelskörper.

Ebenso können die Beziehungen zwischen drei Radienvektoren der Parabel unmittelbar den Entwicklungen der Nr. 54 entnommen werden, indem man $\frac{1}{a} = 0$ setzt. Man erhält aus Formel 3) (Seite 184)

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{r_2}, \qquad 1)$$

genau bis auf Glieder dritter Ordnung inkl., und aus Formel 5) (Seite 185)

$$A_1 r_1^2 \left(1 - \frac{2B_1}{r_1^3}\right) + A_3 r_3^2 \left(1 - \frac{2B_3}{r_3^3}\right) = r_2^2 \left(1 + \frac{2B_2}{r_2^3}\right), \qquad 2)$$

genau bis auf Glieder vierter Ordnung inkl. Die Anwendung beider setzt einen Näherungswert des gesuchten Radiusvektors voraus.

Abschnitt XIII.

Die Bewegung in der Hyperbel.

60. Die Bewegung in der Hyperbel. Im Fall der Hyperbel, wo die Exzentrizität e größer ist als 1, wird, wie wir oben (Seite 128) bereits konstatiert haben, die Konstante a negativ. Die bei der Ellipse eingeführten Hilfsgrößen φ und E würden also imaginär. Es empfiehlt sich daher, andere Hilfsgrößen zu gebrauchen. Führt man zunächst den Winkel ψ ein, definiert durch

$$\cos\psi = \frac{1}{e}, \tag{1}$$

so wird die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

sofort in folgender Form geschrieben werden können:

$$r = \frac{p\cos\psi}{\cos\psi + \cos v} = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}, \tag{2}$$

aus der ersichtlich ist, daß von $v = 0$ bis $v = 180^\circ - \psi$ der Radiusvektor r stets wachsende positive Werte annimmt, daß für $v = 180^\circ - \psi$ selbst der Radiusvektor unendlich groß wird, daß er dann von da an bis $v = 180^\circ + \psi$ stets negative Werte annimmt, die einem zweiten hier nicht weiter in Betracht kommenden Zweig der Kurve entsprechen (siehe Seite 128), und daß von $v = 180^\circ + \psi$ bis 360° wieder positive Werte von r sich ergeben. Wir betrachten hier nur den Zweig der Kurve, der zu Werten von v zwischen $180^\circ + \psi$ und $180^\circ - \psi$ gehört; für die letztere Grenze verschwindet der erste der beiden Faktoren $\cos\frac{1}{2}(v+\psi)$ und $\cos\frac{1}{2}(v-\psi)$ und für die erstere der zweite; für $v = 0$ werden beide einander gleich. Setzt man daher

$$u = \frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} \tag{3}$$

so wird $u = 1$ für $v = 0$, und gleichen Werten von v, aber von entgegengesetzten Vorzeichen, entsprechen reziproke Werte von u; ferner während v von $180^\circ + \psi$ bis $180^\circ - \psi$ sich bewegt, geht u von Null bis Unendlich. Diese Größe empfiehlt sich also als Hilfsgröße. Wir führen gleich noch eine zweite ein, die der exzentrischen Anomalie bei der Ellipse entspricht und definiert ist durch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v. \tag{4}$$

Deren geometrische Bedeutung haben wir bereits Seite 119 kennen gelernt. Endlich wollen wir den absoluten Wert der Konstanten a, die negativ ist und nach wie vor als große Halbachse bezeichnet werden soll, mit a bezeichnen. Dann ist

$$p = a(1-e^2) = -\,\mathrm{a}(1-e^2) = \mathrm{a}(e^2-1) = \mathrm{a}\operatorname{tg}\psi^2$$

oder

$$\mathrm{a} = p\operatorname{cotg}\psi^2; \tag{5}$$

die Periheldistanz q wird:

$$q = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}\psi^2} = \frac{p\cos\psi}{1+\cos\psi} = \frac{p}{e+1} = a(e-1).$$

Zwischen u und F bestehen folgende Beziehungen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \frac{u-1}{u+1} \qquad 6)$$

und umgekehrt:

$$u = \frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}F}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}F} = \operatorname{tg}(45^\circ+\tfrac{1}{2}F), \qquad 7)$$

und ferner noch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\cos F} &= \tfrac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) = \frac{1+\cos\psi\cos v}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)} = \frac{e+\cos v}{1+e\cos v}\\ \operatorname{tg}F &= \tfrac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right).\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Jetzt können leicht die Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten einerseits und den Hilfsgrößen F oder u andererseits aufgestellt werden. Wenn man in 8) auf beiden Seiten einmal 1 subtrahiert und dann addiert, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{p}{(e-1)\cos F}}\sin\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{a(e+1)}{\cos F}}\sin\tfrac{1}{2}F\\ \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{p}{(e+1)\cos F}}\cos\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{a(e-1)}{\cos F}}\cos\tfrac{1}{2}F\end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

beziehungsweise:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{(e-1)u}}(u-1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(e+1)}{u}}(u-1)\\ \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{(e+1)u}}(u+1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(e-1)}{u}}(u+1).\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Aus der Multiplikation der Gleichungen dieser beiden Gruppen erhält man die ersten Gleichungen der beiden nachstehenden Systeme und aus der Verbindung von 2) und 8) die zweiten:

$$\left.\begin{aligned}r\sin v &= p\operatorname{cotg}\psi\operatorname{tg}F = a\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}F\\ r\cos v &= p\operatorname{cotg}\psi^2\left(e-\frac{1}{\cos F}\right) = a\left(e-\frac{1}{\cos F}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

$$\left.\begin{aligned}r\sin v &= \tfrac{1}{2}p\operatorname{cotg}\psi\left(u-\frac{1}{u}\right) = \tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\psi\left(u-\frac{1}{u}\right)\\ r\cos v &= \tfrac{1}{2}p\operatorname{cotg}\psi^2\left(2e-u-\frac{1}{u}\right) = \tfrac{1}{2}a\left(2e-u-\frac{1}{u}\right).\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Endlich erhält man durch Quadrieren und Addieren von 9) bzw. 10)

oder

$$\left.\begin{aligned}r &= a\left(\frac{e}{\cos F}-1\right)\\ r &= \tfrac{1}{2}a\left(e\left(u+\frac{1}{u}\right)-2\right)\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

und aus 6)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v &= \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F \\ \text{oder} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v &= \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi \frac{u-1}{u+1} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\frac{u-1}{u+1}. \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die Integration der Gl. 9) (Seite 127) im Falle der Hyperbel leicht erledigt werden. Wir erhalten dadurch die Beziehung zwischen der Zeit und den Hilfsgrößen u oder F, welche in Verbindung mit einer geeigneten Auswahl aus den Formeln 9) bis 14) die ganze Aufgabe lösen. Wird die Formel 7)

$$u = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\tfrac{1}{2}(v+\psi)}$$

logarithmisch differenziert:

$$\frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v+\psi) - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v-\psi)\right)dv$$

und dann mittels 2) transformiert:

$$\frac{du}{u} = \frac{r\operatorname{tg}\psi}{p}\,dv,$$

so kann man die Gleichung 9)

$$r^2\,dv = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}\,dt$$

zunächst in der Form:

$$\frac{rp}{\operatorname{tg}\psi}\,\frac{du}{u} = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}\,dt$$

und nach Substitution von r aus 13) und p aus 5) in der Form

$$a^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{u^2}\right)-\frac{1}{u}\right)du = k\sqrt{1+m}\,dt$$

schreiben, die leicht der Integration unterworfen werden kann:

$$\left(\tfrac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log\text{nat.}\,u\right) = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\,t+c\,.$$

Im Perihel wird $u=1$, also die linke Seite dieser Gleichung Null. Nennt man also die Durchgangszeit durchs Perihel T, so wird die Integrationskonstante

$$c = -\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{T};$$

multipliziert man gleichzeitig mit dem Modulus Mod der Briggsschen Logarithmen, so erscheint die Gleichung schließlich in der Form:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Mod}e\left(u-\frac{1}{u}\right)-\operatorname{Log}u = \frac{\operatorname{Mod}k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\mathrm{T}) \qquad 15)$$

oder wenn statt u durch 7) und 8) F eingeführt wird:

$$\operatorname{Mod}e\operatorname{tg}F - \operatorname{Log}\operatorname{tg}(45^\circ+\tfrac{1}{2}F) = \frac{\operatorname{Mod}k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\mathrm{T}). \qquad 16)$$

Durch die wieder am zweckmäßigsten durch Versuche geleistete Auflösung dieser transzendenten Gleichungen wird u bzw. F durch die Zeit bestimmt und hierauf r und v durch eines der Systeme 9) bis 14). Ist umgekehrt die wahre Anomalie v gegeben und soll daraus die Zeit ermittelt werden, so wird man u aus 7) (und gleichzeitig r aus 2)) und dann $t - \mathrm{T}$ aus 15) oder man wird F aus 6) (und r aus 11)) und dann $t - \mathrm{T}$ aus 16) bestimmen.

Wir gehen auf diese Rechnungen hier nicht näher ein, da hyperbolische Bewegungen am Himmel nur unter Verhältnissen vorkommen, wo man von anderen Vorschriften Gebrauch machen muß, deren Erläuterung erst später (Nr. 64) zu geben ist.

61. Das Verhältnis des Sektors zum Dreieck in der Hyperbel kann in ganz ähnlicher Weise behandelt werden, wie dieselbe Aufgabe bei der Ellipse (Nr. 49). Indem wir hier nur der Analyse von Gauß (Theoria motus art. 99—103) folgen, behalten wir die bei der Ellipse eingeführten Bezeichnungen p, v, v', $f = \frac{1}{2}(v' - v)$, $F = \frac{1}{2}(v' + v)$ (nicht zu verwechseln mit dem Hilfswinkel F), r, r', $t' - t$ bei, nennen die große Halbachse, wie in voriger Nummer, $-\mathrm{a}$ und setzen die Exzentrizität $e = \frac{1}{\cos\psi}$; die Hilfsgröße u sei für den ersten Ort mit $\frac{C}{c}$, für den zweiten mit Cc bezeichnet. Dann geben die Gl. 10) (S. 202)

$$\cos\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(e-1)\,\mathrm{a}}{r}}\left(\sqrt{\frac{C}{c}} + \sqrt{\frac{c}{C}}\right)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(e+1)\,\mathrm{a}}{r}}\left(\sqrt{\frac{C}{c}} - \sqrt{\frac{c}{C}}\right)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}v' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(e-1)\,\mathrm{a}}{r'}}\left(\sqrt{Cc} + \sqrt{\frac{1}{Cc}}\right)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}v' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(e+1)\,\mathrm{a}}{r'}}\left(\sqrt{Cc} - \sqrt{\frac{1}{Cc}}\right),$$

woraus man sofort ableitet:

$$\sin F = \tfrac{1}{2}\mathrm{a}\sqrt{\frac{e^2-1}{rr'}}\left(C - \frac{1}{C}\right)$$
$$\sin f = \tfrac{1}{2}\mathrm{a}\sqrt{\frac{e^2-1}{rr'}}\left(c - \frac{1}{c}\right)$$
$$\cos F = \frac{\mathrm{a}}{2\sqrt{rr'}}\left(e\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(C + \frac{1}{C}\right)\right)$$
$$\cos f = \frac{\mathrm{a}}{2\sqrt{rr'}}\left(e\left(C + \frac{1}{C}\right) - \left(c + \frac{1}{c}\right)\right);$$

ferner gibt die Gl. 13) (S. 202)

$$\frac{r}{\mathrm{a}} = \tfrac{1}{2}e\left(\frac{C}{c} + \frac{c}{C}\right) - 1$$
$$\frac{r'}{\mathrm{a}} = \tfrac{1}{2}e\left(Cc + \frac{1}{Cc}\right) - 1,$$

woraus

$$\frac{r'-r}{a} = \tfrac{1}{2}e\left(C-\frac{1}{C}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)$$
$$\frac{r'+r}{a} = \tfrac{1}{2}e\left(C+\frac{1}{C}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)-2.$$

Verbindet man die letzte Gleichung mit obiger für $\cos f$, so folgt:

$$a = \frac{r'+r-\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos f\sqrt{rr'}}{\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}$$

oder wenn wie bei der Ellipse

$$\frac{r+r'}{4\sqrt{rr'}\cos f}-\frac{1}{2} = l$$

gesetzt wird, indem wir nur den Fall eines positiven $\cos f$, also $v'-v<180^\circ$ betrachten:

$$a = \frac{8\left(l-\frac{1}{4}\left(\sqrt{c}-\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right)\cos f\sqrt{rr'}}{\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Subtrahiert man die für die Zeiten t und t' angesetzten Gleichungen 15) (Seite 203):

$$\tfrac{1}{2}e\left(\frac{C}{c}-\frac{c}{C}\right)-\overset{e}{\log}\frac{C}{c} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-T)$$
$$\tfrac{1}{2}e\left(Cc-\frac{1}{Cc}\right)-\overset{e}{\log}Cc = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(t'-T)$$

voneinander:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}e\left(C+\frac{1}{C}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)-2\overset{e}{\log}c,$$

eliminiert C mittels obiger Gleichung für $\cos f$:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(c-\frac{1}{c}\right)\cos f\sqrt{rr'}}{a}+\tfrac{1}{2}\left(c^2-\frac{1}{c^2}\right)-2\overset{e}{\log}c,$$

und ersetzt endlich a durch den oben abgeleiteten Wert, so erscheint, wenn zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{c}-\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 = x, \qquad \frac{c^2-\frac{1}{c^2}-4\log c}{\frac{1}{4}\left(c-\frac{1}{c}\right)^3} = Z, \qquad \frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{(2\cos f\sqrt{rr'})^3} = m$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{m} = \sqrt{l-x}+(\sqrt{l-x})^3 Z,$$

worin Z folgende Funktion von x ist:

$$Z = \frac{(1+2x)\sqrt{x+x^2}-\log\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{2(x+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Bedeutung von c ist es um so weniger von 1 verschieden, je näher die beiden Orte einander liegen. Nehmen wir diesen Fall an, so wird z eine kleine Größe sein, nach deren Potenzen wir Z entwickeln wollen. Differenziert man

$$2(z+z^2)^{\frac{3}{2}} Z = (1+2z)\sqrt{z+z^2} - \log(\sqrt{1+z}+\sqrt{z}),$$

so folgt:

$$2(z+z^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dZ}{dz} + 3Z(1+2z)\sqrt{z+z^2} = 4\sqrt{z+z^2}$$

oder

$$(2z+2z^2)\frac{dZ}{dz} = 4 - (3+6z)Z.$$

Daraus sieht man, daß Z in derselben Weise von $-z$ abhängt, wie bei der Ellipse (siehe Seite 158) X von x, so daß man ebenso wie dort erhält:

$$Z = \frac{4}{3} - \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}z + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}z^2 - \cdots;$$

und wenn

$$Z = \frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{6}{5}(z+\zeta)}$$

gesetzt wird, so wird ζ sich ebenso durch $-z$ bestimmen, wie dort ξ durch x. Gauß hat auch für ζ eine Tafel berechnet, die sich in Taf. XX unter der Überschrift »Hyperbel« vorfindet und in die mit z als Argument eingegangen werden muß.

Diese Entwicklungen vorausgesetzt, quadrieren wir den Ausdruck für das Verhältnis des Sektors zum Dreieck (siehe Gl. 1) Seite 155)

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t'-t)}{rr'\sin 2f},$$

ersetzen p durch $\mathrm{a}(e^2-1)$ und führen die vorhin definierte Abkürzung m ein, dann kommt zunächst:

$$y^2 = \mathrm{m}\frac{2\cos f\,\mathrm{a}(e^2-1)}{\sin f^2\sqrt{rr'}}.$$

Wird hier

$$\sin f^2 = \tfrac{1}{4}\mathrm{a}^2\frac{e^2-1}{rr'}\left(c-\frac{1}{c}\right)^2$$

und

$$\mathrm{a} = \frac{8(l-z)\cos f\sqrt{rr'}}{\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}$$

eingetragen, so folgt

$$y^2 = \frac{\mathrm{m}}{l-z} \quad \text{oder} \quad -z = \frac{\mathrm{m}}{y^2} - l. \qquad \text{I.}$$

Wird dies mit der vorhin abgeleiteten Gleichung

$$\sqrt{\mathrm{m}} = \sqrt{l-z} + (\sqrt{l-z})^3 Z$$

verbunden, so ergibt sich

$$y - 1 = \frac{\mathrm{m}}{y^2} Z, \qquad \text{II.}$$

d. h. wir haben in I. und II. dieselben Gleichungen zur Bestimmung von y, wie für die Ellipse, nur daß an Stelle von x tritt $-x$; es kann also zu ihrer Auflösung dasselbe Verfahren eingeschlagen werden, wie für die Ellipse, d. h. wir setzen

$$h = \frac{\mathrm{m}}{\frac{5}{6} + l + \zeta},$$

entnehmen damit, zuerst $\zeta = 0$ setzend, aus Tafel XIX y^2, berechnen damit x aus

$$-x = \frac{\mathrm{m}}{y^2} - l,$$

entnehmen mit x als Argument aus Tafel XX, Kolumne Hyperbel, ζ, berechnen damit einen genaueren Wert von h usf.

Da x positiv ist, so ist die Größe

$$\frac{\mathrm{m}}{y^2} - l$$

im Fall der Hyperbel negativ; im Fall der Ellipse ist sie positiv, da x (Seite 158) positiv ist. In der Parabel, wo $e = 1$, $\psi = 0$, also $u = 1$ und $c = 1$ wird, folgt $x = 0$. Diese Größe gibt also ein Kriterium für die Art des Kegelschnittes ab, indem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{m}}{y^2} - l &= \text{positiv einer Ellipse,} \\ &= 0 \quad\ \text{einer Parabel,} \\ &= \text{negativ einer Hyperbel} \end{aligned}$$

entspricht.

62. Die Bestimmung der Elemente der Hyperbel erledigt sich in derselben Weise wie bei der Ellipse. Zunächst ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 = x$$

der Wert von c

$$c = 1 + 2x + 2\sqrt{x + x^2};$$

durch Einführung des Hilfswinkels n

$$\operatorname{tg} 2n = 2\sqrt{x + x^2}$$

wird bequemer:

$$c = \operatorname{tg} 2n + \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2n^2} = \operatorname{tg}(45^\circ + n). \qquad 1)$$

Weiter wird aus der Gl. Seite 206:

$$p = \left(\frac{r_1 r_2 y \sin 2f}{k(t_2 - t_1)}\right)^2 \qquad 2)$$

oder auch, wenn m eingeführt wird:

$$p = \frac{y^2 \sin f \operatorname{tg} f \sqrt{r_1 r_2}}{2\,\mathrm{m}} = \frac{\sin f \operatorname{tg} f \sqrt{r_1 r_2}}{2(l - x)}.$$

Da $c - \frac{1}{c} = \operatorname{tg}(45^\circ + n) - \operatorname{cotg}(45^\circ + n) = 2\operatorname{tg} 2n$, so folgt aus der Gl. Seite 205:

$$\mathrm{a} = \frac{2(l - x)\cos f \sqrt{r_1 r_2}}{\operatorname{tg} 2n^2}$$

und daher

$$\sqrt{e^2-1} = \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{\operatorname{tg} f \operatorname{tg} 2n}{2(l-z)}, \qquad 3)$$

woraus sich die Exzentrizität ergibt. Die wahren Anomalien v_1 und v_2 bekommt man folgendermaßen. Wenn man aus den Gleichungen Seite 204 und 205

$$\sin f = \tfrac{1}{2}\, a \sqrt{\frac{e^2-1}{r_1 r_2}}\left(c - \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{r_2 - r_1}{a} = \tfrac{1}{2} e \left(C - \frac{1}{C}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$$

$c - \frac{1}{c}$ eliminiert, so erhält man zur Bestimmung von C die Gleichung:

$$C - \frac{1}{C} = \frac{(r_2 - r_1)\sqrt{e^2-1}}{e \sin f \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{\sin\psi\,(r_2 - r_1)}{\sin f \sqrt{r_1 r_2}}$$

oder:

$$\operatorname{tg} 2N = \frac{\sin\psi\,(r_2 - r_1)}{2 \sin f \sqrt{r_1 r_2}} \qquad 4)$$

$$C = \operatorname{tg}(45^\circ + N)$$

oder wenn, wie bei der Ellipse, der Hilfswinkel ω durch

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}}$$

eingeführt wird:

$$\operatorname{tg} 2N = \frac{2 \sin\psi \operatorname{tg} 2\omega}{\sin f \cos 2\omega} \qquad 4^a)$$

$$C = \operatorname{tg}(45^\circ + N).$$

Die für die beiden Örter geltenden Hilfsgrößen

$$u_1 = \frac{C}{c} \quad \text{und} \quad u_2 = Cc$$

sind jetzt als bekannt anzunehmen und ergeben durch die Gleichung 14) (Seite 203)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v = \frac{u-1}{u+1} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}$$

die wahren Anomalien, nämlich:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_1 = \frac{C-c}{C+c} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi} = \frac{\sin(N-n)}{\cos(N+n)} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_2 = \frac{Cc-1}{Cc+1} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi} = \frac{\sin(N+n)}{\cos(N-n)} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}. \qquad 5)$$

Kontrole $v_2 - v_1 = 2f$.

Man kann sich auch der Hilfsgröße F bedienen und nach

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} F_1) = u_1 = \frac{C}{c}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} F_2) = u_2 = Cc$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} F_1 \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} F_2 \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}$$

rechnen, doch ist der erste Weg der kürzere. Aus v_1 und v_2 folgt die Länge des Perihels

$$\varpi = s_1 - v_1 = s_2 - v_2 . \qquad 6)$$

Die Durchgangszeit durchs Perihel endlich ergibt sich aus Gl. 15) (Seite 203), angewendet auf die beiden Örter:

$$t_1 - \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\mathrm{Mod}\,\frac{e}{2}\left(u_1 - \frac{1}{u_1}\right) - \mathrm{Log}\,u_1\right)$$

$$t_2 - \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\mathrm{Mod}\,\frac{e}{2}\left(u_2 - \frac{1}{u_2}\right) - \mathrm{Log}\,u_2\right)$$

oder nach Einsetzung der Werte von u_1 und u_2:

$$t_1 - \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\frac{2\,e\cos(N+n)\sin(N-n)}{\cos 2N\cos 2n}\,\mathrm{Mod} - \mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{tg}\,(45^\circ + N)}{\mathrm{tg}\,(45^\circ + n)}\right)$$

$$t_2 - \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\frac{2\,e\cos(N-n)\sin(N+n)}{\cos 2N\cos 2n}\,\mathrm{Mod} - \mathrm{Log}\,(\mathrm{tg}\,(45^\circ+N)\,\mathrm{tg}\,(45^\circ+n))\right)$$

Da die halbe Summe dieser beiden Ausdrücke

$$\frac{t_1+t_2}{2} - \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\frac{e\,\mathrm{tg}\,2N}{\cos 2n}\,\mathrm{Mod} - \mathrm{Log}\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + N)\right) \qquad 7)$$

sich am einfachsten rechnet, wird man sie zur Berechnung von T verwenden. Die Differenz

$$t_2 - t_1 = \frac{2\,a^{\frac{3}{2}}}{k\,\mathrm{Mod}}\left(\frac{e\,\mathrm{tg}\,2n}{\cos 2N}\,\mathrm{Mod} - \mathrm{Log}\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + n)\right)$$

kann dann zur Kontrole dienen.

63. Der Lambertsche Satz für die Hyperbel. Wie für die Ellipse und Parabel kann auch für die Hyperbel eine Beziehung zwischen der Zwischenzeit, der Summe der Radienvektoren und der Sehne abgeleitet werden, welche nur mehr die Halbachse enthält. Die direkte Ableitung ist ganz ähnlich der für die Ellipse durchgeführten (siehe Gauß, Theoria motus art. 109); wir wollen hier darauf wegen der seltenen Anwendung nicht eingehen und bemerken nur, daß man den Satz für die Hyperbel erhält, wenn man in dem für die Ellipse statt a $-\mathrm{a}$ setzt. Es wird:

$$k\sqrt{1+m}\,(t'-t) = \tfrac{1}{6}\left((r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{80}\,\frac{1}{\mathrm{a}}\left((r+r'+s)^{\frac{5}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+ \frac{3}{1792}\,\frac{1}{\mathrm{a}^2}\left((r+r'+s)^{\frac{7}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{7}{2}}\right) - \cdots$$

und das obere Zeichen gilt für $v' - v < 180^\circ$ und das untere für $v' - v > 180^\circ$.

Abschnitt XIV.

Bewegung in parabelnahen Bahnen.

64. Bewegung in parabelnahen Bahnen. Die Formeln, die wir für die Ermittlung der Polarkoordinaten v und r aus der Zeit in der elliptischen und hyperbolischen Bewegung abgeleitet haben, versagen in rechnerischer Beziehung, sobald die Exzentrizität e sich der Einheit nähert; man muß daher für diese, in der Natur nicht seltenen, sogenannten »parabelnahen« Bahnen, besondere Vorschriften aufstellen. Wenn man die Keplersche Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

differenziert:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E},$$

so erkennt man, daß bei diesen Bahnen für kleine Werte von E die versuchsweise Auflösung dieser Gleichung deshalb mißlich wird, weil M als Differenz zweier nahe gleich großen Größen zu rechnen ist und weil der Korrektionsfaktor zur Verbesserung von E, nämlich $1 : (1 - e \cos E)$ groß wird. Schreibt man mit *Bruns* (Åstrand, Hilfstafeln, S. IX) die Keplersche Gleichung so:

$$M = E - \sin E + (1 - e) \sin E$$

und beschafft sich ein Mittel, um $E - \sin E$ sicher zu bilden, so wird der erstgenannte Übelstand vermieden, und man kann mit Hilfe der regula falsi rasch zum Ziel kommen. (Siehe »Tafeln« S. 17.) Andere Verfahren beruhen auf dem Umstand, daß die wahre Anomalie in der parabelnahen Bahn sich nur wenig von der der parabolischen von gleicher Periheldistanz unterscheidet und daß daher der Unterschied zwischen beiden als Reihe, die nach einer passenden Funktion der Exzentrizität fortschreitet, entwickelt und tabuliert werden kann; es ist dies das *Simpson-Bessel*sche Verfahren (Bessel, Ges. Abh. Bd. 1, S. 9), wo nach Potenzen von $1 - e$ entwickelt wird, und das konvergentere und genauere *Brünnow*sche Verfahren (Astr. Notices Nr. 2 und 23), wo nach Potenzen von $\frac{1 - e}{1 + e}$ entwickelt wird. *Oppolzer* (Bahnbestimmung Bd. I, S. 65) und *W. Ebert* (Klinkerfues, Bahnbest. 2. Aufl. S. 49) führen die Gleichung zwischen t und v direkt auf die Form der Barkerschen Gleichung über. Vor allen diesen Methoden behauptet die *Gauß*sche (Theoria motus Nr. 37—46) den Vorzug der Allgemeinheit und Schärfe und soll daher allein hier zur Darstellung kommen.

Wenn E groß ist (etwa $> 60°$), dann treten die oben genannten Hindernisse der Auflösung der Keplerschen Gleichung nicht auf; die jetzt auseinanderzusetzende Methode braucht also nur kleine Werte von E in Betracht zu ziehen.

Um zuerst die *Ellipse* zu behandeln, schreiben wir die Keplersche Gleichung in der Form

$$E - e \sin E = \frac{k\sqrt{1 + m}\,(t - \mathrm{T})}{a^{\frac{3}{2}}},$$

wo offenbar T die Durchgangszeit durchs Perihel, also $t - T$ die seit dieser verflossene Zeit bedeutet. Vernachlässigt man die Masse m, was bei den hier in Betracht kommenden Körpern stets geschehen kann, und führt die Periheldistanz q ein, die nach Gl. 20) (Seite 134) gegeben ist durch

$$q = a(1 - e),$$

so läßt sich der Gleichung folgende Gestalt geben:

$$(1 - e)(\tfrac{9}{10}E + \tfrac{1}{10}\sin E) + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{9}{10}e)(E - \sin E) = k(t - T)\left(\frac{1 - e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder:

$$\tfrac{1}{10}(9E + \sin E) + \tfrac{1}{10}\frac{1 + 9e}{1 - e}(E - \sin E) = \frac{k(t - T)\sqrt{1 - e}}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man nun

$$A = 15\frac{E - \sin E}{9E + \sin E} \tag{a}$$

$$B = \frac{9E + \sin E}{20\sqrt{A}} \tag{b}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2 = \frac{1 + 9e}{5(1 - e)}A \tag{c}$$

so findet man leicht, daß die Gleichung übergeht in:

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{(t - T)}{q^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{\frac{1}{10}(1 + 9e)}}{B}, \tag{d}$$

die mit Hilfe der Barkerschen Tafel nach w aufgelöst werden kann, sobald B bekannt ist. Wir untersuchen die Größenordnung von B, indem wir E als eine kleine Größe erster Ordnung betrachten. Es ist

$$9E + \sin E = 10E - \tfrac{1}{6}E^3 + \tfrac{1}{120}E^5 - \cdots$$
$$E - \sin E = \tfrac{1}{6}E^3 - \tfrac{1}{120}E^5 + \tfrac{1}{5040}E^7 - \cdots;$$

folglich wird:

$$A = \tfrac{1}{4}E^2 - \tfrac{1}{120}E^4 - \tfrac{1}{20160}E^6 - \cdots$$
$$B = 1 + \tfrac{3}{2800}E^4 - \cdots,$$

d. h. A ist von der zweiten Ordnung und B unterscheidet sich von 1 nur um eine Größe der vierten Ordnung. Darauf baut sich folgendes Näherungsverfahren auf. Man setzt zuerst $B = 1$ und bestimmt damit w aus (d), dann A aus (c) und B aus (b); damit wird die Rechnung wiederholt, bis sie steht. Dadurch kommt man in den Besitz des wahren Wertes von A, der zur weiteren Lösung der Aufgabe, die wahre Anomalie v zu bestimmen, wie folgt dienen kann. Da

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E,$$

so empfiehlt es sich augenscheinlich, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$ mit A in Verbindung zu bringen. Setzt man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^2 = \tau,$$

so wird:

$$\sin E = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}E}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}E} = \frac{2\sqrt{\tau}}{1+\tau} = 2\sqrt{\tau}\,(1-\tau+\tau^2-\tau^3+\cdots)$$

und

$$E = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\tau} = 2\sqrt{\tau}\,(1-\tfrac{1}{3}\tau+\tfrac{1}{5}\tau^2-\tfrac{1}{7}\tau^3+\cdots);$$

also:

$$15\,(E-\sin E) = 2\sqrt{\tau}\,(10\tau-\tfrac{60}{5}\tau^2+\tfrac{90}{7}\tau^3-\cdots)$$

und

$$9E+\sin E = 2\sqrt{\tau}\,(10-\tfrac{12}{3}\tau+\tfrac{14}{5}\tau^2-\tfrac{16}{7}\tau^3+\cdots)$$

und folglich durch Division:

$$A = \frac{15\,(E-\sin E)}{9E+\sin E} = \tau-\tfrac{4}{5}\tau^2+\tfrac{24}{35}\tau^3-\tfrac{1592}{2625}\tau^4+\cdots$$

Kehrt man diese Reihe um, so folgt:

$$\frac{A}{\tau} = 1-\tfrac{4}{5}A+\tfrac{8}{175}A^2+\tfrac{8}{525}A^3+\tfrac{1896}{336875}A^4+\cdots$$

oder, wenn die Größe vierter Ordnung

$$\tfrac{8}{175}A^2+\tfrac{8}{525}A^3+\tfrac{1896}{336875}A^4+\cdots = C$$

gesetzt wird:

$$\frac{A}{\tau} = 1-\tfrac{4}{5}A+C.$$

Somit wird:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\frac{A}{1-\frac{4}{5}A+C}}$$

oder nach (c)

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{5\,(1-e)}{1+9e}}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}w}{\sqrt{1-\frac{4}{5}A+C}},$$

oder

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{5\,(1+e)}{1+9e}}\,\sigma\cdot\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}w\,, \tag{e}$$

wenn

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{5}A+C}} \tag{f}$$

gesetzt wird. Hier kann gleich die Bestimmung von r mit angefügt werden; nach Gl. VI (Seite 138) ist:

$$r = q\,\frac{\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos\frac{1}{2}v^2} = q\,\frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}E^2)\cos\frac{1}{2}v^2},$$

also:

$$r = \frac{1}{1+\tau}\,\frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2} = \frac{1-\frac{4}{5}A+C}{1+\frac{1}{5}A+C}\,\frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$$

oder

$$r = \frac{q}{(\nu\cos\frac{1}{2}v)^2}, \tag{g}$$

wenn

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{5}A+C}{1-\frac{4}{5}A+C}} \tag{h}$$

gesetzt wird.

Ehe wir zusammenfassen, zeigen wir, daß B als Funktion von A dargestellt werden kann. Es ist

$$\sqrt{A} = \sqrt{\tau}\,(1 - \tfrac{2}{5}\tau + \tfrac{46}{175}\tau^2 - \tfrac{104}{525}\tau^3 + \cdots)$$

und daher

$$B = \frac{9E + \sin E}{20\sqrt{A}} = 1 + \tfrac{3}{175}\tau^2 - \tfrac{62}{2625}\tau^3 + \cdots,$$

woraus:

$$B = 1 + \tfrac{3}{175}A^2 + \tfrac{2}{525}A^3 + \cdots \qquad \text{(i)}$$

Da hiernach B mit dem Argument A leicht tabuliert werden kann, so erledigt sich der oben beschriebene Näherungsprozeß zur Ermittelung des wahren Wertes von A sehr rasch. Ist aber dieser erlangt und hat man σ und ν ebenfalls mit Argument A nach (f) und (h) tabuliert (was zuerst *Marth* Astr. Nachr. Bd. 43, S. 115 ausgeführt hat), so folgen v und r durch (e) und (g). Die hier als wünschenswert erkannten Tabulierungen sind in Taf. XVII gegeben. Wir stellen die Formeln zur Berechnung eines Ortes nochmals zusammen. Mit einem bei Ephemeridenrechnungen sich von selbst darbietenden Näherungswert von w, oder in Ermangelung eines solchen mit dem aus

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{t - \mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\tfrac{1}{10}(1 + 9e)}$$

mittelst der Barkerschen Tafel gefundenen Werte von w rechnet man

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2,$$

entnimmt damit B aus Taf. XVII, sucht dann w von neuem aus

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{t - \mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\sqrt{\tfrac{1}{10}(1+9e)}}{B},$$

rechnet A usf., bis die Rechnung steht. Mit dem definitiven Wert von A entnimmt man σ und ν aus Taf. XVII und hat dann

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sigma\sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w$$

$$r = \frac{q}{(\nu\cos\frac{1}{2}v)^2}$$

oder auch:

$$\sqrt{\frac{r}{q}}\,\nu\sin\tfrac{1}{2}v = \sigma\sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}}\,\nu\cos\tfrac{1}{2}v = 1\,.$$

Die umgekehrte Aufgabe, nämlich die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit $t - \mathrm{T}$ aus v zu ermitteln, erledigt sich leicht mit denselben Hilfsmitteln. Es kommt offenbar nur darauf an, einen ersten Näherungswert von A zu erhalten; ein solcher ist aber nach obiger Reihenentwicklung, wenn Glieder vierter Ordnung übergangen werden:

$$\tau = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2.$$

Entnimmt man mit diesem der Taf. XVII σ und rechnet:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v}{\sigma\sqrt{\frac{5\,(1+e)}{1+9e}}}, \tag{e}$$

so folgt ein strengerer Wert von A durch

$$A = \frac{5\,(1-e)}{1+9e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2,$$

mit dem man wieder σ entnimmt. Dies wird so lange fortgesetzt, bis sich σ nicht mehr ändert, worauf man gleichzeitig B entnimmt. Dann gibt (e) den strengen Wert von w; mit diesem als Argument entnimmt man nach Gl. (d) (Seite 211) der Barkerschen Tafel

$$M = \frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{\frac{1}{10}\,(1+9e)}}{B},$$

woraus

$$t-\mathrm{T} = \frac{MBq^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{10}\,(1+9e)}}.$$

Der Fall der parabelnahen *Hyperbel* wird in ganz analoger Weise behandelt wie der der Ellipse. Die Gleichung zwischen der Zeit und der Hilfsgröße u (Seite 203)

$$\tfrac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right) - \log\text{nat.}\,u = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\mathrm{T}) = k\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}}(t-\mathrm{T})$$

läßt sich so schreiben:

$$(e-1)\left(\tfrac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{9}{10}\log u\right)+\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{9}{10}e\right)\left(\tfrac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right) = k\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}}(t-\mathrm{T}).$$

Wird $\log u$ als Größe erster Ordnung angesehen, so werden die beiden Klammerausdrücke von der ersten beziehungsweise dritten Ordnung und daher wird

$$A = \frac{6}{4}\,\frac{\tfrac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u}{\tfrac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{9}{10}\log u} \tag{a}$$

von der zweiten Ordnung, und

$$B = \frac{\tfrac{1}{10}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{9}{10}\log u}{2\sqrt{A}} \tag{b}$$

wird sich von 1 nur um eine Größe der vierten Ordnung unterscheiden. Setzt man noch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2 = \frac{1+9e}{5\,(e-1)}A, \tag{c}$$

so führt man obige Gleichung leicht in folgende Form über:

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{t-\mathrm{T}}{q^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{\frac{1}{10}\,(1+9e)}}{B}, \tag{d}$$

die mittels der Barkerschen Tafel nach w aufgelöst werden kann, sobald B bekannt ist. Nun ist in erster Näherung B gleich 1 und allgemein kann es als Funktion von A dargestellt und tabuliert werden. Bestimmt man also mit dem ersten Näherungswert von w aus (d), indem man $B = 1$ setzt, die Größe A aus (c):

$$A = \frac{5\,(e-1)}{1+9e}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}w^2,$$

sucht den zugehörigen Wert von B, löst (d) nochmals auf usf., so erhält man schließlich den wahren Wert von A, der zum wahren Wert von v in folgender Weise führt. Da nach Gl. 14) (Seite 203)

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{u-1}{u+1},$$

so wird man A mit

$$\tau = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2$$

in Verbindung bringen. Man erhält ähnlich, wie bei der Ellipse:

$$\frac{A}{\tau} = 1 + \tfrac{4}{5}A + \tfrac{8}{175}A^2 - \tfrac{8}{525}A^3 + \tfrac{1896}{336875}A^4 - \cdots$$

oder $\dfrac{A}{\tau} = 1 + \tfrac{4}{5}A + C$. Somit wird:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{1+\tfrac{4}{5}A+C}}$$

oder nach (c)

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{5\,(e+1)}{1+9e}}\,\frac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}w}{\sqrt{1+\tfrac{4}{5}A+C}}$$

oder endlich, wenn

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1+\tfrac{4}{5}A+C}}$$

gesetzt wird:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{5\,(e+1)}{1+9e}}\,\sigma\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}w.$$

Zur Berechnung von r bedient man sich am sichersten und bequemsten der Formel

$$r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{q\,(1+e)}{1+e\cos v}.$$

Die nach dieser Methode erforderlichen Tabulierungen von B und σ mit dem Argument A sind in Taf. XVIII gegeben.

Zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Perihelzeit aus der wahren Anomalie zu ermitteln, ist in Taf. XVIII die hier mit τ, in der Tafel mit T bezeichnete Größe aufgenommen worden, welche aus

$$\tau = \frac{e-1}{e+1}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}v^2$$

gefunden wird und sofort zu einem fast strengen Wert von σ führt. Wird mittels desselben w aus

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}w = \frac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v}{\sigma\sqrt{\dfrac{5\,(e+1)}{1+9e}}}$$

berechnet und sodann A aus

$$A = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} w^2 \frac{5\,(e-1)}{1+9\,e},$$

so gibt die Tafel mit diesem Argument A die strengen Werte von σ und B. Damit rechnet man den strengen Wert von w und bestimmt dann aus Gl. (d) den Wert von $t - \mathrm{T}$. Hierbei kann man sich der Barkerschen Tafel bedienen, indem man den zu w gehörigen Wert von M aufsucht und dann hat:

$$t - \mathrm{T} = \frac{MBq^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{10}\,(1+9\,e)}}.$$

Vergleicht man die für die Hyperbel abgeleiteten Formeln mit denen für die Ellipse, so erkennt man, daß erstere aus den letzteren sich ergeben, wenn man in diesen A, τ und $\frac{5\,(1-e)}{1+9\,e}$ negativ nimmt. Das folgt schon daraus, daß in der Ellipse

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} E,$$

in der Hyperbel aber

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} F$$

und somit

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} E = \sqrt{-1}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} F$$

ist; wir konnten also, wenn wir nicht imaginäre Größen hätten vermeiden wollen, aus den Formeln für die Ellipse sofort jene für die Hyperbel abschreiben.

65. Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Bahnen. Das eben auseinandergesetzte Gaußsche Verfahren zur Berechnung der Polarkoordinaten v und r in parabelnahen Bahnen läßt an Schärfe nichts zu wünschen übrig, bei Herstellung einer längeren Ephemeride ist es aber trotz einiger sich von selbst darbietenden Erleichterungen etwas mühsam, wenn Ort für Ort nach demselben gerechnet wird. Das ist nun aber nach einer Bemerkung von *Krueger* (Astr. Nachr. Bd. 117, S. 309) nicht notwendig, sondern man kann alle weiteren v sich durch einen einfachen Kunstgriff verschaffen, wenn man etwa die drei ersten durch den Gaußschen Algorithmus erhalten hat. Da nämlich der Radiusvektor sich sehr regelmäßig ändert, kann man ihn leicht für das folgende Intervall extrapolieren und damit dann

$$w\,\frac{dv}{dt} = w\,\frac{k''\sqrt{q\,(1+e)}}{r^2}$$

berechnen (w = Intervall der Ephemeride in Tagen); wird die Reihe der $w\,\frac{dv}{dt}$ der mechanischen Quadratur unterworfen, so erhält man die v. Rechnet man dann r durch

$$r = \frac{q\,(1+e)}{1+e\cos v}$$

und findet Übereinstimmung mit dem extrapolierten Wert, so ist v streng richtig, wenn nicht, dann wird mit dem neuen r die Rechnung wiederholt. Man kann auf diese Weise große Strecken der Ephemeride berechnen, ohne auch nur die mittlere

Anomalie anzusetzen. Von Zeit zu Zeit wird man zur Kontrolle ein v nach dem Gaußschen Verfahren rechnen. Betreff Einzelheiten der Ausführung sei auf die Tafeln Seite 22 verwiesen, wo auch ein Beispiel durchgeführt ist.

66. Die Lambertsche Gleichung bei parabelnahen Bahnen. In den Nummern 51 und 63 haben wir den Lambertschen Satz für die elliptische und hyperpolische Bewegung abgeleitet, der eine merkwürdige Beziehung zwischen der Zwischenzeit $t' - t$ einerseits und zwei Radienvektoren r und r', der zwischen ihnen liegenden Sehne s und der großen Halbachse a andererseits darstellt. Wie wir schon hervorgehoben haben, ist dieser Satz für die Bahnbestimmung im allgemeinen von geringer Bedeutung, im Falle parabelnaher Bahnen, also großer a, aber leistet er sehr schätzenswerte Dienste. In der Form der Reihenentwicklung 6) (Seite 170) ist er allerdings auch dann nicht zu verwenden, da sie eine zu geringe Konvergenz besitzt, und in der endlichen Form 4) (Seite 169), nämlich:

$$\frac{k\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = (\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta) \qquad 1)$$

$$+\sqrt{\frac{r+r'+s}{4a}} = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad 2)$$

$$\pm\sqrt{\frac{r+r'-s}{4a}} = \sin\tfrac{1}{2}\delta \qquad \begin{matrix} v'-v<180^\circ \\ v'-v>180^\circ \end{matrix} \qquad 3)$$

wird er für die numerische Rechnung gerade im Falle großer a ungeeignet, da dann ε und δ kleine Winkel werden, ihr Unterschied von den sin also mit den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln nicht mit genügender Schärfe berechnet werden kann. Dieser Mißstand läßt sich aber durch einfache Umgestaltungen beseitigen. Eine erste besteht darin, daß man die Gleichung 1) in folgender Form schreibt:

$$6\,k\,(t'-t) = (4\,a\,\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\;3\,\frac{\varepsilon-\sin\varepsilon}{4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^3} - (4\,a\,\sin\tfrac{1}{2}\delta^2)^{\frac{3}{2}}\;3\,\frac{\delta-\sin\delta}{4\sin\frac{1}{2}\delta^3}$$

oder nach 2) und 3)

$$6\,k\,(t'-t) = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}}\,Q_\varepsilon \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\,Q_\delta \qquad \begin{matrix} v'-v<180^\circ \\ v'-v>180^\circ \end{matrix}$$

$$Q_\varepsilon = \frac{3\,(\varepsilon-\sin\varepsilon)}{4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^3}$$

$$Q_\delta = \frac{3\,(\delta-\sin\delta)}{4\sin\frac{1}{2}\delta^3}$$

und Q_ε und Q_δ in geeigneter Weise entwickelt und tabuliert. Aus der oben (Seite 170) abgeleiteten Entwicklung

$$\varepsilon - \sin\varepsilon = 4\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^3}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^5}{5} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^7}{7} + \cdots\right)$$

folgt:

$$Q_\varepsilon = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{5} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4}{7} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6}{9} + \cdots\right),$$

woraus man Q_ε leicht mit dem Argument $\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2$ berechnen kann. Taf. XXIII gibt diese Werte. Die Anwendung der Lambertschen Gleichung verlangt dann einfach die Durchrechnung der Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{r + r' + s}{4a}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{r + r' - s}{4a} \qquad 4)$$

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\varepsilon \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_\delta$$

Q_ε und Q_δ mit den Argumenten $\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2$ bzw. $\sin\frac{1}{2}\delta^2$ aus Taf. XXIII.

Im Fall der Hyperbel (a negativ) werden $\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2$ und $\sin\frac{1}{2}\delta^2$ negativ; die Reihe für Q_ε erhält dann abwechselnd positive und negative Glieder. In Taf. XXIII sind diese Q_ε unter der Überschrift Hyperbel ebenfalls angeführt und müssen mit dem absoluten Werte von $\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2$ als Argument entnommen werden.

Die Anwendung des Systems 4) kann nur dann unsicher werden, wenn die Sehne s klein ist, da dann $t' - t$ als die Differenz zweier nahe gleich großen Zahlen zu ermitteln ist. In diesem Fall empfiehlt sich eine andere Umformung der Lambertschen Gleichung, nämlich diejenige, die *Marth* (Astr. Nachr. Bd. 65, S. 321) vorgeschlagen und mit Tafeln ausgestattet hat. Hier werden zunächst die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung 6) (Seite 170) in folgender Weise entwickelt. Setzt man

$$\frac{s}{r + r'} = \sin\gamma$$

und nennt i eine ganze ungerade Zahl, so wird:

$$(r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} = (r + r')^{\frac{i}{2}} \left((1 + \sin\gamma)^{\frac{i}{2}} - (1 - \sin\gamma)^{\frac{i}{2}}\right)$$

$$= (r + r')^{\frac{i}{2}} \cos\tfrac{1}{2}\gamma^i \left(\left(\frac{1 + \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{1 - \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\right)^{\frac{i}{2}}\right)$$

oder, da $\sin\gamma = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2}$ und $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2} = 1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$:

$$(r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} = (r + r')^{\frac{i}{2}} \cos\tfrac{1}{2}\gamma^i \left((1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma)^i - (1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma)^i\right).$$

Wird rechts entwickelt und beachtet, daß i ungerade ist, so kommt nach leichter Zusammenziehung:

$$(r + r' + s)^{\frac{i}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{i}{2}} =$$

$$= (r + r')^{\frac{i}{2}} \sin\gamma \cos\tfrac{1}{2}\gamma^{i-2} \left(i + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^4 + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{i(i-1)}{1.2} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^{i-3} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^{i-1}\right)$$

$$= (r + r')^{\frac{i}{2}} \sin\gamma\, W_i .$$

Speziell wird, wenn $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \tau$ gesetzt wird:

$$W_3 = \cos\tfrac{1}{2}\gamma\,(3 + \tau)$$

$$W_5 = \cos\tfrac{1}{2}\gamma^3\,(5 + 10\tau + \tau^2)$$

$$W_7 = \cos\tfrac{1}{2}\gamma^5\,(7 + 35\tau + 21\tau^2 + \tau^3)$$

. . . . . .

Nach Eintragung dieser Entwicklungen in die Gl. 6) (Seite 170) kommt nach kurzer Reduktion:

$$k(t'-t)=s\sqrt{r+r'}\,\frac{1+\frac{1}{3}\tau}{2\sqrt{1+\tau}}\left(1+\frac{r+r'}{8a}\,\frac{1+2\tau+\frac{1}{5}\tau}{(1+\frac{1}{3}\tau)(1+\tau)}+\frac{3}{2}\left(\frac{r+r'}{8a}\right)^2\frac{1+5\tau+3\tau^2+\frac{1}{7}\tau^3}{(1+\frac{1}{3}\tau)(1+\tau)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{5}{2}\left(\frac{r+r'}{8a}\right)^3\frac{1+\frac{28}{3}\tau+14\tau^2+4\tau^3+\frac{1}{9}\tau^4}{(1+\frac{1}{3}\tau)(1+\tau)^3}+\cdots\right)$$

oder

$$k(t'-t)=s\sqrt{r+r'}\;Q\cdot V.$$

Hierin ist

$$Q=\frac{1+\frac{1}{3}\tau}{2\sqrt{1+\tau}}=\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma(1+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$

gesetzt, so daß

$$k(t'-t)=s\sqrt{r+r'}\,Q$$

der parabolischen Bewegung $\left(\frac{1}{a}=0\right)$ entspricht, wie wir auch schon Seite 196 gesehen haben. Der Faktor V, welcher gleich ist dem gesamten Klammerausdruck, rührt von der Abweichung der Bahn von der Parabel her und muß in geeigneter Weise tabuliert werden. Marth wählt, wie hier nicht weiter auseinandergesetzt werden soll, die Form:

$$\operatorname{Log}V=\frac{r+r'}{a}\,Q_1R_1+\left(\frac{s}{a}\right)^2Q_2R_2,$$

wo Q_1 und Q_2 ebenso wie Q Funktionen von $\frac{s}{r+r'}$, R_1 und R_2 Funktionen von $\frac{r+r'}{a}$ sind. Die Tafeln XXIV geben diese Größen, aber nur in einer Ausdehnung, die bei kleinen Werten der Sehne ausreicht; für große Sehnen muß man den Tafeln eine bedeutende Ausdehnung geben, so daß dann das vorhin beschriebene Verfahren 4) zweckmäßiger erscheint. Reicht auch dieses nicht aus, so wird die Anwendung der Lambertschen Gleichung in der Form 1) keine Schwierigkeit bereiten.

67. Bestimmung der Elemente bei parabelnahen Bahnen. Besondere Entwickelungen für das Verhältnis Sektor durch Dreieck brauchen für diese Bahnen nicht ausgeführt zu werden, da die in den Nrn. 49 und 61 für die Ellipse und die Hyperbel gegebenen Vorschriften auch dafür völlig ausreichen; wir können also hier y und die bei seiner Bestimmung vorkommenden Größen als bekannt voraussetzen. Dagegen empfiehlt es sich, das Verfahren der Elementenbestimmung mehr dem bei der Parabel gegebenen anzunähern. Zur Bestimmung des Parameters hat man in allen Fällen (Seite 165, 207)

$$p=\left(\frac{r_1r_2\sin 2f\cdot y}{k\sqrt{1+m}\,(t_2-t_1)}\right)^2; \qquad 1)$$

man kann aber noch einen anderen Ausdruck anführen, der hier gute Dienste leistet, nämlich den Seite 156 für die Ellipse abgeleiteten:

$$p=\frac{2\,r_1r_2\sin f^2}{r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos f\cos g}; \qquad 2)$$

das hierbei gebrauchte g wird entweder durch das Seite 157 auseinandergesetzte Näherungsverfahren oder, wenn y mit den Gaußschen Tafeln berechenbar ist, aus

$$x = \sin\tfrac{1}{2}g^2 = \frac{m}{y^2} - l$$

gewonnen. In der bei der Hyperbel adoptierten Schreibweise wird die Gleichung, wie leicht aus Seite 207 hervorgeht,

$$p = \frac{2\, r_1 r_2 \sin f^2}{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\,(1 + 2z)} \qquad 3)$$

wo

$$-z = \frac{m}{y^2} - l\,.$$

Zur Ermittelung von e und den wahren Anomalien ist das einfachste Verfahren wohl das schon Seite 151 abgeleitete, d. h. in der hier angewendeten Bezeichnungsweise die Rechnung nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} e\sin v_1 &= \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\operatorname{cotg} 2f - \left(\frac{p}{r_2} - 1\right)\operatorname{cosec} 2f \\ e\cos v_1 &= \frac{p}{r_1} - 1 \qquad\qquad 4) \\ v_2 &= v_1 + 2f \\ \varpi &= s_1 - v_1 = s_2 - v_2\,. \end{aligned}$$

Man kann aber auch Formeln aufstellen, die den Gl. 4) (Seite 199) für die Parabel entsprechen. Aus

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 + e\cos v_1}{p}\,, \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1 + e\cos v_2}{p}$$

folgt durch Addieren und Subtrahieren, wenn wie immer $v_2 - v_1 = 2f$, $v_1 + v_2 = 2F$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= \frac{2}{p}\,(1 + e\cos f\cos F) \\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{2}{p}\, e\sin f\sin F\,. \end{aligned}$$

Trägt man hier für p obigen Wert 2) ein, so gehen diese Gleichungen nach einfacher Reduktion in folgende über:

$$\begin{aligned} e\,(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\cos g)\sin F &= (r_2 - r_1)\sin f \\ e\,(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\cos g)\cos F &= 2\cos g\sqrt{r_1 r_2} - (r_1 + r_2)\cos f \end{aligned} \qquad 5)$$

woraus e und F unter Benutzung des bei der Berechnung von y erhaltenen g ermittelt werden können. Es folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} v_1 &= F - f, \qquad v_2 = F + f \\ \varpi &= s_1 - v_1 = s_2 - v_2. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Durchgangszeit durchs Perihel aus den wahren Anomalien ist schon oben Seite 213 und 215 auseinandergesetzt worden.

68. Bestimmung der Elemente parabelnaher Bahnen, wenn die große Halbachse bekannt ist. Kann die große Halbachse als bekannt angenommen werden entweder weil die Umlaufszeit bekannt ist oder weil man bestimmte Hypothesen über a der Bahnbestimmung zugrunde legen will, so erfährt die Bestimmung der Elemente einige Modifikationen. Zunächst bemerkt man, daß der Winkel $2f$ zwischen den beiden Radienvektoren r_1 und r_2 außer auf die gewöhnliche Weise als Differenz zwischen den Längen in der Bahn auch durch die Sehne zwischen den Endpunkten der Radienvektoren gefunden werden kann. Da diese Sehne s im vorliegenden Fall fast immer bekannt sein wird, ist es angemessen, den Ausdruck

$$\operatorname{tg} f = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r_1}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{r_2}{\sigma}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)}} \qquad 1)$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2 + s)$$

zur Ermittelung von $2f$ zu verwenden, sei es auch nur zur Kontrolle.

Ferner bedarf es hier offenbar der Berechnung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck überhaupt nicht; denn aus den vorhin (Seite 220) aufgestellten Gleichungen

$$2e \sin f \sin F = p\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$2e \cos f \cos F = p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2$$

folgt, wenn man

$$\frac{1}{\sin f}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 \sin f} = w \sin W \qquad 2)$$

$$\frac{1}{\cos f}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2 \cos f} = w \cos W$$

setzt:

$$e \sin F = \tfrac{1}{2} p w \sin W$$

$$e \cos F = \tfrac{1}{2} p w \cos W - \frac{1}{\cos f}$$

oder

$$e \sin(F - W) = \sin W \sec f$$

$$e \cos(F - W) = \tfrac{1}{2} p w - \cos W \sec f;$$

hieraus folgt ferner:

$$e^2 = (\tfrac{1}{2} p w)^2 - p w \cos W \sec f + \sec f^2,$$

also, da $e^2 = 1 - \frac{p}{a}$:

$$\tfrac{1}{2} p w = \cos W \sec f - \frac{1}{a w} \mp \sqrt{\left(\cos W \sec f - \frac{1}{a w}\right)^2 - \operatorname{tg} f^2};$$

dies gibt oben eingetragen die Gleichungen:

$$e \sin (F - W) = \sin W \sec f$$
$$e \cos (F - W) = -\frac{1}{a w} \mp \sqrt{\left(\cos W \sec f - \frac{1}{a w}\right)^2 - \operatorname{tg} f^2}, \qquad 3)$$

aus denen e und F bestimmt werden können.

Es ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem die heliozentrische Bewegung zwischen den Orten kleiner oder größer als 180° ist. Aus F und f ergeben sich die wahren Anomalien v_1 und v_2:

$$v_1 = F - f, \qquad v_2 = F + f,$$

dann die Länge des Perihels:

$$\varpi = s_1 - v_1 = s_2 - v_2$$

und endlich die Periheldistanz

$$q = a(1 - e).$$

Die Ermittelung der Durchgangszeit durchs Perihel aus v_1 oder v_2 erfolgt wie Seite 213 und 215.

Abschnitt XV.

Die Bahn im Raum.

69. Knoten, Neigung, Perihelslänge. Nachdem wir in Nr. 41 S. 125 nachgewiesen hatten, daß die Bewegung eines Himmelskörpers um die Sonne in einer durch diese hindurchgehenden Ebene stattfindet, solange angenommen wird, daß lediglich die beiden Körper aufeinander einwirken, konnten wir zunächst die Bewegung *in* dieser Ebene untersuchen, wie in den Abschnitten XI—XIV geschehen ist. Es erübrigt also noch, die Lage dieser Ebene im Raum zu bestimmen und die Lage der Bahnkurve in ihrer Ebene zu fixieren. Wir haben bereits in Nr. 11 die hierzu geeignetsten Mittel angegeben: um die Sonne wird eine Kugel mit beliebigem Radius beschrieben und auf dieser ein bestimmtes Koordinatensystem etwa das der Ekliptik angenommen; die Bahnebene schneidet diese Kugel in einem größten Kreis, der durch die Länge seines aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik: Ω und seine Neigung gegen diese: i unzweideutig festgelegt ist und dadurch zugleich die Bahnebene im Raum fixiert. Wird ein ausgezeichneter Punkt der Bahnkurve, in der Regel das Perihel, ebenfalls an die Sphäre projiziert und wird der projizierte Punkt, der im größten Kreis der Bahn liegen muß, durch seinen Abstand vom genannten Knoten bestimmt, so ist dadurch die Lage der Bahn in ihrer Ebene gegeben. Man nennt dieses Stück den Abstand des Perihels von Knoten und bezeichnet es mit ω. Den gebrochenen Bogen

$$\varpi = \omega + \Omega$$

nennt man die Länge des Perihels.

Bei der Betrachtung der Bewegung in der Bahnebene haben wir die Koordinate s, d. h. den Winkel zwischen dem Radiusvektor r und der ξ-Achse von einer beliebigen Lage der ξ-Achse aus gezählt. Wir wollen jetzt diese Lage so bestimmen, daß ihr Abstand vom Knoten, nach rückwärts gerechnet, gleich Ω wird. Es wird dann:

$$s = \Omega + \omega + v = \varpi + v$$

wo v die wahre Anomalie darstellt. Den Bogen vom Knoten bis zum Schnitt des Radiusvektors mit der Kugel nennt man *Argument der Breite*; es sei im folgenden mit u bezeichnet; offenbar ist

$$u = \omega + v = \varpi - \Omega + v\,.$$

Nebenstehende Figur 34 zeigt die bisher beschriebenen Stücke:

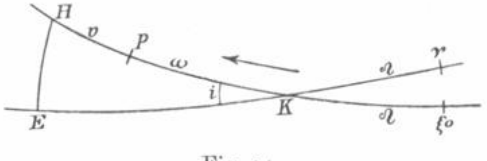


Fig. 34.

ΥE = Ekliptik.
$\xi_0 H$ = Bahn.
Υ = Frühlingspunkt.
$\Upsilon K = \xi_0 K = \Omega$ = Länge des Knotens.
$\sphericalangle HKE = i$ = Neigung der Bahn.
$KP = \omega$ = Abstand des Perihels vom Knoten.
$PH = v$ = wahre Anomalie.
$KH = \omega + v = u$ = Argument der Breite.
$\Upsilon K + KP = \xi_0 K + KP = \xi_0 P = \varpi$ = Länge des Perihels.
$\xi_0 H = \Upsilon K + KH = s = \Omega + u = \Omega + \omega + v = \varpi + v$ = Länge in der Bahn.

Durch die Bahnbestimmung wird die Lage des Radiusvektors, also des Punktes H gegen die Ekliptik durch heliozentrische Länge und Breite l und b gegeben, d. h. wenn HE senkrecht zur Ekliptik gezogen wird, durch die Stücke $\Upsilon E = l$ und $EH = b$. Es ist daher der Zusammenhang zwischen diesen und den Elementen Ω, i, ω oder ϖ aufzustellen. In dem rechtwinkligen Dreieck KEH hat man:

$$\begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin u \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos u \\ \sin b &= \sin i \sin u, \end{aligned} \qquad 1)$$

woraus hervorgeht, daß $l - \Omega$ und u stets in demselben Quadranten liegen, solange i zwischen 0° und 90° liegt, daß dagegen $l - \Omega$ und $360° - u$ demselben Quadranten angehören, wenn i zwischen 90° und 180° liegt. Wenn man also die aus obigen hervorgehenden Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg} u \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega) \end{aligned} \qquad 2)$$

anwendet, kann in der ersteren ein Zweifel über den Quadranten nicht entstehen. Aus den Formeln 1) folgen leicht:

$$\begin{aligned} \sin(u - (l - \Omega)) &= 2 \sin \tfrac{1}{2} i^2 \sin u \cos(l - \Omega) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin b \cos(l - \Omega) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \operatorname{tg} b \cos u \\ \sin(u + (l - \Omega)) &= 2 \cos \tfrac{1}{2} i^2 \sin u \cos(l - \Omega) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i \sin b \cos(l - \Omega) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i \operatorname{tg} b \cos u, \end{aligned} \qquad 3)$$

die zuweilen zur Berechnung von l Verwendung finden.

Wenn $u = \omega + v$ durch die wahre Anomalie und das Element ω gegeben ist und außerdem i und Ω bekannt sind, dann geben die Gleichungen 1) oder 2) die Koordinaten l und b. Die umgekehrte Aufgabe, aus heliozentrischen Koordinaten l, b die Elemente Ω, i und das Argument der Breite u (welches mittels der anderweitig bekannt gewordenen wahren Anomalie v dann auf $\omega = u - v$ oder $\varpi = u - v + \Omega$ führt) zu bestimmen, erfordert offenbar die Kenntnis zweier Örter l_1, b_1 und l_2, b_2. Diese geben zuerst nach 2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_1 \\ \operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_2, \end{aligned} \qquad 4)$$

welche auf verschiedene Weise nach i und Ω aufgelöst werden können. Schreibt man die zweite so:

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega + l_2 - l_1) = \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) \cos(l_2 - l_1) + \operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_2 - l_1)$$

oder

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1) + \operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_2 - l_1),$$

so erhält man die zweite der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_1 \\ \operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)}, \end{aligned} \qquad 5)$$

die gleichzeitig Ω und i mit voller Sicherheit geben. Ist l_1, b_1 der der Zeit nach vorausgehende Ort und kennt man die Richtung, in welcher der Himmelskörper sich von l_1, b_1 nach l_2, b_2 bewegt, so ist die Entscheidung über den Quadranten, in dem i liegt, leicht zu treffen. Denn die Richtung der Bewegung bestimmt, welcher Knoten

der aufsteigende oder absteigende sei, und es wird dann bei einer Bewegung, die in der Richtung der Längenzählung erfolgt (direkte Bewegung) $i < 90^\circ$ und bei der entgegengesetzten (retrograden) Bewegung $i > 90^\circ$ anzunehmen sein. Sind nur die Koordinaten gegeben, nicht aber die Richtung, in der der Übergang von der einen zur anderen erfolgte, dann können der aufsteigende und absteigende Knoten nicht voneinander unterschieden werden und es bleibt also auch der Quadrant von i zweifelhaft.

Man kann aus den Gl. 4) die Länge des Knotens Ω auch unabhängig von i bestimmen. Denn durch Addition und Subtraktion der Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{tg}\,i \sin(\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega) \cos\tfrac{1}{2}(l_1 - l_2) &= \mathrm{tg}\,b_1 + \mathrm{tg}\,b_2 \\ 2\,\mathrm{tg}\,i \cos(\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega) \sin\tfrac{1}{2}(l_1 - l_2) &= \mathrm{tg}\,b_1 - \mathrm{tg}\,b_2 \end{aligned}$$

und daher:

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega) = \frac{\mathrm{tg}\,b_2 + \mathrm{tg}\,b_1}{\mathrm{tg}\,b_2 - \mathrm{tg}\,b_1}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)\,; \qquad 6)$$

wenn man die Breiten b_1 und b_2 selbst bestimmt hat und nicht ihre Tangenten, rechnet man bequemer nach:

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega) = \frac{\sin(b_2 + b_1)}{\sin(b_2 - b_1)}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)\,. \qquad 7)$$

Die Neigung i muß nach Ermittlung von Ω aus:

$$\mathrm{tg}\,i = \frac{\mathrm{tg}\,b_1}{\sin(l_1 - \Omega)} = \frac{\mathrm{tg}\,b_2}{\sin(l_2 - \Omega)} \qquad 8)$$

bestimmt werden. Der Quadrant von Ω, den die Gl. 6) bzw. 7) unentschieden lassen, muß nach obigem so bestimmt werden, daß $\mathrm{tg}\,i$ bei direkter Bewegung positiv, bei retrograder aber negativ wird.

Die Argumente der Breite u_1 und u_2 ergeben sich nach Bestimmung von Ω und i durch eine geeignete Auswahl aus folgenden Formeln, die man alle leicht aus 1) ableiten kann:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,u_1 &= \frac{\mathrm{tg}(l_1 - \Omega)}{\cos i} & \mathrm{tg}\,u_2 &= \frac{\mathrm{tg}(l_2 - \Omega)}{\cos i} \\ \sin u_1 &= \frac{\sin b_1}{\sin i} & \sin u_2 &= \frac{\sin b_2}{\sin i} \\ \cos u_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega & \cos u_2 &= \cos b_2 \cos(l_2 - \Omega) \qquad 9) \\ \sin(u_2 + u_1) &= \frac{\cos b_1 \cos b_2}{\cos i} \sin(l_2 + l_1 - 2\Omega) \\ \sin(u_2 - u_1) &= \frac{\cos b_1 \cos b_2}{\cos i} \sin(l_2 - l_1)\,. \end{aligned}$$

Der Quadrant von u bestimmt sich entweder nach der schon oben gegebenen Regel oder noch einfacher durch die Überlegung, daß bei positiven Breiten u zwischen 0° und 180°, bei negativen zwischen 180° und 360° liegen muß.

Aus u folgt die Lage des Perihels durch

$$\omega = u - v \quad \text{oder} \quad \varpi = u + \Omega - v\,.$$

70. Die Gleichung der Bahnebene. Stellt

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der Bahnebene in dem der Ekliptik zugehörigen rechtwinkligen Koordinatensystem vor, so kann man die Koeffizienten A, B, C leicht ermitteln. Hat man die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte: $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ gerechnet, die der Ebene angehören sollen, so hat man:

$$A : B : C = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad 10)$$

Hat man wie bei der Bahnbestimmung drei Punkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ zur Verfügung, so kann man A, B, C symmetrisch aus:

$$A : B : C = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 11)$$

ermitteln. Der Zusammenhang von A, B, C mit den Bestimmungsstücken Ω und i der Bahn ergibt sich leicht, wenn man

$$A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r} + C\frac{z}{r} = 0$$

oder

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

schreibt, wo α, β, γ die Winkel des beliebigen Radiusvektors r mit den Achsen sind. Da diese aber durch

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\alpha = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i \\ \frac{y}{r} &= \cos\beta = \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i \\ \frac{z}{r} &= \cos\gamma = \sin u\sin i \end{aligned} \qquad 12)$$

gegeben sind und die Gleichung

$$A(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) + B(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) + C\sin u\sin i = 0$$

für jeden Wert von u gelten muß, so folgt:

$$\begin{aligned} u &= 0 & A\cos\Omega + B\sin\Omega &= 0 \\ u &= 90^\circ & -A\sin\Omega\cos i + B\cos\Omega\cos i + C\sin i &= 0, \end{aligned}$$

woraus:

$$\frac{A}{C} = \frac{\sin i\sin\Omega}{\cos i}, \qquad \frac{B}{C} = -\frac{\sin i\cos\Omega}{\cos i}.$$

Die Gleichung der Ebene wird also:

$$\sin i\sin\Omega\, x - \sin i\cos\Omega\, y + \cos i\, z = 0. \qquad 13)$$

Wünscht man die Argumente der Breite u durch rechtwinklige Koordinaten auszudrücken, so bieten hierzu die Gl. 12) die Hand; denn man entnimmt denselben:

$$\begin{aligned} r\sin u &= \frac{z}{\sin i} \\ r\cos u &= x\cos\Omega + y\sin\Omega. \end{aligned} \qquad 14)$$

71. Die Bahnelemente. Überblicken wir am Schluß dieses Teiles die Lösung der behandelten Aufgabe: »die Differenzialgleichungen 2) (Seite 125) der Bewegung eines Körpers von gegebener Masse um die Sonne zu integrieren und das Integral im Hinblick auf die Aufgabe der Bahnbestimmung zu studieren«, so erkennen wir, daß die genannte Bewegung von sechs Konstanten abhängig ist, den Integrationskonstanten der drei Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Wir zählen diese Konstanten, welche die Bahnelemente genannt werden, im folgenden nochmals auf, indem wir zuerst die vier Konstanten nennen, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen und dann die zwei, welche die Bahnebene im Raum angeben:

1. Die halbe große Achse a beziehungsweise die dadurch gegebene mittlere Bewegung μ.

2. Die Exzentrität e. In der Parabel, wo a unendlich groß und e gleich 1 ist, tritt an Stelle dieser beiden Elemente der Parameter p oder die Periheldistanz q.

3. Die Länge des Perihels ϖ oder der Abstand des Perihels vom Knoten ω.

4. Die Epoche t_0 oder die Zeitangabe, zu welcher sich der Körper in einem bestimmten Punkte seiner Bahn befindet. In der Ellipse gibt man hierzu die mittlere Anomalie M_0 für eine bestimmte Zeit. In der Hyperbel und Parabel pflegt man die Zeit des Periheldurchganges T anzugeben.

5. Die Länge des Knotens Ω, gezählt auf der Ekliptik oder einer anderen Grundebene.

6. Die Neigung gegen die Ekliptik oder die angenommene Grundebene: i.

Eine Zusammenstellung des vollständigen Integrales, getrennt nach den drei Kurven, wird die Übersicht erleichtern.

A. Ellipse:

$$\mu = \frac{k''\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$M_0 + \mu(t - t_0) = E - e\sin E$$

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

$$r\cos v = a(\cos E - e)$$

$$s = \Omega + \omega + v = \varpi + v$$

$$u = s - \Omega = \omega + v = \varpi - \Omega + v$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega).$$

B. Parabel:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}(t - \mathrm{T})$$

$$r = \frac{q}{\cos^2\tfrac{1}{2}v}$$

$$u = \omega + v$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega).$$

C. Hyperbel:

$$\mu = \frac{\mathrm{Mod}\, k'' \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{Mod}\, e \operatorname{tg} F - \mathrm{Log} \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}F) = \mu(t - T)$$

$$r \sin v = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F$$

$$r \cos v = a\left(e - \frac{1}{\cos F}\right)$$

$$u = \omega + v$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega).$$

Wir haben hier natürlich nur je eine von den mannigfachen Formen, die wir kennen lernten, aufgenommen.

Man ersieht, daß bei bekannten Elementen für jede Zeit t die heliozentrischen Polarkoordinaten r, l, b berechnet werden können. Der Übergang auf den geozentrischen Ort ist bereits in Nr. 13 gezeigt worden.

Dritter Teil.

Die geozentrische Bewegung.

Abschnitt XVI.

Einzelne Örter.

72. Ein einzelner geozentrischer Ort. Berechnung einer Ephemeride. Die Betrachtung der Bewegungen der Planeten und Kometen vom *heliozentrischen* Standpunkt geht von den einfachsten Gesetzen aus und führt zur einfachsten Beschreibung derselben. Der *geozentrische* Standpunkt muß aber eingenommen werden, wenn es sich um die Beobachtung der Bewegungen handelt. Da wir die wahre Bewegung nur aus der beobachteten erschließen können, müssen wir die Beziehungen zwischen beiden untersuchen. Die geozentrische (scheinbare) Bewegung ist viel komplizierter als die wahre und eine allgemeine Theorie derselben daher sehr verwickelt; man kann aber auf eine solche verzichten, wenn man nur diejenigen Beziehungen erforscht, die zur Kenntnisnahme der wahren Bewegung führen; denn aus dieser kann man immer die scheinbare Bewegung leicht ableiten. Wir wollen diese Beziehungen hier zusammenstellen und mit der Betrachtung eines einzelnen Ortes beginnen.

Wir haben schon in Nr. 13 die mannigfachen Formen kennen gelernt, in die man die Beziehung zwischen dem geozentrischen und dem heliozentrischen Ort bringen kann. Wir wollen hier die wichtigste in der allgemein eingebürgerten Form nochmals aufführen und einige Umformungen daran knüpfen. Sind α, δ, ϱ die geozentrischen Äquatorealkoordinaten eines Gestirnes, r und v Radiusvektor und wahre Anomalie, i, Ω, ω Neigung, Knoten und Abstand des Perihels vom Knoten der Bahn, bezogen auf die Ekliptik, i', Ω', ω' dieselben bezogen auf den Äquator, ε die Schiefe der Ekliptik, endlich X, Y, Z die rechtwinkligen Äquatorealkoordinaten der *Sonne*, so hat man nach den Formeln 17) (Seite 30) da $u = \omega + v$, $u' = \omega' + v$ ist:

$$\begin{aligned}
\varrho \cos\delta \cos\alpha &= r \sin a \sin(A + \omega + v) + X \\
\varrho \cos\delta \sin\alpha &= r \sin b \sin(B + \omega + v) + Y \\
\varrho \sin\delta \qquad\quad &= r \sin c \sin(C + \omega + v) + Z
\end{aligned}$$

wobei nach 9) (Seite 27)

$$\begin{aligned}
\sin a \sin A &= \cos \Omega \\
\sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\
\cos a &= \sin i \sin \Omega \\
\sin b \sin B &= \cos \varepsilon \sin \Omega \\
\sin b \cos B &= -\sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \cos \Omega = n \cos (N + \varepsilon) \\
\cos b &= -\cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega \\
\sin c \sin C &= \sin \varepsilon \sin \Omega \\
\sin c \sin C &= \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega = n \sin (N + \varepsilon) \\
\cos c &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega
\end{aligned} \qquad 1)$$

$$n \sin N = \sin i$$
$$n \cos N = \cos \Omega \cos i .$$

Kontrolle: $\dfrac{\sin b \sin c \sin (B - C)}{\sin a \cos A} = -\operatorname{tg} i$ (nach 11) Seite 28)

($\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ sind stets positiv; die $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ werden nur selten gebraucht)

oder mit Benutzung der Formeln 10) (Seite 27)

$$\begin{aligned}
\varrho \cos \delta \cos \alpha &= r \sin a' \sin (A' + \omega' + v) + X \\
\varrho \cos \delta \sin \alpha &= r \sin b' \sin (B' + \omega' + v) + Y \\
\varrho \sin \delta &= r \sin c' \sin (C' + \omega' + v) + Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin a' \cos A' &= \cos \Omega' \\
\sin a' \cos A' &= -\cos i' \sin \Omega' \\
\cos a' &= \sin i' \sin \Omega' \\
\sin b' \sin B' &= \sin \Omega' \\
\sin b' \cos B' &= \cos i' \cos \Omega' \\
\cos b' &= -\sin i' \cos \Omega' \\
\sin c' \sin C' &= 0 \\
\sin c' \cos C' &= \sin i' \\
\cos c' &= \cos i' .
\end{aligned} \qquad 2)$$

Der Formeln 2) wird man sich nur bedienen, wenn man die Umwandlung der Ekliptikalelemente Ω, i, ω in die Äquatorealelemente Ω', i', ω' ohnehin hat vornehmen müssen. Es ist übrigens, wie schon in Nr. 27 erörtert:

$$\sin a' = \sin a, \quad \sin b' = \sin b, \quad \sin c' = \sin c = \sin i',$$

ferner:

$$A' = A - (\omega' - \omega), \quad B' = B - (\omega' - \omega), \quad C' = 0, \quad \text{da } C = \omega' - \omega.$$

Die Formeln 1) dienen zur Herstellung einer sogenannten *Ephemeride*, d. h. einer Reihe von geozentrischen Orten eines Gestirnes für äquidistante Zeitmomente unter Zugrundelage der Bahnelemente. Da sie häufig zur Anwendung kommen, wollen wir sie durch ein Beispiel erläutern.

Für den periodischen Kometen Brooks liegt folgendes Elementensystem vor:

Epoche 1896 Okt. 11.5 M. Z. Berlin.

Mittlere Anomalie für die Epoche	M	$= 356^\circ\ 42'\ 42''.25$	
Abstand des Perihels vom Knoten	ω	$= 343\ 47\ 54.28$	Ekliptik und
Länge des Knotens	Ω	$= 18\ 4\ 18.67$	Mittl. Äquin.
Neigung gegen die Ekliptik	i	$= 6\ 3\ 34.28$	1900.0
Exzentrizitätswinkel	φ	$= 27\ 59\ 59.23$	
Mittlere tägliche Bewegung	μ	$= 499''.97534$	
Log. der halben großen Achse	$\log a$	$= 0.567\,3721$	

und soll zur Berechnung einer Ephemeride verwendet werden.

Wir rechnen zuerst die Gaußschen Konstanten $a, A, \ldots$ nach obigen Formeln 1) und brauchen dazu die Schiefe der Ekliptik für 1900.0 $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 8''.03$.

$\cos\Omega$	9.978 0290	$\sin a \sin A$	9.978 0290	$\sin c \sin C$	9.091 5210
$\sin\Omega$	9.491 6550	$\sin a \cos A$	$9.489\,2217_n$	$\sin c \cos C$	9.674 9334
$\cos i$	9.997 5667	$\cos A$	$9.489\,4547_n$	$\cos C$	9.985 6932
$\sin i$	9.023 5059	A	$107^\circ 58' 38''.63$	C	$14^\circ\ 37'\ 34''.20$
$\cos\varepsilon$	9.962 5550	$\sin a$	9.999 7670	$\sin c$	9.689 2402
$\sin\varepsilon$	9.599 8660				Probe:
		$\sin b \sin B$	9.454 2100	$B - C$	$4^\circ\ 24'\ 1''.20$
$n \sin N$	9.023 5059	$\sin b \cos B$	9.916 5860	$\sin(B-C)$	8.884 9359
$n \cos N$	9.975 5957	$\cos B$	9.975 6011	$\sin b \sin c$	9.630 2251
$\cos N$	9.997 3092	B	$19^\circ 1' 35''.40$	Summe	8.515 1610
N	$6^\circ\ 22'\ 17''.22$	$\sin b$	9.940 9849	$\sin a \cos A$	$9.489\,2217_n$
$N + \varepsilon$	$29\ 49\ 25.25$			$(\mathrm{tg}\, i)_c$	9.025 9393
$\cos(N+\varepsilon)$	9.938 2995			$(\mathrm{tg}\, i)_d$	9.025 9392
n	9.978 2865				
$\sin(N+\varepsilon)$	9.696 6469				

Somit werden die rechtwinkligen heliozentrischen Äquatorealkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\,[9.999\,7670] \sin(\ 91^\circ\ 46'\ 32''.91 + v) \\ y' &= r\,[9.940\,9849] \sin(\ 2\ 49\ 29.68 + v) \\ z' &= r\,[9.689\,2402] \sin(358\ 25\ 28.48 + v) \end{aligned}\right\} \text{Äqu. } 1900.0$$

Die Berechnung der Polarkoordinaten r und v vollziehen wir nach den Formeln III (Seite 137) und gebrauchen hierzu folgende Hilfsgrößen

$\log\sin\varphi$	9.671 6063	$\log c''$	4.986 0314
$\log\cos\varphi$	9.945 9358	$\log a\cos\varphi$	0.513 3079

Die übrige Rechnung bedarf keiner Erläuterung, außer daß die rechtwinkligen Äquatorealkoordinaten der Sonne X, Y, Z für das Äquinoktium 1900.0 direkt dem Berliner Jahrbuch entnommen sind, und daß wir hier die Rechnung nur für ein einziges Zeitmoment, nämlich 1896 Nov. 16.5 durchführen:

$t - t_0$	+ 36
$\mu(t - t_0)$	+ 4° 59′ 59.″11
M	1 42 41.36
E	3 13 28.14
$\sin E$	8.750 1082
$\cos E$	9.999 3119
Subt.	0.275 8985
$\cos E - e$	9.723 4134
$r \sin v$	9.263 4161
$r \cos v$	0.290 7855
$\cos v$	9.998 0941
$\operatorname{tg} v$	8.972 6306
v	5° 21′ 50.″09
r	0.292 6914
$A + \omega + v$	97° 8′ 23.″00
$B + \omega + v$	8 11 19.77
$C + \omega + v$	3 47 18.57
$\sin(A + \omega + v)$	9.996 6194
$r \sin a$	0.292 4584
$\sin(B + \omega + v)$	9.153 6194
$r \sin b$	0.233 6763
$\sin(C + \omega + v)$	8.820 0272
$r \sin c$	9.981 9316

x'	+ 1.945 7085
X	− 0.564 1232
y'	+ 0.243 9471
Y	− 0.744 3351
z'	+ 0.063 3810
Z	− 0.322 9122
$x' + X$	+ 1.381 5853
$y' + Y$	− 0.500 3880
$z' + Z$	− 0.259 5312
$\varrho \sin\alpha \cos\delta$	$9.699\,3069_n$
$\varrho \cos\alpha \cos\delta$	0.140 3777
$\cos\alpha$	9.973 2347
$\varrho \sin\delta$	$9.414\,1896_n$
$\varrho \cos\delta$	0.167 1430
$\cos\delta$	9.993 3293
1900.0 α''	340° 5′ 25.″53
1900.0 α^s	22h 40m 21.s702
1900.0 δ	− 10° 0′ 59.″15
Log ϱ	0.173 8137

Man kann die Gl. 1) leicht so umgestalten, daß man der Größen r und v nicht bedarf, sondern nur der exzentrischen Anomalie E, aus der jene in der Regel berechnet werden. In der Tat sind die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten des Planeten von der Form

$$rk \sin(K + v) = rk \sin K \cos v + rk \cos K \sin v ,$$

die nach Einführung von

$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E, \qquad r \cos v = a (\cos E - e)$$

übergeht in:

$$ak \sin K \cos E - aek \sin K + ak \cos\varphi \cos K \sin E ,$$

oder wenn man die Konstanten l, L, λ durch

$$\begin{aligned} l \sin L &= ak \sin K \\ l \cos L &= ak \cos\varphi \cos K \\ \lambda &= - aek \sin K \end{aligned}$$

bestimmt:

$$x' = l \sin(E + L) + \lambda . \qquad 3)$$

Diese an sich bequemere Form wird man nur dann zur Anwendung bringen, wenn man den Radiusvektor nicht braucht, was aber nur selten der Fall ist.

Bei der *Parabel* kann man r durch seinen Wert ersetzen und schreiben:

$$x' = \frac{q \sin a \sin(A + \omega + v)}{\cos\frac{v}{2} v^2}$$
$$y' = \cdots.$$

73. Kriterium für die Zugehörigkeit eines beobachteten Ortes zu einer Bahn. Man muß nicht selten die Entscheidung treffen, ob eine eben angestellte vereinzelte Beobachtung eines kleinen Planeten oder Kometen einem bereits in früheren Jahren beobachteten Gestirn, für das eine Bahn vorliegt, angehören könne oder nicht. Ein einfaches Kriterium hierfür läßt sich leicht bilden, wenn man bedenkt, daß die durch die Beobachtung festgelegte Gerade die bekannte Bahnebene in einem Punkt P treffen muß, der in der Nähe der Bahnkurve sich befindet. Damit wird man sich nämlich begnügen müssen und nicht die Übereinstimmung des beobachteten mit dem aus der Bahn berechneten Ort verlangen, da dasjenige Element, welches den Ort in der Bahn bestimmt, bei Planeten die mittlere Bewegung, bei Kometen die Durchgangszeit durchs Perihel, in der Regel am unsichersten bestimmt zu sein pflegt. Zur Ermittlung des Schnittpunktes P bedienen wir uns am besten des auf Seite 30 beschriebenen Verfahrens. Wir ziehen auf der heliozentrischen Einheitskugel die Ekliptik mit dem Ort der Erde in E, ferner den größten Kreis der Bahnebene, gegeben durch Ω und i. Wir ziehen ferner durch die Sonne eine Gerade parallel zur beobachteten Richtung, die wir als durch Länge und Breite gegeben annehmen; diese Gerade treffe die Sphäre in G, dessen Koordinaten die beobachteten λ und β sein werden. Der durch E und G gelegte größte Kreis trifft den größten Kreis der Bahn in dem Punkte H, der die Richtung des erwähnten Schnittpunktes, gesehen von der Sonne angibt. Nennt man L die Länge der Erde, γ den Winkel, den der größte Kreis EG mit der Ekliptik bildet, χ die Länge des Bogens EG, z die Länge des Bogens HG, so ist χ und γ durch

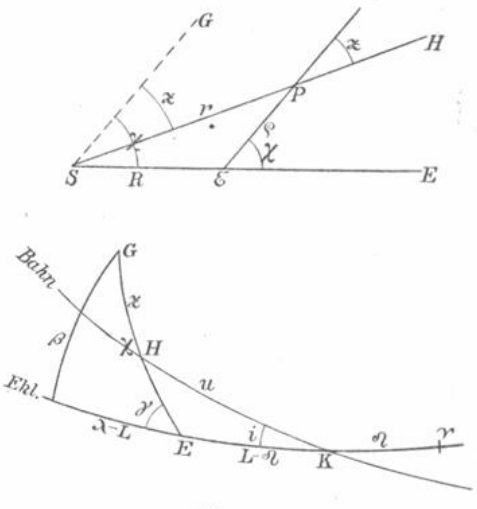


Fig. 35.

$$\sin\chi \sin\gamma = \sin\beta$$
$$\sin\chi \cos\gamma = \cos\beta \sin(\lambda - L)$$
$$\cos\chi \quad = \cos\beta \cos(\lambda - L)$$

gegeben und darauf $KH = u$ und $EH = \chi - z$ aus dem Dreieck KEH durch die Gaußschen Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(u + (\chi - z)) = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma + i) \sin\tfrac{1}{2}(L - \Omega)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(u + (\chi - z)) = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - i) \cos\tfrac{1}{2}(L - \Omega)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(u - (\chi - z)) = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma + i) \sin\tfrac{1}{2}(L - \Omega)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(u - (\chi - z)) = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - i) \cos\tfrac{1}{2}(L - \Omega),$$

wo η, der Winkel bei H, weiter nicht gebraucht wird. Mittels χ und z ergibt sich aus dem ebenen Dreieck zwischen Sonne, Erde und Schnittpunkt P die Entfernung (r) des letzteren von der Sonne durch

$$(r) = R \frac{\sin \chi}{\sin z}.$$

Indem diese Distanz mit dem aus den Bahnelementen des Kometen oder Planeten folgenden Radiusvektor nahe übereinstimmen muß, ergibt sich das gewünschte Kriterium. Der Radiusvektor ist aber, wenn es sich um einen kleinen Planeten oder kurzperiodischen Kometen handelt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \qquad (p = \text{Parameter}),$$

wo v mittels des obigen $u = \omega + v$ aus:

$$v = u - \omega$$

berechnet werden kann. Das Kriterium wird also:

$$1 + e \cos(u - \omega) = \frac{p \sin z}{R \sin \chi}. \qquad \text{A.}$$

Liegt die Vermutung vor, daß das beobachtete Gestirn mit einem früher berechneten langperiodischen Kometen identisch sei, so wird man das Kriterium in einer etwas umgestalteten Form anwenden. Rechnet man nämlich E aus

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u - \omega),$$

so wird nach Formel VI. (Seite 138)

$$r = a(1 - e) \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = q \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2}(u - \omega)^2},$$

wo q die Periheldistanz ist. Der Vergleich mit (r) gibt dann:

$$\cos \tfrac{1}{2}(u - \omega)^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi} \cos \tfrac{1}{2} E^2. \qquad \text{B.}$$

Liegt vom früher beobachteten Kometen nur eine parabolische Bahn vor, so wird man in A. oder B. $e = 1$ setzen und verwenden:

$$\cos \tfrac{1}{2}(u - \omega)^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi}. \qquad \text{C.}$$

Bei einem kleinen Planeten, der, wie meist der Fall, in der Nähe der Opposition beobachtet ist, kann man noch etwas einfacher verfahren. In der Opposition wird nämlich $\lambda = L$ und daher

$$\chi = \beta \text{ und } \gamma = 90^\circ;$$

dann folgt aber:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}(\beta - z) = \sin(\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i$$

und das Kriterium:

$$1 + e \cos(u - \omega) = \frac{a(1 - e^2) \sin z}{R \sin \beta} \qquad \text{D.}$$

oder wie oben:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u - \omega)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(u - \omega)^2 = a(1 - e) \frac{\sin z}{R \sin \beta} \cos \tfrac{1}{2} E^2. \qquad \text{E.}$$

Übrigens ist in der Opposition $\beta - x = b =$ der heliozentrischen Breite und man hat daher

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - x)} = \frac{r}{\varrho};$$

diese Gleichung genügt, wenn das Verhältnis $\frac{r}{\varrho}$ schon berechnet vorliegt, auch häufig zur Entscheidung der Identität.

74. Zwei geozentrische Örter. Wenn man von den Endpunkten einer bekannten Basis aus die Richtungen nach einem Objekt mißt, so läßt sich daraus die Entfernung des Objektes berechnen. Zwei geozentrische Beobachtungen, die zu verschiedenen Zeiten gehören, stellen solche Richtungsmessungen vor, und die Basis ist die Sehne der Erdbahn, die in der Zwischenzeit beschrieben wird. Bei astronomischen Objekten tritt nur die Komplikation ein, daß sie bewegt sind. Man wird daher die Aufgabe der Entfernungsbestimmung nur lösen können, wenn diese Bewegung bekannt ist. Macht man die unter Umständen erlaubte Annahme, daß die Entfernung des Objektes von der Sonne in der Zwischenzeit sich nicht ändert, so kann durch diese Entfernung, vermöge der Gesetze der Planetenbewegung, die Bewegung ausgedrückt werden; und da die gesuchte Entfernung des Planeten von der Erde ebenfalls in einer bekannten Beziehung zu der Entfernung desselben von der Sonne steht, so ist ersichtlich, daß unter der gemachten Voraussetzung die Bestimmung der Entfernung des Planeten von der Erde muß ausgeführt werden können. Wir werden dies später bei Bestimmung einer Kreisbahn bestätigt finden, auf welche bei Annahme einer konstanten Entfernung von der Sonne die Lösung offenbar hinausläuft. Die Ermittlung einer Kreisbahn hat in der Regel zum Ziel, über die Bahnlage rasch unterichtet zu werden. Handelt es sich um einen kleinen Planeten, wo man die Entfernung von der Sonne wenigstens ungefähr als bekannt annehmen kann, so kann man die ungefähre Bahnlage aus zwei geozentrischen Örtern noch schneller erkennen, ja schon aus den vom Beobachter angegebenen täglichen Bewegungen der Koordinaten entnehmen, wenn man sich folgender Entwicklungen bedient. Sind E_1, E_2 die beiden Erdörter in den Längen L_1 und L_2, G_1, G_2 die geozentrischen Örter des Planeten, so liegen die heliozentrischen Örter H_1, H_2 auf den größten Kreisen $E_1 G_1$ und $E_2 G_2$ und zwar da, wo der größte Kreis der Bahn sie schneidet. Sind ferner

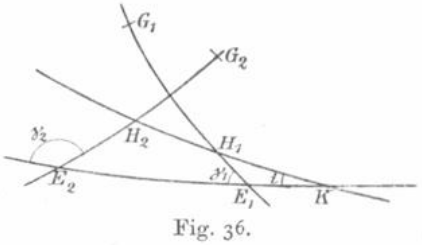


Fig. 36.

γ_1 und γ_2 die Neigungen von $E_1 G_1$ und $E_2 G_2$ gegen die Ekliptik, und die Bogen $E_1 G_1 = \chi_1$, $E_2 G_2 = \chi_2$, so folgt mittels der geozentrischen Koordinaten $\lambda_1\beta_1$, $\lambda_2\beta_2$:

$$\begin{aligned} \sin\chi_1 \sin\gamma_1 &= \sin\beta_1 \\ \sin\chi_1 \cos\gamma_1 &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\chi_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\chi_2 \sin\gamma_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\chi_2 \cos\gamma_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\chi_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2). \end{aligned}$$

Setzt man nun die Bogen $G_1 H_1 = x_1$ und $G_2 H_2 = x_2$ und nennt a die geschätzte Entfernung von der Sonne, so wird, wenn noch die Entfernung der Erde von der Sonne gleich 1 angenommen wird:

$$\sin x_1 = \frac{1}{a}\sin\chi_1, \qquad \sin x_2 = \frac{1}{a}\sin\chi_2,$$

womit offenbar die Punkte H_1, H_2 ihrer Lage nach bestimmt sind. Nennt man $l_1 b_1$, $l_2 b_2$ ihre Koordinaten, die sich aus

$$\begin{array}{l|l} \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) = \cos\gamma_1 \sin(\chi_1 - \varkappa_1) & \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) = \cos\gamma_2 \sin(\chi_2 - \varkappa_2) \\ \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) = \cos(\chi_1 - \varkappa_1) & \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) = \cos(\chi_2 - \varkappa_2) \\ \sin b_1 = \sin\gamma_1 \sin(\chi_1 - \varkappa_1) & \sin b_2 = \sin\gamma_2 \sin(\chi_2 - \varkappa_2) \end{array}$$

ergeben, so folgt schließlich nach den Formeln 7) und 8) (Seite 225)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - \Omega\right) = \frac{\sin(b_2 + b_1)}{\sin(b_2 - b_1)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)$$

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin(l_1 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tg} b_2}{\sin(l_2 - \Omega)} \qquad (\operatorname{tg} i \text{ positiv}).$$

Liegen, wie in der Regel, die beiden Beobachtungen in der Nähe der Opposition, so kann man für rohe Überschlagsrechnungen γ_1 und γ_2 zu 90° annehmen und daher $\chi_1 = \beta_1$, $\chi_2 = \beta_2$; dann wird

$$\sin\varkappa_1 = \frac{1}{a}\sin\beta_1, \qquad \sin\varkappa_2 = \frac{1}{a}\sin\beta_2$$

$$b_1 = \beta_1 - \varkappa_1, \qquad b_2 = \beta_2 - \varkappa_2,$$

ferner wird man $\frac{l_1 + l_2}{2}$ durch $l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2}$ oder $l_2 - \frac{l_2 - l_1}{2}$ berechnen, je nachdem die erste oder die zweite Beobachtung näher der Opposition liegt; l_1 oder l_2 ersetzt man durch λ_1 bzw. λ_2; für $l_2 - l_1$ aber nimmt man am besten den Bogen $H_1 H_2$, der gleich ist:

$$\frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}(t' - t) = \frac{L_2 - L_1}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel. Vom Planeten 1903 *MN* liegen die Daten vor:

	λ	β	L
1903 Okt. 24.5	29° 26′	− 2° 17′	30° 25′
Okt. 27.5	28 41	− 2 6	33 22

Nimmt man $a = 2.51$ [0.4000], so stellt sich die ganze Rechnung wie folgt:

$\varkappa_1 = -0^\circ 55'$ $\quad \varkappa_2 = -0^\circ 50'$ $\quad \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$ 1° 28′

$b_1 = -1\ 12$ $\quad b_2 = -1\ 16$ $\quad$ 1.9445

$a^{\frac{3}{2}}$ 0.6000

$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 29\ 48$ $\quad \frac{1}{2}(l_2 - l_1)$ 22′.1

$\sin(b_2 + b_1)$ 8.6622_n $\quad l_1 - \Omega$ $-9^\circ 58'$

$\sin(b_2 - b_1)$ 7.2419 $\quad \operatorname{tg} b_1$ 8.3776_n

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(l_2 - l_1)$ 7.8081 $\quad \sin(l_1 - \Omega)$ 9.2382_n

$\operatorname{tg}[\frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega]$ 9.2284_n $\quad \operatorname{tg} i$ 9.1394

$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \Omega$ $-9^\circ 36'$ $\quad i$ 7° 51′.

Ω $+39^\circ 24'$

Diese mit einem minimalen Rechnungsaufwand erlangten Werte von Ω und i stimmen meist innerhalb eines Grades mit den wahren Werten überein und leisten oft wertvolle Dienste bei Identifizierungen.

Abschnitt XVII.

Der Lambertsche Satz von der Krümmung der Bahnen.

75. Drei geozentrische Örter. Der Lambertsche Satz. Aus drei geozentrischen Örtern, welche sechs gemessene Koordinaten repräsentieren, müssen die sechs Elemente einer Bahn bestimmt werden und es ist die Hauptaufgabe der Bahnbestimmung, dieses Problem zu lösen. Es wird daher unsere späteren Überlegungen wesentlich erleichtern und uns das wahre Wesen der Methoden durchschauen lassen, wenn wir den Beziehungen dreier geozentrischer Örter besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Wir werden später sehen, daß das Problem nur lösbar ist, wenn die drei Örter nahe beisammen liegen; diese Voraussetzung wollen wir daher auch hier ein- und für allemal machen.

Sind E_1, E_2, E_3 drei Erdörter, die mit der Sonne S in einer Ebene liegen, C_1, C_2, C_3 drei gleichzeitige Örter eines um die Sonne laufenden Himmelskörpers, die ebenfalls mit S in einer Ebene liegen, so stellen E_1C_1, E_2C_2, E_3C_3 die Strahlen vor, deren Richtungen uns durch die geozentrischen Örter des Gestirns gegeben sind. An der Sphäre seien sie durch drei Punkte G_1, G_2, G_3 repräsentiert, deren Koordinaten, etwa in bezug auf die Ekliptik, gemessen sind. Die drei Erdörter werden dort drei Punkte eines größten Kreises, der Ekliptik, sein und die drei Punkte H_1, H_2, H_3, welche den heliozentrischen Richtungen SC_1, SC_2, SC_3 des Gestirns entsprechen, werden ebenfalls in einem größten Kreise liegen, dem Schnitt der Sphäre mit der Bahnebene $SC_1C_2C_3$. Außerdem liegen die Punkte H_1, H_2, H_3 bzw. auf den größten Kreisen E_1G_1, E_2G_2, E_3G_3, welche die Schnitte der Sphäre mit den Ebenen SE_1C_1, SE_2C_2, SE_3C_3 sind. Die drei Punkte G_1, G_2, G_3 dagegen liegen *nicht* auf einem größten Kreise, sondern bilden, durch drei größte Kreise miteinander verbunden, ein sphärisches Dreieck, welches die Grundlage der ganzen Bahnbestimmung bildet und daher eingehend betrachtet werden muß. Die trigonometrische Behandlung wird später vorgenommen werden, für jetzt wollen wir seinen Zusammenhang mit der Entfernungsmessung, also dem Nerv der Bahnbestimmung, bloßlegen.

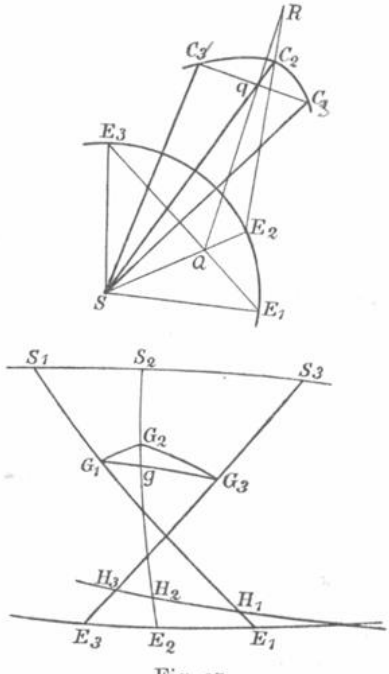


Fig. 37.

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz (Nr. 41) bewegt sich sowohl die Erde als der Planet so, daß vom Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Sektoren über-

strichen werden. Da nun diese Sektoren unter der oben hervorgehobenen Voraussetzung sehr nahe gleich den entsprechenden Dreiecksflächen sind, so verhalten sich die Dreiecksflächen wie die Zwischenzeiten. Zieht man $E_1 E_3$, das vom mittleren Radiusvektor der Erde R_2 in Q getroffen werde, ebenso $C_1 C_3$, das vom mittleren Radiusvektor des Planeten r_2 in q getroffen werde, so werden sich die Dreiecke SE_1E_2 und SE_2E_3 einerseits und SC_1C_2 und SC_2C_3 andererseits wie die Zwischenzeiten $\tau_3 = k(t_2 - t_1)$ und $\tau_1 = k(t_3 - t_2)$ verhalten. Da die Dreiecke die Grundlinien SE_2 bzw. SC_2 gemeinsam haben, so verhalten sie sich wie die Höhen oder wie die Abschnitte der Sehne $E_1 Q$ zu QE_3 bzw. $C_1 q$ zu qC_3. Wir haben somit das Resultat, *daß der Schnittpunkt Q des mittleren Radiusvektors auf der Sehne zwischen den äußeren Orten sich proportional der Zeit, also mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.* Daraus folgt, daß die Richtung Qq die Sphäre in einem Punkt g trifft, der auf dem größten Kreis $G_1 G_3$ liegt. In der Tat wird dann auch die geozentrische Bewegung des Punktes q gesehen von Q eine geradlinige und gleichförmige und die durch den Mittelpunkt der Sphäre parallel zu $E_1 C_1$, Qq, $E_3 C_3$ gezogenen Strahlen liegen also in einer Ebene. Der Punkt g muß ferner auf dem größten Kreis $E_2 G_2$ liegen, da die Gerade Qq der Ebene SE_2C_2 angehört; er ist also der Schnittpunkt der größten Kreise $G_1 G_3$ und $E_2 G_2$ und seine Lage kann durch die bekannten Stücke gezeichnet bzw. gerechnet werden.

Nach Formel 21) (Seite 179) ist der Pfeil

$$QE_2 = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 R_2^2}$$

und ebenso

$$qC_2 = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^2};$$

folglich verhalten sich die Pfeile der beiden Bahnen umgekehrt wie die Quadrate der Radienvektoren. Mit derselben Genauigkeit erhält man nach Formel 21b) (Seite 179)

$$\frac{QE_2}{SQ} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 R_2^3}$$
$$\frac{qC_2}{Sq} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}.$$

Diese beiden Resultate vorausgesetzt, schließen wir nun folgendermaßen. Daß G_2 nicht mit g zusammenfällt, hat seinen Grund darin, daß weder die Erde noch der Planet sich geradlinig und gleichförmig bewegen; denn wäre dies der Fall, so müßte, wie wir sahen, die geozentrische Bahn ein größter Kreis $G_1 g G_3$ sein. Die Abweichung des Punktes G_2 vom größten Kreis $G_1 G_3$ wird also durch den Umstand erzeugt, daß der Planet sich in einer Kurve bewegt und folglich hängt die Ermittlung dieser Kurve, also die Bahnbestimmung, wesentlich von diesem Abstand $G_2 g$ ab. — Man kann noch weiter gehen und aus der Lage des Punktes G_2 zum größten Kreis $G_1 G_3$ einen Schluß auf die Entfernung des Planeten von der Sonne machen. Die beiden Linien $E_2 C_2$ und Qq gehören derselben Ebene SE_2C_2 an und schneiden sich in R; der Winkel, den sie in R miteinander bilden, ist der Unterschied ihrer Richtungen und folglich gleich dem Bogen $G_2 g$ der Sphäre. Ist nun

1. $r_2 > R_2$, d. h. ist zur Zeit der mittleren Beobachtung der Planet weiter von der Sonne entfernt, als die Erde, so wird nach obigem Satz $QE_2 > qC_2$ und folglich muß R in der Richtung von E_2 nach C_2 liegen und der Winkel, den E_2C_2 mit der Ebene der Ekliptik bildet, muß größer sein, als der Winkel, den Qq mit der Ekliptik bildet oder der Bogen E_2G_2 muß größer sein als der Bogen E_2g der Sphäre, d. h. G_2 muß auf derjenigen Seite des größten Kreises G_1G_3 liegen, wo der Erdort E_2 *nicht* ist, also auf derjenigen Seite, wo der 180° davon verschiedene Sonnenort S_2 liegt oder »die Kurve $G_1G_2G_3$ ist gegen den Teil der Ekliptik wo sich die Sonne befindet konvex«. Ist

2. $r_2 < R_2$, d. h. ist der Planet der Sonne näher als die Erde, so wird $QE_2 < qC_2$ und folglich muß R in der Richtung von C_2 nach E_2 liegen und der Winkel, den E_2C_2 mit der Ekliptik bildet, wird kleiner als der Winkel, den Qq damit bildet, oder der Bogen E_2G_2 der Sphäre ist kleiner als E_2g, d. h. G_2 liegt auf der Seite des größten Kreises G_1G_2, wo sich E_2 befindet, also auf der entgegengesetzten wie der mittlere Sonnenort oder »die Kurve $G_1G_2G_3$ ist gegen den Teil der Ekliptik, wo sich die Sonne befindet, konkav«. Ist

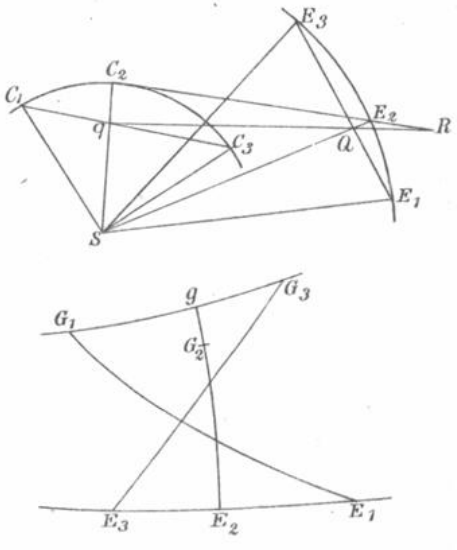


Fig. 38.

3. $r_2 = R_2$, d. h. steht der Komet ebenso weit von der Sonne ab, wie die Erde, so wird $QE_2 = qC_2$; da nun $SE_2 = SC_2$, so folgt

$$Sq : SC_2 = SQ : SE_2,$$

d. h. E_2C_2 und Qq sind einander parallel oder G_2 fällt in den größten Kreis G_1G_3.

Offenbar gelten alle diese Überlegungen auch umgekehrt und wir erhalten daher den schönen und wichtigen Satz, den *Lambert* 1771 entdeckt hat und der die Wurzel der direkten Bahnbestimmungsmethoden ist*):

Wenn man auf der scheinbaren Bahn eines Planeten oder Kometen zwei Punkte in nicht zu großer Entfernung voneinander annimmt und durch sie einen größten Kreis legt, so ist das Gestirn weiter von der Sonne entfernt als die Erde, wenn die zwischenliegenden Punkte auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Örter der Sonne und im entgegengesetzten Falle ist es näher. Oder:

Die Kurve der scheinbaren Bahn eines Gestirns, das weiter von der Sonne entfernt ist, als die Erde, ist stets konvex gegen den Teil der Ekliptik, wo gleichzeitig die Sonne steht; und die Kurve eines Gestirns, das näher an der Sonne steht, als die Erde, ist stets konkav gegen den Teil der Ekliptik, wo gleichzeitig die Sonne steht. An der Stelle, wo das Gestirn dieselbe Entfernung von der Sonne hat wie die Erde, hat also die Kurve der scheinbaren Bahn einen Wendepunkt.

*) *Lambert*, Observations sur l'orbite apparente des Comètes. Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin 1771. (Ostwalds Klassiker Nr. 133.)

Die Analyse, die zu diesem Satz geführt hat, gestattet noch weiter zu gehen, nämlich einerseits bis zur Bestimmung der Entfernung des Gestirns von der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung, andererseits zur Aufstellung einer Beziehung zwischen den geozentrischen Entfernungen des Gestirns zu den Zeiten der ersten und dritten Beobachtung. Erstere ist von Lambert angedeutet und von Lagrange*) genauer ausgeführt worden und liegt versteckt auch der von Gauß gegebenen Lösung des Planetenproblems zugrunde. Letztere ist von Lambert durchgeführt worden und bildet den Angelpunkt der Olbersschen Methode zur Lösung des Kometenproblems. Es erleichtert die Einsicht in die erwähnten Methoden, wenn wir die genannten Punkte schon hier weiter ausführen.

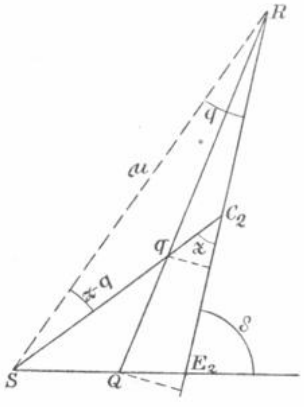


Fig. 39.

Es ist ohne weiteres klar, daß der sphärische Bogen $G_2 g$ aus den gegebenen geozentrischen Koordinaten des Gestirns und der Sonne durch ein einfaches trigonometrisches Verfahren bestimmt werden kann, wie später auszuführen sein wird. Damit ist, wie schon auseinandergesetzt, in dem ebenen Dreieck QE_2R der Winkel bei R bekannt geworden. Außerdem kennt man in diesem Dreieck den Winkel QE_2R = Bogen E_2G_2 und die Strecke QE_2 aus der als bekannt anzunehmenden Theorie der Erdbewegung. Das Dreieck ist also bestimmt und gibt durch Auflösung die Strecken E_2R und QR. Nun ist weiter in den ebenen Dreiecken RqC_2 und RQE_2 und nach den oben angegebenen Ausdrücken für die Pfeile qC_2 und QE_2:

$$\frac{Rq}{RQ} = \frac{qC_2 \sin SC_2E_2}{QE_2 \sin SE_2C_2} = \frac{SE_2^3}{SC_2^3}$$

und ebenso

$$\frac{RC_2}{RE_2} = \frac{qC_2 \sin SqQ}{QE_2 \sin SQq} = \frac{qC_2}{QE_2} \cdot \frac{SQ}{Sq} = \frac{SE_2^3}{SC_2^3}.$$

Wird also auf der Strecke RE_2 der Punkt C_2 so bestimmt, daß dieser Gleichung genügt wird, so ist damit SC_2 oder die heliozentrische Entfernung des Gestirns ermittelt. Die genannte Bestimmung von C_2 bildet also den Kern des Problems. Wir werden jetzt zeigen, daß sie identisch ist mit der Auflösung der sogenannten Gaußschen Gleichung (in anderer Form schon bei Lagrange**)), die, wie wir später sehen werden, im Mittelpunkt der Bahnbestimmung steht. Nennt man ϱ_2 die geozentrische Entfernung des Gestirns und k die Entfernung RE_2, so wird obige Bedingung:

$$\frac{k - \varrho_2}{k} = \frac{R_2^3}{r_2^3} \quad \text{oder} \quad \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)^2 = \left(\frac{\varrho_2}{k}\right)^2. \qquad 4)$$

Nimmt man hierzu aus Dreieck SE_2C_2, den bekannten Winkel bei E_2 gleich $180^\circ - \delta$ setzend:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2 \cos\delta,$$

*) *Lagrange*, Oeuvres IV, p. 472.
**) Ebendaselbst p. 469.

so kommt aus der Verbindung beider Gleichungen eine Gleichung achten Grades, aus der r_2 zu ermitteln ist, nämlich:

$$R_2^2 + k^2\left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)^2 + 2R_2k\left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)\cos\delta - r_2^2 = 0\,.$$

Sie reduziert sich auf den siebenten Grad, da sie offenbar durch $r_2 = R_2$ befriedigt wird. Mittels dieser Gleichung wird das Bahnbestimmungsproblem gelöst.

Hält man die mittlere Beobachtung fest, also r_2, R_2 und E_2C_2, so bleibt nach obiger Gleichung, die man so schreiben kann:

$$\frac{RE_2 - C_2E_2}{RE_2} = \frac{R_2^3}{r_2^3} = \text{const.}$$

auch RE_2 konstant, d. h. der Punkt R ändert seine Lage nicht. Wie also auch die beiden äußeren Beobachtungen gewählt werden mögen, die Linie Qq geht immer durch denselben Punkt R von E_2C_2 (Satz von Lehmann-Filhés*)).

Wir kommen jetzt zu dem oben berührten zweiten Punkt. Macht man die wie wir wissen sehr nahe richtige Annahme, daß die Punkte Q und q mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf den Sehnen E_1E_3 bzw. C_1C_3 sich bewegen, so ist, wie auseinandergesetzt, die Projektion des geozentrischen Ortes von q an die Sphäre der größte Kreis G_1gG_3 (Fig. 37), dessen Bogen $G_1g = \omega_3$ und $gG_3 = \omega_1$ bekannt sind; q selbst beschreibt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit die Strecke $C_1'C_3'$, deren Endpunkte die Endpunkte der geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung sind. Werden die Zwischenzeiten von der ersten zur zweiten bzw. von der zweiten zur dritten Beobachtung τ_3 und τ_1 genannt, so wird

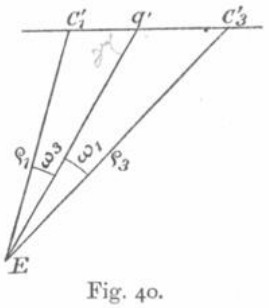


Fig. 40.

$$\frac{C_1'q'}{q'C_3'} = \frac{\tau_3}{\tau_1}\,;$$

ferner ist

$$\frac{C_1'q'}{\varrho_1} = \frac{\sin\omega_3}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{q'C_3'}{\varrho_3} = \frac{\sin\omega_1}{\sin\gamma}\,,$$

(γ = Winkel bei q') also:

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_1}\,\frac{\tau_1}{\tau_3}\,.$$

Dies ist die unter dem Namen der Olbersschen bekannte Gleichung, die aber bereits Lambert**) aufgestellt hat.

76. Die Formulierung des Lambertschen Satzes von Bruns. Durch Einführung des Begriffes der Krümmung der scheinbaren Bahn (siehe Nr. 8) ist Bruns zu einer schärferen Formulierung des Lambertschen Satzes gelangt (Astr. Nachr. Bd. 118, S. 243). Sind x, y, z, r, l, b die heliozentrischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten eines um die Sonne laufenden Himmelskörpers, ξ, η, ζ, ϱ, λ, β die

*) *Lehmann-Filhés*, Astr. Nachr. Bd. 98, S. 307; *Sidler*, Astr. Nachr. Bd. 99, S. 139.
**) Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 121.

entsprechenden geozentrischen Koordinaten und X, Y, Z, R, L, B die gleichzeitigen Koordinaten der Sonne, so ist

$$\xi = x + X, \qquad \eta = y + Y, \qquad \zeta = z + Z.$$

Macht man die Annahme, daß der Planet (mit verschwindend kleiner Masse) einerseits und der Schwerpunkt Erde-Mond andererseits in Ellipsen um die Sonne laufen, so wird:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3},$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k^2(1+m)X}{R^3}, \qquad \frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{k^2(1+m)Y}{R^3}, \qquad \frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{k^2(1+m)Z}{R^3},$$

wo m die vereinigte Masse von Erde und Mond darstellt, und folglich:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} - \frac{k^2(1+m)X}{R^3}$$

oder wenn $x = \xi - X$ eingetragen wird:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k^2\xi}{r^3} - k^2X\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Wird zur Abkürzung

$$\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3} = P$$

gesetzt, so folgt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k^2\xi}{r^3} - k^2XP$$

und analog für die anderen Koordinaten. Nennt man V die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung in der geozentrischen Bahn und beachtet, daß die Richtungskosinus in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ durch

$$a = \frac{\xi}{\varrho}, \qquad b = \frac{\eta}{\varrho}, \qquad c = \frac{\zeta}{\varrho}$$

gegeben sind, wo ϱ der konstante Kugelradius ist, so wird nach Seite 17 die Krümmung K in diesem Punkte gefunden durch

$$\varrho^3V^3K = \begin{vmatrix} \xi, & \frac{d\xi}{dt}, & -\frac{k^2\xi}{r^3} - k^2XP \\ \eta, & \frac{d\eta}{dt}, & -\frac{k^2\eta}{r^3} - k^2YP \\ \zeta, & \frac{d\zeta}{dt}, & -\frac{k^2\zeta}{r^3} - k^2ZP \end{vmatrix}$$

oder nach bekannten Determinantensätzen:

$$\varrho^3V^3K = -\begin{vmatrix} \xi, & \frac{d\xi}{dt}, & X \\ \eta, & \frac{d\eta}{dt}, & Y \\ \zeta, & \frac{d\zeta}{dt}, & Z \end{vmatrix} k^2P$$

oder wenn die Richtungskosinus wieder eingetragen werden:

$$\varrho V^3 K = - \begin{vmatrix} a, & \frac{da}{dt}, & X \\ b, & \frac{db}{dt}, & Y \\ c, & \frac{dc}{dt}, & Z \end{vmatrix} k^2 P.$$

Nach Seite 16 geht die geodätische Tangente durch die Punkte a, b, c und $\frac{1}{V}\frac{da}{dt}$, $\frac{1}{V}\frac{db}{dt}$, $\frac{1}{V}\frac{dc}{dt}$ und der Pol derselben hat die Richtungskosinus

$$a_0 = \frac{1}{V}\left(b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt}\right), \quad b_0 = \frac{1}{V}\left(c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt}\right), \quad c_0 = \frac{1}{V}\left(a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt}\right),$$

folglich wird:

$$\varrho V^2 K = - k^2 P\left(\frac{X}{R}a_0 + \frac{Y}{R}b_0 + \frac{Z}{R}c_0\right) R.$$

Nennt man F den Bogenabstand der Sonne von der geodätischen Tangente, so wird

$$\frac{X}{R}a_0 + \frac{Y}{R}b_0 + \frac{Z}{R}c_0 = \sin F$$

und daher:

$$\varrho V^2 K = - k^2 P R \sin F. \qquad \text{A.}$$

Sind F und K vom selben Zeichen, d. h. wendet nach den Festsetzungen Seite 17 die Kurve ihre konkave Seite der Sonne zu, so muß nach dieser Gleichung P negativ sein, d. h. $r\sqrt[3]{1+m} < R$; haben F und K verschiedenes Zeichen, d. h. wendet die Kurve ihre konvexe Seite der Sonne zu, so folgt $r\sqrt[3]{1+m} > R$. Die Gleichung A. ist somit die analytische Formulierung des Lambertschen Satzes. Für eine exakte Anwendung derselben ist zu beachten, daß die Koordinaten ξ, η, ζ, X, Y, Z sich nicht auf den Mittelpunkt der Erde, sondern auf den Schwerpunkt von Erde und Mond beziehen.

Schreibt man,

$$-\frac{V^2 K}{k^2 R \sin F} = Q$$

setzend, die Gleichung A. in der Form:

$$Q\varrho = \frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3},$$

so hat man wieder in Verbindung mit

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho\cos\delta$$

die Gaußsche Gleichung achten Grades. Wir werden später sehen, daß es möglich ist, die Krümmung K zu berechnen. Dann kann die Gleichung unmittelbar zur Grundlage einer Bahnbestimmungsmethode gemacht werden (Siehe Nr. 108).

Abschnitt XVIII.

Die scheinbare Bahn.

77. Die scheinbare Bahn und ihre ausgezeichneten Punkte. Wir haben bis jetzt durch den Lambertschen Satz das allgemeine Resultat über die Kurve der scheinbaren Bahn, daß sie bei einem Himmelskörper, der seine Bahn ganz außerhalb der Erdbahn beschreibt (also z. B. bei allen kleinen Planeten) stets ihre konvexe Seite dem gleichzeitigen Sonnenort zukehrt; daß sie ferner bei einem Planeten, der ganz innerhalb der Erdbahn bleibt (also bei den unteren Planeten) stets ihre konkave Seite dem Sonnenort zuwendet; daß sie endlich bei einem Kometen, der zuerst außer- dann innerhalb der Erdbahn sich befindet, zuerst konvex dann konkav gegen die Sonne wird, also einen Wendepunkt aufweist. Man muß bei Feststellung der Krümmung natürlich vom scheinbaren Ort des Himmelskörpers auf dem *nächsten* d. h. auf dem Weg, der $< 180^\circ$ ist, zum zugehörigen Sonnenort gehen.

Eine allgemeine Theorie der scheinbaren Bahn unter Zugrundelegung der wahren, wie sie schon von Lambert vorgeschlagen wurde, bietet bedeutende Schwierigkeiten, deren Überwindung zum Nutzen in keinem Verhältnisse stünde. Wir beschränken uns daher auf folgende Darlegungen. Die geozentrischen Koordinaten λ, β, ϱ eines Planeten, bezogen auf die Ekliptik, hängen mit der heliozentrischen Bewegung der Erde und des Planeten durch die Gleichungen 23) (Seite 32) zusammen:

$$\begin{aligned} \varrho\cos\beta\cos(\lambda-\Omega) &= r\cos u &&+ R\cos U \\ \varrho\cos\beta\sin(\lambda-\Omega) &= r\sin u\cos i &&+ R\sin U \\ \varrho\sin\beta &= r\sin u\sin i \end{aligned} \qquad 1)$$

wo u das Argument der Breite des Planeten, U die Länge der *Sonne*, gezählt vom Knoten der Planetenbahn, bedeuten. Wir werden bald die Differenziale von λ und β nötig haben und wollen daher die einfachsten Ausdrücke hierfür vorweg aufstellen.

Wird 1) total differenziert, wobei die Elemente der Planetenbahn konstant gehalten werden, so folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda-\Omega)\cos\beta\,d\varrho - \varrho\sin(\lambda-\Omega)\cos\beta\,d\lambda - \varrho\cos(\lambda-\Omega)\sin\beta\,d\beta &= d(r\cos u + R\cos U) \\ \sin(\lambda-\Omega)\cos\beta\,d\varrho + \varrho\cos(\lambda-\Omega)\cos\beta\,d\lambda - \varrho\sin(\lambda-\Omega)\sin\beta\,d\beta &= d(r\sin u\cos i + R\sin U) \\ \sin\beta\,d\varrho \qquad\qquad + \varrho\cos\beta\,d\beta &= d(r\sin u\sin i) \end{aligned}$$

und hieraus durch eine leicht erkenntliche Operation:

$$\begin{aligned} \varrho\cos\beta\,d\lambda &= -\sin(\lambda-\Omega)\quad d(r\cos u + R\cos U) + \cos(\lambda-\Omega)\,d(r\sin u\cos i + R\sin U) \\ \varrho\,d\beta &= -\cos(\lambda-\Omega)\sin\beta\,d(r\cos u + R\cos U) - \sin(\lambda-\Omega)\sin\beta\,d(r\sin u\cos i + R\sin U) \\ &\qquad + \cos\beta\,d(r\sin u\sin i)\,. \end{aligned} \qquad 2)$$

Hierin ist zu setzen:

$$\begin{aligned} d(r\sin u) &= d\big(r\sin(\omega+v)\big) = \sin u\,dr + r\cos u\,dv \\ d(r\cos u) &= d\big(r\cos(\omega+v)\big) = \cos u\,dr - r\sin u\,dv \end{aligned}$$

oder wenn in der konstanten Bahn nach Seite 149

$$dr = \frac{r^2}{p}\, e \sin v\, dv$$

gesetzt wird, nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} d(r\sin u) &= \frac{r^2}{p}(\cos u + e\cos\omega)\, dv = \frac{k}{\sqrt{p}}(\cos u + e\cos\omega)\, dt \\ d(r\cos u) &= -\frac{r^2}{p}(\sin u + e\sin\omega)\, dv = -\frac{k}{\sqrt{p}}(\sin u + e\sin\omega)\, dt. \end{aligned} \qquad 3)$$

Für die Sonnenbahn wird ebenso, wenn E deren Exzentrizität und Ω der Abstand des Perigäums vom Knoten der Planetenbahn genannt wird:

$$\begin{aligned} d(R\sin U) &= \frac{R^2}{P}(\cos U + E\cos\Omega)\, dV = \frac{k}{\sqrt{P}}(\cos U + E\cos\Omega)\, dt \\ d(R\cos U) &= -\frac{R^2}{P}(\sin U + E\sin\Omega)\, dV = -\frac{k}{\sqrt{P}}(\sin U + E\sin\Omega)\, dt. \end{aligned} \qquad 4)$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir die scheinbare Bewegung eines äußeren Planeten, also den Fall $r > R$, etwa eines kleinen Planeten, in einzelnen Phasen verfolgen. Man entnimmt den Gl. 1)

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \frac{r\sin u\cos i + R\sin U}{r\cos u + R\cos U} \qquad 5)$$

und ersieht, daß für $u = U$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \frac{r\cos i + R}{r + R}\operatorname{tg} U$$

wird, d. h. im Falle einer kleinen Neigung wird $\lambda - \Omega$ nahe gleich U, da $\sin(\lambda - \Omega)$ und $\cos(\lambda - \Omega)$ beide positive Faktoren, also gleiches Zeichen mit $\sin U$ und $\cos U$ haben; von der Erde aus gesehen erscheint dann der Planet in derselben Richtung wie die Sonne. Man nennt diese Phase die *Konjunktion* des Planeten.

Für $u = 180^\circ + U$ wird:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \frac{R - r\cos i}{R - r}\operatorname{tg} U.$$

Hier haben $\sin(\lambda - \Omega)$ und $\cos(\lambda - \Omega)$ beide entgegengesetztes Zeichen wie $\sin U$ bzw. $\cos U$ und es folgt daher

$$\lambda - \Omega \text{ nahe gleich } 180^\circ + U,$$

d. h. von der Erde aus stehen Sonne und Planet in entgegengesetzter Richtung. Man nennt diese Phase die *Opposition* des Planeten. Um die Bewegungsrichtung während dieser beiden Phasen zu erkennen, bilden wir nach 2) 3) 4) das Differenzial $d\lambda$, wobei wir der Einfachheit halber Planeten- und Sonnenbahn als Kreisbahnen mit den Radien r und R annehmen wollen. Es erscheint, wenn die erste Formel in 2) noch mit $\varrho\cos\beta$ multipliziert und 1) beachtet wird:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^2\cos\beta^2}{k}\frac{d\lambda}{dt} &= (r\sin u\cos i + R\sin U)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sin u + \frac{1}{\sqrt{R}}\sin U\right) + \\ &+ (r\cos u + R\cos U)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\cos u\cos i + \frac{1}{\sqrt{R}}\cos U\right). \end{aligned}$$

Wird noch $i = 0$ gesetzt, so gibt dies leicht:

$$\frac{\varrho^2 \cos\beta^2}{k} \frac{d\lambda}{dt} = (\sqrt{r} + \sqrt{R}) + \left(\frac{R}{\sqrt{r}} + \frac{r}{\sqrt{R}}\right) \cos(U - u)$$

oder für $R = 1$

$$\frac{\varrho^2 \cos\beta^2}{k} \frac{d\lambda}{dt} = (1 + \sqrt{r}) + \left(r + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \cos(U - u). \qquad 6)$$

Hieraus sieht man, daß $d\lambda$ sicher positiv ist, der Planet sich also in derselben Richtung wie die Sonne bewegt, wenn $u - U$ in der Nähe von 0° liegt; also in der Konjunktion ist der Planet *rechtläufig*. Ist dagegen $u - U$ in der Nähe von 180°, so wird obiger Ausdruck negativ, also λ nimmt mit wachsender Zeit ab: der Planet ist in der Opposition *rückläufig*. Wenn $d\lambda$ von einem positiven zu einem negativen Wert übergeht oder umgekehrt, muß es durch Null hindurchgehen; $d\lambda = 0$ entspricht einem Stillstehen des Planeten in Länge und einem Maximal- oder Minimalpunkt der Kurve. Die scheinbare Kurve muß also solche Stellen aufweisen, wo wie man sich ausdrückt der Planet *stationär* ist, und zwar wird an einer derselben die rechtläufige Bewegung zu einer rückläufigen (λ ein Maximum) und an der darauffolgenden die rückläufige zu einer rechtläufigen (λ ein Minimum). Zwischen beiden liegt die Opposition. Von einer Konjunktion mit der Sonne kommend wird also der Planet, wenn er eine gewisse nachher zu bestimmende Entfernung von der Sonne in rechtläufiger Bewegung erreicht hat, stationär, dann rückläufig, wieder stationär und geht dann in rechtläufiger Bewegung einer neuen Konjunktion entgegen. Wenn die Neigung i von Null verschieden ist, *kann* hierbei der Fall eintreten, daß der zweite rechtläufige Zweig den vorher beschriebenen rechtläufigen oder den rückläufigen *schneidet*, d. h. daß die Kurve einen *Doppelpunkt* bekommt, zwischen dessen Elementen eine *Schleife* liegt (Form Fig. 41); ein solcher *muß* aber nicht auftreten, denn die Bewegung kann auch in Form Fig. 42 sich vollziehen. Wir werden nachher hierüber einige Sätze kennen lernen. Um das Eintreten des stationären Zustandes zu studieren, bilden und diskutieren wir die Gleichung $d\lambda = 0$. Aus 6) folgt, wenn $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ gesetzt wird:

Fig. 41.

Fig. 42.

$$\cos(U - u) = -\frac{1 - \sqrt{r}}{r + \frac{1}{\sqrt{r}}}.$$

Sobald also $\pm(U - u)$ einen bestimmten Betrag, der größer als 90° ist, erreicht hat, beginnt der Wechsel in der Bewegungsrichtung. Für eine Kreisbahn ist dieser Betrag konstant; für eine Ellipse wird er um Größen von der Ordnung der Exzentrizität je nach der Lage des Planeten in der Ellipse variieren; im Aphel wird $U - u$ kleiner sein, als im Perihel. Überhaupt je entfernter der Planet ist, desto näher rückt $\pm(U - u)$ an 90° heran. Das obere Zeichen entspricht dem stationären Zustand vor der Opposition, das untere dem nach derselben. Man könnte hieraus offenbar die Dauer der retrograden Bewegung, dann die Zeit von einer Opposition

zur anderen usf. ableiten, doch lohnt es sich nicht auf diese Verhältnisse einzugehen, da sie für in der Ekliptik gelegene Kreisbahnen sich von selbst ergeben, für allgemein gelegene Ellipsen aber zu so komplizierten Ausdrücken führen, daß sie praktisch wertlos sind.

78. Die Vorausberechnung der Oppositionszeit. Da man die Ephemeriden der kleinen Planeten gewöhnlich über den Zeitraum von 20—30 Tagen vor und nach der Opposition erstreckt, wofür die Beobachtungsbedingungen die günstigsten sind, so muß man imstande sein, die Zeit der Opposition wenigstens genähert im voraus anzugeben, während sich das genaue Datum dann aus der Ephemeride selbst mit Leichtigkeit ergibt. Wir haben schon hervorgehoben, daß eine allgemeine Formel für das Oppositionsdatum wenig nützen würde, da sie notwendig sehr kompliziert wäre. Man kann aber durch sukzessive Näherung rasch zum Ziele kommen. Man wird zuerst das Datum feststellen, für welches die *mittlere Länge* des Planeten gleich der Länge der Erde wird; man erhält es durch Addition der synodischen Umlaufszeit des Planeten zum Datum der vorhergehenden Opposition; für die bei den kleinen Planeten in Betracht kommenden mittleren Bewegungen μ enthält folgendes Täfelchen die genäherten synodischen Umlaufszeiten, berechnet aus

$$T = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{\mu_0 - \mu}; \quad (\mu_0 = \text{mittl. tägl. Bew. der Erde})$$

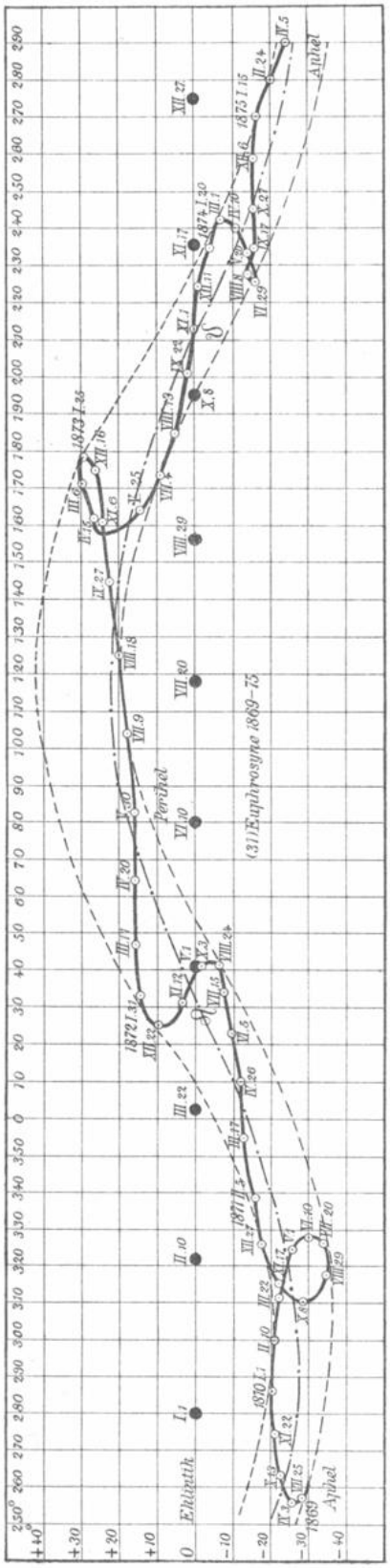
μ	T
400″	1 Jahr 47 Tage
500	1 » 60 »
600	1 » 75 »
700	1 » 90 »
800	1 » 106 »
900	1 » 124 »
1000	1 » 144 »
1100	1 » 164 »
1200	1 » 187 »
1300	1 » 211 »

Für dieses Datum rechnet man die mittlere Anomalie M des Planeten und daraus die wahre Anomalie v, am bequemsten und mit hier ausreichender Genauigkeit mittels des ersten Gliedes der Reihenentwickelung

$$v - M = 2e \sin M + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2M + \cdots$$

worin e in Sekunden ausgedrückt einzusetzen ist. Indem man diesen Betrag $v - M = C$ als konstant annimmt, sucht man jetzt durch Gleiten in der Sonnenephemeride den Tag, für welchen $\Omega + \omega + M + C$ gleich der Erdlänge wird und berechnet dann für dieses und für ein einige Tage später liegendes Datum die heliozentrischen Längen l und l_1 mittels:

$$\begin{aligned} \text{Datum } t: &\quad \operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + M + C) \\ » \quad t_1: &\quad \operatorname{tg}(l_1 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + M_1 + C). \end{aligned}$$



—— Geozentrische Bahn. —·—·—· Heliozentrische Bahn. — — — — Grenzkurven des Zodiakus.

Fig. 43.

Sind L und L_1 die zugehörigen Erdlängen, so wird das Oppositionsdatum t_0 gefunden aus:

$$t_0 = t + \frac{(l - L)\,(t_1 - t)}{(L_1 - L) - (l_1 - l)}$$

oder

$$t_0 = t_1 + \frac{(l_1 - L_1)\,(t_1 - t)}{(L_1 - L) - (l_1 - l)}\,.$$

Stellt sich $t_0 - t$ oder $t_0 - t_1$ noch als groß heraus, so ist das Verfahren zu wiederholen, indem man für t das gewonnene t_0 nimmt.

79. Doppelpunkte und Schleifenbildung. Wir machen noch einige allgemeine Bemerkungen über Doppelpunkte und Schleifenbildung. Aus der Gleichung

$$\varrho \sin\beta = r \sin u \sin i$$

folgt, daß für Werte von u in der Nähe von 0° oder 180°, also wenn der Planet sich in der Nähe seiner Knoten befindet, die Breite β sich rasch ändert und von positiven zu negativen Werten bzw. umgekehrt übergeht. Hier wird also die neu einsetzende rechtläufige Bewegung in nördlicheren bzw. südlicheren Breiten stattfinden als die vorausgegangene; also: »*bei Oppositionen in der Nähe der Knoten findet keine Doppelpunktbildung statt*«. Ist dagegen u in der Nähe von 90° oder 270°, so wird β für $u = 90^\circ \mp \nu$ bzw. $270^\circ \mp \nu$ nahe denselben Wert erhalten, also die Möglichkeit einer Doppelpunktsbildung am meisten geboten sein. Tritt für $u = 90^\circ \mp \nu$ ein Doppelpunkt ein, so wird für die Werte von u zwischen $90^\circ - \nu$ und $90^\circ + \nu$ β *größer* sein, als für diese Werte selbst; somit: »*der Doppelpunkt liegt im allgemeinen der Ekliptik näher als die Schleife*«. Knüpfen wir ferner an die Darlegungen und die Figur der Nr. 75 an, so wird folgendes ersichtlich. Das Eintreten eines Doppelpunktes besagt, daß von den zwei Erdörtern E_1 und E_3 der Planet in derselben Richtung gesehen wird, d. h. daß $E_1 C_1$ und $E_3 C_3$ parallel sind. Die beiden Sehnen

$E_1 E_3$ und $C_1 C_3$ liegen also in einer Ebene, der auf der Sphäre ein bestimmter größter Kreis entspricht, der durch den Doppelpunkt hindurchgeht. Nimmt man nun einen beliebigen dazwischen liegenden Ort $E_2 C_2$, so wird für diesen die Verbindungslinie Qq der Sehnenschnittpunkte ebenfalls der genannten Ebene und der entsprechende Punkt g der Sphäre dem bestimmten größten Kreis angehören. Nun bewegen sich innerhalb des Geltungsbereiches aller dieser Betrachtungen die Punkte Q und q mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf den Sehnen $E_1 E_3$ bzw. $C_1 C_3$. Die Linien Qq sind somit alle parallel zu $E_1 C_1$ und $E_3 C_3$, gehen an der Sphäre also alle durch denselben Punkt g, der infolgedessen notwendig mit dem Doppelpunkt $G_1 G_3$ zusammenfällt. Da aber q in der Ebene $S C_2 E_2$, also g im größten Kreis $G_2 E_2$ liegt, so folgt: »*Die größten Kreise, welche die Punkte einer Schleife mit den zugehörigen Sonnenorten verbinden, gehen alle durch den Doppelpunkt*« (Satz von Klinkerfues).

Zur Verdeutlichung der besprochenen Verhältnisse ist in der Figur 43 (Seite 248) die scheinbare Bahn von (31) Euphrosyne im System der Ekliptik für den vollen Umlauf 1869—1875 gezeichnet. Die Berechnung der Längen und Breiten ist in 40-tägigen Intervallen nach den Elementen

Epoche 1873 März 9.0

$M_0 = 49°.33$		$\varphi = 12°.86$
$\omega = 62.25$	1870.0	$\mu = 634''.5$
$\Omega = 31.46$		$\log a = 0.4984$
$i = 26.45$		

ausgeführt worden. Die einzelnen Intervalle sind durch kleine Kreise mit beigeschriebenem Datum begrenzt. Die Sonnenörter sind ebenfalls von 40 zu 40 Tagen durch Vollkreise gekennzeichnet. Die charakteristischen Formen der Schleifenbildung, die Schnelligkeit der Bewegung, der Lambertsche Satz usf. treten deutlich zu Tage.

80. Der Zodiakus der Bahnen. Alle geozentrischen Örter, die ein Planet, dessen Bahn gegen die Ekliptik geneigt ist, einnehmen kann, liegen in einer Zone, die *Gauß**) den *Zodiakus* der Bahn genannt hat; die Grenzkurven desselben lassen sich durch geometrische Überlegungen (Tangentialebenen an die Erd- und Planetenbahn) bestimmen, am kürzesten ist aber folgender analytischer Weg. Aus den Gleichungen 2) 3) 4) ergibt sich, daß $d\lambda$ und $d\beta$ folgende Form haben:

$$d\lambda = g\,du + G\,dU, \qquad d\beta = h\,du + H\,dU$$

und daß hierin:

$$\varrho \cos\beta\, g = \sin(\lambda - \Omega)\frac{r^2}{p}(\sin u + e\sin\omega) + \cos(\lambda - \Omega)\cos i\frac{r^2}{p}(\cos u + e\cos\omega)$$

$$\varrho h = \cos(\lambda - \Omega)\sin\beta\frac{r^2}{p}(\sin u + e\sin\omega) - \sin(\lambda - \Omega)\sin\beta\cos i\frac{r^2}{p}(\cos u + e\cos\omega)$$
$$+ \cos\beta\sin i\frac{r^2}{p}(\cos u + e\cos\omega)$$

$$\varrho\cos\beta\, G = \sin(\lambda - \Omega)\frac{R^2}{P}(\sin U + E\sin\Omega) + \cos(\lambda - \Omega)\frac{R^2}{P}(\cos U + E\cos\Omega)$$

$$\varrho H = \cos(\lambda - \Omega)\sin\beta\frac{R^2}{P}(\sin U + E\sin\Omega) - \sin(\lambda - \Omega)\sin\beta\frac{R^2}{P}(\cos U + E\cos\Omega).$$

*) *Gauß*, Über die Grenzen der geozentrischen Örter der Planeten. Werke Bd. VI, S. 106 u. 194.

Läßt man nun u und U sich gleichzeitig so ändern, daß

$$\frac{du}{dU} = -\frac{G}{g}$$

ist, so ist $d\lambda$ ständig Null, d. h. λ bleibt ungeändert, β aber wird so lange zu- oder abnehmen, bis es einen größten oder kleinsten Wert erreicht hat. Dies tritt ein, wenn $d\beta = 0$ wird, d. h. wenn

$$-h\frac{G}{g} + H$$

verschwindet. Folglich ist für ein konstantes λ

$$Hg - Gh = 0 \qquad 7)$$

die Bedingungsgleichung dafür, daß β ein Minimum oder Maximum werde. Setzt man alle möglichen Werte von λ in diese Gleichung ein und löst sie nach β auf, so erhält man die Punkte der Grenzkurven des Zodiakus. Bildet man unter Benutzung obiger Werte von g, G, h, H die Gleichung 7), so kommt nach einiger Reduktion:

$$\begin{aligned}&\sin\beta\,(\sin u + e\sin\omega)(\cos U + E\cos\Omega)\\ &\quad -(\sin\beta\cos i - \cos\beta\sin(\lambda-\Omega)\sin i)(\cos u + e\cos\omega)(\sin U + E\sin\Omega)\\ &\quad +\cos\beta\cos(\lambda-\Omega)\sin i\,(\cos u + e\cos\omega)(\cos U + E\cos\Omega) = 0\end{aligned}$$

oder, wenn mit ϱ multipliziert und 1) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}&r\,(\sin u\,(\sin u + e\sin\omega) + \cos u\,(\cos u + e\cos\omega))(\cos U + E\cos\Omega)\\ &\quad + R\,(\sin U\,(\sin U + E\sin\Omega) + \cos U\,(\cos U + E\cos\Omega))(\cos u + e\cos\omega) = 0\end{aligned}$$

oder mit Beachtung von

$$r = \frac{p}{1+e\cos(u+\omega)}, \qquad R = \frac{P}{1+E\cos(U-\Omega)}:$$

$$p\,(\cos U + E\cos\Omega) + P\,(\cos u + e\cos\omega) = 0\,. \qquad 8)$$

Dies ist die gesuchte Bedingungsgleichung in ihrer einfachsten Form. Auf eine allgemeine Diskussion derselben, welche alle Fälle der gegenseitigen Lage der Planeten- oder Kometenbahn gegen die Erdbahn umfaßt, gehen wir hier nicht ein, sondern beschränken uns auf den Fall einer die Erdbahn völlig umschließenden Bahn, wo schon die Anschauung lehrt, daß die Grenzkurven tatsächlich existieren. Zu jedem Wert von u liefert die Gl. 8) zwei Werte von U, nämlich U_1 und U_2; die zu jedem Paar u, U_1 und u, U_2 gehörigen geozentrischen Örter berechnet nach 1) (S. 244) sind die Punkte der nördlichen bzw. südlichen Grenzkurve. Für U selbst ergeben sich Grenzen, außerhalb welcher imaginäre Werte von u aus 8) hervorgehen; diese Grenzen, vermehrt um 180°, schließen die Erdörter ein, von denen aus der Planet an den Grenzkurven seines Zodiakus wahrgenommen werden kann, wo also die scheinbare Bahn diese Grenzkurven berührt. Zur Erläuterung habe ich den Zodiakus von (31) Euphrosyne berechnet, also desselben Planeten, dessen geozentrischen Lauf wir schon oben durch mehrere Jahre hindurch verfolgt haben. Die Grundlagen der Rechnung sind die Elemente von

	Euphrosyne:		Sonne:
$\log p$	0.4764		$\log P$ 9.9999
ψ	12° 51.′5		Φ 0° 57.′6
ω	62 15.1		Ω 249 30.3
Ω	31 27.7	1870.0	—
i	26 27.7		—

Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$\cos U = -0.3336 \cos u - 0.0287 ,$$

sodaß die Extreme von $\cos U$ -0.3623 und $+0.3049$ werden. Der Winkel U bewegt sich also einerseits zwischen $72^\circ 15'$ und $111^\circ 15'$, andererseits zwischen $248^\circ 45'$ und $287^\circ 45'$, und somit die Sonnenlängen zwischen $103^\circ 43'$ und $142^\circ 43'$ einerseits und $280^\circ 13'$ und $319^\circ 13'$ andererseits. Die erste Gruppe der U ergibt die südliche, die zweite die nördliche Grenzkurve. Die scheinbare Bahn kann diese Grenzkurven nur während der Zeiten erreichen, zu denen die Sonne zwischen den genannten Längen steht, also zwischen Juli 6 und August 15 die südliche und zwischen Januar 1 und Februar 8 die nördliche Kurve. In jedem Jahr werden je einmal beide Kurven von der scheinbaren Bahn gestreift. Um die Grenzkurven zu erhalten, wird u von 15° zu 15° variiert, damit U gerechnet und schließlich nach 1) λ und β. Nachstehende Tabelle enthält die Resultate.

	Nördliche Kurve		Südliche Kurve	
u	λ	β	λ	β
0°	$10^\circ 13'$	$0^\circ 0'$	$53^\circ 8'$	$0^\circ 0'$
15	23 8	+ 7 48	67 14	+ 6 27
30	37 28	+ 16 37	79 45	+ 11 21
45	53 56	+ 25 49	91 17	+ 14 50
60	73 38	+ 34 9	101 56	+ 17 7
75	96 59	+ 39 58	112 3	+ 18 26
90	120 11	+ 41 35	121 59	+ 18 55
105	147 35	+ 38 40	132 5	+ 18 34
120	169 2	+ 32 23	142 42	+ 17 21
135	188 0	+ 24 30	154 29	+ 15 11
150	202 14	+ 15 45	166 24	+ 11 27
165	215 54	+ 7 30	179 54	+ 6 26
180	228 39	0 0	193 45	0 0
195	241 20	− 6 28	208 37	− 7 27
210	253 19	− 11 46	224 23	− 15 18
225	265 20	− 15 52	241 10	− 22 47
240	277 19	− 18 46	259 25	− 29 9
255	289 17	− 20 25	279 22	− 33 37
270	301 6	− 20 53	300 45	− 35 34
285	312 41	− 20 14	322 40	− 34 32
300	324 1	− 18 27	343 56	− 30 32
315	335 12	− 15 37	3 42	− 24 6
330	346 21	− 11 39	21 47	− 16 8
345	357 45	− 6 29	38 16	− 7 45
360	10 13	0 0	53 8	0 0

In obiger Darstellung (Fig. 43, Seite 248) des geozentrischen Laufes von Euphrosyne 1869—1875 sind diese Kurven eingetragen und man wird bei deren Betrachtung die obigen Bemerkungen bestätigt finden.

Man kann natürlich auch die AR und Dekl. der Punkte der Grenzkurven berechnen; man braucht nur statt der Formeln 1) (Seite 244) die Formeln 1) (Seite 229/30) zu nehmen.

Vierter Teil.

Die Methoden der ersten Bahnbestimmung.

Abschnitt XIX.

Die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen.

81. Feststellung des Problems. Nachdem wir in den vorhergehenden Abschnitten die wahren und die scheinbaren Bahnen der um die Sonne laufenden Himmelskörper für sich behandelt haben, wenden wir uns jetzt zu unserer Hauptaufgabe, aus den durch direkte Beobachtungen bekannt gewordenen scheinbaren Bahnen die wahren abzuleiten. Dies ist das eigentliche Problem der Bahnbestimmung, das aber sogleich näher präzisiert werden kann. Wir wissen, daß ein Kegelschnitt und die Bewegung in ihm durch sechs Stücke, die Bahnelemente, bestimmt ist (Nr. 71), und daß an die Bewegung die zwei Bedingungen geknüpft sind, daß die Flächengeschwindigkeit konstant und von ganz bestimmter, von den Elementen abhängiger Größe sei. Wir werden also, um die nötige Anzahl von Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten bilden zu können, mindestens acht Beobachtungsdaten zur Verfügung haben müssen. Diese werden durch drei vollständige Beobachtungen von Richtungen oder durch drei Punkte der scheinbaren Bahn mit ihren Zwischenzeiten geboten, da jede derselben zwei unabhängige, sphärische Koordinaten liefert. Das zu lösende Problem lautet also: *Aus drei von der Erde aus zu bestimmten Zeiten angestellten Richtungsbestimmungen eines Gestirnes seine wahre Bahn um die Sonne abzuleiten, unter den Voraussetzungen, daß diese ein Kegelschnitt mit dem einen Brennpunkt in der Sonne ist, und die Bewegung in ihm nach dem zweiten und dritten Keplerschen Gesetz erfolgt.*

Daß drei geozentrische Beobachtungen mit den zugehörigen beiden Zwischenzeiten zur Lösung des Problems ausreichen, aber auch nichts Überflüssiges enthalten, überlegt man leicht wie folgt: Die drei Beobachtungen legen drei von bestimmten Punkten, den Lagen der Erde, ausgehende Gerade in ihren Richtungen fest. Eine durch die Sonne gelegte, beliebige Ebene trifft die Geraden in drei Punkten. Durch diese kann im allgemeinen nur ein Kegelschnitt gelegt werden, dessen einer Brennpunkt die Sonne ist, und dessen Elemente also völlig bestimmt sind. Durch die Elemente kann man, wenn der bewegte Körper den Keplerschen Gesetzen folgen soll, die Zeiten berechnen, die er braucht, um vom ersten Punkt zum zweiten und vom

zweiten zum dritten zu gelangen. Nur wenn diese mit den beobachteten Zwischenzeiten übereinstimmen, hat man jene von den unendlich vielen Ebenen durch die Sonne getroffen, welche allen Bedingungen des Problems genügt. Umgekehrt werden die beiden Bedingungen von der Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Zwischenzeiten zur Fixierung der beiden Elemente dienen können, durch welche die Lage einer durch die Sonne gehenden Ebene festgelegt wird.

Diese Analyse weist den Weg, den die Lösung des Problems fast notwendig einschlagen muß; denn man sieht, daß alles auf die Bestimmung der genannten Ebene ankommt, und es bleibt nur die wichtige Entscheidung zu treffen, durch welche Stücke man die Ebene bestimmen, d. h. welche Unbekannte man in das Problem einführen will. Am nächsten bieten sich dar Knoten und Neigung oder geeignete Funktionen derselben, z. B.:

$$h = \operatorname{tg} i \cos \Omega , \qquad g = \operatorname{tg} i \sin \Omega ,$$

weil hierdurch die Bahnebene am unmittelbarsten bestimmt ist. Sodann die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen, wodurch die dritte von selbst gegeben ist, weil durch diese Größen die geozentrischen Polarkoordinaten durch die von den Beobachtungen nicht gebotenen dritten Stücke ergänzt werden. Endlich die heliozentrischen Distanzen, weil aus diesen, wie wir wissen, schließlich die Elemente zu bestimmen sind. Die Entscheidung hängt wesentlich von der Methode ab, durch die man zum Ziel gelangen will, nämlich ob man die Unbekannten durch *direkte* oder durch *indirekte* Rechnung ermittelt. Bei den direkten Methoden werden alle Unbekannten durch *eine* ausgedrückt und diese durch Auflösung einer Endgleichung bestimmt; bei den *indirekten* Methoden geht man von Näherungswerten der Unbekannten aus und variiert diese so lange, bis gewisse Endbedingungen erfüllt sind. Bei ersteren wird es also darauf ankommen, die Unbekannte so zu wählen, daß der Grad der Endgleichung ein möglichst niedriger ist, bei letzteren dagegen wird die Einfachheit der Hypothesenrechnung der ausschlaggebende Faktor sein. Die Entscheidung selbst kann also erst bei der Analyse getroffen werden, zu der wir uns nun wenden. Wir schicken zur Übersicht des Ganges voraus, daß die in letzter Linie gesuchten drei Punkte folgenden Bedingungen genügen müssen:

1. Sie müssen in einer Ebene mit der Sonne liegen.

2. Es ist ein Kegelschnitt durch sie zu legen, der seinen einen Brennpunkt in der Sonne hat.

3. Ist p der Parameter des Kegelschnittes, so müssen die Sektoren zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten Radiusvektor die Inhalte haben:

$$k(t_2 - t_1)\sqrt{p} \text{ und } k(t_3 - t_2)\sqrt{p} ,$$

wo t die Beobachtungszeiten, k die Konstante des Sonnensystems ist.

Die einfachste von diesen Bedingungen ist die der Ebene; sie ist daher unter allen Umständen zum Ausgangspunkt zu nehmen.

82. Bedingung der Ebene. Die Grundgleichungen. Sollen die drei durch ihre rechtwinkligen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ bestimmten Punkte in

einer Ebene mit dem Anfangspunkt liegen, so müssen sie einer Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = 0$$

genügen, d. h. es muß bestehen:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen ergeben nur dann von Null verschiedene Werte von A, B, C, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Diese Bedingung läßt sich zuerst in folgenden drei Formen schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 (y_2 z_3 - z_2 y_3) + y_1 (z_2 x_3 - x_2 z_3) + z_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) &= 0 \\ x_2 (y_3 z_1 - z_3 y_1) + y_2 (z_3 x_1 - x_3 z_1) + z_2 (x_3 y_1 - y_3 x_1) &= 0 \\ x_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2) + y_3 (z_1 x_2 - x_1 z_2) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich $y_2 z_3 - z_2 y_3$ die Projektion der doppelten Fläche des von den Punkten 2, 3 und dem Anfangspunkt gebildeten Dreiecks auf die yz-Ebene und ähnliches gilt von den übrigen Faktoren. Nennt man daher $[r_1 r_2]$, $[r_2 r_3]$, $[r_1 r_3]$ die doppelten Flächen der Dreiecke, die von den entsprechenden, nach den drei Punkten gezogenen Radienvektoren r_1, r_2, r_3 begrenzt werden, und nennt ferner α, β, γ die Winkel der Normale auf die Dreiecksflächen mit den Achsen, so wird aus obigen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} [r_2 r_3] (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma) &= 0 \\ - [r_1 r_3] (x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma) &= 0 \\ [r_1 r_2] (x_3 \cos\alpha + y_3 \cos\beta + z_3 \cos\gamma) &= 0 . \end{aligned}$$

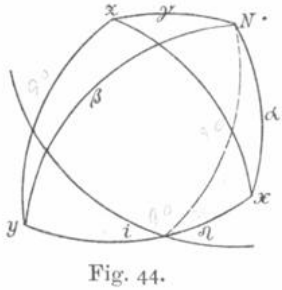


Fig. 44.

Führt man als Bestimmungsstücke der Ebene ihre Neigung i gegen die xy-Ebene und den Winkel Ω zwischen ihrer Schnittlinie mit der xy-Ebene und der x-Achse ein, so zeigt beifolgende Figur leicht, daß

$$\cos\alpha = \sin\Omega \sin i , \quad \cos\beta = -\cos\Omega \sin i , \quad \cos\gamma = \cos i ,$$

und die Bedingungen dafür, daß die drei Punkte in einer Ebene liegen, lassen sich also in folgender Form ansetzen:

$$\begin{aligned} x_1 \sin\Omega \sin i - y_1 \cos\Omega \sin i + z_1 \cos i &= 0 \\ x_2 \sin\Omega \sin i - y_2 \cos\Omega \sin i + z_2 \cos i &= 0 \\ x_3 \sin\Omega \sin i - y_3 \cos\Omega \sin i + z_3 \cos i &= 0 . \end{aligned} \qquad 1)$$

Man kann diese Gleichungen noch auf andere Art ableiten. Liegt der Punkt 1 in der durch i und Ω bestimmten Ebene in der Entfernung r_1 vom Anfangspunkt und

hat er das Argument der Breite u_1, so sind nach Seite 24 seine rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 (\cos u_1 \cos \Omega - \sin u_1 \sin \Omega \cos i) \\ y_1 &= r_1 (\cos u_1 \sin \Omega + \sin u_1 \cos \Omega \cos i) \\ z_1 &= r_1 \sin u_1 \sin i \end{aligned} \qquad (a)$$

woraus sich durch eine leicht ersichtliche Operation die erste Gleichung 1) ergibt usf.

Ehe wir die Gleichungen 1) weiter behandeln, wollen wir die oben aufgestellte Bedingung der Ebene: Determinante = 0 in einer zweiten Form schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 (y_2 z_3 - z_2 y_3) + x_2 (y_3 z_1 - z_3 y_1) + x_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2) &= 0 \\ y_1 (z_2 x_3 - x_2 z_3) + y_2 (z_3 x_1 - x_3 z_1) + y_3 (z_1 x_2 - x_1 z_2) &= 0 \\ z_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) + z_2 (x_3 y_1 - y_3 x_1) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) &= 0 , \end{aligned}$$

die nach Einsetzung der Dreiecksflächen in

$$\begin{aligned} [r_2 r_3] x_1 - [r_1 r_3] x_2 + [r_1 r_2] x_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] y_1 - [r_1 r_3] y_2 + [r_1 r_2] y_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] z_1 - [r_1 r_3] z_2 + [r_1 r_2] z_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

übergeht, wenn wir die gemeinsamen Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gleich weglassen. Auch diese Gleichungen kann man mittels (a) ableiten, denn man hat daraus nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} y_2 z_3 - z_2 y_3 &= \quad r_2 r_3 \sin (u_3 - u_2) \cos \Omega \sin i = - [r_2 r_3] \cos\beta \\ y_3 z_1 - z_3 y_1 &= - r_1 r_3 \sin (u_3 - u_1) \cos \Omega \sin i = + [r_1 r_3] \cos\beta \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 &= \quad r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1) \cos \Omega \sin i = - [r_1 r_2] \cos\beta . \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $-y_1$, $-y_2$, $-y_3$ und addiert, so erscheint sofort die zweite Gl. 2), und ebenso die dritte, wenn mit $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$ multipliziert wird. Behufs Erlangung der ersten Gleichung multipliziert man mit $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ und konstatiert das Verschwinden der linken Seiten nach Einsetzung von (a) und Beachtung des bekannten Satzes:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_1 \sin (u_3 - u_2) - \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_2 \sin (u_3 - u_1) + \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u_3 \sin (u_2 - u_1) = 0 .$$

Noch einfacher ist es, von der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin a \sin (A + u_1) \\ x_2 &= r_2 \sin a \sin (A + u_2) \\ x_3 &= r_3 \sin a \sin (A + u_3) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

auszugehen. Multipliziert man nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\sin(u_3 - u_2)$, $-\sin(u_3 - u_1)$, $\sin(u_2 - u_1)$ und addiert, so erscheint wegen des eben zitierten Satzes

$$\frac{x_1}{r_1} \sin (u_3 - u_2) - \frac{x_2}{r_2} \sin (u_3 - u_1) + \frac{x_3}{r_3} \sin (u_2 - u_1) = 0$$

oder wenn mit $r_1 r_2 r_3$ multipliziert wird, die erste Gleichung 2).

Eine Entscheidung, welche der beiden Formen, 1) oder 2), als Bedingung der Ebene sich am vorteilhaftesten erweist, wollen wir jetzt noch nicht treffen, sondern

beide noch gemeinsam weiterführen. Es sind Polarkoordinaten statt der rechtwinkligen einzuführen, damit wir von unseren Beobachtungsdaten Gebrauch machen können. Wir nehmen zur xy-Ebene die Ekliptik, lassen die $+x$-Achse durch den Frühlingspunkt gehen, die $+y$Achse durch 90° Länge, die $+z$-Achse durch den Nordpol der Ekliptik. Zur Beobachtungszeit t möge gehören die geozentrische Länge des Gestirnes λ, die geozentrische Breite β und die geozentrische Distanz ϱ; zur selben Zeit sei die heliozentrische Länge der Erde L, ihre Breite Null und ihr Radiusvektor R. Dann gilt für alle drei Orte (Nr. 13):

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\beta \cos\lambda + R \cos L \\ y &= \varrho \cos\beta \sin\lambda + R \sin L \\ z &= \varrho \sin\beta . \end{aligned} \qquad 3)$$

Wird dies in die Gleichungen 1), die wir unter Einführung von

$$\operatorname{tg} i \sin\Omega = g , \qquad \operatorname{tg} i \cos\Omega = h$$

allgemein so schreiben:

$$z = hy - gx \qquad 1^a)$$

eingetragen, so erhalten wir sofort folgenden Ausdruck der geozentrischen Distanz

$$\varrho = \frac{h \sin L - g \cos L}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R ,$$

der nun seinerseits nach Einsetzung in 3) die folgenden Werte der rechtwinkligen Koordinaten liefert:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin\beta \cos L + h \cos\beta \sin(L - \lambda)}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R \\ y &= \frac{\sin\beta \sin L + g \cos\beta \sin(L - \lambda)}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R \\ z &= \frac{h \sin\beta \sin L - g \sin\beta \cos L}{\sin\beta - h \cos\beta \sin\lambda + g \cos\beta \cos\lambda} R . \end{aligned}$$

Daraus kann noch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gebildet werden; und wenn man zwei Örter betrachtet, so erhält man r_1 und r_2 und wegen

$$\cos 2 f_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}$$

auch den Winkel $2 f_3$ zwischen beiden Radienvektoren, alles ausgedrückt durch die beiden Unbekannten h und g. Will man aber jetzt weiter gehen und die Bedingung der Ellipse bzw. Parabel und die Bedingung der Zwischenzeiten einführen, so stößt man auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir wissen, daß bei der Ellipse überhaupt kein geschlossener Ausdruck zwischen den Radienvektoren, dem eingeschlossenen Winkel und der Zwischenzeit existiert; hier wäre der eingeschlagene Weg also sofort zu verlassen, außer man bildet die Dreiecksflächen, womit man aber direkt auf die Gleichungen 2) verwiesen würde, welche dieselben von Anfang an enthalten. Aber auch bei der Parabel, wo man den geschlossenen Ausdruck (Seite 193)

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k (t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos f_3) \sqrt{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f_3}$$

besitzt und denselben für die beiden Zwischenzeiten $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_2$ aufstellen könnte, sieht man sofort, daß die beiden Gleichungen für h und g, die man auf diese direkte Weise erlangen kann, so kompliziert werden, daß an ihre Auflösung nicht zu denken ist. Es ist gut, sich die Schwierigkeiten, die dem einfachsten, direkten Wege entgegenstehen, vor Augen zu halten, um die Vorteile der Lösung durch sukzessive Näherung richtig schätzen zu lernen.

Gehen wir jetzt zur Form 2) der Ebenenbedingung und substituieren darin die Ausdrücke 3) der rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3]\,(\varrho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1) - [r_1 r_3]\,(\varrho_2 \cos\beta_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2) + \\
&\qquad + [r_1 r_2]\,(\varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3) = 0 \\
&[r_2 r_3]\,(\varrho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1) - [r_1 r_3]\,(\varrho_2 \cos\beta_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2) + \qquad 4) \\
&\qquad + [r_1 r_2]\,(\varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3) = 0 \\
&[r_2 r_3]\,\varrho_1 \sin\beta_1 \qquad\qquad - [r_1 r_3]\,\varrho_2 \sin\beta_2 + [r_1 r_2]\,\varrho_3 \sin\beta_3 = 0 .
\end{aligned}$$

Hier tritt uns der Vorteil entgegen, daß die auftretenden Verhältnisse der Dreiecksflächen, nämlich:

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]},$$

wie wir wissen (Nr. 52), durch Reihenentwicklungen nach den Potenzen der Zwischenzeiten ausgedrückt werden können, in denen, wenigstens in den ersten Gliedern, außer den bekannten Zwischenzeiten nur mehr der Radiusvektor r_2 auftritt; diese Entwicklungen gehen aus den Gesetzen der Planetenbewegung hervor, bringen also die Bedingungen der Ellipse und der Zwischenzeiten in die Gl. 4) herein. Es eröffnet sich also folgender Weg der Lösung: Durch Elimination von ϱ_1 und ϱ_3 aus den drei Gleichungen 4) kann ein Ausdruck für ϱ_2 gefunden werden, der außer von den Zwischenzeiten und den bekannten Koordinaten wenigstens in den ersten Gliedern nur mehr von r_2 abhängig ist. Da aber zwischen ϱ_2 und r_2 außerdem noch die rein geometrische Beziehung besteht, die sich aus dem Dreieck Sonne, Erde, Planet ergibt:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\delta_2 , \qquad 5)$$

wo δ_2 ein offenbar aus den geozentrischen Richtungen leicht zu ermittelnder Winkel ist, so hat man zwei verhältnismäßig einfache Gleichungen zwischen r_2 und ϱ_2, welche die Ermittlung beider gestatten. Dann aber erhält man aus 4) ϱ_1 und ϱ_3 und damit die vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten der drei Örter; aus diesen lassen sich r_1 und r_3, sowie die heliozentrischen Polarkoordinaten finden und schließlich die Elemente (Nr. 50, 58, 62). Wir führen noch an, daß die Gl. 5) sich auch durch Quadrieren und Addieren der Gl. 3) ergibt:

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(L_2 - \lambda_2), \qquad 5^a)$$

womit der Wert von $\cos\delta_2$ unmittelbar gegeben ist.

Nachdem wir die Überzeugung gewonnen haben, daß die weitere Behandlung von 4) zum Ziele führen muß, wenden wir uns zu einem eingehenderen Studium derselben, wobei wir die Dreiecksflächen als bekannte, die geozentrischen Distanzen ϱ als unbekannte Größen im Auge behalten wollen.

83. Allgemeine Diskussion der Grundgleichungen. Wir wollen die Gl. 4) durch Einführung anderer Koordinaten zugleich kürzer und allgemeiner schreiben. Nennt man a, b, c die Kosinus der Abstände eines Punktes der Sphäre von den Ecken des gleichseitigen und rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, welches durch die Durchstoßpunkte der Achsen unseres Systems mit der Sphäre gebildet wird, so hat man:

$$a = \cos\beta\cos\lambda, \qquad b = \cos\beta\sin\lambda, \qquad c = \sin\beta.$$

Gebraucht man die Buchstaben a, b, c für die geozentrischen Örter des Planeten, A, B, C für die Örter der Erde, so schreiben sich die Gl. 4) so:

$$\begin{aligned}
&[r_2r_3](a_1\varrho_1 + A_1R_1) - [r_1r_3](a_2\varrho_2 + A_2R_2) + [r_1r_2](a_3\varrho_3 + A_3R_3) = 0\\
&[r_2r_3](b_1\varrho_1 + B_1R_1) - [r_1r_3](b_2\varrho_2 + B_2R_2) + [r_1r_2](b_3\varrho_3 + B_3R_3) = 0\\
&[r_2r_3](c_1\varrho_1 + C_1R_1) - [r_1r_3](c_2\varrho_2 + C_2R_2) + [r_1r_2](c_3\varrho_3 + C_3R_3) = 0.
\end{aligned} \qquad 4^a)$$

Es macht nun in erster Linie keine Schwierigkeit, hieraus die drei geozentrischen Distanzen jede für sich zu ermitteln. Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren oder mit Benutzung der Determinanten findet man leicht:

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \frac{-[r_2r_3]R_1L_1 + [r_1r_3]R_2L_2 - [r_1r_2]R_3L_3}{[r_2r_3]K}\\
\varrho_2 &= \frac{-[r_2r_3]R_1M_1 + [r_1r_3]R_2M_2 - [r_1r_2]R_3M_3}{-[r_1r_3]K}\\
\varrho_3 &= \frac{-[r_2r_3]R_1N_1 + [r_1r_3]R_2N_2 - [r_1r_2]R_3N_3}{[r_1r_2]K},
\end{aligned} \qquad 6)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
K &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\\
L_1 &= A_1(b_2c_3 - b_3c_2) + B_1(c_2a_3 - c_3a_2) + C_1(a_2b_3 - a_3b_2)\\
M_1 &= A_1(b_3c_1 - b_1c_3) + B_1(c_3a_1 - c_1a_3) + C_1(a_3b_1 - a_1b_3)\\
N_1 &= A_1(b_1c_2 - b_2c_1) + B_1(c_1a_2 - c_2a_1) + C_1(a_1b_2 - a_2b_1)
\end{aligned} \qquad 7)$$

und die L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 hieraus folgen, wenn statt A_1, B_1, C_1 gesetzt wird A_2, B_2, C_2 bzw. A_3, B_3, C_3.

Die geometrische Bedeutung der K, L, M, N, ... ist, wie folgt, zu ermitteln. Das Quadrat von K läßt sich so schreiben:

$$\begin{aligned}
K^2 = {}& (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)\\
&+ 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)\\
&- (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)^2\\
&- (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)^2\\
&- (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß vermöge der Eigenschaften der Richtungskosinus

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) = \cos(12),$$

so sieht man, daß:

$$K^2 = 1 + 2\cos m_1\cos m_2\cos m_3 - \cos m_1^2 - \cos m_2^2 - \cos m_3^2,$$

wenn m_1, m_2, m_3 die Bogen größter Kreise sind, welche die drei Punkte 1, 2, 3 der Sphäre, die den geozentrischen Beobachtungen entsprechen, miteinander verbinden.

Nennt man noch μ_1, μ_2, μ_3 die drei Winkel des eben genannten sphärischen Dreieckes, so wird:

$$\cos m_3 = \cos m_1 \cos m_2 + \sin m_1 \sin m_2 \cos \mu_3$$

und die Substitution dieses Ausdruckes in K^2 führt auf:

$$K^2 = \sin m_1^2 \sin m_2^2 \sin \mu_3^2$$

oder

$$K = \pm \sin m_1 \sin m_2 \sin \mu_3. \qquad 8)$$

Das Zeichen richtet sich nach dem Drehungssinn, in dem das Dreieck umlaufen wird. Einem bestimmten Drehungssinn, d. h. einer bestimmten Reihenfolge der Punkte 1, 2, 3 kann das + Zeichen zugelegt werden. Ändert man die Reihenfolge der Punkte, so ist das Zeichen zu wechseln.

In derselben Weise findet man, daß auch

$$K = \pm \sin m_1 \sin m_3 \sin \mu_2 = \pm \sin m_2 \sin m_3 \sin \mu_1 .$$

Es ist dies, nebenbei bemerkt, der sechsfache Betrag des Inhalts desjenigen Tetraeders, das vom Mittelpunkt der Sphäre und den drei Punkten gebildet wird, wenn man den Radius der Sphäre gleich 1 setzt.

Wenn man in K statt der Koordinaten a_1, b_1, c_1 des ersten Planetenortes die des ersten Erdortes nimmt, so geht K in L_1 über. Nennt man die drei Erdörter I, II, III, so wird der Ausdruck von L_1 sich ebenso in den Stücken des Dreieckes I 2 3 bilden lassen, wie der von K in den Stücken von 1 2 3. Dasselbe gilt offenbar von allen übrigen L, M, N. Die zehn Koeffizienten in 6) stellen also einen und denselben Ausdruck in verschiedenen Dreiecken dar, und zwar erhält man diese folgendermaßen: Für die Koeffizienten von ϱ_1 verbinde man den ersten, zweiten, dritten Sonnenort mit 2, 3 usf. Man schließt aus dieser Darstellung, daß die Koeffizienten alle vom zugrunde gelegten Koordinatensystem unabhängig sind; ferner, was wichtiger ist, daß alle zu einem ϱ gehörigen Koeffizienten einen Faktor gemeinsam haben, nämlich den Sinus der entsprechenden Seite des Dreiecks 1 2 3.

Die Gl. 6) geben die geozentrischen Distanzen ϱ unabhängig voneinander; wenn man sie in die Gleichungen

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 + 2\varrho R \cos\beta \cos(L - \lambda)$$

oder in den jetzt benutzten Koordinaten, in

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 + 2\varrho R (aA + bB + cC)$$

eintragen wollte, so würde man, nach Einsetzung der Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, offenbar sofort wieder auf drei Gleichungen sehr hohen Grades geführt werden, deren simultane Behandlung unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten würde. Führt man, wie *Oppolzer*, Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen ein, welche die äußeren Radienvektoren enthalten, so muß man ϱ_1 und ϱ_3 für sich berechnen und dann r_1 und r_3, also von den aufgestellten Ausdrücken 6) Gebrauch machen, aber man sieht auch, daß hierdurch ohne wesentlichen Gewinn die Arbeit verdoppelt wird, und daß daher der oben skizzierte Weg der Lösung unter allen Umständen den Vorzug verdient. Wir werden daher auch den Oppolzerschen Weg nicht einschlagen. Dann aber gebraucht man von den drei Werten 6) nur den für ϱ_2,

während die für ϱ_1 und ϱ_3 durch zweckmäßigere zu ersetzen sein werden. Man kann nämlich ϱ_1 und ϱ_3, wie wir jetzt zeigen wollen, durch ϱ_2 mittelst kürzerer Rechnung erhalten, als wenn man sie direkt berechnet.

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen 4^a) zuerst ϱ_3, und dann ϱ_1, so kommt:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3](b_1 c_3 - b_3 c_1)\varrho_1 = [r_1 r_3](b_2 c_3 - b_3 c_2)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (B_1 c_3 - b_3 C_1) - [r_1 r_3] R_2 (B_2 c_3 - b_3 C_2) + [r_1 r_2] R_3 (B_3 c_3 - b_3 C_3)) \\
&[r_1 r_2](b_1 c_3 - b_3 c_1)\varrho_3 = [r_1 r_3](b_1 c_2 - b_2 c_1)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (C_1 b_1 - c_1 B_1) - [r_1 r_3] R_2 (C_2 b_1 - c_1 B_2) + [r_1 r_2] R_3 (C_3 b_1 - c_1 B_3)).
\end{aligned} \tag{9}$$

Dieser Gleichungen hat sich *Hansen* bei seiner Methode bedient. Behandelt man ebenso die beiden ersten Gleichungen, so erhält man in

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3](a_1 b_3 - a_3 b_1)\varrho_1 = [r_1 r_3](a_2 b_3 - a_3 b_2)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (A_1 b_3 - a_3 B_1) - [r_1 r_3] R_2 (A_2 b_3 - a_3 B_2) + [r_1 r_2] R_3 (A_3 b_3 - a_3 B_3)) \\
&[r_1 r_2](a_1 b_3 - a_3 b_1)\varrho_3 = [r_1 r_3](a_1 b_2 - a_2 b_1)\varrho_2 - \\
&\quad - ([r_2 r_3] R_1 (B_1 a_1 - b_1 A_1) - [r_1 r_3] R_2 (B_2 a_1 - b_1 A_2) + [r_1 r_2] R_3 (B_3 a_1 - b_1 A_3))
\end{aligned} \tag{10}$$

die Gleichungen, welche *Encke* benutzt hat.

Man kann aber die hierin liegende Willkür vermeiden, wenn man aus allen drei Gleichungen 4^a) ϱ_3 bzw. ϱ_1 eliminiert; multipliziert man sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{ll}
b_3 C_3 - B_3 c_3 & \text{und} \quad b_1 C_1 - B_1 c_1 \\
c_3 A_3 - C_3 a_3 & \qquad\quad c_1 A_1 - C_1 a_1 \\
a_3 B_3 - A_3 b_3 & \qquad\quad a_1 B_1 - A_1 b_1,
\end{array}$$

so kommt nach der Addition:

$$\begin{aligned}
[r_2 r_3] M_3 \varrho_1 &= -[r_1 r_3] L_3 \varrho_2 + [r_2 r_3] R_1 F_3 + [r_1 r_3] R_2 E_3 \\
[r_1 r_2] M_1 \varrho_3 &= -[r_1 r_3] N_1 \varrho_2 + [r_1 r_2] R_3 F_1 + [r_1 r_3] R_2 G_1,
\end{aligned} \tag{11}$$

worin M_3, L_3, M_1, N_1 dieselbe Bedeutung haben wie in 7), die übrigen Abkürzungen aber durch

$$\begin{aligned}
F_1 &= a_1 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + b_1 (C_3 A_1 - C_1 A_3) + c_1 (A_3 B_1 - A_1 B_3) \\
G_1 &= a_1 (B_1 C_2 - B_2 C_1) + b_1 (C_1 A_2 - C_2 A_1) + c_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\
F_3 &= a_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + b_3 (C_3 A_1 - C_1 A_3) + c_3 (A_3 B_1 - A_1 B_3) \\
E_3 &= a_3 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + b_3 (C_2 A_3 - C_3 A_2) + c_3 (A_2 B_3 - A_3 B_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

erklärt sind und offenbar dieselbe geometrische Bedeutung haben wie jene, nur daß hier Dreiecke mit 2 Erdörtern und 1 Planetenort in Betracht kommen. —

Wir wollen endlich auch ϱ_2 aus den Gl. 4^a) eliminieren, wodurch eine Beziehung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 entsteht. Wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit $b_2 C_2 - B_2 c_2$, $c_2 A_2 - C_2 a_2$, $a_2 B_2 - A_2 b_2$ multipliziert und addiert, so erscheint:

$$[r_1 r_2] L_2 \varrho_3 = +[r_2 r_3] N_2 \varrho_1 - ([r_2 r_3] R_1 G_2 - [r_1 r_2] R_3 E_2) \tag{13}$$

wo

$$\begin{aligned}
G_2 &= a_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) + b_2 (C_1 A_2 - C_2 A_1) + c_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\
E_2 &= a_2 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + b_2 (C_2 A_3 - C_3 A_2) + c_2 (A_2 B_3 - A_3 B_2).
\end{aligned} \tag{14}$$

Diese Gleichung liegt der parabolischen Bahnbestimmung zugrunde. Man kann auch Beziehungen zwischen ϱ_1 und ϱ_3 benutzen, die durch Elimination von ϱ_2 aus zweien

von den Gleichungen 4[a]) hervorgehen; wir stellen sie mit dem Bemerken zusammen, daß 13) wohl immer vorzuziehen ist:

$$\begin{aligned}
&[r_2r_3](a_1b_2 - b_1a_2)\varrho_1 + [r_1r_2](b_2a_3 - a_2b_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(A_2b_2 - B_2a_2) + [r_2r_3]R_1(B_1a_2 - A_1b_2) + [r_1r_2]R_3(B_3a_2 - A_3b_2) \\
&[r_2r_3](a_1c_2 - c_1a_2)\varrho_1 + [r_1r_2](c_2a_3 - a_2c_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(A_2c_2 - C_2a_2) + [r_2r_3]R_1(C_1a_2 - A_1c_2) + [r_1r_2]R_3(C_3a_2 - A_3c_2) \qquad 14^{a}) \\
&[r_2r_3](b_1c_2 - c_1b_2)\varrho_1 + [r_1r_2](c_2b_3 - b_2c_3)\varrho_3 = \\
&\quad = [r_1r_3]R_2(B_2c_2 - C_2b_2) + [r_2r_3]R_1(C_1b_2 - B_1c_2) + [r_1r_2]R_3(C_3b_2 - B_3c_2).
\end{aligned}$$

Man könnte noch mehr Beziehungen zwischen den geozentrischen Distanzen aufstellen, wodurch auch die noch nicht zur Verwendung gekommenen E_1, F_2, G_3 zur Einführung gelangen. Man hat überhaupt zwanzig solcher Ausdrücke zwischen den 3 Planeten- und den 3 Erdörtern, wenn man nämlich den, den 3 Erdörtern entsprechenden und analog K gebildeten mitzählt, welcher Null ist, wenn die 3 Erdörter in einem größten Kreise angenommen werden. In der Bahnbestimmung werden diese Beziehungen nicht gebraucht.

Es ist nun die *Größenordnung* der eingeführten Ausdrücke K, L, M, N, E, F, G zu untersuchen, was vermöge des oben abgeleiteten allgemeinen Wertes 8) derselben leicht geschehen kann. Dabei wollen wir die Zwischenzeiten zwischen den geozentrischen Beobachtungen und alle während derselben von der Erde und vom Planeten beschriebenen Bogen als Größen erster Ordnung betrachten. Ist ABC irgend eines der zwanzig sphärischen Dreiecke, welche die drei Planetenörter und die drei Erdörter miteinander bilden, und sind a, b, c seine Seiten, α, β, γ seine Winkel, so ist der betreffende zugehörige Ausdruck nach 8) durch

$$J = \sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta$$

gegeben. Gehört einer der drei Punkte A, B, C zu den Erdörtern, die beiden anderen zu den Planetenörtern, oder umgekehrt, so kommt in J offenbar nur *eine* Größe erster Ordnung vor und es ist also J selbst von dieser Ordnung. Daraus folgt, daß *die 18 Größen L, M, N, E, F, G von der ersten Ordnung sind.* Eine Ausnahme hiervon tritt nur ein, wenn die drei Punkte des Dreiecks nahe in einem größten Kreis liegen, wenn also z. B. der durch den ersten und dritten Planetenort gelegte größte Kreis durch den mittleren Erdort hindurchgeht. Auf diese Ausnahmsfälle wird also später besonders zurückzukommen sein. Eine besondere Untersuchung erheischt die Größe K, welche dem von den drei Planetenörtern gebildeten Dreieck entstammt. Es muß die Größenordnung der sin der Winkel dieses Dreiecks festgestellt werden, wozu wir auf den Lambertschen Satz (Nr. 75) zurückgreifen. Es ist dort gezeigt, daß der Bogen G_2g zwischen dem zweiten Planetenort und dem Schnittpunkt der größten Kreise zwischen dem ersten und dritten Planetenort und dem zweiten Erdort und zweiten Planetenort, von der Ordnung der Pfeile der von der Erde und dem Planeten beschriebenen Kurven ist, also von der zweiten Ordnung. Da nun

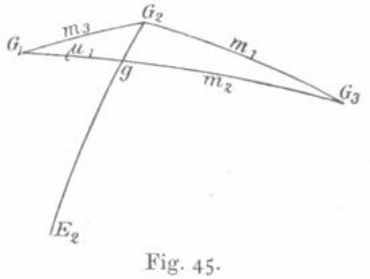


Fig. 45.

$$\sin\mu_1 = \sin G_1 g G_2 \frac{\sin G_2 g}{\sin m_3},$$

so folgt, daß $\sin\mu_1$ von der ersten Ordnung ist. Dasselbe gilt von den anderen Winkeln des Dreiecks $G_1 G_2 G_3$.

Die drei Faktoren von

$$K = \sin m_2 \sin m_3 \sin\mu_1$$

sind also von der ersten Ordnung und *folglich K von der dritten.*

84. Umformung der Ausdrücke für die geozentrischen Distanzen. Diese Ausdrücke sind nun auf die gemessenen Koordinaten zurückzuführen und zugleich in eine für die Rechnung möglichst bequeme Gestalt zu bringen. Es kann dies durch Einführung von Hilfsgrößen auf sehr verschiedene Weise geschehen; Gauß, Encke, Hansen, Klinkerfues, Weiss u. a. haben solche Umformungen angegeben. Dieselben ergeben sich alle aus unseren allgemeinen Formeln; wir wollen uns darauf beschränken, nur einige dieser Verfahren darzulegen und beginnen mit demjenigen, welches uns (auf einem anderen Wege, als Encke ihn eingeschlagen) auf die Enckeschen Formeln führen wird, welche zweifellos für den astronomischen Rechner die bequemsten sind. Wir nehmen zuerst den Ausdruck für ϱ_2 in 6) (Seite 258) vor und erinnern uns vor allem, daß M_1, M_2, M_3 und K einen Faktor erster Ordnung $\sin m_2$ gemeinsam haben, dessen Beseitigung wir am besten von vornherein besorgen. Es ist daher von den geometrischen Ausdrücken dieser Größen auszugehen. Nennt man d_1, d_2, d_3 die Bogen von dem ersten Planetenort nach dem ersten, zweiten, dritten Erdort (die stets kleiner als 180° angenommen werden dürfen) und Δ_1, Δ_2, Δ_3 ihre Winkel mit dem größten Kreis zwischen dem ersten und dritten Planetenort, so ist nach dem, was wir früher über die Bedeutung von M_1, M_2, M_3 feststellten, sofort:

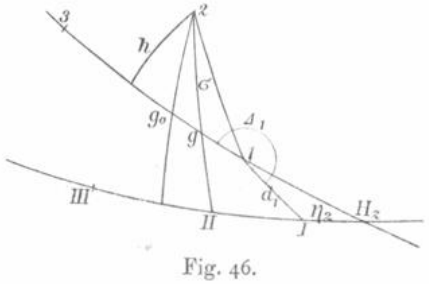


Fig. 46.

$$M_1 = +\sin m_2 \sin d_1 \sin\Delta_1, \qquad M_2 = +\sin m_2 \sin d_2 \sin\Delta_2,$$
$$M_3 = +\sin m_2 \sin d_3 \sin\Delta_3$$

und ebenso wird:

$$K = \sin m_2 \sin m_3 \sin\mu_1.$$

Nach Weglassung des Faktors $\sin m_2$ wird also die zweite Gleichung 6):

$$[r_1 r_3] \sin m_3 \sin\mu_1 \varrho_2 = +[r_2 r_3] R_1 \sin d_1 \sin\Delta_1 - [r_1 r_3] R_2 \sin d_2 \sin\Delta_2 + [r_1 r_2] R_3 \sin d_3 \sin\Delta_3. \qquad 15)$$

Um hier die Koordinaten einzuführen, sei H_2 die Länge des aufsteigenden Knotens des größten Kreises 13 (in der Richtung 1→3 genommen) auf der Ekliptik und η_2 seine Neigung gegen die Ekliptik, dann ist:

$$\begin{aligned} -\sin d_1 \sin\Delta_1 &= \sin\eta_2 \sin(L_1 - H_2) \\ -\sin d_2 \sin\Delta_2 &= \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2) \\ -\sin d_3 \sin\Delta_3 &= \sin\eta_2 \sin(L_3 - H_2). \end{aligned} \qquad 16)$$

Wird durch 2 der Breitenkreis gezogen und dessen Schnitt mit 13 g_0 genannt und die Breite von g_0 β_0, so ist der Bogen $g_0 2 = \beta_2 - \beta_0$ und daher

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \sin \widehat{1g_0 2}.$$

Nun ist

$$\sin \widehat{1g_0 2} = \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0},$$

folglich wird:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0} \qquad 17)$$

oder für die Rechnung sicherer:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_0) \cos \eta_2 \cos \beta_2 .$$

Trägt man 16) und 17) in 15) ein, so erscheint:

$$[r_1 r_3] \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \eta_2} \varrho_2 \cos \beta_2 = \qquad 18)$$
$$= -[r_2 r_3] R_1 \sin(L_1 - H_2) + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - H_2) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - H_2).$$

Ehe wir diese Gleichung weiter behandeln, stellen wir die Formeln zur Bestimmung der eingeführten Größen H_2, η_2, β_0 auf. Werden die Breitenkreise der Punkte 1 und 3 gezogen, so folgt sofort:

$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1$$
$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_3 ,$$

woraus (Nr. 69):

$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1$$
$$\operatorname{tg} \eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \qquad 19)$$

Kontrolle: $\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_3$.

Ferner ist ebenso:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_2 - H_2) . \qquad 20)$$

Damit sind alle Koeffizienten in 18) durch die beobachteten Koordinaten ausgedrückt.

Verbindet man den zweiten Planetenort mit dem zweiten Erdort durch einen größten Kreis und nennt dessen Schnittpunkt mit dem größten Kreis 13 g, so ist die Strecke $\overline{g2} = \sigma$ jener Bogen, den wir bei der Diskussion des Lambertschen Satzes kennen lernten und dessen Wichtigkeit wir hervorhoben. Wir haben statt seiner hier $\beta_2 - \beta_0$ eingeführt, weil sich dieses leichter berechnen läßt; es ist aber klar, daß wir auch σ hätten einführen können, denn man hat:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin \sigma \sin \widehat{1g2} .$$

Will man σ ermitteln, so wird man am einfachsten auf $\beta_2 - \beta_0$ zurückgreifen und folgende Formeln aufstellen:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin(\beta_2 - \beta_0) \frac{\cos \eta_2}{\cos \beta_0} = \sin \sigma \sin \widehat{1g2} ,$$

man muß dann nur noch $\sin \widehat{1g2}$ ermitteln, was mittels des Dreiecks $H_2 g II$ gelingt, in welchem zuerst noch der Winkel bei II zu ermitteln ist; nennt man ihn $180^\circ - w_2$ so ist

$$\operatorname{tg} w_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)},$$

und dann folgt schließlich:

$$\cos \widehat{1g2} = \cos w_2 \cos \eta_2 + \sin w_2 \sin \eta_2 \cos(L_2 - H_2).$$

Wir gehen hier nicht näher auf diese Formeln ein, weil wir gelegentlich der Hansenschen Methode (Nr. 89) darauf zurückzukommen haben.

Fällt man vom zweiten Planetenort das Lot h auf den größten Kreis 13, so wird:

$$\sin m_3 \sin \mu_1 = \sin h;$$

fällt man desgleichen von den drei Erdörtern die Lote ν_1, ν_2, ν_3 auf 13, so sieht man, daß

$$-\sin d_1 \sin \Delta_1 = \sin \nu_1, \quad -\sin d_2 \sin \Delta_2 = \sin \nu_2, \quad -\sin d_3 \sin \Delta_3 = \sin \nu_3$$

und daß daher der Gleichung 15) folgende interessante Form gegeben werden kann:

$$[r_1 r_3] \sin h \varrho_2 = -[r_2 r_3] R_1 \sin \nu_1 + [r_1 r_3] R_2 \sin \nu_2 - [r_1 r_2] R_3 \sin \nu_3, \qquad 19)$$

die allerdings praktisch keinerlei Vorteile bietet. Daß die Gl. 6) für ϱ_1 und ϱ_3 sich auf dieselben Formen überführen lassen, wie 15), 18), 19), ist selbstverständlich; wir stellen sie nicht auf, weil die nachher zu entwickelnden Werte für ϱ_1 und ϱ_3 vorzuziehen sind.

Man kann 18) in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} \varrho_2 \cos\beta_2 = -\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} R_1 \sin(L_1 - H_2) - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} R_3 \sin(L_3 - H_2) + R_2 \sin(L_2 - H_2)$$

und hierin das letzte Glied durch einen anderen Ausdruck ersetzen. Wenn man nämlich die Identität

$$0 = \sin(L_3 - L_2) \sin(L_1 - H_2) + \sin(L_2 - L_1) \sin(L_3 - H_2) - \sin(L_3 - L_1) \sin(L_2 - H_2)$$

mit $R_1 R_2 R_3$ multipliziert und die doppelten Dreiecksflächen der Erdbahn mit $[R_1 R_2] \ldots$ bezeichnet, so erkennt man die Richtigkeit von

$$0 = \frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} R_1 \sin(L_1 - H_2) + \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} R_3 \sin(L_3 - H_2) - R_2 \sin(L_2 - H_2).$$

Die Vereinigung dieser Gleichung mit obiger für ϱ_2 gibt:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} \varrho_2 \cos\beta_2 = \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\right) R_1 \sin(L_1 - H_2) + \left(\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\right) R_3 \sin(L_3 - H_2). \quad 20)$$

Wir gehen nun zur Umwandlung der Gleichungen für ϱ_1 und ϱ_3 über; wie schon erwähnt, eignen sich zur Berechnung die direkten Ausdrücke 6) weniger als die durch ϱ_2, welche uns bis jetzt in den Formen 9), 10), 11) vorliegen. Dieselben müssen natürlich schließlich zu demselben Resultat führen, weshalb es genügen wird, die einfachste von ihnen umzuwandeln. Das scheint 11) zu sein. Die Koeffizienten M_3, L_3, F_3, E_3 der ersten Gleichung in 11) gehen aus den vier Dreiecken hervor, welche der Strecke $3\,III$ vom dritten Planetenort zum dritten Erdort anliegen, und die Koeffizienten M_1, L_1, F_1, G_1 der zweiten aus Dreiecken, welche der Strecke $1\,I$ anliegen. Die Sinus dieser Strecken sind also jeweils gemeinsamer Faktor und können weggelassen werden. Nennt man für einen Augenblick q_1, q_2, q_3 die Bogen vom dritten Erdort nach den drei Planetenörtern, Q_1, Q_2, Q_3 ihre Winkel mit der

Erdbahn, ferner k_1, k_2, k_3 die Bogen vom ersten Erdort nach den drei Planetenörtern, K_1, K_2, K_3 ihre Winkel mit der Erdbahn, so erscheint 11) sofort in der Form:

$$\begin{aligned}
[r_2 r_3] \sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)\varrho_1 &= \varrho_2 [r_1 r_3] \sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3) - \\
&\quad - [r_2 r_3] R_1 \sin(L_3 - L_1) \sin Q_3 + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_3 - L_2) \sin Q_3 \\
[r_1 r_2] \sin k_3 \sin(K_1 - K_3)\varrho_3 &= \varrho_2 [r_1 r_3] \sin k_2 \sin(K_1 - K_2) - \\
&\quad - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - L_1) \sin K_1 + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - L_1) \sin K_1 .
\end{aligned}$$

Hierbei war betreff des Zeichens zu beachten, daß die Dreiecke für L_3 und F_3 und die für N_1 und F_1 in der umgekehrten Richtung durchlaufen werden, wie die für M_3 und E_3, beziehungsweise für M_1 und G_1 und daß daher den betreffenden Ausdrücken das entgegengesetzte Zeichen zu geben war.

In die eben angesetzten Gleichungen lassen sich nun die Koordinaten sofort einführen; denn es ist:

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
\sin q_1 \sin Q_1 = \sin\beta_1 & \sin q_2 \sin Q_2 = \sin\beta_2 & \sin q_3 \sin Q_3 = \sin\beta_3 \\
\sin q_1 \cos Q_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_3) & \sin q_2 \cos Q_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_3) & \sin q_3 \cos Q_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3)
\end{array}\right\} \quad 21)$$

und

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
\sin k_1 \sin K_1 = \sin\beta_1 & \sin k_2 \sin K_2 = \sin\beta_2 & \sin k_3 \sin K_3 = \sin\beta_3 \\
\sin k_1 \cos K_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) & \sin k_2 \cos K_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_1) & \sin k_3 \cos K_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1)
\end{array}\right\}$$

und damit folgt nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned}
\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\varrho_1 &= \frac{\sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)}\varrho_2 + \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\right) R_1 \frac{\sin Q_3 \sin(L_3 - L_1)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} \\
\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\varrho_3 &= \frac{\sin k_2 \sin(K_1 - K_2)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)}\varrho_2 + \left(\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\right) R_3 \frac{\sin K_1 \sin(L_3 - L_1)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} .
\end{aligned} \quad 22)$$

Wenn man eine sogenannte logarithmische Form anstrebt, kann man diese Gleichungen in Verbindung mit 21) beibehalten. Im allgemeinen wird es sich aber empfehlen, die gemessenen Koordinaten direkt einzuführen. Man findet leicht mittels 21):

$$\begin{aligned}
\frac{\sin q_2 \sin(Q_2 - Q_3)}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} &= \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3}{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} \\
\frac{\sin Q_3}{\sin q_1 \sin(Q_1 - Q_3)} &= \frac{\operatorname{tg}\beta_3}{\sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{1}{\cos\beta_1} \\
\frac{\sin k_2 \sin(K_1 - K_2)}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} &= \frac{\sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_3} \\
\frac{\sin K_1}{\sin k_3 \sin(K_1 - K_3)} &= \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3} \cdot \frac{1}{\cos\beta_3} .
\end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 \\
Z_3 &= \sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2 \\
D_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_3 - H_2) \\
D_3 &= \sin(\lambda_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_1 - H_2)
\end{aligned} \quad 23)$$

und ferner

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1, \qquad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3$$
$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} = N_1, \qquad \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} = N_3 \tag{24}$$
$$\varrho_1 \cos\beta_1 = \overline{\varrho_1}, \qquad \varrho_2 \cos\beta_2 = \overline{\varrho_2}, \qquad \varrho_3 \cos\beta_3 = \overline{\varrho_3},$$

so erscheinen die Gleichungen für die geozentrischen »*kurtierten Distanzen*« $\overline{\varrho_1}, \overline{\varrho_2}, \overline{\varrho_3}$ in folgender Endgestalt, deren weitere Behandlung erst nach Einführung der Werte für n_1 und n_3 erfolgen kann:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}\,\overline{\varrho_2} = (N_1 - n_1)\,R_1 \sin(L_1 - H_2) + (N_3 - n_3)\,R_3 \sin(L_3 - H_2)$$
$$n_1\overline{\varrho_1} = \frac{Z_1}{D_1}\,\overline{\varrho_2} + (N_1 - n_1)\,R_1\,\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} \tag{25}$$
$$n_3\overline{\varrho_3} = \frac{Z_3}{D_3}\,\overline{\varrho_2} + (N_3 - n_3)\,R_3\,\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3}.$$

Wir führen noch eine Formel an, durch welche die Berechnung der $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ bequem und scharf kontrolliert werden kann. Die letzte Gleichung in 4) gibt nämlich unmittelbar:

$$n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2.$$

85. Die Gaußsche Gleichung. Wir haben die bisherigen Resultate ausschließlich durch die Bedingung der Ebene erhalten. Es kommt jetzt darauf an, die Bedingungen des Kegelschnitts und der Bewegung einzuführen, wofür der Boden insofern schon bereitet ist, als die Verhältnisse der Dreiecksflächen, bis jetzt rein geometrisch, in den Gleichungen 25) auftreten. Für diese sind die Werte zu substituieren, die sich aus der Theorie der Kegelschnittsbewegung ergeben. Wir haben sie S. 177, Gl. 17) in Reihenentwicklungen gegeben, die nach den Potenzen der Zwischenzeiten fortschreiten, und es fragt sich daher, wie viele Glieder derselben mindestens mitgenommen werden müssen, wenn auch nur ein genähert richtiges Resultat für $\overline{\varrho_2}$ mittels derselben zustande kommen soll. Wir haben diese Frage bereits Seite 177 entschieden, können aber auch durch Diskussion der ersten Gl. 25) zum selben Resultat gelangen. Der Koeffizient $\frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}$ ging aus der Größe K, welche von der dritten Ordnung (Seite 262) ist, nach Weglassung eines Faktors erster Ordnung hervor, ist also von der zweiten Ordnung. Es müssen also auch auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder zweiter Ordnung vollzählig berücksichtigt sein, wenn nicht die Bestimmung von $\overline{\varrho_2}$ aus ihr einen Fehler nullter Ordnung aufweisen, also illusorisch sein soll. Es sind in n_1 und n_3 also die Glieder zweiter Ordnung, d. h. die zweiten Glieder der Reihenentwicklungen notwendig mitzunehmen; die dritten Glieder, die von der dritten Ordnung sind, können aber auch bereits nicht mehr von vorneherein berücksichtigt werden, da $\frac{dr_2}{d\tau}$ vor ermittelter Bahn völlig unbekannt ist. Ihre Vernachlässigung bei der ersten Näherung der Bestimmung von $\overline{\varrho_2}$ schadet aber auch nicht, da dieselbe in ϱ_2 nur einen Fehler erster Ordnung zur Folge hat, so daß für

$\overline{\varrho_2}$ ein wirklicher Näherungswert erhalten wird. Man erkennt aber nun auch leicht folgendes: Der bei der ersten Näherung gemachte Fehler wird um so kleiner ausfallen, je kleiner die Zwischenzeiten sind. Wünscht man also rasche Annäherung, so wird man bei ersten Bahnbestimmungen kleine Zwischenzeiten wählen müssen; bei großen Zwischenzeiten kann auch ein Fehler erster Ordnung recht Erhebliches geben, namentlich wenn $\frac{dr_2}{d\tau}$, welches von der Ordnung der Exzentrizität ist, nicht klein ist. Es gibt aber doch ein Mittel, auch bei beträchtlicheren Zwischenzeiten den Fehler der ersten Näherung herabzudrücken beziehungsweise nahe zu vernichten. Dasselbe ergibt sich sofort aus der Betrachtung des Gliedes dritter Ordnung in $n_1 + n_3$, nämlich (siehe Gl. 18) Seite 177)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\cdot\frac{dr_2}{d\tau}.$$

Dieses verschwindet, wenn die Zwischenzeiten τ_1 und τ_3 einander gleich sind. Wählt man also nahe gleiche Zwischenzeiten und richtet die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ so ein, daß $n_1 + n_3$ darin auftritt, so hat man das günstigste Resultat zu erwarten.

Durch die Glieder zweiter Ordnung, die wie erwähnt, unter allen Umständen mitzunehmen sind, wird der Radiusvektor r_2 in die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ eingeführt. Man muß also eine zweite Relation zwischen $\overline{\varrho_2}$ und r_2 noch heranziehen. Diese bietet sich aber unmittelbar in der schon früher aufgestellten Gleichung 5[a]), nämlich

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - L_2)$$

dar, deren bequeme Verbindung mit 25) also anzustreben sein wird.

Diese Überlegungen führen zu folgender Behandlung der ersten Gleichung 25). Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\eta_2\sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0} &= a_1\\ a_1R_1\sin(L_1-H_2) &= c_1\\ a_1R_2\sin(L_2-H_2) &= c_2\\ a_1R_3\sin(L_3-H_2) &= c_3\end{aligned}\qquad 26)$$

und beachtet, daß vermöge der Identität

$$\sin(L_3-L_2)\sin(L_1-H_2)+\sin(L_2-L_1)\sin(L_3-H_2)=\sin(L_3-L_1)\sin(L_2-H_2):$$

$$N_1R_1\sin(L_1-H_2)+N_3R_3\sin(L_3-H_2)=\frac{R_2R_3\sin(L_3-L_2)}{R_1R_3\sin(L_3-L_1)}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{R_1R_2\sin(L_2-L_1)}{R_1R_3\sin(L_3-L_1)}R_3\sin(L_3-H_2)$$
$$=R_2\sin(L_2-H_2)$$

oder

$$c_1N_1 + c_3N_3 = c_2$$

ist, so ergibt sich zuerst

$$\varrho_2 = c_1(N_1-n_1) + c_3(N_3-n_3) \qquad 27)$$

und dann:

$$\varrho_2 = c_2 - (c_1n_1 + c_3n_3)\,, \qquad 28)$$

was wir auch noch kürzer hätten erhalten können, wenn wir von der ursprünglichen Form 18) ausgegangen wären. Der Gleichung 28) aber läßt sich folgende Form geben:

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3 \dfrac{n_3}{n_1}}{1 + \dfrac{n_3}{n_1}} (n_1 + n_3), \qquad 29)$$

in welche $\frac{n_3}{n_1}$ und $n_1 + n_3$ einzutragen sind, während die c als völlig bekannte Größen angesehen werden können. Hätte man die strengen Werte von $\frac{n_3}{n_1}$ und $n_1 + n_3$, so würde 29) den strengen Wert von ϱ_2 liefern; man hat aber anfangs nur Näherungen, nämlich nach Gl. 18) und 19) (Seite 177)

$$n_1 + n_3 = \frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3} + \cdots$$
$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \cdots \right).$$

Um nun die Gl. 29) für alle Näherungen gebrauchen zu können, setzen wir darin

$$n_1 + n_3 = 1 + \frac{Q}{2 r_2^3}, \qquad \frac{n_3}{n_1} = P,$$

worauf sie übergeht in

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + P c_3}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3} \right); \qquad 30)$$

dann hat man in erster Näherung:

$$Q = \tau_1 \tau_3, \qquad P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \qquad 31)$$

und für die weiteren:

$$Q = 2 (n_1 + n_3 - 1) r_2^3, \qquad P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad 32)$$

wo für n_1, n_3, r_2 die jeweils durch die vorausgegangene Näherung erhaltenen Werte zu substituieren sind. Diesen Weg haben *Gauß* und nach ihm *Hansen* eingeschlagen. Man sieht aber, daß dabei das Glied

$$- \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3}$$

in $\frac{n_3}{n_1}$ bei der ersten Näherung übergangen wird, ohne daß dies unbedingt notwendig wäre, da in $n_1 + n_3$ ein Glied gleicher Beschaffenheit mitgenommen wird. Es ist dieses Glied bei nahe gleichen Zwischenzeiten zwar klein und es tut seine Vernachlässigung der Näherungsmethode keinen Abbruch (wie gleich gezeigt werden soll), es ist aber doch vorzuziehen, dasselbe zu berücksichtigen, weil dadurch die erste Näherung unter allen Umständen näher an den wahren Wert von ϱ_2 herankommt. Wenn nun auch noch, wie *Encke* gezeigt hat, seine Mitnahme keine wesentliche Vermehrung der Rechnung bedingt, so liegt kein Anlaß vor, diese bei stark ungleichen Zwischenzeiten nicht unwesentliche Verbesserung nicht zu adoptieren. Daß das Glied die Näherungsmethode nicht beeinträchtigt, seine Vernachlässigung also in ϱ_2 nur einen Fehler erster Ordnung erzeugt, findet man leicht wie folgt. Setzt man in der ursprünglichen Form $c_1 n_1 + c_3 n_3$ die Werte von n_1 und n_3 ein, aus denen $n_1 + n_3$ und $\frac{n_3}{n_1}$

hervorgegangen sind, nämlich Gl. 17) (Seite 177), so erhält man unter Berücksichtigung von 26)

$$a_1\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{\tau_3}{\tau_2}R_3\sin(L_3-H_2)\right)+\frac{a_1\tau_1\tau_3}{6r_2^{\,3}\tau_2}\left((\tau_1+\tau_2)R_1\sin(L_1-H_2)+(\tau_3+\tau_2)R_3\sin(L_3-H_2)\right)$$

oder:

$$a_1\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}R_1\sin(L_1-H_2)+\frac{\tau_3}{\tau_2}R_3\sin(L_3-H_2)\right)\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)+\frac{a_1\tau_1\tau_3}{6r_2^{\,3}\tau_2}(\tau_1-\tau_3)\left(R_3\sin(L_3-H_2)-R_1\sin(L_1-H_2)\right).$$

Da aber

$$R_3\sin(L_3-H_2)-R_1\sin(L_1-H_2)=(R_3+R_1)\sin\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\cos\left(\tfrac{1}{2}(L_3+L_1)-H_2\right)+$$
$$+(R_3-R_1)\cos\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\sin\left(\tfrac{1}{2}(L_3+L_1)-H_2\right)$$

von der ersten Ordnung ist, so ist das ganze letzte Glied unter Berücksichtigung, daß $\frac{1}{a_1}$ von der zweiten Ordnung ist, von der ersten Ordnung und seine Weglassung bringt also in ϱ_2 einen Fehler erster Ordnung hervor, der überhaupt unvermeidlich ist. Nimmt man also nur das erste Glied, so wird

$$\varrho_2=c_2-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}c_1+\frac{\tau_3}{\tau_2}\tau_3\right)\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)=c_2-\frac{c_1+\frac{\tau_3}{\tau_1}c_3}{1+\frac{\tau_3}{\tau_1}}\left(1+\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^{\,3}}\right)$$

ein wirklicher Näherungswert. Vergleicht man dies aber mit 30), so sieht man, daß

$$Q=\tau_1\tau_3\,,\qquad P=\frac{\tau_3}{\tau_1}$$

diesen herbeiführt.

Wir rechnen nun zuerst mit der allgemeinen Gl. 30) weiter und behalten uns noch vor, welche Werte für P und Q in erster Näherung wir gebrauchen wollen. Die Werte 31) sind hierzu unter allen Umständen brauchbar, können aber durch genauere ersetzt werden; die Werte 32) dienen für alle späteren Näherungen. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\frac{c_1+c_3P}{1+P}&=c\\ c_2-c&=k\\ \tfrac{1}{2}cQ&=l,\end{aligned}\qquad 33)$$

so schreibt sich 30) in folgender einfacher Gestalt:

$$\varrho_2=k-\frac{l}{r_2^{\,3}},$$

die nun mit der zweiten Beziehung zwischen ϱ_2 und r_2:

$$r_2^{\,2}=R_2^{\,2}+\varrho_2^{\,2}+2R_2\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_2)$$

zu verbinden ist. Wir haben schon oben (Seite 257) gesehen, daß

$$\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_2)=\cos\delta_2$$

ist, wo δ_2 den Winkel an der Erde zwischen den Richtungen nach dem Planeten und dem der Sonne entgegengesetzten Punkt der Sphäre bedeutet. Da wir diesen

Winkel weiter beibehalten wollen, soll seine Berechnung gezeigt werden. Im nebenstehenden Dreieck hat man:

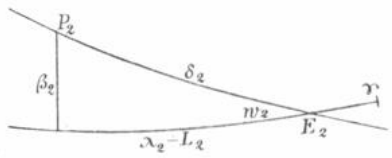


Fig. 47.

$$\begin{aligned} \sin w_2 \sin \delta_2 &= \sin \beta_2 \\ \cos w_2 \sin \delta_2 &= \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2) \\ \cos \delta_2 &= \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2) . \end{aligned} \tag{34}$$

Man kann $\sin \delta_2$ immer positiv annehmen, wenn man w_2 von 0° bis 360° laufen läßt.

Eliminiert man ϱ_2 aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_2 &= k - \frac{l}{r_2^3} \\ r_2^2 &= R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos \delta_2 , \end{aligned} \tag{35}$$

so entsteht eine Gleichung achten Grades in r_2, aus der dieses ermittelt werden muß. Wir haben dieselbe schon gelegentlich des Lambertschen Satzes abgeleitet; sie steht überhaupt im Mittelpunkt einer jeden Bahnbestimmungsmethode. Lambert*) scheint zuerst auf sie gestoßen zu sein, wenn auch in noch etwas unkorrekter Form. Lagrange**) hat sie zuerst völlig einwandfrei aufgestellt. Auch in der auf ganz anderen Grundlagen beruhenden Methode von Laplace***) tritt sie auf. Die Auflösung derselben auf eine höchst einfache Rechnung zurückzuführen, ist Gauß†) gelungen, weshalb sie häufig als Gaußsche Gleichung bezeichnet wird. Führt man in dem ebenen Dreieck zwischen Sonne, Erde und Planet noch den Winkel am Planeten ein: z, so wird:

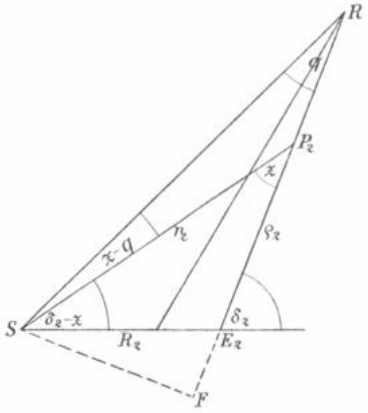


Fig. 48.

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z} , \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin (\delta_2 - z)}{\sin z} . \tag{36}$$

Trägt man letzteren Wert in die erste Gl. 35) ein:

$$\frac{R_2 \sin (\delta_2 - z)}{\sin z} - k + \frac{l}{r_2^3} = 0$$

und setzt

$$\begin{aligned} R_2 \sin \delta_2 &= \mu \sin q \\ R_2 \cos \delta_2 + k &= \mu \cos q , \end{aligned} \tag{37}$$

so wird daraus:

$$\frac{\mu \sin (z - q)}{\sin z} = \frac{l}{r_2^3}$$

---

*) *Lambert*, Orb. Com. 1761. Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 70.
**) *Lagrange*, Oeuvres Vol. IV. p. 469.
***) *Laplace*, Méc. cél. Vol. I, Livre II, No. 31.
†) *Gauß*, Theoria motus No. 141.

und wenn hier r_2 noch durch seinen obigen Wert 36) ersetzt wird:

$$\mu \sin(z - q) = \frac{l \sin z^4}{(R_2 \sin \delta_2)^3}.$$

Setzt man endlich zur Abkürzung

$$\frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} = m, \qquad 38)$$

so erscheint die Gleichung:

$$\sin(z - q) = m \sin z^4. \qquad 39)$$

Werden hierin m und q als bekannt angenommen, so kann z ermittelt werden; hierauf folgen r_2 und ϱ_2 durch die Gl. 36). — Die durch 37) eingeführten Hilfsgrößen μ und q besitzen eine merkwürdige geometrische Bedeutung, die wir leicht durch unsere Betrachtungen über den Lambertschen Satz (Seite 240) feststellen können, zugleich mit der Bedeutung der durch 33) definierten Größe k. Vergleichen wir nämlich die erste Gl. 35) mit der dort (Seite 240) abgeleiteten Gl. 4), so ersehen wir, daß die Größe k mit der auch dort so bezeichneten identisch ist, also wie dort gezeigt folgende geometrische Bedeutung besitzt. Wird auf der Linie $E_2 P_2$ der Punkt R, wo die Verbindungslinie der Sehnenschnittpunkte der Erd- und Planetenbahn hintrifft aufgesucht, so ist k die Entfernung dieses Punktes von E_2. Fällt man nun von S das Lot $SF = R_2 \sin \delta_2$ auf $E_2 R$ und verbindet R mit S, so wird $RF = k + R_2 \cos \delta_2$ und daher im Dreieck SFR:

$$R_2 \sin \delta_2 = SR \sin \widehat{SRF}$$

$$k + R_2 \cos \delta_2 = SR \cos \widehat{SRF},$$

d. h., wie die Vergleichung mit 37) zeigt, μ ist die Entfernung des Punktes R von der Sonne und q ist der Winkel bei R zwischen den Richtungen nach der Sonne und nach dem Planeten.

Bei der Auflösung der Gleichungen 37) kann man den Quadranten von q stets so wählen, daß μ das Zeichen von l hat; es wird dann m stets eine positive Größe.

Die *Auflösung der transzendenten Gl.* 39) nach z kann leicht durch Versuche bewerkstelligt werden, wozu es sich vor allem um die Beschaffung eines ersten Näherungswertes handelt. Hat man eine Kometenbahn zu bestimmen, so ist meist bereits eine parabolische Bahnbestimmung vorangegangen, durch die man genäherte Werte von r_2 oder ϱ_2 kennen gelernt hat; durch diese aber erhält man nach 36)

$$\sin z = \frac{R_2}{r_2} \sin \delta_2 = \frac{R_2}{\varrho_2} \sin(\delta_2 - z).$$

Ist dies nicht der Fall, so wird man wenigstens beachten, daß z kleiner als δ sein muß, da sonst ein negativer Wert von ϱ_2 sich ergäbe. Handelt es sich um einen kleinen Planeten in der Nähe der Opposition, so wird z kaum größer als 8°, $\sin z^4$ ist also klein und daher auch $\sin(z - q)$; daraus folgt, daß q ein Näherungswert von z sein wird und daß daher der aus

$$\sin(z - q) \mp m \sin q^4$$

sich ergebende Wert von z der Wahrheit schon ziemlich nahe kommen wird. Man kann dann mit logarithmischen Differenzen weiter operieren. Aus 39) folgt

$$\log m + 4\log\sin z - \log\sin(z-q) = 0;$$

hat man aber nur den Näherungswert z_1 eingetragen, so wird

$$\log m + 4\log\sin z_1 - \log\sin(z_1-q) = \Delta$$

sein. Nennt man

d die log. Differenz für 1″ Änderung von z_1 in $\sin z_1$
D - - - - - - - - $\sin(z_1-q)$,

dz die Korrektion von z_1, welche Δ zum Verschwinden bringt, so daß z_1+dz der wahre Wert wird, so ist offenbar

$$dz(4\,\mathrm{d}-\mathrm{D}) = -\Delta$$

die Bedingung dafür, daß z_1+dz der Gleichung genügt; also wird man z_1 um

$$dz = \frac{\Delta}{\mathrm{D}-4\,\mathrm{d}}$$

zu korrigieren haben. — *Tietjen* schlägt folgendes noch schneller fördernde Verfahren vor. Ist $q+dz$ der genaue Wert von z, so muß

$$\sin dz = m\sin(q+dz)^4$$

erfüllt sein; daraus folgt durch Entwicklung, daß genähert

$$dz = m\sin q^4 + 4m\sin q^3\cos q\,dz$$

oder

$$dz = \sin(z'-q) = \frac{m\sin q^4}{1-4m\sin q^4\operatorname{cotg} q} \qquad \text{(a)}$$

sein muß. Leitet man mit dem hieraus folgenden z' den weiteren Näherungswert z'' aus

$$\sin(z''-q) = m\sin z'^4 \qquad \text{(b)}$$

ab und notiert dabei wie oben die logarithmischen Differenzen d und D, so wird die Bedingung für den folgenden Näherungswert z''' nach dem Obigen:

$$z'''-z'' = \frac{\Delta}{\mathrm{D}-4d},$$

wo

$$\begin{aligned}\Delta &= \log m + 4\log\sin z'' - \log\sin(z''-q)\\ &= \log m + 4\log\sin z'' - \log m - 4\log\sin z'\\ &= 4\log\sin z'' - 4\log\sin z' = 4(z''-z')\,\mathrm{d}.\end{aligned}$$

Der nur selten einer weiteren Verbesserung bedürftige Wert z''' wird also aus

$$z''' = z'' + \frac{4\,\mathrm{d}}{\mathrm{D}-4\,\mathrm{d}}(z''-z') \qquad \text{(c)}$$

erhalten. Die Durchrechnung von (a), (b), (c) löst die Gl. 39).

Beispiel. Auflösung der Gleichung: $\sin(x - 5^\circ 56' 14''.4) = [1.304548] \sin x^4$. (Erste Methode.)

$\sin q$	9.014691		Δ	+ 1827	D − 4d = 752.0
$\sin q^4$	6.058764		dx	+ 2''.43	
m	1.304548		x_3	6° 4' 58''.79	
$\sin(x_1 - q)$	7.363312	D = 911.5	$\sin x_3$	9.025179	d = 19.8
$x_1 - q$	0° 7' 56''.14		$\sin x_3^4$	6.100716	
x_1	6 4 10.54		$m \sin x_3^4$	7.405264	
$\sin x_1$	9.024225	d = 19.8	$\sin(x_3 - q)$	7.405229	D = 828
$\sin x_1^4$	6.096900		Δ	+ 35	D − 4d = 749
$m \sin x_1^4$	7.401448		dx	+ 0''.04	
Δ	+ 38136	D − 4d = 832.3	x	6° 4' 58''.83.	
dx	+ 45''.82				
x_2	6° 4' 56''.36				
$\sin x_2$	9.025131	d = 19.8			
$\sin x_2^4$	6.100524				
$m \sin x_2^4$	7.405072				
$\sin(x_2 - q)$	7.403245	D = 831.2			

Ein Beispiel für die zweite Methode findet sich unten bei der vollständigen Durchführung einer Bahnbestimmung. Ein graphisches Verfahren für die Auflösung der Gaußschen Gleichung hat Radau angegeben (Bulletin Astr. T. II, S. 1, 1885).

86. Die Hypothesenrechnung. Wir haben uns oben überzeugt, daß man einen ersten Näherungswert von ϱ_2 und r_2 erhält, wenn man in den Formeln 33), 34), 37), 38), 39), 36), nämlich zusammengestellt:

$$\frac{c_1 + c_3 P}{1 + P} = c \qquad \sin w_2 \sin \delta_2 = \sin \beta_2$$
$$c_2 - c = k \qquad \cos w_2 \sin \delta_2 = \cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$$
$$\tfrac{1}{2} c Q = l \qquad \cos \delta_2 = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$

40)

$$\mu \sin q = R_2 \sin \delta_2 \qquad m = \frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3}$$
$$\mu \cos q = R_2 \cos \delta_2 + k$$
μ hat das Zeichen von l

$$\sin(x - q) = m \sin x^4$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin x}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - x)}{\sin x}$$

für P und Q in erster Näherung $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ bzw. $\tau_1 \tau_3$ nimmt. Dies ist der *Gauß*sche Weg. Man kann aber nach *Encke*, wie jetzt gezeigt werden soll, durch Einführung anderer Werte für k und l eine bessere Näherung für r_2 und ϱ_2 erlangen. Zu diesem Ende gehen wir von der oben abgeleiteten Form 27) der Grundgleichung aus, nämlich

$$\varrho_2 = c_1 (N_1 - n_1) + c_3 (N_3 - n_3) \qquad 27)$$

und substituieren darin für n_1 und n_2 die Entwicklungen 17) (Seite 177), soweit sie bekannt sind, nämlich

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{r_2^3} + \cdots\right), \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{r_2^3} + \cdots\right),$$

dann kommt:

$$\varrho_2 = c_1\left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + c_3\left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) - \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}\left(c_1\frac{\tau_2+\tau_1}{\tau_2} + c_3\frac{\tau_2+\tau_3}{\tau_2}\right);$$

wird also gesetzt:

$$\begin{gathered}\frac{\tau_1}{\tau_2} = n_1^0, \quad \frac{\tau_3}{\tau_2} = n_3^0, \quad \frac{\tau_1\tau_3}{6} = q^0 \\ c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0) = k^0 \\ q^0(1+n_1^0) = \nu_1, \quad q^0(1+n_3^0) = \nu_3 \\ c_1\nu_1 + c_3\nu_3 = l^0,\end{gathered} \tag{41}$$

so erscheint:

$$\varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2^3}$$

d. h. eine Gleichung von derselben Bildung wie 35). Setzt man also in 40) statt k und l die aus 41) hervorgehenden k^0 und l^0, so erhält man wie dort r_2 und ϱ_2, aber etwas genauer.

Die Durchführung der weiteren Näherungen gestaltet sich ganz gleich, ob man nach 40) oder nach 41) gerechnet hat. Man braucht genauere Werte von n_1 und n_3, die nur durch Berechnung der beiden äußeren Radienvektoren r_1 und r_3 erlangt werden können, ob man nun damit die Elemente berechnet und daraus $\frac{dr_2}{d\tau}$, das in den nicht berücksichtigten Entwicklungsgliedern von n_1 und n_3 auftritt, oder ob man die Verbesserung der Dreiecksflächen durch Ermittlung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck anstrebt. Wir zeigen daher zuerst, wie ϱ_1 und ϱ_3 und daraus r_1 und r_3 gefunden werden. Die beiden letzten Formeln in 25) haben hierzu eine bereits völlig genügende Form; setzt man zur Abkürzung die völlig bekannten Größen:

$$\begin{gathered}\frac{Z_1}{D_1} = M_1, \qquad \frac{Z_3}{D_3} = M_3 \\ R_1\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} = M_1', \qquad R_3\frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3} = M_3'\end{gathered} \tag{42}$$

so folgt:

$$\begin{gathered}n_1\overline{\varrho_1} = M_1\overline{\varrho_2} + M_1'(N_1 - n_1) \\ n_3\overline{\varrho_3} = M_3\overline{\varrho_2} + M_3'(N_3 - n_3)\end{gathered} \tag{43}$$

Kontrolle: $n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$.

Hat man nach 40) gerechnet, so wird man hierin für n_1 und n_3, da jetzt r_2 bekannt ist, nach 32) nehmen können:

$$\begin{gathered}P = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \qquad Q = \tau_1\tau_3 \\ n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)\frac{1}{1+P}, \qquad n_3 = n_1 P.\end{gathered} \tag{44}$$

Hat man nach 41) gerechnet, so wird mittels der schon dort benutzten Hilfsgrößen:

$$n_1 = n_1^0 + \frac{\nu_1}{r_2^3}, \qquad n_3 = n_3^0 + \frac{\nu_3}{r_2^3}. \tag{45}$$

Die geozentrischen Koordinaten λ, β, ϱ sind jetzt für alle drei Örter in erster Näherung bekannt geworden. Daraus leitet man die heliozentrischen l, b, r leicht ab, am bequemsten mittels der Formeln 20) (Seite 32):

$$\begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \bar{\varrho}\cos(\lambda - L) + R \\ r\cos b\sin(l-L) &= \bar{\varrho}\sin(\lambda - L) \\ r\sin b &= \bar{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\beta\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Das hieraus neuerdings hervorgehende r_2 muß mit dem früher erhaltenen übereinstimmen, was aber keineswegs eine weitgehende Kontrolle ist. Durchgreifende Prüfungen werden sich bald darbieten. Wie man aus zwei heliozentrischen Örtern, als welche man hier am sichersten die beiden äußersten wählt, Knoten und Neigung der Bahnebene und dann die Argumente der Breite u bestimmt, haben wir schon in Nr. 69 behandelt und wollen hier nur die am häufigsten angewendeten Formeln zusammenstellen:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,i\sin(l_1 - \Omega) &= \mathrm{tg}\,b_1 \\ \mathrm{tg}\,i\cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\mathrm{tg}\,b_3 - \mathrm{tg}\,b_1\cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)} \\ \mathrm{tg}\,u_1 &= \mathrm{tg}(l_1 - \Omega)\sec i \\ \mathrm{tg}\,u_2 &= \mathrm{tg}(l_2 - \Omega)\sec i \\ \mathrm{tg}\,u_3 &= \mathrm{tg}(l_3 - \Omega)\sec i\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Da der mittlere Ort in der Bahnebene gelegen sein muß, so kann man die Prüfungsgleichung anwenden

$$\mathrm{tg}\,i\sin(l_2 - \Omega) = \mathrm{tg}\,b_2\,, \tag{48}$$

die von großer Wichtigkeit und durchgreifender Wirkung ist, da sie auch alle für die Bedingung der Ebene berechneten Hilfsgrößen kontrolliert. Die mittels der r und u gebildeten Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, nämlich:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \quad \text{und} \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \tag{49}$$

müssen mit den Werten 45) von n_1 bzw. n_3, welche der Hypothese zugrunde liegen, übereinstimmen, was eine weitere, gute Prüfung der bisherigen Rechnung gestattet.

Durch die Radienvektoren r_1, r_2, r_3, die von ihnen eingeschlossenen Winkel $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ und $u_3 - u_1$, und durch die Zwischenzeiten $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_3 - t_1$ kann man nach einer der in Nr. 49 für die Ellipse, in Nr. 57 für die Parabel und in Nr. 61 für die Hyperbel auseinandergesetzten Methoden die Verhältnisse Sektor durch Dreieck bestimmen. Zuvor wird man jedoch die Beobachtungszeiten für Planetenaberration korrigieren (Nr. 27), d. h. man wird statt t_1, t_2, t_3 benutzen:

$$t_1^0 = t_1 - A\varrho_1\,, \qquad t_2^0 = t_2 - A\varrho_2\,, \qquad t_3^0 = t_3 - A\varrho_3\,,$$

wo A die Lichtzeit ist. Hat man die t in Bruchteilen des Tages angesetzt, so wird $\log A = 7.76118_{-10}$. Es seien $y_1 = \frac{(23)}{[r_2 r_3]}$, $y_2 = \frac{(13)}{[r_1 r_3]}$ und $y_3 = \frac{(12)}{[r_1 r_2]}$ die Ver-

hältnisse Sektor durch Dreieck, dann wird, weil sich die Sektoren wie die Zwischenzeiten verhalten:

$$\begin{aligned}(n_1)_{II} &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_2}{y_1}\frac{(23)}{(13)} = \frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{t_3^0 - t_2^0}{t_3^0 - t_1^0}\\ (n_3)_{II} &= \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{y_2}{y_3}\frac{(12)}{(13)} = \frac{y_2}{y_3}\frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_1^0}.\end{aligned} \qquad 50)$$

Dieses sind die verbesserten Werte für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, mit denen nun die zweite Annäherung durchgeführt werden muß. Bedient man sich der Formel 40), so ist also darin zu setzen nach 32):

$$\begin{aligned}P &= \frac{(n_3)_{II}}{(n_1)_{II}} = \frac{y_1}{y_3}\frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_2^0} = \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}\\ Q &= 2\left((n_1)_{II} + (n_3)_{II} - 1\right) r_2^3 .\end{aligned}$$

Um Q einfacher zu schreiben, ziehen wir den Ausdruck 5[a]) (Seite 153) für den Parameter p heran, der in der hier benutzten Bezeichnung wie folgt lautet:

$$p = \frac{[r_2 r_3][r_1 r_2]}{n_1 + n_3 - 1}\,\frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)};$$

da nun

$$\begin{aligned}[r_2 r_3] &= \frac{(23)}{y_1} = \frac{k\sqrt{p}(t_3 - t_2)}{y_1} = \frac{\sqrt{p}\,\tau_1}{y_1}\\ [r_1 r_2] &= \frac{(12)}{y_3} = \frac{k\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{y_3} = \frac{\sqrt{p}\,\tau_3}{y_3},\end{aligned}$$

so folgt

$$[r_2 r_3][r_1 r_2] = \frac{p\,\tau_1\tau_3}{y_1 y_3}$$

und daher:

$$n_1 + n_3 - 1 = \frac{\tau_1\tau_3}{y_1 y_3}\,\frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}P &= \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}\\ Q &= \frac{\tau_1^0\tau_3^0}{y_1 y_3}\,\frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.\end{aligned} \qquad 51)$$

Hat man das Verfahren nach 41) eingeschlagen, so wird man in der zweiten Hypothese zunächst neu zu rechnen haben:

$$\frac{\tau_1^0}{\tau_2^0} = n_1^0, \qquad \frac{\tau_3^0}{\tau_2^0} = n_3^0.$$

Dann wird nach 50)

$$n_1 = \frac{y_2}{y_1} n_1^0, \qquad n_3 = \frac{y_2}{y_3} n_3^0,$$

oder

$$n_1 = n_1^0 + n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right), \qquad n_3 = n_3^0 + n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)$$

und wenn dies in

$$\varrho_2 = c_1(N_1 - n_1) + c_3(N_3 - n_3)$$

eingetragen wird:

$$\varrho_2 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0) - \frac{1}{r_2^3}\left(c_1 n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) r_2^3 + c_2 n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right) r_2^3\right).$$

Setzt man also neuerdings wie früher

$$k^0 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0),$$

aber nunmehr:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 = n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) r_2^3, \qquad \nu_3 = n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right) r_2^3 \\ c_1\nu_1 + c_3\nu_3 = l^0, \\ \varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2^3}, \end{aligned}\right\} \quad 52)$$

so wird wieder

und das Verfahren kann nun mit ungeänderten Formeln fortgesetzt werden.

Die Hypothesenrechnung kann als abgeschlossen betrachtet werden, wenn die bei der letzten Hypothese benutzten n_1 und n_3 sich durch

$$n_1^0 \cdot \frac{y_2}{y_1} \text{ und } n_3^0 \cdot \frac{y_2}{y_3}$$

wieder ergeben. Es sind dann die richtigen Werte der Verhältnisse der Dreiecksflächen benutzt worden. Eine zweite Hypothese muß man schon deshalb rechnen, weil bei der ersten die Zeiten nicht für Aberration korrigiert waren. Mehr als zwei Hypothesen sind aber nur in den Fällen erforderlich, wo es sich um große Zwischenzeiten oder um elliptische Kometenbahnen handelt.

Ist die Hypothesenrechnung abgeschlossen, so schreitet man zur *Elementenbestimmung*. Wir haben diese Aufgabe in Nr. 50 bereits vollständig behandelt und können uns daher hier darauf beschränken anzugeben, daß der Parameter p aus allen drei Zwischenzeiten ermittelt werden kann. Es ist nämlich:

$$\sqrt{p} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2) y_1}{\tau_1^0} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1) y_2}{\tau_2^0} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1) y_3}{\tau_3^0}$$

und diese drei Werte müssen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Rechnung übereinstimmen, was eine gute Kontrolle bietet. Bei geringen Abweichungen verdient natürlich der zweite Wert ein größeres Gewicht.

Eine durchgreifende Schlußkontrolle der ganzen Rechnung wird durch die Nachrechnung eines der geozentrischen Örter, am einfachsten des mittleren, geboten, wenn man direkt von den Elementen ausgeht und keine Größen der vorangegangenen Rechnung entnimmt. Man muß sich also folgender Formeln bedienen:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= M_0 + (t_2^0 - t_0)\mu \\ E_2 - e\sin E_2 &= M_2 \\ r_2\sin v_2 &= a\cos\varphi\sin E_2 \\ r_2\cos v_2 &= a(\cos E_2 - e) \\ u_2 &= v_2 + \omega \\ \varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Omega) &= r_2\cos u_2 - R_2\cos(L_2 - \Omega) \\ \varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - \Omega) &= r_2\sin u_2\cos i - R_2\sin(L_2 - \Omega) \\ \varrho_2\sin\beta_2 &= r_2\sin u_2\sin i. \end{aligned}\right\} \quad 53)$$

Mehr als eine Darstellung der drei Örter innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der benutzten Logarithmentafel kann die Methode nicht gewähren. Man kann die Elemente aber oft in weiten Grenzen variieren, ohne diese Darstellung zu gefährden.

87. Zusammenstellung der Formeln für eine erste Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. Zur Übersicht über die bisherigen Entwicklungen und zur Vorlage für die Rechnung stellen wir im folgenden die Bahnbestimmungsformeln zusammen. Die Koordinaten seien auf Ekliptik und Äquinoktium des Jahresanfanges reduziert, auch die Fixsternaberration sei in Abzug gebracht, da wir die Berücksichtigung der Aberration nach der ersten Methode in Nr. 27 voraussetzen. Parallaxe und Sonnenbreiten werden bei ersten Bahnbestimmungen zweckmäßig vernachlässigt; will man sie berücksichtigen, so kann dies nach Nr. 35 geschehen. Die Formeln sind selbstverständlich auch anwendbar, wenn bereits eine erste Bahnbestimmung vorausgegangen ist und eine zweite mit anderen Beobachtungen sich daran schließen soll. Die dann möglichen Modifikationen der Formeln und die Vorteile, die man aus der ersten Bestimmung ziehen kann, werden wir in Nr. 96 besprechen.

Daten:

	Des Planeten		Der Erde	
Beob. Z.	Länge	Breite	Länge	log Rad. vect.
t_1	λ_1	β_1	L_1	$\log R_1$
t_2	λ_2	β_2	L_2	$\log R_2$
t_3	λ_3	β_3	L_3	$\log R_3$

I. Lage des größten Kreises 1,3 und Abstand des Punktes 2.

$$\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_1$$

$$\operatorname{tg}\eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

Kontrolle: $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_3$

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_2 - H_2)$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}\eta_2 \sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}.$$

II. Zwischenzeiten.

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2)$$
$$\tau_2 = k(t_3 - t_1)$$
$$\tau_3 = k(t_2 - t_1)$$

$$\log k = 8.235\,5814_{-10}$$

$$q^0 = \frac{\tau_1 \tau_3}{6} \qquad \log\tfrac{1}{6} = 9.221\,8487_{-10}$$

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3^0 = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$\nu_1 = q^0(1 + n_1^0), \qquad \nu_3 = q^0(1 + n_3^0).$$

III. Erdbahn.

$$N_1 = \frac{R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}, \qquad N_3 = \frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}$$

$$c_1 = a_1 R_1 \sin(L_1 - H_2), \quad c_2 = a_1 R_2 \sin(L_2 - H_2), \quad c_3 = a_1 R_3 \sin(L_3 - H_2)$$

Kontrolle: $c_1 N_1 + c_3 N_3 = c_2$.

IV. Koeffizienten der Gaußschen Gleichung.

$$k^0 = c_1(N_1 - n_1{}^0) + c_3(N_3 - n_3{}^0)$$
$$l^0 = c_1\nu_1 + c_3\nu_3$$
$$\sin w_2 \sin\delta_2 = \sin\beta_2$$
$$\cos w_2 \sin\delta_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \qquad \delta < 180^\circ$$
$$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$
$$\mu \sin q = R_2 \sin\delta_2 \qquad \mu \text{ hat das Zeichen von } l^0$$
$$\mu \cos q = R_2 \cos\delta_2 + k^0$$
$$m = \frac{l^0}{\mu(R_2 \sin\delta_2)^3}.$$

V. Auflösung der Gaußschen Gleichung.

$$\sin(z - q) = m \sin z^4$$
$$\sin(z' - q) = \frac{m \sin q^4}{1 - 4m \sin q^4 \operatorname{cotg} q}$$
$$\sin(z'' - q) = m \sin z'^4$$

d log. Diff. für 1″ in $\sin z'$
D » » » » » $\sin(z'' - q)$

$$z''' = z'' + \frac{4\,\mathrm{d}}{\mathrm{D} - 4\,\mathrm{d}}(z'' - z').$$

VI. Mittlerer Ort.

$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad \overline{\varrho_2} = \varrho_2 \cos\beta_2$$

Kontrolle: $\varrho_2 = k^0 - \frac{l^0}{r_2{}^3}$.

VII. Koeffizienten für die Gl. in ϱ_1 und ϱ_3.

$$n_1 = n_1{}^0 + \frac{\nu_1}{r_2{}^3}, \qquad n_3 = n_3{}^0 + \frac{\nu_3}{r_2{}^3}$$
$$Z_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)\operatorname{tg}\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$D_1 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_3 - H_2)$$
$$Z_3 = \sin(\lambda_2 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\operatorname{tg}\beta_2$$
$$D_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\sin(L_1 - H_2)$$
$$M_1 = \frac{Z_1}{D_1}, \qquad M_3 = \frac{Z_3}{D_3}$$
$$M_1' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3}{D_1} R_1, \qquad M_3' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1}{D_3} R_3.$$

VIII. Best. von ϱ_1 und ϱ_3.

$$n_1\overline{\varrho_1} = M_1\overline{\varrho_2} + M_1'(N_1 - n_1)$$
$$n_3\overline{\varrho_3} = M_3\overline{\varrho_2} + M_3'(N_3 - n_3)$$
Kontrolle: $n_1\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + n_3\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = \overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$
$$\varrho_1 = \overline{\varrho_1}\sec\beta_1, \qquad \varrho_3 = \overline{\varrho_3}\sec\beta_3.$$

IX. Hel. Örter und Bahnlage.

$$r\cos b \sin(l - L) = \bar{\varrho}\sin(\lambda - L)$$
$$r\cos b \cos(l - L) = \bar{\varrho}\cos(\lambda - L) + R$$
$$r\sin b = \bar{\varrho}\operatorname{tg}\beta$$
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
Kontrolle: $\operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} b_2$.

X. $\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$ Bei Planeten: u im Quadranten von $l - \Omega$.
$\operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2 - \Omega)\sec i$ » Kometen: $u < 180^\circ$ wenn die Breite +
$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i$ » » $u > 180^\circ$ » » » —

Kontrolle: $\dfrac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} = n_1$, $\qquad \dfrac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} = n_3$.

XI. Verbesserung der Beobachtungszeiten für Aberration.

$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A$, $t_2^0 = t_2 - \varrho_2 A$, $t_3^0 = t_3 - \varrho_3 A$ $\quad \log A = 7.76118_{-10}$ in Einheiten des Tages

$k(t_3^0 - t_2^0) = \tau_1^0$, $k(t_3^0 - t_1^0) = \tau_2^0$, $k(t_2^0 - t_1^0) = \tau_3^0$

$\dfrac{\tau_1^0}{\tau_2^0} = n_1^0$, $\qquad \dfrac{\tau_3^0}{\tau_2^0} = n_3^0$.

XII. Sektor durch Dreieck.

Nach Hansen:

$$m_2 = \frac{\tau_2^{0\,2}}{(2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3})^3}$$

$$\sec\gamma_2 = \frac{r_1 + r_3}{2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3}}$$

$$l_2 = \tfrac{1}{2}(\sec\gamma_2 - 1)$$

$$h_2 = \frac{m_2}{\frac{5}{6} + l_2}$$

$$y_2 = 1 + \frac{\frac{10}{11}\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h}$$

$$1 + \tfrac{11}{9}h$$

$\log\frac{10}{11} = 9.958\,6073$
$\log\frac{11}{9} = 0.087\,1502$
$\log\frac{5}{6} = 9.920\,8188$

oder nach Encke:

$$\cos\gamma_2 = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{r_1 + r_3}$$

$$\Gamma_2 = \log\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}$$

(Γ_2 mit Argument $\log\sec\gamma_2$ aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen)

$$\eta_2 = \frac{\tau_2^{0\,2}}{k^2(r_1 + r_3)^3} \qquad \log k^2 = 6.471\,1629_{-10}$$

$$\log y_2 = a'\eta_2 + a''\eta_2 - b''\eta_2^2$$

$\log a' = 3.233\,8859$
$a'' = 3.614\,0972 - \Gamma_2$
$b'' = 0.034\,1076$,

wobei die siebente Dezimale als Einheit genommen ist. Bei großen Zwischenzeiten bedient man sich der Gaußschen Methode (Nr. 49). Ebenso werden y_1 und y_3 berechnet.

XIII. Zweite Hypothese.

$k^0 = c_1(N_1 - n_1^0) + c_3(N_3 - n_3^0)$

$\nu_1 = n_1^0\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right)r_2^3$, $\quad \nu_3 = n_3^0\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)r_2^3$ } n_1^0 und n_3^0 aus XI.

$$l^0 = c_1\nu_1 + c_3\nu_3$$

$\mu\sin q = R_2\sin\delta_2$
$\mu\cos q = R_2\cos\delta_2 + k^0$ $\quad \mu$ hat das Zeichen von l^0

$$m = \frac{l^0}{\mu(R_2\sin\delta_2)^3}.$$

Die Formeln VII—XII werden von neuem durchgerechnet, wobei natürlich die Größen δ_2, M_1, M_3, M_1', M_3', N_1, N_3 der früheren Rechnung ungeändert entnommen werden können.

Die Hypothesenrechnung kann als abgeschlossen gelten, wenn $n_1{}^0\frac{y_2}{y_1}$ und $n_3{}^0\frac{y_2}{y_3}$ sich als identisch mit den bei der letzten Hypothese benutzten n_1 bzw. n_3 herausstellen. Bei kleinen Zwischenzeiten tritt dies häufig schon nach Durchrechnung von I—XII ein; dann ist eine zweite Hypothese überhaupt nicht nötig.

Berechnung der Elemente.

XIV. p, e, ω, a.

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2{}^0} y_2 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1{}^0} y_1 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3{}^0} y_3$$

$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1 , \qquad \frac{p}{r_3} - 1 = q_3$$

$$e\cos v_1 = q_1$$

$$e\sin v_1 = \frac{q_1\cos(u_3 - u_1) - q_3}{\sin(u_3 - u_1)}$$

$$e = \sin\varphi , \qquad a = p\sec\varphi^2$$

$$\omega = u_1 - v_1 ; \qquad v_2 = u_2 - \omega ; \qquad v_3 = u_3 - \omega$$

Kontrolle: $r_2 = \frac{p}{1 + e\cos v_2}$.

XV. M_0, μ.

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_1 - E_1) = \sqrt{\frac{r_1}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_1$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - E_3) = \sqrt{\frac{r_3}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_3$$

Kontrolle: $a\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(E_3 - E_1) = \sqrt{r_1 r_3}\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)$

$$M_1 = E_1 - (\sin\varphi)''\sin E_1$$
$$M_3 = E_3 - (\sin\varphi)''\sin E_3 \qquad \log(\sin\varphi)'' = \log\sin\varphi + 5.3144251$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3.5500066$$

Kontrolle: $\mu = \frac{M_3 - M_1}{t_3{}^0 - t_1{}^0}$.

Bei größeren Zwischenzeiten leitet man μ mittels dieser letzteren Formel ab und darauf a aus

$$a = \left(\frac{k''}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nennt man t_0 die Epoche, M_0 die zugehörige mittlere Anomalie, so wird

$$M_0 = M_1 + \mu(t_0 - t_1{}^0) = M_3 + \mu(t_0 - t_3{}^0) .$$

Knoten und Neigung werden bereits bei der Durchrechnung der letzten Hypothese erhalten.

Die zusammengestellten Elemente sind:

Epoche	t_0	
Mittlere Anomalie für die Epoche	M_0	
Abstand des Perihels vom Knoten	ω	Mittl. Äqu. und Ekliptik des Jahresanfanges
Länge des Knotens	Ω	
Neigung gegen die Ekliptik . . .	i	
Exzentrizitätswinkel	φ	
Mittlere tägliche Bewegung . . .	μ	
Log der halben großen Achse . .	$\log a$.	

XVI. Berechnung des mittleren Ortes nach den Formeln 53 (Seite 277).

88. Beispiel einer ersten Bahnbestimmung. Die folgenden Seiten enthalten ein nach den vorausgehenden Formeln durchgeführtes Beispiel und zwar ist jede bei der Rechnung zur Niederschrift gelangte Zahl mitgeteilt. Auch die Bedeutung jeder Zahl ist, so weit möglich, angegeben, damit man imstande sei, zu erkennen, wie die Rechnung möglichst übersichtlich anzulegen ist. Zugrunde gelegt sind die Heidelberger Beobachtungen des Planeten 1904 OA in Astr. Nachr. Band 165, S. 349; die Beobachtungszeiten wurden in Berliner Zeit und dann in Bruchteile des Tages verwandelt; die Örter beziehen sich auf das Äquinoktium des Jahresanfanges und sind von der Fixsternaberration befreit. Die Verwandlung der äquatorialen Koordinaten in ekliptikale ist Seite 22 durchgeführt. Die Erdörter sind aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert.

Planet (534) [1904 OA]

	1904		1904.0		1904.0		
t_1	Apr. 19.62201	λ_1	209° 52′ 35″.1	L_1	209° 34′ 6″.5	$\log R_1$	0.00 2167
t_2	35.47806	λ_2	206 39 3.9	L_2	224 58 10.5	» R_2	0.00 3924
t_3	49.46833	λ_3	204 26 33.6	L_3	238 28 22.0	» R_3	0.00 5255
				H_2	165 46 52.7	» a_1	1.90 0447
I. $\operatorname{tg}\beta_1$	8.89 0670	$\operatorname{tg}\beta_2$	8.87 2248	$\operatorname{tg}\beta_3$	8.84 3836	$(\lambda_3-\lambda_1)$	$-5°\,26'\,1''.5$
$\operatorname{tg}\eta_2\cos(\lambda_1-H_2)$	8.90 4390	$\operatorname{tg}\beta_0$	8.86 3958	$\operatorname{tg}\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1)$	8.88 8714	sin »	$8.97\,6326_n$
$\cos(\lambda_1-H_2)$	9.85 6237	$\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0$	7.14 8908	Sub.	9.03 6880	cos »	9.99 8044
$\operatorname{tg}\eta_2$	9.04 8153	$\operatorname{tg}\eta_2\sec\beta_2$	9.04 9355	Zähl.	$7.88\,0716_n$	$\operatorname{tg}\eta_2$	9.04 8153
λ_1-H_2	44° 5′ 42″.4	λ_2-H_2	40° 52′ 11″.2	λ_3-H_2	38° 39′ 40″.9	$\operatorname{tg}\eta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)$	$8.02\,4479_n$
sin »	9.84 2516	sin »	9.81 5805	sin »	9.79 5682		
II. t_3-t_2	1.14 5826	t_2-t_1	1.20 0195	t_3-t_1	1.47 4891	t_3-t_2	13.99 027
τ_1	9.38 1407	τ_3	9.43 5776	τ_2	9.71 0472	t_2-t_1	15.85 605
$n_1{}^0$	9.67 0935	$n_3{}^0$	9.72 5304	$\tau_1\,\tau_3$	8.81 7184	t_3-t_1	29.84 632
$1+n_1{}^0$	0.16 6946	$1+n_3{}^0$	0.18 5047	q^0	8.03 9033		
ν_1	0.20 5979	ν_3	8.22 4080				
III. L_3-L_2	13° 30′ 11″.5	L_2-L_1	15° 24′ 4″.0	L_3-L_1	28° 54′ 15″.5	L_1-H_2	43° 47′ 13″.8
sin »	9.36 8286	sin »	9.42 4187	sin »	9.68 4260	L_2-H_2	59 11 17.8
$R_2\,R_3$	0.00 9179	$R_1\,R_2$	0.00 6091	$R_1\,R_3$	0.00 7422	L_3-H_2	72 41 29.3
	9.37 7465		9.43 0278		9.69 1682	$\sin(L_1-H_2)$	9.84 0094
N_1	9.68 5783	N_3	9.73 8596			$\sin(L_2-H_2)$	9.93 3920
$N_1-n_1{}^0$	8.21 2255	$N_3-n_3{}^0$	8.21 7770			$\sin(L_3-H_2)$	9.97 9875
c_1	1.74 2708	c_3	1.88 5577	c_2	1.83 8291	$N_1\,c_1$	1.42 8491
						$N_3\,c_3$	1.62 4173

IV. $c_1\,(N_1-n_1^0)$	9.95 4963	$c_1\,\nu_1$	9.94 8687	$R_2\sin\delta_2$	9.51 1940	λ_2-L_2	$-18^\circ 19'\ 6''.6$
$c_3\,(N_3-n_3^0)$	0.10 3347	$c_3\,\nu_3$	0.10 9657	$(R_2\sin\delta_2)^3$	8.53 5820	$\sin(\ \ )$	$9.49\ 7343_n$
k^0	0.33 6492	l^0	0.33 7617	μ	0.49 7249	$\cos(\ \ )$	9.97 7414
$R_2\cos\delta_2$	9.98 0136	$\mu\,(R_2\sin\delta_2)^3$	9.03 3069	δ_2	$18^\circ 47'\ 28''.0$	$\cos\beta_2$	— 1202
$\mu\cos q$	0.49 4913	m	1.30 4548			$\sin w_2\sin\delta_2$	8.87 1046
$\mu\sin q$	9.51 1940	$\sin q'$	6.05 8764			$\cos w_2\sin\delta_2$	$9.49\ 6141_n$
$\cos q$	9.99 7664	$\operatorname{cotg} q$	0.98 2973			$\cos w_2$	$9.98\ 8125_n$
q	$5^\circ 56'\ 14''.4$	4	0.60 2060			$\sin\delta_2$	9.50 8016
$\sin q$	9.01 4691	Summe	8.94 8345			$\cos\delta_2$	9.97 6212

V. $m\sin q'$	7.36 3312	z'	$6^\circ 4'\ 56''.94$	z''	$6^\circ 4'\ 58''.65$		D 828
$1-\ldots\ldots$	9.95 9620	$\sin z'$	9.02 5142	Korr.	+ 0.18		4 d 79.2
$\sin(z'-q)$	7.40 3692	$\sin z'^4$	6.10 0568	z	6 4 58.83		D — 4 d 749
$z'-q$	$0^\circ 8'\ 42''.54$	$m\sin z'^4$	7.40 5116	$\sin z$	9.02 5179		
		$z''-q$	$0^\circ 8'\ 44''.25$	δ_2-z	$12^\circ 42'\ 29''.17$		$\frac{7.9}{749}1''.71=+0''.18$
				$\sin(\delta_2-z)$	9.34 2392		

VI. $R_2\sin(\delta_2-z)$	9.34 6316	r_2	0.48 6761	k^0	0.33 6492	λ_3-L_3	$-34^\circ\ 1'\ 48''.4$
ϱ_2	0.32 1137	r_2^3	1.46 0283	$l^0:r_2^3$	8.87 7334	λ_2-L_3	$-31\ 49\ 18.1$
$\overline{\varrho_2}$	0.31 9935			ϱ_2	0.32 1136	λ_2-L_1	$-\ 2\ 55\ 2.6$
						λ_1-L_1	$+\ 0\ 18\ 28.6$

VII. n_1^0	9.67 0935	n_3^0	9.72 5304	$\sin(\lambda_3-L_3)$	$9.74\ 7900_n$	$\sin(\lambda_2-L_1)$	$8.70\ 6684_n$
$\frac{\nu_1}{r_2^3}$	6.74 5696	$\frac{\nu_3}{r_2^3}$	6.76 3797	$\sin(\lambda_2-L_3)$	$9.72\ 2040_n$	$\sin(\lambda_1-L_1)$	7.73 0348
n_1	9.67 1451	n_3	9.72 5778		$8.62\ 0148_n$		$7.59\ 7354_n$
N_1	9.68 5783	N_3	9.73 8596		8.56 5876		$6.60\ 2596_n$
N_1-n_1	8.19 7171	N_3-n_3	8.20 2228	Z_1	$7.69\ 0086_n$	Z_3	$7.63\ 9227_n$
M_1'	$0.52\ 5909_n$	M_3'	0.71 5612	D_1	$8.00\ 4354_n$	D_3	$7.86\ 4573_n$
				M_1	9.68 5732	M_3	9.77 4654
				$\operatorname{tg}\beta_3\sin(L_3-L_1)$	8.52 8096	$\operatorname{tg}\beta_1\sin(L_3-L_1)$	8.57 4930
					$0.52\ 3742_n$		$0.71\ 0357_n$

VIII. $M_1\,\overline{\varrho_2}$	0.00 5667	$M_3\,\overline{\varrho_2}$	0.09 4589	$n_1\,\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1$	8.87 3068	$\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$	9.19 2183
$M_1'\,(N_1-n_1)$	$8.72\ 3080_n$	$M_3'\,(N_3-n_3)$	8.91 7840	$n_3\,\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3$	8.90 8508		
$n_1\,\overline{\varrho_1}$	9.98 2398	$n_3\,\overline{\varrho_3}$	0.06 4672	$\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2$	9.19 2180	$\sec\beta_1$	0.00 1370
$\overline{\varrho_1}$	0.31 0947	$\overline{\varrho_3}$	0.33 8894			$\sec\beta_2$	0.00 1202
ϱ_1	0.31 2317	ϱ_3	0.33 9949			$\sec\beta_3$	0.00 1055

IX. λ_1-L_1	$+0^\circ 18'\ 28''.6$	λ_2-L_2	$-18^\circ 19'\ 6''.6$	λ_3-L_3	$-34^\circ 1'\ 48''.4$	l_1	$209^\circ 46'\ 30''.0$
$\sin$ »	7.73 0348	$\sin$ »	$9.49\ 7343_n$	$\sin$ »	$9.74\ 7900_n$	l_2	$212\ 35\ 36.7$
$\cos$ »	9.99 9994	$\cos$ »	9.97 7414	$\cos$ »	9.91 8420	l_3	$215\ 3\ 44.2$
$\overline{\varrho_1}\cos$ »	0.31 0941	$\overline{\varrho_2}\cos$ »	0.29 7349	$\overline{\varrho_3}\cos$ »	0.25 7314	Ω	$93\ 35\ 42.6$
R_1	0.00 2167	R_2	0.00 3924	R_3	0.00 5255		
$r_1\cos b_1\sin(l_1-L_1)$	$8.04\ 1295$	$r_2\cos b_2\sin(l_2-L_2)$	$9.81\ 7278_n$	$r_3\cos b_3\sin(l_3-L_3)$	$0.08\ 6794_n$	l_3-l_1	$5\ 17\ 14.2$
$r_1\cos b_1\cos(l_1-L_1)$	0.48 4467	$r_2\cos b_2\cos(l_2-L_2)$	0.47 5990	$r_3\cos b_3\cos(l_3-L_3)$	0.45 0350	$\cos(l_3-l_1)$	9.99 8148
$\cos(l_1-L_1)$	9.99 9997	$\cos(l_2-L_2)$	9.98 9789	$\cos(l_3-L_3)$	9.96 2693	$l_1-\Omega$	$116^\circ 10'\ 47''.4$
$\operatorname{tg}(l_1-L_1)$	7.55 6828	$\operatorname{tg}(l_2-L_2)$	$9.34\ 1288_n$	$\operatorname{tg}(l_3-L_3)$	$9.63\ 6444_n$	$l_2-\Omega$	$118\ 59\ 54.1$
l_1-L_1	$+0^\circ 12'\ 23''.5$	l_2-L_2	$-12^\circ 22'\ 33''.8$	l_3-L_3	$-23^\circ 24'\ 37''.8$	$l_3-\Omega$	$121\ 28\ 1.6$
$r_1\sin b_1$	9.20 1617	$r_2\sin b_2$	9.19 2183	$r_3\sin b_3$	9.18 2730		
$r_1\cos b_1$	0.48 4470	$r_2\cos b_2$	0.48 6201	$r_3\cos b_3$	0.48 7657	r_1	0.48 5059
$\cos b_1$	9.99 9411	$\cos b_2$	9.99 9440	$\cos b_3$	9.99 9468	r_2	0.48 6761
$\operatorname{tg} b_1$	8.71 7147	$\operatorname{tg} b_2$	8.70 5982	$\operatorname{tg} b_3$	9.69 5073	r_3	0.48 8189
$\operatorname{tg} i\cos(l_1-\Omega)$	$8.40\ 8780_n$			$\operatorname{tg} b_1\cos(l_3-l_1)$	8.71 5295		
$\cos(l_1-\Omega)$	$9.64\ 4626_n$	$\sin(l_2-\Omega)$	9.94 1826	Zähl.	$7.37\ 3273_n$	i	$3^\circ 19'\ 29''.9$
$\operatorname{tg}(l_1-\Omega)$	$0.30\ 8367_n$	$\operatorname{tg} b_2$	8.70 5980	$\sin(l_3-l_1)$	8.96 4493	$\sec i$	0.00 0732
$\operatorname{tg} i$	8.76 4154					$\sin i$	8.76 3422

X.								
$\operatorname{tg}(l_1-\Omega)$	0.30 8367$_n$	$\operatorname{tg}(l_2-\Omega)$	0.25 6278$_n$	$\operatorname{tg}(l_3-\Omega)$	0.21 3240$_n$	u_1	116° 8′ 29″.8
$\operatorname{tg} u_1$	0.30 9099$_n$	$\operatorname{tg} u_2$	0.25 7010$_n$	$\operatorname{tg} u_3$	0.21 3972$_n$	u_2	118 57 26.8
$\sin(u_3-u_2)$	8.63 3854	$\sin(u_2-u_1)$	8.69 1309	$\sin(u_3-u_1)$	8.96 4102	u_3	121 25 26.8
$r_2\,r_3$	0.97 4950	$r_1\,r_2$	0.97 1820	$r_1\,r_3$	0.97 3248	u_3-u_2	2 28 0.0
$r_2\,r_3\sin(u_3-u_2)$	9.60 8804	$r_1\,r_2\sin(u_2-u_1)$	9.66 3129	$r_1\,r_3\sin(u_3-u_1)$	9.93 7350	u_2-u_1	2 48 57.0
(n_1)	9.67 1454	(n_3)	9.72 5779			u_3-u_1	5 16 57.0

XI.							
$\varrho_1 A$	8.07 350	$\varrho_2 A$	8.08 232	$\varrho_3 A$	8.10 113	t_1^0	Apr. 19.61017
	0.01 184		0.01 209		0.01 262	t_2^0	» 35.46597
$t_3^0-t_2^0$	13.98 074	$t_2^0-t_1^0$	15.85 580	$t_3^0-t_1^0$	29.84 554	t_3^0	» 49.45571
	1.14 5810		1.20 0188		1.47 4880		
τ_1^0	9.38 1391	τ_3^0	9.43 5769	τ_2^0	9.71 0461	n_1^0	9.67 0930
$\tau_1^{0\,2}$	8.76 2782	$\tau_3^{0\,2}$	8.87 1538	$\tau_2^{0\,2}$	9.42 0922	n_3^0	9.72 5308

XII. (Sektor durch Dreieck mit dem Kettenbruch.)

$2\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)$	0.30 0929		0.30 0900		0.30 0568		
$\sqrt{r_2\,r_3}$	0.48 7475		0.48 5910		0.48 6620	$\frac{1}{2}(u_3-u_2)$	1° 14′ 0″.0
Σ	0.78 8404		0.78 6810		0.78 7188	$\frac{1}{2}(u_2-u_1)$	1 24 28.5
r_2+r_3	0.78 8506		0.78 6941		0.78 7657	$\frac{1}{2}(u_3-u_1)$	2 38 28.5
$\sec\gamma_1$	0.00 0102		0.00 0131		0.00 0469		
l_1	6.070		6.180		6.733	$\frac{y_2}{y_1}$	0.00 0517
Σ^3	2.36 5212		2.36 0430		2.36 1564		
m_1	6.39 7570		6.51 1108		7.05 9358	$\frac{y_2}{y_3}$	0.00 0474
$\frac{5}{6}+l_1$	9.92 0880		9.92 0998		9.92 1100		
h	6.47 6690		6.59 0110		7.13 8258		
$\frac{1}{9}h$	6.56 3840		6.67 7260		7.22 5408	$n_1^0\,\frac{y_2}{y_1}$	9.67 1447
	6.56 3824		6.67 7053		7.22 4680		
y_1-1	6.52 2431		6.63 5660		7.18 3287	$n_3^0\,\frac{y_2}{y_3}$	9.72 5782
y_1	0.00 0145	y_3	0.00 0188	y_2	0.00 0662		

XIV.							
	0.22 7413		0.22 7360		0.22 6889	p	0.45 5104
$\sqrt{p}$	0.22 7558	$\sqrt{p}$	0.22 7548	$\sqrt{p}$	0.22 7551	v_1	131° 17′ 36″.0
$\frac{p}{r_1}$	9.97 0045	$\cos v_2$	9.84 2627$_n$	$\frac{p}{r_3}$	9.96 6915	v_2	134 6 33.0
						v_3	136 34 33.0
$e\cos v_1=q_1$	8.82 3795$_n$	$e\cos v_2$	8.84 6935$_n$	q_3	8.86 5415$_n$		
$e\sin v_1$	8.88 0145	$1+e\cos v_2$	9.96 8344	$q_1\cos(u_3-u_1)$	8.82 1947$_n$	ω	−15 9 6.2
$\sin v_1$	9.87 5837	r_2	0.48 6760	Zähl.	7.84 4247	φ	5 47 47.7
$\operatorname{tg} v_1$	0.05 6350$_n$					$\frac{1}{2}\varphi$	2 53 53.85
$\sin\varphi=e$	9.00 4308	a	0.45 9556	$(\sin\varphi)''$	4.31 8733		
$\cos\varphi$	9.99 7774	$a\cos\varphi$	0.45 7330	k''	3.55 0007		
$\cos\varphi^2$	9.99 5548	a^3	1.37 8668	$a^{\frac{3}{2}}$	0.68 9334		

XV.							
$\sqrt{\frac{r_1}{p}}$	0.01 4977	$\sqrt{\frac{r_3}{p}}$	0.01 6543	$\frac{1}{2}(E_3-E_1)$	2° 49′ 32″.51		*Elemente*
$\sin v_1$	9.87 5837	$\sin v_3$	9.83 7205	sin »	8.69 2827	t_0	1904 Mai 19.5
$\sin\frac{1}{2}\varphi$	8.70 3834	$\sin\frac{1}{2}\varphi$	8.70 3834	$a\cos\varphi\sin$ »	9.15 0157	M_0	128° 10′ 32″.6
$\sin\frac{1}{2}(v_1-E_1)$	8.59 4648	$\sin\frac{1}{2}(v_3-E_3)$	8.55 7582	$\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)$	8.66 3533	ω	344 50 53.8
v_1-E_1	4° 30′ 26″.15	v_3-E_3	4° 8′ 18″.13	$\sqrt{r_1\,r_3}$	0.48 6624	Ω	93 35 42.6
E_1	126 47 9.85	E_3	132 26 14.87	$\sqrt{r_1 r_3}\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)$	9.15 0157	i	3 19 29.9
$\sin E_1$	9.90 3566	$\sin E_3$	9.86 8065	M_3-M_1	6° 0′ 54″.7	φ	5 47 47.7
$e''\sin E_1$	4.22 2299	$e''\sin E_3$	4.18 6798	»	4.33 5552	μ	725″.560
	4° 38′ 4″.0		4° 16′ 14″.4	$t_3^0-t_1^0$	1.47 4880	$\log a$	0.45 9556
M_1	122 9 5.8	M_3	128 10 0.5	μ	2.86 0672	Aequ.	1904.0
			+32.1	+ 0.04 429	8.64 6306		

XVI.

	$-$ 14.03403	$\sin E_2$	9.88 5563	u_2	118° 57′ 26″.8	$L_2 - \Omega$	131° 22′ 27″.9
$t_0 - t_2^0$	1.14 7182$_n$	$\cos E_2$	9.80 6195$_n$	$\sin u_2$	9.94 1998	sin »	9.87 5297
$(t_0 - t_2^0)\,\mu$	4.00 7854$_n$	$\sin\varphi$	9.00 4308	$\cos u_2$	9.68 4989$_n$	cos »	9.82 0186$_n$
	$-$ 2° 49′ 42″.5	$\cos E_2 - e$	9.86 9830$_n$	$r_2 \sin u_2$	0.42 8757	R_2	0.00 3924
M_2	125 20 50.1	$r_2 \sin v_2$	0.34 2893	$r_2 \sin u_2 \cos i$	0.42 8025	$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega)$	0.28 3777
E_2	129 47 36.6	$r_2 \cos v_2$	0.32 9386$_n$	$R_2 \sin(L_2 - \Omega)$	9.87 9221	$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - \Omega)$	9.91 2805$_n$
		$\cos v_2$	9.84 2627$_n$	$r_2 \cos u_2$	0.17 1748$_n$	$\sin(\lambda_2 - \Omega)$	9.96 3846
		$\operatorname{tg} v_2$	0.01 3507$_n$	$R_2 \cos(L_2 - \Omega)$	9.82 4110$_n$	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \Omega)$	0.37 0972$_n$
		v_2	134° 6′ 33″.0	$\varrho_2 \sin\beta_2$	9.19 2179	$\lambda_2 - \Omega$	113° 3′ 21″.0
		r_2	0.48 6759	$\varrho_2 \cos\beta_2$	0.31 9931	λ_2	206 39 3.6
				$\cos\beta_2$	9.99 8798		
				$\operatorname{tg}\beta_2$	8.87 2248	B — R	$d\lambda$ + 0″.3
				ϱ_2	0.32 1133		$d\beta$ 0.0

Die Darstellung des mittleren geozentrischen Ortes ist also eine so vollkommene, als man es bei sechsstelliger Rechnung erwarten kann.

Betreff der Kontrolle in X. ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Wenn die Winkel $u_3 - u_2, \ldots$ klein sind, wird die Kontrolle nicht immer bis auf zwei bis drei Einheiten der letzten Stelle stimmen, auch wenn die Rechnung korrekt geführt ist. Es rührt dies davon her, daß schon wenige Hundertel Sekunden Fehler in $u_3 - u_2, \ldots$ stark auf

$$n_1 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}, \qquad n_3 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \tag{*}$$

einwirken. Man wird daher feststellen, ob man durch eine zulässige Korrektion der unverbürgten Zehntel und Hundertel Sekunden in u_1, u_2, u_3 die Mißstimmung wegschaffen kann; in diesem Fall wird die Rechnung richtig sein und man kann mit den korrigierten Werten weiterrechnen. Bezeichnet man die logarithmische Differenz für 1″ bei $\log\sin(u_3 - u_2)$ und $\log\sin(u_2 - u_1)$ beziehungsweise mit d_1 und d_3, bezeichnet ferner mit n_1' und n_3' die aus (*) folgenden Werte, so muß man diese mit den früheren in Übereinstimmung bringen können, wenn man setzt:

$$\delta u = \frac{(\log n_1 - \log n_1') - (\log n_3 - \log n_3')}{2(d_1 + d_3)}$$

und in (*) statt u_1, u_2, u_3 die Werte anwendet: $u_1 + \delta u$, $u_2 - \delta u$, $u_3 + \delta u$, wobei δu bei sechsstelliger Rechnung den Wert 0″.2 nicht erheblich übersteigen darf. Im obigen Beispiel sind nur die korrigierten Werte aufgenommen.

Eine zweite Hypothese brauchte, wie das bei so kleinen Zwischenzeiten die Regel ist, nicht gerechnet zu werden, da die verwendeten Werte der Dreiecksflächen nur unbedeutend von den korrekten abweichen.

89. Die Hansensche Analyse. Die im vorigen auseinandergesetzte Methode der Bahnbestimmung geht in der zugrunde liegenden Idee auf *Gauß*, in der Art der Formelstellung aber, (von der Ableitung und einigen Modifikationen abgesehen) auf *Encke* zurück. Auch *Hansen**) hat die Gaußsche Methode transformiert und ist zu einigen Entwicklungen gelangt, die hier nicht übergangen werden dürfen, wenn

*) *Hansen*, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Ostwalds Klassiker Nr. 141.

sie auch an Kürze der Rechnung den Enckeschen Formeln nachstehen. Wir wollen nur das Wesentliche herausgreifen, und dieses unmittelbar an unsere früheren Entwicklungen anschließen; die nachstehenden Formeln reproduzieren also weder der Ableitung noch dem Inhalt nach die Hansenschen, aber sie geben seine Idee wieder und sind einfacher als diese. Die erste Gleichung in 25) (Seite 266) stellen wir so:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}\varrho_2=-R_1\sin(L_1-H_2)n_1-R_3\sin(L_3-H_2)n_3+N_1R_1\sin(L_1-H_2)+N_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

und setzen:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}&=K\\ -R_1\sin(L_1-H_2)&=A\\ -R_3\sin(L_3-H_2)&=B\\ -N_1R_1\sin(L_1-H_2)-N_3R_3\sin(L_3-H_2)=-R_2\sin(L_2-H_2)&=C,\end{aligned}\qquad 1)$$

dann wird daraus:

$$K\varrho_2=An_1+Bn_3-C, \qquad 2)$$

welche der Form nach die von Hansen zugrunde gelegte Gleichung ist. Die Hansenschen K, A, B, C enthalten aber noch einen gemeinsamen Faktor $(\sin m_2)$, der hier bereits weggelassen ist. Die Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen n_1 und n_3 durch die Zwischenzeiten geschieht hier in folgender Weise. Wird in den Formeln 17) (Seite 177) gesetzt:

$$P=\frac{\tau_3}{\tau_1}, \qquad Q=\tau_1\tau_3,$$

so wird daraus nach kurzer Reduktion:

$$\begin{aligned}n_1&=\frac{1}{1+P}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}+\frac{Q(P-1)}{6r_2^3}+\tau_1\frac{Q(P^2-1)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}+\tau_1\frac{QP}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}\right)\\ n_3&=\frac{1}{1+P}\left(P+\frac{QP}{2r_2^3}-\frac{Q(P-1)}{6r_2^3}+\tau_1\frac{Q(P^2-1)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}-\tau_1\frac{QP}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}\right).\end{aligned}$$

Substituiert man diese Ausdrücke in 2) und setzt zur Abkürzung:

$$Q'=Q\left(1+\frac{(A-B)(P-1)}{3(A+BP)}+\tau_1\frac{(A+B)(P^2-1)}{2(A+BP)}\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}+\tau_1\frac{(A-B)P}{2(A+BP)}\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}\right),$$

so wird diese Gleichung:

$$\left((A-C)+P(B-C)-K(P+1)\varrho_2\cos\beta_2\right)r_2^3+\tfrac{1}{2}Q'(A+BP)=0.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß $Q'=Q$ ein zulässiger Näherungswert ist. In der Tat ist das zweite Glied in $Q':Q$ von der ersten Ordnung, da $A-B$, wie wir Seite 269 nachwiesen, von der ersten Ordnung ist; das dritte Glied ist ebenfalls erster Ordnung wegen des Faktors τ_1; das vierte Glied ist zweiter Ordnung. Setzt man also in erster Näherung $Q'=Q$, so wird die Fundamentalgleichung

$$\left((A-C)+P(B-C)-K(P+1)\varrho_2\cos\beta_2\right)r_2^3+\tfrac{1}{2}Q(A+BP)=0$$

oder umgestellt:

$$\frac{A+BP}{P+1}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}\right)=K\varrho_2\cos\beta_2+C. \qquad 3)$$

Diese Gleichung gibt für $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1 \tau_3$ einen Näherungswert von ϱ_2 oder r_2; es läßt sich aber gleich zeigen, daß sie auch fort und fort genauere Werte dieser Größen zu geben imstande ist, wenn man P und Q entsprechend ändert. Denn vergleicht man 3) mit der strengen Gleichung 2), die so geschrieben werden kann:

$$An_1 + Bn_3 = K\varrho_2 \cos\beta_2 + C,$$

so sieht man, daß beide Gleichungen identisch werden, wenn man

$$n_1 = \frac{1}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)$$
$$n_3 = \frac{P}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)$$

setzt. Hieraus aber folgt:

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2r_2^3 (n_1 + n_3 - 1). \tag{4}$$

Bestimmt man also P und Q in erster Näherung durch $\tau_3 : \tau_1$ bzw. $\tau_1 \tau_3$, in allen weiteren aber durch 4), indem man für n_1 und n_3 die durch die vorausgehenden Näherungen bekannt gewordenen Werte setzt, so erhält man nacheinander genauere Werte der Unbekannten durch Auflösung einer und derselben Gleichung 3).

Die beiden Unbekannten r_2 und ϱ_2, die in 3) noch auftreten, werden durch Einführung desselben Winkels z, den wir schon früher kennen lernten, auf *eine* zurückgeführt. Wird

$$\varrho_2 = R_2 \frac{\sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad r_2 = R_2 \frac{\sin\delta_2}{\sin z}$$

in die so gestellte Gl. 3):

$$\frac{Q}{2r_2^3} = \frac{K(P+1)}{A+BP}\varrho_2 \cos\beta_2 + \frac{C(P+1)}{A+BP} - 1$$

eingetragen, so kommt zunächst

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP}\left(K \cos\beta_2 R_2 \sin(\delta_2 - z) + C \sin z\right) - \sin z$$

und wenn man

$$\begin{aligned} -KR_2 \cos\beta_2 \sin\delta_2 &= S\sin\sigma \\ C - KR_2 \cos\beta_2 \cos\delta_2 &= S\cos\sigma \end{aligned} \tag{5}$$

setzt, weiter:

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP} S \sin(z - \sigma) - \sin z$$

und wenn schließlich noch Ω und q durch

$$\begin{aligned} \frac{P+1}{A+BP} S \sin\sigma &= \Omega \sin q \\ \frac{P+1}{A+BP} S \cos\sigma - 1 &= \Omega \cos q \end{aligned} \tag{6}$$

bestimmt werden und

$$\frac{Q}{2\Omega(R_2 \sin\delta_2)^3} = m \tag{7}$$

gesetzt wird, die Gaußsche Gleichung:

$$m \sin z^4 = \sin(z - q). \qquad 8)$$

Es macht keine Schwierigkeit, die Bedeutung von σ festzustellen und zugleich seine Berechnung zu erleichtern. Zunächst folgt aus 5)

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = C\cos\delta_2 - KR_2\cos\beta_2$$
$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = C\sin\delta_2;$$

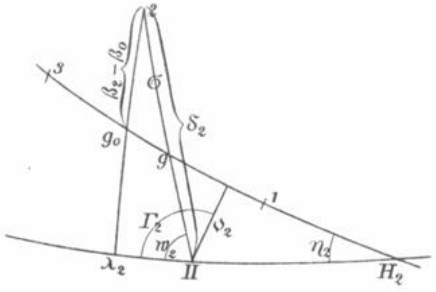


Fig. 49.

weiter ist nach 1) (Seite 286) und Fig. 49:

$$K = \frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2} = \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\cos\beta_2\cos\beta_0\operatorname{tg}\eta_2} =$$
$$= \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)\sin 1\widehat{g_0}2}{\cos\beta_2\sin\eta_2} = \frac{\sin\overline{g2}\sin 1\widehat{g}2}{\cos\beta_2\sin\eta_2} =$$
$$= \frac{\sin\overline{g2}\sin(L_2 - H_2)}{\cos\beta_2\sin(\delta_2 - \overline{g2})}$$
$$C = -R_2\sin(L_2 - H_2),$$

also wird daraus

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\left(\cos\delta_2 + \frac{\sin\overline{g2}}{\sin(\delta_2 - \overline{g2})}\right)$$

oder

$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2\operatorname{cotg}(\delta_2 - \overline{g2}); \qquad *)$$

ferner:

$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2$$

und durch Division:

$$\operatorname{tg}(\delta_2 - \sigma) = \operatorname{tg}(\delta_2 - \overline{g2}).$$

Daraus folgt, daß σ identisch ist mit dem Bogen $\overline{g2}$, auf den wir gelegentlich des Lambertschen Satzes (Nr. 75) stießen und den wir auch Seite 263 schon behandelt haben. Auch die Hansensche Analyse enthält also, wie von vorneherein zu erwarten war, diese Größe. Die Gl. *) läßt sich sofort umformen; fällt man nämlich vom zweiten Erdort ein Lot ν_2 auf den durch den ersten und dritten Planetenort gelegten größten Kreis und nennt dessen Neigung gegen die Ekliptik Γ_2, so ist:

$$\begin{aligned} \cos\nu_2\sin\Gamma_2 &= \cos\eta_2 \\ \cos\nu_2\cos\Gamma_2 &= -\sin\eta_2\cos(L_2 - H_2) \\ \sin\nu_2 &= \sin\eta_2\sin(L_2 - H_2) \end{aligned} \qquad 9)$$

(ν_2 kann man zwischen -90° und $+90^\circ$ annehmen),

woraus ν_2 und Γ_2 berechnet werden können. Dann aber wird

$$\operatorname{cotg}(\delta_2 - \sigma) = \frac{\cos(\Gamma_2 - w_2)}{\operatorname{tg}\nu_2}$$

und die beiden Gleichungen zur Berechnung von S und σ stellen sich also jetzt so:

$$S\sin(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2$$
$$S\cos(\delta_2 - \sigma) = -R_2\sin(L_2 - H_2)\sin\delta_2\cos(\Gamma_2 - w_2)\operatorname{cotg}\nu_2$$

oder

$$S'\sin(\delta_2 - \sigma) = \sin\nu_2$$
$$S'\cos(\delta_2 - \sigma) = \cos(\Gamma_2 - w_2)\cos\nu_2$$
$$S = -R_2\sin(L_2 - H_2)\frac{\sin\delta_2}{\sin\nu_2}\cdot S' \qquad 10)$$
$$\delta_2 - \sigma < 180^\circ.$$

Die Einführung der Hilfsgrößen Γ_2 und ν_2 bietet den Vorteil, daß man mittels derselben auch leicht den Winkel berechnen kann, den der größte Kreis zwischen dem zweiten Planetenort und dem zweiten Erdort bildet mit dem größten Kreis durch den ersten und dritten Planetenort. Nennt man diesen Winkel x, so findet sich nämlich sofort:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{cotg}(\Gamma_2 - w_2)}{\cos(\delta_2 - \sigma)}. \qquad 11)$$

Dieser Winkel spielt, wie wir später sehen werden, für die Beurteilung der Sicherheit einer Bahnbestimmung eine wichtige Rolle.

Nachdem wir die Berechnung der mittleren geozentrischen Distanz ϱ_2 auf die Gaußsche Gl. 8) hingeführt haben, gehen wir nun zur Aufstellung der Ausdrücke für die beiden äußeren ϱ_1 und ϱ_3 über. Auch hier können wir, um zu den Hansenschen Formen zu gelangen, an die Gl. 25) anschließen. Diese können folgendermaßen geschrieben werden:

$$\overline{\varrho_1} = \frac{1}{n_1 D_1}(Z_1 \varrho_2 \cos\beta_2 + R_2 \sin(L_3 - L_2) \operatorname{tg}\beta_3) - \frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$\overline{\varrho_3} = \frac{1}{n_3 D_3}(Z_3 \varrho_2 \cos\beta_2 + R_2 \sin(L_2 - L_1) \operatorname{tg}\beta_1) - \frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1,$$

indem man einfach N_1 und N_3 durch ihre Werte ersetzt. Hansen führt nun, abweichend von unserem früheren Vorgehen, auch hier den Winkel z ein, indem er ϱ_2 und R_2 durch 36) (Seite 270)

$$\varrho_2 = r_2 \frac{\sin(\delta_2 - z)}{\sin\delta_2}, \qquad R_2 = r_2 \frac{\sin z}{\sin\delta_2}$$

ersetzt. Werden die Größen W_1, w_1; W_3, w_3 definiert durch:

$$\begin{aligned} W_1 \sin w_1 &= Z_1 \cos\beta_2 \\ W_1 \cos w_1 &= \{Z_1 \cos\beta_2 \cos\delta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\}\frac{1}{\sin\delta_2} \\ W_3 \sin w_3 &= Z_3 \cos\beta_2 \\ W_3 \cos w_3 &= \{Z_3 \cos\beta_2 \cos\delta_2 - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\}\frac{1}{\sin\delta_2}, \end{aligned} \qquad 12)$$

so ergibt sich:

$$\overline{\varrho_1} = \frac{r_2 W_1}{n_1 D_1}\sin(w_1 - z) - \frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$\overline{\varrho_3} = \frac{r_2 W_3}{n_3 D_3}\sin(w_3 - z) - \frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3 \\ l_3 &= -\frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1 \\ V_1 &= \frac{r_2}{n_1}, \qquad V_3 = \frac{r_2}{n_3} \\ U_1 &= \frac{W_1}{D_1}, \qquad U_3 = \frac{W_3}{D_3}, \end{aligned} \qquad 13)$$

so gehen die vorstehenden Ausdrücke über in:

$$\begin{aligned} \overline{\varrho_1} &= U_1 V_1 \sin(w_1 - z) + l_1 \\ \overline{\varrho_3} &= U_3 V_3 \sin(w_3 - z) + l_3. \end{aligned} \qquad 14)$$

Hier sind diejenigen Größen, die von den Annahmen über P und Q abhängen, nämlich V_1, V_3 und z getrennt von denen, welche für alle Hypothesen dieselben bleiben, nämlich U_1, U_3, l_1, l_3.

In welcher Weise z von P und Q abhängig ist, ist bereits entwickelt; die Ausdrücke von V_1 und V_3 in ihnen ergeben sich leicht wie folgt. Verbindet man die oben (Seite 287) aufgestellten strengen Werte von n_1 und n_3, nämlich

$$n_1 = \frac{1}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right), \qquad n_3 = Pn_1$$

mit der Gleichung (Seite 287)

$$\frac{Q \sin z^4}{2(R_2 \sin\delta_2)^3} = \frac{P+1}{A+BP} S \sin(z-\sigma) - \sin z,$$

die so geschrieben werden kann:

$$\frac{P+1}{1 + \frac{Q}{2r_2^3}} = \frac{(A+BP)\sin z}{S\sin(z-\sigma)},$$

und mit

$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z},$$

so ergibt sich:

$$V_1 = \frac{A+BP}{S} \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin(z-\sigma)}, \qquad V_3 = \frac{V_1}{P}. \tag{15}$$

Die Berechnung der Größen W_1, w_1, W_3, w_3 aus 12) läßt sich noch etwas vereinfachen. Zunächst findet man:

$$\begin{aligned}
W_1 \sin(w_1 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\\
W_1 \cos(w_1 - \delta_2) &= \{Z_1 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\cos\delta_2\} \frac{1}{\sin\delta_2}\\
W_3 \sin(w_3 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\\
W_3 \cos(w_3 - \delta_2) &= \{Z_3 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\cos\delta_2\} \frac{1}{\sin\delta_2},
\end{aligned}$$

und wenn man für Z_1 und Z_3 ihre Werte aus 23) (Seite 265) einträgt und die Gleichungen 34) (Seite 270) beachtet:

$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = (\sin(\lambda_3 - L_3)\sin\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\operatorname{tg}\beta_3 \cos\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\cos\delta_2)\frac{1}{\sin\delta_2}$$

oder

$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = \sin(\lambda_3 - L_3)\sin w_2 - \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2)\cos w_2$$

und ebenso:

$$W_3 \cos(w_3 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)\cos w_2 - \sin(\lambda_1 - L_1)\sin w_2.$$

Bestimmt man also die Hilfsgrößen H_1, h_1, H_3, h_3 aus

$$\begin{aligned}
H_1 \sin h_1 &= \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2) \quad | \quad H_3 \sin h_3 = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)\\
H_1 \cos h_1 &= \sin(\lambda_3 - L_3) \quad | \quad H_3 \cos h_3 = \sin(\lambda_1 - L_1),
\end{aligned} \tag{16}$$

so gehen die Gl. 12) schließlich über in

$$\begin{aligned}
W_1 \sin(w_1 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)\\
W_1 \cos(w_1 - \delta_2) &= H_1 \sin(w_2 - h_1)\\
W_3 \sin(w_3 - \delta_2) &= \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)\\
W_3 \cos(w_3 - \delta_2) &= -H_3 \sin(w_2 - h_3).
\end{aligned} \tag{17}$$

Die Hypothesenrechnung gestaltet sich wie bei der früher besprochenen Methode. Nachdem man in der ersten Näherung $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$ und $Q = \tau_1 \tau_3$ benutzt und damit die heliozentrischen Örter und die Verhältnisse Sektor durch Dreieck ermittelt hat, treten hierfür in den folgenden Näherungen die Werte 4) oder wie wir schon in Gl. 51) (Seite 276) gezeigt haben, die folgenden Ausdrücke ein:

$$P = \frac{y_1}{y_3} \frac{{\tau_3}^0}{{\tau_1}^0}$$

$$Q = \frac{{\tau_1}^0 {\tau_3}^0}{y_1 y_3} \frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)} .$$

Die Berechnung der Elemente kann nach einer jeden der in Nr. 50 mitgeteilten Methoden geschehen. Hansen selbst zieht die Methode der Theoria motus vor. Wir begnügen uns, in der folgenden Zusammenstellung die Formeln aufzuführen.

90. Zusammenstellung der Formeln für die Hansensche Methode. Betreff der Daten gilt dasselbe wie Seite 278. Wir trennen die Formeln in solche, die für alle Hypothesen dieselben bleiben, also nur einmal berechnet zu werden brauchen und in solche, die für jede Näherung wiederholt werden müssen.

A. Von der Hypothese unabhängige Ausdrücke.

I. $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_1$

$$\operatorname{tg}\eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

Kontrolle: $\operatorname{tg}\eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg}\beta_3$.

II. $A = -R_1 \sin(L_1 - H_2)$
$B = -R_3 \sin(L_3 - H_2)$
$C = -R_2 \sin(L_2 - H_2)$
$D_1 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(L_3 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$
$D_3 = \operatorname{tg}\eta_2 \sin(L_1 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$.

III. $\sin w_2 \sin\delta_2 = \sin\beta_2$
$\cos w_2 \sin\delta_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$
$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$
$\sin\delta_2$ positiv.

IV. $\cos\nu_2 \sin\Gamma_2 = \cos\eta_2$
$\cos\nu_2 \cos\Gamma_2 = -\sin\eta_2 \cos(L_2 - H_2)$
$\sin\nu_2 = \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2)$
$-90^\circ < \nu_2 < +90^\circ$.

V. $S' \sin(\delta_2 - \sigma) = \sin\nu_2$
$S' \cos(\delta_2 - \sigma) = \cos\nu_2 \cos(\Gamma_2 - w_2)$
$S = C \cdot \frac{\sin\delta_2}{\sin\nu_2} S'$
$\sin(\delta_2 - \sigma)$ positiv.

VI. $H_1 \sin h_1 = \operatorname{tg}\beta_3 \cos(L_3 - L_2)$ | $H_3 \sin h_3 = \operatorname{tg}\beta_1 \cos(L_2 - L_1)$
$H_1 \cos h_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)$ | $H_3 \cos h_3 = \sin(\lambda_1 - L_1)$.

VII.
$$W_1 \sin(w_1 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_3 \sin(L_3 - L_2)$$
$$W_1 \cos(w_1 - \delta_2) = H_1 \sin(w_2 - h_1)$$
$$W_3 \sin(w_3 - \delta_2) = \operatorname{tg}\beta_1 \sin(L_2 - L_1)$$
$$W_3 \cos(w_3 - \delta_2) = -H_3 \sin(w_2 - h_3).$$

VIII.
$$l_1 = -\frac{R_1}{D_1}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_3$$
$$l_3 = -\frac{R_3}{D_3}\sin(L_3 - L_1)\operatorname{tg}\beta_1$$
$$U_1 = \frac{W_1}{D_1}, \qquad U_3 = \frac{W_3}{D_3}.$$

B. Hypothesenrechnung.

In erster Näherung: $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1\tau_3$. In jeder folgenden:

$$P = \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3^{\,0}}{\tau_1^{\,0}}$$
$$Q = \frac{\tau_1^{\,0}\tau_3^{\,0}}{y_1 y_3}\,\frac{r_2^{\,2}}{r_1 r_3 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.$$

Die Hypothesenrechnung ist beendet, wenn P und Q sich nicht mehr ändern.

IX.
$$\Omega \sin q = \frac{P+1}{A+BP} S \sin\sigma$$
$$\Omega \cos q = \frac{P+1}{A+BP} S \cos\sigma - 1$$
$$m = \frac{Q}{2\,\Omega\,(R_2 \sin\delta_2)^3}$$
$$m \sin z^4 = \sin(z - q).$$

X.
$$V_1 = \frac{A+BP}{S}\,\frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin(z-\sigma)}, \qquad V_3 = \frac{V_1}{P}$$
$$\overline{\varrho_1} = U_1 V_1 \sin(w_1 - z) + l_1$$
$$\overline{\varrho_3} = U_3 V_3 \sin(w_3 - z) + l_3$$
$$\text{Kontrolle: } \frac{\tau_1}{\tau_2}\overline{\varrho_1}\operatorname{tg}\beta_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\overline{\varrho_3}\operatorname{tg}\beta_3 = (\overline{\varrho_2}\operatorname{tg}\beta_2)\colon\left(1 + \frac{Q}{2\,r_2^{\,3}}\right)$$
$$\varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}, \qquad \overline{\varrho_2} = \varrho_2 \cos\beta_2$$
$$r_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{\sin z}.$$

XI.
$$\left.\begin{aligned} r\cos b \sin(l - L) &= \overline{\varrho}\sin(\lambda - L) \\ r\cos b \cos(l - L) &= \overline{\varrho}\cos(\lambda - L) + R \\ r \sin b \qquad\quad &= \overline{\varrho}\operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \text{ für alle drei Örter.}$$

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
$$\text{Kontrolle: } \operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} b_2.$$

XII.
$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i.$$

XIII.
$$\varrho_1 = \overline{\varrho_1}\sec\beta_1, \qquad \varrho_3 = \overline{\varrho_3}\sec\beta_3$$
$$t_1^{\,0} = t_1 - \varrho_1 A, \quad t_2^{\,0} = t_2 - \varrho_2 A, \quad t_3^{\,0} = t_3 - \varrho_3 A \qquad \log A = 7.76\,118_{-10}$$
$$k(t_3^{\,0} - t_2^{\,0}) = \tau_1^{\,0}, \quad k(t_3^{\,0} - t_1^{\,0}) = \tau_2^{\,0}, \quad k(t_2^{\,0} - t_1^{\,0}) = \tau_3^{\,0} \qquad \text{in Einheiten des Tages.}$$

XIV. Berechnung von Sektor durch Dreieck:
$$m_2 = \frac{\tau_2^{\,0\,2}}{(2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)\sqrt{r_1 r_3})^3}$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega_2) = \sqrt[4]{\frac{r_3}{r_1}}$$
$$\operatorname{tg} q_2 = \frac{\operatorname{tg} 2\omega_2}{\sin\frac{1}{4}(u_3 - u_1)}$$
$$l_2 = \sin\tfrac{1}{4}(u_3 - u_1)^2 \sec\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)\sec q_2^{\,2}$$
$$h_2 = \frac{m_2}{\frac{5}{6} + l_2}$$
$$y_2 = 1 + \tfrac{10}{11}\cdot\frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{\frac{11}{9}h}{\cdots\cdots}}}$$

$\log\frac{5}{6}$	9.920 8188
$\frac{10}{11}$	9.958 6073
$\frac{11}{9}$	0.087 1502 .

C. Berechnung der Elemente:

XV.
$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2^{\,0}} y_2$$
$$f_2 = \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}g_2 = \sqrt{\frac{m_2}{y_2^{\,2}} - l_2}$$
$$M\sin\tfrac{1}{2}(F - G) = \cos\tfrac{1}{2}(f_2 + g_2)\operatorname{tg} 2\omega_2$$
$$M\cos\tfrac{1}{2}(F - G) = \sin\tfrac{1}{2}(f_2 + g_2)\sec 2\omega_2$$
$$N\sin\tfrac{1}{2}(F + G) = \cos\tfrac{1}{2}(f_2 - g_2)\operatorname{tg} 2\omega_2$$
$$N\cos\tfrac{1}{2}(F + G) = \sin\tfrac{1}{2}(f_2 - g_2)\sec 2\omega_2$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{N}{M}; \qquad R = \frac{M}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{N}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$
$$a = \frac{R^2\sqrt{r_1 r_3}}{\sin g_2^{\,2}} = p\sec\varphi^2$$
$$v_1 = F - f_2, \qquad v_3 = F + f_2$$
$$\omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3$$
$$E_1 = G - g_2, \qquad E_3 = G + g_2$$
$$M_1 = E_1 - e\sin E_1, \qquad M_3 = E_3 - e\sin E_3$$
$$\frac{M_3 - M_1}{t_3^{\,0} - t_1^{\,0}} = \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

91. Beispiel. Wir wollen auch die letztbesprochene Methode durch ein Beispiel erläutern und wählen den Planeten (433) Eros in seiner Entdeckungsopposition. Die zugrunde gelegten Beobachtungen haben wir in Nr. 35 behandelt und die Parallaxe durch Berechnung des locus fictus berücksichtigt. Die Örter sind nur von Fixsternaberration befreit.

Planet (433) Eros.

1898 M. Z. B.

t_1	Aug. 15.52 508
t_2	26.42 229
t_3	37.40 094

1898.0

λ_1	321° 28′ 2″.4
λ_2	316 49 9.2
λ_3	312 57 17.5

1898.0

L_1	323° 5′ 31″.7
L_2	333 35 57.9
L_3	344 13 51.5
H_2	165 24 47.8

R_1	0.00 5221
R_2	0.00 4228
R_3	0.00 3109

I.	$\operatorname{tg}\beta_1$	9.16 8994	$\operatorname{tg}\beta_2$	9.24 3957	$\operatorname{tg}\beta_3$	9.29 0324	$\lambda_3-\lambda_1$	$-8^\circ 30' 44''.9$
		$9.52\ 1514_n$	$\cos\beta_2$	9.99 3422		9.16 4184	sin »	9.17 0334$_n$
		$9.96\ 0912_n$	L_1-H_2	$157^\circ 40' 43''.9$		8.69 1848	cos »	9.99 5190
		$9.64\ 7480_n$	L_2-H_2	168 11 10.1			L_3-L_2	$10^\circ 37' 53''.6$
	λ_1-H_2	$156^\circ 3' 14''.6$	L_3-H_2	178 49 3.7	λ_3-H_2	147 32 29.7	L_2-L_1	10 30 26.2
	$\operatorname{tg}\eta_2$	9.56 0602	$\operatorname{tg}\eta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)$	8.73 0936$_n$	sin »	9.72 9721	L_3-L_1	21 8 19.8
II.	$\sin(L_1-H_2)$	9.57 9552	$\sin(L_3-H_2)$	8.31 4577	$\sin(L_2-H_2)$	9.31 1188	D_1	7.04 5513$_n$
	A	9.58 4773$_n$	B	8.31 7686$_n$	C	9.31 5416$_n$	D_3	8.31 0488$_n$
III.	$\sin w_2\sin\delta_2$	9.23 7379	IV. $\cos\nu_2\sin\Gamma_2$	9.97 3040	V. Γ_2-w_2	$-78^\circ 18' 47''.3$	λ_2-L_2	$-16^\circ 46' 48''.7$
	$\cos w_2\sin\delta_2$	9.45 3870$_n$	$\cos\nu_2\cos\Gamma_2$	9.52 4344	cos »	9.30 6560	sin »	9.46 0448$_n$
	$\cos w_2$	9.93 1800$_n$	$\sin\Gamma_2$	9.97 4105	$S'\sin(\delta_2-\sigma)$	8.84 4830	cos »	9.98 1102
	$\operatorname{tg} w_2$	9.78 3509$_n$	$\operatorname{tg}\Gamma_2$	0.44 8696	$S'\cos($ » $)$	9.30 5495		
	w_2	$148^\circ 43' 24''.6$	Γ_2	$70^\circ 24' 37''.3$	cos »	9.97 5419	$\sin(L_2-H_2)$	9.31 1188
	$\sin\delta_2$	9.52 2070	$\sin\nu_2$	8.84 4830	tg »	9.53 9335	$\cos($ » $)$	9.99 0702$_n$
	$\cos\delta_2$	9.97 4524	$\cos\nu_2$	9.99 8935	$\delta_2-\sigma$	$19^\circ 5' 46''.2$	$\sin\eta_2$	9.53 3642
	$\operatorname{tg}\delta_2$	9.54 7546	$\operatorname{tg}\nu_2$	8.84 5895	S'	9.33 0076		
	δ_2	$19^\circ 26' 0''.9$	ν_2	$4^\circ 0' 41''.4$		0.67 7240	λ_3-L_3	$-31^\circ 16' 34''.0$
	σ	0 20 14.7	$\sin\sigma$	7.77 0042		9.31 5416$_n$	λ_1-L_1	— 1 37 29.3
			$\cos\sigma$	9.99 9993	S	9.32 2732$_n$		
VI.	$H_1\sin h_1$	9.28 2805	$H_3\sin h_3$	9.16 1650	$\sin(L_3-L_2)$	9.26 5979	$\cos(L_3-L_2)$	9.99 2481
	$H_1\cos h_1$	9.71 5304$_n$	$H_3\cos h_3$	8.45 2620$_n$	$\sin(L_2-L_1)$	9.26 0931	$\cos(L_2-L_1)$	9.99 2656
	$\cos h_1$	9.97 2223$_n$	$\sin h_3$	9.99 1862	$\sin(L_3-L_1)$	9.55 7061		
	$\operatorname{tg} h_1$	9.56 7501$_n$	$\operatorname{tg} h_3$	0.70 9030$_n$				
	h_1	$159^\circ 43' 32''.2$	h_3	$101^\circ 3' 26''.7$	w_2-h_1	$-11^\circ 0' 7''.6$	$\sin(w_2-h_1)$	9.28 0681$_n$
	H_1	9.74 3081	H_3	9.16 9788	w_2-h_3	$+47\ 39\ 57.9$	$\sin(w_2-h_3)$	9.86 8781
VII.					VIII.			
	$W_1\sin(w_1-\delta_2)$	8.55 6303	$W_3\sin(w_3-\delta_2)$	8.42 9925	$-\frac{R_1}{D_1}$	2.95 9708	$-\frac{R_3}{D_3}$	1.69 2621
	$W_1\cos($ » $)$	9.02 3762$_n$	$W_3\cos($ » $)$	9.03 8569$_n$		8.84 7385		8.72 6055
	cos »	9.97 6136$_n$	cos »	9.98 7217$_n$	l_1	1.80 7093	l_3	0.41 8676
	tg »	9.53 2541$_n$	tg »	9.39 1356$_n$				
	$w_1-\delta_2$	$161^\circ 10' 45''.2$	$w_3-\delta_2$	$166^\circ 10' 0''.4$	t_3-t_2 10.97 865	1.04 0549	τ_1	9.27 6130
	W_1	9.04 7626	W_3	9.05 1352	t_2-t_1 10.89 721	1.03 7315	τ_3	9.27 2896
	U_1	2.00 2113$_n$	U_3	0.74 0864$_n$	t_3-t_1 21.87 586	1.33 9965	τ_2	9.57 5546

I. Hypothese.

IX.	P	9.99 6766	$\Omega\sin q$	7.78 4715	m	1.12 6497	$R_2\sin\delta_2$	9.52 6298
	BP	8.31 4452$_n$	$\Omega\cos q$	8.53 5880	$\sin\varkappa$	9.28 5114	$\varkappa$	$11^\circ 6' 59''.1$
	A	9.58 4773$_n$	$\cos q$	9.99 3275	$\sin\varkappa^4$	7.14 0456		
	$A+BP$	9.60 7475$_n$	q	$10^\circ 3' 24''.9$	$m\sin\varkappa^4$	8.26 6953		
	$P+1$	0.29 9416	$\operatorname{tg} q$	9.24 8835	$\varkappa-q$	$1^\circ 3' 34''.2$		
	$\frac{P+1}{A+BP}$	0.69 1941$_n$	Ω	8.54 2605	$\sin(\varkappa-q)$	8.26 6953		
	$S\cos\sigma$	9.32 2725$_n$	$2\,\Omega$	8.84 3635				
		0.01 4666	$(R_2\sin\delta_2)^3$	8.57 8894				
	$S\sin\sigma$	7.09 2774$_n$		7.42 2529				
			Q	8.54 9026				

X.								
$\delta_2 - z$	$8^\circ 19' 1''.8$	$z - \sigma$	$10^\circ 46' 44''.4$	w_1	$180^\circ 36' 46''.1$	w_3	$185^\circ 36' 1''.3$
$\sin(\delta_2 - z)$	9.16 0327	$\sin(z - \sigma)$	9.27 1891	$w_1 - z$	169 29 47.0	$w_3 - z$	174 29 2.2
$R_2 \sin(\delta_2 - z)$	9.16 4555	$(A + BP) : S$	0.28 4743	$\sin(\ \ »\ \ )$	9.26 0781	$\sin(\ \ »\ \ )$	8.98 2835
ϱ_2	9.87 9441	$R_2 \sin \delta_2 : \sin(z - \sigma)$	0.25 4407	$U_1 V_1$	$2.54\ 1263_n$	$U_3 V_3$	$1.28\ 3248_n$
$\overline{\varrho_2}$	9.87 2863	V_1	0.53 9150		$1.80\ 2044_n$		$0.26\ 6083_n$
r_2	0.24 1184	V_3	0.54 2384	l_1	1.80 7093	l_3	0.41 8676
$\overline{\varrho_2} \operatorname{tg} \beta_2$	9.11 6820	r_2^3	0.72 3552	$\overline{\varrho_1}$	9.86 9964	$\overline{\varrho_3}$	9.89 0363
	9.11 5370	$2\, r_2^3$	1.02 4582	$\overline{\varrho_1} \operatorname{tg} \beta_1$	9.03 8958	$\overline{\varrho_3} \operatorname{tg} \beta_3$	9.18 0687
				$\frac{\tau_1}{\tau_2}$	9.70 0584	$\frac{\tau_3}{\tau_2}$	9.69 7350
		$Q : 2\, r_2^3$	7.52 4444				
		$1 + \frac{Q}{2\, r_2^3}$	0.00 1450	Σ	8.73 9542	Σ	8.87 8037
					9.11 5317		0.23 7280

Da sich $\overline{\varrho_1}$ nur unsicher bestimmt, kann keine bessere Übereinstimmung erwartet werden.

XI.							
$\lambda_1 - L_1$	$-1^\circ 37' 29''.3$	$\lambda_2 - L_2$	$-16^\circ 46' 48''.7$	$\lambda_3 - L_3$	$-31^\circ 16' 34''.0$	l_1	$322^\circ 24' 18''.9$
sin »	$8.45\ 2620_n$	sin »	$9.46\ 0448_n$	sin »	$9.71\ 5304_n$	l_2	326 28 39.1
cos »	9.99 9825	cos »	9.98 1102	cos »	9.93 1801	l_3	330 39 44.0
$\overline{\varrho_1}$	9.86 9964	$\overline{\varrho_2}$	9.87 2863	$\overline{\varrho_3}$	9.89 0363	Ω	303 40 48.2
	9.86 9789		9.85 3965		9.82 2164	$l_3 - l_1$	8 15 25.1
R_1	0.00 5221	R_2	0.00 4228	R_3	0.00 3109	cos »	9.99 5474
	$8.32\ 2584_n$		$9.33\ 3311_n$		$9.60\ 5667_n$	sin »	9.15 7194
	0.24 3793		0.23 6593		0.22 3023	$\operatorname{tg} b_3$	8.94 5370
cos	9.99 9969	cos	9.99 6636	cos	9.98 7706		8.79 0608
$\operatorname{tg}(l_1 - L_1)$	$8.07\ 8791_n$	$\operatorname{tg}(l_2 - L_2)$	$9.09\ 6718_n$	$\operatorname{tg}(l_3 - L_3)$	$9.38\ 2644_n$		8.42 2165
$l_1 - L_1$	$-0^\circ 41' 12''.8$	$l_2 - L_2$	$-7^\circ 7' 18''.8$	$l_3 - L_3$	$-13^\circ 34' 7''.5$	$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega)$	8.79 5134
$r_1 \sin b_1$	9.03 8958	$r_2 \sin b_2$	9.11 6820	$r_3 \sin b_3$	9.18 0687	$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega)$	9.26 4971
$r_1 \cos b_1$	0.24 3824	$r_2 \cos b_2$	0.23 9957	$r_3 \cos b_3$	0.23 5317	$\cos(l_1 - \Omega)$	9.97 6382
$\cos b_1$	9.99 9157	$\cos b_2$	9.99 8772	$\cos b_3$	9.99 8318	$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.53 0163
$\operatorname{tg} b_1$	8.79 5134	$\operatorname{tg} b_2$	8.87 6863	$\operatorname{tg} b_3$	8.94 5370	$l_1 - \Omega$	$18^\circ 43' 30''.7$
r_1	0.24 4667	r_2	0.24 1185	r_3	0.23 6999	$\operatorname{tg} i$	9.28 8589
						i	$10^\circ 59' 54''.4$
XII. $\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.53 0163	$\operatorname{tg}(l_2 - \Omega)$	9.62 3569	$\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)$	9.70 6832	$\sec i$	0.00 8051
$\operatorname{tg} u_1$	9.53 8214	$\operatorname{tg} u_2$	9.63 1620	$\operatorname{tg} u_3$	9.71 4883		
u_1	$19^\circ 3' 1''.8$	u_2	$23^\circ 10' 45''.6$	u_3	$27^\circ 24' 50''.4$	$l_1 - \Omega$	$18^\circ 43' 30''.7$
						$l_2 - \Omega$	22 47 50.9
XIII. ϱ_1	9.87 4642	ϱ_2	9.87 9441	ϱ_3	9.89 8478	$l_3 - \Omega$	26 58 55.8
$\varrho_1 A$	+ 0.00 432	$\varrho_2 A$	+ 0.00 437	$\varrho_3 A$	+ 0.00 457	$\sin(l_2 - \Omega)$	9.58 8243
t_1^0	Aug. 15.52 076	t_2^0	26.41 792	t_3^0	37.39 637		
						$u_3 - u_2$	$4^\circ 14' 4''.8$
XIV. Sektor durch Dreieck.						$u_2 - u_1$	4 7 43.8
	(23)	(12)				$u_3 - u_1$	8 21 48.6
$2 \cos \frac{1}{2}(\ \ \ \ )$	0.30 0734	0.30 0748		$\frac{\tau_3^0}{\tau_1^0}$	9.99 6772		
$\sqrt{\ \ \ \ \ \ }$	0.23 9092	0.24 2926		$\frac{y_1}{y_3}$	0.00 0020	$t_3^0 - t_2^0$	10.97 845
$(\ldots)$	0.53 9826	0.54 3674				$t_2^0 - t_1^0$	10.89 716
$(\ \ \ )^3$	1.61 9478	1.63 1022		P	9.99 6792	$t_3^0 - t_1^0$	21.87 561
r^{02}	8.55 2244	8.54 5788		r_2^2	0.48 2370	$t_3^0 - t_2^0$	1.04 0541
m	6 93 2766	6.91 4766		$r_1 r_3$	0.48 1666	$t_2^0 - t_1^0$	1.03 7313
$r + r$	0.54 0127	0.54 3960			0.00 0704	$t_3^0 - t_1^0$	1.33 9960
$\sec \gamma$	0.00 0301	0.00 0286			9.99 8264	τ_1^0	9.27 6122
	6.84 14	6.8187			0.00 2440	τ_3^0	9.27 2894
l	6.54 04	6.5177		$\tau_1^0 \tau_3^0$	8.54 9016	τ_2^0	9.57 5541
$\frac{5}{6} + l$	9.92 1000	9.92 0991		$y_1 y_3$	0.00 0970		
h	7.01 1766	6.99 3775			8.54 8046	$\frac{1}{2}(u_3 - u_2)$	$2^\circ 7' 2''.4$
$\frac{1}{9} h$	7.09 8916	7.08 0925		Q	8.55 0486	$\frac{1}{2}(u_2 - u_1)$	2 3 51.9
	0.00 0544	522				$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	4 10 54.3
	7.09 8372	7.08 0403					
	7.05 6979	7.03 9010					
y	0.00 0495	0.00 0475					

Mit den Werten $\log P = 9.996792$, $\log Q = 8.550486$ wurde in derselben Weise eine zweite Hypothese durchgerechnet, von der wir hier nur die Resultate zusammenstellen:

$\overline{\varrho_1}$	9.870672	r_1	0.244968	u_1	19° 0′ 56.″6	Ω	303° 42′ 55.″5
$\overline{\varrho_2}$	9.873613	r_2	0.241505	u_2	23 8 18.3	i	11 1 42.7
$\overline{\varrho_3}$	9.891185	r_3	0.237357	u_3	27 21 55.9		

y_1	0.000494	P	9.996792
y_3	0.000474	Q	8.550464.

Da die Schlußwerte von P und Q mit den Ausgangswerten fast völlig übereinstimmen, wurde die Hypothesenrechnung für abgeschlossen angenommen und zur Elementenberechnung geschritten.

XIV. Sektor : Dreieck (13)		XV.					
		$2f_2$	8° 20′ 59.″3	$M\sin\frac{1}{2}(F-G)$	7.640221$_n$	$\frac{1}{2}\varphi$	6° 33′ 15.″5
f_2	4° 10′ 29.″65	$\sin 2f_2$	9.162015	$M\cos$ »	8.908508	φ	13 6 31.0
$2\cos f_2$	0.299876	$r_1 r_3$	0.482325	$\cos$ »	9.999370	R	8.911986
$\sqrt{r_1 r_3}$	0.241162	y_2	0.001936	tg »	8.731713$_n$	R^2	7.823973
( )	0.541038		9.646276			$\sqrt{r_1 r_3}$	0.241162
( )^3	1.623114	r_2^0	9.575541	$N\sin\frac{1}{2}(F+G)$	7.641635$_n$		8.065135
r_2^{02}	9.151082	$\sqrt{p}$	0.070735	$N\cos$ »	7.915215$_n$	$\sin g_2^2$	7.900728
m_2	7.527968	p	0.141470	$\cos$ »	9.945772$_n$	a	0.164407
				tg »	9.726420	$\cos\varphi$	9.988534
$r_3 : r_1$	9.992389	$m_2 : y_2^2$	7.524096			$\cos\varphi^2$	9.977068
$\mathrm{tg}(45°+\omega_2)$	9.998097	l_2	7.130190	$\frac{1}{2}(F+G)$	208° 2′ 26.″9	ω	178° 14′ 9.″4
ω_2	−0° 7′ 31.″9		0.169347	$\frac{1}{2}(F-G)$	−3 5 10.1	$\sin\varphi$	9.355639
$2\omega_2$	−0 15 3.8		7.299537	F	204 57 16.8	$\sin\varphi''$	4.670064
$\mathrm{tg}\,2\omega_2$	7.641650$_n$	$\sin\frac{1}{2}g_2$	8.649768	f_2	4 10 29.6	$\sin E_1$	9.641987$_n$
$\sin\frac{1}{2}f_2$	8.561398	$\frac{1}{2}g_2$	2° 33′ 31.″66	G	211 7 37.0	$\sin E_3$	9.771759$_n$
$\mathrm{tg}\,q_2$	9.080252$_n$	$\frac{1}{2}f_2$	2 5 14.82	g_2	5 7 3.3		+5° 41′ 54.″0
$\sec q_2^2$	0.006240	$\frac{1}{2}(f_2+g_2)$	+4 38 46.48				+7 40 58.1
$\sin\frac{1}{2}f_2^2$	7.122796	$\frac{1}{2}(f_2-g_2)$	−0 28 16.84	r_1	200 46 47.2	M_1	211 42 27.7
$\sec f_2$	0.001154			r_3	209 7 46.4	M_3	223 55 38.4
l_2	7.130190	$\sin\frac{1}{2}(f_2+g_2)$	8.908504	E_1	206 0 33.7	M_3-M_1	12 13 10.7
$\frac{5}{6}+l_2$	9.921522	$\cos$ (»)	9.998571	E_3	216 14 40.3		4.643361
h_2	7.606446					$t_3^0-t_1^0$	1.339960
$\frac{1}{9}l\,h_2$	7.693596	$\sin\frac{1}{2}(f_2-g_2)$	7.915211$_n$	N	7.969443	μ	3.303401
	0.002129	$\cos$ (»)	9.999985	M	8.909138	k''	3.550007
	7.691467			$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$	9.060305	$a^{\frac{3}{2}}$	0.246610
	7.650074	$\mathrm{tg}\,2\omega_2$	7.641650$_n$	$\cos$ »	9.997152	μ	3.303397
y_2	0.001936	$\sec 2\omega_2$	0.000004	$\sin$ »	9.057456		
y_2^2	0.003872						

Elemente:

1898 August 15.5

M_0	211° 41′ 46.″0	
ω	178 14 9.4	1898.0
Ω	303 42 55.5	1898.0
i	11 1 42.7	1898.0
φ	13 6 31.0	
μ	2010.″94	
$\log a$	0.164407.	

Die Nachrechnung des mittleren Ortes ergab: Beob. — Rech. $d\lambda = +0.''2$, $d\beta = -0.''3$.

92. Eine andere Form der Hypothesenrechnung. Bei den bisher besprochenen auf Gauß zurückgehenden Methoden wurde die Hypothesenrechnung auf die Größen P und Q aufgebaut, deren strenge Ausdrücke

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2(n_1 + n_3 - 1) r_2^3$$

sind; *W. Fabritius**) hat vorgeschlagen, sie direkt auf die Größen n_1 und n_3 selbst zu gründen, da dieses die einzigen Unbekannten des Problems wären, für die sich von vorneherein, wenigstens bei kleinen Zwischenzeiten ein annehmbarer Näherungswert angeben lasse, nämlich:

$$(n_1) = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}, \qquad (n_3) = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

Seine Analyse bietet so viel des Neuen, daß wir sie wenigstens in den wesentlichen Punkten hier zur Darstellung bringen wollen; dabei knüpfen wir wieder möglichst an früheres an und ändern die Ableitungen, womit wir aber die Vorzüge der originellen Darstellung von Fabritius selbst keineswegs verkennen wollen. Der durchzuführende Gedanke ist der: Durch n_1 und n_3 zunächst ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, dann r_1, r_2, r_3 und die von diesen eingeschlossenen Winkel, endlich y_1, y_2 und y_3 auszudrücken; da diese letzteren

$$n_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\frac{y_2}{y_1}, \qquad n_3 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\frac{y_2}{y_3}$$

ergeben, so hat man neue Werte von n_1 und n_3, mit denen das Verfahren zu wiederholen ist, bis sie sich nicht mehr ändern. Außerdem muß man einen ersten Näherungswert von n_1 und n_3 beschaffen.

Um ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 durch n_1 und n_3 auszudrücken, wollen wir uns der Gleichungen 25) (Seite 266) bedienen, welche bequemer und sicherer sind, als die von Fabritius benutzten, welch' letztere sich unmittelbar aus 6) (Seite 258) ergeben, wenn man darin die Koordinaten λ, β, L einführt. Aus den ϱ ergeben sich sofort die r durch die Gleichung (Seite 257):

$$r^2 = R^2 + 2R\varrho\cos\delta + \varrho^2, \quad \text{wo} \quad \cos\delta = \cos\beta\cos(\lambda - L),$$

die man für die rechnerische Ausführung so schreiben:

$$r^2 = (R\cos\delta + \varrho)^2 + R^2\sin\delta^2$$

und durch Einführung des Hilfswinkels ϑ aus:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{R\cos\delta + \varrho}{R\sin\delta} \\ r &= R\sin\delta\sec\vartheta \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

in

überführen wird.

Um die von den Radienvektoren r_1, r_2, r_3 gebildeten Winkel durch diese selbst und durch n_1 und n_3 auszudrücken, ziehen wir durch den Endpunkt des mittlereren Radiusvektors r_2 Parallele zu den äußeren und nennen die Abstände ihrer Schnittpunkte mit diesen von der Sonne x_1 und x_3; dann hat man in dem von den

*) *Fabritius*, Über die Berechnung der richtigen Distanzen durch sukzessive Annäherungen in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Örtern. Kiew 1877. Im Auszug Astr. Nachr. Bd. 90, S. 217.

Seiten r_2, x_1, x_3 gebildeten Dreieck die drei Winkel, um deren Darstellung es sich handelt; es ist nämlich

$$(r_2 x_3) = (r_2 r_3) = 2f_1\,; \qquad (x_1 r_2) = (r_1 r_2) = 2f_3$$
$$(x_1 x_3) = 180^\circ - (r_1 r_3) = 180^\circ - 2f_2\,.$$

Die Seiten x_1 und x_3 lassen sich aber sofort durch n_1 und n_3 ausdrücken; denn es ist:

$$x_1 \sin 2f_2 = r_2 \sin 2f_1\,,$$

also:

$$x_1 = \frac{r_3 r_2 \sin 2f_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2}\, r_1 = n_1 r_1$$

und ebenso:

$$x_3 = \frac{r_1 r_2 \sin 2f_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = n_3 r_3\,.$$

Wir haben jetzt ein Dreieck mit den Seiten

$$n_1 r_1\,, \qquad r_2\,, \qquad n_3 r_3\,,$$

denen beziehungsweise die Winkel

$$2f_1\,,\ 180^\circ - 2f_2\,,\ 2f_3$$

gegenüber liegen; daraus kann man eine ganze Reihe eleganter Beziehungen ableiten. Wir beschränken uns darauf folgende anzuführen. Wird

$$\tfrac{1}{2}(n_1 r_1 + r_2 + n_3 r_3) = \sigma$$

gesetzt, so folgt:

$$\sin f_1^2 = \frac{(\sigma - n_3 r_3)(\sigma - r_2)}{r_2 r_3 n_3}\,, \qquad \cos f_1^2 = \frac{\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{r_2 r_3 n_3}$$
$$\sin f_2^2 = \frac{\sigma(\sigma - r_2)}{r_1 r_3 n_1 n_3}\,, \qquad \cos f_2^2 = \frac{(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - r_3 n_3)}{r_1 r_3 n_1 n_3} \qquad 2)$$
$$\sin f_3^2 = \frac{(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)}{r_1 r_2 n_1}\,, \qquad \cos f_3^2 = \frac{\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{r_1 r_2 n_1}$$

und daraus:

$$\sin 2f_1 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_2 r_3 n_3} = \frac{r_1}{r_2}\, n_1 \sin 2f_2$$
$$\sin 2f_2 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_3 n_1 n_3} \qquad 3)$$
$$\sin 2f_3 = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{r_1 r_2 n_1} = \frac{r_3}{r_2}\, n_3 \sin 2f_2\,.$$

Diese genügen, um die Ausdrücke für die Verhältnisse der Sektoren zu den Dreiecken aus den Radienvektoren, den zwischenliegenden Winkeln und den Zwischenzeiten aufzustellen. Wenn wir uns der Gaußschen Formeln bedienen, erreichen wir den Vorteil, die Winkel selbst eliminieren zu können. Man braucht (Nr. 49) für die Berechnung von y_1:

$$\sec\gamma_1 = \frac{r_2 + r_3}{2\cos f_1 \sqrt{r_2 r_3}}$$
$$l_1 = \tfrac{1}{2}(\sec\gamma_1 - 1)$$
$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2\cos f_1 \sqrt{r_2 r_3})^3} = \frac{\tau_1^2}{(r_2 + r_3)^3 \cos\gamma_1^3}\,;$$

sind diese Größen ermittelt, so ergibt sich y_1 aus den Gleichungen

$$y_1^2 = \frac{m_1}{l_1 + \sin\frac{1}{2}g_1^2}$$

$$y_1^3 - y_1^2 = m_1 \frac{2g_1 - \sin 2g_1}{\sin g_1^3}$$

entweder durch Versuche (bei sehr großen Zwischenzeiten) oder durch die Gaußschen Tafeln (Taf. XIX und XX). Nun ist nach 2)

$$\cos\gamma_1^2 = \frac{4\cos f_1^2 r_2 r_3}{(r_2 + r_3)^2} = \frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3 (r_2 + r_3)^2}$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{r_2 + r_3}{\sqrt{\frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3}}} - 1\right), & m_1 &= \frac{\tau_1^2}{\left(\frac{4\sigma(\sigma - n_1 r_1)}{n_3}\right)^{\frac{3}{2}}}. \\ l_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_3}{\sqrt{\frac{4(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - n_3 r_3)}{n_1 n_3}}} - 1\right), & m_2 &= \frac{\tau_2^2}{\left(\frac{4(\sigma - r_1 n_1)(\sigma - n_3 r_3)}{n_1 n_3}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ l_3 &= \frac{1}{2}\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{\frac{4\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{n_1}}}, & m_3 &= \frac{\tau_3^2}{\left(\frac{4\sigma(\sigma - n_3 r_3)}{n_1}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Hieraus ermittelt man l und m und dann y, indem nur die r, τ und n als bekannt vorausgesetzt werden. Sind die anfangs gewählten n_1 und n_3 die richtigen, so müssen die Gleichungen bestehen

$$n_1 \frac{y_1}{y_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3 \frac{y_3}{y_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

und diese bilden also das Kriterium für die Richtigkeit der Hypothese. Sind die Gleichungen nicht erfüllt, so hat man n_1 und n_3 so lange zu variieren, bis dies eintritt. Um dieses Variieren in systematischer Weise vorzunehmen, könnte man als Ausgangswerte für die nächste Hypothese

$$n_1 = \frac{y_2}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad n_3 = \frac{y_2}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_2}$$

nehmen; es lassen sich aber, wie wir jetzt zeigen wollen, zweckmäßigere angeben, aus denen y_2 eliminiert ist, so daß dieses für die Hypothesenrechnung gar nicht berechnet zu werden braucht. Ist p der Parameter des Kegelschnittes, so stellen (Nr. 44) $\sqrt{p}\,\tau_1$, $\sqrt{p}\,\tau_2$, $\sqrt{p}\,\tau_3$ die doppelten Flächen der Sektoren vor, und es ist also

$$\sqrt{p} = \frac{y_1[r_2 r_3]}{\tau_1} = \frac{y_2[r_1 r_3]}{\tau_2} = \frac{y_3[r_1 r_2]}{\tau_3};$$

daraus folgt:

$$y_1 n_1 \frac{\tau_2}{\tau_1} = y_2$$

$$y_3 n_3 \frac{\tau_2}{\tau_3} = y_2$$

oder:

$$y_2 = \frac{(n_1 + n_3)\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 y_3 = \frac{S\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 y_3 , \qquad (a)$$

wenn zur Abkürzung $S = n_1 + n_3$ gesetzt wird. Nun hat man weiter nach der Formel 5^b) (Seite 153)

$$p = \frac{r_1 n_1 - r_2 + r_3 n_3}{n_1 + n_3 - 1} = \frac{2(\sigma - r_2)}{S - 1} \qquad (b)$$

und nach 3) (Seite 298)

$$[r_1 r_3] = \frac{2\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{n_1 n_3} . \qquad (c)$$

Werden also (a) (b) (c) in

$$\sqrt{p} = \frac{y_2 [r_1 r_3]}{\tau_2}$$

eingetragen, so folgt:

$$\frac{\sqrt{2(\sigma - r_2)}}{\sqrt{S-1}} = 2 \frac{S\tau_2}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} \frac{y_1 y_3}{\tau_2} \frac{\sqrt{\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3 r_3)}}{n_1 n_3}$$

oder mit Beachtung von

$$\frac{S^2}{n_1 n_3} = \frac{n_1}{n_3} + \frac{n_3}{n_1} + 2 = \frac{y_3}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{y_1}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_1} + 2 = \frac{(\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1)^2}{\tau_1 \tau_3 y_1 y_3} :$$

$$\frac{S}{\sqrt{S-1}} = \frac{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1}{\tau_1 \tau_3} \sqrt{2\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - n_3 r_3)} .$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung mit A bezeichnet, so findet sich:

$$S = \tfrac{1}{2} A \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2} A)^2 - A} , \qquad 5)$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem es sich um heliozentrische Winkel kleiner oder größer als 180° handelt.

Durch S lassen sich nun n_1 und n_3 leicht ausdrücken, denn nach (a) hat man:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{y_2}{y_1}\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_3 \tau_1 \\ n_3 &= \frac{y_2}{y_3}\frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 \tau_3 . \end{aligned} \qquad 6)$$

Der entscheidende Vorteil, den die Einführung von S und damit die Elimination von y_2 gebracht hat, ist der, daß aus den Formeln jetzt der Faktor $\sigma - r_2$ verschwunden ist, der als kleine Größe sich aus der Differenz zweier großen Zahlen nur mit großer Unsicherheit bestimmt.

Der Kreis der Operationen ist jetzt völlig geschlossen; mit Annahmen für n_1 und n_3 wird der Reihe nach berechnet

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$	aus Gl. 25) (Seite 266)
r_1, r_2, r_3	aus Gl. 1)
l_1, l_3, m_1, m_3	aus Gl. 4)
y_1, y_3	aus den Gaußschen Tafeln
S	aus Gl. 5)
n_1, n_3	aus Gl. 6).

Mit den letzteren Werten von n_1 und n_3 wird die Rechnung wiederholt, bis Anfangs- und Schlußwerte übereinstimmen.

Um einen ersten Näherungswert für n_1 und n_3 zu erhalten, bilden wir zwei Gleichungen zwischen S und r_2; als erste nehmen wir (etwas einfacher aber nicht ungenauer als bei Fabritius) nach Seite 177:

$$S = n_1 + n_3 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3}$$

und eine zweite erhalten wir durch Verbindung der Gl. 28) (Seite 267), nämlich:

$$\varrho_2 = c_2 - c_1 n_1 - c_3 n_3$$

mit Gl. 5) (Seite 257), nämlich:

$$\varrho_2 = R_2 \cos\delta_2 \mp \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin\delta_2^2}.$$

Erstere kann man so schreiben:

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2}(n_1 + n_3) - \frac{c_1 - c_3}{2}(n_1 - n_3)$$

oder

$$\varrho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2} S - \frac{c_1 - c_3}{2}(n_1 - n_3);$$

da nun (Seite 269) $c_1 - c_3$ von der ersten Ordnung ist und nach Seite 177

$$n_1 - n_3 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{6 r_2^3}\right),$$

so begeht man nur einen Fehler dritter Ordnung, wenn man im Ausdruck für ϱ_2 setzt

$$n_1 - n_3 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}.$$

Geschieht dies und setzt man dann die beiden Ausdrücke von ϱ_2 einander gleich, so kommt:

$$r_2^2 = R_2^2 \sin\delta_2^2 + \left(c_2 - \frac{c_1 + c_3}{2} S - \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\frac{c_1 - c_3}{2} - R_2 \cos\delta_2\right)^2,$$

oder wenn man die konstante Größe K_0 aus

$$K_0 = c_2 - \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}\frac{c_1 - c_3}{2} - R_2 \cos\delta_2$$

ermittelt:

$$\sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin\delta_2^2} = K_0 - \frac{c_1 + c_3}{2} S.$$

Nimmt man dazu

$$S = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3},$$

so hat man die zwei Gleichungen, aus denen durch sukzessive Versuche S und r_2 zu finden sind. Wie man sieht, wird hierdurch die Gaußsche Gleichung umgangen.

Berechnet man noch Näherungswerte für y_1 und y_3 aus: (Gl. 16) Seite 177)

$$y_1 = \frac{\tau_1 \sqrt{p}}{[r_2 r_3]} = 1 + \frac{\tau_1^2}{6 r_2^3}$$

und

$$y_3 = \frac{\tau_3 \sqrt{p}}{[r_1 r_2]} = 1 + \frac{\tau_3^2}{6 r_2^3},$$

so hat man schließlich nach 6) (Seite 300) für n_1 und n_3:

$$n_1 = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_3 \tau_1$$
$$n_3 = \frac{S}{\tau_1 y_3 + \tau_3 y_1} y_1 \tau_3 ,$$

mit denen man die erste Hypothese beginnt.

94. Die Ausdrücke von Fabritius für die Exzentrizität und die Perihel-distanz. Fabritius hat die Exzentrizität und die wahren Anomalien durch die drei Radienvektoren und die n_1 und n_3 dargestellt, wie uns ein ähnlicher Ausdruck für den Parameter schon in Gl. 5[b]) (Seite 153) entgegengetreten ist. Wir fügen diese Formeln erst hier ein (statt in Nr. 48), da sie die in Nr. 93 eingeführten Größen voraussetzen. Aus

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v_1}, \qquad r_2 = \frac{p}{1 + e\cos v_2}, \qquad r_3 = \frac{p}{1 + e\cos v_3}$$

folgt leicht:

$$(r_2 - r_3) = (r_3\cos v_3 - r_2\cos v_2)e$$
$$(r_3 - r_1) = (r_1\cos v_1 - r_3\cos v_3)e$$
$$(r_1 - r_2) = (r_2\cos v_2 - r_1\cos v_1)e .$$

Wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit $r_1\sin v_1$, $r_2\sin v_2$, $r_3\sin v_3$ und sodann mit $r_1\cos v_1$, $r_2\cos v_2$, $r_3\cos v_3$ multipliziert und addiert werden, ergeben sich die zwei Relationen:

$$r_1(r_2 - r_3)\sin v_1 - r_2(r_1 - r_3)\sin v_2 + r_3(r_1 - r_2)\sin v_3 = e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])$$
$$r_1(r_2 - r_3)\cos v_1 - r_2(r_1 - r_3)\cos v_2 + r_3(r_1 - r_2)\cos v_3 = 0 ,$$

die man sofort, wenn ψ ein beliebiger Winkel ist, symmetrischer so schreiben kann:

$$e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])\cos\psi = r_1(r_2 - r_3)\sin(v_1 - \psi) - r_2(r_1 - r_3)\sin(v_2 - \psi) + r_3(r_1 - r_2)\sin(v_3 - \psi)$$

$$e([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])\sin\psi = r_1(r_2 - r_3)\cos(v_1 - \psi) - r_2(r_1 - r_3)\cos(v_2 - \psi) + r_3(r_1 - r_2)\cos(v_3 - \psi) .$$

Wird nun quadriert und addiert, so kommt nach leichter Reduktion:

$$e^2([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])^2 = 4r_2r_3(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_3 - v_2)^2 - 4r_3r_1(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)^2 + 4r_1r_2(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)\sin^2\tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)^2,$$

und wenn die Gl. 2) (Seite 298) eingeführt werden:

$$\frac{e^2}{4}([r_1r_2] + [r_2r_3] - [r_1r_3])^2 = \frac{(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)}{n_3}(\sigma - n_3r_3)(\sigma - r_2) - \frac{(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)}{n_1n_3}\sigma(\sigma - r_2) + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)}{n_1}(\sigma - n_1r_1)(\sigma - r_2),$$

oder wenn beachtet wird, daß nach 3):

$$[r_1r_3]^2 = (r_1r_3\sin 2f_2)^2 = \frac{4\sigma(\sigma - n_1r_1)(\sigma - r_2)(\sigma - n_3r_3)}{n_1^2n_3^2} :$$

$$e^2(n_1 + n_3 - 1)^2 = n_1^2n_3^2\left(\frac{(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)}{n_3\sigma(\sigma - n_1r_1)} - \frac{(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)}{n_1n_3(\sigma - n_1r_1)(\sigma - n_3r_3)} + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)}{n_1\sigma(\sigma - n_3r_3)}\right)$$

oder

$$e^2(n_1+n_3-1)^2 = \frac{n_1 n_3 (r_1-r_3)(r_1-r_2)(r_2-r_3)}{\sigma(\sigma-n_1 r_1)(\sigma-n_3 r_3)}\left(\frac{(\sigma-n_3 r_3)n_1}{(r_2-r_3)} - \frac{\sigma}{(r_1-r_3)} + \frac{(\sigma-n_1 r_1)n_3}{(r_1-r_2)}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(\sigma-n_3 r_3)n_1}{r_2-r_3} = \varkappa, \qquad \frac{\sigma}{r_1-r_3} = \lambda, \qquad \frac{(\sigma-n_1 r_1)n_3}{r_1-r_2} = \nu,$$

so wird:

$$e^2(n_1+n_3-1)^2 = \frac{\varkappa-\lambda+\nu}{\varkappa\lambda\nu} n_1^2 n_3^2$$

oder

$$e = \frac{n_1 n_3}{n_1+n_3-1}\sqrt{\frac{\varkappa-\lambda+\nu}{\varkappa\lambda\nu}}.$$

Dividiert man obige Gleichungen für $e([r_1 r_2]+[r_2 r_3]-[r_1 r_3])\sin\psi$ und $e(\cdots)\cos\psi$ durcheinander, so entsteht

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r_1(r_2-r_3)\cos(v_1-\psi) - r_2(r_1-r_3)\cos(v_2-\psi) + r_3(r_1-r_2)\cos(v_3-\psi)}{r_1(r_2-r_3)\sin(v_1-\psi) - r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-\psi) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-\psi)},$$

und wenn man der Reihe nach $\psi = v_1, v_2, v_3$ setzt:

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{r_1(r_2-r_3) - r_2(r_1-r_3)\cos(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\cos(v_3-v_2)}{-r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-v_1)}$$

. . . . . .

oder

$$\operatorname{tg} v_1 = 2\,\frac{(r_1-r_3)r_2\sin\frac{1}{2}(v_2-v_1)^2 - r_3(r_1-r_2)\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)^2}{-r_2(r_1-r_3)\sin(v_2-v_1) + r_3(r_1-r_2)\sin(v_3-v_1)}.$$

Trägt man hier 2) und 3) ein, so hat man die gewünschten Formen; aus $u_1-v_1, \ldots$ ergeben sich schließlich drei Werte der Periheldistanz, die übereinstimmen müssen.

Selbstverständlich besitzen diese Ausdrücke nur theoretisches Interesse, da sie sich aus inneren und äußeren Gründen für die Rechnung nicht eignen.

94. Bahnbestimmung mit Benutzung der Gibbsschen Formeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen. In Nr. 53 haben wir die von *Gibbs* abgeleiteten Ausdrücke für n_1 und n_3 kennen gelernt, die wir hier in folgender Form benutzen wollen:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{\mu_1}{r_1^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}, \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{\mu_3}{r_3^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}, \qquad 1)$$

$$\mu_1 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2(\tau_3-\tau_1)), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3+\tau_2^2), \quad \mu_3 = \tfrac{1}{12}(\tau_1\tau_3 - \tau_2(\tau_3-\tau_1)).$$

Diese sind bis auf Größen vierter Ordnung inkl., ja bei gleichen Zwischenzeiten bis auf Größen fünfter Ordnung inkl. genau, gehen also erheblich über die Genauigkeit der von Gauß benutzten Ausdrücke hinaus. Es lag nahe, sie für die Bahnbestimmung zu verwerten und Gibbs selbst hat eine Methode hierzu ausgearbeitet. Diese ist aber umständlich und leidet an dem Fehler, daß sie nicht gestattet, die Näherungen bis zur vollständigen Darstellung der Beobachtungen fortzusetzen, sondern nur soweit, als dies mittels 1) möglich ist. Später haben *R. Vogel* (Astr. Nachr. Bd. 129,

S. 37) und *W. Fabritius* (Astr. Nachr. Bd. 128, S. 225) eine sich fast von selbst darbietende Methode, die Gibbsschen Formeln zu verwerten, angegeben, die von den genannten Mängeln frei ist und nun in Kürze nach der Formulierung des ersteren dargestellt werden möge.

Schreibt man die Grundformeln 25) (Seite 266) in der Gestalt:

$$\overline{\varrho_2} = a_1 n_1 - a_2 + a_3 n_3 ,$$
$$\overline{\varrho_1} = \frac{1}{n_1}(b_1 \overline{\varrho_2} + b_3) - b_2 , \qquad \overline{\varrho_3} = \frac{1}{n_3}(c_1 \overline{\varrho_2} + c_3) - c_2 , \tag{2}$$

wo man sich die Zusammensetzung der Koeffizienten a, b, c unmittelbar ableiten kann, und drückt die Distanzen und Radienvektoren durch die Gaußschen Winkel x_1, x_2, x_3 aus, welche in den Dreiecken Sonne, Erde, Gestirn an dem letzteren gebildet werden, so schreiben sich die Gleichungen für $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ sofort in folgender einfacher Form:

$$\operatorname{cotg} x_1 = \frac{1}{n_1}(p_1 \operatorname{cotg} x_2 + q_1) + m_1$$
$$\operatorname{cotg} x_3 = \frac{1}{n_3}(p_3 \operatorname{cotg} x_2 + q_3) + m_3 , \tag{3}$$

wo die Koeffizienten p, q, m nur von gegebenen Größen abhängen und in allen Hypothesen unverändert bleiben. Ebenso führt die Einsetzung der Winkel x in die Ausdrücke 1) auf:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_1 \sin x_1^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3}\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_3 \sin x_3^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3}\right), \tag{4}$$

wo offenbar

$$\frac{\mu_1}{(R_1 \sin \delta_1)^3} = \nu_1 , \qquad \frac{\mu_2}{(R_2 \sin \delta_2)^3} = \nu_2 , \qquad \frac{\mu_3}{(R_3 \sin \delta_3)^3} = \nu_3$$

gesetzt ist. Damit geht die Gleichung für $\overline{\varrho_2}$ in

$$\operatorname{cotg} x_2 = d_1 \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_1 \sin x_1^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3} + d_3 \frac{\nu_2 \sin x_2^3 + \nu_3 \sin x_3^3}{1 - \nu_2 \sin x_2^3} - d_2 \tag{5}$$

über, wo wieder d_1, d_2, d_3 sich nur aus bekannten Größen zusammensetzen. Die Gleichungen 3) und 5) sind nun durch sukzessive Annäherung aufzulösen, wobei man mit einem Näherungswert von x_2 den Anfang machen wird. Außerdem braucht man Näherungswerte von n_1 und n_3. Setzt man aber in 1) $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2$, so folgt

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\mu_2 + \mu_1}{(R_2 \sin \delta_2)^3} \sin x_2^3\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{(R_2 \sin \delta_2)^3} \sin x_2^3\right) \tag{6}$$

und wenn dies in die erste Gleichung 2) eingetragen wird, ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$\alpha \operatorname{cotg} x_2 + \beta = \sin x_2^3 \tag{7}$$

die durch Versuche aufzulösen ist. Der Wert von x_2 hieraus liefert durch 3) und 6) x_1 und x_3 und damit die Mittel, 5) aufzulösen, worauf durch 4) und 3) genauere x_1 und x_3 folgen usf.

Die auf diese Weise gefundenen x_1, x_2, x_3 führen zu den Radienvektoren und Distanzen, mit denen die Größen der zweiten Hypothese berechnet werden können. Es kann dies in folgender Weise geschehen. Durch die bekannten Ausdrücke (Seite 276)

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{r_3}{r_1}\,\frac{y_1}{y_3} = P, \qquad n_1 + n_3 = 1 + \frac{q}{r_1 r_2 r_3}$$

$$q = \frac{r_1 r_3}{y_1 y_3}\,\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}$$

wird man auf:

$$n_1 = \frac{1}{1+P}(1 + C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3), \qquad n_3 = \frac{P}{1+P}(1 + C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3)$$

geführt, wo die Größe

$$C_2 = \frac{q}{R_1 \sin\delta_1 \cdot R_2 \sin\delta_2 \cdot R_3 \sin\delta_3}$$

bedeutet. Damit geht die erste Gleichung 2) in die Form

$$A_2 \operatorname{cotg} x_2 + B_2 = C_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \qquad 8)$$

über, die nun ihrerseits die Verhältnisse n_1 und n_3 so zu schreiben gestattet:

$$n_1 = \frac{1}{1+P}(1 + B_2 + A_2 \operatorname{cotg} x_2), \qquad n_3 = P n_1. \qquad 9)$$

Es sind in der zweiten Hypothese also die Gleichungen 3) und 8) unter Benutzung der Ausdrücke 9) für die Verhältnisse n_1 und n_3 aufzulösen, was sich einfacher gestaltet, als in der ersten Hypothese, da n_1 und n_3 nur mehr von x_2 abhängen.

95. Die Formeln von E. Weiß. Man erhält eine für die Rechnung zwar etwas umständlichere, aber durch Symmetrie ausgezeichnete Form der Grundgleichungen, wenn man die Gl. 6) (Seite 258) zusammen so umformt, wie wir bisher nur die zweite behandelt haben. Nennt man, wie Seite 262, H_1, H_2, H_3 die Längen der aufsteigenden Knoten der größten Kreise durch die geozentrischen Planetenörter: 23, 13, 12 und η_1, η_2, η_3 ihre Neigungen gegen die Ekliptik, so wird entweder vermöge der geometrischen Bedeutung der Koeffizienten L, M, N oder vermöge ihrer Ausdrücke 7) (Seite 258) leicht erhalten:

$$\begin{aligned}
K n_1 \varrho_1 &= -n_1 R_1 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_1 - H_1) + R_2 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_2 - H_1) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_1 \sin\eta_1 \sin(L_3 - H_1) \\
K \varrho_2 &= -n_1 R_1 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_1 - H_2) + R_2 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_2 \sin\eta_2 \sin(L_3 - H_2) \\
K n_3 \varrho_3 &= -n_1 R_1 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_1 - H_3) + R_2 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_2 - H_3) - \\
&\qquad - n_3 R_3 \sin m_3 \sin\eta_3 \sin(L_3 - H_3)
\end{aligned}$$

wo wie früher die Bogen $23 = m_1$, $13 = m_2$, $12 = m_3$ gesetzt sind. Für K ergeben sich folgende drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_2 K &= \sin m_1 \sin m_3 \sin\eta_1 \sin\eta_3 \sin(H_3 - H_1) \\
\sin\beta_3 K &= \sin m_1 \sin m_2 \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin(H_2 - H_1) \\
\sin\beta_1 K &= \sin m_2 \sin m_3 \sin\eta_2 \sin\eta_3 \sin(H_3 - H_2),
\end{aligned}$$

welche oben eingetragen zu den Gleichungen:

$$n_1\varrho_1\cdot\frac{\sin m_3\,\sin\eta_3\,\sin(H_3-H_1)}{\sin\beta_2} = -n_1R_1\sin(L_1-H_1)+R_2\sin(L_2-H_1)-n_3R_3\sin(L_3-H_1)$$

$$\varrho_2\cdot\frac{\sin m_1\sin\eta_1\sin m_3\sin\eta_3}{\sin m_2\,\sin\eta_2\,\sin\beta_2}\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_2)+R_2\sin(L_2-H_2)-n_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

$$n_3\varrho_3\cdot\frac{\sin m_1\,\sin\eta_1\,\sin(H_3-H_1)}{\sin\beta_2} = -n_1R_1\sin(L_1-H_3)+R_2\sin(L_2-H_3)-n_3R_3\sin(L_3-H_3)$$

führen. Um die Größen m, η, H einfach zu berechnen, hat man folgendes Verfahren: Ist Q_1 der aufsteigende Knoten des größten Kreises 23 auf der Ekliptik, so wird:

$$\begin{aligned}\sin\eta_1\,\sin(Q_1\,2) &= \sin\beta_2\\ \cos(Q_1\,2) &= \cos\beta_2\,\cos(\lambda_2-H_1)\\ \sin\eta_1\,\sin(Q_1\,3) &= \sin\beta_3\\ \cos(Q_1\,3) &= \cos\beta_3\,\cos(\lambda_3-H_1)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, da $Q_1\,3 - Q_1\,2 = m_1$:

$$\sin\eta_1\,\sin m_1 = \cos\beta_2\,\sin\beta_3\,\cos(\lambda_2-H_1) - \sin\beta_2\,\cos\beta_3\,\cos(\lambda_3-H_1)$$

oder

$$\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3} = \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3\,\cos(\lambda_2-H_1) - \cos(\lambda_3-H_1)\,.$$

Wird dies einmal mit $\sin(\lambda_2-H_1)$, dann mit $\cos(\lambda_2-H_1)$ multipliziert und

$$\operatorname{tg}\eta_1\,\sin(\lambda_2-H_1) = \operatorname{tg}\beta_2\,,\qquad \operatorname{tg}\eta_1\,\sin(\lambda_3-H_1) = \operatorname{tg}\beta_3$$

beachtet, so kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3}\sin(\lambda_2-H_1) &= \sin(\lambda_3-\lambda_2)\\ \frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3}\cos(\lambda_2-H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_2)\,.\end{aligned}$$

Hieraus kann man $\sin\eta_1\,\sin m_1$ und H_1 und aus ähnlichen Gleichungen die $\sin\eta_2\,\sin m_2$ usf. berechnen, die für die Koeffizienten der Fundamentalgleichungen gebraucht werden. Wir führen zur Abkürzung

$$\frac{\sin\eta_1\,\sin m_1}{\sin\beta_2\,\cos\beta_3} = h_1\,,\qquad \frac{\sin\eta_2\,\sin m_2}{\sin\beta_1\,\cos\beta_3} = h_2\,,\qquad \frac{\sin\eta_3\,\sin m_3}{\sin\beta_2\,\cos\beta_1} = h_3$$

ein, dann berechnen sich die h, H aus:

$$\begin{aligned}h_1\sin(\lambda_2-H_1) &= \sin(\lambda_3-\lambda_2)\\ h_1\cos(\lambda_2-H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_2)\\ h_2\sin(\lambda_1-H_2) &= \sin(\lambda_3-\lambda_1)\\ h_2\cos(\lambda_1-H_2) &= \operatorname{cotg}\beta_1\,\operatorname{tg}\beta_3-\cos(\lambda_3-\lambda_1)\\ h_3\sin(\lambda_2-H_3) &= \sin(\lambda_2-\lambda_1)\\ h_3\cos(\lambda_2-H_3) &= -\operatorname{cotg}\beta_2\,\operatorname{tg}\beta_1+\cos(\lambda_2-\lambda_1)\,.\end{aligned}\qquad 1)$$

Kontrolle: $h_1h_3\sin(H_3-H_1) = h_1h_2\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{cotg}\beta_3\sin(H_2-H_1) = h_2h_3\sin(H_3-H_2)$

und die Grundgleichungen werden:

$$n_1\varrho_1h_3\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_1)+R_2\sin(L_2-H_1)-n_3R_3\sin(L_3-H_1)$$

$$\varrho_2\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1h_3}{h_2}\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_2)+R_2\sin(L_2-H_2)-n_3R_3\sin(L_3-H_2)$$

$$n_3\varrho_3h_1\sin(H_3-H_1) = -n_1R_1\sin(L_1-H_3)+R_2\sin(L_2-H_3)-n_3R_3\sin(L_3-H_3)$$

wo mit $\bar{\varrho}$ die kurtierten Distanzen bezeichnet sind. Vermöge der Gleichung (Seite 267):

$$N_1 R_1 \sin(L_1 - H) - R_2 \sin(L_2 - H) + N_3 R_3 \sin(L_3 - H) = 0$$

kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} n_1 \bar{\varrho}_1 h_3 \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_1) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_1) \\ \bar{\varrho}_2 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \frac{h_1 h_3}{h_2} \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_2) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_2) \quad 2) \\ n_3 \bar{\varrho}_3 h_1 \sin(H_3 - H_1) &= (N_1 - n_1) R_1 \sin(L_1 - H_3) + (N_3 - n_3) R_3 \sin(L_3 - H_3) . \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen, welche *E. Weiß* seinen Untersuchungen über Bahnbestimmung zugrunde gelegt hat*). Wir können die lehrreichen Ergebnisse derselben hier nicht eingehend verfolgen, sondern wollen nur auf den Gl. 2) eine einfache Bahnbestimmungsmethode aufbauen, wobei wir einige der nützlichen Kunstgriffe von Weiß kennen lernen werden. Wir werden bei dieser Methode, die für kleine Planeten bei 30—40tägiger Zwischenzeit noch gute Resultate liefert, ein kleines, von Weiß überschlagsweise mitgenommenes Glied zunächst weglassen und erst zum Schluß einführen, wenn wir seine Begründung gegeben haben; auf die genaueren Formeln einzugehen soll hier unterlassen werden, da die Methode dann den früher mitgeteilten wohl nachsteht.

Wird in 2) nach den Formeln Seite 177 eingetragen:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{r_2^3}\right), \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{r_2^3}\right) \\ N_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2+\tau_1)}{R_2^3}\right), \qquad N_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{R_2^3}\right), \end{aligned}$$

so kommt, wenn

$$\mu_1 = \tfrac{1}{6}(\tau_1+\tau_2)\tau_3, \qquad \mu_3 = \tfrac{1}{6}(\tau_2+\tau_3)\tau_1 \qquad 3)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\bar{\varrho}_1 h_3 \sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_1)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_1)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right) \\ \bar{\varrho}_2 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1 h_3}{h_2}\sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_2)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_2)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right) \quad 4) \\ \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\bar{\varrho}_3 h_1 \sin(H_1-H_3) &= \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\left(R_1\sin(L_1-H_3)(\tau_1+\tau_2)+R_3\sin(L_3-H_3)(\tau_2+\tau_3)\right)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right). \end{aligned}$$

Die drei Klammerausdrücke rechts lassen sich leicht auf eine einfachere Berechnung hinführen. Berechnet man g und G aus:

$$\begin{aligned} g\sin G &= (\tau_1+\tau_2) R_1 \sin L_1 + (\tau_2+\tau_3) R_3 \sin L_3 \\ g\cos G &= (\tau_1+\tau_2) R_1 \cos L_1 + (\tau_2+\tau_3) R_3 \cos L_3 \end{aligned}$$

oder besser aus:

$$\begin{aligned} g\sin(G-L_1) &= (\tau_2+\tau_3) R_3 \sin(L_3-L_1) \\ g\cos(G-L_1) &= (\tau_2+\tau_3) R_3 \cos(L_3-L_1) + (\tau_1+\tau_2) R_1 \end{aligned}$$

so wird allgemein:

$$R_1 \sin(L_1 - H)(\tau_1+\tau_2) + R_3 \sin(L_3 - H)(\tau_2+\tau_3) = g\sin(G-H)$$

*) Über die Best. der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beob. Denkschr. Akad. Wien 60.Bd. 1893.

und daher obige Gleichungen, wenn noch der gemeinsame Faktor

$$\frac{g}{6\sin(H_1 - H_3)} = \gamma \tag{5}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right) h_3 \overline{\varrho_1} &= \tau_3 \gamma \sin(H_1 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\
\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\frac{h_1 h_3}{h_2}\overline{\varrho_2} &= \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2}\gamma \sin(H_2 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \qquad 4^{a)} \\
\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right) h_1 \overline{\varrho_3} &= \tau_1 \gamma \sin(H_3 - G)\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}$$

Führt man die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{\tau_3}{h_3}\gamma \sin(H_1 - G) \\
W_2 &= \frac{\tau_1}{h_1}\cdot\frac{\tau_3}{h_3}\cdot\frac{h_2}{\tau_2}\gamma\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2}\sin(H_2 - G) \qquad 6) \\
W_3 &= \frac{\tau_1}{h_1}\gamma \sin(H_3 - G),
\end{aligned}$$

so wird schließlich:

$$\begin{aligned}
\varrho_2 &= W_2\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\
\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\overline{\varrho_1} &= W_1\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \qquad 7) \\
\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\overline{\varrho_3} &= W_3\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}$$

Weiß empfiehlt die erste Gleichung in Verbindung mit:

$$r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2R_2\varrho_2\cos\delta_2$$

durch Versuche aufzulösen und nicht auf die Gaußsche Gleichung überzugehen. Man kann diese Versuche in der Tat rasch erledigen, wenn man folgende Umformung vornimmt:

$$r_2^2 = (R_2\cos\delta_2 + \varrho_2)^2 + R_2^2\sin\delta_2^2$$

oder, wenn

$$R_2\cos\delta_2 = f, \qquad R_2\sin\delta_2 = B$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r_2}{B}\right)^2 &= \left(\frac{\varrho_2 + f}{B}\right)^2 + 1 \\
\frac{\varrho_2 + f}{B} &= \operatorname{tg}\vartheta \\
r_2 &= B\sec\vartheta.
\end{aligned}$$

Man beginnt mit einem Näherungswert von r_2 und rechnet aus der ersten Gl. 7) ϱ_2, damit wieder r_2 aus:

$$\frac{\varrho_2 + f}{B} = \operatorname{tg}\vartheta, \qquad r_2 = B\sec\vartheta$$

und so fort, bis keine Änderung mehr eintritt. Bei kleinen Planeten ist ein brauchbarer Näherungswert von $\log r_2$ 0.400000 oder $\log\frac{1}{r_2^3} = 8.800000_{-10}$. Ist r_2 ge-

funden, so ergeben die beiden letzten Gleichungen in 7) $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ und daraus folgen die heliozentrischen Örter und die Elemente in der gewöhnlichen Weise.

Die Einfachheit obiger Formeln wurde hauptsächlich dadurch erzielt, daß wir auch für die Erdbahn die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch ihre Ausdrücke in den Zwischenzeiten ersetzt haben, statt die bekannten, strengen Werte zu nehmen. Der dadurch eingeführte Fehler ist aber nicht unerheblich und muß noch, wenigstens genähert, beseitigt werden. Es ist nämlich zwar das mit dem Differenzialquotienten des Radiusvektors nach der Zeit multiplizierte Glied in den Entwicklungen 17) (Seite 177) wegen der Kleinheit der Exzentrizität der Erdbahn durchaus zu vernachlässigen, aber das folgende in 17) nicht angegebene Glied vierter Ordnung wird für die Erde, wo der Faktor $\frac{1}{R_2^6}$ nicht verkleinernd wirkt, nicht ohne Einfluß. Dieses Glied lautet, wie man leicht durch Ausrechnung findet:

$$N_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\cdots + \frac{7\tau_2^4 - 10\tau_1^2\tau_2^2 + 3\tau_1^4}{360R_2^6} + \cdots\right)$$
$$N_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(\cdots + \frac{7\tau_2^4 - 10\tau_2^2\tau_3^2 + 3\tau_3^4}{360R_2^6} + \cdots\right)$$

oder:

$$\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\frac{(\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)}{360R_2^6} \quad \text{bez.} \quad \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\frac{(\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)}{360R_2^6}.$$

In den Gleichungen 4) treten also rechts die Glieder:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}(R_1\sin(L_1-H)(\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)+R_3\sin(L_3-H)(\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2))\frac{1}{60R_2^6}$$

oder wenn

$$g'\sin G' = (\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)R_1\sin L_1 + (\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)R_3\sin L_3$$
$$g'\cos G' = (\tau_1+\tau_2)(7\tau_2^2-3\tau_1^2)R_1\cos L_1 + (\tau_2+\tau_3)(7\tau_2^2-3\tau_3^2)R_3\cos L_3$$

gesetzt wird, die Glieder:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}g'\sin(G'-H)\frac{1}{60R_2^6}$$

hinzu. Nun findet man leicht:

$$g'\sin G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin G + \tfrac{3}{4}(\tau_3-\tau_1)((\tau_1+\tau_2)(\tau_2+2\tau_1)R_1\sin L_1 - (\tau_2+\tau_3)(\tau_2+2\tau_3)R_3\sin L_3)$$
$$g'\cos G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\cos G + \tfrac{3}{4}(\tau_3-\tau_1)((\tau_1+\tau_2)(\tau_2+2\tau_1)R_1\cos L_1 - (\tau_2+\tau_3)(\tau_2+2\tau_3)R_3\cos L_3)$$

oder wenn die zweiten Glieder, die offenbar von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden:

$$g'\sin G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin G$$
$$g'\cos G' = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\cos G$$
$$g'\sin(G'-H) = \tfrac{25}{4}\tau_2^2 g\sin(G-H).$$

Also werden die Zusatzglieder rund:

$$-\frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}g\sin(G-H)\frac{\frac{1}{10}\tau_2^2}{R_2^3},$$

so daß ihre Berücksichtigung einfach dadurch geschehen kann, daß man in 7) statt $\frac{1}{R_2^3}$ nimmt $\frac{1+\frac{1}{10}\tau_2^2}{R_2^3}$.

Wir stellen die Formeln bis zur Berechnung der heliozentrischen Örter zusammen:

Daten, wie Seite 278.

I.
$$\tau_1 = k(t_3 - t_2),\quad \tau_2 = k(t_3 - t_1),\quad \tau_3 = k(t_2 - t_1)$$
$$\log k = 8.23\,5581$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{6}(\tau_1 + \tau_2)\tau_3,\quad \mu_3 = \tfrac{1}{6}(\tau_2 + \tau_3)\tau_1.$$

II.
$$g \sin(G - L_1) = (\tau_2 + \tau_3) R_3 \sin(L_3 - L_1)$$
$$g \cos(G - L_1) = (\tau_2 + \tau_3) R_3 \cos(L_3 - L_1) + (\tau_1 + \tau_2) R_1.$$

III.
$$h_1 \sin(H_1 - \lambda_2) = \sin(\lambda_2 - \lambda_3)$$
$$h_1 \cos(H_1 - \lambda_2) = \operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_2 - \lambda_3)$$
$$h_2 \sin(H_2 - \lambda_1) = \sin(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$h_2 \cos(H_2 - \lambda_1) = \operatorname{cotg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$h_3 \sin(H_3 - \lambda_2) = \sin(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$h_3 \cos(H_3 - \lambda_2) = -\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_1 + \cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Kontrollen:
$$h_1 \sin(H_1 - H_3) = h_2 \sin(H_2 - H_3)$$
$$h_3 \operatorname{tg}\beta_3 \sin(H_1 - H_3) = h_2 \operatorname{tg}\beta_1 \sin(H_1 - H_2).$$

IV.
$$\gamma = \frac{g}{6 \sin(H_1 - H_3)}$$
$$W_2 = \frac{\tau_1}{h_1}\frac{\tau_3}{h_3}\frac{h_2}{\tau_2}\gamma \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2} \sin(H_2 - G)$$
$$W_1 = \frac{\tau_3}{h_3}\gamma \sin(H_1 - G)$$
$$W_3 = \frac{\tau_1}{h_1}\gamma \sin(H_3 - G).$$

V.
$$\cos\delta_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2),\quad \delta_2 < 180^\circ$$
$$R_2 \cos\delta_2 = f,\quad R_2 \sin\delta_2 = B.$$

VI.
$$\varrho_2 = W_2\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$
$$\frac{\varrho_2 + f}{B} = \operatorname{tg}\vartheta;\quad r_2 = B\sec\vartheta.$$

VII.
$$\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\varrho_1 = W_1\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$
$$\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\varrho_3 = W_3\left(\frac{1 + \frac{1}{10}r_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

96. Verfahren, wenn Näherungen vorliegen. Wenn eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unternommen wird, nachdem bereits eine provisorische vorausgegangen war, kann man von den Resultaten dieser letzteren in mehr oder minder großem Umfang Gebrauch machen, um die neue Rechnung zugleich zu sichern und zu erleichtern. Wir werden das allgemeinste Verfahren auseinandersetzen, bemerken aber, daß man je nach dem vorliegenden Fall eine Auswahl treffen kann.

Um nicht auf drei einzelne Beobachtungen angewiesen zu sein, berechnet man mit den vorliegenden Elementen eine Ephemeride wahrer Örter und vergleicht damit alle Beobachtungen, die in der Nähe von drei gut verteilten Zeitepochen t_1, t_2, t_3 liegen. Dabei wird man die Beobachtungen von Parallaxe befreien und der Aberration nach Nr. 27,2 Rechnung tragen. Die Mittel der Ephemeridenkorrektionen für t_1, t_2, t_3 bringt man an die Ephemeridenörter für t_1, t_2, t_3 an und hat so drei »Normalörter«, befreit von Parallaxe und Aberration, erlangt, die dann noch auf ein gemeinsames Äquinoktium zu übertragen sind. Diese Normalörter legt man der neuen Bahnbestimmung zugrunde. Reicht das Beobachtungsmaterial zur Bildung von solchen nicht aus, so wählt man drei gute Beobachtungen und befreit sie von Aberration, Parallaxe, Präzession und Nutation.

Nach Verwandlung in Länge und Breite berücksichtigt man die Sonnenbreiten nach Nr. 34.

Der wesentliche Unterschied gegen das Verfahren, das man einschlagen muß, wenn von einer Bahn noch nichts bekannt ist, besteht nun darin, daß man von vornherein für die Verhältnisse der Dreiecksflächen genauere Werte einführen kann, beziehungsweise daß man die Verhältnisse Sektor durch Dreieck auch mittels wenig genauer Elemente mit großer Sicherheit bilden kann. Rechnet man nach der Gauß-Enckeschen Methode (siehe die Formelübersicht Seite 278), so wird man sich aus den vorhandenen Elementen für die drei Beobachtungszeiten die Radienvektoren r_1, r_2, r_3 und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $v_3 - v_2 = 2f_1, \ldots$ ableiten und daraus nach XII. die Verhältnisse Sektor durch Dreieck y_1, y_2, y_3 berechnen. Dann kann man nach Durchrechnung von I. und III., sowie von

$$n_1^{\,0} = \frac{r_1}{r_2}, \quad n_3^{\,0} = \frac{r_3}{r_2}$$

sofort die Koeffizienten der Gaußschen Gleichung nach XIII. bilden und weiter nach V. bis XII. in der gewöhnlichen Weise rechnen, nur wird man natürlich die Beobachtungszeiten nicht mehr für Aberration korrigieren oder doch nur um die Unterschiede, welche sich aus der Verschiedenheit der früheren und der neu erhaltenen ϱ ergeben. Bei Bahnbestimmungen dieser Art wird es sich meistens um größere Zwischenzeiten handeln, es ist dann zur Berechnung der y das Gaußsche Verfahren heranzuziehen. Es ist dann auch leicht möglich, daß man mit einer oder zwei Hypothesen nicht auskommt, sondern deren mehrerer bedarf. Sieht man dies voraus, dann empfiehlt es sich nicht, die Hypothesenrechnung in *der* Weise über die dritte Hypothese hinaus weiter zu führen, daß man die folgende mit den Schlußwerten der vorausgehenden beginnt, da dieses Verfahren oft sehr geringe Konvergenz besitzt, sondern man wird einen Kunstgriff von Gauß (Theoria motus Nr. 120—122) anwenden, der schneller zum Ziele führt.

Sind allgemein X und Y Funktionen der beiden Variabeln x und y und sollen diejenigen Werte der letzteren ermittelt werden, für welche $X = 0$ und $Y = 0$ wird, so kann man ausgehend von Werten von x und y, für welche dies bereits sehr nahe eintrifft, zu den strengen Werten durch ein Interpolationsverfahren gelangen. Man darf dann voraussetzen, daß die Änderungen in den Werten von X und Y sehr

nahe der Änderung in x proportional sind, wenn y unverändert bleibt, und proportional der von y, wenn x sich nicht ändert. Sind x_0 und y_0 die wahren Werte von x und y, und $x_0 + \lambda$ und $y_0 + \mu$ genäherte, so wird man die entsprechenden Werte von X und Y durch

$$X = a\lambda + \beta\mu \quad \text{und} \quad Y = \gamma\lambda + \delta\mu$$

darstellen dürfen, worin α, β, γ, δ konstant sind, so lange λ und μ als kleine Größen angesehen werden dürfen. Hat man also für drei Wertsysteme xy die entsprechenden X, Y berechnet, so kann man sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten α, β, γ, δ, x_0, y_0 aufstellen, aus denen x_0 und y_0 ermittelt werden können. Für

$$\begin{array}{llll} x = a\,, & y = b & \text{werde} & X = A\,,\ Y = B \\ x = a', & y = b' & & X = A',\ Y = B' \\ x = a'', & y = b'' & & X = A'',\ Y = B'', \end{array}$$

dann hat man:

$$\begin{array}{ll} A = \alpha(a - x_0) + \beta(b - y_0) & B = \gamma(a - x_0) + \delta(b - y_0) \\ A' = \alpha(a' - x_0) + \beta(b' - y_0) & B' = \gamma(a' - x_0) + \delta(b' - y_0) \\ A'' = \alpha(a'' - x_0) + \beta(b'' - y_0) & B'' = \gamma(a'' - x_0) + \delta(b'' - y_0)\,. \end{array}$$

Hieraus folgt nach Elimination von α, β, γ, δ

$$x_0 = a + \frac{(a' - a)(A''B - AB'') + (a'' - a)(AB' - A'B)}{(A' - A)(B'' - B) - (A'' - A)(B' - B)}$$

$$y_0 = b + \frac{(b' - b)(A''B - AB'') + (b'' - b)(AB' - A'B)}{(A' - A)(B'' - B) - (A'' - A)(B' - B)}\,.$$

Da der gemeinsame Nenner dieser Ausdrücke auch gleich

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\big((a' - a)(b'' - b) - (a'' - a)(b' - b)\big)$$

ist, so erkennt man einerseits, daß a, a', a'', b, b', b'' *nicht* so angenommen werden dürfen, daß

$$\frac{a'' - a}{b'' - b} = \frac{a' - a}{b' - b}$$

wird und andererseits, daß Fälle eintreten *können*, wo die Methode unbrauchbar ist, nämlich wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ wird. In der Anwendung kann man $a' = a$ und $b'' = b$ setzen, womit sowohl die Berechnung der A, B als obige Formeln sich vereinfachen. Auch ist klar, daß man die Größen a, b, A, B mit a', b', A', B' oder mit a'', b'', A'', B'' vertauschen darf.

In der Anwendung dieses Verfahrens auf die Gauß-Enckesche Rechnungsweise wird man $x = \nu_1$, $y = \nu_3$ und $X = \nu_1' - \nu_1$, $Y = \nu_3' - \nu_3$ setzen, wo mit ν_1' und ν_3' die Schlußwerte der zur Hypothese ν_1, ν_3 gehörigen ν_1 und ν_3 bezeichnet sind. Bei der zweiten und dritten Hypothese wird man mit den Schlußwerten der ersten und zweiten beginnen, bei der vierten aber mit den nach obigen Formeln gebildeten, wobei man für a und b diejenigen Werte nimmt, für welche X und Y bereits am kleinsten geworden sind, also wohl in der Regel die Anfangswerte der dritten Hypothese. Noch vorteilhafter aber ist es, nach einem Verfahren von Gauß (Theoria motus Nr. 159) für a und b die Schlußwerte der dritten Hypothese zu nehmen, mit denen man also bei Fortführung des gewöhnlichen Verfahrens die vierte Hypothese

begonnen hätte, und die Korrektionen dieser nach den obigen Formeln zu bestimmen. Nennt man die drei Werte für X: A, A', A'', für Y: B, B', B'' und die Schlußwerte der dritten Hypothese M und N, so werden die Anfangswerte der vierten Hypothese

$$x = M - \varkappa(A' + A'') - \varkappa' A''$$
$$y = N - \varkappa(B' + B'') - \varkappa' B'',$$

wo:

$$\varkappa = \frac{A'B'' - A''B'}{(A'B'' - A''B') + (A''B - AB'') + (AB' - A'B)}$$
$$\varkappa' = \frac{A''B - AB''}{(A'B'' - A''B') + (A''B - AB'') + (AB' - A'B)}.$$

Ist die Hypothesenrechnung beendet, so erfolgt die Bestimmung der Elemente ungeändert nach den Formeln XIV, XV (Seite 281) oder XV (Seite 293).

Hat man die Hansensche Formulierung (siehe die Übersicht Seite 291) zugrunde gelegt, oder etwa die in diesem Werke nicht zur Darstellung gelangte ungeänderte Methode der Theoria motus, so wird man bei vorhandenen Näherungen die Hypothesenrechnung nicht mit $P = r_3 : r_1$, $Q = r_1 r_3$ beginnen, sondern man wird gleich in die strengen Werte von P und Q

$$P = \frac{n_3}{n_1}, \qquad Q = 2 r_2^3 (n_1 + n_3 - 1)$$

eintragen:

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}$$
$$n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)},$$

womit sie übergehen in: (siehe Formel 5) Seite 152)

$$P = \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{r_3 \sin(v_3 - v_2)}, \qquad Q = \frac{4 r_2^4}{p} \frac{\sin\frac{1}{2}(v_3 - v_2) \sin\frac{1}{2}(v_2 - v_1)}{\cos\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}.$$

Nachdem hiermit die erste Hypothese gerechnet, folgen die weiteren, wie in der Übersicht Seite 291.

Selbstverständlich kann man auch hier das oben erläuterte Verfahren der Interpolation nach der dritten Hypothese einschlagen, indem man setzt $x = P$, $y = Q$, $X = P^{\mathrm{I}} - P$, $Y = Q^{\mathrm{I}} - Q$.

97. Beispiel für Berechnung einer Bahn, wenn ein provisorisches Elementensystem vorliegt. Um das in voriger Nr. auseinandergesetzte Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, geben wir im folgenden die hauptsächlichsten Teile einer den periodischen Kometen 1889 V (Brooks) betreffenden Rechnung wieder. Um drei möglichst gute Örter zu erhalten, werden zunächst mit den provisorischen Elementen

$T = 1889$ Sept. 30.28766 M. Z. Berlin
$\omega = 343^\circ 33' 36''.5$
$\Omega = 17\ 58\ 51.8$ } Ekliptik und Äqu. 1890.0
$i = 6\ 4\ 3.9$
$\varphi = 28\ 3\ 3.5$
$\mu = 502''.6573$

folgende Örter berechnet:

1889 M.Z.B.	Wahre AR.	Wahre Dekl.	Aberr.-Zeit	$\log\varrho$
Juli 31.5	$0^h\ 3^m\ 54^s.90$	$-7^\circ\ 4'\ 20''.6$	$10^m\ 0^s$	0.080
Aug. 1.5	4 23.91	−7 0 36.3	9 55	0.077
2.5	4 51.25	−6 56 58.4	9 51	0.074
Sept. 26.5	23 50 19.81	−5 14 30.8	7 56	9.980
27.5	49 42.42	−5 12 13.0	7 57	9.980
28.5	49 5.66	−5 9 48.7	7 58	9.981
Nov. 22.5	23 53 1.32	+0 21 49.0	11 8	0.127
23.5	53 52.08	+0 31 4.5	11 14	0.131
24.5	54 44.25	+0 40 25.2	11 20	0.134

und damit eine Reihe ausgewählter Beobachtungen verglichen. Diese werden zuvor mittels der bekannten ϱ von Parallaxe befreit und durch Subtraktion der Aberrationszeit von der Beobachtungszeit aus scheinbaren Örtern in wahre verwandelt, die nun unmittelbar mit der Ephemeride, die ebenfalls wahre Örter gibt, verglichen werden können. Folgende Tabellen enthalten die auszuführenden Rechnungen:

			Ortszeit	Red. auf Berl.	Aberr.-Zeit	Red. Zeit Berlin
I.	München	Juli	$31\ 12^h35^m\ 4^s$	$+\ 7^m\ 9^s$	$-10^m\ 0^s$	Juli 31.52237
	Straßburg		31 12 47 28	+ 22 30	−10 0	31.54165
	München	Aug.	1 12 12 53	+ 7 9	− 9 55	Aug. 1.50702
	Mt. Hamilton		1 13 14 2	$+\ 9^h\ 0\ 9$	− 9 53	1.91966
II.	Marseille	Sept.	27 8 50 34	+ 32 0	− 7 57	Sept. 27.38515
	Bordeaux		27 8 38 52	+ 55 40	− 7 57	27.39346
	München		27 10 1 33	+ 7 9	− 7 57	27.41719
	Washington		27 10 17 57	+6 1 47	− 7 57	27.67485
III.	Pulkowa	Nov.	23 5 45 13	−1 7 44	−11 12	Nov. 23.18492
	Nice		23 7 52 35	+ 24 13	−11 14	23.33731
	Dresden		23 7 51 32	− 1 20	−11 13	23.31874
	Washington		23 9 36 42	+6 1 47	−11 15	23.64391

	Beobachteter Ort: α	δ	Parallaxe in α	δ	Ephemeriden-Ort: α	δ	Beob.−Eph. α	δ
I. München	$0^h\ 3^m55^s.32$	$-7^\circ\ 4'\ 21''.1$	$-0^s.22$	$+5^s.9$	$0^h\ 3^m55^s.57$	$-7^\circ\ 4'\ 15''.5$	$-0^s.47$	$+0''.3$
Straßburg	3 55.86	−7 4 16.0	−0.23	+5.9	3 56.14	−7 4 11.1	−0.51	+1.0
München	4 23.82	−7 0 43.6	−0.24	+5.9	4 24.11	−7 0 34.7	−0.53	−3.0
Mt. Hamilton	4 35.18	−6 59 6.9	−0.21	+5.1	4 35.58	−6 59 4.1	−0.61	+2.3
II. Marseille	23 49 46.98	−5 12 38.8	−0.28	+6.8	23 49 46.68	−5 12 29.2	+0.02	−2.8
Bordeaux	49 46.86	−5 12 30.4	−0.29	+7.0	49 46.37	−5 12 28.0	+0.20	+4.6
München	49 45.71	−5 12 32.3	−0.14	+7.4	49 45.49	−5 12 24.7	+0.08	−0.2
Washington	46 36.49	−5 11 53.6	−0.13	+6.4	49 35.95	−5 11 48.2	+0.41	+1.0
III. Pulkowa	23 53 36.54	+0 28 0.7	−0.11	+5.6	23 53 35.94	+0 28 8.9	+0.49	−2.6
Nice	53 44.06	+0 29 25.9	+0.01	+4.5	53 43.73	+0 29 33.8	+0.34	−3.4
Dresden	53 43.38	+0 29 20.8	+0.01	+5.0	53 42.77	+0 29 28.5	+0.62	−2.7
Washington	53 59.90	+0 32 20.9	+0.16	+4.0	53 59.50	+0 32 24.9	+0.56	0.0

Die Ephemeride erfordert also zu den drei Epochen 1889 Aug. 1.5, Sept. 27.5 und Nov. 23.5 die Korrektionen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und ergibt daher die nebengesetzten Normalörter:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	wahre AR.	wahre Dekl.
1889 Aug. 1.5	$-0^s.53$	$+0''.1$	$0^h\ 4^m\ 23^s.38$	$-7^\circ\ 0'\ 36''.2$
Sept. 27.5	$+0.18$	$+0.6$	$23\ 49\ 42.60$	$-5\ 12\ 12.4$
Nov. 23.5	$+0.50$	-2.2	$23\ 53\ 52.58$	$+0\ 31\ 2.3$

Diese sind nun auf ein gemeinsames Äquinoktium zu übertragen, wozu wir zur Erleichterung späterer Rechnungen das des benachbarten Jahrzehntanfanges, nämlich 1890.0 wählen. Für solche Übertragungen sind im Berliner Jahrbuch besondere Ephemeriden der f, g, G gegeben. Mittels dieser findet man hier nachstehende Reduktionen auf 1890.0 und die reduzierten Örter:

	Red. auf 1890.0		α 1890.0	δ 1890.0
1889 Aug. 1.5	$+2^s.26$	$+15''.7$	$0^h\ 4^m\ 25^s.64$	$-7^\circ\ 0'\ 20''.5$
Sept. 27.5	$+1.87$	$+12.1$	$23\ 49\ 44.47$	$-5\ 12\ 0.3$
Nov. 23.5	$+1.44$	$+9.3$	$23\ 53\ 54.02$	$+0\ 31\ 11.6$

Die Verwandlung in Längen und Breiten gibt folgende Daten, denen wir die Koordinaten der Erde, ebenfalls auf 1890.0 gebracht, beifügen:

	λ 1890.0	β 1890.0	Korr.	L 1890.0	B 1890.0	$\log R$
1889 Aug. 1.5	$-1^\circ 47' 12''.1$	$-6^\circ 51' 52''.3$	$-0''.4$	$309^\circ 49' 13''.7$	$-0''.44$	0.006310
Sept. 27.5	$-4\ 25\ 22.9$	$-3\ 45\ 1.3$	-0.2	$5\ 1\ 22.8$	-0.24	0.000649
Nov. 23.5	$-1\ 11\ 31.5$	$+1\ 5\ 1.8$	-0.1	$61\ 54\ 55.3$	-0.09	9.994274

Den Breiten β sind die Korrektionen beigesetzt, welche daran anzubringen sind, wenn man die Erdbreiten zu Null annimmt (Nr. 34). Die Bahnrechnung ist nach den Formeln der Übersicht Seite 278 ausgeführt und ergab zunächst folgende von der Hypothesenrechnung unabhängige Resultate:

I.	$\operatorname{tg}\eta_2$	1.127862	III.	N_1	9.950524
	H_2	$-1^\circ 16' 22''.3$		c_1	1.184829_n
	$\operatorname{tg}\beta_0$	9.867854_n		$n_1{}^0$	9.698970
	a_1	1.301355			

	N_3	9.953936					
	c_3	1.246234					
	$n_3{}^0$	9.698970					
VII.	M_1	9.785040	M_3	9.549762	IV.	k^0	0.015350
	M_1'	9.155496	M_3'	0.020600		μ	0.307383

	δ_2	$10^\circ\ 9'\ 25''.3$	
	q	4 59 32.44	

Um die Hypothesenrechnung mit XIII. beginnen zu können, sind den früheren Rechnungen die in der ersten Spalte der folgenden Tabelle aufgeführten r_1, r_2, r_3, $u_3 - u_2$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_1$ entnommen und damit die Verhältnisse Sektor durch Dreieck berechnet worden. Mit diesen werden ν_1, ν_3, l^0, m, z, r_2, $\overline{\varrho_2}$, $\overline{\varrho_1}$, $\overline{\varrho_3}$, r_1, r_3, l_1, l_2, l_3, b_1, b_2, b_3, u_1, u_2, u_3 der Reihe nach durch die Formeln XIII, V, VI, VII, VIII, IX, X berechnet, worauf neue Werte für die y_1, y_2, y_3 ermittelt werden können, die der zweiten Hypothese zugrunde liegen usf.

	I.	II.	III.
r_1	0.30 3843	0.30 3899	0.30 3900
r_2	0.28 9920	0.28 9978	0.28 9978
r_3	0.30 1449	0.30 1508	0.30 1509
$u_3 - u_2$	24°36′25.″6	24°36′17.″1	24°36′17.″0
$u_2 - u_1$	24 28 4.0	24 27 55.9	24 27 55.4
$u_3 - u_1$	49 4 29.6	49 4 13.0	49 4 12.4
y_1	0.00 9224	0.00 9220	0.00 9220
y_3	0.00 9145	0.00 9141	0.00 9141
y_2	0.03 7565	0.03 7549	0.03 7549
ν_1	9.39 7613	9.39 7590	
ν_3	9.39 8859	9.39 8837	
n_1	9.72 7302	9.72 7299	
n_3	9.72 7381	9.72 7378	
l^0	9.77 3288	9.77 3273	
m	1.72 4857	1.72 4842	
$\varkappa$	5°11′49.″39	5°11′49.″37	
$\overline{\varrho_1}$	0.07 3952	0.07 3954	
$\overline{\varrho_2}$	9.97 9494	9.97 9495	
$\overline{\varrho_3}$	0.13 0909	0.13 0911	
i	6° 4′ 1.″0	6° 4′ 1.″2	
Ω	17 59 9.7	17 59 9.5	

Da die y der letzten Hypothese sich nicht mehr geändert haben, kann man die letzterhaltenen Werte der r und u als die definitiven betrachten und daraus die Elemente ableiten.

98. Die Variation der geozentrischen Distanzen. *Gauß* betont in der Theoria motus an mehreren Stellen mit Nachdruck, daß es nicht gelinge das Problem der Bahnbestimmung in einfacher Weise auf die Ermittelung *einer* Unbekannten zurückzuführen, daß dagegen bei Einführung von zwei Unbekannten eine verhältnismäßig einfache Analyse zum Ziele führe. Bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn bieten sich als solche kaum geeignetere Größen dar als P und Q, da man für sie einfache Näherungswerte angeben kann, die sich dann leicht zu den wahren Werten verbessern lassen. Bei schon näherungsweise bekannten Bahnen dagegen kann man auch andere Unbekannte einführen, z. B. die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen oder die Bestimmungsstücke der Bahnebene Ω und i, da dann Näherungswerte dieser Größen vorliegen und auf Grund derselben wie folgt verfahren werden kann. Man berechnet mit den Näherungswerten und zwei geozentrischen Örtern die Elemente und dann mit diesen den dritten geozentrischen Ort, der mit dem beobachteten im allgemeinen nicht übereinstimmen wird; die Näherungswerte werden mit Benutzung der Seite 311 auseinandergesetzten Methode so lange variiert, bis Übereinstimmung des berechneten mit dem beobachteten Ort erzielt ist. Besonders mit den zwei geozentrischen Distanzen als Unbekannten leistet diese unter dem Namen: *Variation der geozentrischen Distanzen* bekannte Methode vorzügliche Dienste, weshalb wir näher auf sie eingehen müssen.

Mit den genäherten Distanzen für die Zeiten zweier Beobachtungen oder Normalörter, in der Regel der beiden äußeren ϱ_1^0 und ϱ_3^0 und den zugehörigen geozentrischen Koordinaten $\lambda_1\ \beta_1$, $\lambda_3\ \beta_3$ berechnet man ein Elementensystem I, welches also diese beiden Örter völlig streng darstellen wird, den mittleren dagegen nicht. Um die Änderungen zu ermitteln, welche an ϱ_1^0 und ϱ_3^0 angebracht werden müssen, damit auch der mittlere Ort dargestellt werde, berechne man weitere zwei Elementensysteme II und III mit den Grundlagen:

und

$$\begin{array}{llll} \text{II.} & \varrho_1^0 + \delta\varrho_1 & \varrho_3^0 & \lambda_1\ \beta_1 \quad \lambda_3\ \beta_3 \\ \text{III.} & \varrho_1^0 & \varrho_3^0 + \delta\varrho_3 & \lambda_1\ \beta_1 \quad \lambda_3\ \beta_3\,. \end{array}$$

Hierbei gewährt die Bemerkung einige Erleichterung der Rechnung, daß man bei Bildung der heliozentrischen Koordinaten für die beiden Örter nach den Formeln (Nr. IX, Seite 279)

$$\begin{aligned} r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L) \\ r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L)+R \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

für das System II beim ersten Ort nur die Inkremente

$$\delta\varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1-L_1)\,, \qquad \delta\varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1-L_1)\,, \qquad \delta\varrho_1\sin\beta_1$$

den bei I erhaltenen Werten hinzuzufügen braucht, während der dritte Ort ungeändert bleibt und daß für das System III der erste Ort ungeändert bleibt und dem dritten Ort die Inkremente

$$\delta\varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3-L_3)\,, \qquad \delta\varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3-L_3)\,, \qquad \delta\varrho_3\sin\beta_3$$

hinzuzufügen sind.

Sind nun der Reihe nach die mit den drei Elementensystemen *gerechneten* mittleren Örter

$$\lambda_2^{\mathrm{I}}\beta_2^{\mathrm{I}}\,, \qquad \lambda_2^{\mathrm{II}}\beta_2^{\mathrm{II}}\,, \qquad \lambda_2^{\mathrm{III}}\beta_2^{\mathrm{III}},$$

der *beobachtete* Ort aber $\lambda_2\beta_2$ und werden ferner mit $\varrho_1^0 + x_1\delta\varrho_1$ und $\varrho_3^0 + x_3\delta\varrho_3$ die Distanzen bezeichnet, für welche Beobachtung — Rechnung Null wird, also die wahren Distanzen, so erhält man durch Spezialisierung des Seite 311—12 beschriebenen Verfahrens oder noch einfacher durch direkte Überlegung leicht die Ansätze:

$$\begin{aligned} (\lambda_2^{\mathrm{II}}-\lambda_2^{\mathrm{I}})x_1 + (\lambda_2^{\mathrm{III}}-\lambda_2^{\mathrm{I}})x_3 &= \lambda_2-\lambda_2^{\mathrm{I}} \\ (\beta_2^{\mathrm{II}}-\beta_2^{\mathrm{I}})x_1 + (\beta_2^{\mathrm{III}}-\beta_2^{\mathrm{I}})x_3 &= \beta_2-\beta_2^{\mathrm{I}}\,. \end{aligned} \qquad \text{A.}$$

Hieraus können x_1 und x_3 und damit die wahren Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 ermittelt werden; die dann durch $\varrho_1\lambda_1\beta_1$, $\varrho_3\lambda_3\beta_3$ berechneten Elemente werden die äußeren Örter streng darstellen, den mittleren aber so gut, als die Berechtigung des Verfahrens es gestattet, d. h. um so besser, je kleiner die Variationen $x_1\delta\varrho_1$ und $x_3\delta\varrho_3$ sind.

Das beschriebene Verfahren läßt sich verallgemeinern, d. h. man kann beliebig viele Beobachtungen ebenso wie hier die mittlere behandeln; man erhält dann so viele Gleichungspaare A. als mittlere Beobachtungen zugezogen wurden und muß aus ihnen die Werte von x_1 und x_3 durch ein Ausgleichungsverfahren bestimmen. Wir werden hierauf in Abschnitt XXVIII zurückkommen.

99. Beispiel zur Variation der geozentrischen Distanzen. Zur Erläuterung des Verfahrens wählen wir die erste Bahnverbesserung des Planeten (482) Petrina, wobei wir zum Teil von Rechnungen Gebrauch machen, die Dr. Neugebauer ausgeführt hat. Aus drei Örtern 1902 März 7 (Besançon), März 30 (Wien) und Mai 7 (Wien), die wir unten angeben, war eine Bahn bestimmt worden, die wir mit ihren Grundlagen gleichfalls in die unten folgende Zusammenstellung unter der Bezeichnung I. aufführen. Eine später hinzukommende Beobachtung 1902 Mai 29 (Wien) zeigte von dieser Bahn erhebliche Abweichungen und die Aufgabe war, durch Variation der Distanzen von März 7 und Mai 7, aus denen die erste Bahn berechnet worden war, ein Elementensystem zu erlangen, welches außer der Beobachtung März 30 auch noch die Beobachtung Mai 29 darstellte. Zu dem Ende wurden drei Elementensysteme berechnet mit den Grundlagen:

	März 7	Mai 7
I.	$\log\varrho_1$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3$, λ_3, β_3
II.	$\log\varrho_1 - 0.00\,1000$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3$, λ_3, β_3
III.	$\log\varrho_1$, λ_1, β_1	$\log\varrho_3 - 0.00\,1000$, λ_3, β_3,

von denen das erste der ersten Bahnbestimmung entnommen werden konnte. Diese Rechnungen sind auszugsweise folgende:

1902	M.Z.B.	λ	$\mathrm{tg}\,\beta$	L	$\log R$
März	7.49314	174° 37′ 17.″5	$8.74\,4968_n$	166° 27′ 6.″4	9.99 6848
	68.40902	165 55 53.0	8.25 1469	226 20 26.2	0.00 4092

	I.	II.	III.
$\overline{\varrho_1}$	0.30 1078	0.30 0078	0.30 1078
$\overline{\varrho_3}$	0.36 0757	0.36 0757	0.35 9757
$l_1 - L_1$	+ 5° 27′ 42.″9	+ 5° 27′ 27.″8	+ 5° 27′ 42.″9
$l_3 - L_3$	− 42 57 50.2	− 42 57 50.2	− 42 55 58.4
$\mathrm{tg}\,b_1$	8.57 0920	8.57 0588	8.57 0920
$\mathrm{tg}\,b_3$	8.14 5653	8.14 5653	8.14 5399
r_1	0.47 5427	0.47 4758	0.47 5427
r_3	0.46 6615	0.46 6615	0.46 5869
$u_3 - u_1$	11° 49′ 49.″6	11° 50′ 2.″3	11° 51′ 37.″6
y_2	0.00 3074	0.00 3082	0.00 3082
p	0.47 3212	0.47 2146	0.47 3904
Ep.		1902 Mai 7.5	
M	289° 58′ 43.″8	288° 20′ 9.″0	291° 57′ 56.″9
ω	84 20 12.2	85 9 29.0	83 14 5.2
Ω	180 15 13.1	180 15 2.7	180 16 39.4
i	14 23 47.7	14 23 2.2	14 21 26.5
φ	5 41 9.2	5 14 20.6	6 10 32.4
μ	681.″967	686.″013	678.″527
$\log a$	0.47 7496	0.47 5783	0.47 8960
Äqu.	1902.0	1902.0	1902.0

Die Beobachtungen von 1902 März 30 und Mai 29 (Wien) lauten, in geozentrische Längen und Breiten verwandelt und auf das Äquinoktium 1902.0 gebracht:

1902	M.Z.B.	λ 1902.0	β 1902.0
März	30.46 745	169° 42′ 15″.8	− 1° 32′ 33″.1
Mai	29.41 300	167 31 49.3	+ 2 8 53.0

Die Zeiten sind bereits für Aberration korrigiert, die Örter also für diese Zeiten wahre Örter. Für diese selben Zeiten wurden nun mit obigen drei Elementensystemen die Örter gerechnet und folgendes erhalten (Formeln 53) Seite 277):

		λ^{I}	λ^{II}	λ^{III}	β^{I}	β^{II}	β^{III}
März	30.46 745	169° 42′ 16″.1	169° 41′ 50″.5	169° 42′ 30″.5	− 1° 32′ 32″.8	− 1° 32′ 24″.3	− 1° 32′ 41″.9
Mai	29.41 300	167 32 18.1	167 32 34.5	167 32 33.0	+ 2 9 2.1	+ 2 8 49.6	+ 2 9 14.0

Der erste Ort gibt also die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} -25''.6\,x_1 + 14''.4\,x_3 &= -0''.3 \\ +\ 8.5\,x_1 - \ 9.1\,x_3 &= -0.3 \end{aligned}$$

und der zweite:

$$\begin{aligned} +16''.4\,x_1 + 14''.9\,x_3 &= -28''.8 \\ -12.5\,x_1 + 11.9\,x_3 &= -\ 9.1 \end{aligned}$$

Durch eine erst später zu besprechende Ausgleichungsmethode findet man aus allen vier Gleichungen

$$x_1 = -0.630 \qquad x_3 = -1.333$$

und damit für die korrigierten kurtierten Distanzen $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_3}$:

$$\begin{aligned} \log \overline{\varrho_1} &= 0.30\,1078 + 0.00\,0630 = 0.30\,1708 \\ \log \overline{\varrho_3} &= 0.36\,0757 + 0.00\,1333 = 0.36\,2090 \end{aligned}$$

Mit diesen werden die neuen Elemente gefunden:

$$\begin{aligned} &1902\ \text{Mai}\ 7.5 \\ M &= 288^\circ\ 7'\ 6''.3 \\ \omega &= \ 85\ 31\ 13.0 \\ \Omega &= 180\ 13\ 25.1 \\ i &= \ 14\ 27\ 25.6 \\ \varphi &= \ \ 5\ 18\ 49.8 \\ \mu &= 683''.838 \\ \log a &= 0.47\,6703 \end{aligned} \Big\} \ 1902.0$$

welche die vier Beobachtungen in folgender Weise darstellen:

			$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
1902	März	7	0″.0	0″.0
	März	30	+ 2.8	− 7.1
	Mai	7	0.0	0.0
	Mai	29	+ 1.3	− 1.2

Diese Abweichungen können sowohl durch direkte Rechnung gefunden werden, als durch Einsetzung von x_1 und x_3 in obige Bedingungsgleichungen. Die Beobachtungen März 7 und Mai 7, aus denen die Elemente abgeleitet werden, werden

natürlich völlig dargestellt; die beiden anderen Beobachtungen könnten nur dann völlig wiedergegeben werden, wenn alle Beobachtungen fehlerfrei wären. Hier scheint eine der Breiten mit einem nicht ganz zulässigen Beobachtungsfehler behaftet zu sein, weshalb die Darstellung der Beobachtung vom März 30 nicht befriedigt. Ohne Zuziehung weiterer Beobachtungen läßt sich aber kein besseres Resultat erlangen.

100. Die Ausnahmefälle. Die Sicherheit der Bahnbestimmung. Bei der Auswahl der drei Beobachtungen, auf die man eine Bahnbestimmung gründen will, muß man einige Vorsicht üben, da es Fälle gibt, in denen sich die Bahnbestimmung mit geringerer Sicherheit ausführen läßt und auch solche, wo dies gar nicht möglich ist. Durch eine Diskussion der zugrunde liegenden Gleichungen lassen sich diese Ausnahmefälle leicht feststellen. Wir haben die Gleichung zur Bestimmung der mittleren geozentrischen Distanz $\overline{\varrho_2}$ auf die Form gebracht (Seite 263 und 286)

$$K\overline{\varrho_2} = An_1 + Bn_3 - C, \qquad \text{A.}$$

wo

$$K = \frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\eta_2}$$

$$A = -R_1 \sin(L_1 - H_2), \quad B = -R_3 \sin(L_3 - H_2), \quad C = -R_2 \sin(L_2 - H_2)$$

gesetzt wurde und H_2 und η_2 Länge des Knotens und Neigung des durch den ersten und dritten geozentrischen Ort gelegten größten Kreises $\overline{13}$ sind.

Wenn $\overline{13}$ senkrecht auf der Ekliptik steht, also $\eta_2 = 90^\circ$ wird, so wird auch $\beta_0 = 90^\circ$ und K daher unbestimmt. Die Gleichung A. wird dann zwar unbrauchbar, eine Bahnbestimmung ist aber trotzdem möglich, nur muß man statt der Ekliptik eine andere Fundamentalebene, etwa den Äquator wählen.

Wenn dagegen $\overline{13}$ mit der Ekliptik zusammenfällt, also $\eta_2 = 0$ wird, so wird nicht nur K unendlich groß, sondern auch die Koeffizienten A, B, C werden unbestimmt. Wie aus der allgemeinen Form 19) (Seite 264) der Grundgleichung hervorgeht, ist dann überhaupt eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich und man muß vier Beobachtungen heranziehen (siehe Nr. 102).

Wenn $\beta_0 = \beta_2$ wird, d. h. wenn die drei geozentrischen Örter in *einem* größten Kreise liegen, so wird zwar wegen $K = 0$ die Gl. A. nicht benutzbar, eine Bahnbestimmung ist aber gleichwohl möglich, denn es folgt dann aus der Gl. 3) (Seite 286)

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}\,\frac{A + BP}{(C - A) + (C - B)P}},$$

woraus r_2 bestimmt werden kann. Übrigens leitet man sowohl aus diesem Ausdruck als auch besonders einfach aus der Weißschen Form der Grundgleichung, nämlich der zweiten Gl. 4) (Seite 307), das Resultat ab, daß der vorliegende Fall nur eintreten kann, wenn nahe $r_2 = R_2$ ist; es wird nämlich dann in der genannten Gleichung $H_1 = H_3$ und daher $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} = 0$.

Wenn $\beta_0 = \beta_2$ und $C = 0$ ist, d. h. wenn die drei geozentrischen Örter in einem größten Kreise liegen, der durch den mittleren Erdort (und Sonnenort)

hindurchgeht, dann folgt aus der schon oben angezogenen Form der Grundgleichung 3) (Seite 286), daß

$$\frac{A+BP}{P+1}\left(1+\frac{Q}{2r_2^3}\right)=0$$

wird, woraus notwendig $A+BP=0$ sich ergibt; die Grundgleichung liefert also lediglich die Identität $0=0$ und die Bahnbestimmung wird unmöglich. Da wegen $H_2=L_2$ in diesem Falle

$$P=-\frac{A}{B}=\frac{R_1R_2\sin(L_2-L_1)}{R_2R_3\sin(L_3-L_2)}=\frac{[R_1R_2]}{[R_2R_3]}$$

wird und andererseits

$$P=\frac{[r_1r_2]}{[r_2r_3]}$$

ist, so tritt dieser Ausnahmefall dann ein, wenn die Verhältnisse der Dreiecksflächen der Erd- und der Planetenbahn einander genau gleich werden. Daß dann eine Bahnbestimmung unmöglich wird, sieht man sofort aus der Form 20) (Seite 264) der Grundgleichung, die für $\beta_0=\beta_2$ und $H_2=L_2$ dasselbe aussagt, wie $P=-\frac{A}{B}$.

Wenn der dritte Planetenort mit dem ersten zusammenfällt, der Planet also inzwischen eine Schleife beschreibt, dann kann die Analyse, die wir verfolgt haben, nicht eingeschlagen werden, da durch den ersten und dritten Ort ein bestimmter größter Kreis nicht gegeben ist. Eine Entscheidung, ob und wie eine Bahnbestimmung möglich ist, kann also nur durch Zurückgehen auf die ursprünglichen Gleichungen 4) (Seite 257) der Ebenenbedingung getroffen werden. Nennt man Π einen beliebigen Winkel, so lassen sich diese Gleichungen, wenn man noch $\lambda_1=\lambda_3$, $\beta_1=\beta_3$ setzt, so schreiben:

$$\begin{aligned}
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\cos\beta_1\cos(\lambda_1-\Pi)&=\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\Pi)-n_1R_1\cos(L_1-\Pi)-n_3R_3\cos(L_3-\Pi)+R_2\cos(L_2-\Pi)\\
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi)&=\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\Pi)-n_1R_1\sin(L_1-\Pi)-n_3R_3\sin(L_3-\Pi)+R_2\sin(L_2-\Pi)\\
(n_1\varrho_1+n_3\varrho_3)\sin\beta_1&=\varrho_2\sin\beta_2\,.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\Pi=\lambda_1$, so gibt die zweite Gleichung:

$$\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)=n_1R_1\sin(L_1-\lambda_1)+n_3R_3\sin(L_3-\lambda_1)-R_2\sin(L_2-\lambda_1),$$

woraus offenbar ϱ_2 bestimmt werden kann. Zugleich aber sieht man auch, daß ϱ_1 und ϱ_3 getrennt nicht ermittelt werden können, sondern nur in der Kombination $n_1\varrho_1+n_3\varrho_3$. Eine Elementenbestimmung ist also unmöglich.

Wenn zur Zeit der mittleren Beobachtung der Planet in der Verbindungslinie Sonne-Erde, also genau in der Opposition sich befindet, dann wird

$$\lambda_2=L_2\,,\qquad \beta_2=0$$

und der Winkel δ_2 an der Erde zwischen den Richtungen nach dem Planeten und nach der Sonne wird ebenfalls gleich Null. Man erkennt bei Durchsicht der zur Aufstellung der Gaußschen Gleichung dienenden Formeln leicht, daß dann ϱ_2 und r_2 in unbestimmter Form erscheinen, also nicht bestimmt werden können.

Ein strenges Eintreten der eben besprochenen Fälle wird selten oder nie vorkommen. Man erkennt aber, daß wenn sie auch nur *genähert* eintreten, darunter

die *Sicherheit* der Bahnbestimmung leiden muß. Man wird daher bei der Auswahl der Beobachtungen folgende Regeln beachten müssen: 1. Die drei geozentrischen Orter dürfen nicht in einem größten Kreis liegen, der durch den mittleren Erdort hindurchgeht; 2. die drei Breiten dürfen nicht zu klein sein; 3. die beiden äußeren Örter dürfen nicht nahe zusammenfallen; 4. man muß es vermeiden, namentlich bei kleinen Breiten, die mittlere Beobachtung in der Nähe der Opposition zu wählen.

Für die *Sicherheit einer Bahnbestimmung im allgemeinen* ist offenbar ein guter Maßstab die Größe des Winkels, unter dem sich die beiden größten Kreise zwischen dem ersten und dritten Ort einerseits und zwischen dem zweiten Planeten- und zweiten Erdort andererseits schneiden, da es von ihm abhängt, mit welcher Sicherheit der Schnittpunkt derselben berechnet werden kann. *Hansen* nannte daher diesen Winkel den *maßgebenden* und hat seine Berechnung empfohlen, die nach Seite 289 leicht auszuführen ist. Ist er größer als 10°, so wird eine gute Bestimmung der Bahn zu erwarten sein, sinkt er unter 1° herab, so verdienen die Elemente kein Vertrauen.

Wesentlich für die Beurteilung der Güte einer Bahn ist natürlich auch die Größe der Zwischenzeiten. Zu groß darf man diese nicht wählen, weil sonst in der ersten Näherung die notwendig zu vernachlässigenden Glieder in den Reihenentwicklungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einen zu großen Einfluß gewinnen; aber da unter allen Umständen die mittlere geozentrische Distanz als Quotient zweier Größen zweiter Ordnung bestimmt werden muß, so dürfen sie auch nicht zu klein angenommen werden, weil sonst die unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Koordinaten nachteilig bei der Elementenbestimmung sich geltend machen. Eine allgemeine Regel läßt sich nicht wohl aufstellen. Doch hat die Erfahrung gezeigt, daß bei kleinen Planeten eine Zwischenzeit von 30—60 Tagen zwischen den beiden äußeren Beobachtungen im allgemeinen gute Elemente mit rasch erledigter Hypothesenrechnung liefert. Bei elliptischen Bahnen von Kometen dagegen, besonders bei solchen die der Erde nahe sind, wird man, wenn Näherungen nicht vorliegen sollten, kleinere Zwischenzeiten nehmen müssen.

101. Die mehrfachen Lösungen. Wir haben gesehen (Nr. 75 und 85), daß die Lösung des Bahnbestimmungsproblems aus drei Beobachtungen von einer Gleichung achten Grades in r_2 abhängt, die nach Einführung der Variabeln z durch

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}$$

auf die Form

$$\sin(z - q) = m \sin z^4 \qquad 1)$$

gebracht werden kann; wir haben auch bereits hervorgehoben, daß $r_2 = R_2$ oder $z = \delta_2$ eine Wurzel dieser Gleichung ist. Die Bedeutung dieser Wurzel ist leicht zu erkennen; sie entspricht der Erdbahn, die in der Tat auch als eine Lösung des Problems sich ergeben muß, da sie alle Bedingungen, aus denen die Gleichung achten Grades hervorging, erfüllt; die drei Beobachtungen geben lediglich die Richtungslinien des Gestirnes an, wo immer diese also von einer Ebene getroffen werden,

welche die Bedingungen erfüllt, muß eine Lösung der Gleichung vorliegen, mithin auch für $\varrho_2 = 0$.

Man erkennt ferner, daß alle Wurzeln x kleiner als δ_2 sind, da für ϱ_2 und r_2 sich positive Werte ergeben müssen. Die Gleichung achten Grades lautet vollständig entwickelt:

$$r_2^8 - \mu^2 r_2^6 + 2 l \mu \cos q \, r_2^3 - l^2 = 0; \qquad 2)$$

nur das Zeichen des dritten Gliedes ist also nicht von vornherein bestimmt, sondern hängt, da nach Festsetzung (Seite 271) $l\mu$ stets positiv ist, vom Zeichen von $\cos q$ ab. Es werden also bei der Diskussion der Wurzeln von 2) zwei Fälle zu unterscheiden sein, jenachdem $\cos q \gtrless 0$ ist.

Ist erstens $\cos q$ positiv, so hat nach der bekannten Regel die Gl. 2) höchstens drei positive Wurzeln; außerdem hat sie eine und nur *eine* negative Wurzel; es sind also mindestens vier Wurzeln imaginär. Ist zweitens $\cos q$ negativ, so hat sie höchstens eine positive und höchstens drei negative Wurzeln, also wieder mindestens vier imaginäre. Da die eine positive Wurzel stets der Erdbahn entspricht, so kann also ein negatives $\cos q$ bei einer Bahnbestimmung überhaupt nicht vorkommen, d. h. q liegt stets zwischen -90° und $+90^\circ$. Man erkennt dies übrigens auch aus der geometrischen Bedeutung.

Von den höchstens drei positiven Wurzeln, die die Gl. 2) sonach haben kann, gehört eine, nämlich r_2 nahe R_2 oder x nahe δ_2 der Erdbahn an; es bleiben also höchstens zwei positive Wurzeln, die für die Bahnbestimmung in Betracht kommen. Diese müssen gleichzeitig in imaginäre übergehen, worauf die Gleichung überhaupt keine einem Planeten oder Kometen entsprechende Lösung gibt.

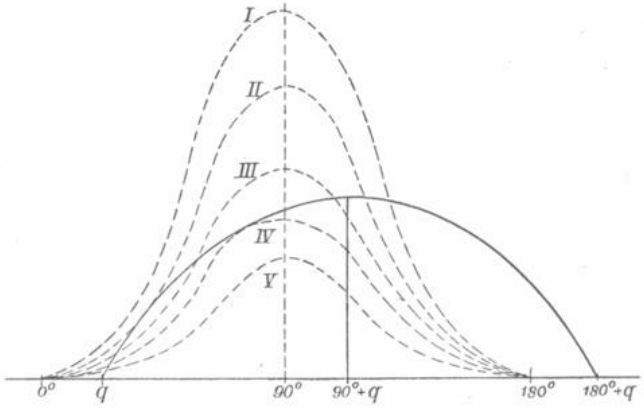


Fig. 50.

Um das Verhalten der positiven Wurzeln von 1) zu erkennen, diskutiert Encke*) die beiden Kurven

$$\begin{aligned} x_1 &= m \sin z^4 \\ x_2 &= \sin(z - q), \end{aligned} \qquad 3)$$

indem er die z als Abszissen, die x als Ordinaten eines Systems betrachtet. Wo die beiden Kurven sich schneiden, ist eine Wurzel von 1). Die erste Kurve geht durch den Nullpunkt und durch den Punkt $z = 180^\circ$, erreicht bei $z = 90^\circ$ ein Maximum $= m$ und hat überhaupt nur positive Ordinaten. Die zweite ist die Sinuskurve, die zwischen $z = q$ und $z = 180^\circ + q$ positive Ordinaten besitzt, welche also die einzigen in Betracht kommenden sind. Ist m so groß, daß zwischen $z = q$ und

*) Ostwalds Klassiker Nr. 141, Seite 23.

$z = 90^\circ + q$ die erste Kurve über die zweite hinausragt, so wird nur *ein* reeller Schnitt der Kurven statthaben für ein $z < 180^\circ$ (in der Figur Fall I); wird m kleiner, so wird eine Berührung der beiden Kurven von außen eintreten: zwei imaginäre Wurzeln gehen in zwei gleiche, reelle über (Fall II); nimmt m darüber hinaus ab, so treten zwei verschiedene, reelle Wurzeln an Stelle der gleichen, so daß also von II ab drei reelle Wurzeln existieren (Fall III); bei weiterem Abnehmen von m wird durch Vereinigung der zweiten mit der dritten Wurzel ein innerer Berührungspunkt erzeugt (Fall IV), über den hinaus wieder nur mehr *eine* reelle Wurzel vorhanden sein wird (Fall V). Da die eine reelle Wurzel stets zur Erdbahn gehört, so können Lösungen der Gleichung, die zu einer Planetenbahn gehören, also nur für Werte von m auftreten, die zwischen Fall II und IV liegen. Um die Werte von m zu bestimmen, für welche die Kurven sich berühren, entwickeln wir nach dem Taylorschen Satz, indem wir von einem bestimmten $z = z_0$ ausgehen:

$$x_1 = m \sin z_0^4 + 4m \sin z_0^3 \cos z_0 \Delta z + \tfrac{1}{2}(12m \sin z_0^2 \cos z_0^2 - 4m \sin z_0^3)\Delta z^2 + \cdots$$
$$x_2 = \sin(z_0 - q) + \cos(z_0 - q)\Delta z - \tfrac{1}{2}\sin(z_0 - q)\Delta z^2 + \cdots.$$

Daraus folgt die Differenz der Ordinaten:

$$x_1 - x_2 = [m \sin z_0^4 - \sin(z_0 - q)] + [4m \sin z_0^3 \cos z_0 - \cos(z_0 - q)]\Delta z + \cdots.$$

Soll dem z_0 ein Schnittpunkt entsprechen, so wird

$$m \sin z_0^4 - \sin(z_0 - q) = 0 \qquad 4)$$

und soll dem z_0 ein Berührungspunkt entsprechen, so wird außerdem

$$4m \sin z_0^3 \cos z_0 - \cos(z_0 - q) = 0 \qquad 5)$$

sein. Diese beiden Bedingungen ergeben:

$$\sin(2z_0 - q) = \tfrac{5}{3}\sin q,$$

woraus erstens folgt, daß $\sin q < \frac{3}{5}$ oder $q < 36^\circ 52'.2$ sein muß (abgesehen vom Zeichen), wenn die Gleichung eine einer Planetenbahn entsprechende Wurzel besitzen soll. Zweitens aber folgen die den Berührungspunkten entsprechenden z_0 aus

$$2z_0 - q = W \quad \text{und} \quad 2z_0 - q = 180^\circ - W,$$

wenn W der spitze, aus

$$\sin W = \tfrac{5}{3}\sin q$$

bestimmte Winkel ist; also einerseits

und andererseits
$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \tfrac{1}{2}(W + q) \\ z_0 &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(W - q) \end{aligned}\right\}. \qquad 6)$$

Die zugehörigen Werte von m ergeben sich aus 4), nämlich:

$$m' = \frac{\sin(z_0 - q)}{\sin z_0^4} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(W - q)}{\sin \tfrac{1}{2}(W + q)^4}$$

und

$$m'' = \frac{\sin(z_0 - q)}{\sin z_0^4} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(W + q)}{\cos \tfrac{1}{2}(W - q)^4}.$$

Daraus folgt, daß für jeden Wert von q zwischen $-36^{\circ}52.'2$ und $+36^{\circ}52.'2$ die zwei Grenzwerte von m, nämlich m' und m'', berechnet werden können, zwischen denen es liegen muß, wenn drei positive reelle Wurzeln der Gleichung 1) oder 2) existieren, d. h. wenn eine Planetenbahn möglich ist. Die »Tafel XXV.« enthält diese Grenzwerte für alle möglichen Werte von q, von Grad zu Grad fortschreitend. Zugleich sind die zu den Grenzwerten gehörigen je zwei Werte von x_0 aufgeführt, die zu den Berührungs- beziehungsweise Schnittpunkten der beiden Grenzkurven mit der Sinuskurve gehören; erstere ergeben sich direkt aus 6), letztere werden durch versuchsweise Auflösung der Gleichungen

$$m' \sin x_0^4 = \sin(x_0 - q) \quad \text{bez.} \quad m'' \sin x_0^4 = \sin(x_0 - q)$$

ermittelt. Die Tafel zeigt also für jedes q die Grenzen, zwischen denen die drei positiven Wurzeln liegen. Um nun diejenige Wurzel herauszufinden, welche der Planetenbahn entspricht, muß man die Bedingung $x < \delta_2$ heranziehen und beachten, daß jedenfalls eine der drei Wurzeln, nämlich x nahe δ_2, der Erdbahn entspricht. Sind x_1, x_2, x_3 der Größe nach geordnet die drei Wurzeln und ist x_1 nahe gleich δ_2, so gibt es *keine* einer Planeten- oder Kometenbahn entsprechende Lösung; ist x_2 nahe δ_2, so gibt diese Wurzel die Erdbahn, und x_1 die Planetenbahn oder das Problem ist eindeutig bestimmt; ist endlich x_3 nahe δ_2, so entspricht x_3 der Erdbahn und x_1 und x_2 entsprechen möglichen Planetenbahnen; das Problem ist dann zweideutig und es gibt zwei ganz verschiedene Bahnen, welche den drei Beobachtungen genügen; welche von ihnen die dem vorliegenden Falle angemessene ist, kann erst durch weitere Beobachtungen entschieden werden.

Abschnitt XX.

Die Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.

102. Vorbemerkung. Bei Besprechung der Ausnahmefälle für die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen haben wir festgestellt, daß eine solche unmöglich ist, wenn die Bahnebene mit der Ekliptik zusammenfällt und unsicher, wenn dies nahezu der Fall ist; die drei Breiten stellen dann nicht drei voneinander unabhängige Stücke dar und die durch drei Beobachtungen gebotenen Koordinaten reichen also zur Bestimmung der sechs Elemente nicht aus. Das Eintreten des Falles zeigt sich in der Kleinheit der geozentrischen Breiten ($< 1^\circ$) oder bei etwa vorausgegangener Kreisbahn in der Kleinheit der Neigung an. Da drei Längen nicht ausreichen zur Bestimmung der vier Elemente M_0, ω, e, μ, welche übrig bleiben, wenn die Bahn mit der Ekliptik zusammenfällt, sondern notwendig eine vierte Länge hinzuzuziehen ist, so bietet sich als der einfachste Weg bei kleiner Neigung der dar, *vier* Beobachtungen zu wählen und davon zwei Breiten wegzulassen. Die verschiedenen Methoden teilen sich hiernach in solche, wo die beiden äußeren und in solche, wo die beiden inneren Breiten unberücksichtigt bleiben. Die ersteren, zu denen namentlich die von *Gauß* in der Theoria motus aufgestellte und von *Watson*, *Bruhns*, *Klinkerfues* u. a. mehr oder minder ausgearbeitete Methode gehört, haben den Vorzug einer größeren Konvergenz und Geschmeidigkeit des Verfahrens, dagegen aber den Nachteil einer geringeren Genauigkeit der Elemente, namentlich derer, welche die Bahnlage bestimmen; die letzteren erfordern in der Regel wegen der größeren Zwischenzeiten eine umständlichere Hypothesenrechnung, geben dann aber so genaue Elemente, als die zur Verwendung gelangte Zwischenzeit erwarten läßt; zu ihnen gehören die Methoden von *Klinkerfues*, *Fabritius* (Astr. Nachr. Band 128), *Oppolzer* (Bahnbest. Band I. Seite 413), *Coddington* (Diss. Berlin 1902), *Berberich* (Veröff. des Rechen-Inst. Berlin Heft 20) u. a.

Es werden zuweilen Bahnen aus vier Beobachtungen berechnet, bei denen dies durch das Eintreten des Ausnahmefalles *nicht* geboten ist, z. B. elliptische Kometenbahnen mit starker Neigung; ein solches Verfahren ist unökonomisch und zwecklos, denn eine Bahn aus vier Beobachtungen erfordert selbst dann mehr Arbeit, wenn bei einer Bestimmung aus drei Beobachtungen infolge großer oder ungleicher Zwischenzeiten etwa eine Hypothese mehr als gewöhnlich zu rechnen wäre; der Gewinn an Genauigkeit aber ist gering anzuschlagen, wenn die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen mit der erforderlichen Zahl von Hypothesen durchgeführt wird, da auf die genaue Darstellung der überschüssigen Daten doch verzichtet werden muß. Man sollte daher von der naturgemäßen Lösung durch drei Beobachtungen nur dann abgehen, wenn dies unbedingt geboten ist, d. h. nur im Ausnahmefall.

Dementsprechend soll hier nur *ein* einfaches Verfahren zur Darstellung kommen, welches dem Ausnahmefall angepaßt ist und verhältnismäßig rasch zum Ziele führt,

wogegen die komplizierteren Methoden, die von den Rechnern niemals oder wenigstens nicht zum zweiten Male angewendet werden, außer Betracht bleiben sollen.

103. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. Der Ausnahmefall ist dadurch bedingt, daß es nicht möglich ist, eine brauchbare Gleichung für *eine* geozentrische Distanz aufzustellen. Man muß daher zwei Gleichungen zwischen zwei geozentrischen Distanzen verwenden, wofür man verschiedene Kombinationen bilden kann. Sind mit 1, 2, 2′, 3 die vier Beobachtungen bezeichnet, so kann man aus der Ebenenbedingung für 1, 2, 2′ die eine Gleichung zwischen ϱ_2 und ϱ_2' und aus der für 2, 2′, 3 die andere Gleichung zwischen ϱ_2 und ϱ_2' ableiten; man kommt dann zur Gaußschen Methode. Oder man leitet aus der Ebenenbedingung für 1, 2, 3 die eine Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 ab und aus der für 1, 2′, 3 die andere. Hier wollen wir den letzteren Weg einschlagen und benutzen hierzu, um gleichzeitig die kleinen Breiten möglichst unschädlich zu machen, die erste der Grundgleichungen 14^a) (Seite 261). In Polarkoordinaten geschrieben und auf die beiden Kombinationen 1, 2, 3 und 1, 2′, 3 angewendet liefert sie die Beziehungen:

$$[r_2 r_3]\cos\beta_1 \sin(\lambda_2-\lambda_1)\varrho_1 + [r_1 r_2]\cos\beta_3 \sin(\lambda_2-\lambda_3)\varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_3]R_2 \sin(\lambda_2 - L_2) - [r_2 r_3]R_1 \sin(\lambda_2 - L_1) - [r_1 r_2]R_3 \sin(\lambda_2 - L_3)$$

und

$$[r_2' r_3]\cos\beta_1 \sin(\lambda_2'-\lambda_1)\varrho_1 + [r_1 r_2']\cos\beta_3 \sin(\lambda_2'-\lambda_3)\varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_3]R_2' \sin(\lambda_2'-L_2') - [r_2' r_3]R_1 \sin(\lambda_2'-L_1) - [r_1 r_2']R_3 \sin(\lambda_2'-L_3).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2-\lambda_3)} = \nu, \qquad \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2'-\lambda_3)} = \nu'$$
$$\nu\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda_2) = M, \qquad \nu'\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda_2') = M'$$
$$\nu R_1 \sin(L_1-\lambda_2) = a, \qquad \nu' R_1 \sin(L_1-\lambda_2') = a'$$
$$\nu R_2 \sin(L_2-\lambda_2) = b, \qquad \nu' R_2' \sin(L_2'-\lambda_2') = b'$$
$$\nu R_3 \sin(L_3-\lambda_2) = c, \qquad \nu' R_3 \sin(L_3-\lambda_2') = c',$$

so wird daraus:

$$\varrho_3 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} M\varrho_1 + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} a - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} b + c$$
$$\varrho_3 = \frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} M'\varrho_1 + \frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} a' - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2']} b' + c'.$$

Man könnte hierin nach Fabritius Vorschlag die Gibbsschen Ausdrücke für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einführen, allein man hat dann bei allen Versuchen mit vier Radienvektoren zu rechnen, wodurch das Verfahren zwar genau aber auch recht kompliziert wird. Auch bei Einführung der Formeln 17) (Seite 177) hat man zwei Radienvektoren r_2 und r_2' in Betracht zu ziehen. Am einfachsten scheint es zu sein, die Formeln 23) (Seite 181) heranzuziehen, dann hat man in beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte $(r_1 + r_3)$, mit der die Versuche in der unten zu beschreibenden Weise durchgeführt werden. Setzt man:

$$\frac{1}{(r_1+r_3)^3} = x, \qquad \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} = \xi$$

so wird:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}(\tau_1 - \tau_3)x + 4\tau_1^2 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_2' r_3]}{[r_1 r_2']} = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2(\tau_1' - \tau_3')x + 4\tau_1'^2 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1}{\tau_3}\tau_2(\tau_2 + \tau_3)x + 4\tau_1\tau_3 x\xi + \cdots$$
$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2']} = \frac{\tau_2}{\tau_3'} - \frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2(\tau_2 + \tau_3')x + 4\tau_1'\tau_3' x\xi + \cdots$$

und wenn dies oben eingetragen und gleich noch zur Abkürzung eingeführt wird:

$f = \frac{\tau_1}{\tau_3} M$	$f' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} M'$
$g = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}(\tau_1 - \tau_3) M$	$g' = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1'\tau_2}{\tau_3'}(\tau_1' - \tau_3') M'$
$h = 4\tau_1^2 M$	$h' = 4\tau_1'^2 M'$
$l = \frac{\tau_1}{\tau_3} a - \frac{\tau_2}{\tau_3} b + c$	$l' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'} a' - \frac{\tau_2}{\tau_3'} b' + c'$
$m = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}[(\tau_1 - \tau_3) a - (\tau_2 + \tau_3) b]$	$m' = -\frac{4}{3}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}\tau_2[(\tau_1' - \tau_3') a' - (\tau_2 + \tau_3') b']$
$n = +4\tau_1(\tau_1 a - \tau_3 b)$	$n' = +4\tau_1'(\tau_1' a' - \tau_3' b')$,

so erhält man:

$$\varrho_3 = (f + gx + hx\xi)\ \varrho_1 + (l + mx + nx\xi) \qquad \text{I.}$$
$$\varrho_3 = (f' + g'x + h'x\xi)\ \varrho_1 + (l' + m'x + n'x\xi).$$

Zwischen ϱ_1 und r_1 sowie zwischen ϱ_3 und r_3 hat man außerdem noch die Beziehungen

$$r_1^2 = R_1^2 + \varrho_1^2 + 2R_1\varrho_1\cos\delta_1 = (R_1\cos\delta_1 + \varrho_1)^2 + R_1^2\sin\delta_1^2$$
$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2R_3\varrho_3\cos\delta_3 = (R_3\cos\delta_3 + \varrho_3)^2 + R_3^2\sin\delta_3^2 \qquad \text{II.}$$

worin:

$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$\cos\delta_3 = \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3); \qquad \delta_1 \text{ und } \delta_3 < 180^\circ$$

setzt man

$$R_1\cos\delta_1 = p_1, \qquad R_3\cos\delta_3 = p_3$$
$$R_1\sin\delta_1 = q_1, \qquad R_3\sin\delta_3 = q_3$$

so hat man für die Rechnung einfacher:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + p_1}{q_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_3 + p_3}{q_3} \qquad \text{II}^a.$$
$$r_1 = q_1\sec\vartheta_1, \qquad r_3 = q_3\sec\vartheta_3.$$

Die Gleichungen I. und II. enthalten die vier Unbekannten ϱ_1, ϱ_3, r_1, r_3, sind also hinreichend zu deren Bestimmung. Die Auflösung vollzieht man am einfachsten durch sukzessive Näherung. Die mit ξ multiplizierten Glieder sind sehr klein und

bleiben bei den ersten Versuchen außer Betracht; bei Planetenbahnen und mäßigen Zwischenzeiten kann man von ihnen überhaupt ganz absehen. Man beginnt mit einem Näherungswerte von $x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}$, der bei kleinen Planeten durch $r_1 = r_3 = 3.0$ oder rund $\log x = 7.700000_{-10}$, bei Kometen durch die vorausgegangene parabolische Bahnbestimmung geboten wird, und berechnet aus I. ϱ_1 und ϱ_3 und dann aus II. die zugehörigen r_1 und r_3. Damit bestimmt man x und eventuell ξ, berechnet ϱ_1 und ϱ_2 von neuem, dann r_1 und r_3 und einen neuen Wert von x und ξ usf., bis keine Änderung mehr eintritt.

Mit den richtigen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 werden die Elemente in derselben Weise berechnet, wie bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. Die Korrektion der Beobachtungszeiten für Aberration erfolgt vor Bestimmung der Elemente.

Zum Schluß wird man die Darstellung der beiden mittleren Örter, die zur Elementenbestimmung nicht beigetragen haben, prüfen. Stellen die Elemente die Längen gut dar, so ist dies eine durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung; stimmen auch die nichtbenutzten Breiten mit der Rechnung überein, so ist dies zugleich ein Beweis, daß die Anwendung der Reihen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen hinreichend war, um die richtigen Elemente zu liefern; stimmen dagegen die Breiten nicht, so waren diese Grundlagen der Methode nicht ausreichend. Eine Hypothesenrechnung, wie bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, würde hier äußerst weitläufig sein; am einfachsten ist es, die geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 und zwar zuerst die eine und dann die andere ein weniges zu variieren und dann das in Nr. 96 beschriebene Verfahren anzuwenden, indem man $x = \varrho_1$ und $y = \varrho_3$ setzt und für X und Y die Differenzen: beobachtete — gerechnete Breiten nimmt.

104. Übersicht der Formeln für eine Bahnberechnung aus vier Beobachtungen.

Daten:

	des Planeten		der Erde	
Beob. Zeiten	Länge	Breite	Länge	$\log R$
t_1	λ_1	β_1	L_1	$\log R_1$
t_2	λ_2	β_2	L_2	$\log R_2$
t_2'	λ_2'	β_2'	L_2'	$\log R_2'$
t_3	λ_3	β_3	L_3	$\log R_3$.

I.

$$\nu = \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2 - \lambda_3)}, \qquad \nu' = \frac{1}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_2' - \lambda_3)}$$

$$M = \nu \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad M' = \nu' \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2')$$

$$a = \nu R_1 \sin(L_1 - \lambda_2), \qquad a' = \nu' R_1 \sin(L_1 - \lambda_2')$$

$$b = \nu R_2 \sin(L_2 - \lambda_2), \qquad b' = \nu' R_2' \sin(L_2' - \lambda_2')$$

$$c = \nu R_3 \sin(L_3 - \lambda_2), \qquad c' = \nu' R_3 \sin(L_3 - \lambda_2').$$

II.
$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \qquad \tau_1' = k(t_3 - t_2')$$
$$\tau_3 = k(t_2 - t_1), \qquad \tau_3' = k(t_2' - t_1)$$
$$\tau_2 = k(t_3 - t_1), \qquad \log k = 8.2355814$$
$$\chi = \frac{\tau_1}{\tau_3}, \qquad \chi' = \frac{\tau_1'}{\tau_3'}$$
$$\psi = \frac{\tau_2}{\tau_3}, \qquad \psi' = \frac{\tau_2}{\tau_3'}$$
$$\mu = \tfrac{4}{3}\tau_1\tau_2, \qquad \mu' = \tfrac{4}{3}\tau_1'\tau_2$$
$$\log\tfrac{4}{3} = 0.1249387.$$

III.
$$f = \chi M, \qquad f' = \chi' M'$$
$$g = \mu M(1-\chi), \qquad g' = \mu' M'(1-\chi')$$
$$[h = 4\tau_1^2 M], \qquad [h' = 4\tau_1'^2 M']$$
$$l = a\chi - b\psi + c, \qquad l' = a'\chi' - b'\psi' + c'$$
$$m = \mu(a(1-\chi) + b(1+\psi)), \qquad m' = \mu'(a'(1-\chi') + b'(1+\psi'))$$
$$\left[n = 4\tau_1^2\left(a - \frac{b}{\chi}\right)\right], \qquad \left[n' = 4\tau_1'^2\left(a' - \frac{b'}{\chi'}\right)\right].$$

IV.
$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1), \qquad \cos\delta_3 = \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3)$$
$$p_1 = R_1\cos\delta_1, \qquad p_3 = R_3\cos\delta_3$$
$$q_1 = R_1\sin\delta_1, \qquad q_3 = R_3\sin\delta_3.$$

V.
$$x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}, \qquad \xi = \frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3}$$
$$\varrho_1 = (f + (g + h\,\xi)x)\varrho_1 + (l + (m + n\,\xi)x) = A\,\varrho_1 + B$$
$$\varrho_3 = (f' + (g' + h'\xi)x)\varrho_1 + (l' + (m' + n'\xi)x) = A'\varrho_1 + B'$$
Bei kleinen Planeten zuerst $\log x = 7.7000000_{-10}$ $\xi = 0$
$$\varrho_1 = \frac{B' - B}{A - A'}, \qquad \varrho_3 = A\varrho_1 + B$$
$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + p_1}{q_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_3 + p_3}{q_3}$$
$$r_1 = q_1\sec\vartheta_1, \qquad r_3 = q_3\sec\vartheta_3$$
$$x = \frac{1}{(r_1 + r_3)^3}, \qquad \xi = \frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3}.$$

VI.
$$r_1\cos b_1\sin(l_1 - L_1) = \varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_1)$$
$$r_1\cos b_1\cos(l_1 - L_1) = \varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) + R_1$$
$$r_1\sin b_1 = \varrho_1\sin\beta_1$$
$$r_3\cos b_3\sin(l_3 - L_3) = \varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_3)$$
$$r_3\cos b_3\cos(l_3 - L_3) = \varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) + R_3$$
$$r_3\sin b_3 = \varrho_3\sin\beta_3.$$

VII.
$$\operatorname{tg} i\sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i\cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1\cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$
$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i$$
$$f_2 = \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1).$$

VIII.
$$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A\,, \qquad t_3^0 = t_3 - \varrho_3 A$$
$$\log A = 7.76\,118_{-10} \text{ in Einheiten des Tages.}$$

IX. Sektor durch Dreieck.
$$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\cos f_2}{r_1 + r_3}\,, \qquad \Gamma = \log\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}$$
(Γ mit Arg. $\log\sec\gamma$ aus den Zechschen Subtraktionslogarithmen),
$$\eta = (t_3^0 - t_1^0)^2 x$$
$$\log y_2 = a'\eta + a''\eta - b''\eta^2\,,$$
worin, wenn die 7. Dezimale als Einheit genommen wird:
$$\log a' = 3.233\,8859$$
$$\log a'' = 3.614\,0972 - \Gamma$$
$$\log b'' = 0.034\,1076\,.$$
Diese Formel reicht bei Planeten bis zu 60 Tagen Zwischenzeit; bei größeren Zwischenzeiten und bei Kometen bedient man sich der Gaußschen Methode (Nr. 49).

X.
$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{k(t_3^0 - t_1^0)}\, y_2$$
$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1\,, \qquad \frac{p}{r_3} - 1 = q_3$$
$$e\cos v_1 = q_1$$
$$e\sin v_1 = \frac{q_1\cos(u_3 - u_1) - q_3}{\sin(u_3 - u_1)}$$
$$e = \sin\varphi\,, \qquad a = p\sec\varphi^2$$
$$\omega = u_1 - v_1\,, \qquad v_3 = u_3 - \omega\,.$$

XI.
$$\sin\tfrac{1}{2}(v_1 - E_1) = \sqrt{\frac{r_1}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_1$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - E_3) = \sqrt{\frac{r_3}{p}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin v_3$$
Kontrolle: $a\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(E_3 - E_1) = \sqrt{r_1 r_3}\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1)$
$$M_1 = E_1 - (\sin\varphi)''\sin E_1$$
$$M_3 = E_3 - (\sin\varphi)''\sin E_3 \qquad \log(\sin\varphi)'' = \log\sin\varphi + 5.314\,4251$$
$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \log k'' = 3.550\,0066$$
Kontrolle: $\mu = \dfrac{M_3 - M_1}{t_3^0 - t_1^0}\,.$

XII. Berechnung der mittleren Örter.
$$M_2 = M_1 + (t_2^0 - t_1^0)\mu$$
$$E_2 - e\sin E_2 = M_2$$
$$r_2\sin v_2 = a\cos\varphi\sin E_2$$
$$r_2\cos v_2 = a(\cos E_2 - e)$$
$$u_2 = v_2 + \omega$$
$$\varrho_2\cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Omega) = r_2\cos u_2 - R_2\cos(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - \Omega) = r_2\sin u_2\cos i - R_2\sin(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2\sin\beta_2 = r_2\sin u_2\sin i\,.$$

105. Beispiel einer Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. Zur Erläuterung der auseinandergesetzten Methode wählen wir die erste Bahn des Planeten (468) [1901 FZ], von dem im ganzen nur vier Beobachtungen aus Heidelberg und Wien vorliegen. Die Breiten sind sehr klein und eine vorausgegangene Kreisbahnbestimmung hatte die Kleinheit der Neigung konstatiert, so daß es geboten war, die Ellipse aus vier Beobachtungen zu berechnen. Die folgenden, zugrunde gelegten Örter wurden mittels der Kreisbahnelemente von Parallaxe und Aberration befreit und sind auf das mittlere Äquinoktium 1901.0 bezogen:

1901 Jan. M.Z.B.

t_1	13.44645	λ_1	129° 4′47″.5	β_1	+0°40′ 1″.14	L_1	113° 3′51″.7	$\log R_1$	9.99 2807
t_2	23.52619	λ_2	127 4 50.5	β_2	+0 40 11.85	L_2	123 19 38.5	» R_2	9.99 3190
t_2'	44.56203	λ_2'	123 0 47.0	β_2'	+0 38 43.82	L_2'	144 39 6.4	» R_2'	9.99 4631
t_3	53.44318	λ_3	121 38 40.7	β_3	+0 37 37.30	L_3	153 36 33.5	» R_3	9.99 5470

I.					III.				
$\lambda_2-\lambda_3$	+5°26′ 9″.8	$\lambda_2'-\lambda_3$	+1°22′ 6″.3		f	0.03 8593	f'	0.10 1461
sin(»)	8.97 6510	sin(»)	8.37 8054		$1-\chi$	0.29 4032$_n$	$1-\chi'$	9.85 4048
$\cos\beta_1$	9.99 9971	$\cos\beta_3$	9.99 9974		μM	9.24 0168	$\mu' M'$	9.79 2564
ν	1.02 3516	ν'	1 62 1972		g	9.53 4200$_n$	g'	9.64 6612
$\nu\cos\beta_1$	1.02 3487	$\nu'\cos\beta_1$	1.62 1943		τ_1^2	9.42 2998	$\tau_1'^2$	8.36 8102
νR_1	1.01 6323	$\nu' R_1$	1.61 4779		$4M$	0.16 8185	$4M'$	1.24 8029
νR_2	1.01 6706	$\nu' R_2'$	1.61 6603		h	9.59 1183	h'	9.61 6131
νR_3	1.01 8986	$\nu' R_3$	1.61 7442		$a\chi$	0.87 2963$_n$	$a'\chi'$	0.30 7730$_n$
					$-b\psi$	0.43 1264	$-b'\psi'$	1.29 2385$_n$
$\lambda_1-\lambda_2$	+ 1°59′ 57″.0	$\lambda_1-\lambda_2'$	+ 6° 4′ 0″.5		Σ	0.67 8014$_n$	Σ	1.33 5195$_n$
$L_1-\lambda_2$	−14 0 58.8	$L_1-\lambda_2'$	− 9 56 55.3		c	0.66 8948	c'	1.32 4147
$L_2-\lambda_2$	− 3 45 12.0	$L_2'-\lambda_2'$	+21 38 19.4		l	8.99 314$_n$	l'	9.73 519$_n$
$L_3-\lambda_2$	+26 31 43.0	$L_3-\lambda_2'$	+30 35 46.5		$1+\psi$	0.69 6183	$1+\psi'$	0.35 8967
					$b(1+\psi)$	0.52 8873$_n$	$b'(1+\psi')$	1.54 2306
	8.54 2638		9.02 4026		$a(1-\chi)$	0.69 4527	$a'(1-\chi')$	0.70 6286$_n$
sin	9.38 4172$_n$	sin	9.23 7459$_n$		Σ	0.19 5748	Σ	1.47 3827
	8.81 5984$_n$		9.56 6736		m	9.86 9791	m'	0.62 0422
	9.64 9962		9.70 6705		a	0.40 0495$_n$	a'	0 85 2238$_n$
					$-b:\chi$	9.36 0222	$-b':\chi'$	1.72 7847$_n$
M	9.56 6125	M'	0.64 5969		Σ	0.35 8990$_n$	Σ	1.78 2140$_n$
a	0.40 0495$_n$	a'	0.85 2238$_n$		$4\tau_1^2$	0.02 5058	$4\tau_1'^2$	8.96 9162
b	9.83 2690$_n$	b'	1.18 3339		n	0.38 4048$_n$	n'	0.75 1302$_n$
c	0.66 8948	c'	1.32 4147					

II.				IV.			
t_3-t_2	1.47 5918	t_3-t_2'	0.94 8470	λ_1-L_1	+16°0′ 55″.8	λ_3-L_3	−31°57′ 52″.8
t_2-t_1	1.00 3450	$t_2'-t_1$	1.49 2978	cos(»)	9.98 2808	cos(»)	9.92 8587
t_3-t_1	1.60 2024			$\cos\delta_1$	9.98 2779	$\cos\delta_3$	9.92 8561
τ_1	9.71 1499	τ_1'	9.18 4051	$\sin\delta_1$	9.44 1094	$\sin\delta_3$	9.72 3849
τ_3	9.23 9031	τ_3'	9.72 8559	p_1	9.97 5586	p_3	9.92 4031
τ_2	9.83 7605			q_1	9.43 3901	q_3	9.71 9319
χ	0.47 2468	χ'	9.45 5492				
ψ	0.59 8574	ψ'	0.10 9046	p_1	+0.94 5336	p_3	+0.83 9520
$\tau_1\tau_2$	9.54 9104	$\tau_1'\tau_2$	9.02 1656				
μ	9.67 4043	μ'	9.14 6595				

V. $\varrho_3 = (+\ 1.09\ 2933 + [9.53\ 4200_n]x + [9.59\ 118]x\xi)\,\varrho_1$
$\qquad - 0.09\ 8433 + [9.86\ 9791]x + [0.38\ 405_n]x\xi$

$\varrho_3 = (+\ 1.26\ 3168 + [9.64\ 6612\ ]x + [9.61\ 613]x\xi)\,\varrho_1$
$\qquad - 0.54\ 3490 + [0.62\ 0422]x + [0.75\ 130_n]x\xi$

Versuch 1.				*Versuch 2.*			
x	7.70 0000	$x\xi$	»	x	7.48 7617	$x\xi$	5.37 080
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168		+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 1715		+ 2221		— 1052		+ 1362
					+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1218	A'	+ 1.26 5389	A	+ 1.09 1790	A'	+ 1.26 4540
	— 0.09 8433		— 0.54 3490		— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 3714		+ 2 0913		+ 2277		+ 1 2824
					— 57		— 132
B	— 0.09 4719	B'	— 0.52 2577	B	— 0.09 6213	B'	— 0.53 0798
	9.63 1300		+ 2.68 0625		9.63 8075		+ 2.74 6606
	9.24 0975				9.23 7418		
ϱ_1	0.39 0325			ϱ_1	0.40 0657		
	0.03 7911				0.03 8139		
ϱ_1	+ 2.45 6547	ϱ_3	+ 2.58 5906	ϱ_1	+ 2.51 5690	ϱ_3	+ 2.65 0393
$\varrho_1 + p_1$	0.53 1720	$\varrho_3 + p_3$	0.53 4714	$\varrho_1 + p_1$	0.53 9205	$\varrho_3 + p_3$	0.54 2815
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.09 7819	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.81 5395	$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 5304	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 3496
$\sec\vartheta_1$	1.09 9199	$\sec\vartheta_3$	0.82 0418	$\sec\vartheta_1$	1.10 6637	$\sec\vartheta_3$	0.82 8337
r_1	0.53 3100	r_3	0.53 9737	r_1	0.54 0538	r_3	0.54 7656
$r_1 + r_3$	0.83 7461	$r_3 - r_1$	8.72 064	$r_1 + r_3$	0.84 5142	$r_3 - r_1$	8.75 866
$(r_1 + r_3)^3$	2.51 2383	ξ	7.88 318	$(r_1 + r_3)^3$	2.53 5426	ξ	7.91 352

Versuch 3.				*Versuch 4.*			
x	7.46 4574	$x\xi$	5.37 809	x	7.46 2039	$x\xi$	5.38 069
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168		+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 997		+ 1292		— 991		+ 1284
	+ 9		+ 10		+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1945	A'	+ 1.26 4470	A	1.09 1951	A'	+ 1.26 4462
	— 0.09 8433		— 0.54 3490		— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 2160		+ 1 2162		+ 2147		+ 1 2091
	— 58		— 135		— 58		— 136
B	— 0.09 6331	B'	— 0.53 1463	B	— 0.09 6344	B'	— 0.53 1535
	9.63 8621		+ 2.75 4037		9.63 8680		+ 2.75 4654
	9.23 6852				9.23 6816		
ϱ_1	0.40 1769			ϱ_1	0.40 1864		
	0.03 8201				0.03 8203		
ϱ_1	+ 2.52 2140	ϱ_3	+ 2.65 7706	ϱ_1	+ 2.52 2690	ϱ_3	+ 2.65 8310
$\varrho_1 + p_1$	0.54 0013	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3723	$\varrho_1 + p_1$	0.54 0082	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3799
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6112	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4404	$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6181	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4480
$\sec\vartheta_1$	1.10 7440	$\sec\vartheta_3$	0.82 9224	$\sec\vartheta_1$	1.10 7508	$\sec\vartheta_3$	0.82 9299
r_1	0.54 1341	r_3	0.54 8543	r_1	0.54 1409	r_3	0.54 8618
$r_1 + r_3$	0.84 5987	$r_3 - r_1$	8.76 464	$r_1 + r_3$	0.84 6059	$r_3 - r_1$	8.76 510
$(r_1 + r_3)^3$	2.53 7961	ξ	7.91 865	$(r_1 + r_3)^3$	2.53 8177	ξ	7.91 904

Versuch 5.

x	7.46 1823	$x\xi$	5.38 086
	+ 1.09 2933		+ 1.26 3168
	— 991		+ 1284
	+ 9		+ 10
A	+ 1.09 1951	A'	+ 1.26 4462
	— 0.09 8433		— 0.54 3490
	+ 2146		+ 1 2085
	— 58		— 136
B	— 0.09 6345	B'	— 0.53 1541
	9.63 8685		+ 2.75 4687
	9.23 6816		
ϱ_1	0.40 1869		
	0.03 8203		
ϱ_1	+ 2.52 2718	ϱ_3	+ 2.65 8342
$\varrho_1 + p_1$	0.54 0086	$\varrho_3 + p_3$	0.54 3802
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	1.10 6185	$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.82 4483
$\sec\vartheta_1$	1.10 7512	$\sec\vartheta_3$	0.82 9303
r_1	0.54 1413	r_3	0.54 8622
$r_1 + r_3$	0.84 6062		
$(r_1 + r_3)^3$	2.53 8186		

VI.		1	3
	$\cos\beta$	9.99 9971	9.99 9974
	ϱ	0.40 1869	0.42 4611
	$\sin\beta$	8.06 5982	8.03 9156
	$\sin(\lambda - L)$	9.44 0747	$9.72\ 3781_n$
	$\cos(\lambda - L)$	9.98 2808	9.92 8587
	$\varrho\cos\beta$	0.40 1840	0.42 4585
		0.38 4648	0.35 3172
	R	9.99 2807	9.99 5470
	$r\cos b\sin(l - L)$	9.84 2587	$0.14\ 8366_n$
	$r\cos b\cos(l - L)$	0.53 2527	0.51 1182
	$\cos(l - L)$	9.99 1129	9.96 2576
	$\operatorname{tg}(l - L)$	9.31 0060	$9.63\ 7184_n$
	$l - L$	+ 11° 32′ 28″.5	— 23° 26′ 46″.0
	$r\sin b$	8.46 7851	8.46 3767
	$r\cos b$	0.54 1398	0.54 8606
	$\cos b$	9.99 9985	9.99 9985
	$\operatorname{tg} b$	7.92 6453	7.91 5161
	r	0.54 1413	0.54 8621
	l	124° 36′ 20″.2	130° 9′ 47″.5
	$l_3 - l_1$	5 33 27.3	
	$\sin(\quad\!\!»\quad)$	8.98 6082	
	$\cos(\quad\!\!»\quad)$	9.99 7954	

VII.		
	$\operatorname{tg} b_3$	7.91 5161
$\operatorname{tg} b_1\cos(l_3 - l_1)$		7.92 4407
		$6.24\ 7971_n$
$\operatorname{tg} i\sin(l_1 - \Omega)$		7.92 6453
$\operatorname{tg} i\cos(l_1 - \Omega)$		$7.26\ 1889_n$
$\sin(l_1 - \Omega)$		9.99 0054
$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$		$0.66\ 4564_n$
$(l_1 - \Omega)$		102° 12′ 55″.5
$\operatorname{tg} i$		7.93 6399
i		0° 29′ 41″.6
Ω		22 23 24.7
$l_3 - \Omega$		107 46 22.8
$\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)$		$0.49\ 4111_n$
$\sec i$		0.00 0016
$\operatorname{tg} u_1$		$0.66\ 4580_n$
$\operatorname{tg} u_3$		$0.49\ 4127_n$
u_1		102° 12′ 53″.9
u_3		107 46 20.6
$u_3 - u_1$		5 33 26.7
f_2		2 46 43.35

IX.		
	$\sqrt{r_1 r_3}$	0.54 5017
	$2\cos f_2$	0.30 0519
		0.84 5536
	$\cos\gamma$	9.99 9474
	Γ	2.91 7060
	$(t_3 - t_1)^2$	3.20 4048
	η	0.66 5862
	η^2	1.33 1724
VII. St.	$a'\eta$	+ 7939
	$a''\eta$	+ 23
	$-b''\eta^2$	— 23
	$\log y_2$	0.00 0794

X.		
	$\sin(u_3 - u_1)$	8.98 6069
	$r_1 r_3$	1.09 0035
		0.07 6898
	$\sqrt{p}$	0.23 9293
	p	0.47 8586
	$\cos(u_3 - u_1)$	9.99 7954

	$p : r_1$	9.93 7173
	$p : r_3$	9.92 9964
	q_1	$9.12\ 9327_n$
	q_3	$9.17\ 2991_n$
$q_1\cos(u_3 - u_1)$		$9.12\ 7281_n$
		8.17 2561
	$e\sin v_1$	9.18 6492
	$e\cos v_1$	$9.12\ 9327_n$
	$\sin v_1$	9.87 6192
	$\operatorname{tg} v_1$	$0.05\ 7165_n$
	v_1	131° 14′ 24″.0
	$\sin\varphi$	9.31 0300
	$\cos\varphi$	9.99 0740
	φ	11° 47′ 21″.8
	$\sec\varphi^2$	0.01 8520
	a	0.49 7106
	ω	330° 58′ 29″.9
	v_3	136 47 50.7
	$\sin v_3$	9.83 5424
	$\sin\frac{1}{2}\varphi$	9.01 1572
	$a^{\frac{3}{2}}$	0.74 5659

XI.		
		0.03 1413
		8.88 7764
		0.03 5018
		8.84 6996
	$\sin\frac{1}{2}(v_1 - E_1)$	8.91 9177
	$\sin\frac{1}{2}(v_3 - E_3)$	8.88 2014
	$v_1 - E_1$	+ 9° 31′ 27″.2
	$v_3 - E_3$	+ 8 44 29.6
	E_1	121 42 56.8
	E_3	128 3 21.1
	$\sin E_1$	9.92 9759
	$\sin E_3$	9.89 6201
		4.55 4484
		4.52 0926
	$e''\sin E_1$	9° 57′ 29″.6
	$e''\sin E_3$	9 13 3.8
	M_1	111 45 27.2
	M_3	118 50 17.3
	$M_3 - M_1$	4.40 6372
	μ	2.80 4348
	(μ)	2.80 4348

Elemente (468)

1901 Januar 13.44645 M. Z. Berlin

M	111° 45′ 27″.2	
ω	330 58 29.9	1901.0
Ω	22 23 24.7	
i	0 29 41.6	

φ	11° 47′ 21″.8
μ	637″.306
$\log a$	0.49 7106

XII. Berechnung der mittleren Örter.

$t_2 - t_1$	1.00 3450	1.49 2978	$r \sin u \cos i$	0.53 0878	0.52 8690
$\mu (t_2 - t_1)$	3.80 7798	4.29 7326	$-R \sin (L_2 - \Omega)$	9.98 5228$_n$	9.92 1806$_n$
	$+ 1^\circ 47' 3''.9$	$+ 5^\circ 30' 30''.1$	$r \cos u$	9.91 5674$_n$	0.00 1816$_n$
M	113 32 31.1	117 15 57.3	$-R \cos (L_2 - \Omega)$	9.27 1331	9.72 1998
E	123 19 25.0	126 39 25.4	$\varrho \cos\beta \sin (\lambda - \Omega)$	0.38 5381	0.40 5348
$\sin E$	9.92 1989	9.90 4295	$\varrho \cos\beta \cos (\lambda - \Omega)$	9.80 3961$_n$	9.67 8485$_n$
$\cos E$	9.73 9863$_n$	9.77 5992$_n$	$\sin (\lambda - \Omega)$	9.98 5566	9.99 2492
$\cos E - e$	9.87 7188$_n$	9.90 3816$_n$	$\operatorname{tg} (\lambda - \Omega)$	0.58 1420$_n$	0.72 6863$_n$
$r \sin v$	0.40 9835	0.39 2141	$\lambda - \Omega$	$104^\circ 41' 25''.8$	$100^\circ 37' 22''.4$
$r \cos v$	0.37 4294$_n$	0.40 0922$_n$	$\varrho \sin\beta$	8.46 7276	8.46 5089
$\cos v$	9.83 0988$_n$	9.85 3831$_n$	$\varrho \cos\beta$	0.39 9815	0.41 2856
$\operatorname{tg} v$	0.03 5541$_n$	9.99 1219$_n$	$\cos\beta$	9.99 9970	9.99 9973
v	$132^\circ 39' 29''.5$	$135^\circ 34' 45''.0$	$\operatorname{tg}\beta$	8.06 7461	8.05 2233
r	0.54 3306	0.54 7091	λ	$127^\circ 4' 50''.5$	$123^\circ 0' 47''.1$
u	$103^\circ 37' 59''.4$	$106^\circ 33' 14''.9$	β	$+ 0\ 40\ 9.2$	$+ 0\ 38\ 46.2$
$\sin u$	9.98 7588	9.98 1615	ϱ	0.39 9845	0.41 2883
$\cos u$	9.37 2368$_n$	9.45 4725$_n$			
$L_2 - \Omega$	$100^\circ 56' 13''.8$	$122^\circ 12' 41''.7$	B−R $\Delta\lambda$	0″.0	− 0″.1
sin »	9.99 2038	9.92 7175	B−R $\Delta\beta$	+ 2.6	− 2.4
cos »	9.27 8141$_n$	9.72 7367$_n$			

Die nahezu völlige Darstellung der beiden mittleren Längen durch die Elemente beweist die Korrektheit der Rechnung; die Darstellung der Breiten ist noch eine genügende; der Wechsel des Vorzeichens weist darauf hin, daß die Abweichungen den Beobachtungen zur Last fallen und daß eine Verbesserung der Elemente mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial nicht unternommen werden kann.

Abschnitt XXI.

Die direkten Methoden der Bahnbestimmung.

106. Die Methode von J. Glauser. Bei Darlegung des Lambertschen Satzes (Nr. 75) haben wir darauf hingewiesen, daß derselbe alle Mittel zur Bahnbestimmung enthalte. Tatsächlich beruht die Laplacesche Bahnbestimmungsmethode (Nr. 107) auf einer Gleichung, die der Ausdruck des Lambertschen Satzes ist, und sind später von *Binet* (Mém. de l'Ac. Paris 1827), *Bruns* (Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241) und *Glauser* (Astr. Nachr. Bd. 121, S. 65) Methoden auf die direkte Anwendung desselben basiert worden; dieselben unterscheiden sich dadurch voneinander, daß Laplace, Binet und Bruns die von der Krümmung der Erd- und Planetenbahn abhängigen Größen durch die ersten und zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten des mittleren Ortes ausdrücken, wozu beliebig viele Beobachtungen herausgezogen werden können, Glauser aber hierzu lediglich die geometrischen Beziehungen zwischen drei Örtern benutzt. Wir wollen zunächst die Glausersche Formulierung auseinandersetzen, indem wir unmittelbar an die Entwicklungen Seite 240 anknüpfen. In der dort aufgestellten Gleichung

$$\frac{k - \varrho_2}{k} = \frac{R_2^3}{r_2^3}$$

ergibt sich für k aus dem Dreieck QE_2R (Fig. 39), wenn σ der Winkel bei R, $180^\circ - \delta_2$ der Winkel bei E_2 und $S = QE_2$ der Pfeil der Erdbahn genannt wird:

$$E_2R = k = S \cdot \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma},$$

so daß die Gleichung so geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} Q\varrho_2 &= \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \\ Q &= \frac{\sin\sigma}{SR_2^3 \sin(\delta_2 - \sigma)} \end{aligned}\right\}. \qquad 1)$$

wo

Betreff der Berechnung von δ_2 verweisen wir der Kürze halber auf die Formeln 34) (Seite 270), betreff der Rechnung von σ auf Seite 288; der Pfeil S der Erdbahn ergibt sich leicht wie folgt: Werden im Dreieck zwischen der Sonne und den äußeren Erdörtern die Winkel an den letzteren E_1 und E_3, der Winkel an der Sonne $L_3 - L_1$ genannt, so wird:

$$E_1 + E_3 = 180^\circ - (L_3 - L_1)$$

und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(E_1 - E_3) = \frac{R_1 - R_3}{R_1 + R_3} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(E_1 + E_3)$$

und dann:

$$S = R_2 - R_1 \frac{\sin E_3}{\sin\left(E_3 + (L_2 - L_1)\right)}. \qquad 2)$$

Nachdem hierdurch Q bekannt geworden, wird die Gl. 1) in Verbindung mit

$$r_2^2 = \varrho_2^2 + R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos\delta_2$$

aufgelöst.

Zur Ermittelung der beiden äußeren geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 dient zunächst die Gleichung (Seite 241)

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_1}\,\frac{\tau_1}{\tau_3},$$

wozu die Bogen ω_1 und ω_3 gebraucht werden. Die Koordinaten λ und β des Punktes g ergeben sich durch:

$$\begin{aligned}\cos\beta\,\sin(\lambda - L_2) &= \cos w_2\,\sin(\delta_2 - \sigma)\\ \cos\beta\,\cos(\lambda - L_2) &= \cos(\delta_2 - \sigma)\\ \sin\beta &= \sin w_2\,\sin(\delta_2 - \sigma)\end{aligned}$$

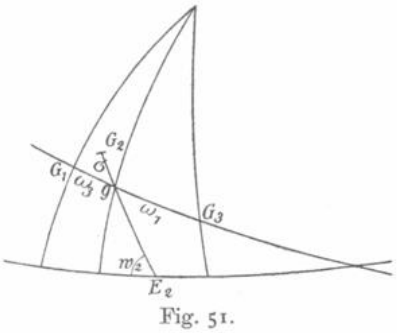


Fig. 51.

wo (Seite 270) w_2 zugleich mit δ_2 berechnet wird, und dann folgt:

$$\begin{aligned}\cos\omega_1 &= \sin\beta\,\sin\beta_3 + \cos\beta\,\cos\beta_3\,\cos(\lambda - \lambda_3)\\ \cos\omega_3 &= \sin\beta\,\sin\beta_1 + \cos\beta\,\cos\beta_1\,\cos(\lambda - \lambda_1)\end{aligned}$$

oder:

$$\cos\omega_1 = \frac{\sin\beta\,\sin(\beta_3 + m_3)}{\cos m_3} \qquad \cos\omega_3 = \frac{\sin\beta\,\sin(\beta_1 + m_1)}{\cos m_1}$$

$$\operatorname{tg} m_3 = \operatorname{cotg}\beta\,\cos(\lambda - \lambda_3) \qquad \operatorname{tg} m_1 = \operatorname{cotg}\beta\,\cos(\lambda - \lambda_1).$$

Ferner erhält man die Winkel C_1 und C_3 (siehe Fig. 52) aus

$$C_1 + C_3 = 180^\circ - (\omega_1 + \omega_3)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C_1 - C_3)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C_1 + C_3)} = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_3} = \frac{1 - \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}{1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$$

und dann schließlich

$$\varrho_1 = \varrho_0\,\frac{\sin(\omega_3 + C_3)}{\sin C_3}, \qquad \varrho_3 = \varrho_0\,\frac{\sin(\omega_1 + C_1)}{\sin C_1};$$

ϱ_0 wird bei dieser Methode, wie aus den Ansätzen Seite 241 hervorgeht, mit ϱ_2 identifiziert.

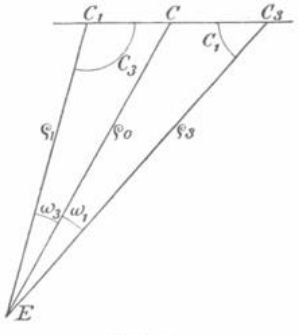


Fig. 52.

107. Die Laplacesche Methode der Bahnbestimmung*). Es läßt sich ein Ausdruck für die geozentrische Distanz ϱ des Planeten (oder Kometen) ableiten, welcher außer der heliozentrischen Distanz r nur die ersten und zweiten Differenzialquotienten der geozentrischen Polarkoordinaten α und δ enthält. Da diese letzteren sich aus gegebenen Beobachtungen ermitteln lassen, so ist damit eine erste Gleichung zwischen ϱ und r gewonnen. Eine zweite, rein geometrische ergibt sich aus dem Dreieck Sonne-Erde-Gestirn. Aus der Verbindung beider folgt ϱ und r. Ebenso kann $\frac{d\varrho}{dt}$ durch ϱ und die Differenzialquotienten der geozentrischen Polarkoordinaten

*) *Laplace*, Méc. cél. Livre II. § 28—37.

ausgedrückt werden. Aus den vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten α, δ, ϱ und ihren ersten Differenzialquotienten lassen sich die sechs Elemente der Bahn ableiten. Dieser Gedankengang, welcher der Laplaceschen Methode zugrunde liegt, soll nun durchgeführt werden.

Als Fundamentalebene führen wir den Äquator ein, da die Umwandlung so zahlreicher Beobachtungen, wie sie hier gebraucht werden, in Länge und Breite zu mühsam wäre. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Planeten in bezug auf die Sonne, r sein Radiusvektor; X, Y, Z die rechtwinkligen, R, A, D die Polarkoordinaten der Sonne bezogen auf die Erde; α, δ, ϱ die geozentrischen Koordinaten des Planeten. Es seien ferner, um die Analyse kürzer durchführen zu können, a, b, c die Richtungskosinus der geozentrischen Örter, also

$$a = \cos\delta\cos\alpha\,, \qquad b = \cos\delta\sin\alpha\,, \qquad c = \sin\delta.$$

Dann wird:

$$x = -X + \varrho a\,, \qquad y = -Y + \varrho b\,, \qquad z = -Z + \varrho c \tag{1}$$

und durch zweimalige Differenziation, wenn die Differenzialquotienten durch Akzente bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} x'' &= -X'' + \varrho'' a + 2\varrho' a' + \varrho a'' \\ y'' &= -Y'' + \varrho'' b + 2\varrho' b' + \varrho b'' \\ z'' &= -Z'' + \varrho'' c + 2\varrho' c' + \varrho c''\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist nach den Bewegungsgleichungen für den Planeten und für die Erde: (m = Masse von Erde + Mond)

$$x'' + k^2\frac{x}{r^3} = 0, \qquad y'' + k^2\frac{y}{r^3} = 0, \qquad z'' + k^2\frac{z}{r^3} = 0 \tag{3}$$

$$X'' + k^2\frac{X(1+m)}{R^3} = 0, \qquad Y'' + k^2\frac{Y(1+m)}{R^3} = 0, \qquad Z'' + k^2\frac{Z(1+m)}{R^3} = 0,$$

also:

$$\begin{aligned} &a'(x''+X'') + b'(y''+Y'') + c'(z''+Z'') + \\ &\quad + k^2\left[\left(\frac{xa'}{r^3} + \frac{X(1+m)a'}{R^3}\right) + \left(\frac{yb'}{r^3} + \frac{Y(1+m)b'}{R^3}\right) + \left(\frac{zc'}{r^3} + \frac{Z(1+m)c'}{R^3}\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf 1) und $aa' + bb' + cc' = 0$:

$$a'(x''+X'') + b'(y''+Y'') + c'(z''+Z'') - k^2(Xa' + Yb' + Zc')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right) = 0.$$

Die Gleichungen 2) ergeben somit, wenn sie der Reihe nach mit a', b', c' multipliziert und addiert werden:

$$-k^2(Xa' + Yb' + Zc')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right) + 2\varrho'(a'^2 + b'^2 + c'^2) + \varrho(a'a'' + b'b'' + c'c'') = 0, \tag{4}$$

welches eine Beziehung zwischen ϱ und ϱ' darstellt, die sonst nur bekannte Größen enthält.

Beachten wir ferner, daß

$$a(bc' - cb') + b(ca' - ac') + c(ab' - ba') = 0$$

und ebenso

$$a'(bc' - cb') + b'(ca' - ac') + c'(ab' - ba') = 0,$$

daß also aus 1) folgt:

$$(x + X)(bc' - cb') + (y + Y)(ca' - ac') + (z + Z)(ab' - ba') = 0$$

und daher aus 3)

$$(x'' + X'')(bc' - cb') + (y'' + Y'')(ca' - ac') + (z'' + Z'')(ab' - ba') - \\ - k^2 (X(bc' - cb') + Y(ca' - ac') + Z(ab' - ba')) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1 + m}{R^3}\right) = 0,$$

so werden die Gl. 2), wenn sie der Reihe nach mit $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ multipliziert und addiert werden:

$$- k^2 (X(bc' - cb') + Y(ca' - ac') + Z(ab' - ba')) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1 + m}{R^3}\right) + \\ + \varrho (a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba')) = 0. \qquad 5)$$

Da der Faktor von ϱ nach Seite 17 gleich $V^3 K$ ist, wo K die Krümmung der scheinbaren Bahn, V die Geschwindigkeit in der scheinbaren Bahn bedeuten, so stellt diese Gleichung nach Seite 243 den Lambertschen Satz dar. Dieser bildet also, wie auch in Nr. 76 erwähnt wurde, die Grundlage der Laplaceschen Methode. Dividiert man 5) durch V, so folgt, wenn man gleichzeitig die Determinantenform wählt:

$$K V^2 \varrho = - k^2 \left(\frac{1 + m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \begin{vmatrix} \frac{X}{R} & a & \frac{a'}{V} \\ \frac{Y}{R} & b & \frac{b'}{V} \\ \frac{Z}{R} & c & \frac{c'}{V} \end{vmatrix} R$$

oder nach Seite 243

$$K V^2 \varrho = - k^2 \left(\frac{1 + m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \sin F, \qquad 5^a)$$

wo F den senkrechten Abstand der Sonne von der geodätischen Tangente im geozentrischen Planetenort bedeutet.

Eine zweite Beziehung zwischen ϱ und r erhält man durch Quadrieren und Addieren der Gl. 1):

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \left(\frac{X}{R} a + \frac{Y}{R} b + \frac{Z}{R} c\right); \qquad 6)$$

hierin stellt der Klammerausdruck den cos des Winkels zwischen Sonnen- und Planetenort dar; wird dieser mit G bezeichnet, so folgt:

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos G. \qquad 6^a)$$

Aus 5) und 6) ergibt sich durch Elimination von ϱ eine Gleichung achten Grades in r (Laplacesche oder Gaußsche Gleichung), die durch Versuche aufzulösen ist. Aus 5) folgt dann ϱ und aus 4) ϱ', so daß nun die sechs Stücke α, δ, ϱ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ vorliegen.

Wir werden später (Nr. 109) zeigen, wie aus den beobachteten Koordinaten ihre ersten und zweiten Differenzialquotienten, die zur Berechnung von 4) und 5) erforderlich sind, abgeleitet werden können und weiter, wie aus den sechs erwähnten Stücken die Elemente der Bahn erhalten werden. Vorher aber werden wir eine Umformung

der Gleichungen 4) und 5) nach *Bruns**) vornehmen, durch welche eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung herbeigeführt wird, während die Laplaceschen Formeln ziemlich kompliziert sind und hier übergangen werden sollen.

108. Umformung von Bruns. Setzt man

$$Q = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right), \qquad \text{I.}$$

so nehmen die Gl. 5) und 4) folgende Gestalt an:

$$k^2 Q = -\frac{\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' & X \\ b & b' & Y \\ c & c' & Z \end{vmatrix}}$$

$$2\frac{\varrho'}{\varrho}(a'^2 + b'^2 + c'^2) = -(a'a'' + b'b'' + c'c'') - k^2 Q(Xa' + Yb' + Zc').$$

Substituiert man $k^2 Q$ aus der ersten in die zweite, so kommt der Reihe nach, wenn noch wie oben die Geschwindigkeit in der scheinbaren Bahn mit V bezeichnet wird, womit $a'^2 + b'^2 + c'^2 = V^2$ wird, und wenn wie Seite 243 $a_0 = \frac{1}{V}(bc' - cb')$, ... gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 2\frac{\varrho'}{\varrho}V^2(Xa_0 + Yb_0 + Zc_0) &= -(a'a'' + b'b'' + c'c'')(Xa_0 + Yb_0 + Zc_0) + \\ &\quad + (a_0a'' + b_0b'' + c_0c'')(Xa' + Yb' + Zc') \\ &= -[(b'c_0 - c'b_0)(b''Z - c''Y) + (c'a_0 - a'c_0)(c''X - a''Z) \\ &\quad + (a'b_0 - b'a_0)(a''Y - b''X)]. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} b'c_0 - c'b_0 &= \frac{1}{V}(b'(ab' - b'a) - c'(ca' - ac')) \\ &= \frac{1}{V}(aV^2 - a'(aa' + bb' + cc')) = aV; \end{aligned}$$

also wird schließlich:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix}}{2V(a_0X + b_0Y + c_0Z)}, \qquad \text{II.}$$

wozu noch kommt:

$$k^2 Q = -\frac{a_0a'' + b_0b'' + c_0c''}{a_0X + b_0Y + c_0Z}. \qquad \text{III.}$$

Die Gleichungen I., II., III. lösen das Problem; nachdem Q durch III. ermittelt ist, gibt die Gl. I. ϱ und die Gl. II. ϱ'.

*) *Bruns*, Der Lambertsche Satz, Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241, 1888.

Die Berechnung der a, a', a'', $a_0, \cdots$ vollzieht sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} a &= \cos\delta\cos\alpha\,, \quad b = \cos\delta\sin\alpha\,, \quad c = \sin\delta \\ a' &= -\delta'\sin\delta\cos\alpha - \alpha'\cos\delta\sin\alpha \\ b' &= -\delta'\sin\delta\sin\alpha + \alpha'\cos\delta\cos\alpha \\ c' &= \delta'\cos\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \delta'^2 + (\alpha'\cos\delta)^2 \\ Va_0 &= \delta'\sin\alpha - \alpha'\cos\delta\cdot\sin\delta\cos\alpha \\ Vb_0 &= -\delta'\cos\alpha - \alpha'\cos\delta\cdot\sin\delta\sin\alpha \\ Vc_0 &= \alpha'\cos\delta\cdot\cos\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'' &= -\delta''\sin\delta\cos\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\alpha - \delta'^2\cos\delta\cos\alpha + 2\delta'\alpha'\sin\delta\sin\alpha - \alpha'^2\cos\delta\cos\alpha \\ b'' &= -\delta''\sin\delta\sin\alpha + \alpha''\cos\delta\cos\alpha - \delta'^2\cos\delta\sin\alpha - 2\delta'\alpha'\sin\delta\cos\alpha - \alpha'^2\cos\delta\sin\alpha \\ c'' &= \delta''\cos\delta - \delta'^2\sin\delta\,. \end{aligned}$$

Es wird also nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned} bc'' - cb'' &= 2\alpha'\delta'\sin\delta^2\cos\alpha + bc\alpha'^2 + \delta''\sin\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\delta\cos\alpha \\ ca'' - ac'' &= 2\alpha'\delta'\sin\delta^2\sin\alpha - ca\alpha'^2 - \delta''\cos\alpha - \alpha''\cos\delta\sin\delta\sin\alpha \\ ab'' - ba'' &= \alpha''\cos\delta\cos\delta - 2\alpha'\delta'\cos\delta\sin\delta \end{aligned}$$

und:

$$V(a_0a'' + b_0b'' + c_0c'') = (\alpha'\delta'' - \delta'\alpha'')\cos\delta + \alpha'\sin\delta\,(2\delta'^2 + \alpha'^2\cos\delta^2)\,. \qquad \text{(a)}$$

Nennt man im sphärischen Dreieck zwischen Pol des Äquators, Sonnenort und Planetenort die Winkelentfernung der Sonne vom Planeten wie bereits in Gl. 6[a]) (Seite 339) G und den Positionswinkel dieses Bogens H, so erhält man diese Größen aus:

$$\begin{aligned} \sin G\sin H &= \cos D\sin(A-\alpha) \\ \sin G\cos H &= \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(A-\alpha) \\ \cos G &= \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(A-\alpha)\,. \end{aligned}$$

Werden nun

$$X = R\cos D\cos A\,, \qquad Y = R\cos D\sin A\,, \qquad Z = R\sin D$$

eingeführt, so folgt mit Benutzung der eben angeführten G und H

$$V(a_0X + b_0Y + c_0Z) = R(\alpha'\cos\delta\sin G\cos H - \delta'\sin G\sin H) \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix} = \alpha''\cos\delta\sin G\cos H - \delta''\sin G\sin H - 2\alpha'\delta'\sin\delta\sin G\cos H - \alpha'^2\sin\delta\cos\delta\sin G\sin H. \qquad \text{(c)}$$

Die drei für die Gl. II. und III. gebrauchten Ausdrücke (a), (b), (c) lassen sich noch etwas einfacher schreiben, wenn man V, ψ, V_1, ψ_1 aus

$$\begin{aligned} V\cos\psi &= \delta'\,, & V_1\cos\psi_1 &= \delta'' \\ V\sin\psi &= \alpha'\cos\delta\,, & V_1\sin\psi_1 &= \alpha''\cos\delta \end{aligned}$$

berechnet. Es wird nämlich dann:

$$\begin{aligned} (a_0a'' + b_0b'' + c_0c'') &= V_1\sin(\psi - \psi_1) + V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi + V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi^2 \\ (a_0X + b_0Y + c_0Z) &= R\sin G\sin(\psi - H) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} a & a'' & X \\ b & b'' & Y \\ c & c'' & Z \end{vmatrix} = V_1\sin G\sin(\psi_1 - H) - V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\sin G\cos(\psi - H) - V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\sin G\cos H$$

und daher gehen II. und III. über in die bequeme Form:

$$R\sin G\sin(H-\psi)k^2Q = V_1\sin(\psi-\psi_1)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\cos\psi$$
$$-2V\sin(H-\psi)\frac{\varrho'}{\varrho} = V_1\sin(H-\psi_1)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos(H-\psi)+V^2\operatorname{tg}\delta\sin\psi\cos\psi\cos H \qquad \text{IV.}$$
$$\log k^2 = 6.471\,1629_{-10}.$$

ψ ist der Positionswinkel der Geschwindigkeit; wird $\psi = H$, d. h. erfolgt die Bewegung in einem durch die Sonne gehenden Kreis, so werden die Formeln unbrauchbar d. h. es tritt der Nr. 100 besprochene Ausnahmefall der Bahnbestimmung ein.

109. Berechnung der ersten und zweiten Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten. Diese Größen werden für denselben Zeitpunkt gebraucht, für den auch die Koordinaten α und δ selbst als vorhanden angenommen werden, und zu ihrer Ermittelung können nur Beobachtungen herangezogen werden. Da diese in nicht äquidistanten Zeitintervallen vorliegen, wird die Rechnung mit Interpolationsformeln eine recht mühsame, und dies ist wohl der Hauptgrund, weshalb die Laplacesche Methode nur wenig Eingang in die Praxis gefunden hat. Laplace hat ein Verfahren auf Grund der Newtonschen Formel angegeben, das nicht nachahmenswert ist. Man erhält aber auch kaum bessere Resultate, wenn man die Stirlingschen Formeln benutzt. Je mehr Beobachtungen man heranziehen kann, desto genauer werden die Differenzialquotienten zu ermitteln sein, desto größer ist aber auch die aufzuwendende Rechenarbeit. Zum mindesten braucht man drei Beobachtungen wie unmittelbar klar ist. Theoretisch ist es wünschenswert, daß die Beobachtungen zeitlich nahe aneinander liegen, praktisch aber sind größere Intervalle vorzuziehen, da sonst die Beobachtungsfehler zu großen Einfluß gewinnen.

Empfehlenswerte Verfahren sind nur: entweder sich äquidistante Örter durch Interpolation zu verschaffen und dann die Formeln der mechanischen Differenziation anzuwenden, oder die vorgelegten Örter nach Potenzen der Zeit zu entwickeln, die Koeffizienten durch Auflösung der linearen Gleichungssysteme zu bestimmen und dann zu differenzieren. Benutzt man nur drei Örter, so werden im letzten Falle die Formeln ziemlich einfach.

Sind α_1, α_2, α_3 die zu den Beobachtungszeiten t_1, t_2, t_3 gehörigen beobachteten Koordinaten und will man für die Zeit t_0 α_0, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0$ ermitteln, so geben die drei Gleichungen:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (t_1-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_1-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$
$$\alpha_2 = \alpha_0 + (t_2-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_2-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$
$$\alpha_3 = \alpha_0 + (t_3-t_0)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(t_3-t_0)^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)_0$$

durch Auflösung nach den Unbekannten α_0, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ das Gewünschte. Nennt

man die Zwischenzeiten $t_3 - t_2 = \Theta_1$, $t_3 - t_1 = \Theta_2$, $t_2 - t_1 = \Theta_3$, so wird die Determinante des Systems gleich $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$, und man erhält also:

$$\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \cdot \alpha_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & t_1 - t_0 & (t_1 - t_0)^2 \\ \alpha_2 & t_2 - t_0 & (t_2 - t_0)^2 \\ \alpha_3 & t_3 - t_0 & (t_3 - t_0)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & (t_1 - t_0)^2 & 1 \\ \alpha_2 & (t_2 - t_0)^2 & 1 \\ \alpha_3 & (t_3 - t_0)^2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & t_1 - t_0 \\ \alpha_2 & 1 & t_2 - t_0 \\ \alpha_3 & 1 & t_3 - t_0 \end{vmatrix}.$$

Läßt man t_0 mit t_2 zusammenfallen, so wird:

$$\alpha_0 = \alpha_2$$

$$\Theta_2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \frac{\Theta_3}{\Theta_1}(\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{\Theta_1}{\Theta_3}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\frac{\Theta_1 \Theta_3}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 = \frac{\Theta_3}{\Theta_2}(\alpha_3 - \alpha_2) - \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Man wird aber nur selten mit diesen Formeln befriedigende Resultate erhalten. Meist muß man viel mehr Beobachtungen heranziehen, um ausreichend genaue Werte der Differenzialquotienten zu erhalten.

110. Bestimmung der Elemente aus den Koordinaten eines Ortes und ihren Geschwindigkeiten. Aus den sechs durch die vorstehende Analyse bekannt gewordenen Größen

$$\alpha,\ \delta,\ \varrho,\ \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\delta}{dt},\ \frac{d\varrho}{dt}$$

sind die Elemente abzuleiten. Man erhält zunächst den heliozentrischen Ort und seine Geschwindigkeit durch:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\delta \cos\alpha - X = \xi - X \\ y &= \varrho \cos\delta \sin\alpha - Y = \eta - Y \\ z &= \varrho \sin\delta \qquad\quad - Z = \zeta - Z \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \xi\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} - \operatorname{tg}\delta\frac{d\delta}{dt} - \operatorname{tg}\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right) - \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} - \operatorname{tg}\delta\frac{d\delta}{dt} + \operatorname{cotg}\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right) - \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \zeta\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{cotg}\delta\frac{d\delta}{dt}\right) - \frac{dZ}{dt},$$

worin $\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$ durch IV. unmittelbar gefunden wird und $\frac{dX}{dt}, \ldots$ aus der Sonnenephemeride zu berechnen sind.

Die Aufgabe, hieraus die Elemente darzustellen, kann auf mannigfache Weise gelöst werden. Am zweckmäßigsten ist wohl der von *Bessel* angegebene Weg, den

Encke im Berliner Jahrbuch für 1858 mitgeteilt hat. Bezieht man die Elemente Ω, i, ω auf den Äquator, so hat man nach Seite 24:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos\Omega\,\cos(\omega+v) - \sin\Omega\,\sin(\omega+v)\cos i) \\ y &= r(\sin\Omega\,\cos(\omega+v) + \cos\Omega\,\sin(\omega+v)\cos i) \\ z &= r\sin(\omega+v)\sin i\,, \end{aligned} \tag{a}$$

und da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}\,, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}}\,e\sin v\,,$$

so folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\{(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\cos\Omega + (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\sin\Omega\cos i\} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\{(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\sin\Omega - (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\cos\Omega\cos i\} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}}(\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\sin i\,. \end{aligned} \tag{b}$$

Wie in den sechs Gleichungen (a) und (b) die x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ durch die sechs Elemente dargestellt werden, so wird man umgekehrt durch Auflösung derselben die Elemente durch die ersteren Größen finden können. Zuerst ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{p}\,\cos i \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{p}\,\sin\Omega\,\sin i \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k\sqrt{p}\cos\Omega\,\sin i\,, \end{aligned} \tag{c}$$

woraus Ω, i, $k\sqrt{p}$ gefunden werden. Durch Quadrieren und Addieren dieser Beziehungen folgt:

$$k^2p = (x^2+y^2+z^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) - \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{d}$$

Nennt man die Geschwindigkeit in der Bahn c, so daß

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{e}$$

ist, so kann man nach (d) setzen:

$$\begin{aligned} cr\,\sin\chi &= k\sqrt{p} \\ cr\,\cos\chi &= x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\,, \end{aligned} \tag{f}$$

woraus man c und χ findet, wenn p aus (c) ermittelt ist. Aus (e) folgt mit Benutzung von (b)

$$c^2 = \frac{k^2}{p}\left((\sin(\omega+v)+e\sin\omega)^2 + (\cos(\omega+v)+e\cos\omega))^2\right)$$

oder

$$c^2 = \frac{k^2}{p}(1 + 2e\cos v + e^2) = \frac{k^2}{p}\left(2(1+e\cos v) - (1-e^2)\right)$$

oder mit Rücksicht auf

$$p = r(1 + e\cos v) \quad \text{und} \quad p = a(1 - e^2)$$

$$c^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus ergibt sich a durch:

$$\frac{k^2}{a} = \frac{2k^2}{r} - c^2 \tag{g}$$

und dann die Exzentrizität mittels:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}\,. \tag{h}$$

Schließlich findet man die wahre Anomalie v aus:

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1 \tag{i}$$

und damit ω, da $\omega + v$ sich direkt durch die Koordinaten x, y, z ausdrücken läßt; in der Tat ergeben die Gl. (a)

$$\begin{aligned} r\sin(\omega + v) &= -x\sin\Omega\sec i + y\cos\Omega\sec i = \frac{z}{\sin i} \\ r\cos(\omega + v) &= \quad x\cos\Omega \qquad + y\sin\Omega\,, \end{aligned} \tag{k}$$

wodurch r und $\omega + v$ gefunden werden. Die Gleichungen zur Berechnung von ω und e lassen sich bequemer stellen. Hat man i, Ω, p aus (c), cr und χ aus (f), r und $\omega + v$ aus (k) gerechnet, so ergibt die umgestellte Gleichung

$$c^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

nämlich

$$2a - r = \frac{r}{\frac{2}{r}\frac{k^2}{c^2} - 1} \tag{l}$$

den Betrag von $2a - r$. Nun ist

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = r\frac{dr}{dt} = \frac{rk}{\sqrt{p}}e\sin v\,,$$

also folgt aus der zweiten Gl. (f) und aus der Polargleichung des Kegelschnitts:

$$e\sin v = \frac{c\cos\chi}{k}\sqrt{p}$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1\,,$$

oder wenn man den Wert von p aus der ersten Gl. (f) substituiert:

$$e\sin v = \frac{c^2 r\sin\chi\cos\chi}{k^2}$$

$$e\cos v = \frac{c^2 r\sin\chi^2}{k^2} - 1\,.$$

Wird hier noch

$$\frac{c^2}{k^2} = \frac{2a - r}{ar}$$

eingetragen, so folgt:

$$2e \sin v = \frac{2a - r}{a} \sin 2\chi$$

$$2e \cos v = -\frac{r}{a} - \frac{2a - r}{a} \cos 2\chi$$

oder nach Multiplikation mit $\sin(\omega + v)$ und $\cos(\omega + v)$

$$\begin{aligned} 2ae \sin\omega &= -r \sin(\omega + v) - (2a - r) \sin(2\chi + \omega + v) \\ 2ae \cos\omega &= -r \cos(\omega + v) - (2a - r) \cos(2\chi + \omega + v). \end{aligned} \tag{m}$$

Noch einfacher scheint folgender Weg zu sein. Nachdem Ω, i, p aus (c) und $\omega + v$ aus (k) berechnet ist, benutze man die Gleichung

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{kr} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)$$

in Verbindung mit

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

zur Berechnung von e und v, womit sich e und ω ergeben.

Die mittlere Anomalie für die Epoche geht aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \\ M &= E - e \sin E \end{aligned} \tag{n}$$

hervor, wenn es sich um eine Ellipse, und aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F &= \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \\ N &= e \operatorname{tg} F - \log \text{nat} \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} F + 45^\circ), \end{aligned}$$

wenn es sich um eine Hyperbel handelt. Im Fall der Parabel wird $\frac{1}{a} = 0$ und daher:

$$c^2 = \frac{2k^2}{r}$$

und wenn q die Periheldistanz genannt wird:

$$2k^2 q = r^2 c^2 - \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2$$

also:

$$q = r - \frac{1}{2k^2} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Doch wird man auch hier am bequemsten

$$\begin{aligned} \Omega, i, q = \frac{p}{2} &\quad \text{aus (c)} \\ cr \text{ und } \chi &\quad \text{aus (f)} \\ r \text{ und } \omega + v &\quad \text{aus (k)} \end{aligned}$$

berechnen und dann v aus

$$\begin{aligned} \sin v &= 2 \sin\chi \cos\chi = \sin 2\chi \\ \cos v &= 2 \sin\chi^2 - 1 = -\cos 2\chi \\ \operatorname{tg} v &= -\operatorname{tg} 2\chi \end{aligned}$$

und die Durchgangszeit durchs Perihel aus:

$$t - \mathrm{T} = q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{k} (\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^3) .$$

111. Baryzentrische Örter. Die seit Nr. 106 besprochenen Methoden setzen die elliptische Bewegung der Erde voraus. Diese Voraussetzung kann man jedoch, wenn man von den Planetenstörungen absieht, nur für den Schwerpunkt von Erde und Mond machen und es müssen daher auf diesen die beobachteten Kometenörter und die Sonnenörter reduziert werden, d. h. man muß die ersteren nicht nur auf das Erdzentrum bringen (für Parallaxe korrigieren), sondern auch noch auf den Schwerpunkt Erde-Mond. *Bruns*, der zuerst auf diesen Umstand aufmerksam gemacht hat, nennt die so korrigierten Örter baryzentrische. Da man solche natürlich erst herstellen kann, wenn die Entfernung des Gestirnes bekannt geworden ist, so müssen zwei Näherungen gerechnet werden, deren erste mit den rohen Beobachtungen, deren zweite mit den baryzentrischen Koordinaten von Sonne und Gestirn durchzuführen ist.

Zur Reduktion der geozentrischen Koordinaten auf baryzentrische muß man die Unterschiede zwischen dem geozentrischen und dem baryzentrischen Ort der Sonne direkt den Sonnentafeln entnehmen, da die Jahrbücher sie nicht anführen (siehe Newcomb, Tables of the Sun, Seite 18). Nennt man sie, gleich in rechtwinklige Koordinaten bezogen auf den Äquator umgerechnet ΔX, ΔY, ΔZ, so folgt für den Gestirnsort (nach S. 16)

$$\Delta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\varrho\cos\delta}\Delta X + \frac{\cos\alpha}{\varrho\cos\delta}\Delta Y$$
$$\Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\varrho}\Delta X - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\varrho}\Delta Y + \frac{\cos\delta}{\varrho}\Delta Z .$$

112. Übersicht der Formeln für die Laplace-Brunssche Methode. Man berechnet aus einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen für ein bestimmtes Datum den Ort des Gestirnes α, δ und die ersten und die zweiten Differenzialquotienten dieser Koordinaten α', δ', α'', δ''; ebenso den zugehörigen Ort der Sonne A, D, R, X, Y, Z und die Differenzialquotienten der rechtwinkligen Koordinaten: X', Y', Z', aus den Angaben des Jahrbuchs. Dann ferner:

I.
$$V\cos\psi = \delta' , \qquad V_1\cos\psi_1 = \delta''$$
$$V\sin\psi = \alpha'\cos\delta , \qquad V_1\sin\psi_1 = \alpha''\cos\delta$$
$$N = V^2\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\psi , \qquad N_1 = N\cos\psi .$$

II.
$$\sin G\sin H = \cos D\sin(A-\alpha)$$
$$\sin G\cos H = \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(A-\alpha)$$
$$\cos G = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(A-\alpha)$$
$$f = R\cos G , \qquad b = R\sin G .$$

III.
$$R\sin G\sin(H-\psi)\,k^2 Q = V_1\sin(\psi-\psi_1) + N + N_1\cos\psi$$
$$-2V\sin(H-\psi)\frac{\varrho'}{\varrho} = V_1\sin(H-\psi_1) + N\cos(H-\psi) + N_1\cos H$$
$$\log k^2 = 6.471\,1629_{-10} .$$

IV.
$$\varrho = \frac{1}{Q}\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \qquad \log(1+m) = 0.000\,0013$$
$$\frac{f-\varrho}{b} = \operatorname{tg}\vartheta; \quad r = b\sec\vartheta.$$

V.
$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\delta\cos\alpha - X = \xi - X \\ y &= \varrho\cos\delta\sin\alpha - Y = \eta - Y \\ z &= \varrho\sin\delta \qquad - Z = \zeta - Z \end{aligned}$$
$$x' = \xi\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \operatorname{tg}\delta\cdot\delta' - \operatorname{tg}\alpha\cdot\alpha'\right) - X'$$
$$y' = \eta\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \operatorname{tg}\delta\cdot\delta' + \operatorname{cotg}\alpha\cdot\alpha'\right) - Y'$$
$$z' = \zeta\left(\frac{\varrho'}{\varrho} + \operatorname{cotg}\delta\cdot\delta'\right) \qquad - Z'.$$

VI.
$$\begin{aligned} k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega &= yz' - zy' \\ k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega &= xz' - zx' \\ k\sqrt{p}\cos i \qquad &= xy' - yx'. \end{aligned}$$

VII.
$$e\sin v = \frac{\sqrt{p}}{kr}(xx' + yy' + zz')$$
$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1.$$

VIII.
$$\begin{aligned} r\sin u &= -x\sin\Omega\sec i + y\cos\Omega\sec i = \frac{z}{\sin i} \\ r\cos u &= \quad x\cos\Omega \qquad + y\sin\Omega. \end{aligned}$$

IX.
$$a = \frac{p}{1-e^2}$$
$$\omega = u - v.$$

	Ellipse:	Hyperbel:
X.	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v,$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$
	$M = E - e''\sin E,$	$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\mathrm{T}) = e\operatorname{tg}F - \log\operatorname{nat}\operatorname{tg}(\frac{1}{2}F + 45^\circ).$
	$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$	

Parabel:

IX^a.
$$q = \tfrac{1}{2}p.$$
Probe: $q = r - \frac{1}{2k^2}(xx' + yy' + zz')^2 \qquad \log\frac{1}{2k^2} = 3.227\,8070.$

X^a.
$$t - \mathrm{T} = q^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{k}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3).$$

Ein ausführliches nach einer ähnlichen Analyse durchgerechnetes Beispiel von *P. Harzer* findet man in Astr. Nachr. Bd. 141. Auch *A. Leuschner* hat einige Bahnen nach der Harzerschen Formulierung rechnen lassen und nützliche Winke zur Abkürzung der Rechnung gegeben (Publ. of the Lick Observatory Vol. VIII, Part 1, 2, 3; 1902).

Abschnitt XXII.

Die Bestimmung einer parabolischen Bahn.

113. Die Methode von Lambert-Olbers. Bei den bis jetzt besprochenen Methoden der Bahnbestimmung wurde von Anfang an eine Voraussetzung über die Exzentrizität *nicht* gemacht, oder nur insofern, als bei der Gaußschen Methode das von $\frac{dr}{dt}$ abhängige Glied der Reihenentwicklungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen als klein angenommen wurde, was bei sehr großen Exzentrizitäten zu illusorischen Resultaten führen kann, indem bei Vernachlässigung dieser Glieder der mitgenommene Teil der Reihe keine Näherung mehr darstellt. Bei der Laplaceschen Methode tritt die Entscheidung über die Exzentrizität des Kegelschnitts erst ganz zuletzt auf und die Unabhängigkeit dieser Methode von der Exzentrizität ist als ein Vorzug derselben zu bezeichnen, dem freilich nicht wenige Nachteile gegenüber stehen. Es hat nun die Erfahrung gezeigt, daß fast eine ganze Klasse von Himmelskörpern — die Mehrzahl der Kometen — sich in Bahnen bewegt, deren Exzentrizität praktisch als 1 angenommen werden kann, d. h. in Parabeln. Bei diesen kann man also die Exzentrizität als zu bestimmendes Element ausscheiden, wodurch eine nicht unwesentliche Vereinfachung des Verfahrens erzielt wird. Es stellt sich nämlich heraus, daß eine einfache Gleichung zwischen der ersten und dritten geozentrischen Distanz besteht, aus der die dritte bestimmt werden kann, sobald über die erste eine Annahme gemacht ist. Als Kriterium dafür aber, ob die Annahme über die erste Distanz korrekt ist oder noch der Änderung bedarf, bietet sich der Lambertsche Satz in der einfachen Form dar, die er für die Parabel annimmt. Es bestimmen sich so durch eine einfache Hypothesenrechnung die geozentrischen Distanzen und daraus in bekannter Weise die Elemente. Die Idee zu dieser Methode, deren analytische Formulierung wir jetzt vornehmen wollen, rührt von Lambert her*), ihre praktische Ausbildung hat sie durch Olbers**) erfahren, wichtige analytische Verbesserungen haben Gauß***) und Encke†) beigetragen.

Wir gehen aus von der Beziehung zwischen der ersten und dritten geozentrischen Distanz ϱ_1 und ϱ_3, die sich durch Elimination von ϱ_2 aus den Gleichungen für die Bedingung der Ebene ergibt, und die wir bereits in Gl. 13) (Seite 260) aufgestellt haben, nämlich von:

$$[r_1 r_2]\, L_2 \varrho_3 = [r_2 r_3]\, N_2 \varrho_1 - ([r_2 r_3]\, R_1 G_2 - [r_1 r_2]\, R_3 E_2) \qquad 1)$$

Sind *I*, *II*, *III* die drei Erdörter, *1*, *2*, *3* die drei geozentrischen Kometenörter, so erhält man nach der Bedeutung der Koeffizienten L_2, N_2, G_2, E_2 dieselben beziehungsweise aus den Dreiecken *II 2 3*, *II 1 2*, *2 I II*, *2 I III*, wenn man die sin zweier Seiten

*) *Lambert*, Orb. Com. 1761, Ostwalds Klassiker Nr. 133, S. 65.
**) *Olbers*, Methode die Bahn eines Kometen zu berechnen. 1797.
***) *Gauß*, Über den Kometen von 1813; 1813, Werke VI, S. 29.
†) *Encke*, Berliner Jahrbuch für 1833.

mit dem sin des von ihnen eingeschlossenen Winkels multipliziert. Da alle diese Dreiecke die Seite $2\,II$ gemeinsam haben, so hebt sich der sin $2\,II$ aus der Gl. 1) weg und damit der Ort des Punktes 2 in dem durch II und 2 gelegten größten Kreis. Da nun in der Parabel nur 5 Stücke zu bestimmen sind, also auch nur 5 Beobachtungsdaten gegeben zu sein brauchen, so empfiehlt es sich, statt eines der 6 Beobachtungsdaten $\lambda\beta$ zu streichen, wodurch die Ausdrücke unsymmetrisch würden, lediglich die Lage des größten Kreises $II2$ durch seine Neigung J_2 gegen die Ekliptik zu benutzen, die Lage des Punktes 2 in ihm aber unbestimmt zu lassen; mit anderen Worten man benutzt statt λ_2 und β_2 nur J_2, bestimmt durch:

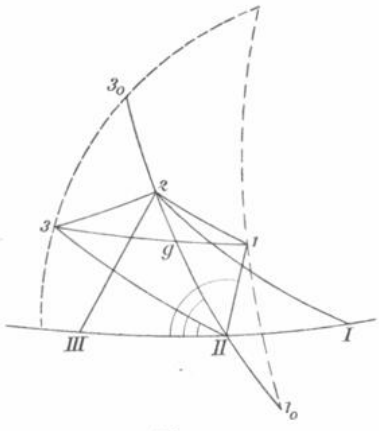


Fig. 53.

$$\operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}. \qquad 2)$$

Da $\sin II2$ aus 1) sich von selbst heraushebt, werden darin dann tatsächlich nur 5 Beobachtungsdaten zur Verwendung gebracht. Nennt man J_1 und J_3 die Neigungen der größten Kreise $II1$ und $II3$ gegen die Ekliptik, so wird

$$\begin{aligned} L_2 &= \sin II2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3) \\ N_2 &= \sin II2 \sin III \sin(J_1 - J_2) \\ G_2 &= \sin II2 \sin(L_2 - L_1) \sin J_2 \\ E_2 &= \sin II2 \sin(L_3 - L_2) \sin J_2 \end{aligned}$$

und daher die Gl. 1), wenn $\sin II2$ weggehoben wird:

$$\begin{aligned} [r_1 r_2] \sin II3 \sin(J_2 - J_3)\varrho_3 = [r_2 r_3] \sin III \sin(J_1 - J_2)\varrho_1 - \\ - ([r_2 r_3] R_1 \sin(L_2 - L_1) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - L_2)) \sin J_2 \end{aligned}$$

oder

$$\varrho_3 = \varrho_1 \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \frac{\sin III \sin(J_1 - J_2)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)} + \frac{\sin J_2}{R_2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left([R_2 R_3] - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} [R_1 R_2] \right).$$

Wir setzen kurz

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m \qquad 3)$$

und diskutieren die beiden Koeffizienten M und m. Der trigonometrische Teil des ersten, nämlich

$$\mathscr{M} = \frac{\sin III \sin(J_1 - J_2)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)}$$

kann sofort einfacher geschrieben werden. Bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt der größten Kreise $II2$ und 13 mit g und den von ihnen gebildeten Winkel mit x, so wird

$$\begin{aligned} \sin III \sin(J_1 - J_2) &= \sin 1g \sin x \\ \sin II3 \sin(J_2 - J_3) &= \sin g3 \sin x \end{aligned}$$

und daher

$$\mathscr{M} = \frac{\sin 1g}{\sin g3},$$

d. h. $\mathscr{F}$ ist gleich dem Verhältnis des Sinus der Abschnitte auf der Strecke 13. Zur Berechnung von $\mathscr{F}$ kann dies nicht dienen. Hierfür ergibt sich aber leicht folgendes: Offenbar ist:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin II1 \sin J_1 = \sin\beta_1 & \sin II2 \sin J_2 = \sin\beta_2 & \sin II3 \sin J_3 = \sin\beta_3 \\ \sin II1 \cos J_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) & \sin II2 \cos J_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) & \sin II3 \cos J_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \end{array} \quad 4)$$

woraus J_1, J_2, J_3, $\sin II1$, $\sin II3$ hervorgehen, während $\sin II2$ nicht gebraucht wird. Unbequemer ist es, $\mathscr{F}$ mit Beachtung von 4) so zu schreiben:

$$\mathscr{F} = \frac{\sin\beta_1 \cos J_2 - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \sin J_2}{-\sin\beta_3 \cos J_2 + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \sin J_2}$$

wobei J_2 noch durch 2) zu berechnen ist. Man kann $\mathrm{tg} J_2$ aber auch durch 2) eliminieren, so daß wird:

$$\mathscr{F} = \frac{\sin\beta_1 \sin(\lambda_2 - L_2) - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \mathrm{tg}\beta_2}{-\sin\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2) + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \mathrm{tg}\beta_2}$$

oder auch:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \cdot \frac{\mathrm{tg}\beta_1 \sin(\lambda_2 - L_2) - \mathrm{tg}\beta_2 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\mathrm{tg}\beta_2 \sin(\lambda_3 - L_2) - \mathrm{tg}\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2)}.$$

Nennt man die Breiten der Punkte, in denen die Breitenkreise von 1 und 3 den größten Kreis $II2$ schneiden, bzw. β_1^0 und β_3^0, so wird:

$$\sin(\lambda_1 - L_2) = \frac{\mathrm{tg}\beta_1^0}{\mathrm{tg} J_2}, \qquad \sin(\lambda_3 - L_2) = \frac{\mathrm{tg}\beta_3^0}{\mathrm{tg} J_2}$$

und daher:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \frac{\mathrm{tg}\beta_1 - \mathrm{tg}\beta_1^0}{\mathrm{tg}\beta_3^0 - \mathrm{tg}\beta_3} = \frac{\cos\beta_3^0}{\cos\beta_1^0} \frac{\sin(\beta_1 - \beta_1^0)}{\sin(\beta_3^0 - \beta_3)},$$

woraus man sieht, da $\mathscr{F}$ stets positiv sein muß, daß 1 und 3 auf verschiedenen Seiten des größten Kreises $II2$ liegen.

Endlich kann man dem $\mathscr{F}$ auch noch folgende Form geben:

$$\mathscr{F} = \frac{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)} \frac{\mathrm{tg} J_1 - \mathrm{tg} J_2}{\mathrm{tg} J_2 - \mathrm{tg} J_3},$$

wie sich leicht durch Anwendung von 4) auf die ursprüngliche Form ergibt.

Die zweite Größe m läßt sich so schreiben:

$$m = \frac{\sin J_2 \, [R_1 R_2]}{R_2 \sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right)$$

oder

$$m = \frac{R_1 \sin J_2 \sin(L_2 - L_1)}{\sin II3 \sin(J_2 - J_3)} \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) \qquad 5)$$

und zeigt so, daß man sie in erster Näherung ganz vernachlässigen kann. In der Tat muß man, auch zur Berechnung von M, von der Reihenentwicklung (Formel 23) Seite 181)

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4 \tau_1 \tau_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots \right) \qquad 6)$$

Gebrauch machen und sich auf das erste Glied d. h. auf

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \qquad 7)$$

beschränken, wenn die Bahn noch völlig unbekannt ist; dann aber kann man, meistens mit erhöhtem Recht, auch

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$$

setzen, was $m = 0$ zur Folge hat. Man begeht dadurch einen Fehler zweiter Ordnung, der aber ohnehin in der ersten Näherung unvermeidlich ist, da man M ebenfalls mit 7) berechnen muß. Man erhält somit die einfache Relation:

$$\varrho_3 = M\varrho_1$$

$$M = \frac{\tau_1}{\tau_3}\,\mathscr{D}; \qquad \mathscr{D} = \frac{\sin\beta_1 \cos J_2 - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)\sin J_2}{-\sin\beta_3 \cos J_2 + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}. \qquad 8)$$

Beachtet man den ursprünglichen Wert von $\mathscr{D}$, so wird

$$\varrho_3 = \frac{\sin 1\,g}{\sin g\,3}\,\frac{\tau_1}{\tau_3}\,\varrho_1$$

in welcher Form zuerst Lambert die Gleichung aufgestellt hat (vergl. Nr. 75 Seite 241). Sie wird aber gewöhnlich die Olberssche Gleichung genannt, da auch dieser sie selbständig auffand.

Die Benutzung des Näherungswertes 7) für das Verhältnis der Dreiecksflächen ist offenbar nur bei kleinen Zwischenzeiten gestattet, bei großen würde sie zu völlig illusorischen Resultaten führen, namentlich dann, wenn $\tau_1 + \tau_3$ klein ist. Dagegen bietet sich auch ein einfaches Mittel dar, wodurch man in der Größe der Zwischenzeiten sich etwas weitere Grenzen stecken darf, nämlich das, daß man die Zwischenzeiten möglichst *gleich* wählt. Das zweite Glied in 6) wird dann wegen des Faktors $\tau_1^2 - \tau_3^2$ möglichst unschädlich gemacht, während allerdings das dritte Glied, das häufig nicht viel kleiner ist, als das zweite, nicht vermindert wird, so daß man auch bei streng gleichen Zwischenzeiten diese nicht zu groß wählen darf. Es kommt namentlich auch auf die Größe von $\tau_1 + \tau_3$ an; bei sonnenfernen Kometen werden die vernachlässigten Glieder auch bei größeren Zwischenzeiten klein bleiben, bei sehr sonnennahen aber können sie trotz kleiner und gleicher Zwischenzeiten stark anwachsen, ja sogar den durch 8) erhaltenen Näherungswert in Frage stellen.

Will man den Lambertschen Satz für die parabolische Bewegung als Kriterium einführen, so muß man die darin auftretenden Radienvektoren r_1 und r_3 und die ihre Endpunkte verbindende Sehne s ebenfalls durch ϱ_1 ausdrücken. Dies gelingt wie folgt. Aus den Dreiecken Sonne-Erde-Komet ergibt sich: (Seite 257)

$$r_1^2 = R_1^2 + \varrho_1^2 + 2R_1\varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2R_3\varrho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

oder

$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_1^2 M^2 + 2R_3\varrho_1 M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3).$$

Für die Sehne hat man in rechtwinkligen Koordinaten:

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

oder wenn man die heliozentrischen Erdkoordinaten X, Y, Z, die geozentrischen Kometenkoordinaten ξ, η, ζ nennt, wegen $x = \xi + X, \ldots$:

$$s^2 = (\xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1 + Z_3 - Z_1)^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1, & \xi_3 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 = M\varrho_1 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 \\ \eta_1 &= \varrho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1, & \eta_3 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 = M\varrho_1 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 \\ \zeta_1 &= \varrho_1 \sin\beta_1, & \zeta_3 &= \varrho_3 \sin\beta_3 \quad\; = M\varrho_1 \sin\beta_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1 \cos L_1, & X_3 &= R_3 \cos L_3 \\ Y_1 &= R_1 \sin L_1, & Y_3 &= R_3 \sin L_3 \\ Z_1 &= 0, & Z_3 &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 &= \varrho_1 (M \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \cos\beta_1 \cos\lambda_1) \\ \eta_3 - \eta_1 &= \varrho_1 (M \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - \cos\beta_1 \sin\lambda_1) \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_1 (M \sin\beta_3 - \sin\beta_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_3 - X_1 &= R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1 \\ Y_3 - Y_1 &= R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1 \\ Z_3 - Z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichungen kurz so:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 &= \varrho_1 h \cos\zeta \cos H \\ \eta_3 - \eta_1 &= \varrho_1 h \cos\zeta \sin H \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_1 h \sin\zeta \\ X_3 - X_1 &= g \cos G \\ Y_3 - Y_1 &= g \sin G \end{aligned}$$

so ergeben sich die Hilfsgrößen h, ζ, H, g, G aus:

$$\begin{aligned} h \cos\zeta \cos(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1) - \cos\beta_1 \\ h \cos\zeta \sin(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h \sin\zeta &= M \sin\beta_3 - \sin\beta_1 \\ g \cos(G - L_1) &= R_3 \cos(L_3 - L_1) - R_1 \\ g \sin(G - L_1) &= R_3 \sin(L_3 - L_1) \end{aligned}$$

(h und g positiv)

und für s folgt dann nach Ausführung der Quadrate

$$s^2 = \varrho_1^2 h^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\zeta \cos(H - G).$$

Wird nun noch gesetzt

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) &= \cos\psi_1 \\ \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) &= \cos\psi_3 \\ \cos\zeta \cos(H - G) &= \cos\varphi \end{aligned}$$

so nehmen die aus rein geometrischen Beziehungen hervorgehenden Ausdrücke von r_1, r_3 und s folgende Form an:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \varrho_1^2 + R_1^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos\psi_1 \\ r_3^2 &= M^2\varrho_1^2 + R_3^2 + 2\varrho_1 M R_3 \cos\psi_3 \\ s^2 &= h^2\varrho_1^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\varphi. \end{aligned}$$

Nach einem Kunstgriff von Gauß läßt sich ihre Berechnung aber noch weiter vereinfachen. Es ist nämlich:

$$r_1^2 = (\varrho_1 + R_1 \cos\psi_1)^2 + (R_1 \sin\psi_1)^2 .$$

Wird also

$$R_1 \cos\psi_1 = f_1, \qquad R_1 \sin\psi_1 = l_1$$

gesetzt, so folgt:

$$r_1^2 = (\varrho_1 + f_1)^2 + l_1^2$$
$$= l_1^2 \left(1 + \left(\frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}\right)^2\right)$$

oder wenn ϑ_1 aus:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}$$

berechnet wird:

$$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1 .$$

Ebenso ergibt sich für r_3 und s:

$\frac{R_3 \cos\psi_3}{M} = f_3$	$\frac{g\cos\varphi}{h} = f$
$\frac{R_3 \sin\psi_3}{M} = l_3$	$\frac{g\sin\varphi}{h} = l$
$\frac{\varrho_1 + f_3}{l_3} = \operatorname{tg}\vartheta_3$	$\frac{\varrho_1 + f}{l} = \operatorname{tg}\vartheta$
$r_3 = M l_3 \sec\vartheta_3$	$s = hl \sec\vartheta .$

r_1, r_3 und s sind jetzt durch ϱ_1 ausgedrückt und man könnte durch Eintragung ihrer Werte in die Lambertsche Gleichung für die Parabel (Seite 193)

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}$$

eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten ϱ_1 aufstellen. Die Auflösung dieser Gleichung würde aber bedeutende Schwierigkeiten verursachen und auch nur auf dem Wege der sukzessiven Annäherung gelingen. Man zieht es daher vor mit einem hypothetischen Werte von ϱ_1 r_1, r_3 und s zu rechnen, diese in die Lambertsche Gleichung einzutragen und zu sehen, ob sie mit dem beobachteten Werte der Zwischenzeit übereinstimmen; ϱ_1 ist so lange unter Anwendung der regula falsi zu variieren, bis Übereinstimmung erzielt ist. Noch einfacher ist es, die Sehne s mit Benutzung der Enckeschen Umformung (Seite 194) aus der Lambertschen Gleichung zu ermitteln und diesen gewissermaßen dynamischen Wert derselben mit dem geometrischen zu vergleichen. Die Hypothese für ϱ_1 ist richtig, wenn die beiden übereinstimmen. Die Rechnung für den aus der parabolischen Bewegung folgenden Wert für s vollzieht sich nach Gl. 12) (Seite 195), nämlich

$$\eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \log 2k = 8.536\,6114$$

$$s = (r_1 + r_3)\eta\mu$$

μ mit Arg. η aus Taf. XXII.

Hat die Hypothesenrechnung den richtigen Wert von ϱ_1 und damit von ϱ_3 ergeben, so erhält man aus den vollständigen geozentrischen Koordinaten ϱ, λ, β die heliozentrischen Polarkoordinaten r, l, b durch:

$$\begin{aligned} r\cos b\cos l &= \varrho\cos\beta\cos\lambda + R\cos L \\ r\cos b\sin l &= \varrho\cos\beta\sin\lambda + R\sin L \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

oder bequemer durch:

$$\begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L) + R \\ r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L) \\ r\sin b &= \varrho\sin\beta \end{aligned}$$

und dann die fünf Elemente der Parabel durch eine der in Nr. 58 und 69 angegebenen Methoden, deren beste in folgender Übersicht aufgenommen sind.

114. Führung der Hypothesenrechnung. Kontrollen. Über die zweckmäßigste Führung der Hypothesenrechnung ist eine Anmerkung zu machen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei Neuentdeckungen von Kometen in der Regel $r_1 + r_3$ zwischen 1 und 3 liegt, also rund $r_1 + r_3 = 2$ ist. Mit der Lambertschen Gleichung

$$s = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{r_1 + r_3}}\,\mu,$$

in der man μ näherungsweise gleich 1 setzen darf, findet man dann s durch:

$$(s) = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{2}}$$

und ferner

$$\sec(\vartheta) = \frac{(s)}{hl}, \qquad \varrho_1' = l\,\mathrm{tg}(\vartheta) - f,$$

womit man die Hypothesenrechnung beginnt. Die Korrektionen hierfür ermittelt man durch Anwendung der regula falsi in folgender Weise. Es seien ϱ', $\varrho' + \Delta'\varrho$, $\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho$, ... die aufeinanderfolgenden Werte von ϱ, mit denen man die Hypothesen rechnet und p, $p + \Delta' p$, $p + \Delta' p + \Delta'' p$, ... seien die zugehörigen Unterschiede des geometrischen und dynamischen Wertes der Sehne: $s_g - s_d$, dann setze man folgendes Schema an:

	Arg.	$s_g - s_d$	1. Diff.	2. Diff.
I. Hyp.	ϱ'	p		
			$\frac{\Delta' p}{\Delta'\varrho}$	
II. »	$\varrho' + \Delta'\varrho$	$p + \Delta' p$		$\frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta' p}{\Delta'\varrho}$
			$\frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho}$	
III. »	$\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho$	$p + \Delta' p + \Delta'' p$		$\frac{\Delta''' p}{\Delta'''\varrho} - \frac{\Delta'' p}{\Delta''\varrho}$
			$\frac{\Delta''' p}{\Delta'''\varrho}$	
IV. »	$\varrho' + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho + \Delta'''\varrho$	$p + \Delta' p + \Delta'' p + \Delta''' p$		

Nach Durchrechnung der beiden ersten Hypothesen erhält man daraus als Bedingung der regula falsi für die dritte:

$$\frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} = \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho} \quad \text{und} \quad p + \Delta'p + \Delta''p = 0$$

somit

$$\Delta''\varrho = -\frac{p + \Delta'p}{\frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho}}.$$

Nach Erledigung von drei Hypothesen kann man einen proportionalen Verlauf der ersten Differenzen als Bedingung setzen d. h. man erhält für die vierte Hypothese:

$$\frac{\Delta'''p}{\Delta'''\varrho} - \frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} = \frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho} \quad \text{und} \quad p + \Delta'p + \Delta''p + \Delta'''p = 0$$

woraus:

$$\Delta'''\varrho = -\frac{p + \Delta'p + \Delta''p}{2\frac{\Delta''p}{\Delta''\varrho} - \frac{\Delta'p}{\Delta'\varrho}} \quad \text{usf.}$$

Man wird nur selten mehr als vier Hypothesen nötig haben.

Endlich muß auf einige Kontrollen aufmerksam gemacht werden. Die bei Berechnung der heliozentrischen Örter sich ergebenden Radienvektoren r_1 und r_3 müssen mit den bei der letzten Hypothese verwendeten übereinstimmen. Nach Berechnung der Argumente der Breite u_1 und u_3 wird der von den Radienvektoren eingeschlossene Winkel $u_3 - u_1$ bekannt und kann zu einer durchgreifenden Kontrolle benutzt werden. In dem von r_1, r_3, s gebildeten Dreieck muß nämlich sein:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{\sigma(\sigma - s)}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r_1}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{r_3}{\sigma}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)}}$$

oder auch

$$\sin \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{r_1 r_3}},$$

wenn

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3 + s)$$

gesetzt wird.

Endlich kann man die Durchgangszeit durchs Perihel aus beiden Beobachtungszeiten t_1 und t_3 ableiten, wobei sich völlige Übereinstimmung herausstellen muß.

Über die Kontrolle, die man durch die Berechnung des mittleren Ortes erlangt und die dadurch ermöglichten Verbesserungen der Bahn wird weiter unten gesprochen werden.

115. Übersicht der Formeln zur Berechnung einer ersten parabolischen Bahn. Betreffs der Vorbereitung der Beobachtungen gilt das in Nr. 87 Gesagte.

	Daten.			
	Des Kometen		Der Erde	
Beob. Zeit	Länge	Breite	Länge	Log R
t_1	λ_1	β_1	L_1	R_1
t_2	λ_2	β_2	L_2	R_2
t_3	λ_3	β_3	L_3	R_3.

A. Konstante Hilfsgrößen.

I.
$$\begin{array}{l|l|l} A\sin J_1 = \sin\beta_1 & B\sin J_2 = \sin\beta_2 & C\sin J_3 = \sin\beta_3 \\ A\cos J_1 = \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_2) & B\cos J_2 = \cos\beta_2\sin(\lambda_2 - L_2) & C\cos J_3 = \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2) \end{array}$$

A, C positiv; B wird nicht gebraucht.

$$\mathfrak{M} = \frac{A\sin(J_1 - J_2)}{C\sin(J_2 - J_3)}; \quad M = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\mathfrak{M}.$$

II.
$$\begin{aligned} h\cos\zeta\cos(H - \lambda_1) &= M\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - \lambda_1) - \cos\beta_1 \\ h\cos\zeta\sin(H - \lambda_1) &= M\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h\sin\zeta &= M\sin\beta_3 - \sin\beta_1 \\ g\cos(G - L_1) &= R_3\cos(L_3 - L_1) - R_1 \\ g\sin(G - L_1) &= R_3\sin(L_3 - L_1) \end{aligned}$$

h und g positiv.

$$\begin{aligned} \cos\psi_1 &= \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\psi_3 &= \cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) \\ \cos\varphi &= \cos\zeta\cos(H - G) \end{aligned}$$

ψ_1, ψ_3, φ sind kleiner als 180°.

III.
$$\begin{array}{l|l|l} f_1 = R_1\cos\psi_1 & f_3 = \dfrac{R_3\cos\psi_3}{M} & f = \dfrac{g\cos\varphi}{h} \\ l_1 = R_1\sin\psi_1 & l_3 = \dfrac{R_3\sin\psi_3}{M} & l = \dfrac{g\sin\varphi}{h}. \end{array}$$

B. Hypothesenrechnung.

IV.
$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}\vartheta_1 = \dfrac{\varrho_1 + f_1}{l_1}, & \operatorname{tg}\vartheta_3 = \dfrac{\varrho_1 + f_3}{l_3}, & \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{\varrho_1 + f}{l}, \\ r_1 = l_1\sec\vartheta_1, & r_3 = l_3 M\sec\vartheta_3, & s_g = lh\sec\vartheta \end{array}$$

$$\eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \log 2k = 8.536611_{-10}$$

$$s_d = (r_1 + r_3)\eta\mu$$

μ mit Arg. η aus Taf. XXII.

ϱ_1 wird so lange variiert, bis $s_g = s_d$ sich ergibt.

(Siehe obige Anleitung zur Hypothesenrechnung.)

C. Bestimmung der Elemente.

V.
$$\varrho_3 = M\varrho_1$$

$$\begin{aligned} r_1\cos b_1\cos(l_1 - L_1) &= \varrho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) + R_1 \\ r_1\cos b_1\sin(l_1 - L_1) &= \varrho_1\cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_1) \\ r_1\sin b_1 &= \varrho_1\sin\beta_1 \\ r_3\cos b_3\cos(l_3 - L_3) &= \varrho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3) + R_3 \\ r_3\cos b_3\sin(l_3 - L_3) &= \varrho_3\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_3) \\ r_3\sin b_3 &= \varrho_3\sin\beta_3. \end{aligned}$$

Probe: r_1 und r_3 müssen identisch mit den bei der letzten Hypothese benutzten sich ergeben.

Ist $l_3 - l_1 > 0$, dann ist $i < 90°$
» $l_3 - l_1 < 0$, » » $i > 90°$.

VI.
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$
$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)}{\cos i} = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin i \cos(l_1 - \Omega)}$$
$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{\operatorname{tg}(l_3 - \Omega)}{\cos i} = \frac{\operatorname{tg} b_3}{\sin i \cos(l_3 - \Omega)}.$$

Ist die Breite positiv, so liegt u zwischen 0° und 180°; ist sie negativ, zwischen 180° und 360°.

Probe: $\sigma = \frac{1}{2}(r_1 + r_3 + s)$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_3)}{\sigma(\sigma - s)}}$.

VII.
$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{r_3}}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)$$
$$\omega = u_1 - v_1 \qquad v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$$
$$\pi = \omega + \Omega.$$

Man entnehme mit Arg. v_1 und v_3 aus der Barkerschen Tafel M_1 und M_3, dann wird
$$T = t_1 - \frac{M_1 q^{\frac{3}{2}}}{C} = t_3 - \frac{M_3 q^{\frac{3}{2}}}{C}$$
$$\log C = 9.960\,1277$$
oder bei Benutzung von Tafel XV $C = 1$.

Elemente:

Perihelzeit	T	
Abstand des Perihels vom Knoten	ω	Ekliptik und Äqu. des Jahresanfanges
Länge des Knotens	Ω	
Neigung	i	
log der Periheldistanz	$\log q$	

D. Darstellung des mittleren Ortes.

VIII. Mit $M_2 = \frac{C(t_2 - T)}{q^{\frac{3}{2}}}$ entnehme man der Barkerschen Tafel v_2.
$$r_2 = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v_2}, \qquad u_2 = v_2 + \omega$$
$$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - \Omega) = r_2 \cos u_2 - R_2 \cos(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega) = r_2 \sin u_2 \cos i - R_2 \sin(L_2 - \Omega)$$
$$\varrho_2 \sin\beta_2 = r_2 \sin u_2 \sin i.$$

116. Beispiel einer ersten parabolischen Bahn. Wir wählen zur Erläuterung der Olbersschen Methode die Berechnung der Bahn des Kometen 1896 IV (Sperra) und legen folgende den Astr. Nachr. entnommenen Beobachtungen zugrunde, wobei wir die Beobachtungszeiten gleich auf den Berliner Meridian und die Örter auf den Jahresanfang reduziert angeben:

Komet 1896 IV.

		M. Z. Berlin	α 1896.0	δ 1896.0	
1896	Sept. 7	$10^h\ 8^m\ 32^s$	$13^h\ 55^m\ 32^s.46$	$+55^\circ\ 21'\ 5''.5$	München
	» 10	8 35 42	14 16 7.45	+54 52 41.0	Teramo
	» 13	9 55 30	14 37 17.12	+54 11 24.4	Straßburg.

Von einer Berücksichtigung der Aberration und Parallaxe soll, wie immer bei ersten Kometenbahnen, Abstand genommen werden. Die Umwandlung in Längen und Breiten, sowie die Interpolation der Erdörter ergab folgende der Bahnbestimmung zugrunde liegende Daten:

Komet 1896 IV (Sperra).

1896 M. Z. Berlin.

t_1	Sept. 7.42 259	λ_1	$171^\circ 22' 49''.4$	β_1	$+59^\circ 46' 6''.8$	L_1	$345^\circ 41' 26''.2$	R_1	0.00 3027
t_2	10.35 812	λ_2	176 22 51.9	β_2	+61 27 43.8	L_2	348 32 48.8	R_2	0.00 2690
t_3	13.41 354	λ_3	182 11 53.2	β_3	+63 3 56.7	L_3	351 31 26.2	R_3	0.00 2327

A. Hilfsgrößen.

I.	$\sin\beta_1$	9.93 6513	$\sin\beta_2$	9.94 3743	$\sin\beta_3$	9.95 0134	λ_1-L_2	$182^\circ 50' 0''.6$
	$\cos\beta_1$	9.70 1995	$\cos\beta_2$	9.67 9191	$\cos\beta_3$	9.65 6068	λ_2-L_2	187 50 3.1
	$\sin(\lambda_1-L_2)$	$8.69\,4024_n$	$\sin(\lambda_2-L_2)$	$9.13\,4517_n$	$\sin(\lambda_3-L_2)$	$9.37\,2932_n$	λ_3-L_2	193 39 4.4
	$A\cos J_1$	$8.39\,6019_n$	$B\cos J_2$	$8.81\,3708_n$	$C\cos J_3$	$9.02\,9000_n$	J_1	91 39 0.34
	$\sin J_1$	9.99 9820	$\sin J_2$	9.99 8810	$\sin J_3$	9.99 6900	J_2	94 14 21.48
	$\operatorname{tg} J_1$	$1.54\,0494_n$	$\operatorname{tg} J_2$	$1.13\,0035_n$	$\operatorname{tg} J_3$	$0.92\,1134_n$	J_3	96 50 16.29
	A	9.93 6693	$A:C$	9.98 3459	C	9.95 3234	J_1-J_2	−2 35 21.14
	$\sin(J_1-J_2)$	$8.65\,4896_n$	sin : sin	9.99 8435	$\sin(J_2-J_3)$	$8.65\,6461_n$	J_2-J_3	−2 35 54.81
			$\mathfrak{C}$	9.98 1894	M	9.99 9278		
	$M\sin\beta_3$	9.94 9412	$r_1:r_3$	0.01 7384	$M\cos\beta_3$	9.65 5346		
II.	—	9.64 7559	$R_3\cos(L_3-L_1)$	0.00 0072	$\cos(\lambda_1-L_1)$	$9.99\,7855_n$	t_3-t_2	0.48 5071
	$h\cos\zeta\sin(H-\lambda_1)$	8.92 8776	R_1	0.00 3027	$\cos(\lambda_3-L_3)$	$9.99\,2419_n$	t_2-t_1	0.46 7687
	$h\cos\zeta\cos(H-\lambda_1)$	$8.77\,3159_n$	$g\sin(G-L_1)$	9.00 9371	$\cos(H-G)$	$9.90\,3408_n$		
	sin »	9.91 3641	$g\cos(G-L_1)$	$7.83\,4358_n$	$\cos\psi_1$	$9.69\,9850_n$	$\lambda_3-\lambda_1$	$10^\circ 49' 3''.8$
	$\operatorname{tg}(H-\lambda_1)$	$0.15\,5617_n$	$\sin(G-L_1)$	9.99 9033	$\cos\psi_3$	$9.64\,8487_n$	sin »	9.27 3430
	$H-\lambda_1$	$124^\circ 56' 51''.8$	tg »	$1.17\,5013_n$	$\cos\varphi$	$9.89\,0085_n$	cos »	9.99 2213
	$h\sin\zeta$	8.41 5753	$G-L_1$	$93^\circ 49' 24''.7$	$\sin\psi_1$	9.93 7236	L_3-L_1	$5^\circ 50' 0''.0$
	$h\cos\zeta$	9.01 5135	g	9.01 0338	$\sin\psi_3$	9.95 2049	sin »	9.00 7044
	$\cos\zeta$	9.98 6677			$\sin\varphi$	9.79 9507	cos »	9.99 7745
	$\operatorname{tg}\zeta$	9.40 0618	H	$296^\circ 19' 41''.2$				
	ζ	$14^\circ 7' 10''.6$	G	79 30 50.9	$R_3:M$	0.00 3049	λ_1-L_1	$185^\circ 41' 23''.2$
	h	9.02 8458	$H-G$	216 48 50.3	$g:h$	9.98 1880	λ_3-L_3	190 40 27.0
III.	l_1	9.94 0263	l_3	9.95 5098	l	9.78 1387	t_3-t_1	0.77 7496
	f_1	$9.70\,2877_n$	f_3	$9.65\,1536_n$	f	$9.87\,1965_n$	$2k(t_3-t_1)$	9.31 4107
			l_3M	9.95 4376	lh	8.80 9845		
	f_1	− 0.50 4519	f_3	− 0.44 8266	f	− 0.74 4672		

B. Hypothesenrechnung.

IV.		I.	II.	III.	IV.
	ϱ_1	+ 1.96 8850	+ 1.66 8850	+ 1.68 2778	+ 1.68 2895
	$\varrho_1 + f_1$	+ 1.46 4331	+ 1.16 4331	+ 1.17 8259	+ 1.17 8376
	$\varrho_1 + f_3$	+ 1.52 0584	+ 1.22 0584	+ 1.23 4512	+ 1.23 4629
	$\varrho_1 + f$	+ 1.22 4178	+ 0.92 4178	+ 0.93 8106	+ 0.93 8223
log	$\varrho_1 + f_1$	0.16 5639	0.06 6076	0.07 1241	0.07 1284
log	$\varrho_1 + f_3$	0.18 2010	0.08 6567	0.09 1495	0.09 1536
log	$\varrho_1 + f$	0.08 7844	9.96 5756	9.97 2252	9.97 2306
	tg ϑ_1	0.22 5376	0.12 5814	0.13 0978	0.13 1021
	tg ϑ_3	0.22 6912	0.13 1469	0.13 6397	0.13 6438
	tg ϑ	0.30 6457	0.18 4369	0.19 0865	0.19 0919
	sec ϑ_1	0.29 1213	0.22 2409	0.22 5733	0.22 5761
	sec ϑ_3	0.29 2353	0.22 6051	0.22 9252	0.22 9278
	sec ϑ	0.35 3838	0.26 1706	0.26 6276	0.26 6315
	r_1	0.23 1476	0.16 2672	0.16 5996	0.16 6024
	r_3	0.24 6729	0.18 0427	0.18 3628	0.18 3654
	Add.	0.29 3470	0.29 2243	0.29 2303	0.29 2304
	s_g	9.16 3683	9.07 1551	9.07 6121	9.07 6160
	$r_1 + r_3$	0.54 0199	0.47 2670	0.47 5931	0.47 5958
	$(r_1 + r_3)^{\frac{1}{2}}$	0.27 0099	0.23 6335	0.23 7965	0.23 7979
	$(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	0.81 0298	0.70 9005	0.71 3896	0.71 3937
	η	8.50 3809	8.60 5102	8.60 0211	8.60 0170
	μ	0.00 0018	0.00 0029	0.00 0029	0.00 0029
	s_d	9.04 4026	9.07 7801	9.07 6171	9.07 6157
Zahlen	s_g	+ 0.14 5775	+ 0.11 7910	+ 0.11 9157	
Zahlen	s_d	+ 0.11 0669	+ 0.11 9619	+ 0.11 9171	
	$s_g - s_d$	+ 0.03 5106	− 0.00 1709	− 0.00 0014	
		$\Delta' p$ − 0.03 6815	$\frac{\Delta' p}{\Delta' \varrho}$ 9.08 890	$\Delta'' p$ + 0.00 1695	2 $\frac{\Delta'' p}{\Delta'' \varrho}$ 9.3862
		$\Delta' \varrho$ − 0.3	$\Delta'' \varrho$ + 0.01 3928	$\Delta''' \varrho$ = + 0.00 0117	

C. Bestimmung der Elemente.

V.				VI.				
	ϱ_1	0.22 6057	ϱ_3	0.22 5335	$l_3 - l_1$	+ 4° 16′ 57″.9	tg u_1	0.90 7225$_n$
	$\cos(\lambda_1 - L_1)$	9.99 7855$_n$	$\cos(\lambda_3 - L_3)$	9.99 2419$_n$	sin »	8.87 3195	tg u_3	0.71 1872$_n$
	$\varrho_1 \cos\beta_1$	9.92 8052	$\varrho_3 \cos\beta_3$	9.88 1403	cos »	9.99 8787	u_1	97° 3′ 29″.5
	$\sin(\lambda_1 - L_1)$	8.99 6259$_n$	$\sin(\lambda_3 - L_3)$	9.26 7696$_n$	tg b_3	0.70 7762	u_3	100 59 13.4
						9.73 5157		
		9.92 5907		9.87 3822$_n$	$-\mathrm{tg}\, b_1 \cos(l_3 - l_1)$	0.89 6254$_n$	Probe:	
	R_1	0.00 3027	R_3	0.00 2327		0.44 2919$_n$	$u_3 - u_1$	3° 55′ 43″.9
	$r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1)$	8.92 4311$_n$	$r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3)$	9.14 9099$_n$	tg i sin $(l_1 - \Omega)$	0.89 7467	$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1 57 51.95
	$r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1)$	9.21 4419	$r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3)$	9.41 0794	tg i cos $(l_1 - \Omega)$	1.56 9724$_n$	r_1	+ 1.46 5630
	$\cos(l_1 - L_1)$	9.94 9316	$\cos(l_3 - L_3)$	9.94 3087	cos $(l_1 - \Omega)$	9.99 0393$_n$	r_3	+ 1.52 6350
	$\mathrm{tg}(l_1 - L_1)$	9.70 9892$_n$	$\mathrm{tg}(l_3 - L_3)$	9.73 8305$_n$	tg $(l_1 - \Omega)$	9.32 7743$_n$	s	+ 0.11 9168
	$l_1 - L_1$	332° 51′ 15″.3	$l_3 - L_3$	331° 18′ 13″.2	$l_1 - \Omega$	167° 59′ 34″.1		+ 3.11 1148
	$r_1 \sin b_1$	0.16 2570	$r_3 \sin b_3$	0.17 5469	tg i	1.57 9331	σ	+ 1.55 5574
	$r_1 \cos b_1$	9.26 5103	$r_3 \cos b_3$	9.46 7707	i	88° 29′ 27″.6	$\sigma - r_1$	8.95 3967
	$\sin b_1$	9.99 6546	$\sin b_3$	9.99 1815	Ω	150 33 7.4	$\sigma - r_3$	8.46 5740
	tg b_1	0.89 7467	tg b_3	0.70 7762	$l_3 - \Omega$	172 16 32.0	σ	0.19 1891
	b_1	+ 82° 46′ 59″.2	b_3	+ 78° 54′ 39″.8	cos »	9.99 6041$_n$	$\sigma - s$	0.15 7277
	r_1	0.16 6024	r_3	0.18 3654	sin i	9.99 9849		7.07 0539
	l_1	318° 32′ 41″.5	l_3	322° 49′ 39″.4	$\sin i \cos(l_1 - \Omega)$	9.99 0242$_n$	$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	8.53 5269
	$\sqrt{r_1}$	0.08 3012	$\sqrt{r_3}$	0.09 1827	$\sin i \cos(l_3 - \Omega)$	9.99 5890$_n$	$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1° 57′ 51″.70

VII. cotg $\frac{1}{2}(u_3-u_1)$	1.46 4716	$\sin \frac{1}{2}v_1 : \sqrt{q}$	9.67 2144	$q^{\frac{3}{2}}$	0.06 6288		
cosec »	1.46 4971	$\cos \frac{1}{2}v_1 : \sqrt{q}$	9.91 6988	M_1	1.71 4606		
	1.38 1704	$\cos \frac{1}{2}v_1$	9.93 9084	M_3	1.75 5693	Elemente:	
	1.37 3144	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1$	9.75 5156		1.78 0894	T 1896 Juli 9.0423	
	8.29 9000	$\frac{1}{2}v_1$	29° 38′ 32″.4		1.82 1981	ω 37° 46′ 24″.6	
		v_1	59 17 4.9		60.38 014	Ω 150 33 7.4	1896 0
		v_3	63 12 48.8		66.37 143	i 88 29 27.6	
		ω	37 46 24.6	T	Juli 9.0424	$\log q$ 0.04 4192	
		$\sqrt{q}$	0.02 2096	T	» 9.0421		
		q	0.04 4192				

D. Darstellung des mittleren Ortes.

$t_2 - T$	+63.3158	$\cos u_2$	9.19 5437$_n$		9.37 0105$_n$	$\varrho_2 \sin \beta_2$	0.16 9109
»	1.80 1512	$\sin u_2$	9.99 4592		9.98 0909	$\varrho_2 \cos \beta_2$	9.90 4558
M_2	1.73 5224	$r_2 \cos u_2$	9.37 0105$_n$		8.58 9778	$\sin \beta_2$	9.94 3742
v_2	61° 14′ 58″.6	$r_2 \sin u_2$	0.16 9260		9.49 2552	$\operatorname{tg} \beta_2$	0.26 4551
$\frac{1}{2}v_2$	30 37 29.3	$\sin i$	9.99 9849	$\varrho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\Omega)$	9.54 3740	β_2	61° 27′ 43″.6
$\cos \frac{1}{2}v_2^2$	9.86 9524	$\cos i$	8.42 0518	$\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2-\Omega)$	9.85 8846	ϱ_2	0.22 5367
r_2	0.17 4668	$L_2 - \Omega$	197° 59′ 41″.4	$\cos(\lambda_2 - \Omega)$	9.95 4288	λ_2	176° 22′ 53″.6
u_2	99° 1′ 23″.2	sin »	9.48 9862$_n$	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \Omega)$	9.68 4894	Beob. — Rechn.	
		cos »	9.97 8219$_n$	$\lambda_2 - \Omega$	25° 49′ 46″.2	$\Delta\lambda$ — 1″.7	$\Delta\beta$ + 0″.2
		R_2	0.00 2690			$\Delta\lambda \cos\beta''$ = — 0″.8	

117. Eine andere Form der Hypothesenrechnung. Statt ϱ_1 willkürlich zu variieren, kann man die Formeln der Hypothesenrechnung auch leicht derartig umstellen, daß die Schlußwerte einer Hypothese die Anfangswerte für die nächste liefern — ein Verfahren, das jede Überlegung über Größe und Sinn der Variation unnötig macht, allerdings aber manchmal geringe Konvergenz besitzt. Dieses Verfahren ist von *Encke* (Berl. Jahrbuch für 1833, S. 279) angegeben und von *Watson*, *Oppolzer*, *Weiß* u. a. empfohlen worden. Als zu variierende Unbekannte wird $r_1 + r_3$ eingeführt, hierdurch mittels des Lambertschen Satzes s und dann ϱ_1 ausgedrückt, aus diesem r_1 und r_3 berechnet, worauf mit $r_1 + r_3$ die Rechnung von neuem durchgeführt wird, bis sie steht. An Stelle der Formeln IV (Seite 357) treten dann folgende, die sich derselben Hilfsgrößen bedienen:

IV^a. Mit dem Arg. $\eta = \dfrac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \log 2k = 8.53\,6611_{-10}$

wird μ der Tafel XXII entnommen;

$$s = (r_1 + r_3)\,\eta\,\mu$$

$$\cos\vartheta = \frac{lh}{s}$$

$$\varrho_1 = l \operatorname{tg}\vartheta - f$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_1 + f_3}{l_3}$$

$$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1, \qquad r_3 = l_3 M \sec\vartheta_3$$

Mit $r_1 + r_3$ beginnt die nächste Hypothese. Die erste Hypothese wird man wieder mit $r_1 + r_3 = 2$ beginnen. Reicht man mit drei Hypothesen nicht aus, so führt folgendes einfache Interpolationsverfahren rasch zum Ziel. Es sei $x_0 = \log(r_1 + r_3)$

der Ausgangswert der ersten Hypothese, x_1 der Endwert derselben, also der Ausgangswert der zweiten Hypothese, x_2 der Endwert dieser und Anfangswert der dritten, schließlich x_3 der Endwert der dritten. Nennt man nun der Reihe nach dx_0, dx_1, dx_2, dx_3 die Korrektionen, die zu bzw. x_0, x_1, x_2, x_3 hinzuzufügen sind, um den wahren Wert von $\log(r_1 + r_3)$ zu erhalten, so daß

$$x_0 + dx_0 = x_1 + dx_1 = x_2 + dx_2 = x_3 + dx_3$$

wird, so kann man setzen

$$\begin{aligned} dx_1 &= -q\,dx_0 \\ dx_2 &= -q\,dx_1 \\ dx_3 &= -q\,dx_2 \end{aligned}$$

wo q ein nahezu konstanter Faktor ist, dessen analytischer Ausdruck leicht durch Differenziation der Gleichungen IV^a erhalten wird. Bildet man also das Differenzenschema:

$$\begin{array}{lll} x_1 & & \\ & \Delta x_1 & \\ x_2 & & \Delta'' x_1 \\ & \Delta x_2 & \\ x_3 & & \end{array}$$

so wird nahe:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= (1+q)\,dx_1 \\ \Delta x_2 &= -(1+q)\,q\,dx_1 \\ \Delta'' x_1 &= -(1+q)^2\,dx_1 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta'' x_1} \\ dx_3 &= -\frac{(\Delta x_2)^2}{\Delta'' x_1}\,. \end{aligned}$$

Hiervon wird dx_3 in der Regel der kleinere Wert sein; man wird daher mit $x_3 + dx_3$ für $r_1 + r_3$ die vierte Hypothese beginnen und damit meistens das Ziel erreicht haben. Da

$$q = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

bekannt ist, so kann man gegebenen Falls die fünfte Hypothese mit

$$\log(r_1 + r_3) = X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1+q} = X_1 + \frac{X_0 - X_1}{1+q}\,q$$

rechnen, wo X_0 und X_1 Anfangs- und Endwert der vierten Hypothese sind.

Zur Erläuterung des Verfahrens sei die Hypothesenrechnung der schon oben behandelten Kometenbahn (Seite 360) hier vollständig durchgeführt. Da die sukzessiven Werte von $\log(r_1 + r_3)$ abwechselnd größer und kleiner als der wahre Wert sich ergeben (was sich leicht aus obigen Formeln erklärt und allgemein gilt) ist die Konvergenz eine geringe und nur die Anwendung des Interpolationsverfahrens ließ das Ziel rasch erreichen.

f_1	− 0.50 4519	f_3	− 0.44 8266	f	− 0.74 4672
l_1	9.94 0263	l_3	9.95 5098	l	9.78 1387
$2k(t_3 - t_1)$	9.31 4107	Ml_3	9.95 4376	lh	8.80 9845

	I.	II.	III.	IV.	V.
$r_1 + r_3$	0.30 1030	0.54 0205	0.45 3208	0.47 6013	0.47 5957
$(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	0.45 1545	0.81 0307	0.67 9812	0.71 4020	0.71 3936
η	8.86 2562	8.50 3800	8.63 4295	8.60 0087	8.60 0171
μ	0.00 0096	0.00 0018	0.00 0033	0.00 0029	0.00 0029
s	9.16 3688	9.04 4023	9.08 7536	9.07 6129	9.07 6157
$\cos\vartheta$	9.64 6157	9.76 5822	9.72 2309	9.73 3716	9.73 3688
$\operatorname{tg}\vartheta$	0.30 6464	0.14 3908	0.20 6849	0.19 0876	0.19 0916
$l\operatorname{tg}\vartheta$	0.08 7851	9.92 5295	9.98 8236	9.97 2263	9.97 2303
ϱ_1	+ 1.96 8869	+ 1.58 6639	+ 1.71 7948	+ 1.68 2802	+ 1.68 2888
$\varrho_1 + f_1$	0.16 5645	0.03 4275	0.08 4014	0.07 1250	0.07 1282
$\operatorname{tg}\vartheta_1$	0.22 5382	0.09 4012	0.14 3751	0.13 0987	0.13 1019
$\varrho_1 + f_3$	0.18 2016	0.05 6285	0.10 3695	0.09 1504	0.09 1534
$\operatorname{tg}\vartheta_3$	0.22 6918	0.10 1187	0.14 8597	0.13 6406	0.13 6436
$\sec\vartheta_1$	0.29 1222	0.20 2569	0.23 4075	0.22 5739	0.22 5758
$\sec\vartheta_3$	0.29 2357	0.20 6950	0.23 7283	0.22 9258	0.22 9277
r_1	0.23 1485	0.14 2832	0.17 4338	0.16 6002	0.16 6021
r_3	0.24 6733	0.16 1326	0.19 1659	0.18 3634	0.18 3653
Add.	0.29 3472	0.29 1882	0.29 2456	0.29 2303	0.29 2303

x_1	0.54 0205			
x_2	0.45 3208	− 8 6997	+ 11 7904	$dx_3 = -0.00\,8102$
x_3	0.48 4115	+ 3 0907		

$\log q$	9.5506	X_0	0.47 6013	− 76	1.8808_n
$\log(1+q)$	0.1320	X_1	0.47 5937		1.7488_n
					− 56

Wie erwähnt, kann man für q einen analytischen Ausdruck aufstellen; benutzt man diesen zur numerischen Berechnung von q, so kann man nach Durchrechnung jeder Hypothese für die nächste einen Wert von $r_1 + r_3$ als Anfangswert einführen, der der Wahrheit näher liegen wird, als der Endwert der ersten, nämlich den Wert

$$\log(r_1 + r_3) = X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1 + q},$$

wo X_0 und X_1 Anfangs- und Endwert von $\log(r_1 + r_3)$ bei der ersten Hypothese sind.

Um den Ausdruck von q zu ermitteln, variieren wir $r_1 + r_3$ um $d(r_1 + r_3)$; die hieraus sich ergebende Änderung der Sehne s folgt durch Differenziation des Eulerschen Satzes, nämlich:

$$\sqrt{r_1 + r_3 + s}\,(d(r_1 + r_3) + ds) - \sqrt{r_1 + r_3 - s}\,(d(r_1 + r_3) - ds) = 0$$

oder:

$$(\sqrt{r_1 + r_3 + s} + \sqrt{r_1 + r_3 - s})\,ds = -(\sqrt{r_1 + r_3 + s} - \sqrt{r_1 + r_3 - s})\,d(r_1 + r_3).$$

Führt man hier den auch schon früher gebrauchten Winkel γ durch:

$$\sin\gamma = \frac{s}{r_1 + r_3} = \eta\mu$$

ein, so wird einfach:

$$ds = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\, d(r_1 + r_3). \qquad \text{(a)}$$

Um andererseits die Änderung zu erfahren, welche eine Variation von s in dem geometrischen Werte von $r_1 + r_3$ veranlaßt, hat man durch Differenziation der letzten Gleichungen in IV[a]:

$$dr_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_1^{\,2}}\, l_1 d\vartheta_1, \qquad dr_3 = \frac{\sin\vartheta_3}{\cos\vartheta_3^{\,2}}\, l_3 M d\vartheta_3$$

$$d\varrho_1 = \frac{l_1}{\cos\vartheta_1^{\,2}}\, d\vartheta_1 = \frac{l_3}{\cos\vartheta_3^{\,2}}\, d\vartheta_3 = \frac{l}{\cos\vartheta^2}\, d\vartheta;$$

also

$$dr_1 = d\varrho_1 \cdot \sin\vartheta_1, \qquad dr_3 = d\varrho_1 \cdot M\sin\vartheta_3$$

$$d(r_1 + r_3) = (\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\, d\varrho_1;$$

ferner:

$$ds = lh\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta^2}\, d\vartheta = h\sin\vartheta\, d\varrho_1,$$

also:

$$d(r_1 + r_3) = (\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{ds}{h\sin\vartheta}. \qquad \text{(b)}$$

Aus der Verbindung von (a) und (b) erkennt man, daß eine Änderung des Anfangswertes von $r_1 + r_3$ in einer Hypothese um $d(r_1 + r_3)_a$ im Endwert $(r_1 + r_3)_e$ eine Änderung gleich

$$d(r_1 + r_3)_e = -(\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{h\sin\vartheta}\, d(r_1 + r_3)_a$$

hervorbringt. Folglich wird, wenn

$$dX_0 = d\log(r_1 + r_3)_a, \qquad dX_1 = d\log(r_1 + r_3)_e$$

gesetzt wird:

$$dX_1 = -q\, dX_0$$

$$q = +(\sin\vartheta_1 + M\sin\vartheta_3)\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{h\sin\vartheta}\,\frac{(r_1 + r_3)_a}{(r_1 + r_3)_e} \qquad \text{(c)}$$

und die nächste Hypothese beginnt mit

$$X_0 + \frac{X_1 - X_0}{1 + q}.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf die zweite Hypothese des obigen Beispieles (Seite 363) an, so stellt sich die ausführliche Berechnung so:

$\sin\vartheta_3$	9.89 4237	$\sin\gamma$	8.50 3818	$\sin\vartheta$	9.90 9730
$\sin\vartheta_1$	9.89 1443	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$	8.20 2788	h	9.02 8458
$M\sin\vartheta_3$	9.89 3515			$h\sin\vartheta$	8.93 8188
Add.	0.29 9995				
$(\ldots)$	0.19 3510				
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma : h\sin\vartheta$	9.26 4600				
$(r_1 + r_3)_a : (r_1 + r)_e$	0.08 6997				
q	9.53 9107				
$1 + q$	0.12 9053				
$X_1 - X_0$	$8.93\,9504_n$				
	$8.81\,0451_n$				
$(X_1 - X_0) : (1 + q)$	$-0.06\,4632$				

Man hat also für die dritte Hypothese den Anfangswert 0.540205 — 0.064632 = 0.475573, der vom wahren Wert um mehr nur 384 Einheiten der letzten Stelle abweicht und mit der vierten Hypothese zum Ziel führt. —

Man kann auf diese Weise die Berechnung einer Hypothese ersparen, aber die Ermittelung von q erfordert kaum weniger Arbeit, als eine Hypothese.

118. Erste Verbesserung parabolischer Bahnen. Die durchgreifendste Kontrolle, die man nach Ermittelung einer Bahn anstellen kann, ist die Berechnung der geozentrischen Örter für die Beobachtungszeiten aus den erhaltenen Elementen, insbesondere die Berechnung des mittleren Ortes, der bei der Elementenbestimmung selbst nicht mitgewirkt hat. Besteht innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Rechnung Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Örtern, so hat die Bahnbestimmung ihre Aufgabe gelöst. Bei der Ermittelung einer parabolischen Bahn ist hierbei aber folgendes zu beachten. Dieselbe macht von der mittleren Beobachtung nur insofern Gebrauch, als diese auf einem bestimmten größten Kreis liegend angenommen wird, wogegen der Ort in diesem Kreis selbst in die Bahnbestimmung nicht eingeht. Man wird von dem berechneten Orte daher auch nur fordern dürfen, daß er in diesem größten Kreise liege, eine Nichtübereinstimmung der Koordinaten λ und β selbst aber noch nicht als Hinweis auf einen vorgefallenen Rechenfehler betrachten. Genügen die berechneten Koordinaten der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)} = \operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}, \qquad 1)$$

so erfüllt die gerechnete Bahn die an sie zu stellenden Bedingungen und ist rechnerisch korrekt, auch wenn die Differenzen $(\lambda_2)_B - (\lambda_2)_R = \Delta\lambda$ und $(\beta_2)_B - (\beta_2)_R = \Delta\beta$ größere Beträge erreichen. Man kann die Bedingung 1) für die Anwendung etwas bequemer gestalten, wenn man

$$\operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$

unter Voraussetzung eines konstanten J_2 differenziert; man erhält

$$\Delta\beta = \cos(\lambda_2 - L_2)\cos\beta_2^{\,2}\operatorname{tg} J_2 \cdot \Delta\lambda. \qquad 2)$$

Findet also zwischen $\Delta\beta$ und $\Delta\lambda$ diese Relation statt, so ist die Bahn, soweit die benutzten Beobachtungen zu entscheiden gestatten, korrekt. Ist dagegen eine Darstellung der mittleren Beobachtung auch in dieser Hinsicht nicht zu erzielen, so hat man folgende Möglichkeiten ins Auge zu fassen: 1. Es liegt ein Rechen- oder ein Beobachtungsfehler vor; erneute Kontrolle aller einschlägigen Werte ist das einzige Mittel, Aufschluß zu erhalten. 2. Die Bahn weicht merklich von einer Parabel ab; die definitive Entscheidung hierüber wird man meist erst nach Ausrechnung einer elliptischen Bahn und nach Vergleichung weiterer Beobachtungen treffen können. 3. Die parabolische Bahn selbst ist einer Verbesserung fähig, indem die bei der ersten Rechnung gemachten Vernachlässigungen, insbesondere die Ersetzung des Verhältnisses der Dreiecke durch das Verhältnis der Zwischenzeiten, zu starken Einfluß haben, um ohne Folge zu bleiben. Die in diesem Falle sich darbietenden Methoden der Bahnverbesserung *ohne Zuziehung neuer Beobachtungen* sind folgende.

A. Eine erste Methode, die man auch anwenden kann, wenn der mittlere Ort noch gut dargestellt wird, besteht darin, unter Benutzung der erlangten Elemente die in der ersten Näherung gemachten Vernachlässigungen zu beseitigen: Man korrigiert die Beobachtungszeiten für die Planetenaberration (Nr. 27) und bringt die Fixsternaberration, wenn man sie vorher bei der Reduktion vom scheinbaren Ort auf den Jahresanfang beseitigt hat, wieder in Anrechnung, d. h. man korrigiert die Beobachtungen nur um

$$\Delta\alpha = -(f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta)$$
$$\Delta\delta = -g\cos(G+\alpha).$$

Man berücksichtigt ferner mit Benutzung der geozentrischen Distanzen die Parallaxe und schafft die Sonnenbreiten weg (Nr. 34). Endlich verwendet man zur Berechnung von ϱ_3 die strenge Formel

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m$$
$$M = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\,\frac{\sin\beta_1\cos J_2 - \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_2)\sin J_2}{-\sin\beta_3\cos J_2 + \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}$$
$$m = \frac{R_1\sin J_2\sin(L_2 - L_1)}{-\sin\beta_3\cos J_2 + \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}\left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\right)$$

und nimmt darin

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{r_2 r_3\sin(v_3 - v_2)}{r_1 r_2\sin(v_2 - v_1)}.$$

Der hieraus hervorgehende Wert

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = (M) = M + \frac{m}{\varrho_1}$$

wird also statt M in den Formeln I.—V. (Seite 357) eingeführt, die im übrigen unverändert bleiben.

B. Will man nicht die ganze Bahnrechnung wiederholen, sondern nur brauchbare Elemente zur Ephemeridenrechnung rasch erhalten, so wird man sich darauf beschränken, M zu verbessern, was auf mannigfache Art geschehen kann. In M nämlich liegt in der Regel die Wurzel der mangelhaften Bahn, da die Ersetzung der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten unter Umständen recht fehlerhaft sein kann. Man kann einen besseren Wert von M sich schon vor Berechnung der Elemente verschaffen und wird diesen Weg einschlagen, wenn man mit ungünstig verteilten Beobachtungen zu tun hat, da dann von vornherein zu erwarten ist, daß man keine Darstellung des mittleren Ortes erhalten wird. Man kann zu dem Ende in Formel 6) (Seite 351) die vernachlässigten Glieder in $[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$ berechnen, sobald man r_1 und r_3 genähert kennt, zweckmäßiger aber noch bedient man sich des Verhältnisses Sektor durch Dreieck, für dessen Berechnung man das einfache Seite 198 auseinandergesetzte Verfahren oder die Taf. XXII[a] hat. Man wird dann in M setzen:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\cdot\frac{y_3}{y_1},$$

wo $y_1 = \frac{(23)}{[r_2 r_3]}$, $y_3 = \frac{(12)}{[r_1 r_2]}$ ist. Man braucht hierzu den mittleren Radiusvektor r_2, den man mit hinlänglicher Sicherheit aus (Seite 200)

$$(t_3 - t_1) r_2 = (t_3 - t_2) r_1 + (t_2 - t_1) r_3$$

oder einer anderen der dort angegebenen Formeln erhält. Übrigens kann man, wie Bessel (Ges. Abh. Bd. I, Seite 13) gezeigt hat, das Verhältnis $[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$ mit den äußeren Radienvektoren r_1 und r_3 allein berechnen, man macht von diesem eleganten Verfahren aber selten Gebrauch, da es umständlicher ist, als das angegebene. — Die Gibbssche Formel (Seite 181) gibt:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12 r_1^3}(r_1 r_3 + r_2 (r_3 - r_1))}{1 + \frac{1}{12 r_3^3}(r_1 r_3 - r_2 (r_3 - r_1))}$$

und kann ebenfalls für den vorliegenden Zweck zur Anwendung kommen.

C. Eine andere Art, M zu verbessern, setzt voraus, daß man Elemente und mittleren Ort gerechnet habe und besteht in folgendem von *Carlini* vorgeschlagenen Kunstgriff. Man bestimmt jenen Wert von M, durch den der mittlere Ort gut dargestellt wird, und zwar durch Änderung des Winkels J_2, von dem M, soweit der mittlere Ort in Betracht kommt, allein abhängt. Den geänderten Winkel findet man folgendermaßen. Es seien wie bisher $(\lambda_2)_B$, $(\beta_2)_B$ die beobachteten, $(\lambda_2)_R$, $(\beta_2)_R$ die gerechneten Koordinaten und

$$\operatorname{tg}(J_2)_B = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)};$$

dann rechne man:

$$\operatorname{tg}(J_2)_R = \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}$$

und nenne $\operatorname{tg}(J_2)^*$ jenen Wert, für den Identität der gerechneten und beobachteten Funktion $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda - L)}$ eintritt, wenn man M mit $(J_2)^*$ berechnet. $\operatorname{tg}(J_2)_R - \operatorname{tg}(J_2)_B$ wäre Null, wenn das richtige J_2 benutzt worden wäre, und es wird sich von Null um soviel unterscheiden, als man $\operatorname{tg}(J_2)_B$ ändern muß, um statt $\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)}$ zu erhalten $\frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_B}{\sin((\lambda_2)_B - L_2)}$, d. h. um $\operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)^*$; es wird also:

$$\operatorname{tg}(J_2)_R - \operatorname{tg}(J_2)_B = \operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)^*$$

oder:

$$\operatorname{tg}(J_2)^* = 2 \operatorname{tg}(J_2)_B - \operatorname{tg}(J_2)_R .$$

Bestimmt man hieraus $(J_2)^*$ und rechnet damit M und dann die Bahn, so kann man in der Mehrzahl der Fälle auf Darstellung des mittleren Ortes rechnen.

D. Die Änderung von M, welche nötig ist, um den mittleren Ort darzustellen, kann man auch auf einem rein empirischen Wege, durch die Methode der *Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen*, bestimmen. Man variiert hier M willkürlich und berechnet beide Male den mittleren Ort und seine Abweichung von der Beobachtung. Ergibt sich für

$$M = M_0 \qquad \text{Beob.} - \text{Rechnung} = \Delta\lambda_0 \text{ und } \Delta\beta_0$$

und für

$$M = M_1 \qquad \text{Beob.} - \text{Rechnung} = \Delta\lambda_1 \text{ und } \Delta\beta_1$$

und nennt man $M = \overline{M}$ jenen Wert, für den Beob. — Rechnung Null wird, so hat man nach der Regula falsi

$$(\overline{M} - M_0) : (M_1 - M_0) = -\Delta\lambda_0 : (\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_0)$$
$$(\overline{M} - M_0) : (M_1 - M_0) = -\Delta\beta_0 : (\Delta\beta_1 - \Delta\beta_0),$$

und wenn man

$$\overline{M} = M_0 + (M_1 - M_0)x$$

setzt, die beiden Werte:

$$x = \frac{\Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1} \quad \text{und} \quad x = \frac{\Delta\beta_0}{\Delta\beta_0 - \Delta\beta_1},$$

aus denen man den wahrscheinlichsten Wert von x bildet, am einfachsten durch Nehmen des arithmetischen Mittels.

Ist x nicht zu groß, so braucht man die Elemente, welche $\overline{M}$ entsprechen, nicht neu zu rechnen, sondern wird annehmen dürfen

$$\overline{E} = E_0 + (E_1 - E_0)x,$$

wenn E_0, E_1, $\overline{E}$ die den Hypothesen M_0, M_1, $\overline{M}$ entsprechenden Werte eines Elementes sind.

Wenn dieses letztere Verfahren nicht zu einer guten Darstellung des mittleren Ortes führt, so pflegt dieses ein sicheres Zeichen zu sein, daß eine parabolische Bahn den Beobachtungen überhaupt nicht genügt.

E. Die einer Variation von M entsprechende Änderung von ϱ_1 kann, wenn sie klein ist, auch durch Differenzialformeln ermittelt werden, die man leicht durch Differenziation der Eulerschen Gleichung erhält. *Oppolzer* hat in »Bahnbestimmung, Band I, Seite 302« eine solche Formel aufgestellt. Da ihre Berechnung nahezu ebensoviel Zeit erfordert, wie die direkte Berechnung von ϱ_1 mit dem variierten M, und ihr Gebrauch auf kleine Änderungen von M beschränkt ist, soll hier nicht darauf eingegangen werden. Die Berechnung der Elemente mit den variierten Werten von ϱ_4 und ϱ_3 und die Darstellung des mittleren Ortes durch sie kann ebenfalls differenziell geführt werden; *A. Leuschner* (Berlin, Diss. 1897) hat die hierzu nötigen Formeln abgeleitet; auch hier führt die direkte Rechnung fast ebenso rasch zum Ziele.

119. Beispiel einer parabolischen Bahnberechnung, wenn Näherungen vorliegen. Um auch das Verfahren zu erläutern, welches man einschlagen wird, wenn bereits eine Bahnbestimmung vorausgegangen ist, geben wir ein ausführliches Beispiel der Bahnberechnung des Kometen 1896 I (Perrine-Lamp). Zugrunde gelegt sind folgende drei rohe Beobachtungen:

				α app.	$\log p\Delta$	δ app.	$\log p\Delta$
1896 Febr. 15	$17^h 28^m 37^s$	M. Z.	Kiel	$19^h 26^m 44^s.29$	9.486_n	$-1^\circ\,1'56''.2$	0.857
» » 18	17 19 18	»	Straßburg	19 56 44.52	9.573_n	$+9\;33\;26.1$	0.792
» » 21	16 56 44	»	Göttingen	20 41 16.53	9.599_n	$+23\;0\;25.5$	0.786

Da aus der ersten Bahnbestimmung die genäherten geozentrischen Distanzen

$\log \varrho$	Aberr.-Zeit	Red. auf m. Z. Berlin
9.70 5618	$-4^m 13^s$	$+12^m 59^s$
9.63 3801	$-3\ 34$	$+22\ 30$
9.58 4178	$-3\ 11$	$+13\ 48$

ermittelt wurden, konnte die Aberration nach dem zweiten Verfahren in Nr. 27 berücksichtigt werden; mit log Lichtzeit = 2.69 767 ergaben sich die oben bereits angesetzten Aberrationszeiten. Wird gleichzeitig die Reduktion der Zeiten auf den Berliner Meridian mittels der oben ebenfalls angesetzten Längenunterschiede vorgenommen und dann in Bruchteile des Tages verwandelt, so ergeben sich die in der unten folgenden Zusammenstellung der Daten angesetzten Beobachtungszeiten. In der Reduktion der α app. und δ app. auf den Jahresanfang sind nunmehr die Präzession und Nutation mittels

$$\Delta\alpha = -(f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta), \quad \Delta\delta = -(g\cos(G+\alpha))$$

zu berücksichtigen (Nr. 28). Hier ergab sich

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Febr. 15	$-0^s.93$	$+5''.6$
» 18	-0.84	$+4.4$
» 21	-0.67	$+2.4$

Gleichzeitig wird die Parallaxe nach dem Verfahren Nr. 32 angebracht, wozu oben bereits die parallaktischen Faktoren angegeben wurden:

	Parallaxe	
	in α	in δ
Febr. 15	$-0^s.60$	$+14''.2$
» 18	-0.87	$+14.4$
» 21	-1.04	$+15.9$

Wir haben nun folgende Daten, die mit der Schiefe der Ekliptik für 1896.0 $\varepsilon = 23^\circ 27' 9''.9$ in die nebengesetzten Längen und Breiten verwandelt wurden:

M. Z. Berlin	α 1896.0	δ 1896.0	λ 1896.0	β 1896.0
1896 Febr. 15.73 430	$291^\circ 40' 41''.4$	$-1^\circ\ 1' 36''.4$	$293^\circ 15' 12''.8$	$+20^\circ 41' 31''.4$
» » 18.73 488	299 10 42.1	$+9\ 33\ 44.9$	303 35 42.0	$+29\ 40\ 25.4$
» » 21.71 344	310 18 42.3	$+23\ 0\ 43.8$	320 38 52.1	$+39\ 38\ 24.6$

Die Erdörter wurden für dieselben Zeiten aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert:

	L 1896.0	$\log R$	$B_\odot$	$\Delta\beta$
1896 Febr. 15.73 430	$147^\circ 3' 31''.7$	9.99 4855	$+0''.18$	$-0''.3$
» » 18.73 488	150 5 8.5	9.99 5130	$+0.45$	-0.9
» » 21.71 344	153 5 9.1	9.99 5412	$+0.56$	-1.1

und die Sonnenbreiten schließlich durch das Verfahren Nr. 34 mittels der $\Delta\beta$ beseitigt, die an obige β noch anzubringen sind. Die vollständigen Daten der Bahnbestimmung sind dann:

			λ 1896.0	β 1896.0	L 1896.0	$\log R$
1896	Febr.	15.73430	293° 15′ 12″.8	+ 20° 41′ 31″.1	147° 3′ 31″.7	9.994855
»	»	18.73488	303 35 42.0	+ 29 40 24.5	150 5 8.5	9.995150
»	»	21.71344	320 38 52.1	+ 39 38 23.5	153 5 9.1	9.995412

Wir rechnen nach dem (S. 366) unter A. angegebenen Verfahren, wozu aus der ersten Bahnbestimmung außer den oben bereits angegebenen ϱ folgende Resultate herangezogen wurden:

$$v_3 - v_2 = 6^\circ 2' 6''.3 \qquad v_2 - v_1 = 6^\circ 43' 20''.0$$
$$\log r_3 = 9.872228 \qquad \log r_1 = 9.828703$$

Die folgende Übersicht enthält nur die hauptsächlichsten Zwischenresultate.

$\operatorname{tg} J_2$	0.106318	f_1	9.885463_n
$\sin J_2$	9.896201	l_1	9.793566
$\cos J_2$	9.789883	f_3	9.993091_n
$\mathscr{S}$	9.881713	l_3	9.935870
$[r_2 r_3] : [r_1 r_2]$	9.996889	f	9.261700_n
M	9.878602	l	8.941592
m	5.7598_n		
$m : \varrho_1$	6.0542_n	$2k(t_3 - t_1)$	9.313250
(M)	9.878537		

Es wurden zwei Hypothesen mit $\log \varrho_1 = 9.705618$ und $\log \varrho_1 = 9.705518$ gerechnet und daraus $\log \varrho_1 = 9.705574$ ermittelt, was vollständige Übereinstimmung von $\log s_d = \log s_g = 0.237498$ ergab. Hieraus $\log \varrho_3 = 9.584111$ und dann die heliozentrischen Koordinaten:

l_1	171° 3′ 14″.6	l_3	158° 16′ 32″.3
b_1	+ 15 26 0.1	b_3	+ 19 11 2.1
r_1	9.828698	r_3	9.872234

und die Elemente der Bahnlage $i = 155^\circ 45' 26''.5$, $\Omega = 208^\circ 51' 56''.9$. Ferner

$$u_1 = 40^\circ 23' 59''.1 \qquad u_3 = 53^\circ 9' 29''.5$$

womit die Probe völlig stimmte. Ferner

$$v_1 = 42^\circ 2' 37''.8 \qquad v_3 = 54^\circ 48' 8''.2$$
$$\omega = 358\ 21\ 21.3 \qquad \log q = 9.768874.$$

Aus dem ersten Orte folgte T = 1896 Jan. 31.81360 und aus dem zweiten T = Jan. 31.81354, und es wurde angenommen: T = Jan. 31.81357. Die Berechnung des Ortes für die Zeit der mittleren Beobachtung ergab: $v_2 = 48^\circ 46' 0''.0$, $\log r_2 = 9.850024$.

$$(\lambda_2)_R = 303^\circ 35' 33''.6 \qquad (\beta_2)_R = + 29^\circ 40' 30''.8 \qquad \log \varrho_2 = 9.633758$$

also Beob. — Rechn. $\Delta\lambda = + 8''.4$, $\Delta\beta = - 6''.3$.

Diese Unterschiede erscheinen etwas groß; man überzeugt sich aber leicht, daß der gerechnete Ort sehr nahe in dem durch L_2 und J_2 bestimmten Kreis liegt; in der Tat gibt

$$\log \frac{\operatorname{tg}(\beta_2)_R}{\sin((\lambda_2)_R - L_2)} = 0.106314 \quad \text{gegen} \quad \log \operatorname{tg} J_2 = 0.106318;$$

diesen Unterschied muß man den unvermeidlichen Unsicherheiten der sechsstelligen Rechnung zuschreiben, so daß die Korrektheit der ganzen Rechnung außer Zweifel gestellt ist. Rechnet man aus der Formel 2) (Seite 365) $\Delta\beta$ aus $\Delta\lambda$, so ergibt sich $\Delta\beta = -7''.2$; der Unterschied von $0''.9$ gegen den obigen ist so gering, daß man ihn wohl als Beobachtungsfehler bei diesem wegen der schnellen Bewegung schwierig zu beobachtenden Objekt betrachten kann, also zu einer weiteren Verbesserung von M nicht Veranlassung nehmen wird.

120. Der Ausnahmefall. Die Gleichung 3) (Seite 350) verliert ihre Verwendbarkeit, wenn die drei größten Kreise, die wir vom mittleren Erdort nach den drei geozentrischen Örtern des Kometen gezogen haben, zusammenfallen, d. h. also, wenn die drei Örter in *einem* größten Kreise mit dem mittleren Erdort liegen. Es wird nämlich dann $J_1 = J_2 = J_3$ und M wird in jeder Form den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen und m den Faktor $\frac{1}{0}$ erhalten, der die Vernachlässigung von m verbietet auch bei den kleinsten Zwischenzeiten. In aller Strenge wird dies kaum jemals eintreten und kann jedenfalls vermieden werden, aber Fälle, wo *nahezu* das angegebene Verhalten eintritt, kommen vor und würden, auf die bisher angegebene Weise behandelt, offenbar unsichere, ja illusorische Resultate ergeben. Der Grund liegt darin, daß dann die beiden größten Kreise II 2 und 1 3 sich unter sehr spitzem Winkel schneiden, ihr Schnittpunkt g also, von dessen Lage auf der Strecke 1 3 alles abhängt, nur mit größter Unsicherheit bestimmt werden kann. Wird die Bahnbestimmung ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität unternommen, dann ist, wie wir gesehen haben (Nr. 100), beim Eintreten dieses Falles eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich. Wird aber, wie hier, von vornherein die Exzentrizität gleich 1 gesetzt, so ist *ein* Element weniger zu ermitteln und eine Bahnbestimmung ist möglich, da zur Ermittlung von 5 Elementen die gegebenen (im Grunde 5 unabhängige Koordinaten repräsentierenden) Stücke ausreichen. Es ist nämlich möglich, das Verhältnis M der äußeren geozentrischen Distanzen auch hier aufzustellen, welches bei der Parabel zur Bahnbestimmung genügt. Man muß nur die Gleichung 3) transformieren oder, was noch einfacher ist, man muß von einer anderen der früher aufgestellten Beziehungen zwischen ϱ_1 und ϱ_3 ausgehen. Die letzte Gleichung in 14[a]) (Seite 261) wird in Polarkoordinaten geschrieben, wenn wir gleichzeitig eine Drehung des Koordinatensystems um den beliebigen Winkel Π vornehmen:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3]\left(\cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\lambda_1 - \Pi) - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Pi)\right)\varrho_1 + \\
&\quad + [r_1 r_2]\left(\cos\beta_3 \sin\beta_2 \sin(\lambda_3 - \Pi) \sin\beta_3 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Pi)\right)\varrho_3 = \\
&= \{-[r_2 r_3] R_1 \sin(L_1 - \Pi) + [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - \Pi) - [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - \Pi)\} \sin\beta_2 .
\end{aligned}$$

Wird hier linkerhand, wie Seite 306

$$\begin{aligned} h_1 \sin(\lambda_2 - H_1) &= \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ h_1 \cos(\lambda_2 - H_1) &= \operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos(\lambda_3 - \lambda_2) \\ h_3 \sin(\lambda_2 - H_3) &= \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ h_3 \cos(\lambda_2 - H_3) &= -\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_1 + \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \qquad (a)$$

eingetragen und rechterhand das letzte Glied durch die Identität

$$[R_2 R_3] R_1 \sin(L_1 - \Pi) - [R_1 R_3] R_2 \sin(L_2 - \Pi) + [R_1 R_2] R_3 \sin(L_3 - \Pi) = 0$$

eliminiert, so erscheint:

$$[r_2 r_3] h_3 \sin(H_3 - \Pi) \cos\beta_1 \varrho_1 - [r_1 r_2] h_1 \sin(H_1 - \Pi) \cos\beta_3 \varrho_3 =$$
$$= [r_1 r_2] \left\{ \left(\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) R_1 \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{[R_1 R_3]}{[R_1 R_2]} - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} \right) R_2 \sin(L_2 - \Pi) \right\}.$$

Ersetzt man die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Reihenentwicklungen (Seite 177), so nimmt die rechte Seite dieser Gleichung die Gestalt an:

$$[r_1 r_2] \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} \left((\tau_3 - \tau_1) R_1 \sin(L_1 - \Pi) + (\tau_2 + \tau_3) R_2 \sin(L_2 - \Pi) \right) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$$

oder wenn

$$\begin{aligned} g \sin(G - L_2) &= -(\tau_3 - \tau_1) R_1 \sin(L_2 - L_1) \\ g \cos(G - L_2) &= +(\tau_3 - \tau_1) R_1 \cos(L_2 - L_1) + (\tau_2 + \tau_3) R_2 \end{aligned} \qquad (b)$$

gesetzt wird,

$$[r_1 r_2] \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} g \sin(G - \Pi) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right).$$

Die Beziehung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 kann man also, wenn noch

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$$

substituiert wird, so schreiben:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{h_3}{h_1} \frac{\sin(H_3 - \Pi)}{\sin(H_1 - \Pi)} \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \varrho_1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{6 \tau_3} \frac{g}{h_1} \frac{\sin(G - \Pi)}{\sin(H_1 - \Pi)} \frac{1}{\cos\beta_3} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

welches die von *E. Weiß* vorgeschlagene Form der Olbersschen Gleichung ist. Dieselbe ist allerdings etwas umständlicher zu berechnen als die früher angegebene, besitzt aber zwei wichtige Vorzüge. Man kann nämlich, indem man den willkürlichen Winkel Π gleich G setzt, die Größe m streng zum Verschwinden bringen, so daß die Olberssche Gleichung lautet:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{h_3}{h_1} \frac{\sin(H_3 - G)}{\sin(H_1 - G)} \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \varrho_1,$$

wo H_1, H_3, h_1, h_3, G aus (a) und (b) zu berechnen sind. Wie man aus (b) ersieht, ist G immer nahe gleich L_2. Setzt man direkt $G = L_2$, so erhält man die frühere Form, aber m erhält dann einen zwar kleinen, aber immerhin von Null verschiedenen Wert. Der andere Vorzug besteht darin, daß man eine Wahl des Winkels Π treffen kann, wodurch im Ausnahmefall die Form $\frac{0}{0}$ in M und m und bei Annäherung an denselben die Unsicherheit der Rechnung vermieden wird. Im Ausnahmefall werden H_1 und H_3 gleich L_2; man darf hier also Π nicht in der Nähe von L_2 wählen, also weder gleich H_1 oder H_3, noch gleich G machen, sondern man muß es so bestimmen,

dass $\sin(H_3 - \Pi)$ *und* $\sin(H_1 - \Pi)$ einen möglichst großen Betrag erreichen, damit die Faktoren

$$\frac{\sin(H_3-\Pi)}{\sin(H_1-\Pi)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(G-\Pi)}{\sin(H_1-\Pi)}$$

in M und m von der Form $\frac{0}{0}$ möglichst entfernt bleiben. Dies geschieht für

$$\tfrac{1}{2}(H_1 + H_3) - \Pi = 90^\circ,$$

da H_3 im Ausnahmefall stets in der Nähe von H_1 liegt. Die Olberssche Gleichung wird dann:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{h_3}{h_1}\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3}\varrho_1 - \frac{\tau_1\tau_2}{6\tau_3}\frac{g}{h_1}\frac{\cos\left((G - \frac{1}{2}(H_1+H_3)\right)}{\cos\frac{1}{2}(H_3-H_1)}\frac{1}{\cos\beta_3}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

Das zweite Glied rechts kann nun allerdings nicht mehr verschwinden, aber es bleibt eine kleine Größe erster Ordnung und man kann daher in erster Näherung setzen:

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{h_3}{h_1}\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3}\varrho_1, \tag{c}$$

womit wieder die gewöhnliche Form erreicht ist. Aus dem Lambertschen Satz von der Krümmung der Bahnen (Nr. 75) folgt unmittelbar, daß der Ausnahmefall nur eintreten kann, wenn der Komet zur Zeit der zweiten Beobachtung nahe in der Entfernung R_2 von der Sonne sich befindet. Es wird also im Ausnahmefall der Faktor

$$\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$$

wesentlich zur Verkleinerung von m beitragen und seine Vernachlässigung rechtfertigen.

121. Beispiel zum Ausnahmefall. Wir behandeln dieselbe Bahn, die Oppolzer nach einer anderen Methode berechnet hat, nämlich die des Kometen 1869 III, aus folgenden bereits mit allen Korrektionen versehenen Beobachtungen:

1869 M. Z. B.	λ 1869.0	β 1869.0	L 1869.0	$\log R$
Nov. 29.41785	351° 46′ 19.″9	+ 20° 25′ 9.″5	67° 44′ 44.″8	9.99 3829
» 34.42403	0 41 17.4	+ 19 48 37.9	72 49 40.2	9.99 3509
» 39.42904	10 8 37.2	+ 18 38 59.1	77 54 55.4	9.99 3228

Die Anwendung der Formeln I (Seite 357) ergibt hier:

J_1	159° 21′ 1.″4
J_2	159 16 11.6
J_3	159 12 0.5

Die drei Beobachtungen liegen also so nahe in einem größten Kreise mit dem mittleren Erdort, daß die Olberssche Gleichung in der ursprünglichen Form nicht anwendbar ist, da m nicht vernachlässigt werden dürfte. Wir rechnen daher die erste Näherung nach den Formeln (a) und (c):

$\cos\beta_1$	9.97 1816			$\cos\beta_3$	9.97 6575
$\operatorname{tg}\beta_1$	9.57 0870	$\operatorname{tg}\beta_2$	9.55 6579	$\operatorname{tg}\beta_3$	9.52 8279
$-\operatorname{cotg}\beta_2 . \operatorname{tg}\beta_1$	0.01 4291$_n$	$\lambda_2 - \lambda_1$	8° 54′ 57.″5	$\operatorname{cotg}\beta_2 \operatorname{tg}\beta_3$	9.97 1700
$\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.99 4721	$\lambda_3 - \lambda_2$	9 27 19.8	$-\cos(\lambda_3 - \lambda_2)$	9.99 4059$_n$
	8.66 3631				8.72 2900
$h_3 \sin(\lambda_2 - H_3)$	9.19 0291	$\lambda_2 - H_3$	106° 22′ 23.″2	$h_1 \sin(\lambda_2 - H_1)$	9.21 5588
$h_3 \cos(\lambda_2 - H_3)$	8.65 8352$_n$	$\lambda_2 - H_1$	106 46 4.9	$h_1 \cos(\lambda_2 - H_1)$	8.69 4600$_n$
$\sin(\lambda_2 - H_3)$	9.98 2021	H_3	254 18 54.2	$\sin(\lambda_2 - H_1)$	9.98 1130
$\operatorname{tg}(\lambda_2 - H_3)$	0.53 1939$_n$	H_1	253 55 12.5	$\operatorname{tg}(\lambda_2 - H_1)$	0.52 0988$_n$
h_3	9.20 8270	$h_3 : h_1$	9.97 3812	h_1	9.23 4458
$t_3 - t_2$	+ 5.00 501	$\cos\beta_1 : \cos\beta_3$	9.99 5241	$t_2 - t_1$	+5.00 618
	0.69 9404	$\tau_1 : \tau_3$	9.99 9911		0.69 9493
		M	9.96 8964		

Mit diesem Werte von M wurde bis zur Ermittelung genähert richtiger Werte von ϱ_1 und r_2 gerechnet; mit dem nach der zweiten Hypothese erhaltenen $\log r_2 = 0.0528$ ergab sich dann für

$$m = -\frac{\tau_1 \tau_2}{6\tau_3} \frac{g}{h_1} \frac{\cos\left(G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3)\right)}{\cos\frac{1}{2}(H_3 - H_1)} \frac{1}{\cos\beta_3} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

folgende Rechnung, zunächst nach (b)

τ_1	8.93 4985	$\frac{1}{2}(H_3 + H_1)$	254° 7′ 3.″3	$-\tau_1\tau_3 : 6\tau_3$	8.45 7826$_n$
τ_3	8.93 5074	$\frac{1}{2}(H_3 - H_1)$	0 11 50.8	$g : h_1$	0.17 1250
τ_2	9.23 6066			cos : cos	9.99 9892$_n$
$(\tau_3 - \tau_1)$	5.24	$G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3)$	178 42 35.7	$\sec\beta_3$	0.02 3425
$\tau_2 + \tau_3$	9.41 2170	$\cos(G - \frac{1}{2}(H_1 + H_3))$	9.99 9890$_n$	$(\ldots.)$	9.54 60
$L_2 - l_1$	5° 4′ 55.″4	$\cos\frac{1}{2}(H_3 - H_1)$	9.99 9998	m	8.19 84
sin »	8.94 7347	cos : cos	9.99 9892$_n$	ϱ_1	9.53 01
cos »	9.99 8289			$m : \varrho_1$	8.66 82
		$1 : R_2^3$	0.0195	M	9.96 8964
$g \sin(G - L_2)$	4.18$_n$	$1 : r_2^3$	9.8416	Add.	0.02 1200
$g \cos(G - L_2)$	9.40 5708	$(\ldots.)$	9.5460	(M)	9.99 0164
$G - L_2$	− 1.″2				
g	9.40 5708				
$g : h_1$	0.17 1250				
G	72° 49′ 39.″0				

Mit Benutzung von $\log \varrho_1 = 9.5301$ folgte daraus nach der Formel

$$\varrho_3 = \varrho_1 M + m = \varrho_1 \left(M + \frac{m}{\varrho_1}\right) = \varrho_1 (M)$$

ein verbesserter Wert (M), mit dem die Rechnung wiederholt und zu Ende geführt wurde.

Abschnitt XXIII.

Berechnung parabelnaher Bahnen.

122. Übergang von der Parabel auf Ellipse oder Hyperbel. Vom Standpunkte der Bahnbestimmung aus muß man die Kometenbahnen in drei Klassen unterscheiden: 1. parabolische Bahnen, bei denen die Beobachtungen keine Spur von Abweichung von der rein parabolischen Bewegung andeuten; 2. elliptische Bahnen mit mäßiger Exzentrizität, den sogenannten kurzperiodischen Kometen angehörend; 3. elliptische und hyperbolische Bahnen mit Exzentrizitäten, die nur wenig von 1 sich unterscheiden, sogenannte parabelnahe Bahnen, den Kometen von sehr langer Umlaufszeit und den hyperbolischen Kometen angehörend. Die Bahnberechnung der ersten Klasse wird nach der in Abschnitt XXII auseinandergesetzten Methode vollzogen und ist vermöge des Umstandes, daß ein Element weniger bestimmt zu werden braucht, dadurch charakterisiert, daß die Analyse auf *eine* Unbekannte basiert werden kann, sei es die eine geozentrische Distanz bei völlig unbekannten Bahnen oder sei es das Verhältnis der Distanzen M bei schon näherungsweise bekannten Bahnen. Die Bahnbestimmung der zweiten Klasse wird durch die gewöhnliche Methode (Abschnitt XIX) geleistet, bei der eine Voraussetzung über die Exzentrizität von vornherein nicht gemacht wird und die dadurch charakterisiert ist, daß *zwei* unbekannte Größen durch allmähliche Annäherung oder Hypothesenrechnung bestimmt werden, seien es nun die Größen P und Q bei noch unbekannten Bahnen oder die geozentrischen Distanzen für zwei Beobachtungen bei schon näherungsweise bekannten Bahnen. Diese Methode führt nun bei der dritten Klasse nicht zum Ziel, wenigstens nicht in praxi, da der geringe Unterschied der Exzentrizität von 1 sich mit Schärfe nicht ermitteln lässt. Es muß hierfür eine besondere Methode aufgestellt werden, zu deren Besprechung wir uns nun wenden. Man kann diese Methode von vornherein auf die Annahme basieren, daß Näherungen vorhanden sind, da eine parabolische Bahn in allen Fällen vorausgegangen ist. Häufig werden sogar die Abweichungen der Beobachtungen von der Parabel so klein sein, daß man mit Normalörtern operieren *muß*, um sie mit Sicherheit zu konstatieren, so daß eine vorausgegangene Näherung notwendige Grundlage des ganzen hier einzuschlagenden Verfahrens ist.

Die Methode*) besteht nun einfach darin, daß man statt der *zwei* geozentrischen Distanzen nur die *eine* als Unbekannte nimmt und als andere dasjenige Element einführt, welches der größten Unsicherheit unterworfen ist, nämlich die große Halbachse oder bequemer ihren reziproken Wert $\frac{1}{a}$. Aus den Koordinaten zweier Normalörter $\lambda_1\ \beta_1$, $\lambda_3\ \beta_3$, aus der zum ersten gehörigen geozentrischen Distanz ϱ_1 und aus $\frac{1}{a}$ lassen

*) *Hornstein*, Übergang von der Parabel zur Ellipse oder Hyperbel. Sitzungsberichte der Ak. der Wiss. Wien 1854. — *A. Marth*, Remarks on the determination of cometary orbits. Astr. Nachr. Band 65, Seite 337, 1865.

sich unter Hinzuziehung des allgemeinen Lambertschen Satzes die Elemente einer Bahn ableiten, mit denen der dritte Normalort oder, wie gleich allgemeiner gesagt werden kann, *alle* übrigen Normalörter verglichen werden können. Variierte Werte von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ führen zu geänderten Elementen und daraus gerechneten Örtern; die Vergleichung der beobachteten Örter mit diesen liefert Bedingungsgleichungen zur Bestimmung derjenigen Variationen von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$, welche die beste Übereinstimmung (im Falle *einer* Position die genaue Darstellung) zwischen Beobachtung und Rechnung herbeiführen. Mit diesen Werten von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ werden schließlich die definitiven Elemente berechnet.

Um diesen Gedankengang in Formeln zu übertragen, ist zuerst zu zeigen, wie aus λ_1 β_1, λ_3 β_3, ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ die Elemente der Bahn berechnet werden. Man muß die fehlende Distanz ϱ_3 mittelst des Lambertschen Satzes ermitteln, den wir in der bequemen in Nr. 66 entwickelten Form annehmen. Für den ersten Radiusvektor r_1 hat man:

$$\begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \lambda_1) &= \varrho_1 \cos\beta_1 + R_1 \cos(L_1 - \lambda_1) \\ r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \lambda_1) &= R_1 \sin(L_1 - \lambda_1) \\ r_1 \sin b_1 &= \varrho_1 \sin\beta_1 . \end{aligned} \qquad 1)$$

Den Radiusvektor r_3 und die Sehne s muß man durch ϱ_3 ausdrücken. Aus

$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2 R_3 \varrho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned} &\cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) = \cos {}^1\!F_3, \qquad {}^1\!F_3 < 180^\circ \\ &R_3 \cos {}^1\!F_3 = F_3, \qquad R_3 \sin {}^1\!F_3 = G_3 \\ &\operatorname{tg}\Theta_3 = \frac{\varrho_3 + F_3}{G_3}, \qquad r_3 = G_3 \sec\Theta_3 . \end{aligned} \qquad 2)$$

Ferner hat man nach den Entwickelungen Seite 353 mit Benutzung obiger Gl. 1)

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - r_1 \cos b_1 \cos l_1 + R_3 \cos L_3 \\ \eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - r_1 \cos b_1 \sin l_1 + R_3 \sin L_3 \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_3 \sin\beta_3 - r_1 \sin b_1 . \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der Form:

$$\begin{aligned} \xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 + \sigma \cos\nu \cos K \\ \eta_3 - \eta_1 + Y_3 - Y_1 &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 + \sigma \cos\nu \sin K \\ \zeta_3 - \zeta_1 &= \varrho_3 \sin\beta_3 + \sigma \sin\nu , \end{aligned}$$

so sind die Hilfsgrößen σ, ν, K durch

$$\begin{aligned} \sigma \cos\nu \cos(K - l_1) &= R_3 \cos(L_3 - l_1) - r_1 \cos b_1 \\ \sigma \cos\nu \sin(K - l_1) &= R_3 \sin(L_3 - l_1) \\ \sigma \sin\nu &= - r_1 \sin b_1 \end{aligned} \qquad 3)$$

gegeben und für die Sehne s folgt:

$$s^2 = \varrho_3^2 + \sigma^2 + 2\varrho_3\sigma \left(\sin\beta_3 \sin\nu + \cos\beta_3 \cos\nu \cos(K - \lambda_3)\right)$$

oder bequemer für die Rechnung:

$$\begin{aligned} \cos\Phi &= \sin\beta_3 \sin\nu + \cos\beta_3 \cos\nu \cos(K-\lambda_3) \qquad \Phi < 180^\circ \\ \sigma\cos\Phi &= F, \qquad \sigma\sin\Phi = G, \\ \operatorname{tg}\Theta &= \frac{\varrho_3 + F}{G}, \qquad s = G\sec\Theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ entspricht derjenige Wert von ϱ_3, welcher die Befriedigung der Lambertschen Gleichung

$$\begin{aligned} 6k(t_3 - t_1) &= (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\varepsilon \mp (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\delta \\ &[Q_\varepsilon \text{ und } Q_\delta \text{ mit den Argumenten} \\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 &= \frac{r_1 + r_3 + s}{4a}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{r_1 + r_3 - s}{4a} \\ &\text{aus Taf. XXIII}] \end{aligned} \tag{5}$$

herbeiführt. Man wird mit einem stets vorhandenen Näherungswert von ϱ_3, etwa $\varrho_3{}^0$, r_3 und s aus 2) und 4) berechnen und mit dem aus 1) folgenden r_1 in 5) eintragen; stimmt

$$\mathrm{T} = \frac{1}{6k}\left((r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\varepsilon \mp (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}\, Q_\delta\right)$$

mit dem beobachteten $t_3 - t_1$ überein, so ist mit $\varrho_3{}^0$ der richtige Wert getroffen. Findet man die Abweichung

$$\Delta t = t_3 - t_1 - \mathrm{T},$$

so muß man $\varrho_3{}^0$ korrigieren, wofür sich leicht ein Ausdruck aufstellen läßt. Die Differenziation der Ausdrücke von r_3, s und $t_3 - t_1$ gibt:

$$\Delta r_3 = \frac{1}{r_3}(\varrho_3 + R_3\cos{}^1\!F_3)\,\Delta\varrho_3$$

$$\Delta s = \frac{1}{s}(\varrho_3 + \sigma\cos\Phi)\,\Delta\varrho_3$$

$$\Delta t = \frac{1}{4k}\left(\sqrt{r_1 + r_3 + s}\; Q_\varepsilon\,(\Delta r_3 + \Delta s) \mp \sqrt{r_1 + r_3 - s}\; Q_\delta\,(\Delta r_3 - \Delta s)\right)$$

also:

$$\Delta\varrho_3 = \frac{4k\,\Delta t}{(Q_\varepsilon\sqrt{r_1+r_3+s} \mp Q_\delta\sqrt{r_1+r_3-s})\frac{1}{r_3}(\varrho_3+R_3\cos{}^1\!F_3) + (Q_\varepsilon\sqrt{r_1+r_3+s} \pm Q_\delta\sqrt{r_1+r_3-s})\frac{1}{s}(\varrho_3+\sigma\cos\Phi)}. \tag{6}$$

Es gilt hier ebenso wie in 5) das obere oder untere Zeichen, je nachdem die heliozentrische Bewegung kleiner oder größer als 180° ist. Mit $\varrho_3{}^0 + \Delta\varrho_3$ wird die Rechnung wiederholt und dies so lange fortgesetzt, bis der Lambertschen Gleichung Genüge getan ist.

Ist der den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ entsprechende Wert von ϱ_3 gefunden, so werden r_3, l_3, b_3 durch

$$\begin{aligned} r_3\cos b_3\cos(l_3 - \lambda_3) &= R_3\cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3\cos\beta_3 \\ r_3\cos b_3\sin(l_3 - \lambda_3) &= R_3\sin(L_3 - \lambda_3) \\ r_3\sin b_3 &= \varrho_3\sin\beta \end{aligned} \tag{7}$$

bestimmt und dann nach den Nrn. 68 und 69 die Elemente. Mit diesen Elementen berechnet man nach Nr. 64 und für die Zeiten der aufgestellten Normalörter die geozentrischen Koordinaten und vergleicht sie mit den beobachteten. Die Unterschiede lassen dann erkennen, wie weit mit den Annahmen ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ die Beobachtungen vereinbar sind. Die *wahren* Werte von ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ und damit die wahren Elemente erhält man durch die bei der Variation der geozentrischen Distanzen auseinandergesetzte Methode (Nr. 98) d. h. man muß drei Hypothesen über ϱ_1 und $\frac{1}{a}$ machen und die daraus hervorgehenden Elemente mit den Normalörtern vergleichen. Hat man für die drei Hypothesen die

	angenommenen Werte von		die entsprechenden berechneten geoz. Örter für die Zeit eines Normalortes t_i	
	ϱ	$\frac{1}{a}$		
Hyp. I:	ϱ_0	$\frac{1}{a_0}$	λ_i^{I}	β_i^{I}
» II:	$\varrho_0 + \Delta\varrho$	$\frac{1}{a_0}$	λ_i^{II}	β_i^{II}
» III:	ϱ_0	$\frac{1}{a_0} + \Delta\frac{1}{a}$	λ_i^{III}	β_i^{III}

und ist λ_i β_i der beobachtete Normalort, so hat man die Gleichungen

$$(\lambda_i^{\mathrm{II}} - \lambda_i^{\mathrm{I}})\, x + (\lambda_i^{\mathrm{III}} - \lambda_i^{\mathrm{I}})\, y = \lambda_i - \lambda_i^{\mathrm{I}}$$
$$(\beta_i^{\mathrm{II}} - \beta_i^{\mathrm{I}})\, x + (\beta_i^{\mathrm{III}} - \beta_i^{\mathrm{I}})\, y = \beta_i - \beta_i^{\mathrm{I}}$$

und die daraus hervorgehenden Werte von x und y führen zu den wahren Werten:

$$\varrho_0 + x \cdot \Delta\varrho \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_0} + y \cdot \Delta\frac{1}{a}.$$

Ein Normalort genügt zur Bestimmung von x und y; in der Regel aber hat man in den Fällen, wo man von dieser Methode Gebrauch macht, eine ganze Reihe von Normalörtern zur Verfügung. Jeder derselben liefert dann ein Gleichungspaar für x und y, und die Werte von x und y sind durch Ausgleichungsrechnung zu bestimmen.

Abschnitt XXIV.

Bestimmung einer Kreisbahn.

123. Berechnung einer Kreisbahn; erste Methode. Wie es unter allen Umständen vorteilhaft ist, der Berechnung einer elliptischen Kometenbahn die Berechnung einer Parabel vorausgehen zu lassen, so empfiehlt es sich häufig, für einen neuentdeckten Planeten mit einer Kreisbahn zu beginnen. Man erreicht dadurch die Möglichkeit, rasch eine Ephemeride zur Weiterverfolgung herstellen zu können und gewinnt einen Einblick in die Bahnlage, die für die Wahl der Methode bei der genaueren Rechnung oft maßgebend ist; auch die Hypothesenrechnung wird durch die Kenntnis der Kreisbahn erleichtert und die genäherte Berücksichtigung der Aberration und Parallaxe bequem ermöglicht.

Die Kreisbahn ist bestimmt durch den Radius a, durch die Stücke der Bahnlage Ω und i und durch den Ort des Planeten in der Bahn für eine bestimmte Zeit, wozu in der Regel das Argument der Breite u_0 genommen wird. Es sind also nur *vier* Stücke zu ermitteln, Exzentrizität und Länge des Perihels fallen weg; hierzu braucht man vier Beobachtungsdaten, als welche sich Länge und Breite für zwei Zeiten darbieten. Wir bezeichnen sie mit

Zeit	Geoz. Länge	Geoz. Breite
t_1	λ_1	β_1
t_2	λ_2	β_2

und nehmen außerdem die heliozentrischen Längen und Radienvektoren der Erde für dieselben Zeiten als bekannt an:

Zeit	Helioz. Länge der Erde	Radiusvektor
t_1	L_1	R_1
t_2	L_2	R_2

Um die Bezeichnung gleich vollständig einzuführen, nennen wir die:

Zeit	Helioz. Länge	Helioz. Breite	Arg. der Breite	Distanz von der Erde
t_1	l_1	b_1	u_1	ϱ_1
t_2	l_2	b_2	u_2	ϱ_2

Dann hat man

$$\begin{aligned}
\text{für die Zeit } t_1\text{:}\quad & a\cos b_1\cos l_1 = \varrho_1\cos\beta_1\cos\lambda_1 + R_1\cos L_1\\
& a\cos b_1\sin l_1 = \varrho_1\cos\beta_1\sin\lambda_1 + R_1\sin L_1 \qquad 1)\\
& a\cos b_1 \qquad\quad = \varrho_1\sin\beta_1\,,\\
\text{für die Zeit } t_2\text{:}\quad & a\cos b_2\cos l_2 = \varrho_2\cos\beta_2\cos\lambda_2 + R_2\cos L_2\\
& a\cos b_2\sin l_2 = \varrho_2\cos\beta_2\sin\lambda_2 + R_2\sin L_2 \qquad 2)\\
& a\sin b_2 \qquad\quad = \varrho_2\sin\beta_2\,,
\end{aligned}$$

und wenn diese Gleichungen quadriert und addiert werden:

$$\begin{aligned} a^2 &= \varrho_1^2 + R_1^2 + 2 R_1 \varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \\ a^2 &= \varrho_2^2 + R_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2), \end{aligned} \qquad 3)$$

woraus:

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + R_1^2 - R_2^2 + 2 R_1 \varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) - 2 R_2 \varrho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) = 0. \qquad 3^a)$$

Hierin sind alle Größen bekannt mit Ausnahme von ϱ_1 und ϱ_2; die Gleichung gibt also ϱ_2, sobald man ϱ_1 als bekannt annimmt.

Rechnet man nun mit einer bestimmten Hypothese für ϱ_1 aus $3^a)$ ϱ_2 und dann aus 1) und 2) a, l_1, b_1, l_2, b_2, so kann man damit auch $u_2 - u_1$ finden; in der Tat gibt das Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik und den beiden heliozentrischen Örtern:

$$\cos(u_2 - u_1) = \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos(l_2 - l_1),$$

eine Gleichung, die man für den Gebrauch noch umformen muß, da $u_2 - u_1$ in der Regel klein ist. Setzt man darin

$$\begin{aligned} \sin b_1 \sin b_2 &= \tfrac{1}{2}\cos(b_2 - b_1) - \tfrac{1}{2}\cos(b_2 + b_1) \\ \cos b_1 \cos b_2 &= \tfrac{1}{2}\cos(b_2 - b_1) + \tfrac{1}{2}\cos(b_2 + b_1) \end{aligned}$$

und subtrahiert sie dann von

$$1 = \cos\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2,$$

so erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 = \cos\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(b_2 - b_1)^2 + \cos\tfrac{1}{2}(b_2 + b_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(l_2 - l_1)^2. \qquad 4)$$

Für $u_2 - u_1$ kann man aber neben diesem rein geometrischen Wert auch einen aus der Bewegung folgenden aufstellen; es ist, da die Bewegung im Kreise gleichförmig ist und mit der Geschwindigkeit $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ erfolgt:

$$u_2 - u_1 = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1). \qquad 5)$$

Stimmen die aus 4) und 5) hervorgegangenen Werte von $u_2 - u_1$ überein, so ist mit der Hypothese für ϱ_1 das Richtige getroffen; ist dies nicht der Fall, so muß die Hypothese variiert und dies so lange fortgesetzt werden, bis Übereinstimmung erzielt ist. Hierbei ist die Anwendung der regula falsi von Nutzen; diese nimmt an, daß eine Funktion sich proportional dem Argument ändert; nimmt man hier als Funktion den Unterschied der aus 4) und 5) hervorgehenden Werte von $u_2 - u_1$, als Argument ϱ und setzt für

$\varrho = \varrho_0$	den Unterschied der	$u_2 - u_1$	p
$\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$	» »	» $u_2 - u_1$	$p - \Delta p$
$\varrho = \varrho_0 + \xi$	» »	» $u_2 - u_1$	0,

so daß also $\varrho_0 + \xi$ der gesuchte Wert ist, so wird

$$\Delta\varrho : \xi = \Delta p : p$$

oder:

$$\xi = \frac{p \cdot \Delta\varrho}{\Delta p}.$$

Ist der richtige Wert von ϱ_1 und damit von a und den heliozentrischen Koordinaten ermittelt, dann ergeben sich die übrigen Elemente leicht wie folgt. Es ist:

$$\begin{array}{rl|rl} \cos i \sin u_1 &= \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega) & \cos i \sin u_2 &= \cos b_2 \sin(l_2 - \Omega) \\ \cos u_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega) & \cos u_2 &= \cos b_2 \cos(l_2 - \Omega) \\ \sin i \sin u_1 &= \sin b_1 & \sin i \sin u_2 &= \sin b_2 . \end{array} \qquad 6)$$

Wird die bekannte Größe $u_2 - u_1 = \sigma$ gesetzt, womit $u_2 = u_1 + \sigma$ wird, so ergeben die beiden zuletzt angesetzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin i \sin u_1 &= \sin b_1 \\ \sin i \sin(u_1 + \sigma) &= \sin b_2 \end{aligned}$$

oder durch Addition bez. Subtraktion

$$\begin{aligned} \sin i \sin(u_1 + \tfrac{1}{2}\sigma) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b_2 + b_1)\cos\frac{1}{2}(b_2 - b_1)}{\cos\frac{1}{2}\sigma} \\ \sin i \cos(u_1 + \tfrac{1}{2}\sigma) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b_2 + b_1)\sin\frac{1}{2}(b_2 - b_1)}{\sin\frac{1}{2}\sigma} . \end{aligned} \qquad 7)$$

Hieraus wird i und u_1 gefunden, worauf die zwei ersten Gleichungen beider Gruppen 6) den Knoten Ω ergeben. Natürlich kann man auch irgend eines der in Nr. 69 angegebenen Verfahren anwenden.

Statt bei der Hypothesenrechnung von ϱ_1 auszugehen, nimmt man besser a als Ausgangsgröße und rechnet daraus nach 3) ϱ_1 und ϱ_2, was bequemer ist, als die Auflösung von 3[a]), besonders wenn man folgende Umformung von 3) vornimmt. Nennt man in dem Dreieck Sonne-Erde-Planet den Winkel an letzterem x und den Außenwinkel an der Erde δ, so hat man zunächst

$$a^2 = \varrho^2 + R^2 + 2R\varrho\cos\delta ,$$

also durch Vergleich mit 3)

$$\cos\beta\cos(\lambda - L) = \cos\delta ;$$

weiter aber:

$$a = \frac{R\sin\delta}{\sin x} , \qquad \varrho = \frac{R\sin(\delta - x)}{\sin x} , \qquad 8)$$

die nun 3) vollständig ersetzen. Rechnet man mit einer Annahme für a:

$$\sin x_1 = \frac{R_1\sin\delta_1}{a} , \qquad \sin x_2 = \frac{R_2\sin\delta_2}{a}$$

und dann

$$\varrho_1 = \frac{R_1\sin(\delta_1 - x_1)}{\sin x_1} , \qquad \varrho_2 = \frac{R_2\sin(\delta_2 - x_2)}{\sin x_2} ,$$

worin

$$\cos\delta_1 = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1) , \qquad \cos\delta_2 = \cos\beta_2\cos(\lambda_2 - L_2)$$
$$\delta_1 \text{ und } \delta_2 < 180^\circ ,$$

so führen 1) und 2) zu l_1, b_1, l_2, b_2, womit $u_2 - u_1$ durch 4) erhalten wird. Aber auch diese Gleichung läßt sich noch durch eine geeignetere ersetzen, was uns zur Gaußschen Methode führt.

124. Bestimmung einer Kreisbahn. Gaußsche Methode. Wenn man auf der Sphäre die heliozentrischen Örter der Erde: E, und des Planeten: P durch größte Kreise EP verbindet, so liegen auf diesen auch die Punkte G, welche den geozentrischen Richtungen des Planeten entsprechen, d. h. die Punkte, wo die zu den Richtungen EP durch S gezogenen Parallelen die Sphäre schneiden. Die Lage der größten Kreise EPG kann also durch die gemessenen Koordinaten bestimmt werden und gleichzeitig die schon vorhin eingeführten Winkel δ, die dem Bogen EG der Sphäre entsprechen. Man erhält, wenn die Breitenkreise durch G gezogen und γ die Neigungen der genannten größten Kreise gegen die Ekliptik genannt werden:

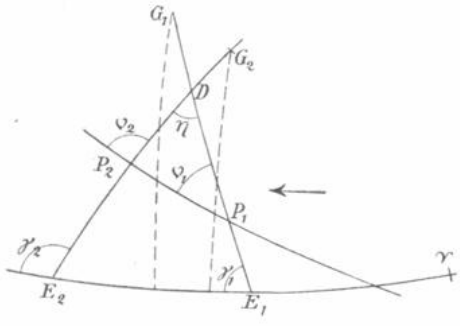


Fig. 54.

$$\begin{aligned} \sin\delta_1 \sin\gamma_1 &= \sin\beta_1 \\ \sin\delta_1 \cos\gamma_1 &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\delta_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \sin\delta_2 \sin\gamma_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\delta_2 \cos\gamma_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\delta_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \end{aligned} \right. \qquad 9)$$

Hierin können δ_1 und δ_2 kleiner als 180° angenommen werden.

Nennt man D den Schnittpunkt der größten Kreise E_1G_1 und E_2G_2 und bezeichnet den Winkel bei D im sphärischen Dreieck E_1DE_2 mit η und die Seiten E_1D und E_2D mit φ_1 und φ_2, so ergibt die Anwendung der Gaußschen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) . \end{aligned} \qquad 10)$$

Hieraus wird η, φ_1 und φ_2 gefunden. Die vorhin eingeführten Winkel $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind identisch mit den Bogen P_1G_1 und P_2G_2; man hat also:

$$P_1D = \varkappa_1 = \varphi_1 + \varkappa_1 - \delta_1 , \qquad P_2D = \varkappa_2 = \varphi_2 + \varkappa_2 - \delta_2 \qquad 11)$$

und daher im Dreieck P_1P_2D, wo der Bogen P_1P_2 wieder mit $\sigma = u_2 - u_1$ bezeichnet werden möge:

$$\cos\sigma = \cos\varkappa_1 \cos\varkappa_2 + \sin\varkappa_1 \sin\varkappa_2 \cos\eta ,$$

oder wie oben umgeformt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 + \varkappa_1)^2 . \qquad 12)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_1 - \delta_1 = \psi_1 , \qquad \varphi_2 - \delta_2 = \psi_2 ,$$

so bestehen die zur Hypothesenrechnung durchzurechnenden Formeln in folgenden:

$$\begin{aligned}
\sin x_1 &= \frac{R_1 \sin\delta_1}{a}, \qquad \sin x_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{a} \\
x_1 &= \psi_1 + x_1, \qquad x_2 = \psi_2 + x_2 \\
\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 &= \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)^2 \\
\sigma &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Ermittlung der übrigen Elemente kann entweder wie bei der vorigen Methode vorgenommen werden, was der kürzere Weg ist, oder eleganter in folgender Weise. Nennt man die Neigungen der größten Kreise $E_1 G_1$ und $E_2 G_2$ gegen die Bahn ν_1 und ν_2, so liefert das Dreieck $P_1 P_2 D$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1) &= \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\
\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1) &= \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \\
\cos\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) &= \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\
\cos\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) &= \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{14}$$

und somit ν_1, ν_2, und σ, welch letzteres mit dem bereits ermittelten Wert übereinstimmen muß. Dann geben schließlich die Dreiecke zwischen dem Knoten und $P_1 E_1$ bez. $P_2 E_2$:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(u_1 + (L_1 - \Omega)) &= \sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \nu_1) \\
\sin\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(u_1 + (L_1 - \Omega)) &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \nu_1) \\
\cos\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - (L_1 - \Omega)) &= \sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \nu_1) \\
\cos\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(u_1 - (L_1 - \Omega)) &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta_1 - x_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \nu_1)
\end{aligned} \tag{15}$$

und entsprechende Formeln für den zweiten Ort. Hieraus wird i, u, Ω bez. i, u_2, Ω gefunden, wodurch neue Kontrollen erhalten werden; $u_2 - u_1 = \sigma$ gibt eine Schlußprüfung.

Es ist noch anzuführen, daß man die Gl. 1) und 2) (Seite 379) für die Rechnung zweckmäßiger so schreibt:

$$\begin{aligned}
a\cos b \cos(l - L) &= \varrho \cos\beta \cos(\lambda - L) + R \\
a\cos b \sin(l - L) &= \varrho \cos\beta \sin(\lambda - L) \\
a \sin b &= \varrho \sin\beta
\end{aligned}$$

oder auch, wenn

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\sin(\delta - x)}{\sin\delta}, \qquad \frac{R}{a} = \frac{\sin x}{\sin\delta}$$

gesetzt und 9) beachtet wird:

$$\begin{aligned}
\cos b \cos(l - L) &= \cos(\delta - x) \\
\cos b \sin(l - L) &= \cos\gamma \sin(\delta - x) \\
\sin b &= \sin\gamma \sin(\delta - x),
\end{aligned}$$

Gleichungen, die man auch direkt aus der Fig. 54 ableiten kann.

125. Übersicht der Formeln für Berechnung einer Kreisbahn. Wir stellen im nachfolgenden diejenigen Formeln aus den beiden Methoden zusammen, die sich bei langjährigem Gebrauch am besten bewährt haben.

Daten:

	Des Planeten		Der Erde	
	Länge	Breite	Länge	Radiusvektor
t_1	λ_1	β_1	L_1	R_1
t_2	λ_2	β_2	L_2	R_2

I.
$$\begin{aligned} \sin\delta_1 \sin\gamma_1 &= \sin\beta_1 \\ \sin\delta_1 \cos\gamma_1 &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ \cos\delta_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\delta_2 \sin\gamma_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\delta_2 \cos\gamma_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\delta_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \end{aligned}$$

δ_1 und $\delta_2 < 180^\circ$.

II.
$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \\ \cos\tfrac{1}{2}\eta \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos\tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos\tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned}$$

$$\varphi_1 - \delta_1 = \psi_1, \qquad \varphi_2 - \delta_2 = \psi_2.$$

III. Hypothesenrechnung.

$$\sin\varkappa_1 = \frac{R_1 \sin\delta_1}{a}, \qquad \sin\varkappa_2 = \frac{R_2 \sin\delta_2}{a}$$

$$\varkappa_1 = \psi_1 + \varkappa_1, \qquad \varkappa_2 = \psi_2 + \varkappa_2$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 + \sin\tfrac{1}{2}\eta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varkappa_2 + \varkappa_1)^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{k'}{2a^{\frac{3}{2}}}(t_2 - t_1), \qquad \log k' = 1.77\,186 \text{ (in Bogenminuten)}.$$

IV.
$$\varrho_1 = \frac{R_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1)}{\sin\varkappa_1}, \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2)}{\sin\varkappa_2}$$

$$\begin{aligned} \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) &= \cos\gamma_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1) \\ \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) &= \cos(\delta_1 - \varkappa_1) \\ \sin b_1 &= \sin\gamma_1 \sin(\delta_1 - \varkappa_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) &= \cos\gamma_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2) \\ \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) &= \cos(\delta_2 - \varkappa_2) \\ \sin b_2 &= \sin\gamma_2 \sin(\delta_2 - \varkappa_2). \end{aligned}$$

V.
$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u_1 &= \operatorname{tg}(l_1 - \Omega) \sec i \\ \operatorname{tg} u_2 &= \operatorname{tg}(l_2 - \Omega) \sec i \end{aligned} \qquad u \text{ im Quadranten von } l - \Omega$$

Kontrolle: $u_2 - u_1 = \sigma$.

VI.
$$t_1^0 = t_1 - \varrho_1 A, \qquad t_2^0 = t_2 - \varrho_2 A$$
$\log A$ 7.76118_{-10} in Einheiten des Tages.
$$\mu = \frac{u_2 - u_1}{t_2^0 - t_1^0} = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3.55001$$
$$u_0 = u_1 + (t_0 - t_1^0)\mu = u_2 + (t_0 - t_2^0)\mu .$$

Ephemeride:
$$u = u_0 + (t - t_0)\mu$$
$$\varrho \cos\delta \cos\alpha = a \sin a \sin(A + u) + X$$
$$\varrho \cos\delta \sin\alpha = a \sin b \sin(B + u) + Y$$
$$\varrho \sin\delta = a \sin c \sin(C + u) + Z .$$

126. Beispiel einer Kreisbahn. Im folgenden ist die Berechnung der Kreisbahn mitgeteilt, die für den Planeten 1901 GL bald nach seiner Entdeckung ausgeführt wurde. Zugrunde liegen zwei Heidelberger photographische Aufnahmen (A. N. Bd. 156, S. 30, 95). Die Hypothesenrechnung ist in das Schema nicht aufgenommen, da man sie am besten auf einem Nebenblatt ausführt. Man beginnt bei einem kleinen Planeten am besten mit $\log a = 0.40000$ und variiert je nach der Differenz um 2000—5000 Einheiten der fünften Stelle in $\log a$. Im vorliegenden Fall ergab die

I. Hyp. $\log a = 0.40000$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2} = -0.'89$

II. Hyp. $\log a = 0.42000$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2} = +0.'54$

$\Delta \log a = 0.02$, $p = -0.89$, $\Delta p = -1.43$

$\xi = +0.01244$

III. Hyp. $\log a = 0.41244$ . . . . . $\Delta\frac{\sigma}{2}$ $+0.'02$

$\Delta \log a = 0.01244$, $p = -0.89$, $\Delta p = -0.91$

$\xi = +0.01217$.

Es wurde daher $\log a = 0.41217$ als richtige Entfernung angenommen. Die vollständige Durchrechnung dieser letzten Hypothese sei hier angeführt:

$a^{\frac{3}{2}}$	0.61825	$\sin x_1$	9.07180	$\sin x_2$	8.87540	$\cos\frac{1}{2}\iota^2$	9.83888	$\sin\frac{1}{2}\iota^2$	9.49130
$\frac{k'(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$	2.29747	x_1	6°46′.52	x_2	4°18′.28	$\sin\frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2$	6.72930	$\sin\frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2$	7.17350
							6.56818		6.66480
σ	3°18′.37	x_1	+3°32′.40	x_2	+0°53′.17		6.92020		
$\frac{1}{2}\sigma$	1°39′.18	$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$	−1°19′.61	$\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$	+2°12′.78	$\sin\frac{1}{2}\sigma$	8.46010	$\frac{1}{2}\sigma$	1°39′.18

Kreisbahn. Planet [1901 GL] = (480).

		1901					
	t_1	Mai 24.55 243		t_2	Mai 38.47 951	$t_2 - t_1$	1.14 386
1901.0	λ_1	258° 4.′20		λ_2	254° 43.′90	$k'(t_2 - t_1)$	2.91 572
1901.0	L_1	243 5. 46		L_2	256 25. 84.		
	R_1	0.00 565		R_2	0.00 654		
	$\sin \beta_1$	9.20 234		$\sin \beta_2$	9.27 593	$\frac{1}{2}(L_2 - L_1)$	6° 40.′19
	$\cos$ »	9.99 442		$\cos$ »	9.99 212	$\frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$	65 22.58
	tg »	9.20 793		tg »	9.28 381	$\frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)$	33 23.51
	$(\lambda_1 - L_1)$	+ 14° 58.′74		$(\lambda_2 - L_2)$	− 1° 41.′94		
	$\sin$ »	9.41 240		$\sin$ »	$8.47\,201_n$		
	$\cos$ »	9.98 499		$\cos$ »	9.99 981		
	tg »	9.42 742		tg »	$8.47\,220_n$		
I.	$\operatorname{tg} \gamma_1$	9.79 553		$\operatorname{tg} \gamma_2$	$0.81\,180_n$	II. $\sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$	9.06 501
	$\sin$ »	9.72 402		$\sin$ »	9.99 490	$\cos$ »	9.99 705
	$\cos$ »	9.92 849		$\cos$ »	$9.18\,309_n$	$\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$	9.95 859
	γ_1	+ 31° 59.′07		γ_2	98° 46.′09	$\cos$ »	9.61 978
						$\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)$	9.74 065
	$\sin \vartheta_1$	9.47 832		$\sin \vartheta_2$	9.28 103	$\cos$ »	9.92 165
	$\cos$ »	9.97 940		$\cos$ »	9.99 193		
	tg »	9.49 892		tg »	9.28 910		9.02 360
	ϑ_1	17° 30.′45		ϑ_2	11° 0.′67		9.73 769
							8.68 479
III.	$\varkappa_1$	6 46.52		$\varkappa_2$	4° 18.′28		9.91 870
	$\vartheta_1 - \varkappa_1$	10 43.93		$\vartheta_2 - \varkappa_2$	6 42. 39	$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$	10° 55.′95
	$\sin$ »	9.27 002		$\sin$ »	9.06 738	$\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$	3 20.38
	$\cos$ »	9.99 233		$\cos$ »	9.99 702	φ_1	14 16.33
	$R_1 \sin \vartheta_1$	9.48 397		$R_2 \sin \vartheta_2$	9.28 757	φ_2	7 35.57
	a	0.41 217		a	0.41 217	$\sin \frac{1}{2}\eta$	9.74 565
	$\sin \varkappa_1$	9.07 180		$\sin \varkappa_2$	8.87 540	$\cos$ »	9.91 944
	$R_1 \sin(\vartheta_1 - \varkappa_1)$	9.27 567		$R_2 \sin(\vartheta_2 - \varkappa_2)$	9.07 392		
	ϱ_1	0.20 387		ϱ_2	0.19 852	ψ_1	− 3° 14.′12
						ψ_2	− 3 25.11
IV.	$\cos b_1 \sin(l_1 - L_1)$	9.19 851		$\cos b_2 \sin(l_2 - L_2)$	$8.25\,047_n$		
	$\cos b_1 \cos$ »	9.99 233		$\cos b_2 \cos$ »	9.99 702	l_1	252° 13.′41
	$\cos$ »	9.99 446		$\cos$ »	9.99 993	l_2	255 24.23
	$l_1 - L_1$	+ 9° 7.′95		$l_2 - L_2$	− 1° 1.′61	$l_2 - l_1$	3 10.82
	$\sin b_1$	8.99 404		$\sin b_2$	9.06 228	$\sin$ »	8.74 413
	$\cos$ »	9.99 787		$\cos$ »	9.99 709	$\cos$ »	9.99 933
	tg »	8.99 616		tg »	9.06 519		
V.	$\operatorname{tg} b_2$	9.06 519		$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega)$	9.50 404	VI. $\varrho_1 A$	0.00 921
	$\operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)$	8.99 549		$\operatorname{tg}(l_2 - \Omega)$	9 58 151	$\varrho_2 A$	0.00 910
		8.23 625		$\operatorname{tg} u_1$	9.52 597	t_1^0	24.54 322
	$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega)$	8.99 616		$\operatorname{tg} u_2$	9.60 344	t_2^0	38.47 041
	$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega)$	9.49 212		u_1	18° 33.′45	$t_2^0 - t_1^0$	1.14 386
	$\cos$ »	9.97 893		u_2	21 51. 85		
	$l_1 - \Omega$	17° 42.′14		$u_2 - u_1$	3 18.40	$t_0 - t_2^0$	+ 0.02 959
	$l_2 - \Omega$	20 52.96		»	2.29 754	»	8.47 114
	$\operatorname{tg} i$	9.51 319		μ'	1.15 368	Δu	+ 0.′42
	$\sec i$	0.02 193		μ''	2.93 183	$k'' : a^{\frac{3}{2}}$	2.93 176

Elemente:

1901 Juni 7.5

u	21° 52.′27	i	18° 3.′30	$\log a$	0.41 217
Ω	234 31.27	μ	854.″7	Äqu.	1901.0

127. Die Unmöglichkeit einer Kreisbahn. Man kann mittels der oben gegebenen Formeln leicht eine Gleichung bilden, welche als einzige Unbekannte den Radius a der Kreisbahn enthält. Übersichtlicher ist es folgenden Weg einzuschlagen. Mittels der bekannten Formel für den cos eines Bogens zwischen zwei Punkten der Sphäre (Seite 3) kann man unter Hinzuziehung von 1) und 2) (Seite 379) unmittelbar ansetzen:

$$\cos(u_2-u_1)=\frac{1}{a^2}(\varrho_1\cos\beta_1\cos\lambda_1+R_1\cos L_1)(\varrho_2\cos\beta_2\cos\lambda_2+R_2\cos L_2)$$
$$+\frac{1}{a^2}(\varrho_1\cos\beta_1\sin\lambda_1+R_1\sin L_1)(\varrho_2\cos\beta_2\sin\lambda_2+R_2\sin L_2)+\frac{1}{a^2}\varrho_1\varrho_2\sin\beta_1\sin\beta_2$$

oder nach Auflösung der Klammern:

$$\cos(u_2-u_1)=\frac{\varrho_1\varrho_2}{a^2}\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{\varrho_1R_2}{a^2}\cos\beta_1\cos(\lambda_1-L_2)+\frac{\varrho_2R_1}{a^2}\cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_1)$$
$$+\frac{R_1R_2}{a^2}\cos(L_2-L_1)+\frac{\varrho_1\varrho_2}{a^2}\sin\beta_1\sin\beta_2\,.$$

Nennt man kurz 1, 2 die den geozentrischen Örtern des Planeten, I, II die den Erdörtern entsprechenden Punkte der Sphäre und $(12),\ldots.$ die zwischenliegenden Bogen, so sieht man leicht, daß obige Gleichung so geschrieben werden kann:

$$a^2\cos(u_2-u_1)=\varrho_1\varrho_2\cos(12)+\varrho_1R_2\cos(1\,II)+\varrho_2R_1\cos(I2)+R_1R_2\cos(III)$$

(nebenbei bemerkt, gilt diese Gleichung auch, wenn es sich nicht um eine Kreisbahn handelt, sondern verschiedene Radienvektoren r_1 und r_2 vorliegen, es wird dann $r_1r_2\cos(u_2-u_1)=\cdots$). Trägt man hier ϱ_1 und ϱ_2 ein, wie sie aus:

$$a^2=\varrho_1^2+R_1^2+2R_1\varrho_1\cos\delta_1=\varrho_1^2+R_1^2+2R_1\varrho_1\cos(I1)$$
$$a^2=\varrho_2^2+R_2^2+2R_2\varrho_2\cos\delta_2=\varrho_2^2+R_2^2+2R_2\varrho_2\cos(II2)$$

oder:

$$a^2=[\varrho_1+R_1\cos(I1)]^2+R_1^2\sin(I1)^2$$
$$a^2=[\varrho_2+R_2\cos(II2)]^2+R_2^2\sin(II2)^2$$

hervorgehen, und ferner $u_2-u_1=\frac{k(t_2-t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$, so folgt:

$$\left(\sqrt{a^2-R_1^2\sin(I1)^2}-\cos(I1)\right)\left(\sqrt{a^2-R_2^2\sin(II2)^2}-\cos(II2)\right)\cos(12)$$
$$+\left(\sqrt{a^2-R_1^2\sin(I1)^2}-\cos(I1)\right)R_2\cos(1\,II)+\left(\sqrt{a^2-R_2^2\sin(II2)^2}-\cos(II2)\right)R_1\cos(I2)$$
$$+R_1R_2\cos(III)-a^2\cos\frac{k(t_2-t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}=0,$$

welches die in Aussicht gestellte Gleichung ist. Es ist bemerkenswert, daß dieselbe nur die trigonometrischen Funktionen der Bogen enthält, welche von dem sphärischen Viereck $1\,2\,III$ und seinen Diagonalen geboten werden. Die Gleichung ist transzendent und kompliziert, so daß die allgemeine Diskussion in bezug auf ihre Wurzeln in a erhebliche Schwierigkeiten bietet. Wird die Erdbahn als Kreis vom Radius 1 angenommen, so ist $a=1$ eine Wurzel der Gleichung, welche eben der Erdbahn entspricht. Um wenigstens zu einem Näherungsresultat zu kommen, hat *Tisserand**)

*) Bulletin astron. Tome XII. p. 53. 1895.

für den Fall, in welchem man zu Kreisbahnen greift, nämlich kleiner Zwischenzeiten und Nähe der Opposition, ferner unter der Voraussetzung, daß der Planet in der Nähe der Ekliptik stehe, eine Entwicklung der Gleichung vorgenommen, indem er $R_1 = R_2 = 1$ setzte, und nur die ersten Potenzen der kleinen Bogen (12), $(I\,II)$, $(I1)$, $(II2)$, $(1\,II)$, $(2\,I)$, $\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}$ berücksichtigte. Indem wir betreffs der Einzelheiten auf die zitierte Abhandlung verweisen, sei hier angeführt, daß darin nur das eine Resultat festgestellt werden konnte, daß bei einer geozentrischen Bewegung in Breite, die über gewisse Grenzen hinausgeht, die Gleichung nur imaginäre Wurzeln haben kann, also keine Kreisbahn existiert. Es gibt jedenfalls noch andere Kriteria, allein die Frage nach der Existenz einer Kreisbahn ist nicht von besonderer Wichtigkeit. Daß bei stark exzentrischen Bahnen die Hypothese einer Kreisbahn zu Widersprüchen führen muß, liegt ohnehin auf der Hand.

Abschnitt XXV.

Geschichte der Bahnbestimmung.

128. Das Kometenproblem von Newton bis Olbers. Das Problem der Bahnbestimmung im heutigen Sinne aufzustellen und seine Lösung zu versuchen, bot sich erst Anlaß, nachdem *Newton* den Nachweis erbracht hatte, daß auch die Kometen sich in Kegelschnitten um die Sonne bewegen (Princ. math. Libr. III. 1686). Denn das Problem, die Bahnen der alten Planeten zu bestimmen, wie es *Kepler* zuerst aufstellte und löste (Astr. nova 1609), war infolge des Umstandes, daß für sie die mittleren Bewegungen durch Jahrhunderte lange Beobachtungen mit großer Genauigkeit bekannt waren, ein wesentlich anderes und leichteres, und der ebenfalls von Kepler gemachte Versuch, die Bahnen der Kometen zu ermitteln, mußte infolge der Voraussetzung, daß sie sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen (die übrigens noch im 18. Jahrhundert bei vielen Methoden zur Erlangung einer ersten Approximation benutzt wurde), zu schweren Irrtümern führen und es kann daher dieser Versuch so wenig wie die mißlungenen Ansätze seiner noch nach Newton den Kern des Problems übersehenden Nachfolger (Cassini, Bouguer, Boscovich, Gregori) zur Geschichte des eigentlichen Problems gerechnet werden. Newtons Lösung (Princ. Libr. III., Prop. XLI, in Wolfers Übersetzung Seite 472) ist eine konstruktive, graphische und war brauchbar; *Halley* hat damit eine große Zahl von Bahnen tatsächlich bestimmt und die Methoden des 18. Jahrhunderts lehnen sich alle mehr oder minder an sie an. Newton macht von dem Satze Gebrauch, daß die Sehne vom mittleren Radiusvektor im Verhältnis der Zeiten geschnitten werde d. h.

er setzt, wie Lambert bemerkte, die Dreiecke an Stelle der Sektoren; was seiner Methode zu einer vollkommenen fehlt, ist eigentlich nur der Euler-Lambertsche Satz, wofür er sich mit einer nur näherungsweise richtigen Beziehung zwischen der Sehne, den Radienvektoren und der Zwischenzeit begnügt. Sonst ist bereits das Prinzip der sukzessiven Näherung eingeführt, das bei ihm aber auf die Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort angewendet wird. Die Unbekannten, auf die *jetzt* die Hypothesenrechnung aufgebaut wird, nämlich die geozentrischen Distanzen der äußeren Beobachtungen, scheint zuerst *Bouguer* (Mém. de l'Acad. des sc. Paris Année 1733) benutzt zu haben, im übrigen aber ist seine Methode aus dem oben berührten Grunde unbrauchbar. Ein in Frankreich vor Bekanntwerden der Laplaceschen Methode häufig angewendetes Verfahren ist das von *Lacaille*, bekannt unter dem Namen »Methode der falschen Voraussetzungen«, welches mehr oder minder auf ein Erraten der Elemente hinauskommt und nach Newtons Methode einen Rückschritt bedeutet.

Die erste rein analytische, aber sehr unvollkommene Methode hat *Euler* in dem Werke »Theoria motuum planetarum et cometarum 1744« (deutsch von Paccassi 1781) gegeben: er wählt als Unbekannte die Entfernung des Kometen von der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, bestimmt dadurch Lage und Länge der Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung und daraus dann die Elemente; mit diesen wird der Ort für die Zeit einer vierten entfernteren Beobachtung berechnet, mit der Beobachtung verglichen und damit durch allmähliche Annäherung die Unbekannte selbst bestimmt. Er übersieht also vollständig das machtvolle Mittel, das ihm sein schon 1743 bekannter Satz geboten hätte, die Sehne mit der Zeit zu vergleichen, und verunstaltet seine Lösung durch Heranziehung von mehr Beobachtungen, als unbedingt nötig sind. Die von ihm durchgeführten im Werke selbst mitgeteilten Bahnberechnungen haben ihn wohl auch von der erheblichen Rechenarbeit, die seine Methode verlangt, überzeugt und er ist auf sie niemals zurückgekommen, sondern hat in dem Werke »Recherches et calculs sur la vraie orbite de la comète 1769« Petersbourg 1770, neue Wege eingeschlagen, die aber auch keinen Fortschritt bedeuten.

Einen wirklichen Schritt vorwärts machen nach Newton erst wieder die Arbeiten von *J. H. Lambert*, insbesondere die Abhandlungen »Insigniores orbitae Cometarum proprietates« 1761 und »Observations sur l'orbite apparente des Comètes 1771«*). Er hat erkannt, daß es sich in erster Linie um eine leicht durchführbare Methode handle, eine *erste Approximation* für eine beliebig einzuführende Unbekannte zu gewinnen und dann um Methoden, diese zu *verbessern*. Er hat zu dem Ende eine Gleichung 6. Grades mit einer Unbekannten aufgestellt, nach deren Auflösung genäherte Elemente sich sofort ergeben. Er selbst hat diese Gleichung freilich nicht aufgelöst, sondern hat sie durch ein graphisches Verfahren ersetzt.

Er hat ferner bemerkt, daß das Verhältnis, in welchem die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung vom mittleren Radiusvektor geschnitten wird, *genau gleich* ist dem Verhältnis der *Dreiecke*, welche von der Sonne und dem 1. und 2. Kometenort einerseits und der Sonne und dem 2. und 3. Kometenort andererseits gebildet werden, daß man also an Stelle dieser Dreiecke die entsprechenden para-

*) Neu herausgegeben in Ostwalds Klassiker Nr. 133.

bolischen Sektoren setzt, wenn man jene Abschnitte der ganzen Sehne den Zeiten proportional nimmt.

Er fand den wichtigen Satz, daß die Sektoren sich genau wie die Abschnitte der Sehne $\overline{13}$ verhalten, wenn der mittlere Radiusvektor durch den Schnittpunkt der Tangenten geht, die parallel zu den Sehnen $\overline{12}$ und $\overline{23}$ an die Parabel gezogen werden.

Er hat durch die Entdeckung und sofortige Verwendung seines Satzes, daß die Zeit, die zur Beschreibung eines Bogens gebraucht wird, durch die untergespannte Sehne und die Summe der Radienvektoren der Endpunkte ausgedrückt werden kann, das bequeme und wirkungsvolle Mittel geschaffen, die aufeinanderfolgenden Hypothesen rasch zu erledigen.

Durch die Projektion der Bahn auf eine Ebene, welche auf der durch Sonne, Erde und Komet zur Zeit der mittleren Beobachtung bestimmten Ebene (oder auf der Linie Erde-Sonne) senkrecht steht, findet er das einfachste Mittel, sofort die Richtung der Projektion des mittleren Radiusvektors auf diese Ebene angeben zu können, da dieselbe offenbar mit der Projektion der bekannten Visierlinie Erde-Komet zusammenfällt. Dadurch fällt für ihn die Betrachtung des Pfeiles des durchlaufenen Bogens fort, durch welche die Newtonsche Methode weitläufig und unsicher wird.

Endlich findet er in seinem Satze über die Krümmung der scheinbaren Bahn den ersten direkten Weg, die Distanz des Kometen von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung zu ermitteln. Er zeigt, daß der Abstand des mittleren beobachteten Ortes von dem größten Kreis, der durch die beiden äußeren beobachteten Örter hindurchgelegt wird, von der Krümmung der Kometen- und Erdbahn herrührt, von denen letztere bekannt, und erstere näherungsweise aus der Wirkung der Zentralkraft abgeleitet werden kann; dadurch entsteht eine Gleichung, welche als Unbekannte die Entfernung des Kometen von der Erde enthält.

Er ist auch der erste, der andere als parabolische Bahnen in Betracht zog und dadurch den Weg bahnte für das erst später mit Erfolg in Angriff genommene Planetenproblem. Lambert selbst hat die vollen Früchte seiner erfolgreichen Bemühungen nicht geerntet; ihm fehlte der Sinn für die analytische Behandlung des Problems, die doch allein zu exakten Resultaten führen kann; gerade am entscheidenden Punkt kehrt er, seiner Vorliebe für die Geometrie folgend, wieder zur Konstruktion zurück und beraubt sich dadurch um den vollen Erfolg, den erst Olbers davontrug. Indem dieser, wie Encke sich ausdrückt, in glücklichster Weise geometrische und analytische Behandlung verknüpfte, brachte er die Methode zu einer Vollendung, die noch heute nicht übertroffen ist; aber es muß doch hervorgehoben werden, daß sich die Olberssche Methode, abgesehen von einem Punkte, der zur Kürzung der Rechnung beiträgt, kaum von der Lambertschen unterscheidet.

Die von Lambert gegebene Anregung fiel aber auf fruchtbaren Boden und führte das Problem schnell der Lösung entgegen. Im Jahre 1777 stellte die Berliner Akademie, in deren Geschichte das Bahnbestimmungsproblem überhaupt eine bedeutungsvolle Rolle spielt, wohl auf Veranlassung von Lambert und Lagrange als Preisarbeit das Kometenproblem auf. Die eingelaufenen Arbeiten fanden zwar den Beifall der Akademie, können aber noch nicht als Fortschritt bezeichnet werden, da

sie nur in unwesentlichen Punkten über Lambert hinausgehen. Der Hauptgewinn des Preisauschreibens war jedenfalls, daß sich *Lagrange* mit dem Problem zu beschäftigen anfing und darüber zwei Mémoires schrieb (Mém. de l'Ac. de Berlin Année 1778, Oeuvres Band IV), die hinwiederum die Arbeiten von *Du Séjour* und *Laplace* (Mém. de l'Ac. Paris 1779, 1780) veranlaßten, worauf Lagrange in einem dritten Mémoire nochmals auf das Problem zurückkam (Mém. de l'Ac. Berlin 1783). Im zweiten Mémoire von 1778 (das erste enthält die geschichtliche Entwicklung des Problems) zeigt Lagrange zuerst, daß die Einführung der beiden Elemente, welche die Bahnlage bestimmen, als Unbekannte auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt; er entwickelt dann aus der Bedingung, daß die drei Örter in einer durch die Sonne gehenden Ebene liegen, die Ausdrücke der geozentrischen Distanzen durch die Dreiecksflächen, und ersetzt diese unter Benutzung des Euler-Lambertschen Satzes durch die Zwischenzeiten und die Summen der Radienvektoren. Diese Werte der geozentrischen Distanzen werden schließlich in aus der Betrachtung der Dreiecke Sonne-Erde-Komet hervorgehenden Formeln eingetragen, wodurch 3 Gleichungen mit den 3 Radienvektoren als Unbekannten entstehen. Für die Auflösung dieser äußerst komplizierten Gleichungen gibt Lagrange ein auf die Kleinheit der Zwischenzeiten basiertes, in praxi kaum durchführbares Verfahren an. — Im Mémoire von 1783 strebt er Vereinfachungen an, führt andere Unbekannte (Radiusvektor, Parameter und große Achse) ein, stellt für den Radiusvektor eine Gleichung siebenten Grades auf, zieht aber schließlich 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten vor, deren Auflösung wohl noch komplizierter ist, als die des zweiten Mémoire. Für die astronomische Praxis haben diese Methoden niemals Bedeutung gewonnen, denn Lagrange hat sie den Bedürfnissen der Rechner nicht anzupassen gewußt, aber sie sind trotzdem epochemachend in der Geschichte des Problems; denn dasselbe erfährt hier zum ersten Male eine elegante analytische Behandlung und scharfe Formulierung; die Grundgleichungen aus der Ebenenbedingung werden aufgestellt und aufgelöst, die Gleichung achten Grades wird korrekt gebildet, die Dreiecksflächen werden nach Potenzen der Zeit entwickelt usf.

In den Mém. de l'Ac. de Paris 1779—80 veröffentlichte *Laplace* eine ganz neue Methode, die mit den früheren kaum einen Zusammenhang hat: er ermittelt aus allen vorhandenen Beobachtungen Werte der ersten und zweiten Differenzialquotienten der Koordinaten und zeigt wie durch sie die Elemente dargestellt werden können. Diese Methode ist reproduziert in Méc. cél. T. I, Livre II (1799), und ist in Frankreich vielfach gebraucht worden. Die Mém. de l'Ac. de Paris 1779 enthalten zwei Methoden von *Du Séjour*; die prinzipiellen Mängel der ersten hat Olbers ausführlich auseinandergesetzt; die zweite aber, von der merkwürdigerweise Du Séjour selbst wenig gehalten zu haben scheint und die Olbers in seiner Kritik ganz übergeht, hat sich später als identisch mit der Olbersschen Lösung herausgestellt (Fabritius, Astr. Nachr. Band 106).

Das Ende des achtzehnten Jahrhunderts brachte noch die vollständige, in mathematischer wie praktischer Hinsicht befriedigende Lösung des Kometenproblems. Olbers unterwarf in seiner klassischen »Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen, Weimar 1797« die Arbeiten seiner Vorgänger einer scharfsinnigen Kritik und faßte in geschickter und selbständiger Weise die

brauchbaren Resultate zu einer Methode zusammen, die bis heute ohne wesentliche Änderungen im Gebrauch ist. Solche Abänderungen in den Einzelheiten haben *Gauß* (Einige Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen 1813, Werke Band VI) und *Encke* (Über die Olberssche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen, Berliner Jahrbuch für 1833) beigetragen.

129. Die Bahnbestimmung im 19. Jahrhundert. Im 18. Jahrhundert war das Bahnbestimmungsproblem identisch mit dem Kometenproblem und das allgemeine Problem, den Kegelschnitt ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität zu bestimmen, wurde mehr nebenher und nur aus analytischem Interesse behandelt. Euler, Lambert, Lagrange und Laplace hatten aber auch hier den Boden so wohl bereitet, daß gleich mit Beginn des neuen Jahrhunderts, als durch Entdeckung des ersten kleinen Planeten auch das praktische Bedürfnis hervortrat, das schwierigere Problem eine vollständige Lösung erfuhr. Mit vollendeter Kunst ergänzte *Gauß* die Lücken in den Arbeiten der Vorgänger, brachte neue fruchtbare Ideen in das Problem und schuf namentlich als erster die Grundlagen einer astronomischen Rechenkunst, deren Mangel die alten Methoden so schwerfällig gemacht hatte. Sein Werk, die »Theoria motus corporum caelestium, 1809« ist bis auf den heutigen Tag das klassische Lehrbuch der Bahnbestimmung geblieben. Hervorgehoben sei daraus die Umwandlung der Gleichung achten Grades in eine leicht auflösbare Form, die Begründung der Hypothesenrechnung auf zwei Unbekannte, die Entwicklung eines bequemen Ausdruckes für das Verhältnis des elliptischen Sektors zum Dreieck, eine neue Art der Elementenbestimmung aus zwei heliozentrischen Örtern usf.

Die weitere Entwicklung erfolgte nach zwei Richtungen, die von der Gaußschen und von der Laplaceschen Lösung des Problems ihren Ausgang nahmen. Die Methode der Theoria motus konnte in ihrer Begründung und in einigen Einzelheiten wenn auch nicht verbessert so doch vereinfacht oder variiert werden; es sei hier auf die Arbeiten von *Encke* (Berl. Jahrbuch für 1854), *Hansen* (Verh. d. sächs. Ak. d. Wiss. Bd. 15, 1863), *Tietjen* (Berl. Jahrb. für 1879), *Oppolzer* (Bahnbestimmung I, 1. Aufl. 1870), *Weiß* (Denkschr. der Wiener Ak. d. Wiss. Band 60, 1893) nur im allgemeinen hingewiesen, da wir in unserer Darstellung die Einzelheiten schon hervorgehoben haben. Die Methode von Encke ist die eigentliche Methode des Rechners geworden, die bei den Anwendungen auf die zahlreichen Entdeckungen von kleinen Planeten von der Mitte des 19. Jahrhunderts ab sich immer aufs neue bewährte; sie ist ihrer einfachen Begründung halber auch in die meisten Lehrbücher übergegangen (Watson, Klinkerfues, Tisserand). Eine von der Gaußschen wesentlich abweichende Art der Begründung hat *Klinkerfues* eingeschlagen, indem er den Lambertschen Satz in den Mittelpunkt der Betrachtung stellte. Andere Bestrebungen gingen dahin, die Genauigkeit von Anfang weiter zu treiben, als dies Gauß für zweckmäßig gehalten hatte; hier ist vor allem die *Oppolzer*sche Bearbeitung des Problems (Bahnbestimmung I, 2. Auflage) zu erwähnen, bei welcher, um die Hypothesenrechnung abzukürzen, in den Entwickelungen für die Verhältnisse der Dreiecksflächen die vom Differenzialquotienten des Radiusvektors nach der Zeit abhängigen Glieder wenigstens genähert mitgenommen werden; in Fällen, die in der Praxis selten vorkommen und jedenfalls

vermieden werden können, besitzt dieses Vorgehen gegenüber dem Gaußschen Verfahren den Vorteil einer schnelleren Konvergenz d. h. einer geringeren Hypothesenanzahl, aber dieser wird erkauft durch eine komplizierte und wenig übersichtliche Rechnung, so daß die Methode selbst in der vereinfachten Tietjenschen Bearbeitung (Berl. Jahrb. für 1887) keinen Eingang bei den Rechnern gefunden hat. Dasselbe gilt von der *Gibbs*schen Methode, die von einem an und für sich sehr genauen und eleganten Ausdruck für die Verhältnisse der Dreiecksflächen ausgeht, aber dadurch, daß sie genötigt ist, die drei Radienvektoren als Unbekannte einzuführen, zu umständlichen Entwicklungen greifen muß; zudem ist bei ihr eine Hypothesenrechnung unmöglich, d. h. wenn die durch die Gibbssche Formel gebotene Genauigkeit nicht ausreicht, die Bahn durch die drei Beobachtungen streng hindurchzulegen, so bietet sie kein Mittel, dies durch sukzessive Verbesserung herbeizuführen. Später haben *Fabritius* und *Vogel* (Astr. Nachr. Bd. 128, 1891) ferner *Frischauf* (Die Gauß-Gibbssche Methode, Leipzig 1905) Anwendungen der Gibbsschen Formel auf die Bahnbestimmung vorzuschlagen, die von diesen Mängeln frei sind.

Über die Laplacesche Methode (1780) hat sich Lagrange dahin ausgesprochen, daß sie analytisch die einfachste Lösung des Problems sei, in der Anwendung aber keinen entsprechenden Nutzen gewähre, da es nicht gelinge die Differenzialquotienten der Koordinaten mit der nötigen Sicherheit zu bestimmen (Oeuvres Vol. XIV. p. 108). Trotz der vielen Bearbeitungen, die die Methode im Lauf des 19. Jahrhunderts erfahren hat, wird man dieses Urteil noch heute bestätigen müssen, da jede Anwendung derselben von der Mühseligkeit der Rechnung und von der geringen Sicherheit des erlangten Resultats den Beweis erbringt. Die Methode faßt zweifellos das Problem im Kern, aber die Hilfsmittel, deren sie sich bedient, sind unzulänglich; ersetzt man aber diese durch geeignetere, so kommt man eben auf die Gaußsche Methode. Wir geben hier nur die Titel der wichtigsten Arbeiten, die auf Laplace fußen:

Cauchy, eine große Zahl von Noten in den Comptes rendus 1847—48 (Oeuvres Vol. X).

Villarceau, Annales de l'Obs. Paris Vol. III.

Radau, Bull. astron. Vol. II, p. 1; Vol. IV, p. 409.

Bruns, Über den Lambertschen Satz, Astr. Nachr. Bd. 118, S. 241.

Harzer, Astr. Nachr. Bd. 141; Publikationen der Sternwarte Kiel Nr. XI.

Leuschner, A short Method . . ., Publ. Lick Observatory Vol. VII.

Fünfter Teil.

Die Bahnverbesserung.

Abschnitt XXVI.

Die Ausgleichungsrechnung.

130. Aufgabe. Prinzip der kleinsten Quadratsumme. Die Methoden der Ausgleichungsrechnung sollen hier nur soweit zur Darstellung gelangen, als sie für die Bahnverbesserung gebraucht werden.

Wenn eine Größe oder bekannte Verbindungen mehrerer Größen öfter beobachtet sind, als zu ihrer rein algebraischen Bestimmung nötig ist, dann werden infolge der unvermeidlichen, zufälligen Beobachtungsfehler zwischen den Gleichungen, welche den Zusammenhang der zu ermittelnden und der beobachteten Größen herstellen, Widersprüche entstehen, die durch keinerlei Annahme über die zu ermittelnden, überbestimmten Größen zu beseitigen sind; es ist Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus solchen Gleichungen durch eine strenge und einfache Analyse die Werte der Unbekannten so zu bestimmen, daß sie der Wahrheit möglichst nahe kommen. Ohne ein Prinzip, welches sich darüber ausspricht, wann diese letztere Bedingung als erfüllt angesehen wird, ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, und, soweit es sich um die Wahl des Prinzips handelt, ist also eine gewisse Willkür notwendig mit der Natur des Problems verbunden. Für die Wahl des Prinzips sind maßgebend: 1. daß dasselbe mit annehmbaren Anschauungen über die Natur der Beobachtungsfehler in Übereinstimmung stehe, 2. daß die aus ihm fließende Analyse eine einfache sei. Das Prinzip:

> »*Die Unbekannten sind so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche ein Minimum werde*«,

genügt, wie die Durchführung zeigt, beiden Bedingungen und wird jetzt fast allgemein als Grundlage der Ausgleichung angenommen. Diese heißt daher häufig »*Methode der kleinsten Quadrate*«.

Analytisch formuliert sich die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung wie folgt: Sind l_i die Beobachtungsergebnisse für die gegebenen Verbindungen

$$A_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1 \text{ bis } n)$$

zwischen den m unbekannten Größen x, y, z, ... $(n > m)$, so ist jenes Wertsystem anzugeben, für welches die Summe der Quadrate von $A_i - l_i$ ein Minimum wird. A_i kann stets als linear angenommen werden; ist dies von Anfang an nicht der Fall, so stellt man die lineare Form durch Annahme von Näherungswerten und Entwicklung nach dem Taylorschen Satz für mehrere Variable her. Ist nur eine Unbekannte vorhanden, so hat man das Problem der Ausgleichung *direkter Beobachtungen*. Der allgemeine Fall wird als *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen* bezeichnet.

131. Mittlerer Fehler. Gewicht. Um verschiedene Beobachtungsreihen bezüglich ihrer Genauigkeit miteinander vergleichen zu können, führt man ein *Maß der Genauigkeit* ein. Man kann sich ein solches aus der Betrachtung der Fehler verschaffen. Dabei hat man zu unterscheiden zwischen den *wahren* Beobachtungsfehlern (die in der Regel unbekannt sind) und den Abweichungen der Beobachtungen von den mit den besten Werten der Unbekannten berechneten Werten A_i, den *scheinbaren* Fehlern. Sind Δ_1, Δ_2, ... Δ_n die wahren Fehler und wird mit $|\Delta_i|$ der absolute Wert von Δ_i bezeichnet, so ist

$$\frac{|\Delta_1|^q + |\Delta_2|^q + \cdots + |\Delta_n|^q}{n}$$

ein Maß der Genauigkeit für jeden Wert von $q > 0$, in dem Sinne, daß eine Beobachtungsreihe um so genauer ist, je kleiner dieser Ausdruck ist. Da jeder Wert von q denselben Dienst leistet, beschränkt man sich auf die einfachsten Fälle:

$$q = 1: \quad \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|}{n} = \vartheta = \text{durchschnittlicher Fehler}$$

$$q = 2: \quad \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n} = \mu^2 = \text{Quadrat des mittleren Fehlers}$$

und gebraucht insbesondere den *mittleren Fehler* μ als Maß der Genauigkeit. Das oben aufgestellte Prinzip der Ausgleichung kann dann so ausgesprochen werden: Es ist jenes System der Unbekannten zu ermitteln, für welches der mittlere Fehler der Reihe den kleinsten Wert annimmt. Da man mittels dieses Prinzips nicht die wahren Werte der Unbekannten kennen lernt, sondern nur die annehmbarsten, so bleiben auch die wahren Beobachtungsfehler unbekannt und die Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}}$$

kann also zur Bestimmung des mittleren Fehlers nicht dienen. Dagegen werden die scheinbaren Fehler bekannt und wir werden unten zeigen, wie diese zur Bestimmung von μ benutzt werden können.

Um Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit bequem miteinander verbinden zu können, führt man den Begriff des *Gewichtes* ein, dessen einfachste Definition ist: *eine Beobachtung vom Gewichte p ist gleichwertig mit p Beobachtungen vom Gewichte 1.* Daraus wird sich unten der Zusammenhang zwischen Gewicht und mittlerem Fehler leicht ableiten lassen.

Wir werden uns im folgenden nachstehender von Gauß eingeführten Bezeichnung bedienen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= [a] \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= [aa] \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= [ab] . \end{aligned}$$

Wir besprechen jetzt die einzelnen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und beginnen mit der einfachsten.

132. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleichem Gewicht. Ist eine zu ermittelnde Größe direkt durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit

$$l_1, \; l_2, \; l_3, \; \ldots \; l_n$$

gemessen, so ist die Aufgabe, daraus den Wert x der Größe abzuleiten, der dem wahren Werte X möglichst nahe kommt; x wollen wir den »annehmbarsten« Wert der Unbekannten nennen und ihn nach dem oben aufgestellten Prinzip als denjenigen definieren, für welchen die Summe der Quadrate der Widersprüche ein Minimum wird. Weicht x von den einzelnen Messungen $l_1, \ldots l_n$ um die Beträge $\delta_1, \ldots \delta_n$ ab, in dem Sinne, daß die δ die Verbesserungen sind, welche den l hinzugefügt werden müssen, damit diese unter sich und mit x identisch werden, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= l_1 + \delta_1 \quad \text{oder} \quad \delta_1 = x - l_1 \\ x &= l_2 + \delta_2 \qquad\quad \delta_2 = x - l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x &= l_n + \delta_n \qquad\quad \delta_n = x - l_n . \end{aligned}$$

Darin nennt man $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ die *scheinbaren Beobachtungsfehler*, $l_1 + \delta_1, \ldots l_n + \delta_n$ die *ausgeglichenen Beobachtungswerte* und die letztangeschriebenen Gleichungen die *Fehlergleichungen*. Das aufgestellte Prinzip fordert, daß

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \cdots + (x - l_n)^2 = \text{Minimum}$$

sei oder also, daß:

$$(x - l_1) + (x - l_2) + \cdots + (x - l_n) = 0$$

sei. Daraus folgt:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

d. h. der *annehmbarste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel aus den Einzelmessungen*. Für die übrig bleibenden Fehler folgt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 0 ,$$

eine Gleichung, die zur Kontrolle dienen kann. Um den mittleren Fehler *einer* Messung l und den mittleren Fehler des Resultates x abzuleiten, lösen wir folgende allgemeine Aufgabe: Eine Größe f sei nicht direkt gemessen worden, sondern sei abhängig von den Größen $x_1, x_2, \ldots x_m$, welche direkt gemessen sind; die mittleren Fehler der Messungen $x_1, x_2, \ldots x_m$ seien bzw. $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$. Man bestimme den mittleren Fehler von $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$.

Es sei zuerst

$$f = \alpha_i x_i ,$$

wo α_1 eine Konstante und x_1 mit dem mittleren Fehler μ_1 gemessen ist. Sind Δ_1, $\Delta_2, \ldots \Delta_n$ die bei den Messungen von x_1 begangenen wahren Fehler, so wird:

$$\mu_1^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}.$$

Wenn aber in x_1 der Fehler Δ begangen wurde, so wird f mit dem Fehler $\alpha_1 \Delta$ behaftet sein und der mittlere Fehler von f wird also:

$$M^2 = \frac{\alpha_1^2 \Delta_1^2 + \alpha_1^2 \Delta_2^2 + \cdots + \alpha_1^2 \Delta_n^2}{n} = \alpha_1^2 \mu_1^2.$$

Sei ferner

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

und sei x_1 mit den Fehlern $\Delta_1', \Delta_2', \ldots \Delta_n'$

x_2 » » » $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots \Delta_m''$

gemessen, dann wird f folgende mn Fehler aufweisen:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\Delta_1' + \alpha_2\Delta_1'' & \alpha_1\Delta_2' + \alpha_2\Delta_1'' & \alpha_1\Delta_n' + \alpha_2\Delta_1'' \\ \alpha_1\Delta_1' + \alpha_2\Delta_2'' & \alpha_1\Delta_2' + \alpha_2\Delta_2'' & \alpha_1\Delta_n' + \alpha_2\Delta_2'' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_1\Delta_1' + \alpha_2\Delta_m'' & \alpha_1\Delta_2' + \alpha_2\Delta_m'' & \alpha_1\Delta_n' + \alpha_2\Delta_m'' \end{array}$$

und der mittlere Fehler M von f wird also gefunden aus

$$M^2 = \frac{\text{Summe der Quadrate aller } mn \text{ Fehler}}{mn}$$

oder

$$mn M^2 = \alpha_1^2 m (\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \cdots + \Delta_n'^2) + \alpha_2^2 n (\Delta_1''^2 + \Delta_2''^2 + \cdots + \Delta_m''^2) + 2\alpha_1\alpha_2 \sum_{k=1}^{k=m} (\Delta_1'\Delta_k'' + \cdots + \Delta_n'\Delta_k'').$$

Da nun

$$\frac{\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \cdots + \Delta_n'^2}{n} = \mu_1^2, \quad \frac{\Delta_1''^2 + \Delta_2''^2 + \cdots + \Delta_m''^2}{m} = \mu_2^2$$

und

$$\Delta_1' + \Delta_2' + \cdots + \Delta_n' = 0,$$

so folgt:

$$M^2 = \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2.$$

Nun kann man leicht weiter schließen; ist

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

so setze man

$$f = f_1 + \alpha_3 x_3$$

und hat hiervon dann als mittleren Fehler:

$$M^2 = M_1^2 + \alpha_3^2\mu_3^2$$

oder

$$M^2 = \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2 + \alpha_3^2\mu_3^2.$$

Allgemein: Ist

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

und sind $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ die mittleren Fehler von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist der mittlere Fehler von f zu finden aus

$$M^2 = \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\mu_n^2.$$

Hat man endlich eine beliebige Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, so kann man nach dem letzten Satze verfahren, wenn die Messungsfehler als klein angenommen werden können. Setzt man nämlich

$$x_1 = l_1 + \lambda_1, \ldots, \quad x_m = l_m + \lambda_m,$$

wo die l gemessene, also genäherte, konstante Werte der x und somit die λ klein sind, so hat man

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = f(l_1, l_2, \ldots l_m) + \left(\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial l_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial l_2} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f}{\partial l_m}\right) + \cdots$$

und nun wieder, wenn die höheren Potenzen von $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ vernachlässigt werden, die lineare Form, vermöge welcher wird:

$$M^2 = \mu_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \mu_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 + \cdots + \mu_m^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_m}\right)^2.$$

Auf Grund dieses Satzes bestimmen wir den mittleren Fehler des annehmbarsten Wertes

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n},$$

den wir oben gefunden haben. Es wird hier

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$$

und daher, wenn $\mu_1, \ldots \mu_n$ die mittleren Fehler der Messungen $l_1, \ldots l_n$ sind:

$$M^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2).$$

Sind die Messungen gleich genau, also

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu,$$

so wird

$$M^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\mu^2$$

oder

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Um μ, den mittleren Fehler *einer* Messung zu erhalten, haben wir bis jetzt:

$$\mu = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}},$$

wo die Δ die wahren Beobachtungsfehler sind. Bekannt sind uns nur die Abweichungen der Einzelmessungen vom annehmbarsten Resultat, nämlich von

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

oder die Größen

$$\delta_1 = L - l_1, \quad \delta_2 = L - l_2, \quad \ldots \quad \delta_n = L - l_n,$$

während

$$\Delta_1 = X - l_1, \quad \Delta_2 = X - l_2, \quad \ldots \quad \Delta_n = X - l_n$$

ist, wo X den wahren Wert darstellt. Setzt man $X - L = S$, so wird

$$\Delta_1 = \delta_1 + S, \quad \Delta_2 = \delta_2 + S, \quad \ldots \quad \Delta_n = \delta_n + S$$

und daher

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2) + 2S(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) + nS^2$$

oder, da $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 0$:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 + nS^2.$$

S ist völlig unbekannt; wir werden aber offenbar im allgemeinen am besten verfahren, wenn wir dafür den *mittleren* Wert nehmen, den es haben kann, oder wir werden es als sehr plausible Hypothese ansehen dürfen, wenn wir S gleich dem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels L setzen, also

$$S = \frac{\sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}}}{\sqrt{n}}$$

oder

$$n S^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n} = \mu^2.$$

Damit folgt:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 + \mu^2$$

und daher

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 + \mu^2}{n}}$$

oder

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n-1}}.$$

Nach dieser Formel kann der mittlere Fehler *einer* Messung durch die scheinbaren Fehler oder die Abweichungen vom arithmetischen Mittel berechnet werden. Man hat dann auch Rücksicht darauf genommen, daß das arithmetische Mittel vom wahren Wert der Unbekannten um den Betrag $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$ abweichen kann.

Zusammenstellung der Formeln für gleich genaue Messungen einer Größe.

$l_1, l_2, \ldots l_n$ Messungen der Größe x.

Annehmbarster Wert von x: $\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} = L$.

Einzelfehler: $\delta_1 = L - l_1, \ldots \delta_n = L - l_n$.

Mittlerer Fehler einer Messung: $\mu = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n-1}}$.

Mittlerer Fehler des Resultates: $M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n(n-1)}}$.

133. Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedenem Gewicht. Nach der oben gegebenen Definition von »Gewicht« ersetzt eine Messung oder ein Resultat vom Gewichte p p Beobachtungen vom Gewicht 1. Ist also eine Größe x p_1 mal gemessen und hat jede Messung das Gewicht 1, so hat das arithmetische Mittel aus den p_1 Messungen das Gewicht p_1. Wird dieselbe Größe noch p_2 mal gemessen und hat wieder jede Messung das Gewicht 1, so hat das arithmetische Mittel aus den p_2 Messungen das Gewicht p_2. Hat man also die Größe x $p_1 + p_2$ mal gemessen:

$x = l_1$	$x = l_{p_1+1}$
$x = l_2$	$x = l_{p_1+2}$
$\vdots$	$\ldots$
$x = l_{p_1}$	$x = l_{p_1+p_2}$

und daraus die Mittel gebildet:

$$L_1 = \frac{l_1 + l_2 + \cdots l_{p_1}}{p_1}, \qquad L_2 = \frac{l_{p_1+1} + \cdots + l_{p_1+p_2}}{p_2}$$

denen die Gewichte bzw. p_1 und p_2 zukommen, wird der annehmbarste Wert von x aus allen Messungen nach Nr. 132

$$\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_{p_1} + l_{p_1+1} + \cdots + l_{p_1+p_2}}{p_1 + p_2} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2}{p_1 + p_2}.$$

Dies läßt sich sofort verallgemeinern: hat man n Resultate

$$\begin{aligned} x &= L_1 \text{ mit den Gewichten } p_1 \\ x &= L_2 \quad \text{» } \quad \text{» } \quad \text{» } \quad p_2 \\ &\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x &= L_n \quad \text{» } \quad \text{» } \quad \text{» } \quad p_n \end{aligned}$$

so ist der annehmbarste Wert von x aus allen:

$$x = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_n L_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \qquad 1)$$

Nennen wir μ den mittleren Fehler einer Messung vom Gewichte 1, so wird der mittlere Fehler von L_1 mit dem Gewichte p_1:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}.$$

Daraus folgt:

$$p_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2$$

und ebenso

$$p_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_n = \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2$$

d. h. $$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \cdots : \frac{1}{\mu_n^2} \quad \text{oder:}$$

Die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Mit Hilfe dieses Satzes kann das Gewicht und der mittlere Fehler des annehmbarsten Wertes 1) gefunden werden. In der Tat wird letzterer gefunden aus:

$$M^2 = \frac{p_1^2 \mu_1^2 + p_2^2 \mu_2^2 + \cdots + p_n^2 \mu_n^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2},$$

wenn $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ die mittleren Fehler von $L_1, L_2, \cdots L_n$ sind. Ist ferner μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, so wird

$$\mu_1^2 : \mu_2^2 : \cdots : \mu_n^2 : \mu^2 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \cdots \frac{1}{p_n} : 1$$

oder

$$\mu^2 = p_1 \mu_1^2 = p_2 \mu_2^2 = \cdots = p_n \mu_n^2$$

mithin:

$$M^2 = \frac{\mu^2 (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} = \frac{\mu^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

oder
$$M = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}.$$
Nennt man P das Gewicht des Ausdruckes 1), so ist auch:
$$P = \left(\frac{\mu}{M}\right)^2$$
und somit
$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$
und
$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}},$$
d. h. *das Gewicht des Resultates ist gleich der Summe der Gewichte der Einzelresultate und der mittlere Fehler desselben ist gleich dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Gewicht des Resultates.*

Es erübrigt noch, den mittleren Fehler der Gewichtseinheit μ zu ermitteln. Ist μ_1 der mittlere Fehler von L_1, so ist $\sqrt{p_1}\mu_1 = \mu$ der mittlere Fehler von $\sqrt{p_1}\,L_1$. Multipliziert man also die Gleichungen
$$\begin{array}{ll} x = L_1 & \text{Gewicht } p_1 \\ x = L_2 & \quad\text{»}\quad p_2 \\ \cdots & \cdots \\ x = L_n & \quad\text{»}\quad p_n \end{array}$$
mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten, so haben die entstehenden Gleichungen
$$\begin{array}{l} \sqrt{p_1}\,x = \sqrt{p_1}\,L_1 \\ \sqrt{p_2}\,x = \sqrt{p_2}\,L_2 \\ \cdots\cdots \\ \sqrt{p_n}\,x = \sqrt{p_n}\,L_n \end{array}$$
alle als mittleren Fehler den der Gewichtseinheit, d. h. sie sind alle von derselben Genauigkeit und alle vom Gewichte 1. Weichen die $L_1, L_2, \cdots L_n$ von
$$x = \frac{p_1 L_1 + \cdots + p_n L_n}{p_1 + \cdots + p_n}$$
um bzw. $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ ab, so weichen die $\sqrt{p_1}\,L_1, \cdots \sqrt{p_n}\,L_n$ um $\sqrt{p_1}\,\delta_1, \cdots \sqrt{p_n}\,\delta_n$ von $\sqrt{p_1}\,x, \cdots \sqrt{p_n}\,x$ ab und der mittlere Fehler einer der Gleichungen, der nach obigem identisch ist μ, dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, wird also nach Nr. 132
$$\mu = \sqrt{\frac{p_1\delta_1^2 + \cdots + p_n\delta_n^2}{n-1}}.$$

Zusammenstellung der Formeln für direkte Messungen einer Größe von verschiedenem Gewicht.

$L_1, \; L_2, \cdots L_n$ Bestimmungen einer Größe,

$p_1, \; p_2, \cdots p_n$ Gewichte der einzelnen Bestimmungen.

Annehmbarster Wert der Größe $x = \dfrac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_n L_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$,

$\delta_1, \; \delta_2, \cdots \delta_n$ Abweichungen der $L_1, \cdots L_n$ von x.

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $\mu = \sqrt{\dfrac{p_1\delta_1^2 + p_2\delta_2^2 + \cdots + p_n\delta_n^2}{n-1}}$.

Mittlerer Fehler des Resultates x: $M = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} = \dfrac{\mu}{\sqrt{P}}$.

Gewicht des Resultates: $P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

134. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Sind m Unbekannte $x_1, \cdots x_m$ durch Beobachtung bestimmt, aber der Art, daß sie nicht direkt, sondern in bekannten Verbindungen $f_i(x_1, \cdots x_m)$ beobachtet sind, so hat man das allgemeinste Ausgleichungsproblem zu lösen, nämlich die Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots x_m) &= l_1 \\ f_2(x_1, \cdots x_m) &= l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ f_n(x_1, \cdots x_m) &= l_n \end{aligned}$$

zu leisten; hierin sind $f_1, f_2, \cdots$ bekannte Funktionen, $l_1, l_2, \cdots l_n$ die Beobachtungen. Eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung liegt nur vor, wenn $n > m$, d. h. wenn *überschüssige* Gleichungen vorhanden sind. Die Aufgabe ist in der gestellten Allgemeinheit nicht lösbar, sondern nur in folgenden speziellen Fällen:

a) wenn sämtliche Gleichungen linear sind;

b) wenn Näherungswerte der $x_1, \cdots x_m$ bekannt sind, mittels deren unter Anwendung des Taylorschen Satzes die Gleichungen auf lineare Form gebracht werden können, wenn nötig durch mehrmalige Wiederholung des Prozesses.

In praxi ist dies immer der Fall. Man muß und kann sich also auf die Betrachtung linearer Gleichungen beschränken, die man in der Regel in folgender Form schreibt:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots &= l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots &= l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots &= l_n \end{aligned} \qquad 1)$$

(n Gleichungen mit m Unbekannten).

Ein System der Unbekannten, welches diese Gleichungen streng erfüllt, gibt es nicht, da die $l_1, l_2, \cdots l_n$ beobachtete Größen sind und $n > m$ ist. Es kommt vielmehr darauf an, jenes System aus den unendlich vielen möglichen herauszufinden, welches als das annehmbarste anzusehen ist. Als dieses aber wird nach dem Nr. 130 aufgestellten Prinzip dasjenige betrachtet, welches die Eigenschaft hat, daß die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird. Ist $x, y, z, \cdots$ dieses System, so wird

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - l_1 &= \delta_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - l_2 &= \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - l_n &= \delta_n \end{aligned} \qquad 2)$$

(System der *Fehlergleichungen*) und es ist

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = \text{Minimum}$$

die aufzustellende und zu befriedigende Bedingung. Wir werden zum Schluß zeigen, daß dieses System die kleinsten mittleren Fehler (größten Gewichte) für die Unbekannten ergibt. (Nr. 136.)

Die Bedingung des Minimums erfordert:

$$\delta_1 \frac{d\delta_1}{dx} + \delta_2 \frac{d\delta_2}{dx} + \cdots + \delta_n \frac{d\delta_n}{dx} = 0$$
$$\delta_1 \frac{d\delta_1}{dy} + \delta_2 \frac{d\delta_2}{dy} + \cdots + \delta_n \frac{d\delta_n}{dy} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun ist nach 2)

$$\frac{d\delta_1}{dx} = a_1\,, \quad \frac{d\delta_2}{dx} = a_2\,, \cdots$$
$$\frac{d\delta_1}{dy} = b_1\,, \quad \frac{d\delta_2}{dy} = b_2\,, \cdots$$

also werden die Bedingungen des Minimums

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_n a_n = 0 \quad \text{oder} \quad [\delta a] = 0$$
$$\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_n b_n = 0 \quad \text{oder} \quad [\delta b] = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder wenn nach 1) die Werte $\delta_1, \delta_2, \cdots$ eingetragen werden:

$$(a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1)\, a_1 + (a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2)\, a_2 + \cdots = 0$$
$$(a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1)\, b_1 + (a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2)\, b_2 + \cdots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder endlich, wenn ausmultipliziert wird:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots &= [cl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 3)$$

(m Gleichungen mit m Unbekannten).

Dies sind so viele Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind und aus ihnen geht also das vollständig bestimmte System $x, y, z, \cdots$ von der gewünschten Eigenschaft hervor. Man nennt die Gleichungen 3) die *Normalgleichungen.*

Wir wollen die bisher gemachte Voraussetzung, daß die $l_1, \cdots l_n$ mit gleicher Genauigkeit gemessen seien, fallen lassen und annehmen, daß den Gl. 1) der Reihe nach die Gewichte $p_1, p_2, \cdots p_n$ zukommen. Die aufzustellende Bedingung wird dann nach der Definition des »Gewichtes«

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \cdots + p_n \delta_n^2 = \text{Minimum}$$

oder:

$$(\sqrt{p_1}\,\delta_1)^2 + (\sqrt{p_2}\,\delta_2)^2 + \cdots + (\sqrt{p_n}\,\delta_n)^2 = \text{Minimum}.$$

Daraus folgt, *daß man die Gl. 1) ganz ebenso wie Gleichungen von gleichem Gewicht behandeln kann, wenn man sie vorher mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten multipliziert hat.*

Die Gleichungen 1) werden dann:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1}\, a_1 x + \sqrt{p_1}\, b_1 y + \cdots &= \sqrt{p_1}\, l_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sqrt{p_n}\, a_n x + \sqrt{p_n}\, b_n y + \cdots &= \sqrt{p_n}\, l_n \end{aligned} \qquad 4)$$

und daher die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [aap]x + [abp]y + \cdots &= [alp] \\ [bap]x + [bbp]y + \cdots &= [blp] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 5)$$

wo allgemein:

$$[abp] = a_1 b_1 p_1 + a_2 b_2 p_2 + \cdots + a_n b_n p_n .$$

Wir können daher im folgenden den einfacheren Fall von Gleichungen gleichen Gewichtes voraussetzen, da er durch eine einfache Operation sofort hergestellt werden kann; und zwar können wir dieses Gewicht als gleich 1 annehmen; denn wenn die ursprüngliche Gleichung mit dem Gewicht p_i nach Einsetzung der annehmbarsten Werte der Unbekannten den Restfehler δ_i läßt, so läßt die mit $\sqrt{p_i}$ multiplizierte Gleichung den Fehler $\sqrt{p_i}\,\delta_i$, und da sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der Fehler verhalten, so kommt der mit $\sqrt{p_i}$ multiplizierten Gleichung das Gewicht 1 zu.

Die *Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung* und *des mittleren Fehlers jeder Unbekannten* gelingt wie folgt. Die Algebra lehrt, daß die Auflösung der Normalgleichungen 3) die Unbekannten $x_1, y_1, \ldots$ in folgender Form liefert:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad 6)$$

Ist μ der mittlere Fehler eines l vom Gewichte 1, so werden also nach dem in Nr. 132 bewiesenen allgemeinen Satz die mittleren Fehler der Unbekannten, die wir mit $\mu_x, \mu_y, \ldots$ bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sqrt{\mu^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)} = \mu\sqrt{[\alpha\alpha]} \\ \mu_y &= \sqrt{\mu^2(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2)} = \mu\sqrt{[\beta\beta]} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad 7)$$

Wir werden nun zuerst zeigen, wie μ bestimmt wird, und dann, wie die $[a\alpha]$, $[\beta\beta]$ aus der Auflösung der Normalgleichungen sich ergeben. Es seien $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ die Restfehler, welche übrig bleiben, wenn die gefundenen Werte von $x, y, z, \ldots$ in die (eventuell auf gleiches Gewicht gebrachten) Bedingungsgleichungen 1) oder 4) eingetragen werden. Da diese Werte der Unbekannten nicht die wahren sind, so werden auch die übrig bleibenden Fehler nicht die wirklichen Beobachtungsfehler sein. Wir wollen die *wahren* Werte der Unbekannten mit X, Y, Z bezeichnen und die dann übrig bleibenden Fehler der Bedingungsgleichungen mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$. Dann ist nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}},$$

wo also:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + \cdots \\ \Delta_2 &= -l_2 + a_2 X + b_1 Y + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad X, Y, \ldots \text{ wahre Werte}, \qquad 8)$$

während nach 2)

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + \cdots \\ \delta_2 &= -l_2 + a_2 x + b_1 y + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad x, y, \ldots \text{ annehmbarste Werte}. \qquad 9)$$

Multipliziert man 8) der Reihe nach mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ und addiert, so kommt:

$$[\Delta\Delta] = -[l\Delta] + X[a\Delta] + Y[b\Delta] + \cdots \qquad 10)$$

und ebenso folgt aus 9)

$$[\delta\delta] = -[l\delta] + x[a\delta] + y[b\delta] + \cdots$$

Nun lauteten die oben aufgestellten Bedingungen des Minimums:

$$[a\delta] = [b\delta] = \cdots = 0,$$

also wird:

$$[\delta\delta] = -[l\delta]. \qquad 11)$$

Ferner ergibt sich aus 8)

$$[\Delta\delta] = -[l\delta] + X[a\delta] + Y[b\delta] + \cdots$$

oder

$$[\Delta\delta] = -[l\delta],$$

also ist

$$[\delta\delta] = [\Delta\delta]. \qquad 12)$$

Endlich folgt aus 9)

$$[\delta\Delta] = -[l\Delta] + x[a\Delta] + y[b\Delta] + \cdots.$$

Wird dies mit 10) durch Subtraktion verbunden und 12) beachtet, so hat man:

$$[\Delta\Delta] = [\delta\delta] + [a\Delta](X - x) + [b\Delta](Y - y) + \cdots. \qquad 13)$$

Die Differenzen $X - x$, $Y - y, \ldots$ sind völlig unbekannt; man muß also wieder eine Abschätzung ihrer Werte vornehmen, was wie folgt gelingt. Denkt man sich die wahren Werte X, Y, $Z, \ldots$ in die Bedingungsgleichungen eingetragen, so wird daraus

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y + \cdots &= l_1 + \Delta_1 \\ a_2 X + b_2 Y + \cdots &= l_2 + \Delta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und wenn man die Normalgleichungen bildet

$$\begin{aligned} [aa]X + [ab]Y + \cdots &= [a,l + \Delta] \\ [ba]X + [bb]Y + \cdots &= [b,l + \Delta], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so folgt durch deren Auflösung ebenso wie in 6)

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1(l_1 + \Delta_1) + \alpha_2(l_2 + \Delta_2) + \cdots + \alpha_n(l_n + \Delta_n) \\ Y &= \beta_1(l_1 + \Delta_1) + \beta_2(l_2 + \Delta_2) + \cdots + \beta_n(l_n + \Delta_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo die $\alpha, \beta, \ldots$ dieselben Werte haben wie in den Ausdrücken 6) von $x, y, z, \ldots$ Also folgt:

$$X - x = [\alpha\Delta], \qquad Y - y = [\beta\Delta], \ldots$$

und der Ausdruck 13) kann also zunächst so geschrieben werden:

$$[\Delta\Delta] = [\delta\delta] + [a\Delta][\alpha\Delta] + [b\Delta][\beta\Delta] + \cdots.$$

Nun ist:

$$[a\Delta][\alpha\Delta] = (\alpha_1 a_1 \Delta_1^2 + \alpha_2 a_2 \Delta_2^2 + \cdots + \alpha_n a_n \Delta_n^2) + \sum \alpha_i a_k \Delta_i \Delta_k;$$

die Summe kann man gleich Null setzen, da jedem Fehler $+\Delta_i$ ein Fehler $-\Delta_i$ entsprechen wird; für den ersten Teil aber muß man Mittelwerte einführen. Der mittlere Wert von Δ_1^2 kann offenbar

$$\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n} = \mu^2$$

geschätzt werden; ebenso der von $\Delta_2^2, \ldots \Delta_n^2$. Es wird also der mittlere Wert von

$$[a\Delta][\alpha\Delta] = \mu^2[\alpha a]$$

und ebenso wird im Mittel:

$$[b\Delta][\beta\Delta] = \mu^2[\beta b].$$

Dies gibt:

$$[\Delta\Delta] = [\delta\delta] + \mu^2([\alpha a] + [b\beta] + \cdots) \qquad 14)$$

(m Glieder, wenn m die Anzahl der Unbekannten ist.)

Der Wert der Klammergröße wird zugleich mit einigen später gebrauchten Relationen wie folgt erhalten. Trägt man

$$x = [\alpha l], \qquad y = [\beta l], \ldots$$

in die Normalgleichungen ein, so entstehen die Identitäten:

$$\begin{aligned} [aa][\alpha l] + [ab][\beta l] + \cdots &= [al] \\ [ba][\alpha l] + [bb][\beta l] + \cdots &= [bl]. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $l_1, l_2, \ldots l_n$ in diesen m Gleichungen erhält man die m Gruppen von je n Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha_1[aa] + \beta_1[ab] + \cdots &= a_1 \\ \alpha_2[aa] + \beta_2[ab] + \cdots &= a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad \text{A.}$$

n Gleichungen.

$$\begin{aligned} \alpha_1[ba] + \beta_1[bb] + \cdots &= b_1 \\ \alpha_2[ba] + \beta_2[bb] + \cdots &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad \text{B.}$$

n Gleichungen.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

m Gruppen.

Multipliziert man die Gl. A. der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots$ und addiert; dann die Gl. B. mit $a_1, a_2, \ldots$ und addiert usf., so kommen die m Gleichungen:

$$\begin{aligned} [aa][\alpha a] + [ab][\beta a] + \cdots &= [aa] \\ [ba][\alpha a] + [bb][\beta a] + \cdots &= [ab]. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Nennt man

$$[\alpha a] - 1 = \xi, \qquad [\beta a] = \eta, \ldots,$$

so werden diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + \cdots &= 0 \\ [ba]\xi + [bb]\eta + \cdots &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

und da die Determinante

$$\begin{vmatrix} [aa], & [ab], \dots \\ [ba], & [bb], \dots \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix},$$

welche auch die des Systems der Normalgleichungen ist, nicht verschwindet, so muß sein:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \dots$$

d. h.

$$[\alpha a] = 1, \qquad [\beta a] = 0, \dots \tag{15}$$

Multipliziert man die Gl. A., B., ... mit b_1, b_2, ..., so erhält man auf dieselbe Weise

$$[\beta a] = 0, \qquad [\beta b] = 1, \dots \text{ usf.} \tag{15a}$$

Multipliziert man die Gl. A. mit α_1, α_2, ... und addiert, ferner B. mit α_1, α_2, ... und addiert usf., so kommt:

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha][aa] + [\beta\alpha][ba] + \cdots &= [a\alpha] = 1 \\ [\alpha\alpha][ab] + [\beta\alpha][bb] + \cdots &= [b\alpha] = 0. \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \tag{16}$$

Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man A., B., ... mit β_1, β_2, ... multipliziert.

Multipliziert man endlich die Gl. 16) der Reihe nach mit α_1, β_1, ..., dann mit α_2, β_2, ... und addiert jedesmal, so erscheint mit Rücksicht auf A., B., ...

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha]a_1 + [\beta\alpha]b_1 + \cdots &= \alpha_1 \\ [\alpha\alpha]a_2 + [\beta\alpha]b_2 + \cdots &= \alpha_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \text{ usf.} \end{aligned} \tag{17}$$

Gehen wir jetzt auf 14) zurück, so wird daraus nach 15)

$$[\Delta\Delta] = [\delta\delta] + m\mu^2.$$

Da nun

$$\mu^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n},$$

so folgt

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-m}}. \tag{18}$$

Hierin sind die δ die Restfehler von den auf gleiches Gewicht 1 gebrachten n Bedingungsgleichungen mit m Unbekannten. Ermittelt man, wie das häufig geschieht, die Restfehler λ der ursprünglichen Bedingungsgleichungen, welche die Gewichte $p_1, \dots p_n$ haben, so wird nach den obigen Überlegungen

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-m}}. \tag{18a}$$

Ist $m = 1$, so erhält man die früher in Nr. 132, 133 aufgestellten Formeln für *eine* Unbekannte.

Nachdem jetzt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit festgestellt ist, bedarf es, um die mittleren Fehler der Unbekannten zu bestimmen, nach den Formeln 7) nur mehr der Bestimmung von $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, ..., zu der wir nun übergehen. Wir verbinden dieselbe mit der Darlegung einer Methode, nach welcher das System der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + \cdots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + \cdots &= [bl] \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

aufgelöst werden kann. Wir schicken voraus, daß dieses System ein symmetrisches ist, d. h. daß

$$[ik] = [ki],$$

wie aus der Definition unmittelbar hervorgeht, und daß die Koeffizienten der Diagonalreihe $[aa]$, $[bb]$, ... als Quadratsummen lauter positive Zahlen sind. Wir behandeln das dem System der Normalgleichungen verwandte System

$$\begin{aligned} &[aa]A + [ab]B + [ac]C + \cdots = P \\ &[ba]A + [bb]B + [bc]C + \cdots = R \\ &[ca]A + [cb]B + [cc]C + \cdots = S \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad (m \text{ Gleichungen}), \end{aligned} \tag{19}$$

worin A, B, C, ... die Unbekannten sind und P, R, S, ... algebraische Zeichen. Multipliziert man die Gl. 19) der Reihe nach mit den unbestimmten Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, ... Q_{1m} und addiert, so erscheint:

$$\left.\begin{aligned} &([aa]Q_{11} + [ba]Q_{12} + [ca]Q_{13} + \cdots)A \\ &+ ([ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [cb]Q_{13} + \cdots)B \\ &+ ([ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} + \cdots)C \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} = PQ_{11} + RQ_{12} + SQ_{13} + \cdots$$

Bestimmt man also die Größen Q_{11}, Q_{12}, ... aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &[aa]Q_{11} + [ba]Q_{12} + [ca]Q_{13} + \cdots = 1 \\ &[ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [cb]Q_{13} + \cdots = 0 \\ &[ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} + \cdots = 0 \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{I.}$$

so wird

$$A = PQ_{11} + RQ_{12} + SQ_{13} + \cdots \tag{a}$$

Multipliziert man ebenso die Gl. 19) mit den Koeffizienten Q_{21}, Q_{22}, ... und addiert, und bestimmt diese Koeffizienten dann aus

$$\begin{aligned} &[aa]Q_{21} + [ba]Q_{22} + [ca]Q_{23} + \cdots = 0 \\ &[ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [cb]Q_{23} + \cdots = 1 \\ &[ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23} + \cdots = 0 \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{II.}$$

so wird

$$B = PQ_{21} + RQ_{22} + SQ_{23} + \cdots \tag{b}$$

Man sieht nun weiter, wenn man Q_{31}, Q_{32}, ... aus

$$\begin{aligned} &[aa]Q_{31} + [ba]Q_{32} + [ca]Q_{33} + \cdots = 0 \\ &[ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [cb]Q_{33} + \cdots = 0 \\ &[ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} + \cdots = 1 \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{III.}$$

bestimmt, dann wird

$$C = PQ_{31} + RQ_{32} + SQ_{33} + \cdots \tag{c}$$

Allgemein: Bestimmt man die m^2 Größen Q_{ik}

$$\begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

aus den Gleichungen I., II., III., ..., so erhält man die Unbekannten A, B, C, ... aus den Gl. (a), (b), (c), ... Man zeigt leicht, daß die Q_{ik} ebenfalls ein symmetrisches System bilden, d. h. daß $Q_{ik} = Q_{ki}$ ist. Multipliziert man z. B. die Gl. I. der Reihe nach mit Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, ..., addiert und gruppiert in anderer Weise, so folgt:

$$\begin{aligned}
&([aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + \cdots)Q_{11} \\
&+ ([ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + \cdots)Q_{12} \\
&+ ([ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} + \cdots)Q_{13} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = Q_{21}
\end{aligned}$$

oder nach II.

$$Q_{12} = Q_{21}.$$

Daraus folgt, daß wenn man das System 19) auflöst, indem man für $[aa]$, $[ab]$, ... die Zahlenwerte einsetzt, die P, R, S, ... aber in diesen algebraischen Zeichen beibehält, sich die Unbekannten A, B, C, ... in den Formen (a), (b), (c), ... ergeben, womit gleichzeitig die Koeffizienten Q_{ik} als die Faktoren der P, R, S, ... bekannt werden.

Setzt man $P = [al]$, $R = [bl]$, $S = [cl]$, ..., so geht das System 19) in das der ursprünglichen Normalgleichungen über und es wird $x = A$, $y = B$, $z = C$, ... oder

$$\begin{aligned}
x &= [al]Q_{11} + [bl]Q_{12} + [cl]Q_{13} + \cdots \\
y &= [al]Q_{21} + [bl]Q_{22} + [cl]Q_{23} + \cdots \\
z &= [al]Q_{31} + [bl]Q_{32} + [cl]Q_{33} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad 20)$$

Daraus folgt die *Regel*: Man setzt für $[aa]$, $[ab]$, ... ihre numerischen Werte, für $[al]$, $[bl]$, ... aber unbestimmte Zeichen P, R, S, ... und löst die Normalgleichungen auf; es erscheinen dann die Unbekannten in der Form

$$\begin{aligned}
x &= PQ_{11} + RQ_{12} + SQ_{13} + \cdots \\
y &= PQ_{21} + RQ_{22} + SQ_{23} + \cdots \\
z &= PQ_{31} + RQ_{32} + SQ_{33} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ersetzt man hier P, Q, ... durch $[al]$, $[bl]$, ..., so hat man die Werte der Unbekannten. *(Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen.)* Gleichzeitig hat man die Koeffizienten Q_{ik} erlangt, die, wie jetzt gezeigt werden soll, zur Berechnung der mittleren Fehler dienen. Vergleicht man die Darstellung 20) der Unbekannten mit der früheren (Gl. 6) Seite 404), nämlich

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\
y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad 21)$$

so erkennt man, daß:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13} + \cdots \\
\alpha_2 &= a_2 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13} + \cdots \\
\alpha_3 &= a_3 Q_{11} + b_3 Q_{12} + c_3 Q_{13} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_1 &= a_1 Q_{21} + b_1 Q_{22} + c_1 Q_{23} + \cdots \\
\beta_2 &= a_2 Q_{21} + b_2 Q_{22} + c_2 Q_{23} + \cdots \\
\beta_3 &= a_3 Q_{21} + b_3 Q_{22} + c_3 Q_{23} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber:

$$[\alpha\alpha] = [a\alpha]Q_{11} + [b\alpha]Q_{12} + [c\alpha]Q_{13} + \cdots$$
$$[\beta\beta] = [a\beta]Q_{21} + [b\beta]Q_{22} + [c\beta]Q_{23} + \cdots$$

oder nach 15) (Seite 407)

$$[\alpha\alpha] = Q_{11}, \quad [\beta\beta] = Q_{22}, \quad \ldots \qquad 22)$$

Man hat also nach 7) für die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{11}}, \quad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{22}}, \quad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{33}}, \quad \ldots \qquad 23)$$

worin die Q_{11}, Q_{22}, ... durch die unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen bekannt geworden sind.

Nennt man p_x, p_y, ... die *Gewichte* der Unbekannten, so ist

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad \ldots$$

und daher

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}, \quad p_y = \frac{1}{Q_{22}}, \quad \ldots \qquad 24)$$

d. h. die Gewichte der Unbekannten sind die reziproken Werte der Koeffizienten Q_{11}, Q_{22}, ...

Die übrigen Q stehen gleichfalls in einer einfachen Beziehung zu den α, β, ...; in der Tat folgt:

$$[\alpha\beta] = [a\beta]Q_{11} + [b\beta]Q_{12} + [c\beta]Q_{13} + \cdots$$

oder

$$[\alpha\beta] = Q_{12}.$$

Ebenso

$$[\alpha\gamma] = Q_{13}, \quad [\beta\gamma] = Q_{23} \quad \text{usf.}$$

Multipliziert man die obigen Gleichungen für α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... der Reihe nach mit den Restfehlern δ_1, δ_2, ..., so erhält man vermöge der früher abgeleiteten Gleichungen $[\delta a] = 0$, $[\delta b] = 0$, ...:

$$[\delta\alpha] = 0, \quad [\delta\beta] = 0, \quad [\delta\gamma] = 0, \quad \ldots \qquad 25)$$

die zur Kontrolle dienen können, wenn man sich die Mühe nimmt, die α, β, ... zu berechnen.

135. Der Gaußsche Algorithmus zur Auflösung der Normalgleichungen. Die eben gegebene, theoretisch grundlegende Auflösungsmethode der Normalgleichungen kann in praxi nur selten zur Anwendung kommen, da sie nur bequem ausführbar ist, wenn die Koeffizienten in den Normalgleichungen runde Zahlen und viele derselben gleich Null sind. Im allgemeinen Falle schlägt man folgendes von Gauß gegebene Eliminationsverfahren ein, das wir für vier Unbekannte in extenso ansetzen mit dem Bemerken, daß es sich ohne weiteres auf beliebig viele Unbekannte ausdehnen läßt. Es seien die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t &= [al] \\
[ba]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t &= [bl] \\
[ca]x + [cb]y + [cc]z + [cd]t &= [cl] \\
[da]x + [db]y + [dc]z + [dd]t &= [dl].
\end{aligned} \qquad 1)$$

Wird der aus der ersten folgende Wert von x:

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t + \frac{[al]}{[aa]}$$

in die drei übrigen eingetragen, so kommt:

$$\left([bb] - \frac{[ab]\,[ba]}{[aa]}\right)y + \left([bc] - \frac{[ac]\,[ba]}{[aa]}\right)z + \left([bd] - \frac{[ad]\,[ba]}{[aa]}\right)t = [bl] - \frac{[al]\,[ba]}{[aa]}$$

$$\left([cb] - \frac{[ab]\,[ca]}{[aa]}\right)y + \left([cc] - \frac{[ac]\,[ca]}{[aa]}\right)z + \left([cd] - \frac{[ad]\,[ca]}{[aa]}\right)t = [cl] - \frac{[al]\,[ca]}{[aa]}$$

$$\left([db] - \frac{[ab]\,[da]}{[aa]}\right)y + \left([dc] - \frac{[ac]\,[da]}{[aa]}\right)z + \left([dd] - \frac{[ad]\,[da]}{[aa]}\right)t = [dl] - \frac{[al]\,[da]}{[aa]}.$$

Man überzeugt sich sofort, daß dieses System wieder ein symmetrisches ist. Setzt man es kurz so an:

$$\begin{aligned} [bb\,1]y + [bc\,1]z + [bd\,1]t &= [bl\,1] \\ [bc\,1]y + [cc\,1]z + [cd\,1]t &= [cl\,1] \\ [bd\,1]y + [dc\,1]z + [dd\,1]t &= [dl\,1] \end{aligned} \qquad 2)$$

so ist die Bedeutung der Koeffizienten unmittelbar ersichtlich. Man kann auch leicht zeigen, daß die Koeffizienten der Diagonalreihe ebenfalls Quadratsummen sind, also sämtlich positiv sein müssen; in der Tat ist:

$$[bb\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ba]}{[aa]} = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ba]}{[aa]} = \left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \cdots$$

Das System 2) wird nun genau so behandelt wie 1), d. h. man setzt

$$y = -\frac{[bc\,1]}{[bb\,1]}z - \frac{[bd\,1]}{[bb\,1]}t + \frac{[bl\,1]}{[bb\,1]}$$

in die beiden letzten Gleichungen ein, setzt zur Abkürzung

$$[cc\,1] - \frac{[bc\,1]\,[bc\,1]}{[bb\,1]} = [cc\,2], \qquad [cl\,1] - \frac{[bl\,1]\,[bc\,1]}{[bb\,1]} = [cl\,2]$$

$$[cd\,1] - \frac{[bd\,1]\,[bc\,1]}{[bb\,1]} = [cd\,2], \qquad [dl\,1] - \frac{[bl\,1]\,[bd\,1]}{[bb\,1]} = [dl\,2]$$

$$[dd\,1] - \frac{[bd\,1]\,[bd\,1]}{[bb\,1]} = [dd\,2],$$

und erhält:

$$\begin{aligned} [cc\,2]z + [cd\,2]t &= [cl\,2] \\ [cd\,2]z + [dd\,2]t &= [dl\,2] \end{aligned} \qquad 3)$$

wovon dasselbe gilt, wie von 2).

Wir fahren fort und tragen

$$z = -\frac{[cd\,2]}{[cc\,2]}t + \frac{[cl\,2]}{[cc\,2]}$$

in die letzte Gleichung ein, worauf, wenn

$$[dd\,2] - \frac{[cd\,2]\,[cd\,2]}{[cc\,2]} = [dd\,3]$$

$$[dl\,2] - \frac{[cl\,2]\,[cd\,2]}{[cc\,2]} = [dl\,3]$$

gesetzt wird, erscheint:

$$[dd\,3]t = [dl\,3] \qquad 4)$$

Stellt man die sukzessive erlangten Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} [aa]x+[ab]y\ &+[ac]z\ &+[ad]t\ &=[al]\\ [bb\,1]y+[bc\,1]z&+[bd\,1]t&=[bl\,1]\\ [cc\,2]z&+[cd\,2]t&=[cl\,2]\\ [dd\,3]t&=[dl\,3] \end{aligned} \qquad 5)$$

so erkennt man, daß die letzte t ergibt, dann die vorletzte z usf. Man nennt die Gleichungen 5) die *Eliminationsgleichungen* oder in der bequemeren Form:

$$\begin{aligned} x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[ad]}{[aa]}t&=\frac{[al]}{[aa]}\\ y+\frac{[bc\,1]}{[bb\,1]}z+\frac{[bd\,1]}{[bb\,1]}t&=\frac{[bl\,1]}{[bb\,1]}\\ z+\frac{[cd\,2]}{[cc\,2]}t&=\frac{[cl\,2]}{[cc\,2]}\\ t&=\frac{[dl\,3]}{[dd\,3]} \end{aligned} \qquad 6)$$

die *reduzierten Normalgleichungen*. Die Koeffizienten derselben lassen sich durch ein ganz mechanisches Verfahren bilden, ohne daß man auf die angegebenen Formeln rekurrieren müßte. Wir werden dies unten an einem Beispiel auseinandersetzen.

Ein besonderes Verfahren zur Ermittelung der Unbekannten aus 6) abzuleiten, ist eigentlich kaum nötig, doch kann zuweilen die unabhängige Berechnung einer Unbekannten von Nutzen sein. Schreibt man 6) in der abgekürzten Form:

$$\begin{aligned} x+A_1y+B_1z+C_1t&=\chi_1\\ y+B_2z+C_2t&=\chi_2\\ z+C_3t&=\chi_3\\ t&=\chi_4 \end{aligned} \qquad 6^a)$$

und multipliziert diese Gleichungen der Reihe nach mit 1, $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$, wo A_2 und A_3 noch zu bestimmende Koeffizienten sind, und addiert, so wird:

$$x=\chi_1-A_1\chi_2-A_2\chi_3-A_3\chi_4,$$

wenn man A_2 und A_3 so bestimmt, daß die Koeffizienten von z und t gleich Null werden, d. h. wenn man die Gleichungen

$$\begin{aligned} B_1-A_1B_2-A_2&=0\\ C_1-A_1C_2-A_2C_3-A_3&=0 \end{aligned}$$

befriedigt; dies gibt aber

$$\begin{aligned} A_2&=B_1-A_1B_2\\ A_3&=C_1-A_1C_2-A_2C_3. \end{aligned} \qquad 7)$$

Multipliziert man ebenso, um y zu finden, die drei letzten Gleichungen $6^a)$ mit 1, $-B_2$, $-B_3$ und addiert, so wird

$$y=\chi_2-B_2\chi_3-B_3\chi_4,$$

wenn gesetzt wird

$$B_3=C_2-B_2C_3. \qquad 8)$$

Endlich folgt aus den beiden letzten Gleichungen $6^a)$

$$z=\chi_3-C_3\chi_4, \qquad t=\chi_4.$$

Rechnet man also aus 7) und 8) die Koefffzienten A_2, A_3, B_3, so hat man folgende direkte, lineare Darstellung der Unbekannten in den χ:

$$\begin{aligned} x &= \chi_1 - A_1\chi_2 - A_2\chi_3 - A_3\chi_4 \\ y &= \chi_2 - B_2\chi_3 - B_3\chi_4 \\ z &= \chi_3 - C_3\chi_4 \\ t &= \chi_4 , \end{aligned} \qquad 9)$$

woraus man sie in beliebiger Reihenfolge berechnen kann.

Wir kommen nun zur Berechnung der *Gewichte und der mittleren Fehler der Unbekannten.* Man muß hierzu Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} + [ad]Q_{14} &= 1 \\ [ba]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} + [bd]Q_{14} &= 0 \\ [ca]Q_{11} + [cb]Q_{12} + [cc]Q_{13} + [cd]Q_{14} &= 0 \\ [da]Q_{11} + [db]Q_{12} + [dc]Q_{13} + [dd]Q_{14} &= 0 \end{aligned} \qquad 10)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + [ad]Q_{24} &= 0 \\ [ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + [bd]Q_{24} &= 1 \\ [ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} + [cd]Q_{24} &= 0 \\ [da]Q_{21} + [db]Q_{22} + [dc]Q_{23} + [dd]Q_{24} &= 0 \end{aligned} \qquad 11)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} + [ad]Q_{34} &= 0 \\ [ba]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} + [bd]Q_{34} &= 0 \\ [ca]Q_{31} + [cb]Q_{32} + [cc]Q_{33} + [cd]Q_{34} &= 1 \\ [da]Q_{31} + [db]Q_{32} + [dc]Q_{33} + [dd]Q_{34} &= 0 \end{aligned} \qquad 12)$$

$$\begin{aligned} [aa]Q_{41} + [ab]Q_{42} + [ac]Q_{43} + [ad]Q_{44} &= 0 \\ [ba]Q_{41} + [bb]Q_{42} + [bc]Q_{43} + [bd]Q_{44} &= 0 \\ [ca]Q_{41} + [cb]Q_{42} + [cc]Q_{43} + [cd]Q_{44} &= 0 \\ [da]Q_{41} + [db]Q_{42} + [dc]Q_{43} + [dd]Q_{44} &= 1 \end{aligned} \qquad 13)$$

Wie man sieht, sind dies links genau dieselben Gleichungen wie die Normalgleichungen, nur rechts stehen andere Zahlenwerte; man kann sie also mit demselben Algorithmus auflösen wie diese, wenn man an Stelle der $[bl1]$, $[cl2]$, $[dl3]$, ... die entsprechenden Werte einsetzt. Dadurch vereinfachen sich aber die Gleichungen wesentlich, mit Ausnahme von 10), welche ungeändert zur Ermittlung von Q_{11} herangezogen werden müssen. Dagegen führt die oben für die Normalgleichungen durchgeführte Rechnung, angewendet auf 11), unter Beachtung, daß hier

$$[al] = 0 , \quad [bl] = 1 , \quad [cl] = 0 , \quad [dl] = 0 ,$$

also

$$[bl1] = 1 , \quad [cl1] = 0 , \quad [dl1] = 0$$

wird, zu den Gleichungen (vgl. Gl. 2))

$$\begin{aligned} [bb1]Q_{22} + [bc1]Q_{23} + [bd1]Q_{24} &= 1 \\ [bc1]Q_{22} + [cc1]Q_{23} + [cd1]Q_{24} &= 0 \\ [bd1]Q_{22} + [dc1]Q_{23} + [dd1]Q_{24} &= 0 \end{aligned} \qquad 14)$$

woraus sich Q_{22} ergibt.

Ferner ist für die Gl. 12)

$$[al] = 0, \quad [bl] = 0, \quad [cl] = 1, \quad [dl] = 0,$$

also

$$\begin{aligned} &[bl\,1] = 0, \quad [cl\,2] = 1 \\ &[cl\,1] = 1, \quad [dl\,2] = 0 \\ &[dl\,1] = 0 \end{aligned}$$

und daher nach 3):

$$\begin{aligned} [cc\,2]\,Q_{33} + [cd\,2]\,Q_{34} &= 1 \\ [cd\,2]\,Q_{33} + [dd\,2]\,Q_{34} &= 0, \end{aligned} \qquad 15)$$

woraus sich Q_{33} findet.

Endlich ist für die Auflösung von 13) zu setzen:

$$[al] = 0, \quad [bl] = 0, \quad [cl] = 0, \quad [dl] = 1,$$

also

$$\begin{aligned} &[bl\,1] = 0, \quad [cl\,2] = 0, \quad [dl\,3] = 1 \\ &[cl\,1] = 0, \quad [dl\,2] = 1 \\ &[dl\,1] = 1, \end{aligned}$$

so daß nach 4) kommt:

$$[dd\,3]\,Q_{44} = 1, \qquad 16)$$

wodurch Q_{44} gegeben ist. Die Gleichungen 10), 14), 15), 16) nennt man die *Gewichtsgleichungen.*

Aus 16) ersieht man, daß

$$Q_{44} = \frac{1}{[dd\,3]}$$

und da Q_{44} der reziproke Wert des Gewichtes der Unbekannten t ist, so erkennt man, daß *in der letzten Eliminationsgleichung*

$$[dd\,3]\,t = [dl\,3]$$

der Koeffizient der Unbekannten ihr Gewicht ist. Hiernach könnte man die Gewichte der Unbekannten auch so erhalten, daß man eine nach der anderen an den Schluß stellt und die Gleichungen von neuem auflöst. In der Regel ist jedoch der Gebrauch der Gewichtsgleichungen kürzer, insbesondere wenn man die Auflösung derselben durch Hinzufügung entsprechender Kolumnen gleich mit der Auflösung der Normalgleichungen für die Unbekannten verbindet, wie an dem unten folgenden Beispiel gezeigt werden soll.

Hat man das Seite 412 beschriebene Verfahren zur Auflösung der Eliminationsgleichungen eingeschlagen, so kann man mit den dort zur Verwendung gelangten Koeffizienten A, B, C auch die Gewichte bestimmen, was sich oft kürzer stellt, namentlich wenn man nur auf das Gewicht einer bestimmten Unbekannten Wert legt. Vergleicht man $[dd\,3]\,t = [dl\,3]$ mit $[dd\,3]\,Q_{44} = 1$, so ersieht man, daß t in Q_{44} übergeht, wenn man 1 statt $[dl\,3]$ setzt; man hat also, wie bereits bekannt,

$$Q_{44} = \frac{1}{[dd\,3]}.$$

Vergleicht man ferner die Gewichtsgleichungen

$$\begin{aligned} [cc\,2]\,Q_{33} + [cd\,2]\,Q_{34} &= 1 \\ [cd\,2]\,Q_{33} + [dd\,2]\,Q_{34} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Gleichungen

$$[cc2]x + [cd2]t = [cl2]$$
$$[cd2]x + [dd2]t = [dl2],$$

woraus

$$[cc2]x + [cd2]t = [cl2]$$
$$[dd3]t = [dl3],$$

so sieht man, daß x und t in Q_{33} und Q_{34} übergehen, wenn man $[cl2] = 1$, $[dl2] = 0$ setzt. Da nun

$$[dl3] = [dl2] - \frac{[cl2]\,[cd2]}{[cc2]},$$

so wird zu setzen sein:

$$[dl3] = -\frac{[cd2]}{[cc2]},$$

und daher wird:

$$Q_{33} + \frac{[cd2]}{[cc2]} Q_{34} = \frac{1}{[cc2]}$$
$$Q_{34} = -\frac{[cd2]}{[cc2]\,[dd3]}$$

oder nach der eingeführten Bezeichnung

$$Q_{33} + C_3 Q_{34} = \frac{1}{[cc2]}$$
$$Q_{34} = -\frac{C_3}{[dd3]},$$

woraus

$$Q_{33} = \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3^2}{[dd3]}.$$

So kann man fortfahren und hat dann folgende Zusammenstellung:

$$Q_{44} = \frac{1}{[dd3]}$$
$$Q_{33} = \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3^2}{[dd3]}$$
$$Q_{22} = \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2^2}{[cc2]} + \frac{B_3^2}{[dd3]}$$
$$Q_{11} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1^2}{[bb1]} + \frac{A_2^2}{[cc2]} + \frac{A_3^2}{[dd3]}.$$

Hierin kann man sämtliche auftretenden Größen der Rechnung für die Unbekannten entnehmen.

136. Der Gaußsche Satz über das Gewicht der Unbekannten. Zur Begründung des oben durchgeführten Ausgleichungsverfahrens haben wir uns des Prinzips bedient, daß die Fehlerquadratsumme ein Minimum werden müsse. Gauß hat nun gezeigt, daß *die hieraus fließende Bestimmung der Unbekannten denselben das größte Gewicht verleiht oder daß bei derselben ihr mittlerer Fehler der denkbar kleinste wird.* Durch diesen Satz rückt das Verfahren offenbar in ein neues Licht; es wird unabhängig vom genannten Prinzip und erscheint lediglich als der Ausfluß der Forderung, das *beste* Ausgleichsverfahren zur Bestimmung der Unbekannten zu finden.

Wir haben die Unbekannten der vorgelegten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots &= l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots &= l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots &= l_n \end{aligned} \qquad 1)$$

(n Gleichungen mit m Unbekannten)

durch die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + \cdots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + \cdots &= [bl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 2)$$

(m Gleichungen mit m Unbekannten)

zu

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 3)$$

bestimmt und deren Gewicht zu

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]}, \qquad p_y = \frac{1}{[\beta\beta]}, \qquad \cdots$$

festgestellt. Wir werden jetzt zeigen, daß die Bestimmung der Unbekannten durch 2) denselben das größtmögliche Gewicht verleiht unter allen linearen Kombinationen, die man aus 1) bilden kann. Wie wir also 2) gebildet haben, so bilden wir jetzt ganz beliebige lineare Kombinationen, an Anzahl m, um die m Unbekannten zu bestimmen, nämlich folgende:

$$\begin{aligned} A_1(a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1) + A_2(a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2) + \cdots &= 0 \\ B_1(a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1) + B_2(a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2) + \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

(m Gleichungen).

Dies kann man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} [Aa]x + [Ab]y + \cdots &= [Al] \\ [Ba]x + [Bb]y + \cdots &= [Bl] \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 4)$$

(m Gleichungen).

Löst man sie nach x, y, z, ... auf, so erhält man wie früher

$$\begin{aligned} x &= \varkappa_1 l_1 + \varkappa_2 l_2 + \cdots + \varkappa_n l_n \\ y &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_n l_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad 5)$$

und die Gewichte derselben werden (siehe Seite 404)

$$p_x = \frac{1}{[\varkappa\varkappa]}, \qquad p_y = \frac{1}{[\lambda\lambda]}, \qquad \cdots$$

Um $[\varkappa\varkappa]$, ... zu bestimmen, substituieren wir 5) in 4) und erhalten die Identitäten:

$$\begin{aligned} [Aa](\varkappa_1 l_1 + \varkappa_2 l_2 + \cdots) + [Ab](\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots) + \cdots &= [Al] \\ [Ba](\varkappa_1 l_1 + \varkappa_2 l_2 + \cdots) + [Bb](\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots) + \cdots &= [Bl] \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned},$$

aus denen sich, da die $A, B, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots$ unabhängig von den l sind, durch Gleichsetzung der Koeffizienten von $l_1, l_2, \ldots$ links und rechts ergiebt:

$$\begin{array}{l|l|l} [Aa]\varkappa_1 + [Ab]\lambda_1 + \cdots = A_1 & [Ba]\varkappa_1 + [Bb]\lambda_1 + \cdots = B_1 & \\ [Aa]\varkappa_2 + [Ab]\lambda_2 + \cdots = A_2 & [Ba]\varkappa_2 + [Bb]\lambda_2 + \cdots = B_2 & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array} \qquad 6)$$

Werden die Gleichungen dieser m Gruppen mit $a_1, a_2, \ldots$ multipliziert und addiert, so erscheinen die m Gleichungen:

$$\begin{array}{l} [Aa][\varkappa a] + [Ab][\lambda a] + \cdots = [Aa] \\ [Ba][\varkappa a] + [Bb][\lambda a] + \cdots = [Ba] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Faßt man hierin $[\varkappa a], [\lambda a], \ldots$ als Unbekannte auf, und löst auf, so kommt:

$$[\varkappa a] = 1, \quad [\lambda a] = 0, \quad [\nu a] = 0, \quad \ldots$$

denn die Determinante des Systems, welche auch die von 4) ist, ist notwendig von Null verschieden, wenn 4) überhaupt geeignet sein soll, die Unbekannten zu bestimmen. — Multipliziert man die Gruppen 6) mit $b_1, b_2, \ldots$, so erhält man ebenso:

$$[\varkappa b] = 0, \quad [\lambda b] = 1, \quad [\nu b] = 0, \quad \ldots$$

Wir haben also die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2 + \cdots = 1 \\ \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2 + \cdots = 0 \\ \varkappa_1 c_1 + \varkappa_2 c_2 + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad 7)$$

Für die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, welche durch die Methode der kleinsten Quadrate eingeführt werden (Gl. 3), haben wir früher die Gleichungen bewiesen (Seite 407)

$$\begin{array}{l} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots = 1 \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots = 0 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad 8)$$

Durch Subtraktion folgt aus 7) und 8)

$$\begin{array}{l} (\varkappa_1 - \alpha_1)a_1 + (\varkappa_2 - \alpha_2)a_2 + \cdots = 0 \\ (\varkappa_1 - \alpha_1)b_1 + (\varkappa_2 - \alpha_2)b_2 + \cdots = 0 \\ (\varkappa_1 - \alpha_1)c_1 + (\varkappa_2 - \alpha_2)c_2 + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \ldots$ multipliziert und addiert, so ergiebt sich:

$$(\varkappa_1 - \alpha_1)(a_1[\alpha\alpha] + b_1[\alpha\beta] + c_1[\alpha\gamma] + \cdots) + (\varkappa_2 - \alpha_2)(a_2[\alpha\alpha] + b_2[\alpha\beta] + c_2[\alpha\gamma] + \cdots) + \cdots = 0$$

oder nach den Gl. 17) (Seite 407)

$$(\varkappa_1 - \alpha_1)\alpha_1 + (\varkappa_2 - \alpha_2)\alpha_2 + \cdots = 0,$$

oder

$$2\alpha_1(\alpha_1 - \varkappa_1) + 2\alpha_2(\alpha_2 - \varkappa_2) + \cdots = 0.$$

Nun ist

$$2\alpha(\alpha - \varkappa) = 2\alpha^2 - 2\alpha\varkappa = (\alpha - \varkappa)^2 + \alpha^2 - \varkappa^2,$$

also läßt sich die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$(\alpha_1 - \varkappa_1)^2 + (\alpha_2 - \varkappa_2)^2 + \cdots + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots) - (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \cdots) = 0$$

oder

$$[\varkappa\varkappa] = [\alpha\alpha] + [\alpha - \varkappa,\ \alpha - \varkappa],$$

d. h. es ist *immer*:

$$[\varkappa\varkappa] > [\alpha\alpha].$$

Die nach der Methode der kleinsten Quadrate genommene Kombination gibt also unter allen möglichen den kleinsten Wert $[\varkappa\varkappa]$ und folglich den Unbekannten das größte Gewicht oder den kleinsten mittleren Fehler.

137. Bildung der Normalgleichungen. Kontrollmaßregeln. Die praktische Ausführung der im vorigen begründeten Rechnungsmethoden erheischt eine streng systematische Anordnung und die Einführung einiger fortlaufenden Kontrollmaßregeln, da sonst bei dem Umfange, den die Rechnungen bei vielen Unbekannten und Bedingungsgleichungen annehmen, alle Übersicht und Sicherheit verloren ginge. Der Zuwachs an Arbeit, der dadurch entsteht, wird, wie jeder erfahrene Rechner weiß, reichlich aufgewogen durch das Gefühl der Sicherheit und durch die Schnelligkeit, mit der jeder begangene Fehler aufgefunden wird.

Eine erste wichtige Maßregel ist die *Homogenisierung* der vorgelegten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{a}_1\xi + \mathfrak{b}_1\eta + \mathfrak{c}_1\zeta + \cdots = \mathfrak{l}_1 & \text{Gewicht} & p_1 \\
\mathfrak{a}_2\xi + \mathfrak{b}_2\eta + \mathfrak{c}_2\zeta + \cdots = \mathfrak{l}_2 & \text{»} & p_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{»} & \vdots \\
\mathfrak{a}_n\xi + \mathfrak{b}_n\eta + \mathfrak{c}_n\zeta + \cdots = \mathfrak{l}_n & \text{»} & p_n
\end{array} \qquad 1)$$

(n Gleichungen mit m Unbekannten).

Nachdem diese Gleichungen nämlich, um auf gleiches Gewicht 1 gebracht zu werden, mit den Quadratwurzeln aus ihren respektiven Gewichten durchmultipliziert worden sind, sind die Koeffizienten der einzelnen Unbekannten meistens von sehr verschiedener Größenordnung geworden; dies macht sich bei der Bildung der $[aa]$, $[ab]$, $\cdots$ insofern unangenehm bemerkbar, als man, um die Genauigkeit einer bestimmten Dezimalstelle festzuhalten, verschiedene Hilfsmittel für die großen und für die kleinen Zahlen heranziehen muß. Der einfachste Weg, dem abzuhelfen, ist die Einführung anderer Unbekannten, was am zweckmäßigsten wie folgt geschieht. Ist α der größte von den Koeffizienten von ξ, nämlich

$$\mathfrak{a}_1\sqrt{p_1},\quad \mathfrak{a}_2\sqrt{p_2},\quad \ldots\quad \mathfrak{a}_n\sqrt{p_n},$$

ebenso β der größte von den Koeffizienten von η, nämlich

$$\mathfrak{b}_1\sqrt{p_1},\quad \mathfrak{b}_1\sqrt{p_2},\quad \ldots\quad \mathfrak{b}_n\sqrt{p_n}$$

usf., so schreibe man die auf gleiches Gewicht gebrachten Bedingungsgleichungen so:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{a}_1\sqrt{p_1}}{\alpha}(\alpha\xi) + \frac{\mathfrak{b}_1\sqrt{p_1}}{\beta}(\beta\eta) + \cdots &= \frac{\mathfrak{l}_1\sqrt{p_1}}{\lambda}\lambda \\
\frac{\mathfrak{a}_2\sqrt{p_2}}{\alpha}(\alpha\xi) + \frac{\mathfrak{b}_2\sqrt{p_2}}{\beta}(\beta\eta) + \cdots &= \frac{\mathfrak{l}_2\sqrt{p_2}}{\lambda}\lambda, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

d. h. man dividiere alle Koeffizienten einer Unbekannten durch den größten derselben und führe das Produkt aus diesem größten Koeffizienten in die Unbekannte als neue Unbekannte ein:

$$x = \alpha\xi, \quad y = \beta\eta, \quad z = \gamma\zeta, \quad \ldots \qquad 2)$$

Setzt man noch

$$\frac{a_1\sqrt{p_1}}{\alpha} = a_1, \quad \ldots$$

so werden die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots &= l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots &= l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots &= l_n. \end{aligned} \qquad 3)$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen, die nun homogene Koeffizienten haben werden, die Unbekannten $x, y, \ldots$ mit ihren Gewichten $p_x, p_y, \ldots$, so ergeben sich die eigentlichen Unbekannten und ihre Gewichte sofort aus:

$$\xi = \frac{x}{\alpha}, \qquad \eta = \frac{y}{\beta}, \qquad \ldots$$

und

$$p_\xi = \frac{p_x}{\alpha}, \qquad p_\eta = \frac{p_y}{\beta}, \qquad \ldots$$

Um aus den Gleichungen 3) die Normalgleichungen zu bilden, muß man die $[aa]$, $[ab]$, ... berechnen. Dies gelingt am schnellsten und sichersten mittels einer Rechenmaschine; hat man eine solche nicht zur Verfügung, so bedient man sich nach Bessels Vorschlag am besten einer Quadrattafel, während die Berechnung mit Logarithmen in der Regel wegen der leichten Möglichkeit eines Zeichenfehlers nicht zu empfehlen ist. Mit der Quadrattafel kann man nicht nur die reinen Quadratsummen $[aa]$, $[bb]$, ... bilden, indem man die ihr entnommenen Quadrate einfach summiert, sondern man kann auch die Produktsummen $[ab]$, $[ac]$, ... mittels eines einfachen Verfahrens erhalten. Denn bildet man außer $[aa]$, $[bb]$, die man ohnehin braucht, auch noch $[a+b, a+b]$ oder $[a-b, a-b]$, so hat man wegen

$$\begin{aligned} (a+b)(a+b) &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)(a-b) &= a^2 + b^2 - 2ab \end{aligned}$$

sofort:

$$[ab] = \tfrac{1}{2}\{[a+b, a+b] - [aa] - [bb]\} \qquad 4)$$

oder:

$$[ab] = \tfrac{1}{2}\{[aa] + [bb] - [a-b, a-b]\}.$$

Um sämtliche Koeffizienten der Normalgleichungen aus Bedingungsgleichungen mit 6 Unbekannten

$$ax + by + cz + dt + eu + fv = l$$

zu erhalten, hat man also zu bilden die Quadratsummen von

$$\begin{aligned} &a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ l, \\ &a+b,\ a+c,\ a+d,\ a+e,\ a+f,\ a+l, \\ &b+c,\ b+d,\ b+e,\ b+f,\ b+l, \\ &c+d,\ c+e,\ c+f,\ c+l, \\ &d+e,\ d+f,\ d+l, \\ &e+f,\ e+l, \\ &f+l, \end{aligned}$$

womit sich sämtliche Quadrat- und Produktsummen ergeben. Man wird dieses Verfahren auch anwenden, wenn man eine Rechenmaschine benutzt, da man dann aller Vorsicht betreffs der Vorzeichen überhoben ist.

Da die Normalgleichungen die Grundlage für alle folgenden Rechnungen bilden, ist es wichtig, sie genau zu kontrollieren. Dies geschieht am sichersten durch die Einführung der sogenannten »Summengleichung«, die dann auch weiterhin bei der Auflösung der Normalgleichungen die wertvollste, fortlaufende Kontrolle bietet und deren Bildung daher *niemals* unterlassen wird. Rechnet man nämlich

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + \cdots &= s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + \cdots &= s_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

wo m die Zahl der Unbekannten ist. Die Quadratbildung wird hierdurch mit Ausnahme der von l abhängigen Glieder vollständig kontrolliert. Man kann aber auch eine Gleichung aufstellen, wodurch die Koeffizienten der Normalgleichungen selbst geprüft werden. Wenn man nämlich die Relationen:

$$\begin{aligned}
2\,[ab] &= [(a+b)^2] - [aa] - [bb]\\
2\,[ac] &= [(a+c)^2] - [aa] - [cc]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2\,[bc] &= [(b+c)^2] - [bb] - [cc]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2\,[cd] &= [(c+d)^2] - [cc] - [dd]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

addiert, so kommt nach Anwendung der Formel 6) sofort:

$$2\left\{\begin{array}{r}[ab]+[ac]+[ad]+\cdots\\ +[bc]+[bd]+\cdots\\ +[cd]+\cdots\\ +\cdots\end{array}\right\} = [ss] - ([aa]+[bb]+[cc]+\cdots). \qquad 7)$$

Zur Anwendung dieser Formel braucht man nur $[ss]$ zu berechnen.

Wenn man in die s auch die l aufnimmt, also setzt

$$s' = a+b+c+\cdots+l, \qquad 8)$$

so wird die Formel 7)

$$2\left\{\begin{array}{r}[ab]+[ac]+[ad]+\cdots+[al]\\ +[bc]+[bd]+\cdots+[bl]\\ +[cd]+\cdots+[cl]\\ +\cdots\end{array}\right\} = [s's'] - ([aa]+[bb]+\cdots+[ll]) \qquad 9)$$

und es werden dann auch die von l abhängigen Koeffizienten der Normalgleichung geprüft. Für die weiteren Kontrollrechnungen sind die nach 4^a) definierten s etwas bequemer und es sollen daher diese beibehalten werden. Zur *vollständigen* Kontrolle der Normalgleichungen aber kann man auch dann ohne viel Mühe von 8) und 9) Gebrauch machen.

Wenn man die Normalgleichungen addiert, so erhält man die »Summengleichung«:

$$[sa]x + [sb]y + [sc]z + \cdots = [sl]. \qquad 10)$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß wenn man diese gewissermaßen als letzte Normalgleichung mitführt und sie beim Eliminationsprozess ständig denselben Operationen unterwirft wie die Normalgleichungen selbst, dadurch auf jeder Stufe der Rechnung eine Kontrolle erlangt wird. In der Tat, schließt man 10) den Gl. 1) (Seite 410) an und eliminiert x auch aus ihr, so kommt:

$$\left([sb] - \frac{[ab]\,[sa]}{[aa]}\right)y + \left([sc] - \frac{[ac]\,[sa]}{[aa]}\right)z + \left([sd] - \frac{[ad]\,[sa]}{[aa]}\right)t = [sl] - \frac{[al]\,[sa]}{[aa]}$$

oder nach der dort eingeführten Bezeichnungsweise

$$[sb\,1]\,y + [sc\,1]\,z + [sd\,1]\,t = [sl\,1]$$

Man zeigt nun ohne weiteres, daß die Koeffizienten dieser Gleichung die Summen der entsprechenden Koeffizienten der drei anderen Gleichungen sind. In der Tat ist z. B.

$$[bb] - \frac{[ab]\,[ba]}{[aa]} + [bc] - \frac{[ab]\,[ca]}{[aa]} + [bd] - \frac{[ab]\,[da]}{[aa]}$$
$$= [bb] + [bc] + [bd] - \frac{[ab]}{[aa]}\{[ba] + [ca] + [da]\}$$
$$= [ab] + [bb] + [bc] + [bd] - \frac{[ab]}{[aa]}\{[aa] + [ba] + [ca] + [da]\}$$
$$= [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] = [sb\,1]\,.$$

Dasselbe gilt für alle folgenden Eliminationen. Durch einfache Bildung der Summen und Vergleich mit den durch die Summengleichung gelieferten Resultaten hat man die Kontrolle, die auch stets anzeigt, wo ein begangener Fehler ungefähr liegt.

Eine andere Kontrolle besteht in der doppelten Berechnung der Fehlerquadratsumme $[\delta\delta]$. Man kann diese nämlich einmal direkt durch Einsetzung der annehmbarsten Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen und Bestimmung der übrigbleibenden Fehler berechnen, eine Operation, die man schon aus anderen Gründen niemals unterlassen wird, zweitens aber wird sie auch durch die Eliminationsrechnung selbst dargeboten. In der Tat, multipliziert man die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}\delta_1 &= a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1\\ \delta_2 &= a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

mit $l_1, l_2, \cdots$ und addiert, so wird:

$$[\delta l] = [la]x + [lb]y + \cdots - [ll]$$

und multipliziert man sie mit $\delta_1, \delta_2, \cdots$ und addiert, so kommt:

$$[\delta\delta] = [\delta a]x + [\delta b]y + \cdots - [\delta l]$$

oder da $[\delta a] = [\delta b] = \cdots = 0$ ist:

$$[\delta\delta] = -[\delta l]\,;$$

somit hat man:

$$[\delta\delta] = [ll] - [la]x - [lb]y - \cdots.$$

Eliminiert man hier x durch

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \cdots + \frac{[al]}{[aa]}$$

und dann y durch

$$y = -\frac{[bc\,1]}{[bb\,1]}z - \cdots + \frac{[bl\,1]}{[bb\,1]}$$

dann z usf., so erhält man nach einfachen Reduktionen:

$$[\delta\delta] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl\,1]^2}{[bb\,1]} - \frac{[cl\,2]^2}{[cc\,2]} - \cdots \qquad 11)$$

oder, wenn wir ebenfalls die Gaußsche Abkürzung einführen:

$$[ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} = [ll_1]$$

$$[ll_1] - \frac{[bl_1]^2}{[bb_1]} = [ll_2]$$

. . . . . .

schließlich:

$$[\delta\delta] = [llm] \qquad 12)$$

wenn m die Anzahl der Unbekannten bedeutet. Die sämmtlichen Koeffizienten in 11) können der Eliminationsrechnung entnommen werden; man kann durch Berechnung der einzelnen Glieder konstatieren, um welchen Betrag die ursprüngliche Quadratsumme $[ll]$ durch jede einzelne Unbekannte reduziert wird, bis mit Ersetzung der letzten Unbekannten durch ihren Wert die definitive Fehlerquadratsumme übrig bleibt, die mit der direkt berechneten übereinstimmen muß.

138. Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen. In den Anwendungen der Ausgleichungsrechnung auf die Bahnverbesserung tritt nicht selten der Fall ein, daß sich die Auflösung der Normalgleichungen nur mit großer Unsicherheit vollzieht. Man erkennt das Auftreten dieses Falles schon von vornherein daran, daß eine oder mehrere Normalgleichungen Vielfache einer anderen sind. Die Gleichungen sind dann nicht voneinander unabhängig und reichen somit zur Bestimmung aller Unbekannten nicht aus. Ist man nicht von vornherein hierauf aufmerksam geworden, so wird man bei der Bildung der Eliminationsgleichungen von selbst darauf geführt. Es werden dann nämlich, wie man leicht übersieht, die *ersten* Koeffizienten in den Eliminationsgleichungen sehr klein oder sogar negativ, während sie theoretisch positiv sein müssen. Die Bestimmung der betreffenden Unbekannten ist dann offenbar einer besonderen Unsicherheit unterworfen.

Theoretisch ist in einem solchen Falle natürlich nichts zu machen und die Unsicherheit ist ohne Hinzuziehung neuer Bedingungsgleichungen nicht zu beseitigen. Da aber die Unsicherheit der einen Unbekannten auch auf die Bestimmung der anderen rückwirkt, so wird man in praxi die unsicheren Unbekannten an das Ende der Normalgleichungen stellen und die Gleichungen dann soweit auflösen, bis die Unsicherheit eintritt. Die soweit erlangten Eliminationsgleichungen gestatten dann, die ersten Unbekannten durch die unsicheren auszudrücken und man kann nun weiter in verschiedener dem jeweiligen Fall angepaßter Weise verfahren. Entweder man verzichtet auf die Bestimmung der unsicheren Unbekannten ganz, d. h. man setzt sie Null und bestimmt demgemäß die anderen, oder man wartet weitere Beobachtungen ab, durch welche die unsicheren Unbekannten bestimmt werden und bestimmt dann die übrigen mittels der erlangten Gleichungen, oder man macht verschiedene Hypothesen über die unsicheren Unbekannten, untersucht für jede die Darstellung der Bedingungsgleichungen und wählt diejenige aus, die am plausibelsten erscheint. Will man mit dem vorgelegten Material die unsicheren Unbekannten wenigstens so gut es geht bestimmen, so vermeidet man die Unsicherheit der Rechnung am besten, wenn man folgendermaßen verfährt. Man setzt die sicheren Unbekannten als Funktionen

der unsicheren in die *Bedingungsgleichungen* ein, welche dann eine Reihe von Gleichungen *nur* zwischen den unsicheren Unbekannten darstellen werden; diese Gleichungen löst man dann von neuem nach der Methode der kleinsten Quadrate auf.

139. Beispiel für die Durchführung einer Ausgleichung. Wir behandeln folgende der Nr. 143 entnommenen Bedingungsgleichungen, die bereits durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten auf das gleiche Gewicht 1 gebracht sind (Koeffizienten in Logarithmen).

$0.2071\,dM_0 +$	$1.2517\,d\mu +$	$9.5382\,d\varphi +$	$0.3132\,d\mathbf{s} +$	$8.5183\,d\mathbf{p} +$	$9.5007\,d\mathbf{q} =$	0.4172
0.0819	2.7248	0.3705_n	0.1127	9.5517_n	9.0942	= »
0.2824	3.2408	0.0665_n	0.1954	8.7700	9.1458	= 0.1651
0.0643	3.3223	9.9630	0.1459	8.5129	9.0088	$= 1.2801_n$
0.2130	3.9817	0.0438_n	0.2916	9.1566_n	9.6371	$= 2.0266_n$
9.4154_n	0.4016_n	8.7551_n	9.5182_n	9.3134	0.2958	$= 9.1505_n$
9.4983_n	2.0576_n	9.7755	9.5444_n	0.0928_n	9.6354	= 0.4771
9.2598	2.2522	8.6151_n	9.1656	9.7849_n	0.1607_n	= 0.6628
8.9457_n	2.2011_n	8.8680_n	9.0266_n	9.6305	0.1265	= 9.6020
9.5734_n	3.3384_n	9.2425	9.6550_n	9.7885_n	0.2690	= 1.4009

Um sie homogen zu machen, führen wir folgende Unbekannte ein

$$
\begin{aligned}
x &= [0.2824]\,dM_0\\
y &= [3.9817]\,d\mu\\
z &= [0.3705]\,d\varphi\\
t &= [0.3132]\,d\mathbf{s}\\
u &= [0.0928]\,d\mathbf{p}\\
v &= [0.2958]\,d\mathbf{q}
\end{aligned}
$$

und drücken die l statt in Sekunden in einer Einheit aus, deren log gleich 2.0266 ist. Die Gleichungen werden dann:

a	b	c	d	e	f	l	s
$+ 0.8408\,x$	$+ 0.0019\,y$	$+ 0.1471\,z$	$+ 1.0000\,t$	$+ 0.0266\,u$	$+ 0.1603\,v$	$= + 0.0246$	$+ 2.1767$
$+ 0.6303$	$+ 0.0553$	$- 1.0000$	$+ 0.6303$	$- 0.2877$	$+ 0.0629$	$= + 0.0000$	$+ 0.0911$
$+ 1.0000$	$+ 0.1816$	$- 0.4964$	$+ 0.7624$	$+ 0.0476$	$+ 0.0708$	$= + 0.0138$	$+ 1.5660$
$+ 0.6052$	$+ 0.2191$	$+ 0.3913$	$+ 0.6803$	$+ 0.0263$	$+ 0.0516$	$= - 0.1793$	$+ 1.9738$
$+ 0.8524$	$+ 1.0000$	$- 0.4713$	$+ 0.9515$	$- 0.1158$	$+ 0.2194$	$= - 1.0000$	$+ 2.4362$
$- 0.1358$	$- 0.0003$	$- 0.0242$	$- 0.1603$	$+ 0.1662$	$+ 1.0000$	$= - 0.0013$	$+ 0.8456$
$- 0.1644$	$- 0.0119$	$+ 0.2541$	$- 0.1703$	$- 1.0000$	$+ 0.2186$	$= + 0.0282$	$- 0.8739$
$+ 0.0949$	$+ 0.0186$	$- 0.0176$	$+ 0.0712$	$- 0.4912$	$- 0.7327$	$= + 0.0433$	$- 1.0568$
$- 0.0461$	$- 0.0166$	$- 0.0314$	$- 0.0517$	$+ 0.3449$	$+ 0.6772$	$= + 0.0038$	$+ 0.8763$
$- 0.1954$	$- 0.2274$	$+ 0.0745$	$- 0.2197$	$- 0.4962$	$+ 0.9402$	$= + 0.2368$	$- 0.1240$

Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen.

(Nach Seite 419.)

aa	bb	cc	dd	ee	ff	ll	ss	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$
0.7070	0.0000	0.0216	1.0000	0.0007	0.0257	0.0006	4.7380	0.7101	0.9759
0.3973	0.0031	1.0000	0.3973	0.0827	0.0040	0.0000	0.0083	0.4700	0.1367
1.0000	0.0330	0.2464	0.5812	0.0023	0.0050	0.0002	2.4524	1.3962	0.2536
0.3662	0.0480	0.1531	0.4628	0.0007	0.0027	0.0321	3.8959	0.6795	0.9930
0.7266	1.0000	0.2221	0.9053	0.0134	0.0482	1.0000	5.9351	3.4314	0.1453
0.0184	0.0000	0.0006	0.0257	0.0277	1.0000	0.0000	0.7150	0.0185	0.0256
0.0270	0.0001	0.0645	0.0290	1.0000	0.0478	0.0008	0.7637	0.0311	0.0080
0.0090	0.0004	0.0003	0.0050	0.2413	0.5368	0.0018	1.1168	0.0129	0.0060
0.0021	0.0003	0.0010	0.0027	0.1189	0.4586	0.0000	0.7679	0.0039	0.0060
0.0382	0.0517	0.0055	0.0483	0.2462	0.8840	0.0561	0.0154	0.1787	0.0146
3.2918	1.1366	1.7151	3.4573	1.7339	3.0128	1.0916	20.4085	6.9323	2.5647
								4.4284	5.0069

$(a+d)^2$	$(a+e)^2$	$(a+f)^2$	$(a+l)^2$	$(b+c)^2$	$(b+d)^2$	$(b+e)^2$	$(b+f)^2$	$(b+l)^2$	$(c+d)^2$
3.3886	0.7524	1.0022	0.7489	0.0222	1.0038	0.0008	0.0263	0.0007	1.3158
1.5891	0.1174	0.4805	0.3973	0.8924	0.4700	0.0540	0.0140	0.0030	0.1367
3.1060	1.0975	1.1466	1.0278	0.0991	0.8911	0.0525	0.0637	0.0382	0.0708
1.6525	0.3988	0.4313	0.1814	0.3726	0.8089	0.0602	0.0732	0.0016	1.1483
3.2540	0.5426	1.1488	0.0218	0.2795	3.8084	0.7818	1.4870	0.0000	0.2306
0.0878	0.0009	0.7468	0.0188	0.0006	0.0258	0.0276	0.9994	0.0000	0.0340
0.1120	1.3558	0.0029	0.0186	0.0587	0.0332	1.0239	0.0427	0.0003	0.0071
0.0276	0.1570	0.4068	0.0191	0.0000	0.0081	0.2233	0.5099	0.0038	0.0029
0.0096	0.0893	0.3983	0.0018	0.0023	0.0047	0.1078	0.4364	0.0002	0.0069
0.1723	0.4783	0.5547	0.0017	0.0234	0.1999	0.5236	0.5081	0.0001	0.0211
13.3995	4.9900	6.3189	2.4372	1.7508	7.2539	2.8555	4.1607	0.0479	2.9742
6.7491	5.0257	6.3046	4.3834	2.8517	4.5939	2.8705	4.1494	2.2282	5.1724

$(c+e)^2$	$(c+f)^2$	$(c+l)^2$	$(d+e)^2$	$(d+f)^2$	$(d+l)^2$	$(e+f)^2$	$(e+l)^2$	$(f+l)^2$	$(s+l)^2$
0.0302	0.0945	0.0295	1.0539	1.3463	1.0498	0.0350	0.0026	0.0342	4.8457
1.6581	0.8782	1.0000	0.1174	0.4805	0.3973	0.0505	0.0827	0.0040	0.0083
0.2013	0.1811	0.2329	0.6561	0.6942	0.6025	0.0140	0.0037	0.0072	2.4958
0.1744	0.1961	0.0449	0.4992	0.5357	0.2510	0.0061	0.0234	0.0163	3.2202
0.3447	0.0634	2.1647	0.6984	1.3710	0.0023	0.0108	1.2450	0.6094	2.0627
0.0202	0.9522	0.0007	0.0000	0.7051	0.0261	1.3601	0.0272	0.9974	0.7128
0.5563	0.2234	0.0797	1.3696	0.0023	0.0202	0.6106	0.9444	0.0609	0.7152
0.2589	0.5630	0.0007	0.1764	0.4375	0.0131	1.4980	0.2006	0.4753	1.0272
0.0983	0.4170	0.0008	0.0859	0.3913	0.0023	1.0447	0.1216	0.4638	0.7746
0.1778	1.0296	0.0970	0.5125	0.5191	0.0003	0.1971	0.0673	1.3853	0.0127
3.5202	4.5985	3.6509	5.1694	6.4830	2.3649	4.8269	2.7185	4.0538	15.8752
3.4490	4.7279	2.8067	5.1912	6.4701	4.5489	4.7467	2.8255	4.1044	

Die Anwendung der Kontrollgleichung 6) (Seite 420) gibt:

$$20.4085 + 4 \times 14.3475 = 77.7985$$

und zeigt vollständige Übereinstimmung der beiden Seiten.

Die Produktsummen werden nach 4) (Seite 419)

$[ab] = +1.2519$ $[bc] = -0.5504$ $[cd] = -1.0991$ $[de] = -0.0109$ $[ef] = +0.0401$ $[fl] = -0.0253$
$[ac] = -1.2211$ $[bd] = +1.3300$ $[ce] = +0.0356$ $[df] = +0.0064$ $[el] = -0.0535$
$[ad] = +3.3252$ $[be] = -0.0075$ $[cf] = -0.0647$ $[dl] = -1.0920$
$[ae] = -0.0178$ $[bf] = +0.0056$ $[cl] = +0.4221$
$[af] = +0.0071$ $[bl] = -1.0961$
$[al] = -0.9731$

Die Anwendung der Kontrollgleichung 7) (Seite 421) gibt für die doppelte Summe der von l unabhängigen Produktsummen $+ 6.0609$ und für $[ss] - [aa] - [bb] - \cdots + 6.0610$. Die von l abhängigen Glieder wurden durch 8) und 9) kontrolliert, wobei sich ebenfalls genügende Übereinstimmung ergab.

Die Normalgleichungen werden somit:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
+3.2918x & +1.2519y & -1.2211z & +3.3252t & -0.0178u & +0.0071v & = -0.9731 \\
+1.2519 & +1.1366 & -0.5504 & +1.3300 & -0.0075 & +0.0056 & = -1.0901 \\
-1.2211 & -0.5504 & +1.7151 & -1.0991 & +0.0356 & -0.0647 & = +0.4221 \\
+3.3252 & +1.3300 & -1.0991 & +3.4573 & -0.0109 & +0.0064 & = -1.0920 \\
-0.0178 & -0.0075 & +0.0356 & -0.0109 & +1.7339 & +0.0401 & = -0.0535 \\
+0.0071 & +0.0056 & -0.0647 & +0.0064 & +0.0401 & +3.0128 & = -0.0253
\end{array}$$

Summengleichung:

$$+6.6371x + 3.1662y - 1.1846z + 7.0089t + 1.7734u + 3.0073v = -2.8119$$
$$[ll] = +1.0916.$$

Die Bildung der Eliminationsgleichungen ist auf den Seiten 428 und 429 durchgeführt und zwar zugleich für die Unbekannten und für ihre Gewichte; für letztere tritt, wie auf Seite 413 gezeigt ist, an Stelle der Kolumne l für die erste Unbekannte 1, 0, 0, 0, 0, 0, für die zweite 1, 0, 0, 0, 0 usf. Die Zahlen werden in ein vorbereitetes Schema eingeschrieben, worauf sich der Prozeß ganz mechanisch und unter fortwährender Kontrolle vollzieht. Alle außerhalb der Diagonalreihen stehenden Koeffizienten erscheinen in doppelter Rechnung; wenn man auf die hierdurch gebotene Kontrolle verzichten will, kann man die betreffenden Zeilen leer lassen; die Resultate doppelt anzuschreiben, empfiehlt sich aber wegen leichterer Anwendung der Summengleichung. — Die mit N bezeichneten Zeilen enthalten die Zahlen der Normalgleichungen. Für die erste Normalgleichung schreibt man unter die Zahlen ihre Logarithmen und unter diese die mit dem Koeffizienten von x durchdividierte Gleichung, somit die erste Eliminationsgleichung, bezeichnet mit E. Nun schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papierstreifens die Logarithmen der Koeffizienten von x der übrigen Normalgleichungen und der Summengleichung, hält diese der Reihe nach über alle Logarithmen der Zeile E, bildet die Summe im Kopf, und schreibt die der Logarithmentafel entnommene zugehörige Zahl unter die entsprechenden

Koeffizienten der Zeilen N. Die Differenzen der untereinander stehenden Zahlen sind die Koeffizienten der fünf Gleichungen und der Summengleichung, aus denen x eliminiert ist, und die in derselben Weise, wie vorhin die Normalgleichungen, in die Rubriken der nächsten Gruppe eingetragen werden. Hier prüft man zuerst, ob die Summen der fünf untereinander stehenden Zahlen mit den entsprechenden Zahlen der Summengleichung übereinstimmen; wegen der Abrundungsfehler kann eine Abweichung um 1—2 Einheiten der letzten Stelle zugelassen werden; um aber ein weiteres Summieren der Fehler zu vermeiden, wird man gut tun, die wirklichen Summen weiter zu benutzen. Mit den erhaltenen 5 Gleichungen und der zugehörigen Summengleichung verfährt man genau so, wie zuerst mit den Normalgleichungen, und setzt dieses Verfahren fort, bis man nur mehr eine Gleichung mit einer Unbekannten hat. Die ersten Gleichungen in jeder Gruppe sind dann die Eliminationsgleichungen (im Schema mit E bezeichnet). Behufs Anwendung der Kontrolgleichung 12) (Seite 423) berechnet man $[ll6]$ nach 11); man überzeugt sich leicht, daß die Größen

$$\frac{[al]^2}{[aa]}, \quad \frac{[bl_1]^2}{[bb_1]}, \ldots$$

unmittelbar dem Schema entnommen werden können, indem ihre Logarithmen die Summen der in der Kolumne l mit starken Vertikalstrichen angezeigten Zahlen sind. Hier wird:

$$[ll6] = +\,1.0916 - (0.2877 + 0.7849 + 0.0009 + 0.0152 + 0.0019 + 0.0001)$$

oder

$$[ll6] = +\,0.0009\,.$$

Die Fehlerquadratsumme geht also von 1.0916 auf 0.0009 herab, so daß die Ausgleichung eine bedeutende Verbesserung herbeiführen wird.

Die Eliminationsgleichungen für die Unbekannten werden:

$0.00000x + 9.58014y + 9.56932_n x + 0.00439t + 7.73299_n u + 7.33383v$						$= 9.47073_n$
	0.00000	9.11463_n	8.99571	7.025_n	7.6425	$= 0.03746_n$
		0.00000	9.05781	8.36368	8.69307_n	$= 8.41865_n$
			0.00000	8.7132	8.8930	$= 9.65225_n$
				0.0000	8.3761	$= 8.5170_n$
					0.0000	$= 7.7672_n$

Für die Gewichtsgleichungen tritt an Stelle der rechten Seiten dieser Gleichungen beziehungsweise:

(x)	(y)	(z)	(t)	(u)	(v)
9.48257					
9.76026_n	0.18013				
9.40996	9.01739	9.90278			
1.12603_n	0.17857_n	0.17972_n	1.12205		
8.4576	7.3633	7.9967_n	8.4747	9.76123	
8.4906	7.5551	8.2896	8.4082	7.8983_n	9.52168

	x	y	z	t	u	v	l
N	+ 3.2918	+ 1.2519	− 1.2211	+ 3.3252	− 0.0178	+ 0.0071	− 0.9731
	0.51743	0.09757	0.08675_n	0.52182	8.25042_n	7.85126	9.98816_n
E	0.00000	9.58014	9.56932_n	0.00439	7.73299_n	7.33383	9.47073_n
N	+ 1.2519	+ 1.1366	− 0.5504	+ 1.3300	− 0.0075	+ 0.0056	− 1.0901
	+ 1.2519	+ 0.4761	− 0.4644	+ 1.2646	− 0.0068	+ 0.0027	− 0.3701
N	− 1.2211	− 0.5504	+ 1.7151	− 1.0991	+ 0.0356	− 0.0647	+ 0.4221
	− 1.2211	− 0.4644	+ 0.4530	− 1.2335	+ 0.0066	− 0.0026	+ 0.3610
N	+ 3.3252	+ 1.3300	− 1.0991	+ 3.4573	− 0.0109	+ 0.0064	− 1.0920
	+ 3.3252	+ 1.2646	− 1.2335	+ 3.3590	− 0.0180	+ 0.0072	− 0.9830
N	− 0.0178	− 0.0075	+ 0.0356	− 0.0109	+ 1.7339	+ 0.0401	− 0.0535
	− 0.0178	− 0.0068	+ 0.0066	− 0.0180	+ 0.0001	− 0.0000	+ 0.0053
N	+ 0.0071	+ 0.0056	− 0.0647	+ 0.0064	+ 0.0401	+ 3.0128	− 0.0253
	+ 0.0071	+ 0.0027	− 0.0026	+ 0.0072	− 0.0000	+ 0.0000	− 0.0021
S	+ 6.6371	+ 3.1662	− 1.1846	+ 7.0089	+ 1.7734	+ 3.0073	− 2.8119
	0.82198	+ 2.5242	− 2.4621	+ 6.7046	− 0.0359	+ 0.0143	− 1.9620
		+ 0.6605	− 0.0860	+ 0.0654	− 0.0007	+ 0.0029	− 0.7200
		9.81987	8.93450_n	8.81558	6.845$_n$	7.4624	9.85733_n
	E	0.00000	9.11463_n	8.99571	7.025$_n$	7.6425	0.03746_n
		− 0.0860	+ 1.2621	+ 0.1344	+ 0.0290	− 0.0621	+ 0.0611
		− 0.0860	+ 0.0112	− 0.0085	+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0939
		+ 0.0654	+ 0.1344	+ 0.0983	+ 0.0071	− 0.0008	− 0.1090
		+ 0.0654	− 0.0085	+ 0.0065	− 0.0001	+ 0.0003	− 0.0714
		− 0.0007	+ 0.0290	+ 0.0071	+ 1.7338	+ 0.0401	− 0.0588
		− 0.0007	+ 0.0001	− 0.0001	+ 0.0000	− 0.0000	+ 0.0008
		+ 0.0029	− 0.0621	− 0.0008	+ 0.0401	+ 3.0128	− 0.0232
		+ 0.0029	− 0.0004	+ 0.0003	− 0.0000	+ 0.0000	− 0.0032
	S	+ 0.6421	+ 1.2774	+ 0.3044	+ 1.8093	+ 2.9929	− 0.8499
		9.80760	− 0.0836	+ 0.0636	− 0.0007	+ 0.0028	− 0.6999
			+ 1.2509	+ 0.1429	+ 0.0289	− 0.0617	− 0.0328
			0.09722	9.15503	8.46090	8.79029_n	8.51587_n
		E	0.00000	9.05781	8.36368	8.69307_n	8.41865_n
			+ 0.1429	+ 0.0918	+ 0.0072	− 0.0011	− 0.0376
			+ 0.1429	+ 0.0163	+ 0.0033	− 0.0070	− 0.0037
			+ 0.0289	+ 0.0072	+ 1.7338	+ 0.0401	− 0.0596
			+ 0.0289	+ 0.0033	+ 0.0007	− 0.0014	− 0.0008
			− 0.0617	− 0.0011	+ 0.0401	+ 3.0128	− 0.0200
			− 0.0617	− 0.0070	− 0.0014	+ 0.0030	+ 0.0016
		S	+ 1.3610	+ 0.2408	+ 1.8100	+ 2.9901	− 0.1500
			0.13386	+ 0.1555	+ 0.0314	− 0.0671	− 0.0357
				+ 0.0755	+ 0.0039	+ 0.0059	− 0.0339
				8.87795	7.5911	7.7709	8.53020_n
			E	0.00000	8.7132	8.8930	9.65225_n
				+ 0.0039	+ 1.7331	+ 0.0415	− 0.0588
				+ 0.0039	+ 0.0002	+ 0.0003	− 0.0018
				+ 0.0059	+ 0.0415	+ 3.0098	− 0.0216
				+ 0.0059	+ 0.0003	+ 0.0005	− 0.0026
			S	+ 0.0853	+ 1.7785	+ 3.0572	− 0.1143
				8.93095	+ 0.0044	+ 0.0067	− 0.0383
					+ 1.7329	+ 0.0412	− 0.0570
					0.23877	8.6149	8.7559_n
				E	0.00000	8.3761	8.5170_n
					+ 0.0412	+ 3.0093	− 0.0190
					+ 0.0412	+ 0 0010	− 0.0014
				S	+ 1.7741	+ 3.0505	− 0.0760
					0.24897	+ 0.0422	− 0.0583
						+ 3.0083	− 0.0176
						0.47832	8.2455_n
					E	0.00000	7.7672_n
					S	+ 3.0083	− 0.0177

(x)
+ 1.0000
0.00000
9.48257
+ 0.0000
+ 0.3803
+ 0.0000
− 0.3710
+ 0.0000
+ 1.0102
+ 0.0000
− 0.0054
+ 0.0000
+ 0.0022
+ 1.0000
+ 2.0163

	(y)
− 0.3803	+ 1.0000
9.58013_n	0.00000
9.76026_n	0.18013
+ 0.3710	+ 0.0000
+ 0.0495	− 0.1302
− 1.0102	+ 0.0000
− 0.0377	+ 0.0990
+ 0.0054	+ 0.0000
+ 0.0004	− 0.0011
− 0.0022	+ 0.0000
− 0.0017	+ 0.0044
− 1.0163	+ 1.0000
− 0.3697	+ 0.9721

		(x)
+ 0.3215	+ 0.1302	+ 1.0000
9.50718	9.11461	0.00000
9.40996	9.01739	9.90278
− 0.9725	− 0.0990	+ 0.0000
+ 0.0367	+ 0.0149	+ 0.1142
+ 0.0050	+ 0.0011	+ 0.0000
+ 0.0074	+ 0.0030	+ 0.0231
− 0.0005	− 0.0044	+ 0.0000
− 0.0159	− 0.0064	− 0.0493
− 0.6465	+ 0.0279	+ 1.0000
+ 0.3498	+ 0.1417	+ 1.0880

			(t)
− 1.0092	− 0.1139	− 0.1142	+ 1.0000
0.00398_n	9.05652_n	9.05767_n	0.00000
1.12603_n	0.17857_n	0.17972_n	1.12205
− 0.0024	− 0.0019	− 0.0231	+ 0.0000
− 0.0521	− 0.0059	− 0.0059	+ 0.0517
+ 0.0154	+ 0.0020	+ 0.0493	+ 0.0000
− 0.0789	− 0.0089	− 0.0089	+ 0.0782
− 0.9962	− 0.1138	− 0.0880	+ 1.0000
− 1.1402	− 0.1287	− 0.1290	+ 1.1298

				(u)
+ 0.0497	+ 0.0040	− 0.0172	+ 0.0517	+ 1.0000
8.6964	7.6021	8.2355_n	8.7135	0.00000
8.4576	7.3633	7.9967_n	8.4747	9.76123
+ 0.0943	+ 0.0109	+ 0.0582	+ 0.0782	+ 0.0000
+ 0.0012	+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0012	+ 0.0238
+ 0.1440	+ 0.0149	+ 0.0410	+ 0.1299	+ 0.0000
+ 0.0509	+ 0.0041	− 0.0176	+ 0.0529	+ 1.0238

					(v)
+ 0.0931	+ 0.0108	+ 0.0586	+ 0.0770	− 0.0238	+ 1.0000
8.9689	8.0334	8.7679	8.8865	8.3766_n	0.00000
8.4906	7.5551	8.2896	8.4082	7.8983_n	9.52168
+ 0.0931	+ 0.0108	+ 0.0586	+ 0.0770	− 0.0238	+ 1.0000

Die sukzessive Auflösung ergibt:

$\log v$	7.7672_n	$\log Q_{66}$	9.52168	$\log p_v$	0.47832
$\log u$	8.5152_n	$\log Q_{55}$	9.76137	$\log p_u$	0.23863
$\log t$	9.65016_n	$\log Q_{44}$	0.12090	$\log p_t$	9.87910
$\log z$	8.40312	$\log Q_{33}$	9.98835	$\log p_z$	0.01165
$\log y$	0.01809_n	$\log Q_{22}$	0.23030	$\log p_y$	9.76970
$\log x$	9.74933	$\log Q_{11}$	1.14923	$\log p_x$	8.85077

Zur Prüfung wird man die Unbekannten in eine der Normalgleichungen eintragen.

Die Rückkehr zu den ursprünglichen Unbekannten und zur Einheit von Bogensekunden wird vermittelt durch

$$\begin{aligned} dM_0 &= [1.7442]\, x \\ d\mu &= [8.0449]\, y \\ d\varphi &= [1.6561]\, z \\ d\mathfrak{s} &= [1.7134]\, t \\ d\mathfrak{p} &= [1.9338]\, u \\ d\mathfrak{q} &= [1.7308]\, v \end{aligned}$$

und gibt

$$\begin{aligned} dM_0 &= +31''.15 \quad [1.4935\ ] \\ d\mu &= -0''.01156 \quad [8.0630_n] \\ d\varphi &= +1''.15 \quad [0.0592\ ] \\ d\mathfrak{s} &= -23''.10 \quad [1.3636_n] \\ d\mathfrak{p} &= -2''.81 \quad [0.4490_n] \\ d\mathfrak{q} &= -0.31 \quad [9.4980_n] \end{aligned}$$

Die Eintragung der ermittelten Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen (Seite 424) führt zu folgender Darstellung

dM_0	$d\mu$	$d\varphi$	$d\mathfrak{s}$	$d\mathfrak{p}$	$d\mathfrak{q}$	$-l$	$\sqrt{p}\delta$	$p\delta^2$
$+50''.19$	$-0''.21$	$+0''.40$	$-47''.51$	$-0''.09$	$-0''.10$	$-2''.61$	$+0''.07$	0.0049
$+37.62$	-6.13	-2.69	-29.94	$+1.00$	-0.04	-0.00	-0.18	0.0324
$+59.69$	-20.13	-1.34	-36.22	-0.17	-0.04	-1.46	$+0.33$	0.1089
$+36.12$	-24.28	$+1.05$	-32.32	-0.09	-0.03	$+19.06$	-0.49	0.2401
$+50.88$	-110.85	-1.27	-45.21	$+0.40$	-0.14	$+106.32$	$+0.13$	0.0169
-8.11	$+0.03$	-0.06	$+7.62$	-0.58	-0.62	$+0.14$	-1.58	2.4964
-9.81	$+1.32$	$+0.68$	$+8.09$	$+3.48$	-0.14	-3.00	$+0.62$	0.3844
$+5.67$	-2.07	-0.05	-3.38	$+1.71$	$+0.46$	-4.60	-2.26	5.1076
-2.75	$+1.84$	-0.08	$+2.46$	-1.20	-0.42	-0.40	-0.55	0.3025
-11.66	$+25.20$	$+0.20$	$+10.44$	$+1.73$	-0.58	-25.17	$+0.16$	0.0256
							$[\delta\delta p] =$	8.7197

Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 wird also

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{10-6}} = \pm 1''.4764\,.$$

Wird die Fehlerquadratsumme in der früher benutzten Einheit von [2.0266] Sekunden ausgedrückt, so wird sie 0.0008, was mit dem früher gefundenen Werte von $[ll6] = 0.0009$ in genügender Übereinstimmung ist.

Die mittleren Fehler der Unbekannten $dM_0, \cdots$ berechnen sich nach den Formeln 23) (Seite 410), wobei wir zu beachten haben, daß, wenn der eben abgeleitete Wert von μ benutzt wird, die Verwandlung in Bogensekunden bereits geschehen ist und daß die oben angegebenen Gewichte sich auf die Unbekannten $x, y, \cdots$ beziehen. Ist

$$z = \alpha d\varphi \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{z}{\alpha}$$

so wird der mittlere Fehler von $d\varphi$

$$\mu_\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{p_z \alpha}} .$$

Hiernach kommt für die mitteren Fehler der 6 Unbekannten $dM_0, \cdots$

dM_0	$\pm 2''.89$
$d\mu$	± 0.00020
$d\varphi$	± 0.62
$d\mathrm{s}$	± 0.82
$d\mathrm{p}$	± 0.91
$d\mathrm{q}$	± 0.43

Abschnitt XXVII.

Die Bahnverbesserung durch Variation der Elemente.

140. Formulierung des Problems. Durch die im vierten Teil auseinandergesetzten Methoden wurden für einen zu untersuchenden Himmelskörper Bahnelemente erlangt, welche den drei ausgewählten Beobachtungen streng genügen. Da diese Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind, werden auch die erlangten Elemente noch nicht die wahren sein, und es werden infolgedessen die noch vorhandenen anderen Beobachtungen durch die Elemente um so weniger dargestellt werden, als sie ebenfalls mit Fehlern behaftet sind. Die genannten Methoden verlangen, daß die drei der Bahnbestimmung zugrunde gelegten Beobachtungen zeitlich nahe beisammen liegen; dadurch wird der Einfluß der Beobachtungsfehler auf diejenigen Teile der Bahn, die weit abstehenden Beobachtungen zugehören, ein bedeutender und es können sehr erhebliche Abweichungen der Bahn von den Beobachtungen zutage treten. Es entsteht daher die Aufgabe, die ersten Elemente zu verbessern; dies derart auszuführen, daß allen Beobachtungen streng genügt wird, ist unmöglich, da alle Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind; man muß sich vielmehr damit begnügen, ein solches Elementensystem aufzustellen, welches allen Beobachtungen so weit genügt, daß die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung als Beobachtungsfehler aufgefaßt werden können. Solcher Systeme gibt es unendlich viele und es entsteht daher die Aufgabe, aus ihnen das beste zu ermitteln. Nach der Theorie der Beobachtungsfehler und der Ausgleichungsrechnung (siehe Abschnitt XXVI) ist jenes System als das annehmbarste anzusehen, für welches die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler ein Minimum wird. Bezeichnen wir mit s den Fehler einer Beobachtung, so muß also werden

$$\sum s^2 = \text{Minimum.}$$

Sind α, δ die Koordinaten des beobachteten Ortes, $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$ die Koordinaten des wahren Ortes, so wird:

$$s^2 = (\cos\delta\,\Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2$$

und die Bedingung wird daher

$$\sum(\cos\delta\,\Delta\alpha)^2 + \sum(\Delta\delta)^2 = \text{Minimum.}$$

Nehmen wir als wahren Ort, der uns ja an sich unbekannt sein muß, denjenigen an, der sich nachträglich durch die Rechnung mit dem annehmbarsten Elementensystem für die Beobachtungszeit ergibt, so werden die Fehler $\cos\delta\,\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ direkt die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung geben, und das zu lösende Problem kann jetzt so formuliert werden: Es ist jenes Elementensystem aufzustellen, für welches die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung ein Minimum wird.

Sind $E_1, \ldots E_6$, allgemein E_i, die vorgelegten Elemente, die zu verbessern sind, und $E_i + dE_i$ diejenigen, welche der genannten Bedingung entsprechen, so daß dE_i die zu ermittelnden Unbekannten werden, ist ferner α_B die beobachtete Koordinate,

α_R die mit dem System E_i gerechnete, α_D die mit dem System $E_i + dE_i$ gerechnete Koordinate, so lautet die Bedingung

$$\sum (\alpha_D - \alpha_B)^2 = \text{Min.}$$

oder

$$\sum [(\alpha_D - \alpha_R) - (\alpha_B - \alpha_R)]^2 = \text{Min.},$$

d. h. wenn die direkt angebbaren Größen $\alpha_B - \alpha_R$ von den zu ermittelnden $\alpha_D - \alpha_R$ abgezogen werden, so müssen Reste übrig bleiben deren Quadratsumme ein Minimum ist. Bezeichnet man diese Reste mit δ, so wird

$$(\alpha_D - \alpha_R) - (\alpha_B - \alpha_R) = \delta$$

und es muß werden

$$\sum \delta^2 = \text{Min.}$$

Wenn $\alpha_D - \alpha_R$ so klein ist, daß es als Differenzial aufgefaßt werden kann, macht seine Bildung keine Schwierigkeit; denn da die Koordinate α als Funktion der Elemente $E_1, \ldots E_6$ darstellbar ist:

$$\alpha = f(E_1, E_2, \ldots E_6),$$

so wird:

$$\alpha_D - \alpha_R = d\alpha = \frac{\partial f}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial f}{\partial E_2} dE_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial E_6} dE_6.$$

Es gibt also jede beobachtete Koordinate eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial E_2} dE_2 + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial E_6} dE_6 - (\alpha_B - \alpha_R) = \delta \qquad 1)$$

und aus der Gesamtheit aller sind die Unbekannten dE_1, dE_2, $\ldots$ dE_6 nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung zu bestimmen. Sind die Elemente E_i so mangelhaft, daß die Korrektionen $dE_1, \ldots dE_6$ nicht als Differenziale aufgefaßt werden können, so kann die lineare Form der Gl. 1), welche Bedingung für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung ist, nicht hergestellt werden und es muß also ein anderes Verfahren der Verbesserung eingeschlagen werden. Vielfach genügt es, mit den erlangten Elementen $E_i + dE_i$ den Prozeß zu wiederholen.

Die Bildung der Differenzialquotienten $\frac{d\alpha}{dE_i}$, auf welche nach der Gl. 1) das Problem der Bahnverbesserung zurückgeführt ist, ist theoretisch leicht ausführbar, verlangt aber bei der praktischen Berechnung für jede einzelne Beobachtung eine nicht unerhebliche Arbeit. Das einfachste Mittel, diese abzukürzen, besteht in der Zusammenfassung mehrerer Beobachtungen in einen sogenannten »*Normalort*«; es wird dann auch die Anzahl der Gleichungen 1) eine geringere und dadurch ihre Behandlung mittels der Ausgleichungsrechnung abgekürzt. Behufs Bildung eines Normalortes nimmt man von einer ganzen Gruppe von zeitlich einander nahen Beobachtungen das Mittel aus allen $\alpha_B - \alpha_R$ und läßt dasselbe als Ephemeridenkorrektion für das Mittel der zugehörigen Beobachtungszeiten gelten. Ist dann A_R der für die Zeit

$$T = \frac{t^{(1)} + t^{(2)} + \cdots + t^{(n)}}{n}$$

geltende Ephemeridenort, also das Rechnungsresultat, so wird

$$A_B = A_R + \frac{(\alpha_B^{(1)} - \alpha_R^{(1)}) + (\alpha_B^{(2)} - \alpha_R^{(2)}) + \cdots + (\alpha_B^{(n)} - \alpha_R^{(n)})}{n}$$

der fingierte beobachtete Ort für die Zeit T sein, der vermöge seiner Zusammensetzung aus n Beobachtungen natürlich eine erhöhte Genauigkeit besitzt. Dieses Verfahren setzt voraus, daß die $\alpha_B - \alpha_R$ der Gruppe nur um Beträge von der Ordnung der Beobachtungsfehler voneinander abweichen oder wenigstens, daß der Gang ein der Zeit proportionaler sei. Je besser die zu korrigierenden Elemente bereits sind, auf desto größere Zeiträume wird dies zutreffen und mit desto weniger Normalorten hat man also zu operieren.

141. Die Grundformeln der Bahnverbesserung. Es sind die Beziehungen zwischen den Änderungen der geozentrischen Koordinaten einerseits und den Änderungen der Elemente andererseits aufzustellen. Da sich erstere auf ein geozentrisches, letztere auf ein heliozentrisches System beziehen, empfiehlt es sich, von rechtwinkligen Koordinaten Gebrauch zu machen und dann folgendermaßen zu verfahren: Man variiert den Planetenort im Raume und stellt die Beträge der Variationen nach den Achsen eines geozentrischen rechtwinkligen Systems auf, dessen Grundebene mit der der gemessenen Koordinaten zusammenfällt; desgleichen bildet man die Variationen nach den Achsen eines heliozentrischen Systems, das so gewählt wird, daß die genannten Variationen sich bequem durch die Variationen der Elemente ausdrücken lassen; beide Gruppen von Variationen werden schließlich auf die Achsen eines zweckmäßig gewählten Systems projiziert und müssen hier zu denselben Beträgen führen, wodurch Gleichungen zwischen den gewünschten Größen hergestellt sind; der Anfangspunkt dieses letzteren Systems kann im Mittelpunkt der Erde oder der Sonne gewählt werden, da die Lage der Erde gegen die Sonne als konstant anzusehen ist und nicht variiert wird.

Wir legen ein festes, vorläufig beliebiges Koordinatensystem xyz zugrunde, auf welches sich die geozentrischen Polarkoordinaten ϱ, α, δ beziehen; auf dasselbe System, parallel zu sich selbst nach dem Mittelpunkt der Sonne verschoben, beziehen sich auch die Elemente: Abstand des Perihels vom Knoten ω, Länge des Knotens Ω und Neigung der Bahnebene i.

Man hat nun *erstens* für den geozentrischen Ort A die geozentrischen rechtwinkligen Koordinaten:

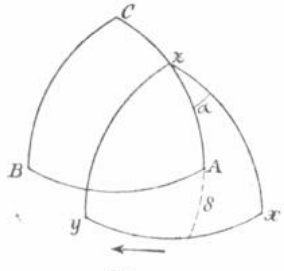


Fig. 55.

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\delta \cos\alpha \\ y &= \varrho \cos\delta \sin\alpha \\ z &= \varrho \sin\delta \end{aligned} \qquad 1)$$

und wenn der Planetenort im Raume variiert wird, die entsprechenden Variationen des geozentrischen Ortes:

$$\begin{aligned} dx &= \cos\delta \cos\alpha\, d\varrho - \varrho \cos\delta \sin\alpha\, d\alpha - \varrho \sin\delta \cos\alpha\, d\delta \\ dy &= \cos\delta \sin\alpha\, d\varrho + \varrho \cos\delta \cos\alpha\, d\alpha - \varrho \sin\delta \sin\alpha\, d\delta \\ dz &= \sin\delta\, d\varrho + \varrho \cos\delta\, d\delta\,. \end{aligned} \qquad 2)$$

Wird ein Koordinatensystem ABC eingeführt, dessen eine Achse durch A geht und dessen AC-Ebene die x-Achse des vorigen Systems enthält, und werden auf die Achsen dieses Systems die dx, dy, dz projiziert, so werden die Variationen erhalten:

$$\begin{aligned} dA &= \cos(Ax)\,dx + \cos(Ay)\,dy + \cos(Az)\,dz \\ dB &= \cos(Bx)\,dx + \cos(By)\,dy + \cos(Bz)\,dz \\ dC &= \cos(Cx)\,dx + \cos(Cy)\,dy + \cos(Cz)\,dz. \end{aligned} \qquad 3)$$

Nun ist, wie man leicht der Figur 55 entnimmt:

$$\begin{aligned} &\cos(Ax) = \cos\delta\cos\alpha, && \cos(Ay) = \cos\delta\sin\alpha, && \cos(Az) = \sin\delta \\ &\cos(Bx) = -\sin\alpha, && \cos(By) = \cos\alpha, && \cos(Bz) = 0 \\ &\cos(Cx) = -\sin\delta\cos\alpha, && \cos(Cy) = -\sin\delta\sin\alpha, && \cos(Cz) = \cos\delta. \end{aligned}$$

Hiermit und mit den Werten 2) folgt aus 3)

$$\begin{aligned} dA &= d\varrho \\ dB &= \varrho\cos\delta\,d\alpha \\ dC &= \varrho\,d\delta. \end{aligned} \qquad 4)$$

Um *zweitens* die Variationen des heliozentrischen Ortes durch die Änderungen der Elemente auszudrücken, bestimmen wir ein Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ derart, daß die $\xi\eta$-Ebene mit der Bahnebene zusammenfällt, die ξ-Achse durch das Perihel, die η-Achse durch 90° der wahren Anomalie und die ζ-Achse durch den Nordpol der Bahn geht. Der Bogen vom Knoten K der Bahn bis zur ξ-Achse ist dann ω und der Bogen von der x-Achse bis K ist Ω. Variiert man nun die Bestimmungsstücke der Bahn um die Beträge $d\omega$, $d\Omega$, di, so lassen sich diese nach den Darlegungen in Nr. 6 durch die Drehungen des Systems $\xi\eta\zeta$ um die ursprüngliche Lage der Achsen ξ, η, ζ ausdrücken. Bezeichnet man die Drehung um die ξ-Achse mit $d\mathfrak{p}$, um die η-Achse mit $d\mathfrak{q}$, um die ζ-Achse mit $d\mathfrak{s}$, so wird nach Gl. 6) (Seite 13), da hier

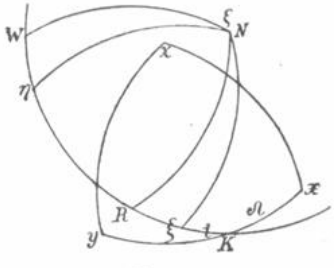


Fig. 56.

$$\varphi = \omega, \quad \psi = -\Omega, \quad \theta = i$$

zu setzen ist:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{p} &= \sin i\sin\omega\,d\Omega + \cos\omega\,di \\ d\mathfrak{q} &= \sin i\cos\omega\,d\Omega - \sin\omega\,di \\ d\mathfrak{s} &= \cos i\,d\Omega + d\omega. \end{aligned} \qquad 5)$$

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Planetenortes in dem System $\xi\eta\zeta$, so erfahren diese durch die Drehungen nach den Gl. 8) (Seite 13) die Änderungen

$$\begin{aligned} d\xi &= -\eta\,d\mathfrak{s} + \zeta\,d\mathfrak{q} \\ d\eta &= -\zeta\,d\mathfrak{p} + \xi\,d\mathfrak{s} \\ d\zeta &= -\xi\,d\mathfrak{q} + \eta\,d\mathfrak{p}. \end{aligned} \qquad 6)$$

Bestimmt man den Planetenort durch seine Polarkoordinaten r, v, b im beweglichen System $\xi\eta\zeta$, wo r der Radiusvektor, v die wahre Anomalie, b die Breite über der Bahnebene bezeichnen, so wird

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos b \cos v \\ \eta &= r \cos b \sin v \\ \zeta &= r \sin b ; \end{aligned}$$

setzt man weiter fest, daß der Planetenort stets in der Bahnebene $\xi\eta$ liegen soll, so wird ständig $b = 0$ und daher

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v \\ \eta &= r \sin v \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \qquad 7)$$

Die Änderungen der die Koordinaten r und v bestimmenden Elemente bringen also in den ξ, η, ζ die Änderungen

$$\begin{aligned} d\xi &= \cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dv \\ d\eta &= \sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dv \\ d\zeta &= 0 \end{aligned} \qquad 8)$$

hervor. Die Gesamtänderung des Ortes, hervorgerufen durch die Variationen aller Elemente, ist die Summe von 6) und 8), nämlich

$$\begin{aligned} &- \eta d\mathbf{s} + \zeta d\mathbf{q} + \cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dv \\ &- \zeta d\mathbf{p} + \xi d\mathbf{s} + \sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dv \\ &- \xi d\mathbf{q} + \eta d\mathbf{p} \end{aligned}$$

oder, wenn 7) eingetragen und zur Abkürzung

$$\begin{aligned} dv + d\mathbf{s} &= dw \\ d\mathbf{p} \sin v - d\mathbf{q} \cos v &= dn \end{aligned} \qquad 9)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} &\cos v \cdot dr - r \sin v \cdot dw \\ &\sin v \cdot dr + r \cos v \cdot dw \\ &r\, dn. \end{aligned} \qquad 10)$$

Diese Änderungen vereinfachen sich noch, wenn man statt des Systems $\xi\eta\zeta$ ein anderes RWN einführt, das aus dem ersteren dadurch entsteht, daß man es um die ζ-Achse um den Winkel v dreht. Die R-Achse geht dann ständig durch den Radiusvektor r oder durch den heliozentrischen Ort des Planeten, die W-Achse liegt in der variabeln Bahnebene 90° vorwärts, die N-Achse ist der Nordpol der variabeln Bahn. Da

$$\begin{aligned} R &= \quad \xi \cos v + \eta \sin v \\ W &= - \xi \sin v + \eta \cos v \\ N &= \quad \zeta \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} dR &= \quad \cos v \cdot d\xi + \sin v \cdot d\eta \\ dW &= - \sin v \cdot d\xi + \cos v \cdot d\eta \\ dN &= \quad d\zeta \end{aligned}$$

so werden die Änderungen 10) im neuen System:

$$dr, \quad r\,dw, \quad r\,dn. \qquad 11)$$

Projiziert man diese auf die Achsen A, B, C (Seite 435), so ist die Summe der Projektionen auf jeder Achse gleich den früher aufgestellten dA, dB, dC (Gl. 4)) d. h. wir haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\varrho &= \cos(AR)\,dr + \cos(AW)\,r\,dw + \cos(AN)\,r\,dn \\ \varrho\cos\delta\,d\alpha &= \cos(BR)\,dr + \cos(BW)\,r\,dw + \cos(BN)\,r\,dn \\ \varrho\,d\delta &= \cos(CR)\,dr + \cos(CW)\,r\,dw + \cos(CN)\,r\,dn \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

die wir als die Normalform der Bahnverbesserungsgleichungen bezeichnen können. Dieselbe hat zuerst *Clausen* (Crellesches Journ. Band VII, S. 108) und später *Radau* (Bull. Astr. T. V, 1888) eingeführt. Das System ABC ist durch das feste System xyz und durch den geozentrischen Ort A gegeben; das System RWN durch die Bahnebene und den heliozentrischen Ort R. Hieraus lassen sich die $\cos(AR)$, ... leicht ableiten. Ehe wir darauf eingehen und überhaupt I. auf eine gebrauchsfähige Form überführen, stellen wir noch eine zweite wichtige Grundform auf, die aus folgender Überlegung hervorgeht. Die Variationen dr und $r\,dw$ des heliozentrischen Ortes im System RWN hängen nur von den Variationen derjenigen Elemente der Bahn ab, welche die Bewegung *in* der Bahnebene bestimmen, die Variation $r\,dn$ dagegen von den Variationen der Elemente, welche die *Lage* der Bahnebene angeben; wenn man in den Gleichungen I. erstere von der letzteren trennen könnte, hätte man die Möglichkeit, Bedingungsgleichungen mit nur *vier* Unbekannten statt 6 auflösen zu müssen; gleichzeitig eine Gleichung zu bilden, welche nur $r\,dn$ enthält, gelingt natürlich nicht, da man unter allen Umständen dafür sorgen muß, daß das unbekannte $d\varrho$ in zweien von den Gleichungen I. nicht auftritt; dagegen hat man *eine* Bedingung noch frei; diese dazu zu verwenden, daß dr *oder* $r\,dw$ verschwindet, bringt keinen Nutzen, da die vier elliptischen Elemente in beiden vorkommen; wenn man sie aber so wählt, daß der Faktor von $r\,dn$ ein Maximum wird, so erhält man eine Gleichung, die zwar alle drei Größen $r\,dn$, $r\,dw$ und dr enthält, aber erstere mit einem so großen Faktor multipliziert, daß in vielen Fällen der Praxis die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen als nahe unabhängig von $r\,dw$ und dr betrachtet und für sich aufgelöst werden können. Statt $2n$ Gleichungen mit 6 Unbekannten, hat man dann zwei Gruppen von je n Gleichungen, deren erste nach 4, und deren zweite nach 2 Unbekannten aufgelöst werden kann, was ein wesentlicher Gewinn ist.

Um diesen Gedanken auszuführen, haben wir die $d\varrho$, $\varrho\cos\delta d\alpha$, $\varrho\,d\delta$ einerseits und die dr, $r\,dw$, $r\,dn$ andererseits statt auf die Achsen A, B, C auf andere Achsen zu projizieren, die folgenden Bedingungen entsprechen: aus zwei Gleichungen muß $d\varrho$ verschwinden und in der einen muß $r\,dn$ den Faktor Null und in der anderen seinen größtmöglichen Wert haben. Wenn $d\varrho$ verschwinden soll, muß es mit $\cos 90^\circ$ multipliziert sein d. h. die betreffenden Achsen müssen in der Ebene des Polkreises von A liegen, oder die erste Achse muß nach wie vor durch A gehen. Wenn ferner der Faktor von $r\,dn$ verschwinden soll, so muß die zweite Achse auf

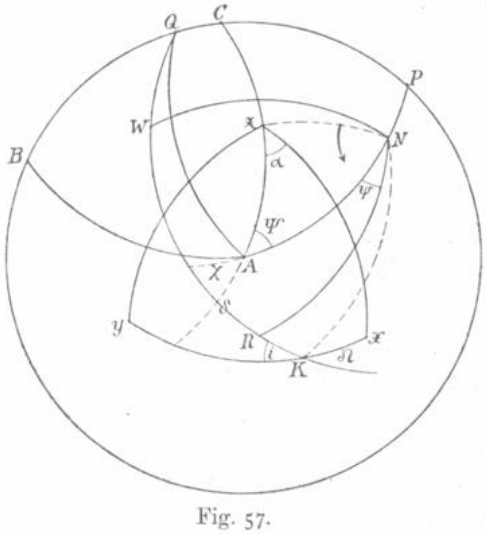


Fig. 57.

dem Polkreis von N liegen, d. h. sie muß durch den Schnitt Q der größten Kreise RW und BC gehen. Soll endlich der Faktor von rdn seinen größten Wert annehmen, so muß die betreffende Achse die kürzeste Entfernung von N haben, also auf dem größten Kreis AN liegen, somit in P. Daß $QP = 90^\circ$, folgt leicht aus den Sätzen Seite 2. Projizieren wir jetzt auf die Achsen des Systems AQP, so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\varrho &= dr\cos(AR) + rdw\cos(AW) + rdn\cos(AN) \\ \varrho\cos\delta d\alpha\cos(QB) + \varrho d\delta\cos(QC) &= dr\cos(QR) + rdw\cos(QW) \\ \varrho\cos\delta d\alpha\cos(PB) + \varrho d\delta\cos(PC) &= dr\cos(PR) + rdw\cos(PW) + rdn\cos(PN). \end{aligned} \qquad \text{II.}$$

In den Gleichungen I. stehen links unmittelbar die Differenziale der geozentrischen Koordinaten in dem zugrunde gelegten festen System xyz; in den Gl. II. ist dies nicht der Fall; man kann aber leicht zeigen, daß die linken Seiten von II. die Differenziale der geozentrischen Koordinaten in einem anderen Koordinatensystem sind. Nennt man nämlich ψ und χ die Polarkoordinaten des geozentrischen Planetenortes A in dem durch die Bahnebene bestimmten Koordinatensystem RWN, so daß ψ vom größten Kreis RN aus in der Richtung der Bahnbewegung gezählt wird und χ von der Ebene RW aus nach dem nördlichen Teil der Bahnebene positiv gerechnet wird, nennt man ferner Ψ den Positionswinkel des Deklinationskreises Ax in bezug auf den Breitenkreis AN, so wird im Dreieck ANx:

$$\begin{array}{lllll} \text{Seite} & xN = i, & Ax = 90^\circ - \delta, & & AN = 90^\circ - \chi \\ \text{Winkel} & NAx = \Psi, & ANx = 90^\circ - \psi - \omega - v, & AxN = 90^\circ - \Omega + \alpha & \end{array} \qquad 12)$$

ferner:

$$QB = \Psi, \quad QC = 90^\circ - \Psi, \quad PB = 90^\circ + \Psi, \quad PC = \Psi. \qquad 13)$$

Wendet man daher auf das Dreieck AxN die Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie an, indem man Nx konstant hält und nur den Punkt A variiert, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos\delta d\alpha &= -\sin\Psi d\chi + \cos\chi\cos\Psi d\psi \\ d\delta &= +\cos\Psi d\chi + \cos\chi\sin\Psi d\psi \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho\cos\delta d\alpha\cos\Psi + \varrho d\delta\sin\Psi &= \varrho\cos\chi d\psi \\ -\varrho\cos\delta d\alpha\sin\Psi + \varrho d\delta\cos\Psi &= \varrho d\chi. \end{aligned} \qquad 14)$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen nach 13) mit den linken Seiten von II. identisch sind, so folgt für diese letzteren nach 14), daß sie die Differenziale der geozentrischen Koordinaten des Planetenortes A im System der Bahnebene RWN sind.

142. Die Formeln der Bahnverbesserung, erste Methode. Um die Gleichungen I. in eine gebrauchsfertige Form überzuführen, müssen wir beachten, daß die rein elliptischen Elemente in dr *und* in rdw auftreten, daß den Faktoren $\cos(AR)$, $\cos(AW)$, ... also eine Form gegeben werden muß, welche die leichte Vereinigung beider ermöglicht, weiter daß die einzuführenden Hilfsgrößen sich bequem aus den gegebenen Stücken berechnen lassen müssen. Die sphärischen Koordinaten des Punktes N im System ABC besitzen diese Eigenschaften. Nennt man die Bogen

$$NA = \mathsf{a}, \qquad NB = \mathsf{b}, \qquad NC = \mathsf{c}$$

und ihre Positionswinkel, gerechnet von Nx aus, bzw.

$$\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B}, \qquad \mathbf{C},$$

so wird mit Beachtung, daß der sphärische Winkel $xNW =$ dem Bogen $KR = \omega + v$ ist, im Dreieck NAR:

$$\cos(AR) = \sin\mathbf{a}\,\sin(\mathbf{A} + \omega + v),$$

im Dreieck NAW:

$$\cos(AW) = \sin\mathbf{a}\,\cos(\mathbf{A} + \omega + v)$$

usf. Damit gehen die Gl. I. über in:

$$\begin{aligned} d\varrho &= \sin\mathbf{a}\,\sin(\mathbf{A}+\omega+v)\,dr + \sin\mathbf{a}\,\cos(\mathbf{A}+\omega+v)\,r\,dw + \cos\mathbf{a}\cdot r\,dn \\ \varrho\cos\delta\,d\alpha &= \sin\mathbf{b}\,\sin(\mathbf{B}+\omega+v)\,dr + \sin\mathbf{b}\,\cos(\mathbf{B}+\omega+v)\,r\,dw + \cos\mathbf{b}\cdot r\,dn \quad \text{I}^{a}) \\ \varrho\,d\delta &= \sin\mathbf{c}\,\sin(\mathbf{C}+\omega+v)\,dr + \sin\mathbf{c}\,\cos(\mathbf{C}+\omega+v)\,r\,dw + \cos\mathbf{c}\cdot r\,dn \end{aligned}$$

und haben offenbar die gewünschte Form. Die Hilfsgrößen **A**, **B**, **C**, **a**, **b**, **c** ergeben sich leicht aus den Dreiecken NxA, NxB, NxC, wofür die Formeln unten zusammengestellt werden sollen. Die in den Gl. I^{a}. adoptierte Form hat zuerst *Schönfeld* benutzt (Astr. Nachr. Band 113, Seite 73, Gl. 19), doch ist er auf einem weniger allgemeinen Wege dazu gelangt.

In die Gl. I^{a}. sind nun die Elemente einzuführen; hierzu sind zuerst die Differenziale dr und dv durch die Differenziale der Elemente auszudrücken; dabei ist zwischen elliptischen Bahnen von mäßiger Exzentrizität und parabelnahen und parabolischen Bahnen zu unterscheiden. Wir behandeln vorläufig nur die Ellipse und kommen auf die übrigen in Nr. 146 zurück.

Sind t_0, M_0, a, (p), μ, φ Epoche, mittlere Anomalie der Epoche, große Halbachse, (Parameter), mittlere tägliche Bewegung und Exzentrizitätswinkel der zu verbessernden Bahn, so hat man folgende aus Nr. 44 gesammelte Formeln für die elliptische Bewegung:

(a) $$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

(b) $$M = M_0 + (t - t_0)\,\mu$$

(c) $$E - \sin\varphi\,\sin E = M$$

(d) $$\begin{aligned} r\sin v &= a\cos\varphi\,\sin E \\ r\cos v &= a\,(\cos E - \sin\varphi) \end{aligned}$$

(e) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi)\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$

(f) $$r = a(1 - \sin\varphi\,\cos E) = \frac{p}{1 + \sin\varphi\,\cos v}.$$

Die Differenziation dieser Formeln gibt

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{3}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}d\mu$$

$$d\frac{1}{a} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{a}}{k}d\mu$$

$$dM = dM_0 + (t - t_0)\,d\mu$$

$$(1 - \sin\varphi\,\cos E)\,dE - \cos\varphi\,\sin E\,d\varphi = dM$$

oder:

$$dE = \frac{a}{r}\,dM + \sin v\cdot d\varphi = \frac{a}{r}\,dM_0 + \frac{a}{r}(t - t_0)\,d\mu + \sin v\cdot d\varphi.$$

Wird (e) logarithmisch differenziert, so kommt:

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{dE}{\sin E}$$

oder

$$r\,dv = \frac{r\sin v}{\cos\varphi}\,d\varphi + a\cos\varphi\,dE,$$

oder nach Eintragung des Wertes von dE

$$r\,dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r}\,dM_0 + \frac{a^2\cos\varphi}{r}(t-t_0)\,d\mu + a\cos\varphi\,\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)d\varphi. \qquad 15)$$

Aus der Differenziation von (f) folgt:

$$dr = \frac{r}{a}\,da + a\,\sin\varphi\,\sin E\cdot dE - a\,\cos\varphi\,\cos E\cdot d\varphi$$

oder wenn für $\frac{da}{a}$ und dE ihre oben angegebenen Werte substituiert werden:

$$dr = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\sin v\,dM_0 + \left(a\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\sin v\cdot(t-t_0) - \frac{2}{3k}ra^{\frac{3}{2}}\right)d\mu - a\cos\varphi\,\cos v\cdot d\varphi. \qquad 16)$$

In den Gl. I^a. setzen wir ferner nach 9)

$$\begin{aligned} r\,dw &= r\,dv + r\,d\mathbf{s} \\ r\,dn &= r\,\sin v\cdot d\mathbf{p} - r\,\cos v\cdot d\mathbf{q}, \end{aligned} \qquad 17)$$

indem es Vorteile bietet, nach einem Vorschlag von Schönfeld die Differenziale $d\mathbf{p}$, $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{s}$ (von ihm mit bezw. $d\nu$, $-d\lambda$, $d\varkappa$ bezeichnet) als Unbekannte beizubehalten und erst zum Schluß mittels 5) auf die gewöhnlichen Elemente i, Ω und ω überzugehen.

Die Eintragung von 15), 16), 17) in I^a. führt in den Faktoren von dM_0 und $d\mu$ auf folgenden Ausdruck

$$\sin\mathbf{a}\left(\sin(\mathbf{A}+\omega+v)\,a\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\sin v + \cos(\mathbf{A}+\omega+v)\,\frac{a^2}{r}\cos\varphi\right),$$

der sich leicht auf eine geschmeidigere Form bringen läßt:

$$\sin\mathbf{a}\cdot a\,\sec\varphi\left(\sin(\mathbf{A}+\omega+v)\,\sin\varphi\,\sin v + \cos(\mathbf{A}+\omega+v)\,\frac{p}{r}\right)$$

und wenn nach (f) $\frac{p}{r} = 1+\sin\varphi\,\cos v$ gesetzt wird:

$$\sin\mathbf{a}\cdot a\,\sec\varphi\,(\cos(\mathbf{A}+\omega+v) + \sin\varphi\,\cos(\mathbf{A}+\omega)).$$

Ebenso hat man für $d\varphi$ den Faktor:

$$a\,\sin\mathbf{a}\,(\cos(\mathbf{A}+\omega+v)\,\cos\varphi\,\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right) - \sin(\mathbf{A}+\omega+v)\,\cos\varphi\,\cos v),$$

der unter Anwendung von $r \sin v = a \cos\varphi \sin E$ sofort in die einfache Form übergeht:

$$a \sin \mathsf{a} \,(\sin E \cos(\mathbf{A} + \omega + v) - \cos\varphi \sin(\mathbf{A} + \omega)).$$

Die übrigen Faktoren bedürfen keiner Umgestaltung. Man erhält die symmetrischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
d\varrho = {} & \sin \mathsf{a} \,(\cos(\mathbf{A} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{A} + \omega))\, a \sec\varphi\, dM_0 \\
& \left\{ \begin{array}{l} + \sin \mathsf{a} \,(\cos(\mathbf{A} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{A} + \omega))\, a \sec\varphi\, (t - t_0)\, d\mu \\ - \sin \mathsf{a} \sin(\mathbf{A} + \omega + v)\, \frac{2}{3k}\, a^{\frac{3}{2}}\, r\, d\mu \end{array} \right. \\
& + \sin \mathsf{a} \,(\sin E \cos(\mathbf{A} + \omega + v) - \cos\varphi \sin(\mathbf{A} + \omega))\, a\, d\varphi \\
& + \sin \mathsf{a} \cos(\mathbf{A} + \omega + v)\, r\, d\mathbf{s} \\
& + \cos \mathsf{a}\, r \sin v\, d\mathbf{p} \\
& - \cos \mathsf{a}\, r \cos v\, d\mathbf{q} \\
\varrho \cos\delta\, d\alpha = {} & \sin \mathsf{b} \,(\cos(\mathbf{B} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{B} + \omega))\, a \sec\varphi\, dM_0 \\
& \left\{ \begin{array}{l} + \sin \mathsf{b} \,(\cos(\mathbf{B} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{B} + \omega))\, a \sec\varphi\, (t - t_0)\, d\mu \\ - \sin \mathsf{b} \sin(\mathbf{B} + \omega + v)\, \frac{2}{3k}\, a^{\frac{3}{2}}\, r\, d\mu \end{array} \right. \\
& + \sin \mathsf{b} \,(\sin E \cos(\mathbf{B} + \omega + v) - \cos\varphi \sin(\mathbf{B} + \omega))\, a\, d\varphi \\
& + \sin \mathsf{b} \cos(\mathbf{B} + \omega + v)\, r\, d\mathbf{s} \\
& + \cos \mathsf{b}\, r \sin v\, d\mathbf{p} \\
& - \cos \mathsf{b}\, r \cos v\, d\mathbf{q} \\
\varrho\, d\delta = {} & \sin \mathsf{c} \,(\cos(\mathbf{C} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{C} + \omega))\, a \sec\varphi\, dM_0 \\
& \left\{ \begin{array}{l} + \sin \mathsf{c} \,(\cos(\mathbf{C} + \omega + v) + \sin\varphi \cos(\mathbf{C} + \omega))\, a \sec\varphi\, (t - t_0)\, d\mu \\ - \sin \mathsf{c} \sin(\mathbf{C} + \omega + v)\, \frac{2}{3k}\, a^{\frac{3}{2}}\, r\, d\mu \end{array} \right. \\
& + \sin \mathsf{c} \,(\sin E \cos(\mathbf{C} + \omega + v) - \cos\varphi \sin(\mathbf{C} + \omega))\, a\, d\varphi \\
& + \sin \mathsf{c} \cos(\mathbf{C} + \omega + v)\, r\, d\mathbf{s} \\
& + \cos \mathsf{c}\, r \sin v\, d\mathbf{p} \\
& - \cos \mathsf{c}\, r \cos v\, d\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

Die Einführung von Hilfswinkeln zur Vereinfachung dieser Gleichungen ist rechnerisch nicht vorteilhaft, dagegen empfehlen sich einige abkürzende Bezeichnungen. Bevor wir diese angeben und mit den definitiven Formeln zusammenstellen, wollen wir die Berechnung der A, B, C, a, b, c erläutern. In Dreieck NxA (Fig. 57, Seite 437) ist:

$$\begin{aligned}
&\text{Seite: } xN = i, \quad Ax = 90^\circ - \delta, \quad AN = \mathsf{a} \\
&\text{Winkel: } \qquad xNA = \mathbf{A}, \qquad AxN = 90^\circ - \Omega + \alpha
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sin \mathsf{a} \sin \mathbf{A} &= \cos\delta \cos(\alpha - \Omega) \\
\sin \mathsf{a} \cos \mathbf{A} &= \sin\delta \sin i + \cos\delta \cos i \sin(\alpha - \Omega) \\
\cos \mathsf{a} &= \sin\delta \cos i - \cos\delta \sin i \sin(\alpha - \Omega).
\end{aligned}$$

Ähnlich folgen b, B, c, C aus den Dreiecken NxB und NxC.

In die folgende Zusammenstellung nehmen wir nur die Formeln für $\varrho \cos\delta\, d\alpha$ und $\varrho\, d\delta$ auf, da die für $d\varrho$ in praxi nicht gebraucht wird und im vorigen nur der Vollständigkeit und Symmetrie halber mitgeführt wurde.

Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen von mäßiger Exzentrizität (Planeten und kurzperiodische Kometen). Erste Methode.

ω, i und Ω beziehen sich auf dieselbe Grundebene und dasselbe Äquinoktium, wie die Koordinaten α und δ.

$$
\begin{aligned}
\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{B} &= -\sin(\alpha-\Omega)\\
\sin\mathfrak{b}\cos\mathfrak{B} &= +\cos i\cos(\alpha-\Omega)\\
\cos\mathfrak{b} &= -\sin i\cos(\alpha-\Omega)\\
\sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{C} &= -\sin\delta\cos(\alpha-\Omega)\\
\sin\mathfrak{c}\cos\mathfrak{C} &= +\sin i\cos\delta-\cos i\sin\delta\sin(\alpha-\Omega)\\
\cos\mathfrak{c} &= +\cos i\cos\delta+\sin i\sin\delta\sin(\alpha-\Omega)
\end{aligned}
\qquad \text{A.}
$$

$\sin\mathfrak{b}$ und $\sin\mathfrak{c}$ sind positiv

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\cos(\mathfrak{B}+\omega+v)=F_c^\alpha & \frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{C}+\omega+v)=F_c^\delta\\
\frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\sin(\mathfrak{B}+\omega+v)=F_s^\alpha & \frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\sin(\mathfrak{C}+\omega+v)=F_s^\delta\\
\frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\cos(\mathfrak{B}+\omega)=G_c^\alpha & \frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{C}+\omega)=G_c^\delta\\
\frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\sin(\mathfrak{B}+\omega)=G_s^\alpha & \frac{a}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\sin(\mathfrak{C}+\omega)=G_s^\delta\\
\frac{1}{\varrho}\cos\mathfrak{b}\,r\cos v=H_c^\alpha & \frac{1}{\varrho}\cos\mathfrak{c}\,r\cos v=H_c^\delta\\
\frac{1}{\varrho}\cos\mathfrak{b}\,r\sin v=H_s^\alpha & \frac{1}{\varrho}\cos\mathfrak{c}\,r\sin v=H_s^\delta\\
\frac{2}{3k}\sqrt{a}=K & \log\frac{2}{3k}=1.588327
\end{array}
\qquad \text{B.}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\delta\,d\alpha &= (F_c^\alpha+\sin\varphi\cdot G_c^\alpha)\sec\varphi\,dM_0\\
&+\left((F_c^\alpha+\sin\varphi\cdot G_c^\alpha)\sec\varphi\,(t-t_0)-KrF_s^\alpha\right)d\mu\\
&+(\sin E\cdot F_c^\alpha-\cos\varphi\cdot G_s^\alpha)\,d\varphi\\
&+F_c^\alpha\frac{r}{a}\,d\mathfrak{s}\\
&+H_s^\alpha\,d\mathfrak{p}\\
&-H_c^\alpha\,d\mathfrak{q}\\
d\delta &= (F_c^\delta+\sin\varphi\cdot G_c^\delta)\sec\varphi\,dM_0\\
&+\left((F_c^\delta+\sin\varphi\cdot G_c^\delta)\sec\varphi\,(t-t_0)-KrF_s^\delta\right)d\mu\\
&+(\sin E\cdot F_c^\delta-\cos\varphi\cdot G_s^\delta)\,d\varphi\\
&+F_c^\delta\frac{r}{a}\,d\mathfrak{s}\\
&+H_s^\delta\,d\mathfrak{p}\\
&-H_c^\delta\,d\mathfrak{q}.
\end{aligned}
\qquad \text{C.}
$$

Für α und δ nimmt man am besten die aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte; $r\cos v$, $r\sin v$, v, $\sin E$, ϱ sind der Ephemeridenrechnung zu entnehmen.

Von dp, dq, ds geht man mittels der Formeln 5) (Seite 435) auf die gewöhnlichen Bahnelemente $d\omega$, $d\Omega$, di über:

$$\begin{aligned} di &= \cos\omega\, dp - \sin\omega\, dq \\ \sin i\, d\Omega &= \sin\omega\, dp + \cos\omega\, dq \\ d(\Omega + \omega) &= ds + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \sin i\, d\Omega. \end{aligned} \qquad \text{D.}$$

Da die dp, dq, ds ihrer Definition nach vom zugrunde gelegten Koordinatensystem unabhängig sind, dienen die Formeln D. zum Übergang auf jedes Grundsystem, Ekliptik oder Äquator. In der Regel hat man Ekliptikalelemente vorliegen; nimmt man, wie ebenfalls meist der Fall ist, für α und δ Rektaszension und Deklination, so muß man bei Durchrechnung von A. und B. sich natürlich der Äquatorealelemente bedienen. Mittels D. kann man dann aber gleich die Korrektionen der Ekliptikalelemente erhalten.

Die Gleichungen C. sind für jeden Normalort aufzustellen; für $\cos\delta\, d\alpha$ und $d\delta$ sind die Unterschiede Beobachtung — Rechnung zu setzen, die sich mit dem zur Verbesserung vorgelegten System E_i ergeben. Die Auflösung der Gleichungen erfolgt nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung (Abschnitt XXVI) und gibt die Korrektionen, die den Elementen E_i hinzuzufügen sind, um diejenigen Elemente zu erhalten, welche die Beobachtungen am annehmbarsten darstellen.

143. Beispiel für eine Bahnverbesserung nach der ersten Methode. Es sei die Aufgabe gestellt, das schon nahe richtige Elementensystem des Planeten (221) Eos:

Ep. und Osk. 1882 Februar 7.0 M. Z. Berlin

M_0	171° 52′ 22″.5	
ω	188 54 9.1	Ekl. und Äqu. 1880.0
Ω	142 32 46.1	
i	10 51 14.7	
φ	5 57 6.5	
μ	679″.8499	
$\log a$	0.478 3957	

so zu verbessern, daß es die folgenden beobachteten Normalörter möglichst gut darstellt:

Beobachtete Normalörter.

	Datum	Äqu.	α	δ	Gew.
I.	1882 Febr. 11.5	1880.0	148° 56′ 24″.0	+ 13° 27′ 38″.8	2
II.	1883 Mai 30.5	1880.0	212 35 51.7	+ 2 27 2.2	1
III.	1884 Juli 22.5	1880.0	314 28 19.9	− 12 48 44.8	1
IV.	1887 Febr. 13.5	1890.0	130 6 59.5	+ 15 44 59.3	1
V.	1898 März 16.5	1900.0	168 57 50.4	+ 12 9 1.1	2

Um zunächst die Differenzen Beobachtung — Rechnung zu bilden, werden die aus obigen Elementen (unter Berücksichtigung der Störungen, siehe Nr. 180) für die angegebenen Zeiten folgenden Örter *berechnet*; sie sind in nachstehender Tabelle zugleich mit den Differenzen gegen die Beobachtungen aufgeführt.

Gerechnete Örter.

	Datum	Äqu.	α	δ	Beob. — Rech. $d\alpha$	$d\delta$	Gew.
I.	1882 Febr. 11.5	1880.0	148° 56′ 22″.1	+ 13° 27′ 38″.9	+ 1″.9	— 0″.1	2
II.	1883 Mai 30.5	1880.0	212 35 51.7	+ 2 26 59.2	0.0	+ 3.0	1
III.	1884 Juli 22.5	1880.0	314 28 18.4	— 12 48 49.4	+ 1.5	+ 4.6	1
IV.	1887 Febr. 13.5	1890.0	130 7 19.3	+ 15 44 58.9	— 19.8	+ 0.4	1
V.	1898 März 16.5	1900.0	168 59 7.3	+ 12 8 43.3	— 76.9	+ 17.8	2

Die Berechnung der Koeffizienten der Bedingungsgleichungen erheischt die Kenntnis der auf den Äquator übertragenen Bahnelemente ω, i, Ω, die wir zusammen mit einigen Hilfsgrößen in folgender Tabelle zusammenstellen.

Normalort.

		I	II	III	IV	V
Äquator-elemente	ω	308° 0′.45	307° 48′.93	308° 6′.85	307° 56′.21	307° 44′.38
	Ω	24 17.48	24 17.29	24 17.13	24 14.83	24 15.28
	i	16 9.85	16 9.99	16 10.15	16 8.81	16 9.13
	Äqu.	1880.0	1880.0	1880.0	1890.0	1900.0
	$\sin i$	9.44 465	9.44 472	9.44 479	9.44 420	9.44 434
	$\cos i$	9.98 248	9.98 248	9.98 247	9.98 252	9.98 251
	a	0.47 840	0.47 861	0.47 874	0.47 850	0.47 946
	$\sin\varphi$	9.01 574	9.01 409	9.01 376	9.01 343	8.98 777
	$\cos\varphi$	9.99 765	9.99 767	9.99 768	9.99 768	9.99 794
	K	1.82 753	1.82 763	1.82 770	1.82 758	1.82 806

Die folgende vollständige Berechnung der Koeffizienten bedarf keiner Erläuterung, außer daß die zuerst zusammengestellten heliozentrischen und geozentrischen Koordinaten unmittelbar den vorhandenen Ephemeridenrechnungen entnommen werden können.

$t_0 = 1882$ Febr. 7.0

		I.	II.	III.	IV.	V.
	$t - t_0$	+ 4.5	+ 477.5	+ 896.5	+ 1832.5	+ 5881.5
	v	174° 3′.34	250° 46′.37	337° 10′.40	162° 17′.77	198° 18′.16
	r	0.52 097	0.48 898	0.43 462	0.51 878	0.51 739
	$r\sin v$	9.53 618	0.46 405$_n$	0.02 339$_n$	0.00 179	0.01 437$_n$
	$r\cos v$	0.51 863$_n$	0.00 659$_n$	0.39 920	0.49 771$_n$	0.49 485$_n$
	$r : a$	0.05 778	0.01 037	9.95 588	0.04 028	0.03 793
	$\sin E$	9.06 013	9.98 777$_n$	9.54 698$_n$	9.52 561	9.53 698$_n$
1880.0 / 1890.0 / 1900.0	α	148° 56′.40	212° 35′.86	314° 28′.33	130° 7′.00	168° 57′.84
	δ	+ 13 27.65	+ 2 27.04	— 12 48.75	+ 15 44.99	+ 12 9.02
	ϱ	0.36 781	0.35 253	0.23 610	0.36 998	0.36 443
	$\sin\delta$	9.36 694	8.63 113	9.34 588$_n$	9.43 367	9.32 320
	$\cos\delta$	9.98 790	9.99 960	9.98 905	9.98 338	9.99 016
	$\alpha - \Omega$	124° 38′.92	188° 18′.57	290° 11′.20	105 52′.17	144° 42′.56
	$\sin(\alpha - \Omega)$	9.91 522	9.15 993$_n$	9.97 247$_n$	9.98 312	9.76 172
	$\cos(\alpha - \Omega)$	9.75 476$_n$	9.99 542$_n$	9.53 792	9.43 687$_n$	9.91 181$_n$
A.	$\sin b \sin B$	9.91 522$_n$	9.15 993	9.97 247	9.98 312$_n$	9.76 172$_n$
	$\sin b \cos B$	9.73 724$_n$	9.97 790$_n$	9.52 039	9.41 939$_n$	9.89 432$_n$
	$\cos B$	9.74 274$_n$	9.99 503$_n$	9.52 240	9.42 065$_n$	9.90 582$_n$
	B	236° 25′.50	171° 21′.21	70° 33′.05	254° 43′.60	216° 23′.15
	$\sin b$	9.99 450	9.98 287	9.99 799	9.99 874	9.98 850
	$\cos b$	9.19 941	9.44 014	8.98 271$_n$	8.88 107	9.35 615

$\sin i \cos\delta$	9.43 255	9.44 432	9.43 384	9.42 758	9.43 450
$-\cos i \sin\delta \sin(\alpha-\Omega)$	9.26 464$_n$	7.77 354	9.30 082$_n$	9.39 931$_n$	9.06 743$_n$
$\sin c \sin C$	9.12 170	8.62 655	8.88 380	8.87 054	9.23 501
$\sin c \cos C$	8.93 859	9.45 349	8.85 519	8.22 708	9.19 078
$\cos C$	9.73 918	9.99 523	9.83 471	9.34 560	9.82 624
$\cos i \cos\delta$	9.97 038	9.98 208	9.97 152	9.96 590	9.97 267
$\sin i \sin\delta \sin(\alpha-\Omega)$	8.72 681	7.23 578$_n$	8.76 314	8.86 099	8.52 926
C	56° 44.′15	8° 28.′34	46° 53.′16	77° 11.′76	47° 54.′76
$\sin c$	9.19 941	9.45 826	9.02 048	8.88 148	9.36 454
$\cos c$	9.99 449	9.98 130	9.99 760	9.99 874	9.98 804
B. $a:\varrho$	0.11 059	0.12 608	0.24 264	0.10 852	0.11 503
$(a:\varrho)\sin b$	0.10 509	0.10 895	0.24 063	0.10 726	0.10 353
$B+\omega$	184° 25.′95	119° 10.′14	18° 39.′90	202° 39.′81	164° 7.′53
$B+\omega+v$	− 1 30.71	+ 9 56.51	− 4 9.70	+ 4 57.58	+ 2 25.69
$\sin(B+\omega)$	8.88 809$_n$	9.94 111	9.50 519	9.58 582$_n$	9.43 701
$\cos(B+\omega)$	9.99 870$_n$	9.68 787$_n$	9.97 653	9.96 510$_n$	9.98 311$_n$
$\sin(B+\omega+v)$	8.42 133$_n$	9.23 716	8.86 076$_n$	8.93 679	8.62 703
$\cos(B+\omega+v)$	9.99 985	9.99 343	9.99 885	9.99 837	9.99 961
C. G_c^α	0.13 079$_n$	9.79 682$_n$	0.21 716	0.07 236$_n$	0.08 664$_n$
$\sin\varphi\, G_c^\alpha$	9.14 653$_n$	8.81 091$_n$	9.23 092	9.08 579$_n$	9.07 441$_n$
F_c^α	0.10 494	0.10 238	0.23 948	0.10 563	0.10 314
Σ	0.05 430	0.07 959	0.28 010	0.06 202	0.06 046
$\cos\delta d\alpha : dM_0$	0.05 665	0.08 192	0.28 242	0.06 434	0.06 252
$t-t_0$	0.65 321	2.67 897	2.95 255	3.26 304	3.76 949
F_s^α	8.52 642$_n$	9.34 611	9.10 139$_n$	9.04 405	8.73 056
$-Kr$	2.34 850$_n$	2.31 661$_n$	2.26 232$_n$	2.34 636$_n$	2.34 545$_n$
$-Kr F_s^\alpha$	0.87 492	1.66 272$_n$	1.36 371	1.39 041$_n$	1.07 601$_n$
$(\ldots)(t-t_0)$	0.70 986	2.76 089	3.23 497	3.32 738	3.83 201
$\cos\delta d\alpha : d\mu$	1.10 122	2.72 479	3.24 078	3.32 233	3.83 125
G_s^α	8.99 318$_n$	0.05 006	9.74 582	9.69 308$_n$	9.54 054
$-\cos\varphi\, G_s^\alpha$	8.99 083	0.04 773$_n$	9.74 350$_n$	9.69 076	9.53 848$_n$
$\sin E \cdot F_c^\alpha$	9.16 507	0.09 015$_n$	9.78 646$_n$	9.63 124	6.64 012$_n$
$\cos\delta d\alpha : d\varphi$	9.38 766	0.37 049$_n$	0.06 654$_n$	9.96 305	9.89 330$_n$
$\cos\delta d\alpha : ds$	0.16 272	0.11 275	0.19 536	0.14 591	0.14 107
$\cos b : \varrho$	8.83 160	9.08 761	8.74 661$_n$	8.51 109	8.99 172
$\cos\delta d\alpha : dp$	8.36 778	9.55 166$_n$	8.77 000	8.51 288	9.00 609$_n$
$\cos\delta d\alpha : dq$	9.35 023	9.09 420	9.14 581	9.00 880	9.48 657
B. $(a:\varrho)\sin c$	9.31 000	9.58 434	9.26 312	8.99 000	9.47 957
$C+\omega$	+ 4° 44.′60	− 43° 42.′73	− 4° 59.′99	+ 25° 7.′97	− 4° 20.′86
$C+\omega+v$	178 47.94	207 3.64	332 10.41	187 25.74	193 57.30
$\sin(C+\omega)$	8.91 746	9.83 950$_n$	8.94 029$_n$	9.62 811	8.87 972$_n$
$\cos(C+\omega)$	9.99 851	9.85 903	9.99 834	9.95 680	9.99 875
$\sin(C+\omega+v)$	8.32 139	9.65 795$_n$	9.66 913$_n$	9.11 159$_n$	9.38 230$_n$
$\cos(C+\omega+v)$	9.99 990$_n$	9.94 965$_n$	9.94 663$_n$	9.99 634$_n$	9.98 699
C. G_c^ϑ	9.30 851	9.44 337	9.26 146	8.94 680	9.47 832
$\sin\varphi\, G_c^\vartheta$	8.32 425	8.45 746	8.27 522	7.96 023	8.46 609
F_c^ϑ	9.30 990$_n$	9.53 399$_n$	9.20 975	8.98 634$_n$	9.46 656$_n$
Σ	9.26 253$_n$	9.49 596$_n$	9.25 752	8.94 339$_n$	9.42 085$_n$
$d\vartheta : dM_0$	9.26 488$_n$	9.49 829$_n$	9.25 984	8.94 571$_n$	9.42 291$_n$

F_s^ϑ	7.63 139	9.24 229$_n$	8.93 225$_n$	8.10 159$_n$	8.86 187$_n$
$-Kr F_s^\vartheta$	9.97 989$_n$	1.55 890	1.19 457	0.44 795	1.20 732
$(\ldots)(t-t_0)$	9.91 809$_n$	2.17 726$_n$	2.21 239	2.20 875$_n$	3.19 240$_n$
$d\vartheta : d\mu$	0.25 112$_n$	2.05 762$_n$	2.25 219	2.20 115$_n$	3.18 788$_n$
G_s^ϑ	8.22 746	9.42 384$_n$	8.20 341$_n$	8.61 811	8.35 929$_n$
$-\cos\varphi\, G_s^\vartheta$	8.22 511$_n$	9.42 151	8.20 109	8.61 579$_n$	8.35 723
$\sin E \cdot F_c^\vartheta$	8.37 003$_n$	9.52 176	8.75 673$_n$	8.51 195$_n$	9.00 354
$d\vartheta : d\varphi$	8.60 461$_n$	9.77 555	8.61 514$_n$	8.86 800$_n$	9.09 195
$d\vartheta : d\mathbf{s}$	9.36 768$_n$	9.54 436$_n$	9.16 563	9.02 662$_n$	9.50 449$_n$
$\cos\mathbf{c} : \varrho$	9.62 668	9.62 877	9.76 150	9.62 876	9.62 361
$d\vartheta : d\mathbf{p}$	9.16 286	0.09 282$_n$	9.78 489$_n$	9.63 055	9.63 798$_n$
$d\vartheta : d\mathbf{q}$	0.14 531	9.63 536	0.16 070$_n$	0.12 647	0.11 846
$d\alpha$	0.27 88	»	0.17 61	1.29 67$_n$	1.88 59$_n$
$\cos\vartheta\, d\alpha$	0.26 67	»	0.16 51	1.28 01$_n$	1.87 61$_n$
$d\vartheta$	9.00 00$_n$	0.47 71	0.66 28	9.60 20	1.25 04

Die Bedingungsgleichungen werden somit (Koeffizienten in Logarithmen):

							Gew.
0.0566 dM_0	+ 1.1012 $d\mu$	+ 9.3877 $d\varphi$	+ 0.1627 $d\mathbf{s}$	+ 8.3678 $d\mathbf{p}$	+ 9.3502 $d\mathbf{q}$	= 0.2667	2
0.0819	2.7248	0.3705$_n$	0.1127	9.5517$_n$	9.0942	= »	1
0.2824	3.2408	0.0665$_n$	0.1954	8.7700	9.1458	= 0.1651	1
0.0643	3.3223	9.9630	0.1459	8.5129	9.0088	= 1.2801$_n$	1
0.0625	3.8312	9.8933$_n$	0.1411	9.0061$_n$	9.4866	= 1.8761$_n$	2
9.2649$_n$	0.2511$_n$	8.6046$_n$	9.3677$_n$	9.1629	0.1453	= 9.0000$_n$	2
9.4983$_n$	2.0576$_n$	9.7755	9.5444$_n$	0.0928$_n$	9.6354	= 0.4771	1
9.2598	2.2522	8.6151$_n$	9.1656	9.7849$_n$	0.1607$_n$	= 0.6628	1
8.9457$_n$	2.2011$_n$	8.8680$_n$	9.0266$_n$	9.6305	0.1265	= 9.6020	1
9.4229$_n$	3.1879$_n$	9.0920	9.5045$_n$	9.6380$_n$	0.1185	= 1.2504	2

Ihre Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate haben wir in Nr. 139 als Beispiel einer Ausgleichung durchgeführt und können uns beschränken, die Resultate hier anzuführen:

$$\begin{aligned} dM_0 &= +\ 31''.15 && \pm 2''.89 \\ d\mu &= -\ 0.01156 && \pm 0.00020 \\ d\varphi &= +\ 1.15 && \pm 0.62 \\ d\mathbf{s} &= -\ 23.10 && \pm 0.82 \\ d\mathbf{p} &= -\ 2.81 && \pm 0.91 \\ d\mathbf{q} &= -\ 0.31 && \pm 0.43 \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die linken Seiten der Bedingungsgleichungen eingetragen, dann stellen diese die Beträge dar, um welche sich die gerechneten Koordinaten ändern, wenn man statt der vorgelegten Elemente die korrigierten benutzt. Die Darstellung der Beobachtungen im Sinne Beobachtung — Rechnung durch die neuen Elemente wird also erhalten, wenn man die Seite 430 angegebenen $\sqrt{p}\,\delta$ mit $\sqrt{p}$ dividiert und ihr Zeichen umkehrt. Es kommt:

		Beob. — Rechn.	
		$\cos\delta\, d\alpha$	$d\delta$
I.	1882 Febr. 11.5	$-0''.05$	$+1''.12$
II.	1883 Mai 30.5	$+0.18$	-0.62
III.	1884 Juli 22.5	-0.33	$+2.26$
IV.	1887 Febr. 13.5	$+0.49$	$+0.55$
V.	1898 März 16.5	-0.09	-0.11

Die Darstellung der Normalörter durch die neuen Elemente ist also eine recht befriedigende. Um das korrigierte Elementensystem in der gewöhnlichen Form aufstellen zu können, müssen noch die $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{p}$, $d\mathfrak{q}$ in die Korrektionen der Elemente ω, Ω, i verwandelt werden, was durch die Formeln D. Seite 443 erreicht wird.

Berechnung der Korrektion der Ekliptikalelemente:

$\cos\omega$	9.9947_n	$\sin i\, d\Omega$	9.8727
$\sin\omega$	9.1896_n	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}i$	8.9777
$d\mathfrak{p}$	0.4490_n	$\sin i$	9.2749
$d\mathfrak{q}$	9.4980_n		

$di =$	$+\ 2''.78$	$-\ 0''.05$	$=+\ 2''.73$
$\sin i\, d\Omega =$	$+\ 0.435$	$+\ 0.311$	$=+\ 0.746$
$d(\Omega+\omega) =$	$-\ 23.10$	$+\ 0.07$	$=-\ 23.03$
$d\Omega =$			$=+\ 3.96$
$d\omega =$			$=-\ 26.99$

Die verbesserten Elemente sind also:

(221) Eos.

Ep. und Osk. 1882 Februar 7.0 M. Z. Berlin.

$M_0 = 171^\circ 52' 53''.65$

$\left.\begin{aligned} \omega &= 188\ 53\ 42.11 \\ \Omega &= 142\ 32\ 50.06 \\ i &= 10\ 51\ 17.43 \end{aligned}\right\}$ Ekl. und Äqu. 1880.0

$\varphi = 5\ 57\ 7.65$

$\mu = 679''.83834$

$\log a = 0.4784007$.

144. Die Formeln der Bahnverbesserung, zweite Methode. Wir führen jetzt die Grundform II. (Seite 438) in eine für die Anwendung geeignete Gestalt über, was mittels der schon Seite 438 eingeführten Koordinaten ψ und χ des geozentrischen Planetenortes A im System RWN der Bahnebene und mittels des Positionswinkels Ψ leicht gelingt. Aus den Dreiecken (Fig. 57, Seite 437) ANR, ANW; QNR, QNW; PNR, PNW folgt:

$\cos(AR) = \cos\chi\cos\psi$	$\cos(QR) = -\sin\psi$	$\cos(PR) = -\sin\chi\cos\psi$
$\cos(AW) = \cos\chi\sin\psi$	$\cos(QW) = \cos\psi$	$\cos(PW) = -\sin\chi\sin\psi$
$\cos(AN) = \sin\chi$		$\cos(PN) = \cos\chi$

und daher wird aus II. in Verbindung mit 14)

$$\begin{aligned} d\varrho &= \cos\chi\cos\psi\cdot dr + \cos\chi\sin\psi\cdot r\,dw + \sin\chi\cdot r\,dn \\ \varrho\cos\chi\,d\psi &= -\sin\psi\cdot dr + \cos\psi\cdot r\,dw \\ \varrho\,d\chi &= -\sin\chi\cos\psi\cdot dr - \sin\chi\sin\psi\cdot r\,dw + \cos\chi\cdot r\,dn. \end{aligned} \qquad \text{II}^{a}.$$

Dies sind mit den Modifikationen, welche durch die Einführung der Differenziale $r\,dw$ und $r\,dn$ bedingt sind, die Gleichungen, welche *Tietjen* (Berl. Jahrb. 1878) auf anderem Wege abgeleitet und seiner Methode der Bahnverbesserung zugrunde gelegt hat. Werden für die Differenziale dr, $r\,dw$, $r\,dn$ die Ausdrücke 15), 16), 17) eingetragen, so kommen, wenn wir gleich dieselben Zusammenziehungen vornehmen wie Seite 440, die Formeln:

$$\begin{aligned} d\varrho = {} & \cos\chi\,(\sin\psi + \sin\varphi\sin(\psi+v))\,a\sec\varphi\,dM_0 \\ & + \cos\chi\left([\sin\psi + \sin\varphi\sin(\psi+v)]\sec\varphi\,(t-t_0) - \cos\psi\,\tfrac{2}{3k}\sqrt{a}r\right)a\,d\mu \\ & + \cos\chi\,(\sin E\sin\psi - \cos\varphi\cos(\psi+v))\,a\,d\varphi \\ & + \cos\chi\sin\psi\,r\,d\mathfrak{s} \\ & + \sin\chi\,r\sin v\,d\mathfrak{p} \\ & - \sin\chi\,r\cos v\,d\mathfrak{q} \\ \varrho\cos\chi\,d\psi = {} & (\cos\psi + \sin\varphi\cos(\psi+v))\,a\sec\varphi\,dM_0 \\ & + \left([\cos\psi + \sin\varphi\cos(\psi+v)]\sec\varphi\,(t-t_0) + \sin\psi\,\tfrac{2}{3k}\sqrt{a}r\right)a\,d\mu \\ & + (\sin E\cos\psi + \cos\varphi\sin(\psi+v))\,a\,d\varphi \\ & + \cos\psi\,r\,d\mathfrak{s} \\ \varrho\,d\chi = {} & -\sin\chi\,(\sin\psi + \sin\varphi\sin(\psi+v))\,a\sec\varphi\,dM_0 \\ & - \sin\chi\left([\sin\psi + \sin\varphi\sin(\psi+v)]\sec\varphi\,(t-t_0) - \cos\psi\,\tfrac{2}{3k}\sqrt{a}r\right)a\,d\mu \\ & - \sin\chi\,(\sin E\sin\psi - \cos\varphi\cos(\psi+v))\,a\,d\varphi \\ & - \sin\chi\sin\psi\cdot r\,d\mathfrak{s} \\ & + \cos\chi\,r\sin v\,d\mathfrak{p} \\ & - \cos\chi\,r\cos v\,d\mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang der hier eingeführten Koordinaten ψ und χ mit den direkt gegebenen α und δ ergibt sich aus dem Dreieck zwischen den Polen der beiden Systeme und dem Ort A, also $N\,x\,A$, dessen Stücke wir bereits in 12) (Seite 438) angegeben haben; dasselbe ergibt zugleich den Winkel $^{i}\Psi$, dessen man zur Überführung von $\cos\delta\,d\alpha$ und $d\delta$ in $\cos\chi\,d\psi$ und $d\chi$ bedarf. In der nachfolgenden Zusammenstellung aller Formeln führen wir wieder einige abkürzende Bezeichnungen ein und beschränken uns auf die Koordinaten $d\psi$ und $d\chi$.

Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen von mäßiger Exzentrizität (Planeten und kurzperiodische Kometen). Zweite Methode.

$$\begin{aligned} \cos\chi\sin(\omega+v+\psi) &= \sin i\sin\delta + \cos i\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) \\ \cos\chi\cos(\omega+v+\psi) &= \cos\delta\cos(\alpha-\Omega) \\ \cos\chi\sin{}^{i}\Psi &= \sin i\cos(\alpha-\Omega) \\ \cos\chi\cos{}^{i}\Psi &= \cos i\cos\delta + \sin i\sin\delta\sin(\alpha-\Omega) \\ \sin\chi &= \cos i\sin\delta - \sin i\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) \end{aligned} \qquad \text{A.}$$

$\cos\chi$ ist stets positiv.

$$\begin{aligned} \cos\chi\, d\psi &= +\cos{}^{1}\!F \cdot \cos\delta\, d\alpha + \sin{}^{1}\!F \cdot d\delta \\ d\chi &= -\sin{}^{1}\!F \cdot \cos\delta\, d\alpha + \cos{}^{1}\!F \cdot d\delta \end{aligned} \qquad \text{B.}$$

$$\begin{array}{llll} \frac{a}{\varrho}\cos\psi = F_c & \frac{a}{\varrho}\cos(v+\psi) = G_c & \frac{r}{\varrho}\cos v = H_c & \frac{2}{3k}\sqrt{a} = K \\ \frac{a}{\varrho}\sin\psi = F_s & \frac{a}{\varrho}\sin(v+\psi) = G_s & \frac{r}{\varrho}\sin v = H_s & \log\frac{2}{3k} = 1.588327 \end{array} \qquad \text{C.}$$

$$\begin{aligned} \cos\chi\, d\psi &= (F_c + \sin\varphi\, G_c)\sec\varphi\, dM_0 \\ &\quad + ([F_c + \sin\varphi\, G_c]\sec\varphi\,(t-t_0) + KrF_s)\, d\mu \\ &\quad + (\sin E \cdot F_c + \cos\varphi\, G_s)\, d\varphi \\ &\quad + \frac{r}{a}F_c\, d\mathbf{s} \\ d\chi &= \cos\chi H_s\, d\mathbf{p} \\ &\quad - \cos\chi H_c\, d\mathbf{q} \\ &\quad - \sin\chi\,(F_s + \sin\varphi\, G_s)\sec\varphi\, dM_0 \\ &\quad - \sin\chi\,([F_s + \sin\varphi\, G_s]\sec\varphi\,(t-t_0) - KrF_c)\, d\mu \\ &\quad - \sin\chi\,(\sin E \cdot F_s - \cos\varphi\, G_c)\, d\varphi \\ &\quad - \sin\chi\frac{r}{a}F_s\, d\mathbf{s}. \end{aligned} \qquad \text{D.}$$

Der Übergang auf die Ekliptikal- oder Äquatorealelemente erfolgt wie oben (Seite 443):

$$\begin{aligned} di &= \cos\omega\, d\mathbf{p} - \sin\omega\, d\mathbf{q} \\ \sin i\, d\Omega &= \sin\omega\, d\mathbf{p} + \cos\omega\, d\mathbf{q} \\ d(\Omega+\omega) &= d\mathbf{s} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\sin i\, d\Omega. \end{aligned} \qquad \text{E.}$$

Die Anwendung der Gleichungen D. als Bedingungsgleichungen der Bahnverbesserung verlangt zwar gegenüber den Formeln der ersten Methode (Nr. 142) die Umrechnung von $\cos\delta\, d\alpha$ und $d\delta$ in $\cos\chi\, d\psi$ und $d\chi$, ist aber im übrigen wesentlich einfacher als diese. Nicht nur, daß die Faktoren sich leichter berechnen lassen, sondern es sind auch weniger, denn in $\cos\chi\, d\psi$ fallen zwei Elemente ganz weg, womit, wenn n Normalörter auszugleichen sind, die Berechnung von $2n$ Faktoren und die Bildung der zugehörigen Quadratsummen sich erübrigt. Wir haben ferner oben gesehen, daß der Faktor $\cos\chi$ von $d\mathbf{p}$ und $d\mathbf{q}$ im Ausdruck von $d\chi$ seinen Maximalwert hat; $\sin\chi$, der Faktor der übrigen vier Elemente, hat also seinen Minimalwert, der höchstens bis $\sin\chi = \frac{r}{\varrho}\sin i$ steigen kann, also von der Ordnung der Bahnneigung gegen die Ekliptik ist; da überdies die meisten dieser Glieder noch mit $\sin\varphi$ oder $\sin\psi$ multipliziert sind, letzteres aber in der Nähe der Opposition, in der die Normalörter meist beobachtet werden, klein wird (in der Opposition, bezogen auf die Bahnebene, wird $\psi = 0$), so sind auch aus diesem Grunde die Faktoren der vier rein elliptischen Elemente in dem Ausdrucke von $d\chi$ klein, können also mit verminderter Stellenzahl berechnet werden. Diese Sachlage kann aber nach einem Vorschlage von *Tietjen* noch in anderer Weise ausgenutzt werden. Offenbar beruht die Bestimmung der Unbekannten dM_0, $d\mu$, $d\varphi$ und $d\mathbf{s}$ wesentlich auf den Gleichungen für $\cos\chi\, d\psi$,

während die Gleichungen für $d\chi$ hierzu wegen der Kleinheit der entsprechenden Faktoren nichts entscheidendes beitragen können; ferner sind umgekehrt die letzteren Gleichungen ausschließlich maßgebend für die Bestimmung von $d\mathfrak{p}$ und $d\mathfrak{q}$, die hier überdies mit ihren Maximalfaktoren multipliziert sind. Daraus folgt, daß sich sehr nahe richtige Resultate ergeben müssen, wenn man zuerst das System der Bedingungsgleichungen $\cos\chi\, d\psi = \cdots$ mit den vier Unbekannten dM_0, $d\mu$, $d\varphi$, $d\mathfrak{s}$ auflöst, die erhaltenen Werte in die Gleichungen $d\chi = \cdots$ einsetzt und diese dann nach den Unbekannten $d\mathfrak{p}$ und $d\mathfrak{q}$ auflöst. Liegen n Normalörter vor, so hat man also statt $2n$ Gleichungen mit 6 Unbekannten, zwei Systeme von je n Gleichungen und mit 4 bzw. 2 Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen.

145. Beispiel einer Bahnbestimmung nach der zweiten Methode. Wir behandeln die Verbesserung der Bahn des periodischen Kometen Brooks aus den drei Erscheinungen 1889/90, 1896/97, 1903/04. An Hilfszahlen werden folgende gebraucht, wenn wir Äquator und Äquinoktium 1900.0 als Fundamentalkoordinatensystem wählen:

		Ersch. 1889.	Ersch. 1896.	Ersch. 1903.
Äquator 1900.0	ω	358° 12.′75	358° 22.′30	358° 14.′92
	Ω	3 51.33	3 50.45	3 50.42
	i	29 16.70	29 16.20	29 16.36
	$\sin i$	9.68937	9.68924	9.68928
	$\cos i$	9.94064	9.94068	9.94067
	a	0.56639	0.56737	0.56756
	$\sin\varphi$	9.67285	9.67157	9.67190
	$\cos\varphi$	9.94559	9.94594	9.94585
$K = \frac{2}{3k}\sqrt{a}$		1.87153	1.87201	1.87211

Wir geben die vollständige Berechnung der Koeffizienten der Bedingungsgleichungen für fünf Normalörter (die bei der definitiven Bearbeitung des Kometen benutzten übrigen Normalörter sind hier weggelassen). Die Zahlen der ersten Abteilung konnten den vorausgegangenen Ephemeridenrechnungen entnommen werden.

$t_0 = 1889$ Sept. 30.5

	1889 Aug. 21.5	1890 Febr. 5.5	1896 Aug. 4.5	1897 Jan. 7.5	1903 Aug. 19.5
$t - t_0$	− 40	+ 128	+ 2500	+ 2656	+ 5070
v	342° 39.′90	51° 27.′85	321° 55.′55	27° 20.′75	− 44° 27.′90
r	0.29 636	0.34 585	0.32 266	0.30 787	0.33 370
$r\sin v$	9.77 052$_n$	0.23 918	0.11 272$_n$	9.97 003	0.17 909$_n$
$r\cos v$	0.27 617	0.14 034	0.21 875	0.25 641	0.18 720
1900.0 α	2° 7.′90	24° 55.′37	339° 16.′18	0° 55.′51	315° 26.′90
1900.0 δ	− 6 3.22	+ 13 54.35	− 18 37.37	− 1 38.77	− 27 6.98
ϱ	0.01 790	0.36 837	0.05 297	0.31 797	0.06 904
$\sin\delta$	9.02 309$_n$	9.38 080	9.50 425$_n$	8.45 832	9.65 877$_n$
$\cos\delta$	9.99 757	9.98 708	9.97 664	9.99 982	9.94 943
$r : a$	9.72 997	9.77 946	9.75 529	9.74 050	9.76 614
$\sin E$	9.25 855$_n$	9.72 721	9.59 941$_n$	9.45 672	9.66 567$_n$

A.	$\alpha - \Omega$	$-1^\circ 43'.43$	$+21^\circ 4'.04$	$335^\circ 25'.73$	$-2^\circ 54'.94$	$311^\circ 36'.48$
	$\sin(\alpha-\Omega)$	8.47 831$_n$	9.55 565	9.61 891$_n$	8.70 643$_n$	9.87 373$_n$
	$\cos(\alpha-\Omega)$	9.99 981	9.96 996	9.95 877	9.99 944	9.82 219
	$\sin i \sin \vartheta$	8.71 246$_n$	9.07 017	9.19 349$_n$	8.14 756	9.34 805$_n$
	$\sin i \cos \vartheta$	9.68 694	9.67 645	9.66 588	9.68 906	9.63 871
	$\cos i \cos \vartheta$	9.93 821	9.92 772	9.91 732	9.94 050	9.89 010
	$\cos i \sin \vartheta$	8.96 373$_n$	9.32 144	9.44 493$_n$	8.39 900	9.59 944$_n$
	$\sin i \sin \vartheta \sin(\alpha-\Omega)$	7.19 077	8.62 582	8.81 240	6.85 399$_n$	9.22 178
	$\cos\chi \sin\Psi$	9.68 918	9.65 933	9.64 801	9.68 868	9.51 147
	$\cos\chi \cos\Psi$	9.93 899	9.94 886	9.95 016	9.94 015	9.97 454
	$\cos\Psi$	9.94 029	9.94 919	9.95 177	9.94 069	9.97 567
	Ψ	$+29^\circ 21'.70$	$+27^\circ 10'.61$	$+26^\circ 30'.36$	$+29^\circ 16'.07$	$+18^\circ 59'.90$
	$\sin\Psi$	9.69 048	9.65 967	9.64 962	9.68 922	9.51 250
	$-\sin i \cos\vartheta \sin(\alpha-\Omega)$	8.16 525	9.23 210$_n$	9.28 479	8.39 549	9.51 244
	$\sin\chi$	8.88 850$_n$	8.59 079	8.93 403$_n$	8.69 828	8.85 839$_n$
	$\cos i \cos\vartheta \sin(\alpha-\Omega)$	8.41 652$_n$	9.48 337	9.53 623$_n$	8.64 693$_n$	9.76 383$_n$
	$\cos\chi \sin(\omega+v+\psi)$	8.89 025$_n$	9.62 519	9.69 886$_n$	8.48 155$_n$	9.90 493$_n$
	$\cos\chi \cos(\omega+v+\psi)$	9.99 738	9.95 704	9.93 541	9.99 926	9.77 162
	$\cos(\omega+v+\psi)$	9.99 868	9.95 736	9.93 703	9.99 980	9.77 276
	$\omega+v+\psi$	$+4^\circ 28'.08$	$+24^\circ 58'.43$	$-30^\circ 6'.90$	$-1^\circ 44'.33$	$-53^\circ 39'.52$
	$\cos\chi$	9.99 870	9.99 967	9.99 839	9.99 946	9.99 887
C.	$v+\psi$	$-2^\circ 40'.83$	$+26^\circ 45'.68$	$-28^\circ 29'.15$	$-0^\circ 6'.58$	$-51^\circ 54'.44$
	ψ	$+14\ 39.27$	$-24\ 42.17$	$+9\ 35.30$	$-27\ 27.33$	$-7\ 26.54$
	$\cos\psi$	9.98 564	9.95 832	9.99 389	9.94 811	9.99 632
	$\sin\psi$	9.40 310	9.62 109$_n$	9.22 159	9.66 376$_n$	9.11 333$_n$
	$\cos(v+\psi)$	9.99 952	9.95 080	9.94 396	0.00 000	9.79 024
	$\sin(v+\psi)$	8.66 994$_n$	9.65 348	9.67 846$_n$	7.282$_n$	9.89 598$_n$
	$a:\varrho$	0.54 849	0.19 802	9.51 440	0.24 940	0.49 852
D.	G_c	0.54 801	0.14 882	0.45 836	0.24 940	0.28 876
	F_c	0.53 413	0.15 634	0.50 829	0.19 751	0.49 484
	$G_c \sin\varphi$	0.22 086	9.82 167	0.12 993	9.92 097	9.96 066
	$F_c + G_c \sin\varphi$	0.70 618	0.32 151	0.66 010	0.38 192	0.60 620
	$\cos\chi\, d\psi : dM_0$	0.76 059	0.37 592	0.71 416	0.43 598	0.66 035
	G_s	9.21 843$_n$	9.85 150	0.19 286$_n$	7.531$_n$	0.39 450$_n$
	F_s	9.95 159	9.81 911$_n$	9.73 599	9.91 316$_n$	9.61 185$_n$
	$G_s \sin\varphi$	8.89 128$_n$	9.52 435	9.86 443$_n$	7.203$_n$	0.06 640$_n$
	$F_s + G_s \sin\varphi$	9.91 204	9.51 172$_n$	9.27 272$_n$	9.91 401$_n$	0.19 710$_n$
	$\sec\varphi\,(F_s + G_s \sin\varphi)$	9.96 645	9 56 613$_n$	9.32 678$_n$	9.96 807$_n$	0.25 125$_n$
	$d\chi : dM_0$	8.85 495	8.15 692	8.26 081$_n$	8.66 635	9.10 964$_n$
	$K \cdot r$	2.16 789	2.21 738	2.19 467	2.17 988	2.20 581
	$(F_c + G_c \sin\varphi)\sec\varphi\,(t-t_0)$	2.36 265$_n$	2.48 313	4.11 210	3.86 021	4.36 536
	$K \cdot r F_s$	2.11 948	2.03 649$_n$	1.93 066	2.09 304$_n$	1.81 766$_n$
	$\cos\chi\, d\psi : d\mu$	1.99 485$_n$	2.29 095	4.11 495	3.85 272	4.36 411
	$(F_s + G_s \sin\varphi)\sec\varphi(t-t_0)$	1.56 851$_n$	1.67 334$_n$	2.72 472$_n$	3.39 230$_n$	3.95 626$_n$
	$-K \cdot r F_c$	2.70 202$_n$	2.37 372$_n$	2.70 296$_n$	2.37 739$_n$	2.70 065$_n$
	Summe	2.73 284$_n$	2.45 267$_n$	3.01 521$_n$	3.43 235$_n$	3.97 972$_n$
	$d\chi : d\mu$	1.62 134$_n$	1.04 346	1.94 924$_n$	2.13 063	2.83 811$_n$
	$F_c \sin E$	9.79 268$_n$	9.88 355	0.10 770$_n$	9.65 423	0.16 051$_n$
	$G_s \cos\varphi$	9.16 402$_n$	9.79 709	0.13 880$_n$	7.477$_n$	0.34 035$_n$
	$\cos\chi\, d\psi : d\varphi$	9.88 440$_n$	0.14 350	0.42 456$_n$	9.65 133	0.56 070$_n$
	$F_s \sin E$	9.21 014$_n$	9.54 632$_n$	9.33 540$_n$	9.36 988$_n$	9.27 752
	$-G \cos\varphi$	0.49 360$_n$	0.09 441$_n$	0.40 430$_n$	0.19 534$_n$	0.23 461$_n$
	$(F_s \sin E - G_c \cos\varphi)$	0.51 565$_n$	0.20 266$_n$	0.43 986$_n$	0.25 584$_n$	0.18 381$_n$
	$d\chi : d\varphi$	9.40 415$_n$	8.79 345	9.37 389$_n$	8.95 412	9.04 220$_n$

$\cos\chi\, d\psi : d\mathrm{s}$	0.26 410	9.93 580	0.26 358	9.93 801	0.26 094
$(r:a)F_s$	9.68 156	$9.59\,857_n$	9.49 128	$9.65\,366_n$	$9.37\,799_n$
$d\chi : d\mathrm{s}$	8.57 006	8.18 936	8.42 531	8.35 194	$8.23\,638_n$
H_c	0.25 827	9.77 197	0.16 578	9.93 844	$0.11\,816_n$
$d\chi : d\mathrm{q}$	$0.25\,697_n$	$9.77\,164_n$	$0.16\,417_n$	$9.93\,790_n$	$0.11\,703_n$
H_s	$9.75\,262_n$	9.87 081	$0.05\,975_n$	9.65 206	$0.11\,005_n$
$d\chi : d\mathrm{p}$	$9.75\,132_n$	9.87 048	$0.05\,814_n$	9.65 152	$0.10\,892_n$

Hieraus zieht man folgende Bedingungsgleichungen, deren Koeffizienten in Logarithmen angesetzt sind:

$\cos\chi_1 \Delta\psi_1 = 0.76059$	$\Delta M_0 + 8.99485_n$	$(1000\,\Delta\mu) + 9.88440_n$	$\Delta\varphi + 0.26410$	$\Delta\mathrm{s}$		
$\cos\chi_2 \Delta\psi_2 = 0.37592$	9.29095	0.14350	9.93580			
$\cos\chi_3 \Delta\psi_3 = 0.71416$	1.11495	0.42456_n	0.26358			
$\cos\chi_4 \Delta\psi_4 = 0.43598$	0.85272	9.65133	9.93801			
$\cos\chi_5 \Delta\psi_5 = 0.66035$	1.36411	0.56070_n	0.26094			
$\Delta\chi_1 = 8.85495$	$\Delta M_0 + 8.62134_n$	$(1000\,\Delta\mu) + 9.40415_n$	$\Delta\varphi + 8.57006$	$\Delta\mathrm{s} + 0.25697_n$	$\Delta\mathrm{q} + 9.75132_n$	$\Delta\mathrm{p}$
$\Delta\chi_2 = 8.15692$	8.04346	8.79345	8.18936	9.77164_n	9.87048	
$\Delta\chi_3 = 8.26081_n$	8.94924_n	9.37389_n	8.42531	0.16417_n	0.05814_n	
$\Delta\chi_4 = 8.66635$	9.13063	8.95412	8.35194	9.93790_n	9.65152	
$\Delta\chi_5 = 9.10964_n$	9.83811_n	9.04220_n	8.23638_n	0.11703_n	0.10892_n	

Für die $\cos\chi\Delta\psi$ und $\Delta\chi$ sind ihre nach den Formeln B. berechneten Zahlenwerte einzutragen und dann die Auflösung zu bewerkstelligen. Da wir hierfür schon Beispiele gegeben haben, soll sie hier nicht durchgeführt werden. Es sei nur noch bemerkt, daß es im vorliegenden Fall offenbar ausreicht, die ΔM_0, $\Delta\mu$, $\Delta\varphi$, $\Delta\mathrm{s}$ aus den Gleichungen für $\cos\chi\Delta\psi$ allein zu bestimmen und dann mit Benutzung dieser Werte die $\Delta\mathrm{q}$ und $\Delta\mathrm{p}$ aus den Gleichungen für $\Delta\chi$.

146. Verbesserung von parabelnahen und parabolischen Bahnen. Bei Bahnen dieser Art bedient man sich bekanntlich zur Berechnung der heliozentrischen Örter anderer Elemente, als bei der Ellipse von mäßiger Exzentrizität; man gebraucht nämlich statt M_0, μ, e die Stücke:

T = Durchgangszeit durchs Perihel,
q = Periheldistanz,
a = große Halbachse (bei der Parabel $= \infty$).

Es ist daher nothwendig, in den Bedingungsgleichungen der Bahnverbesserung die Differenziale dieser Elemente einzuführen; statt a könnte man neben q die Exzentrizität e wählen, ersteres ist aber vorzuziehen, weil man dann durch die Ausgleichungsrechnung direkt das Gewicht von a, also auch das der Umlaufszeit bestimmen kann, was häufig von Interesse ist. Da q, e, a durch

$$q = a(1 - e) \quad \text{Ellipse}$$
$$q = a(e - 1) \quad \text{Hyperbel}$$

zusammenhängen, so ist durch q und a auch die Exzentrizität bestimmt.

Wir stellen $r\,dv$ und dr durch dT, dq, da dar und zwar zuerst für die Ellipse. Aus

$$M = \mu(t - T)$$

folgt

$$dM = d\mu(t-T) - \mu dT\,,$$

und aus

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt:

$$d\mu = -\frac{3}{2}\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{da}{a}\,; \tag{a}$$

somit wird

$$dM = -\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}dT - \frac{3}{2}\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-T)\frac{da}{a}\,. \tag{b}$$

Ferner folgt aus:

$$q = a(1-e)$$

$$dq = (1-e)da - ade$$

und daher

$$ade = q\frac{da}{a} - dq\,. \tag{c}$$

Nun haben wir oben (Seite 440) bereits gefunden:

$$rdv = \frac{a^2\cos\varphi}{r}dM + a\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)de$$

$$dr = a\,\mathrm{tg}\varphi\sin v\,dM - \frac{2}{3k}ra^{\frac{3}{2}}d\mu - a\cos v de\,;$$

die Eintragung von (a), (b), (c) führt also auf:

$$rdv = -\frac{\sqrt{p}}{r}kdT - \tfrac{3}{2}k\frac{\sqrt{p}}{r}(t-T)\frac{da}{a} + \sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)q\frac{da}{a} - \sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)dq$$

$$dr = -\frac{ke\sin v}{\sqrt{p}}dT - \frac{3}{2}\frac{ke\sin v}{\sqrt{p}}(t-T)\frac{da}{a} + r\frac{da}{a} - q\cos v\frac{da}{a} + \cos v dq$$

oder:

$$rdv = -\frac{p}{r}\frac{kdT}{\sqrt{p}} + \left(q\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right) - \frac{3k}{2}\frac{t-T}{\sqrt{p}}\frac{p}{r}\right)\frac{da}{a} - \sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)dq$$

$$dr = -e\sin v\frac{kdT}{\sqrt{p}} + \left(r - q\cos v - \frac{3k}{2}\frac{t-T}{\sqrt{p}}e\sin v\right)\frac{da}{a} + \cos v dq\,.$$

Um die entsprechenden Ausdrücke für die Hyperbel abzuleiten, stellen wir zunächst aus Nr. 60 folgende die Bewegung in dieser Kurve beschreibenden Formeln zusammen:

$$e = \sec\psi\,, \qquad p = \mathrm{a}\,\mathrm{tg}\psi^2\,, \qquad q = \frac{p}{e+1} = \mathrm{a}(e-1)$$

$$N = \frac{k}{\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}(t-T) = e\,\mathrm{tg}F - \log\mathrm{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}F)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\psi\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}F$$

$$r = \mathrm{a}(e\sec F - 1) = \frac{p}{1+e\cos v}$$

$$r\sin v = \mathrm{a}\,\mathrm{tg}\psi\,\mathrm{tg}F$$

$$r\cos v = \mathrm{a}(e - \sec F)\,,$$

wo a den absoluten Wert der großen Halbachse bedeutet und der auftretende log ein natürlicher ist. Durch Differenziation erhält man hieraus:

$$de = \operatorname{tg}\psi \sec\psi d\psi$$

$$dN = -\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} dT - \frac{3k(t-T)}{2a^{\frac{3}{2}}} \frac{da}{a}$$

$$dN = \operatorname{tg} F de + \frac{e}{\cos F^2} dF - \frac{dF}{\cos F}$$

oder

$$dN = \operatorname{tg} F de + \frac{1}{\cos F}(e \sec F - 1) dF$$

oder

$$dF = \frac{a \cos F}{r} dN - \sec\psi \sin v \cos F d\psi$$

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{dF}{\sin F} - \frac{d\psi}{\sin\psi}$$

$$dr = \frac{r}{a} da + a \sec F \operatorname{tg}\psi \sec\psi d\psi + a \sec\psi \operatorname{tg} F \sec F dF$$

$$dq = (e-1) da + a de$$

oder:

$$a de = -q \frac{da}{a} + dq .$$

Wird nun alles in dr und dv eingetragen, so kommt nach einfacher Reduktion:

$$r dv = -\frac{p}{r} \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left(q \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} \right) \frac{da}{a} - \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) dq$$

$$dr = -e \sin v \frac{k dT}{\sqrt{p}} + \left(r - q \cos v - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right) \frac{da}{a} + \cos v dq ,$$

d. h. man hat für die Hyperbel genau dieselben Ausdrücke wie für die Ellipse.

Die Differenziale $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{p}$, $d\mathfrak{q}$ behalten wir auch hier bei, so daß wir nun nach den Grundformeln I^a. (Seite 439) die Beziehungen zwischen $\cos\delta d\alpha$, $d\delta$ einerseits und dT, dq, da, $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{p}$, $d\mathfrak{q}$ andererseits und zwar gleichlautend für Ellipse und Hyperbel zusammenstellen können:

$$\begin{aligned}
\varrho \cos\delta d\alpha = & -\sin\mathfrak{b} \left(\cos(\mathfrak{B} + \omega + v) + e \cos(\mathfrak{B} + \omega)\right) \frac{k dT}{\sqrt{p}} \\
& - \sin\mathfrak{b} \left(\frac{r}{p} \sin v \cos(\mathfrak{B} + \omega + v) - \sin(\mathfrak{B} + \omega) \right) dq \\
& + \sin\mathfrak{b} \left(\left[r - q\cos v - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right] \sin(\mathfrak{B} + \omega + v) + \left[q \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} \right] \cos(\mathfrak{B} + \omega + v) \right) \frac{da}{a} \\
& + \sin\mathfrak{b} \cos(\mathfrak{B} + \omega + v) r d\mathfrak{s} \\
& + \cos\mathfrak{b}\, r \sin v d\mathfrak{p} \\
& - \cos\mathfrak{b}\, r \cos v d\mathfrak{q} \\
\varrho d\delta = & -\sin\mathfrak{c} \left(\cos(\mathfrak{C} + \omega + v) + e \cos(\mathfrak{C} + \omega)\right) \frac{k dT}{\sqrt{p}} \\
& - \sin\mathfrak{c} \left(\frac{r}{p} \sin v \cos(\mathfrak{C} + \omega + v) - \sin(\mathfrak{C} + \omega) \right) dq \\
& + \sin\mathfrak{c} \left(\left[r - q\cos v - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right] \sin(\mathfrak{C} + \omega + v) + \left[q \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) - \tfrac{3}{2} k \frac{(t-T)}{\sqrt{p}} \frac{p}{r} \right] \cos(\mathfrak{C} + \omega + v) \right) \frac{da}{a} \\
& + \sin\mathfrak{c} \cos(\mathfrak{C} + \omega + v) r d\mathfrak{s} \\
& + \cos\mathfrak{c}\, r \sin v d\mathfrak{p} \\
& - \cos\mathfrak{c}\, r \cos v d\mathfrak{q} .
\end{aligned}$$

Von den hier auftretenden Koeffizienten verursachen nur die von da Schwierigkeiten, zu deren Überwindung verschiedene Verfahren*) in Vorschlag gebracht wurden. Handelt es sich um eine bestimmte, bereits vorliegende Ellipse oder Hyperbel, die verbessert werden soll, so ist allerdings eine weitere Umformung kaum nötig, denn man sieht leicht, daß der Koeffizient von $\sin \mathbf{b}\,\frac{da}{a}$ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$q\left(\frac{r}{p}\sin v\cos(\mathbf{B}+\omega+v)-\sin(\mathbf{B}+\omega)\right)-\frac{3}{2}\frac{k}{\sqrt{p}}(t-T)\left(\cos(\mathbf{B}+\omega+v)+e\cos(\mathbf{B}+\omega)\right)+r\sin(\mathbf{B}+\omega+v),$$

daß hier also dieselben Faktoren auftreten, wie in den Koeffizienten von dT und dq, die man ohnehin berechnen muß. Führt man einige abkürzende Bezeichnungen ein, so ergibt sich dann folgende

Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für Ellipsen und Hyperbeln.

ω, i, Ω beziehen sich auf dieselbe Grundebene und dasselbe Äquinoktium wie α und δ.

$$\begin{aligned}
\sin\mathbf{b}\sin\mathbf{B} &= -\sin(\alpha-\Omega) & \sin\mathbf{c}\sin\mathbf{C} &= -\sin\delta\cos(\alpha-\Omega)\\
\sin\mathbf{b}\cos\mathbf{B} &= +\cos i\cos(\alpha-\Omega) & \sin\mathbf{c}\cos\mathbf{C} &= +\sin i\cos\delta-\cos i\sin\delta\sin(\alpha-\Omega)\\
\cos\mathbf{b} &= -\sin i\cos(\alpha-\Omega) & \cos\mathbf{c} &= +\cos i\cos\delta+\sin i\sin\delta\sin(\alpha-\Omega)
\end{aligned}$$

$\sin\mathbf{b}$ und $\sin\mathbf{c}$ sind positiv.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\varrho}\sin\mathbf{b}\left(\cos(\mathbf{B}+\omega+v)+e\cos(\mathbf{B}+\omega)\right) &= G^\alpha & \tfrac{1}{\varrho}\sin\mathbf{c}\left(\cos(\mathbf{C}+\omega+v)+e\cos(\mathbf{C}+\omega)\right) &= G^\delta\\
\tfrac{1}{\varrho}\sin\mathbf{b}\left(\tfrac{r}{p}\sin v\cos(\mathbf{B}+\omega+v)-\sin(\mathbf{B}+\omega)\right) &= D^\alpha & \tfrac{1}{\varrho}\sin\mathbf{c}\left(\tfrac{r}{p}\sin v\cos(\mathbf{C}+\omega+v)-\sin(\mathbf{C}+\omega)\right) &= D^\delta\\
\tfrac{r}{\varrho}\sin\mathbf{b}\sin(\mathbf{B}+\omega+v) &= F^\alpha & \tfrac{r}{\varrho}\sin\mathbf{c}\sin(\mathbf{C}+\omega+v) &= F^\delta\\
\tfrac{r}{\varrho}\sin\mathbf{b}\cos(\mathbf{B}+\omega+v) &= K^\alpha & \tfrac{r}{\varrho}\sin\mathbf{c}\cos(\mathbf{C}+\omega+v) &= K^\delta\\
\tfrac{r}{\varrho}\cos\mathbf{b}\sin v &= P^\alpha & \tfrac{r}{\varrho}\cos\mathbf{c}\sin v &= P^\delta\\
\tfrac{r}{\varrho}\cos\mathbf{b}\cos v &= Q^\alpha & \tfrac{r}{\varrho}\cos\mathbf{c}\cos v &= Q^\delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\delta\,d\alpha = &-G^\alpha\frac{k''dT}{\sqrt{p}} & d\delta = &-G^\delta\frac{k''dT}{\sqrt{p}}\\
&-D^\alpha dq & &-D^\delta dq\\
&+\left(qD^\alpha+\tfrac{3}{2}\frac{k}{\sqrt{p}}(t-T)G^\alpha+F^\alpha\right)\frac{da}{a} & &+\left(qD^\delta-\tfrac{3}{2}\frac{k}{\sqrt{p}}(t-T)G^\delta+F^\delta\right)\frac{da}{a}\\
&+K^\alpha d\mathbf{s} & &+K^\delta d\mathbf{s}\\
&+P^\alpha d\mathbf{p} & &+P^\delta d\mathbf{p}\\
&-Q^\alpha d\mathbf{q} & &-Q^\delta d\mathbf{q}
\end{aligned}$$

$$\log k'' = 3.55\,0006$$
$$\log \tfrac{3}{2}k = 8.41\,1673.$$

---

*) *Oppolzer*, Monatsberichte Akad. Berlin 1878. *Weiß*, Sitzungsber. Akad. Wien 1881. *Schönfeld*, Astr. Nachr. Bd. 113, S. 87.

Statt $\frac{da}{a}$ kann man auch $- a d\frac{1}{a}$ schreiben.

Werden wie gewöhnlich $\cos\delta d\alpha$ und $d\delta$ in Bogensekunden angesetzt, so ergeben sich auch dq, da bzw. $d\frac{1}{a}$ in dieser Einheit; um sie in Längenmaß zu erhalten, muß man sie also noch mit $\sin 1''$ multiplizieren; dT erscheint in Tagen, wenn der damit multiplizierte Faktor k in Sekunden angesetzt wird, wie in obiger Übersicht bereits angegeben.

Der hier supponierte Fall tritt in praxi nur selten ein, sondern meist ist die Aufgabe die, aus *einer parabolischen Bahn durch das Verbesserungsverfahren eine parabelnahe Bahn abzuleiten*, was offenbar dadurch geschehen kann, daß man die Verbesserung der Exzentrizität 1 der Parabel zu ermitteln strebt; fällt diese nach der negativen Seite aus, so hat man eine parabelnahe Ellipse und wenn nach der positiven eine parabelnahe Hyperbel. Obige Formeln gelten nun zwar auch für den Grenzfall, die Parabel; aber ob man nun da beibehält, oder de durch

$$\frac{da}{a} = \frac{de}{1-e} + \frac{dq}{q}$$

einführt, immer erhält man den Koeffizienten von da oder de in unbestimmter Form. Diese zu beseitigen ist das Ziel der oben zitierten Arbeiten. Wir werden hier die Schönfeldsche Umformung vorführen, für deren Anwendung in der Tafelsammlung die Tafeln XXVII—XXIX aufgenommen sind. Offenbar kommt alles darauf an, aus dem Koeffizienten von da den Faktor $(1-e)$ herauszuziehen, was uns wegen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2$$

gelingen wird, wenn wir die *halbe* wahre Anomalie einzuführen suchen; auch *der* Umstand, daß in den Koeffizienten von dT und dq die halbe wahre Anomalie auftritt, sobald $e = 1$ darin gesetzt wird, weist darauf hin, auch in da ihre Einführung zu unternehmen.

Setzt man

$$\begin{aligned} r - q\cos v - \tfrac{3}{2}k\frac{(t-T)}{\sqrt{p}}e\sin v &= U \\ q\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right) - \tfrac{3}{2}k\frac{(t-T)}{\sqrt{p}}\frac{p}{r} &= V \end{aligned}$$

so wird der Koeffizient von $\frac{\sin\mathfrak{b}}{\varrho}\frac{da}{a}$:

$$U\sin(\mathfrak{B}+\omega+v) + V\cos(\mathfrak{B}+\omega+v),$$

wofür wir schreiben:

$$\sin(\mathfrak{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)\,[\cos\tfrac{1}{2}v\cdot U - \sin\tfrac{1}{2}v\cdot V] + \cos(\mathfrak{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)\,[\sin\tfrac{1}{2}v\cdot U + \cos\tfrac{1}{2}v\cdot V]$$

und nun zuerst die $[\cdots]$ entwickeln. Es ist dabei zwischen Ellipse und Hyperbel zu unterscheiden.

In der *Ellipse* hat man folgende Relationen, die wir vorweg angeben, um nachher nicht die Entwicklungen unterbrechen zu müssen:

$$p = q(1+e)$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$$

$$\frac{r-q}{r\sin\frac{1}{2}v^2} = \frac{2e}{1+e} = 1 - \frac{1-e}{1+e}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{k(t-T)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}}(1-e)^{\frac{3}{2}} = E - e\sin E$$

$$\frac{k(t-T)}{2q^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+e} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}E^2 + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^3}{1+e}\,\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}$$

$$\frac{q}{r}\sec\tfrac{1}{2}v^2 = \sec\tfrac{1}{2}E^2.$$

Somit wird:

$$\cos\tfrac{1}{2}v\cdot U - \sin\tfrac{1}{2}v\cdot V = (r-q)\cos\tfrac{1}{2}v - \frac{r\sin v}{1+e}\sin\tfrac{1}{2}v + \tfrac{3}{2}k\frac{(t-T)}{\sqrt{p}}(1-e)\sin\tfrac{1}{2}v$$

$$= -r\sin v\sin\tfrac{1}{2}v\cdot\frac{1-e}{1+e} + \tfrac{3}{2}r\sin v\sin\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e} + \tfrac{3}{2}r\sin v\sin\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}v\cdot U - \sin\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\sin\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e}\left(1 + \frac{3\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}\right)$$

und:

$$\sin\tfrac{1}{2}v\cdot U + \cos\tfrac{1}{2}v\cdot V = (r+q)\sin\tfrac{1}{2}v + \frac{r\sin v}{1+e}\cos\tfrac{1}{2}v - \tfrac{3}{2}k\frac{(t-T)}{\sqrt{p}}(1+e)\cos\tfrac{1}{2}v$$

$$= \tfrac{1}{2}r\sin v\cos\tfrac{1}{2}v\left(\sec\tfrac{1}{2}v^2 + \sec\tfrac{1}{2}E^2 + \frac{2}{1+e} - 3 - \frac{3\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}\right)$$

oder wenn $\frac{2}{1+e} = 1 + \frac{1-e}{1+e}$ und $\sec\frac{1}{2}v^2 - 1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2$ beachtet wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}v\cdot U + \cos\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\cos\tfrac{1}{2}v\left(\frac{1-e}{1+e} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 - \frac{3\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}r\sin v\cos\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e}\left(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^4}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^2}\left(1 - \frac{3}{1+e}\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3}\right)\right).$$

Setzt man nun

$$\sec\tfrac{1}{2}E^2\frac{E-\sin E}{4\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^3} = \tfrac{1}{3} - S,$$

so wird:

$$\cos\tfrac{1}{2}v\cdot U - \sin\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\sin\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e}\left(1 + \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}(1-3S)\right)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}v\cdot U + \cos\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\cos\tfrac{1}{2}v\frac{1-e}{1+e}\left(1 + \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^4}{1+e}\,\frac{3S}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^2}\right).$$

Für S ist leicht eine Reihenentwicklung aufzustellen; setzt man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^2 = \tau,$$

so wird nach Seite 212

$$E - \sin E = 2\sqrt{\tau}\left(\tfrac{2}{3}\tau - \tfrac{4}{5}\tau^2 + \tfrac{6}{7}\tau^3 - \cdots\right)$$

und daher:

$$\tfrac{1}{3} - S = (1+\tau)\frac{E-\sin E}{4\tau\sqrt{\tau}} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\tau + \tfrac{3}{7}\tau^2 - \cdots\right)(1+\tau)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\tau}{3\cdot 5} + \frac{\tau^2}{5\cdot 7} - \frac{\tau^3}{7\cdot 9} + \cdots$$

oder:

$$S = \frac{\tau}{3\cdot 5} - \frac{\tau^2}{5\cdot 7} + \frac{\tau^3}{7\cdot 9} - \cdots.$$

Wichtiger aber ist, daß man es sofort mit dem Gaußschen Argument

$$A = \frac{15\,(E - \sin E)}{9\,E + \sin E},$$

dessen man zur Berechnung der wahren Anomalie bedarf (Nr. 64), in Verbindung bringen kann. Da nach Seite 212

$$\tau = \frac{A}{1 - \frac{4}{5}A + C}$$

so wird

$$1 - 3\,S = \frac{1 - \frac{4}{5}A + C}{1 - \frac{3}{5}A} = \frac{1}{\xi}$$

$$3\,S = \frac{\frac{1}{5}A - C}{1 - \frac{3}{5}A}$$

$$\frac{3\,S}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^2} = \frac{1 - \frac{4}{5}A + C}{1 - \frac{3}{5}A}\left(\frac{1}{5} - \frac{C}{A}\right) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{5} - \frac{C}{A}\right) = \eta\,.$$

ξ und η kann man hiernach mit dem Argument A tabulieren, wie in Taf. XXVII geschehen ist. Hat man sich des Argumentes A zur Bildung der wahren Anomalie nicht bedient, so wird man τ aus

$$\tau = \frac{1 - e}{1 + e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2$$

berechnen und kann dann derselben Tafel die Hilfsgrößen ξ und η entnehmen, wenn die Tafel zu jedem Wert von A auch den von τ gibt; dies ist in Taf. XXVII ebenfalls geschehen (τ ist dort mit ϑ bezeichnet).

Setzt man jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}(1 - 3\,S) = m &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\cdot\frac{1}{\xi} \\ \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^4}{1+e}\,\frac{3\,S}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E^2} = n &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^4}{1+e}\,\eta \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\xi \text{ und } \eta \text{ mit Arg. } A \text{ oder } \tau \\ \text{aus Taf. XXVII}\end{array}$$

so wird:

$$\cos\tfrac{1}{2}v\cdot U - \sin\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\sin\tfrac{1}{2}v\,\frac{1-e}{1+e}\,(1+m)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}v\cdot U + \cos\tfrac{1}{2}v\cdot V = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\cos\tfrac{1}{2}v\,\frac{1-e}{1+e}\,(1+n)$$

und die Vereinigung dieser beiden zum Koeffizienten von da kann nun unmittelbar ausgeführt werden. In der folgenden Übersicht haben wir statt $\frac{da}{a}$ eingeführt $d\frac{1}{a}$, weil dies für die Rechnung Vorteile bietet; es ist:

$$\frac{1-e}{1+e}\,\frac{da}{a} = -\frac{q}{1+e}\,d\frac{1}{a}\,.$$

Man könnte auch das Differenzial de durch

$$\frac{1-e}{1+e}\,\frac{da}{a} = \frac{de}{1+e} + \frac{1-e}{1+e}\,\frac{dq}{q}$$

einführen, doch ist dies, wie schon erwähnt, nicht zweckmäßig.

Zusammenstellung der Bahnverbesserungsformeln für parabelnahe Ellipsen.

$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{C}$, wie Seite 455.

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\,\frac{1}{\xi} \\ n &= \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}v^4}{1+e}\,\eta \end{aligned}\right\} \xi \text{ und } \eta \text{ mit Arg. } A \text{ oder } \tau \text{ aus Taf. XXVII}$$

$$l\sin(L-\tfrac{1}{2}v) = -m\sin\tfrac{1}{2}v$$
$$l\cos(L-\tfrac{1}{2}v) = +n\cos\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{1}{\varrho}\sin\mathfrak{b}(\cos(\mathfrak{B}+\omega+v)+e\cos(\mathfrak{B}+\omega)) = G^\alpha \qquad \frac{1}{\varrho}\sin\mathfrak{c}(\cos(\mathfrak{C}+\omega+v)+e\cos(\mathfrak{C}+\omega)) = G^\vartheta$$

$$\frac{1}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\left(\frac{r}{p}\sin v\cos(\mathfrak{B}+\omega+v)-\sin(\mathfrak{B}+\omega)\right) = D^\alpha \qquad \frac{1}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\left(\frac{r}{p}\sin v\cos(\mathfrak{C}+\omega+v)-\sin(\mathfrak{C}+\omega)\right) = D^\vartheta$$

$$\frac{r}{\varrho}\sin\mathfrak{b}(l\cos(\mathfrak{B}+\omega+L)+\cos(\mathfrak{B}+\omega)) = N^\alpha \qquad \frac{r}{\varrho}\sin\mathfrak{c}(l\cos(\mathfrak{C}+\omega+L)+\cos(\mathfrak{C}+\omega)) = N^\vartheta$$

$$\frac{r}{\varrho}\sin\mathfrak{b}\cos(\mathfrak{B}+\omega+v) = K^\alpha \qquad \frac{r}{\varrho}\sin\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{C}+\omega+v) = K^\vartheta$$

$$\frac{r}{\varrho}\cos\mathfrak{b}\sin v = P^\alpha \qquad \frac{r}{\varrho}\cos\mathfrak{c}\sin v = P^\vartheta$$

$$\frac{r}{\varrho}\cos\mathfrak{b}\cos v = Q^\alpha \qquad \frac{r}{\varrho}\cos\mathfrak{c}\cos v = Q^\vartheta$$

$$\cos\delta\, d\alpha = -G^\alpha\frac{k''dT}{\sqrt{p}} - D^\alpha dq - \frac{q}{2(1+e)}\sin v N^\alpha d\frac{1}{a} + K^\alpha d\mathfrak{s} + P^\alpha d\mathfrak{p} - Q^\alpha d\mathfrak{q}$$

$$d\delta = -G^\vartheta\frac{k''dT}{\sqrt{p}} - D^\vartheta dq - \frac{q}{2(1+e)}\sin v N^\vartheta d\frac{1}{a} + K_\vartheta d\mathfrak{s} + P^\vartheta d\mathfrak{p} - Q^\vartheta d\mathfrak{q}$$

$$\log k'' \; 3.550\,006.$$

Die hieraus hervorgehenden dq und $d\frac{1}{a}$ sind mit sin 1″ zu multiplizieren, um sie in Längenmaß zu erhalten; dT erscheint in Tagen.

Den Fall der *Hyperbel* zu behandeln, können wir unterlassen, da die Entwicklungen ganz analog denen der Ellipse sind, und da zu verbessernde Hyperbeln in praxi kaum vorkommen dürften. Die Schlußformeln werden dieselben, nur treten an Stelle von ξ und η andere Funktionen, die in Taf. XXVIII tabuliert sind.

Wir gehen nun in dem Seite 456 auseinandergesetzten Sinne zum Falle der *Parabel* über. Setzt man in den Formeln für die Ellipse (oder Hyperbel) $e = 1$, so wird:

$$\xi = 1,\ \eta = \tfrac{1}{5},\ m = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^2,\ n = \tfrac{1}{5}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^4,\ \sqrt{p} = \sqrt{2}\sqrt{q} = \sqrt{2}\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v,\ \frac{r}{p}\sin v = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}(\cos(\mathfrak{B}+\omega+v)+e\cos(\mathfrak{B}+\omega)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\cos(\mathfrak{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)$$

$$\frac{r}{p}\sin v\cos(\mathbf{B}+\omega+v)-\sin(\mathbf{B}+\omega)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\cos(\mathbf{B}+\omega+v)-\sin(\mathbf{B}+\omega)$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v}\left(\cos(\mathbf{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)\sin v-\sin(\mathbf{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)\right)$$

$$=-\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v}\left(j\sin(\mathbf{B}+\omega+J)\right),$$

wenn gesetzt wird:

$$j\sin(J-\tfrac{1}{2}v)=-\sin v$$
$$j\cos(J-\tfrac{1}{2}v)=1,$$

$$l\sin(L-\tfrac{1}{2}v)=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\sin\tfrac{1}{2}v \qquad l\sin L=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\sin\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v-\tfrac{1}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\sin\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v$$
$$l\cos(L-\tfrac{1}{2}v)=+\tfrac{1}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v \qquad l\cos L=+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\sin\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v^2$$

$$\frac{\sin v}{2}\left(l\cos(\mathbf{B}+\omega+L)+\cos(\mathbf{B}+\omega)\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v}\left[\cos(\mathbf{B}+\omega)\left(\cos\tfrac{1}{2}v^3+\sin\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v\right)\right.$$
$$\left.-\sin(\mathbf{B}+\omega)\left(-\sin\tfrac{1}{2}v^3\cos\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}v^5\right)\right].$$

Setzt man:

$$\cos\tfrac{1}{2}v^3+\sin\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v=h_1\cos H$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}v^3\cos\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}v^5=h_1\sin H$$

oder

$$h_1\sin(H-\tfrac{1}{2}v)=-\tfrac{1}{2}\sin v$$
$$h_1\cos(H-\tfrac{1}{2}v)=\cos\tfrac{1}{2}v^4+\tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}v^4$$

so wird:

$$\frac{\sin v}{2}\left(l\cos(\mathbf{B}+\omega+L)+\cos(\mathbf{B}+\omega)\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v}h_1\cos(\mathbf{B}+\omega+H).$$

Endlich ist

$$-\frac{q}{1+e}\,d\frac{1}{a}=\tfrac{1}{2}de.$$

Wird dies in die Formeln für die Ellipse eingetragen, so erhält man folgende

Zusammenstellung der Formeln für die Bahnverbesserung der Parabel.

$\mathbf{b}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{C}$ wie Seite 455.

$$j\sin(J-\tfrac{1}{2}v)=-\sin v \qquad h_1\sin(H-\tfrac{1}{2}v)=-\tfrac{1}{2}\sin v$$
$$j\cos(J-\tfrac{1}{2}v)=1 \qquad h_1\cos(H-\tfrac{1}{2}v)=\cos\tfrac{1}{2}v^4+\tfrac{1}{5}\sin v^4$$

$$\cos\delta\,d\alpha=-\frac{\sin\mathbf{b}}{\varrho}\cos(\mathbf{B}+\omega+\tfrac{1}{2}v)\frac{\sqrt{2}\,k''}{\sqrt{r}}\,dT$$
$$+\frac{\sin\mathbf{b}}{\varrho}\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v}j\sin(\mathbf{B}+\omega+J)\,dq$$
$$+\frac{\sin\mathbf{b}}{\varrho}\frac{r\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v}h_1\cos(\mathbf{B}+\omega+H)\tfrac{1}{2}de$$
$$+\frac{r}{\varrho}\sin\mathbf{b}\cos(\mathbf{B}+\omega+v)\,d\mathbf{s}$$
$$+\frac{r}{\varrho}\cos\mathbf{b}\sin v\,d\mathbf{p}$$
$$-\frac{r}{\varrho}\cos\mathbf{b}\cos v\,d\mathbf{q}$$

$$
\begin{aligned}
d\delta = &- \frac{\sin \mathsf{c}}{\varrho} \cos(\mathsf{C} + \omega + \tfrac{1}{2} v) \frac{\sqrt{2}\, k''}{\sqrt{r}}\, dT \\
&+ \frac{\sin \mathsf{c}}{\varrho} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v} j \sin(\mathsf{C} + \omega + J)\, dq \\
&+ \frac{\sin \mathsf{c}}{\varrho} \frac{r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} h_1 \cos(\mathsf{C} + \omega + H) \tfrac{1}{2} de \\
&+ \frac{r}{\varrho} \sin \mathsf{c} \cos(\mathsf{C} + \omega + v)\, d\mathsf{s} \\
&+ \frac{r}{\varrho} \cos \mathsf{c} \sin v\, d\mathsf{p} \\
&- \frac{r}{\varrho} \cos \mathsf{c} \cos v\, d\mathsf{q}
\end{aligned}
$$

$$\log \sqrt{2}\, k'' = 3.700\,522.$$

Die Größen j, J, h_1, H können mit dem Argument v tabuliert werden; dies ist in der Schönfeldschen Tafel Nr. XXIX ausgeführt. dT ergibt sich in Tagen; die ermittelten dq und de müssen mit $\sin 1''$ multipliziert werden, um in Längenmaß zu erscheinen. Betreff des Überganges von $d\mathsf{p}$, $d\mathsf{q}$, $d\mathsf{s}$ auf di, $d\Omega$, $d\omega$ sehe man Seite 443.

Erstrebt man nur eine Verbesserung der rein parabolischen Elemente, indem die Beobachtungen auf das Vorhandensein einer von 1 verschiedenen Exzentrizität nicht hinweisen, so bleiben die Glieder mit de weg.

Abschnitt XXVIII.

Die Bahnverbesserung durch die Variation der geozentrischen Distanzen.

147. Formulierung des Problems. Bei den im vorigen Abschnitt besprochenen Methoden der Bahnverbesserung wurden die Verbesserungen der *Elemente* durch die Unterschiede der Beobachtung von dem durch Rechnung mit dem vorgelegten Elementensystem erhaltenen geozentrischen Ort ausgedrückt. Hierzu mußten die Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen aufgestellt werden und es mußte ein linearer Zusammenhang zwischen den Differenzialen angenommen werden, damit die Ausgleichungsrechnung Anwendung finden konnte. Ersteres ist rechnerisch mühsam, letzteres ist oft in praxi nicht der Fall, wenn die Ausgangselemente noch zu mangelhaft sind; das würde zu einer Wiederholung der ohnehin langen Rechnung zwingen. Gewöhnlich verfügt man bei einer solchen Sachlage auch nur über eine kleine Anzahl von Beobachtungen, so daß sich ein strenges Ausgleichungsverfahren nicht lohnt. Da tritt nun eine Methode der Bahnverbesserung in die Lücke, bekannt unter dem Namen der *Variation der geozentrischen Distanzen*, die bei geringerer Arbeit wenn auch nicht definitive so doch brauchbare Resultate liefert. Wir haben sie schon in Nr. 98 kennen gelernt und wollen sie nun unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachten.

Ein Elementensystem geht aus zwei vollständigen heliozentrischen Örtern a_1, d_1, r_1, a_3, d_3, r_3 hervor, die sich ihrerseits aus zwei vollständigen geozentrischen Örtern $\alpha_1 \delta_1 \varrho_1$, $\alpha_3 \delta_3 \varrho_3$ ergeben; von den letzteren sechs Koordinaten sind α_1, δ_1, α_3, δ_3 durch die Beobachtung gegeben, ϱ_1 und ϱ_3 müssen durch die Bahnbestimmung geliefert werden. Ein bereits bekanntes zur Verbesserung vorgelegtes Elementensystem liefert bestimmte Werte von ϱ_1 und ϱ_3 und zeigt verglichen mit den einzelnen vorhandenen Beobachtungen $\alpha_1 \delta_1$, $\alpha_3 \delta_3$ und $\alpha_i \delta_i$ Abweichungen $\cos\delta_1 d\alpha_1$, $d\delta_1$, $\cos\delta_3 d\alpha_3$, $d\delta_3$, $\cos\delta_i d\alpha_i$, $d\delta_i$, die abgesehen von den zufälligen Beobachtungsfehlern nur davon herrühren können, daß mit den geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 noch nicht die richtigen getroffen sind. Es stellt sich also die allgemeine Aufgabe, jene Korrektionen $d\varrho_1$ und $d\varrho_3$ von ϱ_1 und ϱ_3 zu ermitteln, durch welche die genannten Abweichungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate auf ihr Minimum reduziert werden. Hierzu muß man die Differenzialquotienten

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\varrho_1}, \quad \frac{d\delta}{d\varrho_1}, \quad \frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\varrho_3}, \quad \frac{d\delta}{d\varrho_3}$$

aufstellen. Dies kann auf empirischem Wege geschehen, indem man die Distanzen willkürlich variiert und damit Elementensysteme und deren Abweichungen von den Beobachtungen rechnet — ein in praxi wirksames, selten fehlschlagendes Mittel, das wir bereits in Nr. 98 auseinandergesetzt haben. Man kann hierfür aber auch analytische Ausdrücke aufstellen, welche wenn streng entwickelt allerdings weitläufig

sind, aber zu rechnerisch brauchbaren sich gestalten, wenn man Entwickelungen nach den Potenzen der Zwischenzeiten zulassen kann. Handelt es sich um die Darstellung aller Beobachtungen, die *einer* Opposition angehören, durch eine Bahn, so wird diese Annahme fast immer zutreffen und auf diesen häufigen Fall sollen also die folgenden Entwickelungen berechnet sein.

148. Aufstellung der Grundgleichungen. Wenn das vorgelegte Elementensystem aus $\alpha_1\ \delta_1\ \varrho_1$, $\alpha_3\ \delta_3\ \varrho_3$ selbst berechnet ist, so werden $\cos\delta_1 d\alpha_1$, $d\delta_1$, $\cos\delta_3 d\alpha_3$, $d\delta_3$ gleich Null; hierdurch ergibt sich einige Vereinfachung, die wir aber nicht von Anfang an einführen wollen, wenn sie auch in der Regel vorhanden ist und jedenfalls herbeigeführt werden kann; sie wird sich als Spezialfall leicht aus den allgemeinen Formeln abziehen lassen.

Nach den Grundformeln I. (Seite 437) kann man ansetzen:

$$\begin{aligned} d\varrho_1 &= \cos\mathfrak{A}_1 dr_1 + \cos\mathfrak{B}_1 r_1 dw_1 + \cos\mathfrak{C}_1 r_1 dn_1 \\ \varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 &= \cos\mathfrak{F}_1 dr_1 + \cos\mathfrak{G}_1 r_1 dw_1 + \cos\mathfrak{H}_1 r_1 dn_1 \\ \varrho_1 d\delta_1 &= \cos\mathfrak{L}_1 dr_1 + \cos\mathfrak{M}_1 r_1 dw_1 + \cos\mathfrak{N}_1 r_1 dn_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\varrho_3 &= \cos\mathfrak{A}_3 dr_3 + \cos\mathfrak{B}_3 r_3 dw_3 + \cos\mathfrak{C}_3 r_3 dn_3 \\ \varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3 &= \cos\mathfrak{F}_3 dr_3 + \cos\mathfrak{G}_3 r_3 dw_3 + \cos\mathfrak{H}_3 r_3 dn_3 \\ \varrho_3 d\delta_3 &= \cos\mathfrak{L}_3 dr_3 + \cos\mathfrak{M}_3 r_3 dw_3 + \cos\mathfrak{N}_3 r_3 dn_3 \end{aligned} \qquad 1)$$

und hieraus folgt umgekehrt:

$$\begin{aligned} dr_1 &= \cos\mathfrak{A}_1 d\varrho_1 + \cos\mathfrak{F}_1\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos\mathfrak{L}_1\varrho_1 d\delta_1 \\ r_1 dw_1 &= \cos\mathfrak{B}_1 d\varrho_1 + \cos\mathfrak{G}_1\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos\mathfrak{M}_1\varrho_1 d\delta_1 \\ r_1 dn_1 &= \cos\mathfrak{C}_1 d\varrho_1 + \cos\mathfrak{H}_1\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 + \cos\mathfrak{N}_1\varrho_1 d\delta_1 \\ dr_3 &= \cos\mathfrak{A}_3 d\varrho_3 + \cos\mathfrak{F}_3\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3 + \cos\mathfrak{L}_3\varrho_3 d\delta_3 \\ r_3 dw_3 &= \cos\mathfrak{B}_3 d\varrho_3 + \cos\mathfrak{G}_3\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3 + \cos\mathfrak{M}_3\varrho_3 d\delta_3 \\ r_3 dn_3 &= \cos\mathfrak{C}_3 d\varrho_3 + \cos\mathfrak{H}_3\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3 + \cos\mathfrak{N}_3\varrho_3 d\delta_3; \end{aligned} \qquad 2)$$

man hat ferner für jede weitere Beobachtung i:

$$\begin{aligned} d\varrho_i &= \cos\mathfrak{A}_i dr_i + \cos\mathfrak{B}_i r_i dw_i + \cos\mathfrak{C}_i r_i dn_i \\ \varrho_i\cos\delta_i d\alpha_i &= \cos\mathfrak{F}_i dr_i + \cos\mathfrak{G}_i r_i dw_i + \cos\mathfrak{H}_i r_i dn_i \\ \varrho_i d\delta_i &= \cos\mathfrak{L}_i dr_i + \cos\mathfrak{M}_i r_i dw_i + \cos\mathfrak{N}_i r_i dn_i. \end{aligned} \qquad 3)$$

Die Bedeutung der als bekannt anzusehenden Größen $\cos\mathfrak{A}_1$, ... ergibt sich leicht durch Vergleichung mit den bei Ableitung der Grundformeln gemachten Festsetzungen.

Wenn es gelingt dr_i, $r_i dw_i$, $r_i dn_i$ durch dr_1, $r_1 dw_1$, $r_1 dn_1$ und dr_3, $r_3 dw_3$, $r_3 dn_3$ auszudrücken, so geben die Gl. 3) in Verbindung mit 2) offenbar Beziehungen zwischen $d\varrho_i$, $\varrho_i\cos\delta_i d\alpha_i$, $\varrho_i d\delta_i$ einerseits und $d\varrho_1$, $\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1$, $\varrho_1 d\delta_1$ und $d\varrho_3$, $\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3$, $\varrho_3 d\delta_3$ andererseits, aus denen $d\varrho_1$ und $d\varrho_3$ und überdies $d\varrho_i$ bestimmt werden können, wenn $\cos\delta_i d\alpha_i$, $d\delta_i$ als bekannt angenommen werden; oder anders ausgedrückt, man erhält die Differenzialquotienten

$$\frac{\cos\delta_i d\alpha_i}{d\varrho_1}, \quad \frac{d\delta_i}{d\varrho_1}, \quad \frac{\cos\delta_i d\alpha_i}{d\varrho_3}, \quad \frac{d\delta_i}{d\varrho_3}.$$

Wir wenden uns daher zunächst der erstgenannten Aufgabe zu.

Im Koordinatensystem $R_i\, W_i\, N_i$ (siehe Seite 436) lautet die Bedingung dafür, daß die drei Punkte 1, 3, i in einer Ebene mit der Sonne liegen (nach Seite 255)

$$\begin{aligned}[r_1 r_3]\, R_i &= [r_i r_3]\, R_1 + [r_1 r_i]\, R_3\\ [r_1 r_3]\, W_i &= [r_i r_3]\, W_1 + [r_1 r_i]\, W_3\\ [r_1 r_3]\, N_i &= [r_i r_3]\, N_1 + [r_1 r_i]\, N_3\end{aligned}$$

oder wenn die Verhältnisse der Dreiecksflächen

$$\frac{[r_i r_3]}{[r_1 r_3]} = q_1, \qquad \frac{[r_1 r_i]}{[r_1 r_3]} = q_3$$

genannt werden:

$$R_i = q_1 R_1 + q_3 R_3, \quad W_i = q_1 W_1 + q_3 W_3, \quad N_i = q_1 N_1 + q_3 N_3. \tag{4}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}dR_i &= dr_i, \quad dW_i = r_i dw_i, \quad dN_i = r_i dn_i\\ dR_1 &= \cos(v_i - v_1)\, dr_1 + \sin(v_i - v_1)\, r_1 dw_1\\ dW_1 &= -\sin(v_i - v_1)\, dr_1 + \cos(v_i - v_1)\, r_1 dw_1\\ dN_1 &= r_1 dn_1\end{aligned}$$

usf.

Differenziert man also 4), so kommt:

$$\begin{aligned}dr_i &= q_1 \cos(v_i - v_1)\, dr_1 + q_1 \sin(v_i - v_1) r_1 dw_1 + q_3 \cos(v_i - v_3) dr_3 +\\ &\quad + q_3 \sin(v_i - v_3) r_3 dw_3 + r_1 \cos(v_i - v_1)\, dq_1 + r_3 \cos(v_i - v_3) dq_3\\ r_i dw_i &= -q_1 \sin(v_i - v_1) dr_1 + q_1 \cos(v_i - v_1) r_1 dw_1 - q_3 \sin(v_i - v_3) dr_3 +\\ &\quad + q_3 \cos(v_i - v_3) r_3 dw_3 - r_1 \sin(v_i - v_1) dq_1 - r_3 \sin(v_i - v_3) dq_3\\ r_i dn_i &= q_1 r_1 dn_1 + q_3 r_3 dn_3.\end{aligned} \tag{5}$$

Werden diese Ausdrücke, nachdem in ihnen dr_1, $r_1 dw_1$, ... durch die 2) ersetzt sind, in 3) eingetragen, so lassen die Faktoren von $d\varrho_1$, $\cos\delta_1 d\alpha_1$, $d\delta_1$, ... sofort eine einfache Deutung zu. Es wird z. B. der Faktor von $q_1 d\varrho_1$ in dem Ausdruck von $d\varrho_i$

$$\begin{aligned}&\cos\mathfrak{A}_i \cos\mathfrak{A}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos\mathfrak{B}_i \cos\mathfrak{B}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos\mathfrak{C}_i \cos\mathfrak{C}_1\\ &+ \cos\mathfrak{A}_i \cos\mathfrak{B}_1 \sin(v_i - v_1) - \cos\mathfrak{B}_i \cos\mathfrak{A}_1 \sin(v_i - v_1);\end{aligned}$$

transformiert man die $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ auf das System der $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, was durch eine Drehung um die Achse der Bahnebene um den Winkel $v_i - v_1$ geschieht, so wird

$$\begin{aligned}\cos\mathfrak{A}_1 \cos(v_i - v_1) + \cos\mathfrak{B}_1 \sin(v_i - v_1) &= \cos\mathfrak{A}_1'\\ \cos\mathfrak{B}_1 \cos(v_i - v_1) - \cos\mathfrak{A}_1 \sin(v_i - v_1) &= \cos\mathfrak{B}_1'\\ \cos\mathfrak{C}_1 &= \cos\mathfrak{C}_1'\end{aligned}$$

und daher der obige Ausdruck gleich

$$\cos\mathfrak{A}_i \cos\mathfrak{A}_1' + \cos\mathfrak{B}_i \cos\mathfrak{B}_1' + \cos\mathfrak{C}_i \cos\mathfrak{C}_1' = \cos(A_i A_1),$$

d. h. der Faktor von $q_1 d\varrho_i$ ist gleich dem cos des Winkels zwischen den Punkten A_i und A_1. Man erhält so:

$$
\begin{aligned}
d\varrho_i = {} & \cos(A_iA_1)\,q_1\,d\varrho_1 + \cos(A_iA_3)\,q_3\,d\varrho_3 \\
& + \cos(A_iB_1)\,q_1\varrho_1\cos\delta_1\,d\alpha_1 + \cos(A_iB_3)\,q_3\varrho_3\cos\delta_3\,d\alpha_3 \\
& + \cos(A_iC_1)\,q_1\varrho_1\,d\delta_1 + \cos(A_iC_3)\,q_3\varrho_3\,d\delta_3 \\
& + r_1(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_1))dq_1 + r_3(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_3))dq_3 \\
\varrho_i\cos\delta_i\,d\alpha_i = {} & \cos(B_iA_1)\,q_1\,d\varrho_1 + \cos(B_iA_3)\,q_3\,d\varrho_3 \\
& + \cos(B_iB_1)\,q_1\varrho_1\cos\delta_1\,d\alpha_1 + \cos(B_iB_3)\,q_3\varrho_3\cos\delta_3\,d\alpha_3 \\
& + \cos(B_iC_1)\,q_1\varrho_1\,d\delta_1 + \cos(B_iC_3)\,q_3\varrho_3\,d\delta_3 \\
& + r_1(\cos\mathfrak{F}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{G}_i\sin(v_i-v_1))dq_1 + r_3(\cos\mathfrak{F}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{G}_i\sin(v_i-v_3))dq_3 \\
\varrho_i\,d\delta_i = {} & \cos(C_iA_1)\,q_1\,d\varrho_1 + \cos(C_iA_3)\,q_3\,d\varrho_3 \\
& + \cos(C_iB_1)\,q_1\varrho_1\cos\delta_1\,d\alpha_1 + \cos(C_iB_3)\,q_3\varrho_3\cos\delta_3\,d\alpha_3 \\
& + \cos(C_iC_1)\,q_1\varrho_1\,d\delta_1 + \cos(C_iC_3)\,q_3\varrho_3\,d\delta_3 \\
& + r_1(\cos\mathfrak{L}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{M}_i\sin(v_i-v_1))dq_1 + r_3(\cos\mathfrak{L}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{M}_i\sin v_i-v_3))dq_3.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Die $\cos(A_iA_1)$, ... lassen sich aus Dreiecken, deren Ecken A_i, A_1 und z, ... sind, durch bekannte Größen ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
\cos(A_iA_1) &= \sin\delta_i\sin\delta_1 + \cos\delta_i\cos\delta_1\cos(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(A_iB_1) &= \cos\delta_i\sin(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(A_iC_1) &= \sin\delta_i\cos\delta_1 - \cos\delta_i\sin\delta_1\cos(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(B_iA_1) &= -\cos\delta_1\sin(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(B_iB_1) &= \cos(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(B_iC_1) &= \sin\delta_1\sin(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(C_iA_1) &= \cos\delta_i\sin\delta_1 - \sin\delta_i\cos\delta_1\cos(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(C_iB_1) &= -\sin\delta_i\sin(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(C_iC_1) &= \cos\delta_i\cos\delta_1 + \sin\delta_i\sin\delta_1\cos(\alpha_i-\alpha_1) \\
\cos(A_iA_3) &= \sin\delta_i\sin\delta_3 + \cos\delta_i\cos\delta_3\cos(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(A_iB_3) &= \cos\delta_i\sin(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(A_iC_3) &= \sin\delta_i\cos\delta_3 - \cos\delta_i\sin\delta_3\cos(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(B_iA_3) &= -\cos\delta_3\sin(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(B_iB_3) &= \cos(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(B_iC_3) &= \sin\delta_3\sin(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(C_iA_3) &= \cos\delta_i\sin\delta_3 - \sin\delta_i\cos\delta_3\cos(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(C_iB_3) &= -\sin\delta_i\sin(\alpha_i-\alpha_3) \\
\cos(C_iC_3) &= \cos\delta_i\cos\delta_3 + \sin\delta_i\sin\delta_3\cos(\alpha_i-\alpha_3).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Die Faktoren von dq_1 und dq_3 findet man, da nach Seite 439

$$
\begin{aligned}
\cos\mathfrak{A}_i &= \sin\mathsf{a}_i\sin(\mathbf{A}_i+\omega+v_i) \\
\cos\mathfrak{B}_i &= \sin\mathsf{a}_i\cos(\mathbf{A}_i+\omega+v_i) \\
\cos\mathfrak{F}_i &= \sin\mathsf{b}_i\sin(\mathbf{B}_i+\omega+v_i) \\
\cos\mathfrak{G}_i &= \sin\mathsf{b}_i\cos(\mathbf{B}_i+\omega+v_i) \\
\cos\mathfrak{L}_i &= \sin\mathsf{c}_i\sin(\mathbf{C}_i+\omega+v_i) \\
\cos\mathfrak{M}_i &= \sin\mathsf{c}_i\cos(\mathbf{C}_i+\omega+v_i)
\end{aligned}
$$

unter Benutzung der Seite 441 aufgestellten Ausdrücke für $\sin\mathsf{a}_i\sin\mathbf{A}_i$, ... folgendermaßen:

$$r_1(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_1))=r_1\sin a_i\sin(\mathbf{A}_i+\omega+v_1)$$
$$=r_1\cos\delta_i\cos(\alpha_i-\Omega)\cos(\omega+v_1)+r_1(\sin\delta_i\sin i+\cos\delta_i\cos i\sin(\alpha_i-\Omega))\sin(\omega+v_1).$$

Führt man hier die heliozentrischen Koordinaten a_1 und d_1 durch

$$\cos(\omega+v_1)=\cos d_1\cos(a_1-\Omega)$$
$$\sin(\omega+v_1)=\frac{\sin d_1}{\sin i}=\frac{\cos d_1\sin(a_1-\Omega)}{\cos i}$$

ein, so kommt:

$$r_1(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_1))=r_1(\cos d_1\cos\delta_i\cos(\alpha_i-a_1)+\sin d_1\sin\delta_i)$$

und ähnlich die übrigen. Alles zusammengestellt gibt:

$$\begin{aligned}
r_1(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_1))&=\ \ r_1(\cos d_1\cos\delta_i\cos(\alpha_i-a_1)+\sin d_1\sin\delta_i)&&=f_1^{\varrho}\\
r_1(\cos\mathfrak{F}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{G}_i\sin(v_i-v_1))&=-r_1\cos d_1\sin(\alpha_i-a_1)&&=f_1^{\alpha}\\
r_1(\cos\mathfrak{L}_i\cos(v_i-v_1)-\cos\mathfrak{M}_i\sin(v_i-v_1))&=-r_1(\cos d_1\sin\delta_i\cos(\alpha_i-a_1)-\sin d_1\cos\delta_i)&&=f_1^{\delta}\\
r_3(\cos\mathfrak{A}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{B}_i\sin(v_i-v_3))&=\ \ r_3(\cos d_3\cos\delta_i\cos(\alpha_i-a_3)+\sin d_3\sin\delta_i)&&=f_3^{\varrho}\\
r_3(\cos\mathfrak{F}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{G}_i\sin(v_i-v_3))&=-r_3\cos d_3\sin(\alpha_i-a_3)&&=f_3^{\alpha}\\
r_3(\cos\mathfrak{L}_i\cos(v_i-v_3)-\cos\mathfrak{M}_i\sin(v_i-v_3))&=-r_3(\cos d_3\sin\delta_i\cos(\alpha_i-a_3)-\sin d_3\cos\delta_i)&&=f_3^{\delta}.
\end{aligned}\qquad 8)$$

149. Die Differenziale der Verhältnisse der Dreiecksflächen. Gelingt es jetzt noch für q_1, q_3, dq_1, dq_3 geeignete Ausdrücke aufzustellen, so lösen die Gleichungen 6) in Verbindung mit 7) und 8) das Problem. Dabei darf man nicht die geometrischen Werte einführen, da sonst die Gl. 5) Identitäten werden, sondern man muß dynamische aus den Gesetzen der Planetenbewegung folgende Ausdrücke heranziehen. Für q_1 und q_3 selbst wird man entweder nehmen

$$q_1=\frac{[r_ir_3]}{[r_1r_3]}=\frac{y_{13}}{y_{i3}}\cdot\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}},\qquad q_3=\frac{[r_1r_i]}{[r_1r_3]}=\frac{y_{13}}{y_{1i}}\cdot\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}},\qquad 9)$$

wo die y die Verhältnisse: Sektor durch Dreieck, die τ die mit k multiplizierten Zwischenzeiten sind und zwar mit ihren Zeichen, so daß z. B. $\tau_{i3}=(t_3-t_i)k=-\tau_{3i}=-(t_i-t_3)k$ bedeutet, und die y je nach der Größe der Zwischenzeiten durch das Gaußsche, Enckesche oder Hansenschen Verfahren ermitteln (Nr. 49, 57); oder man benutzt die Reihenentwickelungen (Nr. 52):

$$\begin{aligned}
q_1&=\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\left(1+\frac{1}{6}\frac{\tau_{13}^2-\tau_{i3}^2}{r_i^3}+\frac{1}{4}\frac{\tau_{1i}(\tau_{1i}^2+\tau_{i3}\tau_{1i}-\tau_{i3}^2)}{r_i^4}\frac{\sin\varphi\sin v_i}{\sqrt{p}}+\cdots\right)\\
q_3&=\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\left(1+\frac{1}{6}\frac{\tau_{13}^2-\tau_{1i}^2}{r_i^3}-\frac{1}{4}\frac{\tau_{i3}(\tau_{i3}^2+\tau_{i3}\tau_{1i}-\tau_{1i}^2)}{r_i^4}\frac{\sin\varphi\sin v_i}{\sqrt{p}}+\cdots\right)
\end{aligned}\qquad 10)$$

oder endlich man bedient sich der Gibbsschen Formeln (Nr. 53)

$$q_1=\frac{A_1\left(1+\frac{B_1}{r_1^3}\right)}{1-\frac{B_i}{r_i^3}},\qquad q_3=\frac{A_3\left(1+\frac{B_3}{r_3^3}\right)}{1-\frac{B_i}{r_i^3}}\qquad 11)$$

$$A_1=\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}+\tau_{i3}}=\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}},\qquad A_3=\frac{\tau_{1i}}{\tau_{1i}+\tau_{i3}}=\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}$$

$$B_1=\tfrac{1}{12}(-\tau_{i3}^2+\tau_{1i}\tau_{i3}+\tau_{1i}^2),\quad B_i=\tfrac{1}{12}(\tau_{i3}^2+3\tau_{1i}\tau_{i3}+\tau_{1i}^2),\quad B_3=\tfrac{1}{12}(\tau_{i3}^2+\tau_{1i}\tau_{i3}-\tau_{1i}^2)$$

beziehungsweise für die Rechnung bequemer:

$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_{1i}\tau_{i3} + \tau_{13}(\tau_{1i} - \tau_{i3}))$, $B_i = \frac{1}{12}(\tau_{1i}\tau_{i3} + \tau_{13}^2)$, $B_3 = \frac{1}{12}(\tau_{1i}\tau_{i3} - \tau_{13}(\tau_{1i} - \tau_{i3}))$.

Die Differenziale dq_1 und dq_3 sind im Verhältnis zu den Änderungen der Elemente oder der Koordinaten klein, Unsicherheiten in ihrer Bestimmung fallen also nicht stark ins Gewicht.

Sind die Zwischenzeiten klein, so geht man am einfachsten von den Gl. 9) aus, indem man für die y die Enckesche Reihenentwicklung (Nr. 49) benutzt (Tietjen, Berl. Jahrb. 1878). Man erhält streng durch logarithmische Differenziation:

$$\frac{dq_1}{q_1} = d\log y_{13} - d\log y_{i3}$$
$$\frac{dq_3}{q_3} = d\log y_{13} - d\log y_{1i}.$$

Da nun nach Nr. 49

$$\log y_{13} = \frac{4}{3}\frac{\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^3} + \cdots$$

und die kleinen höheren Glieder als konstant betrachtet werden können, so folgt:

$$d\log y_{13} = -4\frac{\tau_{13}^2}{(r_1 - r_3)^4}(dr_1 + dr_3)$$

und ähnlich für die übrigen. Damit kommt:

$$\frac{dq_1}{q_1} = -4\frac{\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4}(dr_1 + dr_3) + 4\frac{\tau_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4}(dr_i + dr_3)$$
$$\frac{dq_3}{q_3} = -4\frac{\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4}(dr_1 + dr_3) + 4\frac{\tau_{1i}^2}{(r_1 + r_i)^4}(dr_1 + dr_i),$$

woraus nun noch dr_i zu beseitigen ist. Nach Gl. 2) in Nr. 54 hat man mit Vernachlässigung von Gliedern 3. Ordnung:

$$\tau_{i3}r_1 + \tau_{1i}r_3 = \tau_{13}r_i,$$

also:

$$dr_i = \frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}dr_1 + \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}dr_3.$$

Dies oben eingetragen führt auf:

$$\frac{dq_1}{q_1} = \left(-\frac{4\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4\frac{\tau_{i3}^3}{\tau_{13}}}{(r_i + r_3)^4}\right)dr_1 + \left(-\frac{4\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4\tau_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4}\left(1 + \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\right)\right)dr_3$$

$$\frac{dq_3}{q_3} = \left(-\frac{4\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4\tau_{1i}^2}{(r_1 + r_i)^4}\left(1 + \frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\right)\right)dr_1 + \left(-\frac{4\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} + \frac{4\frac{\tau_{1i}^3}{\tau_{13}}}{(r_1 + r_i)^4}\right)dr_3$$

oder

$$\left.\begin{aligned} dq_1 &= a_{11}dr_1 + a_{13}dr_3 \\ dq_3 &= a_{31}dr_1 + a_{33}dr_3 \end{aligned}\right\}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\tau_{13}^2}{(r_1 + r_3)^4} &= \sigma_i, & a_{11} &= \left(-\sigma_i + \frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\sigma_1\right)q_1 \\ \frac{4\tau_{i3}^2}{(r_i + r_3)^4} &= \sigma_1, & a_{13} &= \left(-\sigma_i + \left(1 + \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\right)\sigma_1\right)q_1 \\ \frac{4\tau_{1i}^2}{(r_1 + r_i)^4} &= \sigma_3, & a_{31} &= \left(-\sigma_i + \left(1 + \frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\right)\sigma_3\right)q_3 \\ & & a_{33} &= \left(-\sigma_i + \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\sigma_3\right)q_3. \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Diese Formeln sind hinreichend für Zwischenzeiten, wie sie etwa bei *einer* Erscheinung eines kleinen Planeten vorkommen; für länger beobachtete Kometen und Planeten muß man genauere zu erlangen suchen. Aus den Gibbsschen Formeln 11) folgt:

$$q_1 q_3 = A_1 A_3 \frac{\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)\left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)}{\left(1 - \frac{B_i}{r_i^3}\right)^2}$$

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{A_1}{A_3} \frac{1 + \frac{B_1}{r_1^3}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}}.$$

Wird dies logarithmisch differenziert, so ergibt sich:

$$\frac{dq_1}{q_1} + \frac{dq_3}{q_3} = -3 \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} r_1 dr_1 - 3 \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} r_3 dr_3 - 6 \frac{\frac{B_i}{r_i^5}}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_i dr_i$$

$$\frac{dq_1}{q_1} - \frac{dq_3}{q_3} = -3 \frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} r_1 dr_1 + 3 \frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} r_3 dr_3.$$

Um $r_i dr_i$ zu bilden, haben wir zwischen parabolischen und elliptischen Bahnen zu unterscheiden. Im Fall der Parabel ergibt die Differenziation der Gl. 2) in Nr. 59:

$$A_1 r_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) dr_1 + A_3 r_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) dr_3 - r_i \left(1 - \frac{B_i}{r_i^3}\right) dr_i = 0$$

oder:

$$r_i dr_i = q_1 r_1 dr_1 + q_3 r_3 dr_3,$$

eine Relation, die bis auf Größen vierter Ordnung inklusive genau ist. Wird dies in die erste obiger Gleichungen eingetragen, so wird sie:

$$\frac{dq_1}{q_1} + \frac{dq_3}{q_3} = -3\left(\frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} + \frac{2\frac{B_i}{r_i^5}}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} q_1\right) r_1 dr_1 - 3\left(\frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} + \frac{2\frac{B_i}{r_i^5}}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} q_3\right) r_3 dr_3$$

und in Verbindung mit der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{dq_1}{q_1} = -3\left(\frac{\frac{B_1}{r_1^5}}{1 + \frac{B_1}{r_1^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_1}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}}\right) r_1 dr_1 - 3 \cdot \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_3}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_3 dr_3$$

$$\frac{dq_3}{q_3} = -3 \cdot \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_1}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}} r_1 dr_1 - 3\left(\frac{\frac{B_3}{r_3^5}}{1 + \frac{B_3}{r_3^3}} + \frac{\frac{B_i}{r_i^5} q_3}{1 - \frac{B_i}{r_i^3}}\right) r_3 dr_3.$$

Setzt man die leicht zu berechnenden Ausdrücke

$$\frac{3}{r_1^2}\frac{\frac{B_1}{r_1^3}}{1+\frac{B_1}{r_1^3}}=a_1\,,\qquad \frac{3}{r_3^2}\frac{\frac{B_3}{r_3^3}}{1+\frac{B_3}{r_3^3}}=a_3\,,\qquad \frac{3}{r_i^2}\frac{\frac{B_i}{r_i^3}}{1-\frac{B_i}{r_i^3}}=a_i$$

so ist einfach:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_1}{q_1}&=-(a_1+a_iq_1)r_1dr_1-a_iq_3r_3dr_3\\ \frac{dq_3}{q_3}&=-a_iq_1r_1dr_1-(a_3+a_iq_3)r_3dr_3\,.\end{aligned}\right\}\ 13)\ \text{[Parabel]}$$

Setzt man noch

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=-(a_1+a_iq_1)r_1q_1\\ a_{13}&=-a_iq_1q_3r_3\\ a_{31}&=-a_iq_1q_3r_1\\ a_{33}&=-(a_3+a_iq_3)r_3q_3\,,\end{aligned}\right.$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}dq_1&=a_{11}dr_1+a_{13}dr_3\\ dq_3&=a_{31}dr_1+a_{33}dr_3\,.\end{aligned}\right.$$

Im Falle der Ellipse führt der bisher eingeschlagene Weg nicht zum Ziel; man kann aber in folgender Weise vorgehen. Ganz ähnlich, wie die Gl. 26) (Seite 183) leitet man folgende beide ab:

$$\left(\tau_{13}^2+\tau_{13}\tau_{1i}+\tau_{1i}^2-\frac{\tau_{13}^2\tau_{1i}^2}{6r_1^3}\right)q_1-\left(\tau_{i3}^2+3\tau_{i3}\tau_{1i}+\tau_{1i}^2+\frac{\tau_{13}^2\tau_{i3}^2}{6r_1^3}\right)q_3=\tau_{i3}^2+\tau_{1i}\tau_{i3}-\tau_{1i}^2-\frac{\tau_{i3}^2\tau_{1i}^2}{6r_1^3}$$

$$-\left(\tau_{i3}^2+3\tau_{i3}\tau_{1i}+\tau_{1i}^2+\frac{\tau_{13}^2\tau_{1i}^2}{6r_3^3}\right)q_1+\left(\tau_{i3}^2+\tau_{i3}\tau_{13}+\tau_{13}^2-\frac{\tau_{13}^2\tau_{i3}^2}{6r_3^3}\right)q_3=\tau_{1i}^2+\tau_{1i}\tau_{i3}-\tau_{i3}^2-\frac{\tau_{i3}^2\tau_{1i}^2}{6r_3^3}.$$

Die halbe Summe bezw. Differenz derselben ergibt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_3^3}=\sigma\,,\qquad \frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_3^3}=\delta$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\tau_{1i}}{\tau_{i3}}\left(1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma\right)q_1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}}\left(1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma\right)q_3&=1-\frac{\tau_{1i}\tau_{i3}}{12}\sigma\\ \left(1+\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}-\frac{\tau_{1i}^2}{12}\delta\right)q_1-\left(1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}+\frac{\tau_{i3}^2}{12}\delta\right)q_3&=\frac{\tau_{i3}-\tau_{1i}}{\tau_{13}}-\frac{\tau_{i3}^2\tau_{1i}^2}{12\tau_{13}^2}\delta.\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

Durch Differenziation folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\tau_{1i}}{\tau_{i3}}\left(1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma\right)dq_1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}}\left(1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma\right)dq_3&=\frac{1}{12}\tau_{13}^2\left(\frac{\tau_{1i}}{\tau_{i3}}q_1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}}q_3-\frac{\tau_{1i}\tau_{i3}}{\tau_{13}^2}\right)d\sigma\\ \left(1+\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}-\frac{\tau_{1i}^2}{12}\delta\right)dq_1-\left(1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}+\frac{\tau_{i3}^2}{12}\delta\right)dq_3&=\frac{1}{12}\tau_{1i}\tau_{i3}\left(\frac{\tau_{1i}}{\tau_{i3}}q_1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}}q_3-\frac{\tau_{i3}\tau_{1i}}{\tau_{13}^2}\right)d\delta.\end{aligned}\right.$$

Der rechts auftretende gemeinsame Faktor wird aber nach (a)

$$\frac{\tau_{1i}}{\tau_{i3}}q_1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{1i}}q_3-\frac{\tau_{1i}\tau_{i3}}{\tau_{13}^2}=\frac{\tau_{1i}^2+\tau_{1i}\tau_{i3}+\tau_{i3}^2}{\tau_{13}^2\left(1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma\right)}=\frac{1-\frac{\tau_{1i}\tau_{i3}}{\tau_{13}^2}}{1-\frac{\tau_{13}^2}{12}\sigma}$$

und die Determinante der beiden Gleichungen ist:

$$-\left(1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{12}\sigma\right)\frac{\tau_{1i}^{\,2}+\tau_{1i}\tau_{i3}+\tau_{i3}^{\,2}}{\tau_{1i}\tau_{i3}}=\left(1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{12}\sigma\right)\left(1-\frac{\tau_{1i}^{\,2}}{\tau_{1i}\tau_{i3}}\right),$$

so daß die Elimination von dq_1 und dq_3 leicht ergibt:

$$-\frac{\left(1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{12}\sigma\right)^2}{\tau_{1i}\tau_{i3}}dq_1=\left[1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}+\left(\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\right)^2-\frac{\tau_{i3}^{\,2}}{6r_3^{\,3}}\right]\frac{dr_1}{4r_1^{\,4}}+\left[1+\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}-\left(\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}\right)^2+\frac{\tau_{i3}^{\,2}}{6r_1^{\,3}}\right]\frac{dr_3}{4r_3^{\,4}}$$

$$-\frac{\left(1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{12}\sigma\right)^2}{\tau_{1i}\tau_{i3}}dq_3=\left[1+\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}-\left(\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\right)^2+\frac{\tau_{1i}^{\,2}}{6r_3^{\,3}}\right]\frac{dr_1}{4r_1^{\,4}}+\left[1+\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}+\left(\frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}\right)^2-\frac{\tau_{1i}^{\,2}}{6r_1^{\,3}}\right]\frac{dr_3}{4r_3^{\,4}}.$$

Setzt man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r_1^{\,3}}+\frac{1}{r_3^{\,3}}=\sigma\\
&\frac{\tau_{1i}\tau_{i3}}{\left(1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{12}\sigma\right)^2}=\mu,\qquad \frac{\mu}{4r_1^{\,4}}=\mu_1,\qquad \frac{\mu}{4r_3^{\,4}}=\mu_3\\
&\frac{\tau_{i3}}{\tau_{13}}=A_1,\qquad \frac{\tau_{1i}}{\tau_{13}}=A_3\\
&1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{6r_1^{\,3}}=\nu_1,\qquad 1-\frac{\tau_{13}^{\,2}}{6r_3^{\,3}}=\nu_3
\end{aligned}\right\}\ 14)\ \text{[Ellipse]}$$

so hat man kurz:

$$\left.\begin{aligned}
dq_1&=-\mu_1(1+A_1+A_1^{\,2}\nu_3)\,dr_1-\mu_3(1+A_1-A_1^{\,2}\nu_1)\,dr_3\\
dq_3&=-\mu_1(1+A_3-A_3^{\,2}\nu_3)\,dr_1-\mu_3(1+A_3+A_3^{\,2}\nu_1)\,dr_3
\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned}
dq_1&=a_{11}dr_1+a_{13}dr_3\\
dq_3&=a_{31}dr_1+a_{33}dr_3.
\end{aligned}$$

150. Zusammenstellung der Formeln. Nachdem man für kleine Zwischenzeiten aus 12), für größere aus 13) bez. 14) die Koeffizienten a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33} bestimmt hat, folgt weiter nach 2)

$$\begin{aligned}
dq_1&=a_{11}(\cos\mathfrak{A}_1 d\varrho_1+\cos\mathfrak{F}_1\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1+\cos\mathfrak{L}_1\varrho_1 d\delta_1)+a_{13}(\cos\mathfrak{A}_3 d\varrho_3+\cos\mathfrak{F}_3\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3+\cos\mathfrak{L}_3\varrho_3 d\delta_3)\\
dq_3&=a_{31}(\cos\mathfrak{A}_1 d\varrho_1+\cos\mathfrak{F}_1\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1+\cos\mathfrak{L}_1\varrho_1 d\delta_1)+a_{33}(\cos\mathfrak{A}_3 d\varrho_3+\cos\mathfrak{F}_3\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3+\cos\mathfrak{L}_3\varrho_3 d\delta_3)
\end{aligned}$$

und wenn dies in 6) eingetragen wird, folgende Endformeln:

$$\begin{aligned}
f_1^{\varrho}a_{11}+f_3^{\varrho}a_{31}&=\mathfrak{m}_1^{\varrho}, & f_1^{\varrho}a_{13}+f_3^{\varrho}a_{33}&=\mathfrak{m}_3^{\varrho}\\
f_1^{\alpha}a_{11}+f_3^{\alpha}a_{31}&=\mathfrak{m}_1^{\alpha}, & f_1^{\alpha}a_{13}+f_3^{\alpha}a_{33}&=\mathfrak{m}_3^{\alpha}\\
f_1^{\vartheta}a_{11}+f_3^{\vartheta}a_{31}&=\mathfrak{m}_1^{\vartheta}, & f_1^{\vartheta}a_{13}+f_3^{\vartheta}a_{33}&=\mathfrak{m}_3^{\vartheta}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
d\varrho_i&=(q_1\cos(A_iA_1)+\mathfrak{m}_1^{\varrho}\cos\mathfrak{A}_1)\,d\varrho_1 &&+(q_3\cos(A_iA_3)+\mathfrak{m}_3^{\varrho}\cos\mathfrak{A}_3)\,d\varrho_3\\
&+(q_1\cos(A_iB_1)+\mathfrak{m}_1^{\varrho}\cos\mathfrak{F}_1)\,\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 &&+(q_3\cos(A_iB_3)+\mathfrak{m}_3^{\varrho}\cos\mathfrak{F}_3)\,\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3\\
&+(q_1\cos(A_iC_1)+\mathfrak{m}_1^{\varrho}\cos\mathfrak{L}_1)\,\varrho_1 d\delta_1 &&+(q_3\cos(A_iC_3)+\mathfrak{m}_3^{\varrho}\cos\mathfrak{L}_3)\,\varrho_3 d\delta_3\\
\varrho_i\cos\delta_i d\alpha_i&=(q_1\cos(B_iA_1)+\mathfrak{m}_1^{\alpha}\cos\mathfrak{A}_1)\,d\varrho_1 &&+(q_3\cos(B_iA_3)+\mathfrak{m}_3^{\alpha}\cos\mathfrak{A}_3)\,d\varrho_3\\
&+(q_1\cos(B_iB_1)+\mathfrak{m}_1^{\alpha}\cos\mathfrak{F}_1)\,\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 &&+(q_3\cos(B_iB_3)+\mathfrak{m}_3^{\alpha}\cos\mathfrak{F}_3)\,\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3\\
&+(q_1\cos(B_iC_1)+\mathfrak{m}_1^{\alpha}\cos\mathfrak{L}_1)\,\varrho_1 d\delta_1 &&+(q_3\cos(B_iC_3)+\mathfrak{m}_3^{\alpha}\cos\mathfrak{L}_3)\,\varrho_3 d\delta_3\\
\varrho_i d\delta_i&=(q_1\cos(C_iA_1)+\mathfrak{m}_1^{\vartheta}\cos\mathfrak{A}_1)\,d\varrho_1 &&+(q_3\cos(C_iA_3)+\mathfrak{m}_3^{\vartheta}\cos\mathfrak{A}_3)\,d\varrho_3\\
&+(q_1\cos(C_iB_1)+\mathfrak{m}_1^{\vartheta}\cos\mathfrak{F}_1)\,\varrho_1\cos\delta_1 d\alpha_1 &&+(q_3\cos(C_iB_3)+\mathfrak{m}_3^{\vartheta}\cos\mathfrak{F}_3)\,\varrho_3\cos\delta_3 d\alpha_3\\
&+(q_1\cos(C_iC_1)+\mathfrak{m}_1^{\vartheta}\cos\mathfrak{L}_1)\,\varrho_1 d\delta_1 &&+(q_3\cos(C_iC_3)+\mathfrak{m}_3^{\vartheta}\cos\mathfrak{L}_3)\,\varrho_3 d\delta_3.
\end{aligned}\right\}\ 15)$$

Es ist noch die Berechnung der $\cos \mathfrak{A}_1, \ldots$ zu zeigen. Aus

$$\cos \mathfrak{A}_1 = \sin \mathbf{a}_1 \sin (\mathbf{A}_1 + \omega + v_1)$$

in Verbindung mit den $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{A}_1$ bestimmenden Formeln Seite 441 und nach Einführung der heliozentrischen Koordinaten a_1, d_1 durch die Formeln Seite 466 folgt:

$$\begin{aligned}\cos \mathfrak{A}_1 &= \cos(\alpha_1 - \Omega)\cos\delta_1 \cos(\omega + v_1) + (\sin\delta_1 \sin i + \cos\delta_1 \cos i \sin(\alpha_1 - \Omega))\sin(\omega + v_1)\\ &= \cos(\alpha_1 - \Omega)\cos\delta_1 \cos d_1 \cos(a_1 - \Omega) + \sin\delta_1 \sin d_1 + \cos\delta_1 \cos d_1 \sin(a_1 - \Omega)\sin(\alpha_1 - \Omega)\\ &= \sin\delta_1 \sin d_1 + \cos\delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_1 - a_1).\end{aligned}$$

Ebenso erhält man die anderen und alles zusammengestellt gibt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos \mathfrak{A}_1 &= \cos\delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_1 - a_1) + \sin\delta_1 \sin d_1\\
\cos \mathfrak{F}_1 &= -\cos d_1 \sin(\alpha_1 - a_1)\\
\cos \mathfrak{L}_1 &= -(\cos d_1 \sin\delta_1 \cos(\alpha_1 - a_1) - \sin d_1 \cos\delta_1)\\
\cos \mathfrak{A}_3 &= \cos d_3 \cos\delta_3 \cos(\alpha_3 - a_3) + \sin d_3 \sin\delta_3\\
\cos \mathfrak{F}_3 &= -\cos d_3 \sin(\alpha_3 - a_3)\\
\cos \mathfrak{L}_3 &= -(\cos d_3 \sin\delta_3 \cos(\alpha_3 - a_3) - \sin d_3 \cos\delta_3).
\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Wie schon oben erwähnt, trägt die Benutzung eines Elementensystems, welches den Beobachtungen 1 und 3 streng genügt, wesentlich zur Vereinfachung der Formeln bei. Da man also in praxi meistens diesen Fall herbeiführen wird, wollen wir für ihn die Formeln besonders zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_i \cos\delta_i d\alpha_i &= (q_1 \cos(B_i A_1) + \mathfrak{m}_1^\alpha \cos \mathfrak{A}_1)\, d\varrho_1 + (q_3 \cos(B_i A_3) + \mathfrak{m}_3^\alpha \cos \mathfrak{A}_3)\, d\varrho_3\\
\varrho_i d\delta_i &= (q_1 \cos(C_i A_1) + \mathfrak{m}_1^\vartheta \cos \mathfrak{A}_1)\, d\varrho_1 + (q_3 \cos(C_i A_3) + \mathfrak{m}_3^\vartheta \cos \mathfrak{A}_3)\, d\varrho_3\\
\cos(B_i A_1) &= -\cos\delta_1 \sin(\alpha_i - \alpha_1)\\
\cos(C_i A_1) &= \cos\delta_i \sin\delta_1 - \sin\delta_i \cos\delta_1 \cos(\alpha_i - \alpha_1)\\
\cos(B_i A_3) &= -\cos\delta_3 \sin(\alpha_i - \alpha_3)\\
\cos(C_i A_3) &= \cos\delta_i \sin\delta_3 - \sin\delta_i \cos\delta_3 \cos(\alpha_i - \alpha_3)\\
f_1^\alpha &= -r_1 \cos d_1 \sin(\alpha_i - a_1)\\
f_1^\vartheta &= r_1 (\cos\delta_i \sin d_1 - \sin\delta_i \cos d_1 \cos(\alpha_i - a_1))\\
f_3^\alpha &= -r_3 \cos d_3 \sin(\alpha_i - a_3)\\
f_3^\vartheta &= r_3 (\cos\delta_i \sin d_3 - \sin\delta_i \cos d_3 \cos(\alpha_i - a_3))\\
dq_1 &= a_{11}\, dr_1 + a_{13}\, dr_3\\
dq_3 &= a_{31}\, dr_1 + a_{33}\, dr_3
\end{aligned}\right\} \; a_{11} \ldots \text{aus } 12) \text{ oder } 13) \text{ bezw. } 14)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1^\alpha &= f_1^\alpha a_{11} + f_3^\alpha a_{31}\\
\mathfrak{m}_1^\vartheta &= f_1^\vartheta a_{11} + f_3^\vartheta a_{31}\\
\mathfrak{m}_3^\alpha &= f_1^\alpha a_{13} + f_3^\alpha a_{33}\\
\mathfrak{m}_3^\vartheta &= f_1^\vartheta a_{13} + f_3^\vartheta a_{33}\\
\cos \mathfrak{A}_1 &= \sin\delta_1 \sin d_1 + \cos\delta_1 \cos d_1 \cos(\alpha_1 - a_1)\\
\cos \mathfrak{A}_3 &= \sin\delta_3 \sin d_3 + \cos\delta_3 \cos d_3 \cos(\alpha_3 - a_3).
\end{aligned}\right\} \quad 17)$$

Gleichungspaare 17) kann man so viele aufstellen, als man neben den Beobachtungen 1 und 3 noch Beobachtungen i mit dem aus 1 und 3 bestimmten Elementensystem verglichen hat. Aus der Gesamtheit aller ermittelt man $d\varrho_1$ und $d\varrho_3$ und dann schließlich mit

$$\alpha_1,\ \delta_1,\ \varrho_1 + d\varrho_1, \qquad \alpha_3,\ \delta_3,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$

die verbesserten Elemente. Es kann sich manchmal empfehlen, die verbesserten Elemente aus den Örtern 1 und i zu berechnen, wozu man $d\varrho_i$ gebraucht. Man hat hierfür:

$$d\varrho_i = (q_1 \cos(A_i A_1) + \mathfrak{m}_1^{\varrho} \cos \mathfrak{A}_1)\, d\varrho_1 + (q_3 \cos(A_i A_3) + \mathfrak{m}_3^{\varrho} \cos \mathfrak{A}_3)\, d\varrho_3$$
$$f_1^{\varrho} = r_1 (\cos d_1 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - a_1) + \sin d_1 \sin \delta_i)$$
$$f_3^{\varrho} = r_3 (\cos d_3 \cos \delta_i \cos(\alpha_i - a_3) + \sin d_3 \sin \delta_i)$$
$$\mathfrak{m}_1^{\varrho} = f_1^{\varrho} a_{11} + f_3^{\varrho} a_{31}$$
$$\mathfrak{m}_3^{\varrho} = f_1^{\varrho} a_{13} + f_3^{\varrho} a_{33},$$

Es sei noch hervorgehoben, daß die obigen Formeln für jedes Koordinatensystem Gültigkeit haben, daß man also unter α, δ, ... sowohl Rektaszensionen, Deklinationen, ... als Längen, Breiten, ... verstehen kann.

151. Beispiel für die Variation der Distanzen. Zur Erläuterung der Formeln 17) wählen wir die Verbesserung folgenden Elementensystems von (434) *Hungaria*

$$t_0 = 1898 \text{ Sept. } 15.5 \text{ m. Z. Berlin}$$
$$M_0 = 49^\circ 51' 23''.8$$
$$\omega = 122\ 59\ 34.7$$
$$\Omega = 174\ 36\ 33.0$$
$$i = 22\ 30\ 33.5$$
$$\varphi = 4\ 14\ 48.9$$
$$\mu = 1308''.445$$
$$\log a = 0.28\,8834$$

welches aus 3 Beobachtungen von 1898 Sept. 15.5, Okt. 10.5 und Nov. 12.5 hervorgegangen ist, diese Örter vollständig darstellt, von einer späteren Beobachtung von 1899 Jan. 6.3 aber folgende Abweichungen

$$\cos \delta_i\, d\alpha_i = +12''.4, \quad d\delta_i = -3''.0 \quad \text{(B.—R.)}$$

aufweist. Mit α und δ sind hier Längen und Breiten bezeichnet; es ist überhaupt das System der Ekliptik zugrunde gelegt, da dann aus der Bahnrechnung eine Anzahl von Größen direkt herübergenommen werden kann. Diese Größen seien zuerst zusammengestellt, alles auf Ekliptik und Äquinoktium 1900.0 bezogen

	α	$\sin\delta$	$\cos\delta$	a	$\sin d$	$\cos d$	ϱ	r
$t_1 =$ 1898 Sept. 15.5	355°56′ 11″.0	7.593062	9.999997	354°24′ 36″.8	7.255408	9.999999	9.931500	0.269154
$t_3 =$ 1898 Nov. 12.5	347 22 49.0	9.342122_n	9.989243	15 17 21.2	9.159796_n	9.995420	0.098122	0.280448
$t_i =$ 1898 Dez. 37.3	4 8 59.7	9.423061_n	9.984201	—	—	—	0.279564	0.291673

Für die Zeit t_i sind hier die mit den Elementen gerechneten Koordinaten angegeben, während die Beobachtung geliefert hatte:

$$\alpha = 4^\circ 9' 12''.6, \quad \delta = -15^\circ 21' 39''.8.$$

Mit

$$\tau_{13} \quad 9.999009$$
$$\tau_{1i} \quad 0.287890$$
$$\tau_{i3} \quad 9.974362_n$$

findet man nach den Gibbsschen Formeln 11)

B_1	8.940904	A_1	9.975353_n	q_1	9.977222_n
B_3	9.593439_n	A_3	0.288881	q_3	0.259636
B_i	8.841837_n				

und dann nach 14)

a_{11}	8.5723	a_{31}	8.4789_n
a_{13}	8.4709_n	a_{33}	9.3815

Ferner:

f_1^α	9.4975_n	f_3^α	9.5619
f_1^δ	9.6888	f_3^δ	9.3518
$\mathfrak{m}_1^\alpha$	8.3565_n	$\mathfrak{m}_3^\alpha$	8.9871
$\mathfrak{m}_1^\delta$	8.0596	$\mathfrak{m}_3^\delta$	8.5985
$\cos\mathfrak{A}_1$	9.9998	$\cos\mathfrak{A}_3$	9.9468
$\cos(B_iA_1)$	9.1549_n	$\cos(B_iA_3)$	9.4494_n
$\cos(C_iA_1)$	9.4564	$\cos(C_iA_3)$	8.5483

und schließlich die Gleichungen

$$[8.7729]\,d\varrho_1 + [9.3497_n]\,d\varrho_3 = [5.7790]$$
$$[9.1353_n]\,d\varrho_1 + [8.7177]\,d\varrho_3 = [5.1627_n],$$

worin die rechten Seiten in Teilen des Radius angesetzt sind. Die Auflösung ergibt:

$$d\varrho_1 = [4.624], \qquad d\varrho_3 = [6.4275_n]$$

oder

$$d\log\varrho_1 = +\,0.000002, \qquad d\log\varrho_3 = -\,0.000093$$

Mit den Distanzen $\log\varrho_1 = 9.931502$, $\log\varrho_3 = 0.098029$ erhält man die Elemente:

t_0	1898 Sept. 15.5	
M	48° 43′ 44″.2	
ω	123 9 32.3	1900.0
Ω	174 39 33.3	1900.0
i	22 30 14.1	1900.0
φ	4 13 52.9	
μ	1308″.470	
$\log a$	0.28 8828	

welche für Dez. 37.3 ergeben:

$$\alpha_i \;\; 4^\circ\,9'\,13''.0, \qquad \delta_i \;\; -15^\circ\,21'\,39''.4 \qquad \log\varrho_i \;\; 0.279440$$

so daß jetzt mit der Beobachtung eine für sechsstellige Rechnung mehr als genügende Übereinstimmung erreicht ist.

Sechster Teil.

Theorie der speziellen Störungen.

Abschnitt XXIX.

Mechanische Integration.

152. Bezeichnung. Vorbereitende Entwicklungen. Die Methoden zur Berechnung der speziellen Störungen, die in den folgenden Abschnitten dargestellt werden, haben zur Voraussetzung ein Integrationsverfahren, das unter dem Namen »mechanische Integration« bekannt ist; es soll daher eine kurze Darlegung desselben vorausgeschickt werden, jedoch mit Beschränkung auf die sogenannte Summenmethode, die hier allein in Betracht kommt; betreff der übrigen sei auf das Buch von *H. Bruns*, »Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens« verwiesen.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, von einer stetigen Funktion $f(t)$ das bestimmte Integral zwischen gegebenen Grenzen numerisch anzugeben, wenn die Funktion »tabuliert« ist, d. h. wenn für eine Anzahl gleichmäßig zwischen den Grenzen verteilter Werte des Arguments der Wert der Funktion berechnet vorliegt. Die Lösung macht ausschließlich von den Größen des Summen- und Differenzenschemas Gebrauch, das aus den tabulierten Funktionswerten gebildet werden kann und das in der Gauß-Enckeschen Bezeichnungsweise folgende Form annimmt:

II. Summ. R.	I. Summ. R.	Funktion.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.	V. Diff.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$^{II}f(a-2w)$	$^{I}f(a-\frac{5}{2}w)$	$f(a-3w)$	$f^{I}(a-\frac{5}{2}w)$				
$^{II}f(a-w)$	$^{I}f(a-\frac{3}{2}w)$	$f(a-2w)$	$f^{I}(a-\frac{3}{2}w)$	$f^{II}(a-2w)$			
$^{II}f(a)$	$^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$	$f(a-w)$	$f^{I}(a-\frac{1}{2}w)$	$f^{II}(a-w)$	$f^{III}(a-\frac{3}{2}w)$	$f^{IV}(a-w)$	
$^{II}f(a+w)$	$^{I}f(a+\frac{1}{2}w)$	$f(a)$	$f^{I}(a+\frac{1}{2}w)$	$f^{II}(a)$	$f^{III}(a-\frac{1}{2}w)$	$f^{IV}(a)$	$f^{V}(a-\frac{1}{2}w)$
$^{II}f(a+2w)$	$^{I}f(a+\frac{3}{2}w)$	$f(a+w)$	$f^{I}(a+\frac{3}{2}w)$	$f^{II}(a+w)$	$f^{III}(a+\frac{1}{2}w)$	$f^{IV}(a+w)$	$f^{V}(a+\frac{1}{2}w)$
$^{II}f(a+3w)$	$^{I}f(a+\frac{5}{2}w)$	$f(a+2w)$	$f^{I}(a+\frac{5}{2}w)$	$f^{II}(a+2w)$	$f^{III}(a+\frac{3}{2}w)$		
$^{II}f(a+4w)$	$^{I}f(a+\frac{7}{2}w)$	$f(a+3w)$					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1)

Hierin ist mit a ein bestimmter Argumentwert, mit w das konstante Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Argumentwerten bezeichnet. Offenbar kann dann jeder

Wert des Arguments, für welchen der numerische Betrag der Funktion vorliegen soll, allgemein durch

$$t = a + nw, \quad n = \cdots -3, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$$

ausgedrückt werden. Die ersten Differenzen entstehen dadurch, daß der vorausgehende Funktionswert vom folgenden abgezogen wird, und werden außer durch den rechts stehenden Index I durch das Argument gekennzeichnet, das dem arithmetischen Mittel der konkurrierenden Argumentwerte entspricht. Die weiteren Differenzreihen entstehen dadurch, daß man jede vorhergehende ebenso behandelt, wie hier die Funktionsreihe. Die Summenreihen entstehen, indem man zu einem willkürlich angenommenen Werte ${}^{\mathrm{I}}f(a - \frac{1}{2}w)$, ${}^{\mathrm{II}}f(a)$, ... den rechts darunter stehenden Funktionswert, bez. den der ersten, ... Summenreihe addiert; die Bezeichnung entspricht außer dem *links* angesetzten Index I, II, ... der auf derselben Zeile stehenden Differenz. Sowohl dem Wert als der Bezeichnung nach ist die Funktionsreihe die erste Differenzreihe der ersten Summenreihe, die erste Summenreihe die erste Differenzreihe der zweiten Summenreihe u. s. f.

Es ist zweckmäßig, auch für die arithmetischen Mittel je zweier aufeinander folgender Größen des Schemas eine abkürzende Bezeichnung einzuführen; wir setzen dem allgemeinen Prinzip der Bezeichnung folgend:

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{I}}(a + iw) &= \tfrac{1}{2}(f^{\mathrm{I}}(a + (i - \tfrac{1}{2})w) + f^{\mathrm{I}}(a + (i + \tfrac{1}{2})w)) \\
f^{\mathrm{II}}(a + (i + \tfrac{1}{2})w) &= \tfrac{1}{2}(f^{\mathrm{II}}(a + iw) + f^{\mathrm{II}}(a + (i + 1)w)) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 2) \\
{}^{\mathrm{I}}f(a + iw) &= \tfrac{1}{2}({}^{\mathrm{I}}f(a + (i - \tfrac{1}{2})w) + {}^{\mathrm{I}}f(a + (i + \tfrac{1}{2})w) \\
{}^{\mathrm{II}}f(a + (i + \tfrac{1}{2})w) &= \tfrac{1}{2}({}^{\mathrm{II}}f(a + iw) + {}^{\mathrm{II}}f(a + (i + 1)w)).
\end{aligned}$$

Diese Bezeichnungsweise vorausgesetzt, lassen wir noch an Stelle der Variabeln t die durch

$$t = a + xw$$

definierte Variabele x treten, die jeden beliebigen Wert annehmen kann, und entwickeln die Funktion nach dem Taylorschen Satz:

$$f(a + xw) = f(a) + xwf_1(a) + \frac{x^2w^2}{1 \cdot 2} f_2(a) + \cdots;$$

hier sind mit $f_1(a)$, $f_2(a)$, ... die ersten, zweiten, ... Differenzialquotienten nach a bezeichnet. Setzt man hierin für x die ganzen Zahlen $\cdots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ so erhält man eine Reihe von Gleichungen, welche links die bekannten, tabulierten Funktionswerte, rechts die mit Zahlenkoeffizienten multiplizierten Größen $wf_1(a)$, $w^2f_2(a)$, ... enthalten. Bildet man von beiden Seiten das Differenzenschema, so erhält man durch Vergleichung der beiden Seiten eine Reihe von linearen Beziehungen zwischen den Größen von 1) einerseits und den Größen $wf_1(a)$, $w^2f_2(a)$, ... andererseits. Werden diese Beziehungen als Gleichungen mit den Unbekannten $wf_1(a)$, ... behandelt und nach diesen aufgelöst, so erscheinen die Unbekannten als lineare Funktionen der Größen des Differenzenschemas 1), in denen sonst nur von der Funktion und von w unabhängige Zahlenkoeffizienten auftreten. Zur Bestimmung dieser letzteren bedient man sich, statt das beschriebene weitläufige Verfahren durch-

zuführen, eines Kunstgriffes, der rascher zum Ziel führt. Da nemlich *jede* Funktion zu denselben Koeffizienten führen muß, kann man sich einer bestimmten bedienen, für welche die analytische Entwicklung bekannt ist; dieselbe muß außerdem noch die Eigenschaft haben, daß weder Differenzen noch Differenzialquotienten jemals abbrechen. Eine solche Funktion ist die Exponentialfunktion, die wir mit exp bezeichnen. Es wird dafür einerseits

$$f(a) = \exp a\,, \quad f_1(a) = \exp a\,, \quad f_2(a) = \exp a\,, \ \ldots$$

und andererseits:

$$f^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}w) = \exp(a + w) - \exp a = \exp(a + \tfrac{1}{2}w)\,(\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w))$$
$$f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}w) = \exp a - \exp(a - w) = \exp(a - \tfrac{1}{2}w)\,(\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w))$$
$$f^{\mathrm{II}}(a) = (\exp\tfrac{1}{2}w - \exp(-\tfrac{1}{2}w))(\exp(a+\tfrac{1}{2}w) - \exp(a-\tfrac{1}{2}w)) = \exp a(\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w))^2$$

usf.

Setzt man zur Abkürzung

$$\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w) = u$$

so wird das Differenzenschema für die Exponentialfunktion:

Funktion	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	
$\exp(a - 2w)$				
$\exp(a - w)$	$u \exp(a - \frac{3}{2}w)$			
$\exp a$	$u \exp(a - \frac{1}{2}w)$	$u^2 \exp(a - w)$		
$\exp(a + w)$	$u \exp(a + \frac{1}{2}w)$	$u^2 \exp a$	$u^3 \exp(a - \frac{1}{2}w)$	
$\exp(a + 2w)$	$u \exp(a + \frac{3}{2}w)$	$u^2 \exp(a + w)$	$u^3 \exp(a + \frac{1}{2}w)$	.... 3)

Stellt man sich jetzt die Aufgabe, die $wf_1(a)$, $w^2 f_2(a)$, ... durch diejenigen Größen des Schemas 1) auszudrücken, welche von einem durch $f(a)$ hindurchgelegten Horizontalstrich getroffen werden (gerade Differenzen) und durch das arithmetische Mittel derjenigen, zwischen welchen der Strich hindurchgeht (ungerade Differenzen), so hat man folgenden Ansatz zu machen:

$$\begin{aligned} wf_1(a) &= \alpha_1 f^{\mathrm{I}}(a) + \beta_1 f^{\mathrm{II}}(a) + \gamma_1 f^{\mathrm{III}}(a) + \cdots \\ w^2 f_2(a) &= \alpha_2 f^{\mathrm{I}}(a) + \beta_2 f^{\mathrm{II}}(a) + \gamma_2 f^{\mathrm{III}}(a) + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad 4)$$

worin die α, β, γ, ... die zu bestimmenden Zahlenkoeffizienten vorstellen.

Die erste Gleichung 4) wird, wenn an Stelle der Funktion f die Funktion exp gesetzt wird:

$$w \exp a = \alpha_1 u \tfrac{1}{2}(\exp(\tfrac{1}{2}w) + \exp(-\tfrac{1}{2}w)) \exp a + \beta_1 u^2 \exp a + \gamma_1 u^3 \tfrac{1}{2}(\exp(\tfrac{1}{2}w) + \exp(-\tfrac{1}{2}w)) \exp a + \cdots$$

Nun ist

$$[\exp(\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{1}{2}(\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w))]^2 = 1 + \tfrac{1}{4}u^2$$
$$[\exp(-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}(\exp(\tfrac{1}{2}w) - \exp(-\tfrac{1}{2}w))]^2 = 1 + \tfrac{1}{4}u^2$$

also

$$\exp(\tfrac{1}{2}w) = +\tfrac{1}{2}u + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2}$$
$$\exp(-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}u + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2}$$

und daher

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}w\right) + \exp\left(-\tfrac{1}{2}w\right) = 2\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2}.$$

Mithin wird obige Entwicklung:

$$w = \alpha_1 u\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2} + \beta_1 u^2 + \gamma_1 u^3\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2} + \delta_1 u^4 + \cdots$$

oder wenn darin:

$$\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}u^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}u^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^6}u^6 - \cdots$$

eingetragen wird:

$$w = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 + \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\alpha_1\right)u^3 + \delta_1 u^4 + \cdots \qquad 5)$$

Durch Differenziation von

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}w\right) = \tfrac{1}{2}u + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}u^2}$$

folgt:

$$\tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{1}{2}w\right)dw = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}u\left(1 + \tfrac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

oder nach kurzer Reduktion:

$$dw = \left(1 + \tfrac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}}du = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{u^4}{2^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{u^6}{2^6} + \cdots\right)du$$

und Integration:

$$w = u - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{u^3}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{u^5}{2^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{6}\frac{u^7}{2^6} + \cdots \qquad 6)$$

Die Vergleichung von 5) und 6) ergibt:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0$$

$$\gamma_1 + \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\delta_1 = 0 \quad \text{usf.}$$

Es wird also:

$$wf_1(a) = f^{\mathrm{I}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots$$

In derselben Weise werden die weiteren Gleichungen 4) behandelt, worauf man folgende Zusammenstellung erhält:

$$\begin{aligned}
w\,f_1(a) &= f^{\mathrm{I}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots\\
w^2 f_2(a) &= f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots\\
w^3 f_3(a) &= f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a) - \cdots\\
w^4 f_4(a) &= f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots\\
w^5 f_5(a) &= f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots\\
w^6 f_6(a) &= f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots
\end{aligned} \qquad 7)$$

153. Formeln für einfache Integrale. Um das Integral

$$\int f(t)\,dt$$

zwischen bestimmten Grenzen zu ermitteln, setzen wir wie oben

$$t = a + xw$$

und dann in

$$\int f(t)\,dt = w\int f(a+xw)\,dx \qquad 8)$$

für $f(a+xw)$ die in voriger Nr. gewonnene Entwicklung; es kommt zuerst:

$$\int f(a+xw)\,dx = C + xf(a) + \frac{x^2}{2}wf_1(a) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}w^2 f_2(a) + \cdots$$

und nach Substitution der Ausdrücke 7)

$$\begin{aligned}\int f(a+xw)\,dx = C + xf(a) &+ \frac{x^2}{2}\left(f^{\mathrm{I}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots\right)\\ &+ \frac{x^3}{6}\left(f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots\right)\\ &+ \frac{x^4}{24}\left(f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots\right)\\ &+ \frac{x^5}{120}\left(f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots\right) \qquad 9)\\ &+ \frac{x^6}{760}\left(f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots\right)\\ &+ \frac{x^7}{5040}\left(f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots\right),\end{aligned}$$

wobei wir uns auf die Differenzen 6. Ordnung beschränkt haben, über die man wohl nie hinausgeht. Die Wahl der Grenzen hat man in praxi meistens in der Hand und wird sie daher so treffen, daß möglichst einfache und konvergente Ausdrücke entstehen. Dies ist in nahezu gleicher Weise der Fall, ob man die Grenzen in den Anfang oder in die Mitte eines Intervalles w verlegt. Man hat zunächst nach einfacher Ausrechnung:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = f(a) + \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots \qquad 10)$$

und

$$\int_{0}^{+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = \tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{8}f^{\mathrm{I}}(a) + \tfrac{1}{48}f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{7}{384}f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{17}{11520}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{163}{46080}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots$$

Da $\quad f^{\mathrm{I}}(a) = \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) + \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}\left(a-\tfrac{1}{2}w\right)$

und $\quad \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{II}}(a) = \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{I}}\left(a-\tfrac{1}{2}w\right),$

so folgt: $\quad f^{\mathrm{I}}(a) = f^{\mathrm{I}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{II}}(a)$

und ebenso: $\quad f^{\mathrm{III}}(a) = f^{\mathrm{III}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{IV}}(a)$

$$f^{\mathrm{V}}(a) = f^{\mathrm{V}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{1}{2}f^{\mathrm{VI}}(a)$$

. . . . . .

Wird dies in die letzte Formel eingetragen, so wird daraus:

$$\int_{0}^{+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = \tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{8}f^{\mathrm{I}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{7}{384}f^{\mathrm{III}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) + \tfrac{11}{1440}f^{\mathrm{IV}}(a) + \\ + \tfrac{163}{46080}f^{\mathrm{V}}\left(a+\tfrac{1}{2}w\right) - \tfrac{191}{120960}f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots \qquad 11)$$

Da es offenbar gleichgültig ist, welches der Argumente wir als Ausgangsargument

a wählen, so folgt aus den Gl. 10) und 11) sofort, wenn mit i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet wird:

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = f(a+iw) + \tfrac{1}{24} f^{II}(a+iw) - \tfrac{17}{5760} f^{IV}(a+iw) + \tfrac{367}{967680} f^{VI}(a+iw) - \cdots \quad 12)$$

$$\int_{i}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = \tfrac{1}{2} f(a+iw) + \tfrac{1}{8} f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{1}{24} f^{II}(a+iw) - \tfrac{7}{384} f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \\ + \tfrac{11}{1440} f^{IV}(a+iw) + \tfrac{163}{46080} f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{191}{120960} f^{VI}(a+iw) - \cdots \quad 13)$$

Aus den Formeln 10)—13) lassen sich nun leicht die Integrale zwischen den unteren Grenzen $-\frac{1}{2}$ und 0 und den oberen i und $i+\frac{1}{2}$ bilden. Man hat zuerst

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}} + \cdots + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$$

also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = \sum_{n=0}^{n=i} f(a+nw) + \tfrac{1}{24} \sum_{n=0}^{n=i} f^{II}(a+nw) - \tfrac{17}{5760} \sum_{n=0}^{n=i} f^{IV}(a+nw) + \cdots$$

Da nach der Entstehung der ersten Summenreihe und der Differenzreihen.

$$\sum_{n=0}^{n=i} f\ (a+nw) = {}^{I}f\ (a+(i+\tfrac{1}{2})w) - {}^{I}f\ (a-\tfrac{1}{2}w)$$
$$\sum_{n=0}^{n=i} f^{II}(a+nw) = f^{I}\ (a+(i+\tfrac{1}{2})w) - f^{I}\ (a-\tfrac{1}{2}w)$$
$$\sum_{n=0}^{n=i} f^{IV}(a+nw) = f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so folgt, wenn das willkürliche Glied der ersten Summenreihe ${}^{I}f(a-\frac{1}{2}w)$ durch

$${}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24} f^{I}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760} f^{III}(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{367}{967680} f^{V}(a-\tfrac{1}{2}w) + \cdots \quad 14)$$

bestimmt wird:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = {}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{1}{24} f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{17}{5760} f^{III}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \quad \text{I.}$$
$$+ \tfrac{367}{967680} f^{V}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \cdots$$

Nimmt man als obere Grenze i statt $i+\frac{1}{2}$, so erhält man wegen:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \int_{i}^{i+\frac{1}{2}}$$

und mit Beachtung von

$$f(a+iw) = {}^{I}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - {}^{I}f(a+(i-\tfrac{1}{2})w)$$
$$f^{II}(a+iw) = f^{I}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - f^{I}(a+(i-\tfrac{1}{2})w)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Formel:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+xw)\,dx = {}^{I}f(a+iw) - \tfrac{1}{12} f^{I}(a+iw) + \tfrac{11}{720} f^{III}(a+iw) - \tfrac{191}{60480} f^{V}(a+iw) + \cdots \quad \text{II.}$$

Wird als untere Grenze o statt $-\frac{1}{2}$ genommen, so hat man von I. und II., welche die Bestimmung des willkürlichen Gliedes ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ nach 14) voraussetzen, in Abzug zu bringen:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx = {}^{1}f(a) - \tfrac{1}{12}f^{1}(a) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots,$$

was am einfachsten dadurch geschieht, daß man diesen Betrag von ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ nach 14) abzieht, d. h. daß man ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ nicht nach 14), sondern durch

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) - {}^{1}f(a) + \tfrac{1}{12}f^{1}(a) - \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots$$

bestimmt; da aber

$${}^{1}f(a) = \tfrac{1}{2}{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2}{}^{1}f(a+\tfrac{1}{2}w),$$

so wird

$$-{}^{1}f(a) + {}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = \tfrac{1}{2}{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{1}{2}{}^{1}f(a+\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}f(a),$$

und bei der unteren Grenze o ist also ${}^{1}f(a-\frac{1}{2}w)$ durch

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{12}f^{1}(a) - \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots \qquad 15)$$

zu bestimmen, worauf wird:

$$\int_{0}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx = {}^{1}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{1}{24}f^{1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \quad \text{III.}$$
$$+ \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \cdots$$

$$\int_{0}^{i} f(a+xw)\,dx = {}^{1}f(a+iw) - \tfrac{1}{12}f^{1}(a+iw) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+iw) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+iw) + \cdots \quad \text{IV.}$$

Werden die Formeln I.—IV. nach 8) noch mit w multipliziert, so ergibt sich das ursprünglich gesuchte Integral, für das wir die Formeln nochmals zusammenstellen:

Ist die untere Grenze des Integrales $a-\frac{1}{2}w$, so bilde man das erste Glied der ersten Summenreihe nach

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{1}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \cdots;$$

ist die untere Grenze a, so bilde man es durch

$${}^{1}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{12}f^{1}(a) - \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots,$$

dann wird:

$$\int_{a}^{a+iw} f(t)\,dt = w\,({}^{1}f(a+iw) - \tfrac{1}{12}f^{1}(a+iw) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+iw) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+iw) + \cdots),$$

$$\int_{a}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)\,dt = w\,({}^{1}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{1}{24}f^{1}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) +$$
$$+ \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \cdots).$$

154. Formeln für Doppelintegrale. Um das Doppelintegral

$$\iint f(t)\,dt^{2}$$

zu bilden, setzen wir wieder $t = a+xw$, $dt^{2} = w^{2}dx^{2}$ und haben daher

$$\iint f(t)\,dt^{2} = w^{2}\iint f(a+xw)\,dx^{2}. \qquad 16)$$

Nach 9) ist

$$\int f(a+xw)\,dx = C + xf(a) + \tfrac{1}{2}x^2\alpha + \tfrac{1}{6}x^3\beta + \tfrac{1}{24}x^4\gamma + \tfrac{1}{120}x^5\delta + \tfrac{1}{760}x^6\varepsilon + \cdots,$$

wo α, β, γ, ... zur Abkürzung für bekannte Funktionen der Größen des Differenzenschemas gesetzt sind, deren Bedeutung durch Vergleich mit 9) ersichtlich ist. Ehe wir diesen Ausdruck ein zweitesmal integrieren, muß über die Konstante C eine Festsetzung gemacht werden; wir bestimmen sie zunächst so, daß das Integral für $x = -\frac{1}{2}$ verschwindet; es wird dann:

$$0 = C - \tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{8}\alpha - \tfrac{1}{48}\beta + \cdots = C - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx,$$

oder

$$C = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx.$$

Wird dies oben eingetragen und nochmals integriert, so kommt:

$$\iint f(a+xw)\,dx^2 = C_1 + x\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx + \frac{x^2}{2}f(a) + \frac{x^3}{6}\alpha + \frac{x^4}{24}\beta + \cdots$$

und genommen zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+xw)\,dx^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx + \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{1920}\gamma + \tfrac{1}{322560}\varepsilon + \cdots$$

Wird hier nach II. (Seite 479)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots$$

(welche Formel die Bestimmung des Summengliedes ${}^{\mathrm{I}}f(a-\frac{1}{2}w)$ nach 14) voraussetzt) und ferner α, γ, ... eingetragen, so folgt:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{I}}f(a) - \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a) + \tfrac{17}{1920}f^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{367}{193536}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots$$

und daher auch:

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{I}}f(a+iw) - \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a+iw) + \tfrac{17}{1920}f^{\mathrm{III}}(a+iw) - \cdots$$

Durch Summation folgt weiter:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+xw)\,dx^2 = \sum_{n=0}^{n=i}{}^{\mathrm{I}}f(a+nw) - \tfrac{1}{24}\sum_{n=0}^{n=i}f^{\mathrm{I}}(a+nw) + \tfrac{17}{1920}\sum_{n=0}^{n=i}f^{\mathrm{III}}(a+nw) \cdots$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}f(a) &= \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}w)+\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a+w)-\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a-w)\\
{}^{\mathrm{I}}f(a+w) &= \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{3}{2}w)+\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}w) = \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a+2w)-\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a)\\
{}^{\mathrm{I}}f(a+2w) &= \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{5}{2}w)+\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{3}{2}w) = \tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a+3w)-\tfrac{1}{2}{}^{\mathrm{II}}f(a+w)\\
&\cdots\cdots\cdots

Wird dies von V. abgezogen, so ergibt sich das gewünschte Integral:

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+iw) - \cdots \qquad \text{VI.}$$

Will man von der unteren Grenze o ausgehen, so hat man von V. und VI. den aus VI. folgenden Betrag

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f(a) + \tfrac{1}{12}f(a) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a) + \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a) - \cdots$$

in Abzug zu bringen, was wieder am einfachsten durch entsprechende Bildung der Anfangsglieder der Summenreihen geschieht; das Anfangsglied der ersten Summenreihe ${}^{\mathrm{I}}f(a-\frac{1}{2}w)$ ist nach 15) zu bilden und das Anfangsglied der zweiten Summenreihe ${}^{\mathrm{II}}f(a)$ nach:

$${}^{\mathrm{II}}f(a) = -\tfrac{1}{12}f(a) + \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots \qquad 18)$$

Dann wird:

$$\iint_{0}^{i+\frac{1}{2}} f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f\big(a+(i+\tfrac{1}{2})w\big) - \tfrac{1}{24}f\big(a+(i+\tfrac{1}{2})w\big) + \tfrac{17}{1920}f^{\mathrm{II}}\big(a+(i+\tfrac{1}{2})w\big) - \tfrac{367}{193536}f^{\mathrm{IV}}\big(a+(i+\tfrac{1}{2})w\big) + \cdots \qquad \text{VII.}$$

$$\iint_{0}^{i} f(a+xw)\,dx^2 = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+iw) \cdots \qquad \text{VIII.}$$

Um das ursprünglich gesuchte Doppelintegral zu erhalten, sind V.—VIII. noch mit w^2 zu multiplizieren. Wir stellen hierfür die Formeln nochmals zusammen, der Übersicht halber zugleich mit denen für das einfache Integral.

Ist die untere Grenze des Integrales a, dann bildet man die ersten Glieder der beiden Summenreihen nach den Formeln:

$${}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a) - \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots$$
$${}^{\mathrm{II}}f(a) = -\tfrac{1}{12}f(a) + \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a).$$

Ist die untere Grenze des Integrales $a - \dfrac{w}{2}$, so bildet man die ersten Glieder der Summenreihen nach:

$$f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \cdots$$
$${}^{\mathrm{II}}f(a) = +\tfrac{1}{24}f(a-w) - \tfrac{17}{5760}\big(2f^{\mathrm{II}}(a-w) + f^{\mathrm{II}}(a)\big) + \tfrac{367}{967680}\big(3f^{\mathrm{IV}}(a-w) + 2f^{\mathrm{IV}}(a)\big) - \cdots$$

Dann wird:

$$\int_{a}^{a+iw} f(t)\,dt = w\big({}^{\mathrm{I}}f(a+iw) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+iw) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+iw) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+iw) + \cdots\big)$$

$$\iint_{a}^{a+iw} f(t)\,dt^2 = w^2\big({}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+iw) - \cdots\big).$$

$$\int_{a}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)\,dt = w\big({}^{\mathrm{I}}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w - \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \cdots\big)$$

$$\iint_{a}^{a+(i+\frac{1}{2})w} f(t)\,dt^2 = w^2\big({}^{\mathrm{II}}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{1}{24}f(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \tfrac{17}{1920}f^{\mathrm{II}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) - \tfrac{367}{193536}f^{\mathrm{IV}}(a+(i+\tfrac{1}{2})w) + \cdots\big).$$

Abschnitt XXX.

Berechnung der speziellen Störungen in den Elementen.

155. Einführung. Geschichtliche Bemerkungen. In den vorausgehenden Teilen haben wir die Annahme gemacht, daß die Bewegung der Körper, deren Bahnen wir untersuchten, durch *eine* Zentralkraft bestimmt wird, die im Mittelpunkt der Sonne ihren Sitz hat und nach dem Newtonschen Gesetz wirkt (Nr. 41); das Resultat war die Kegelschnittsbewegung, und darauf gegründet haben wir die Bestimmung der Bahnen aus geozentrischen Beobachtungen durchgeführt. Diese Annahme entspricht nun nur näherungsweise der Wahrheit, da auf jeden Körper des Sonnensystems alle übrigen ebenfalls nach dem Newtonschen Gesetz einwirken und seine Bahn modifizieren. Die dadurch hervorgebrachten Änderungen der reinen Kegelschnittsbewegung nennt man die *Störungen*. Da die Massen der störenden Körper klein sind, sind auch die Störungen klein und werden erst nach längeren Zeiträumen merkbar. In kurzen Zeiträumen, wie wir sie bisher bei der Bahnbestimmung vorausgesetzt haben, ist die Abweichung von der reinen Kegelschnittsbewegung eine so geringe, daß sie von den Beobachtungen nicht angezeigt werden kann und daher war es berechtigt die Bahnen mit Vernachlässigung der Störungen zu ermitteln. Wird aber ein Körper durch lange Zeiträume hindurch verfolgt, dann erweist es sich als unmöglich, seine Bewegung durch eine reine Kegelschnittsbewegung darzustellen und es muß dann, um Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung herzustellen, auf die Störungen Rücksicht genommen werden. Die Ermittelung der genauen Bahn setzt also die Kenntnis der Störungen voraus; umgekehrt aber kann man die Störungen ohne Kenntnis der Bahn nicht berechnen, da die Größe der Störungen von der gegenseitigen Entfernung der Gestirne abhängt. Daraus geht hervor, daß man das Problem nur auf dem Wege der sukzessiven Näherung wird lösen können, zu der der erste Schritt offenbar der bisher ausgeführte war, den vorhandenen Beobachtungen, die sich über einen beschränkten Zeitraum erstreckten, eine erste Bahn anzupassen. Der zweite Schritt wird sein, mittels dieser und der als bekannt vorausgesetzten Bewegung der störenden Körper die Störungen zu berechnen; der dritte, eine neue Bahn mit Rücksicht auf die Störungen abzuleiten. Mit dieser sind dann weiter die Störungen neu zu rechnen usf., bis keine Änderung in der Bahn und den Störungswerten mehr eintritt, worauf man Übereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen erwarten darf, falls die übrigen Grundlagen der Rechnung zutreffend sind. In diesem Teil soll nun zunächst die Berechnung der Störungen gezeigt werden, worauf sich ihre Verbindung mit der Bahnbestimmung leicht erledigen lässt.

Für die Berechnung der Störungen sind zweierlei Methoden in Gebrauch. Bei der einen werden analytische Ausdrücke für die Störungen aufgestellt, aus denen man diese entnehmen kann, wenn man für die Zeit oder Funktionen derselben den entsprechenden Wert substituiert; diese Methode, welche die der *absoluten Störungen*

genannt wird, ist nur unter besonders günstigen Verhältnissen anwendbar, wie sie im Sonnensystem nur bei den großen und der Mehrzahl der kleinen Planeten zutreffen; sie setzt bedeutende Rechnungen voraus und gestattet doch nicht in allen Fällen bis zur wünschenswerten Genauigkeit fortzuschreiten. Die zweite Methode, die der *speziellen Störungen*, verlangt zu ihrer Ausführung eine kontinuierliche Rechnung, die sich über den ganzen Zeitraum erstreckt, innerhalb dessen die Störungen wirken; d. h. man kann hiernach den Betrag einer Störung in einer späteren Zeit nur dadurch kennen lernen, daß man auch die Störungen in der ganzen Zwischenzeit berechnet. Diesem Nachteil, der bei langen Zeiträumen äußerst lästig sich geltend macht, stehen erhebliche Vorteile gegenüber: die Methode ist in allen Fällen anwendbar, den numerischen Rechnungen kann jede wünschenswerte Genauigkeit gegeben werden, die höheren Potenzen der Massen können so gut wie vollständig und ohne wesentliche Erhöhung der Arbeit berücksichtigt werden, die Rechnung ist kurz und einfach, wenn es sich um kleine Zeiträume handelt. Einen Einblick in den allgemeinen Mechanismus des Planetensystems gewähren nur die absoluten Störungen; die speziellen Störungen aber sind auf dem heutigen Stande der Analyse unentbehrlich, da man mit ihrer Hilfe allein die in der Praxis vorkommenden Fälle mit der notwendigen Schärfe und Kürze der Rechnung bewältigen kann. Für das Problem der Bahnbestimmung kommen nur die speziellen Störungen in Betracht, die deshalb hier allein zur Darstellung gelangen.

Der Erste, der von den speziellen Störungen Gebrauch machte, war *Clairaut* (Theorie du mouvement des comètes, 1760), indem er die Wiederkehr des Halleyschen Kometen für das Jahr 1759 vorausberechnete. Er berechnete die Störungen des Radiusvektors und der Umlaufszeit. Den nächsten Schritt tat *Lagrange* in der Abhandlung: Sur les perturbations, que les comètes peuvent éprouver per l'action des planètes, 1785 (Oeuvres Vol. VI), indem er die Variation der Konstanten, die für die absoluten Störungen sich bewährt hatte, auf die Berechnung der speziellen Störungen anwandte; die Methode ist reproduziert in Laplace, Méc. cél. Vol IV. Livre IX: Sur les Comètes, und ist von Anfang des 19. Jahrhunderts ab viel gebraucht worden. Selbständige Bearbeitungen hat sie erfahren durch *Bessel* (»Entwicklung einer allgemeinen Methode die Störungen der Kometen zu berechnen«, 1810, und »Beitrag zu den Störungsmethoden der Kometen« 1836, Ges. Abh. Band I) und *Encke* (»über die Berechnung der speziellen Störungen«, Berliner Jahrbuch für 1837/38). Als die Rückkehr des Halleyschen Kometen 1835 bevorstand, kamen die neuen Methoden zu umfangreichen Anwendungen (Damoiseau, Pontécoulant, Rosenberger). Für die kleinen Planeten hat zuerst *Gauß* spezielle Störungen berechnet, hierüber aber nichts veröffentlicht; er hat auch das Verdienst, die für die Methode unentbehrlichen Formeln der mechanischen Integration in eine geschmeidige Form gebracht zu haben; Encke hat sie veröffentlicht und weiter ausgebaut (Berl. Jahrb. 1837 und 1862). Als von der Mitte des 19. Jahrhunderts ab die Zahl der kleinen Planeten immer mehr wuchs, machte sich das Bedürfnis nach Methoden geltend, die eine kürzere Rechnung gestatteten; man erkannte, daß dies durch die Berechnung der Störungen von *drei* Koordinaten (statt von *sechs* Elementen) geleistet würde. *Bond*, *Encke*, *Hansen*, *Brünnow* u. a. haben in die Entwicklung dieser Methoden eingegriffen, die sich untereinander haupt-

sächlich in der Wahl der Koordinaten unterscheiden. *Bond* (On some applications of the Method of Mechanical Quadrature, Boston, Mem. of the American Academy Vol. IV 1849) und *Encke* (Über die Berechnung der speziellen Störungen, Denkschr. Berl. Ak. 1851, Astr. Nachr. Bd. 33, 34, Berl. Jahrb. für 1858) wählten rechtwinklige Koordinaten, *Hansen* (Über die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadratur, Astr. Nachr. Band 34) wählte Polarkoordinaten und zwar Radiusvektor, mittlere Länge und Breite, *Brünnow* (Astr. Nachr. Band 34) nimmt ebenfalls Polarkoordinaten, aber Radiusvektor, wahre Länge und Breite über der Bahn, *Tietjen* (Spezielle Störungen in Bezug auf Polarkoordinaten, Berl. Jahrb. für 1877/78) erreicht Vereinfachungen durch eine Verbindung der Hansenschen mit der Brünnowschen Methode. Endlich hat *Oppolzer* eine Verbindung der Variation der Konstanten mit der in Polarkoordinaten angegeben (»Entwicklung der Störungswerte in den Koordinaten durch die Variation entsprechend gewählter Konstanten, Denkschr. Wien. Ak. Band 46, 1883) und auch durch die rechnerische Ausbildung der übrigen Methoden nach der Richtung der größten Schärfe verdienstvoll gewirkt (Bahnbestimmung Band II).

Wir bringen im folgenden die drei hauptsächlichsten heute verwendeten Methoden zur Darstellung und beginnen mit der Variation der Konstanten.

156. Aufstellung der Grundgleichungen für die elliptischen Elemente. Um die Bewegung eines Körpers zu untersuchen, auf den Kräfte einwirken, haben wir in Nr. 17 neben einem festen Koordinatensystem xyz ein bewegliches $\xi\eta\zeta$ eingeführt, das denselben Anfangspunkt hat, dessen ξ-Achse ständig mit dem Radiusvektor des bewegten Punktes zusammenfällt und das um die drei Achsen ξ, η, ζ Drehungen mit den Geschwindigkeiten $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ ausführt. Für die Beschleunigungen des Körpers ergaben sich dann die Ausdrücke 12) (Seite 45), nämlich:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2\right] \text{ in der } \xi\text{-Achse,}\\ &r\left[\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right] + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} \text{ in der } \eta\text{-Achse,} \qquad 1)\\ &-r\left[\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{s}}{dt}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right] - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} \text{ in der } \zeta\text{-Achse.} \end{aligned}$$

Nennt man die Neigung der instantanen $\xi\eta$-Ebene gegen die xy-Ebene: i, die Länge des Knotens, gezählt von der x-Achse: Ω und die Winkelentfernung der ξ-Achse (des Radiusvektors) vom Knoten: u, so ergeben die Gleichungen 6) (Seite 13), da hier:

$$\varphi = u, \quad \theta = i, \quad \psi = -\Omega$$

zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= \cos u\frac{di}{dt} + \sin u\sin i\frac{d\Omega}{dt}\\ \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= -\sin u\frac{di}{dt} + \cos u\sin i\frac{d\Omega}{dt} \qquad 2)\\ \frac{d\mathfrak{s}}{dt} &= \frac{du}{dt} + \cos i\frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned}$$

Kann der Körper als Punkt aufgefaßt werden, so genügen zur Fixierung seiner Lage drei Angaben: r, die Drehungsgeschwindigkeit der instantanen Ebene, in der er sich bewegt, um den Radiusvektor: $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ und die Drehungsgeschwindigkeit in dieser Ebene: $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$; die Drehungsgeschwindigkeit um die η-Achse kann also Null gesetzt werden. Damit wird aus den Beschleunigungen 1):

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2 \\ &r\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)}{dt} \\ &r\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \end{aligned} \qquad 3)$$

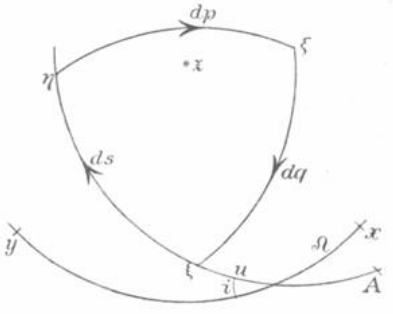


Fig. 58.

und aus den Gl. 2) folgt:

$$\cos u \sin i \frac{d\Omega}{dt} = \sin u \frac{di}{dt} \qquad 4)$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \cos u \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \sin u \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{d\mathfrak{s}}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \qquad 5)$$

Es werde nun der Anfangspunkt der Koordinatensysteme in den Mittelpunkt der Sonne verlegt und dieser als Sitz einer Zentralkraft gedacht, die nach dem Newtonschen Gesetz wirkt. Die relative Beschleunigung längs des Radiusvektors r, welche diese in der Bewegung des Punktes hervorbringt, haben wir in Nr. 41 zu $-\frac{k^2(1+m)}{r^2}$ festgestellt, wenn wir die Sonnenmasse als Einheit einführen und demgemäß unter k die Gaußsche Konstante verstehen. Die Beschleunigungen in der η- und der ζ-Achse, welche von dieser Kraft herrühren, sind Null. Sollen außer der Sonnenanziehung auch die Anziehungen berücksichtigt werden, welche von den Planeten des Sonnensystems herrühren, so erhalten die Beschleunigungen längs der drei Achsen ξ, η, ζ Zusätze, die wir mit S, T, W bezeichnen und die Komponenten der störenden Kräfte nennen wollen. Indem wir uns die Aufstellung der Ausdrücke für dieselben für später vorbehalten, können wir jetzt als Beschleunigungen des bewegten Punktes in der Richtung des Radiusvektors: $-\frac{k^2(1+m)}{r^2} + S$, in der Richtung der η-Achse: T und in der Richtung der ζ-Achse: W hinstellen.

In Verbindung mit 3) resultieren also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= S \\ r\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)}{dt} &= T \\ r\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= W, \end{aligned} \qquad 6)$$

deren Integration die den Ort des Punktes bestimmenden Stücke ergibt. Eine strenge Integration nach Einsetzung der komplizierten analytischen Ausdrücke für S, T, W ist nicht möglich. Man geht daher so vor, daß man zuerst die tatsächlich kleinen Größen S, T, W gleich Null setzt. Die dann entstehenden Gleichungen sind streng integrierbar, wie in den Nr. 41 ff. gezeigt worden ist. Das Resultat ist folgendes. Da aus der zweiten Gleichung sich

$$r^2\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \text{const.}$$

ergibt, wenn r stets einen von Null verschiedenen Wert hat, so folgt aus der dritten

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = 0,$$

d. h. das Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ dreht sich um den Radiusvektor r *nicht*, die $\xi\eta$-Ebene behält also die einmal eingenommene Lage bei und der Radiusvektor und damit der Punkt bewegen sich in dieser Ebene und zwar nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= 0 \\ r^2\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \text{const.} &= k\sqrt{1+m}\sqrt{p} \quad \text{(Seite 127)}. \end{aligned} \qquad 7)$$

Das Integral derselben ist für die elliptische Bewegung aus Nr. 44 zusammengestellt:

$$\begin{aligned} \mu^2a^3 &= k^2(1+m) \\ E - e\sin E &= \mu(t-t_0) + M_0 \\ r\sin(\mathfrak{s}-\chi) &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \\ r\cos(\mathfrak{s}-\chi) &= a(\cos E - e) \end{aligned} \qquad 8)$$

und enthält die vier unabhängigen Konstanten M_0, a, e, χ; die Winkel $\mathfrak{s}$ und χ, von denen letzterer die Lage des Perihels anzeigt, können von einer beliebigen Richtung in der Ebene $\xi\eta$ aus gezählt werden; wir wollen festsetzen, daß sie von einer Richtung A an gerechnet werden, die von der Knotenlinie aus um Ω in der $\xi\eta$-Ebene nach rückwärts liegt. Nimmt man hierzu das aus 5) folgende Resultat, daß die Bestimmungsstücke der $\xi\eta$-Ebene gegen die feste Fundamentalebene Ω und i Konstante werden, so hat man im ganzen sechs Konstante, durch welche die Bewegung des Körpers bestimmt ist. In der Tat werden die Polarkoordinaten l und b im System xyz aus folgenden Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} \cos b\sin(l-\Omega) &= \cos i\sin(\mathfrak{s}-\Omega) \\ \cos b\cos(l-\Omega) &= \cos(\mathfrak{s}-\Omega) \\ \sin b &= \sin i\sin(\mathfrak{s}-\Omega). \end{aligned} \qquad 9)$$

Die Gruppen 8) und 9) stellen das vollständige Integral der Gleichungen 6) dar unter der Voraussetzung, daß die störenden Kräfte Null sind, und ergeben für jede Zeit die Polarkoordinaten r, l, b.

Werden jetzt die störenden Kräfte S, T, W *nicht* als verschwindend angenommen, so stellen 8) und 9) die Integrale von 6) nicht mehr dar; nach einer unter dem Namen der Variation der Konstanten bekannten Methode der Integralrechnung kann man aber 8) und 9) noch als Integrale der vollständigen Gleichungen 6) betrachten, wenn man M_0, a, e, χ, Ω, i nicht mehr als Konstante, sondern als Funktionen der Zeit einführt; mit anderen Worten, man kann die Bewegung nach wie vor als eine elliptische betrachten, aber als eine mit fortwährend wechselnden Elementen. Die hierzu nötige Bestimmung der Elemente als Funktionen der Zeit kann auf unendlich verschiedene Arten geschehen und es wird darauf ankommen, die zweckmäßigste herauszufinden.

Wir behandeln zuerst die beiden ersten Gleichungen 6), von denen die Bestimmung von $\mathfrak{s}$ und r allein abhängt. Trägt man darin die aus 8) folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} r &= f(t, M_0, a, e, \chi) \\ \mathfrak{s} &= F(t, M_0, a, e, \chi) \end{aligned} \qquad 10)$$

ein, so erhält man zur Bestimmung von M_0, a, e, χ als Funktionen der Zeit zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{f^2} &= S \\ \frac{1}{f}\,\frac{d\left(f^2\frac{dF}{dt}\right)}{dt} &= T, \end{aligned} \qquad 11)$$

die hierzu nicht ausreichen; man darf noch zwei Gleichungen hinzufügen, denen die Funktionen a, e, M_0, χ ebenfalls genügen sollen. In der Wahl dieser Gleichungen läßt man sich von folgender Überlegung leiten. Der gestörte und der ungestörte Ort r, $\mathfrak{s}$ werden in jedem Zeitmoment durch dieselben Ausdrücke 8) oder 10) gegeben. Würde dies auch noch für die ersten Differenzialquotienten von r und $\mathfrak{s}$ nach der Zeit der Fall sein, so würde hierdurch ein möglichstes Aneinanderschmiegen der gestörten und der ungestörten *Bewegung* herbeigeführt, d. h. der mit unveränderten Elementen gerechnete Ort würde auch noch im jeweils nächsten Zeitmoment den gestörten Ort darstellen. Wir führen daher als weitere Bedingung für die Bestimmung von M_0, a, e, χ als Funktionen der Zeit *die* ein, daß die ersten Differenzialquotienten von r und $\mathfrak{s}$ in der gestörten Bewegung durch dieselben Ausdrücke gegeben seien wie in der ungestörten. Da in der gestörten Bewegung (mit variabeln Elementen)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial M_0}\frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt} \\ \frac{d\mathfrak{s}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial M_0}\frac{dM_0}{dt} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt} \end{aligned}$$

und in der ungestörten

$$\frac{dr}{dt} = \frac{df}{dt}, \qquad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

so kommen beide überein, wenn

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial M_0}\frac{dM_0}{dt}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial f}{\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt}&=0\\ \frac{\partial F}{\partial M_0}\frac{dM_0}{dt}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial F}{\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial F}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt}&=0\end{aligned} \qquad 12)$$

und dies sind die zwei Zusatzgleichungen. Aus den vier Gleichungen 11) und 12) sind M_0, a, e, χ als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Dies kann man durch folgendes Verfahren rascher erreichen, als durch direkte Behandlung der Gl. 11) und 12).

Die Koordinaten r und s und ihre ersten Differenzialquotienten (Nr. 46 und Gl. 9) Seite 127)

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}&=\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}\,e\sin(\mathrm{s}-\chi)\\ \frac{d\mathrm{s}}{dt}=\frac{k\sqrt{p}\,\sqrt{1+m}}{r^2}&=\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}\,p}(1+e\cos(\mathrm{s}-\chi))^2\end{aligned} \qquad 13)$$

sind nach den oben gemachten Festsetzungen in der gestörten Bewegung durch dieselben Ausdrücke gegeben wie in der ungestörten Bewegung. Die zweiten Differenzialquotienten dagegen haben in der elliptischen Bewegung den Wert

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2}&=r\left(\frac{d\mathrm{s}}{dt}\right)-\frac{k^2(1+m)}{r^2}\\ \frac{d^2\mathrm{s}}{dt^2}&=-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\mathrm{s}}{dt},\end{aligned}$$

in der gestörten Bewegung aber treten nach 6) hierzu noch die Glieder S bzw. $\frac{1}{r}T$. Differenziert man also die Gl. 13) nach der Zeit, so werden die Unterschiede der entstehenden zweiten Differenzialquotienten linker Hand von ihren Werten in der elliptischen Bewegung: S bzw. $\frac{1}{r}T$ und rechter Hand werden die Unterschiede der Koordinaten und ihrer ersten Differenzialquotienten in beiden Bewegungen verschwinden, und nur die Unterschiede der Differenzialquotienten der Elemente übrig bleiben, welche in der elliptischen Bewegung Null, in der gestörten aber $\frac{da}{dt}$, ... sind.

Man erhält also:

$$\begin{aligned}S&=-\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}e\cos(\mathrm{s}-\chi)\frac{d\chi}{dt}+\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}\sin(\mathrm{s}-\chi)\frac{de}{dt}-\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{1+m}}{p\sqrt{p}}e\sin(\mathrm{s}-\chi)\frac{dp}{dt}\\ \frac{T}{r}&=\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{1+m}}{r^2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}.\end{aligned} \qquad 14)$$

Stellt man die Gleichungen 13) so

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{dr}{dt}&=e\sin(\mathrm{s}-\chi)\\ \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\,r\,\frac{d\mathrm{s}}{dt}&=e\cos(\mathrm{s}-\chi)+1,\end{aligned} \qquad 13^a)$$

quadriert und addiert, so kommt:

$$\frac{1}{k^2(1+m)}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{p}\left[1+e^2+2e\cos(s-\chi)\right]=\frac{2}{r}-\frac{1-e^2}{p}$$

oder

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Wird diese Gleichung, die wir auch direkt aus Nr. 42 entnehmen konnten, nach den obigen Prinzipien differenziert, so erscheint:

$$2\frac{dr}{dt}S+2r^2\frac{ds}{dt}\frac{T}{r}=k^2(1+m)\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt}$$

oder nach Substitution von 13)

$$\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt}=\frac{2}{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}}e\sin(s-\chi)S+\frac{2\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{T}{r}. \qquad 15)$$

Man kann die Gl. 13a) aber auch direkt der Differenziation unterwerfen, worauf sich ergibt:

$$-e\cos(s-\chi)\frac{d\chi}{dt}+\sin(s-\chi)\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}S+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}\,k\sqrt{1+m}}\frac{dr}{dt}\frac{dp}{dt}$$

$$e\sin(s-\chi)\frac{d\chi}{dt}+\cos(s-\chi)\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}T+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}\,k\sqrt{1+m}}r\frac{ds}{dt}\frac{dp}{dt}$$

oder mit Benutzung von 13) und der zweiten Gleichung in 14):

$$-e\cos(s-\chi)\frac{d\chi}{dt}+\sin(s-\chi)\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}S+\frac{r}{p}\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}e\sin(s-\chi)T$$

$$e\sin(s-\chi)\frac{d\chi}{dt}+\cos(s-\chi)\frac{de}{dt}=2\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}T.$$

Hieraus folgt mit $\frac{p}{r}=1+e\cos(s-\chi)$

$$\begin{aligned}e\frac{d\chi}{dt}&=-\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\cos(s-\chi)S+\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\sin(s-\chi)\left(1+\frac{r}{p}\right)T\\ e\frac{de}{dt}&=+\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}e\sin(s-\chi)S+\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)T.\end{aligned} \qquad 16)$$

Diese letztere Gleichung kann man auch noch aus 14) und 15) ableiten, wenn man aus

$$p=a(1-e^2)$$

entnimmt

$$2ae\frac{de}{dt}=(1-e^2)\frac{da}{dt}-\frac{dp}{dt}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}S=(S),\qquad\qquad\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}T=(T),$$

so haben wir jetzt folgende Differenzialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen p, a, χ, e:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2r(T)\\
\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} &= \frac{2e}{p}\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(S)+\frac{2}{r}\,(T)\\
e\frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\mathfrak{s}-\chi)\,(S)+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(T)\\
e\frac{de}{dt} &= e\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(S)+\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)(T).
\end{aligned} \qquad 17)$$

Durch $\frac{da}{dt}$ ist auch $\frac{d\mu}{dt}$ gegeben, indem aus

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt

$$\frac{d\mu}{dt} = -\tfrac{3}{2}k\sqrt{1+m}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,a^2}\,\frac{da}{dt} = -\tfrac{3}{2}\mu a\,\frac{1}{a^2}\,\frac{da}{dt},$$

also

$$\frac{d\mu}{dt} = -3\,\frac{\mu a e}{p}\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(S)-\frac{3\mu a}{r}\,(T). \qquad 18)$$

Statt der Gleichung für e kann man auch die für den Exzentrizitätswinkel φ aufstellen, da $\cos\varphi\, d\varphi = de$ ist. Aus

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\mathfrak{s}-\chi) \quad \text{und} \quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos E$$

folgt

$$\frac{p}{r}-\frac{r}{a} = e\,(\cos(\mathfrak{s}-\chi)+\cos E),$$

so daß man statt obiger Gl. für de auch setzen kann:

$$\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = \sin(\mathfrak{s}-\chi)\cdot(S)+\cos(\mathfrak{s}-\chi)\cdot(T)+\cos E\cdot(T), \qquad 19)$$

wozu wegen $\frac{r}{p}\sin(\mathfrak{s}-\chi) = \sec\varphi\sin E$ symmetrisch tritt:

$$\sin\varphi\,\frac{d\chi}{dt} = -\cos(\mathfrak{s}-\chi)\cdot(S)+\sin(\mathfrak{s}-\chi)\cdot(T)+\sec\varphi\sin E\cdot(T). \qquad 20)$$

Um die Differenzialgleichung für M_0 zu ermitteln, geht man, wenn man nicht von 12) Gebrauch machen will, da dies auf eine ziemlich komplizierte Rechnung führt, direkt von

$$M = \mu(t-t_0)+M_0 = E - e\sin E$$

und

$$r = a - ae\cos E$$

aus, die nach den obigen Grundsätzen differenziert auf

$$\frac{dM}{dt} = \frac{r}{a}\,\frac{dE}{dt} - \sin E\,\frac{de}{dt}$$

und

$$0 = ae\sin E\,\frac{dE}{dt} - a\cos E\,\frac{de}{dt}+\frac{r}{a}\,\frac{da}{dt}$$

führen. Wird hieraus $\frac{dE}{dt}$ eliminiert, so kommt:

$$ae \sin E \frac{dM}{dt} = (r \cos E - ae \sin E^2) \frac{de}{dt} - \frac{r^2}{a^2} \frac{da}{dt}.$$

Nun ist nach 8)

$$ae \sin E = r \sin(\mathfrak{s} - \chi) \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$r \cos E - ae \sin E^2 = a \cos E - ae \cos E^2 - ae \sin E^2 = a(\cos E - e) = r \cos(\mathfrak{s} - \chi),$$

also folgt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \operatorname{cotg}(\mathfrak{s} - \chi) \frac{de}{dt} - \frac{r\sqrt{1 - e^2}}{e \sin(\mathfrak{s} - \chi)} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt}.$$

Werden hier $\frac{de}{dt}$ und $\frac{da}{dt}$ aus 19) und 17) eingetragen, so erhält man zuerst

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dM}{dt} = \cos(\mathfrak{s}-\chi)(S) - \frac{2e}{p} r(S) + \frac{\cos(\mathfrak{s}-\chi)^2}{\sin(\mathfrak{s}-\chi)}(T) + \frac{\cos(\mathfrak{s}-\chi)\cos E}{\sin(\mathfrak{s}-\chi)}(T) - \frac{2}{\sin(\mathfrak{s}-\chi)}(T).$$

Nun ist nach 8) und $r = a - ae \cos E$:

$$r \cos(\mathfrak{s} - \chi) \cos E = a \cos E^2 - ae \cos E = r - a \sin E^2 = r - \frac{r^2}{p} \sin(\mathfrak{s} - \chi)^2,$$

also

$$\cos(\mathfrak{s} - \chi) \cos E = 1 - \frac{r}{p} \sin(\mathfrak{s} - \chi)^2.$$

Somit wird:

$$\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dM}{dt} = \cos(\mathfrak{s} - \chi)(S) - \sin(\mathfrak{s} - \chi) \left(1 + \frac{r}{p}\right)(T) - \frac{2e}{p} r(S),$$

oder nach 17)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dM}{dt} = -\frac{d\chi}{dt} - 2\frac{r}{p}(S). \tag{21}$$

Nun folgt aus

$$M = M_0 + \mu(t - t_0)$$

die Beziehung

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{d\mu}{dt}, \tag{22}$$

wenn nämlich, wie in der eben beendeten Ableitung nur auf die Änderung von M, soweit sie von den Störungen herrührt, Rücksicht genommen wird. Man hat also durch Vergleichung mit 21)

$$\frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{1 - e^2}\frac{d\chi}{dt} - 2\sqrt{1 - e^2}\frac{r}{p}(S). \tag{23}$$

Ehe wir die jetzt aufgestellten Gleichungen für a, $e(\varphi)$, μ, χ, M_0 weiter behandeln, stellen wir die Gleichungen auf, welche die Bahnlage bestimmen. Die dritte Gleichung in 6) kann so geschrieben werden:

$$r^2 \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} = rW,$$

und gibt, da nach 7) (Seite 488) in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung

$$r^2 \frac{d\mathsf{s}}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}$$

ist:

$$\frac{d\mathsf{p}}{dt} = \frac{r}{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}}\,W,$$

oder wenn analog (S) und (T) gesetzt wird

$$\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\,W = (W):$$

$$\frac{d\mathsf{p}}{dt} = \frac{r}{p}(W). \qquad 24)$$

Hierdurch ist die Drehungsgeschwindigkeit um die ξ-Achse (den Radiusvektor) und damit die Bahnlage bestimmt. Will man diese durch Knoten und Neigung kennen lernen, so wird nach 5) (Seite 487)

$$\frac{di}{dt} = \cos u\,\frac{r}{p}(W) \qquad 25)$$

$$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} = \sin u\,\frac{r}{p}(W). \qquad 26)$$

Wir haben bisher die Bewegung in der $\xi\eta$-Ebene: $d\mathsf{s}$ und dr getrennt behandelt von der Drehung dieser Ebene um den Radiusvektor: $d\mathsf{p}$. Wir gehen nun an die Verbindung beider, wobei offenbar nur das Element χ in Betracht zu ziehen ist, das in einer von der Bahnlage abhängigen Weise gezählt wird, nämlich von der festen x-Achse bis zum Knoten und von da bis zum Perihel. Während bei unbewegter $\xi\eta$-Ebene das Perihel von P_0 nach P geht, wird es durch die Drehung der Ebene um die ξ-Achse noch von P nach P' transferiert, wobei $\xi P = \xi P'$ ist. Durch die Gl. 16) wird nur die Verschiebung von P_0 nach P bestimmt. Um eine Gleichung aufzustellen, durch welche die ganze durch die Störungen bedingte Verschiebung des Perihels erhalten wird, nennen wir $\pi + d\pi$ die Länge des Perihels, gemessen in der gedrehten Bahn, also den gebrochenen Bogen $xK' + K'P'$; stellt hierin $d\pi$ die Störung der Perihelslänge dar, so ist $\pi = xK_0 + K_0P_0$, also identisch mit dem bisherigen χ. Nun ist:

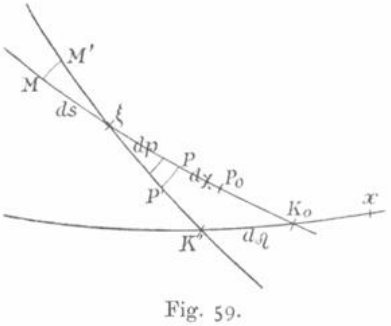


Fig. 59.

$$\begin{aligned} du &= K'M' - K_0\xi = K'P' + P'\xi + d\mathsf{s} - K_0P_0 - d\chi - P\xi = \\ &= (K'P' + \Omega + d\Omega) - (K_0P_0 + \Omega) - d\Omega + d\mathsf{s} - d\chi \\ &= (\pi + d\pi) - \pi - d\Omega + d\mathsf{s} - d\chi = d\pi - d\Omega + d\mathsf{s} - d\chi \end{aligned}$$

und andererseits nach der letzten Gleichung 5)

$$du = d\mathsf{s} - \cos i\,d\Omega$$

also folgt:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\chi}{dt} + (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{dt} \cdot \qquad 27)$$

Die Gleichung für den Abstand des Perihels vom Knoten ω läßt sich hieraus leicht bilden, da

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cdot$$

Es wird:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\chi}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \cdot \qquad 28)$$

Nachdem jetzt alle Differenzialgleichungen zur Berechnung der gestörten Elemente aufgestellt sind, ist nur noch zu besprechen, in welcher Weise die mittlere Anomalie

$$M = \mu(t - t_0) + M_0$$

in die Gleichungen 8) eingeführt werden muß, da die Zeit hier auch explizit auftritt. Die *vollständige* Differenziation von M gibt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{d\mu}{dt} + \mu ;$$

wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\overline{M}_0}{dt},$$

so folgt:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\overline{M}_0}{dt} + \mu \cdot \qquad 29)$$

Das erste Glied rechts ist durch 23) bestimmt; das zweite Glied μ ist das variable Element, dessen Wert nach Integration von 18) erhalten wird.

Bei kleinen Exzentrizitäten wird $\frac{d\chi}{dt}$ wegen des Divisors e sehr groß, also auch nach 23) $\frac{d\overline{M}_0}{dt}$; es empfiehlt sich dann statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge L zu benutzen und statt des Elementes M_0 die mittlere Länge für die Epoche L_0 einzuführen. Diese Größen sind nämlich definiert durch

$$L = M + \pi = M_0 + \mu(t - t_0) + \pi = L_0 + \mu(t - t_0)$$
$$L_0 = M_0 + \pi$$

und es wird daher

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + \frac{d\pi}{dt}$$
$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_0}{dt} + \frac{d\mu}{dt}(t - t_0) + \mu ,$$

wenn wir gleich die Gesamtänderung mit der Zeit in L zusammennehmen.

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \frac{dL_0}{dt} + \frac{d\mu}{dt}(t - t_0),$$

so wird

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \frac{d\pi}{dt}$$

oder nach 23) und 27)

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = (1 - \sqrt{1-e^2})\frac{d\chi}{dt} + (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{dt} - 2\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}(S)$$

oder

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, e\frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i \,.\, \sin i\frac{d\Omega}{dt} - 2\cos\varphi\,\frac{r}{p}(S) \qquad 30)$$

und dann

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \mu\,. \qquad 31)$$

Infolge der Einführung der Elemente π und L_0 müssen auch die Formeln 8) in anderer Weise geschrieben werden. s wird ebenso wie χ von einer festen Richtung in der Bahn aus gezählt; führt man die Länge ν in der gedrehten Bahn ein, so wird sich ν von s um ebensoviel unterscheiden wie π von χ und es wird also $\mathrm{s} - \chi = \nu - \pi = v =$ wahre Anomalie. In den Formeln 9) muß gesetzt werden:

$$\mathrm{s} - \Omega = \nu - \Omega\,,$$

da nach der Herleitung derselben s darin die Länge in der gedrehten Bahn bedeutet. Das gesamte Integral für die Bewegung des gestörten Körpers ist also:

$$\begin{aligned} E - e\sin E &= M = L - \pi \\ r\sin(\nu - \pi) &= a\cos\varphi\,\sin E \\ r\cos(\nu - \pi) &= a(\cos E - e) \\ \cos b\sin(l - \Omega) &= \cos i\sin(\nu - \Omega) \\ \cos b\cos(l - \Omega) &= \cos(\nu - \Omega) \\ \sin b &= \sin i\sin(\nu - \Omega) \end{aligned} \qquad 32)$$

und die hierin auftretenden Größen sind zu bestimmen durch

$$\begin{aligned} e\frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin(\nu - \pi)(T) \\ \frac{d\bar{M}_0}{dt} &= -\cos\varphi\frac{d\chi}{dt} - 2\cos\varphi\,\frac{r}{p}(S) \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{d\bar{M}_0}{dt} + \mu \end{aligned} \qquad 33)$$

oder wenn statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge benutzt wird:

$$\begin{aligned} e\frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin(\nu - \pi)(T) \\ \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, e\frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i \,.\, \sin i\frac{d\Omega}{dt} - 2\cos\varphi\,\frac{r}{p}(S) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \mu \end{aligned} \qquad 34)$$

und in beiden Fällen weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \,.\, \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\
\frac{di}{dt} &= \cos(\nu - \Omega)\frac{r}{p}(W) \\
\sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \sin(\nu - \Omega)\frac{r}{p}(W) \\
\frac{d\mu}{dt} &= -3\frac{\mu a e}{p}\sin(\nu - \pi(S) - \frac{3\mu a}{r}(T) \\
\frac{de}{dt} &= \sin(\nu - \pi)(S) + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right)(T).
\end{aligned} \tag{35}$$

Um hier alles beisammen zu haben, seien noch die Varianten hinzugefügt:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2r(T) \\
\frac{da}{dt} &= \frac{2a^2 e}{p}\sin(\nu - \pi)(S) + \frac{2a^2}{r}(T) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\chi}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\
\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \sin(\nu - \pi)(S) + (\cos(\nu - \pi) + \cos E)(T) \\
\sin\varphi \frac{d\chi}{dt} &= -\cos(\nu - \pi)(S) + (\sin(\nu - \pi) + \sec\varphi \sin E)(T).
\end{aligned} \tag{36}$$

Die Verwertung dieser Formeln sei durch folgende Definition eingeleitet: *Unter einem oskulierenden Elementensystem für einen bestimmten Zeitmoment versteht man dasjenige System, durch welches Ort und Geschwindigkeit in diesem Moment wiedergegeben wird.* Durch ein solches System wird also in diesem Moment — der *Oskulationsepoche* — die Bewegung des Körpers dargestellt. Wären Störungen nicht vorhanden, so wäre dadurch die Bewegung überhaupt bestimmt; wirken dagegen störende Kräfte, so werden in dem der Oskulationsepoche folgenden Zeitmoment die Elemente Ort und Geschwindigkeit nicht mehr darstellen, wohl aber wird dies der Fall sein durch Elemente, die nach den eben aufgestellten Differenzialgleichungen als Funktionen der Zeit bestimmt sind, wenn darin der neue Zeitmoment eingetragen wird. Dies geht aus der Herleitung der Formeln unmittelbar hervor; denn man erhält durch sie oskulierende für den zweiten Zeitmoment. Schließt man so weiter, so kann man oskulierende Elemente für jeden beliebigen späteren oder früheren Zeitpunkt sich verschaffen. Den Unterschied zwischen den Endelementen und den Ausgangselementen nennt man die *Elementenstörungen* für die Zwischenzeit.

Die Integration der aufgestellten Differenzialgleichungen vollzieht man nach dem im vorigen Abschnitt auseinandergesetzten Verfahren der mechanischen Integration in folgender Weise. Es sei Ω ein beliebiges der Elemente Ω, i, π, L_0, φ, μ, dann wird das allgemeine Integral von

$$\frac{d\Omega}{dt} = f(t)$$

folgendes:

$$\Omega = \overline{\Omega} + \int f(t)\,dt = \overline{\Omega} + \int \frac{d\Omega}{dt}\,dt,$$

wo $\overline{\Omega}$ die Integrationskonstante ist. Ist t_0 die Oskulationsepoche der Ausgangselemente, t_1 die Epoche, für welche die Elemente gesucht werden, so hat man

$$\Omega_{t=t_0} = \overline{\Omega} + \left(\int \frac{d\Omega}{dt}\,dt\right)_{t=t_0}$$
$$\Omega_{t=t_1} = \overline{\Omega} + \left(\int \frac{d\Omega}{dt}\,dt\right)_{t=t_1}$$

und daher die Elementenstörung von t_0 bis t_1 in Ω:

$$\Omega_{t=t_1} - \Omega_{t=t_0} = \Delta\Omega = \left(\int \frac{d\Omega}{dt}\,dt\right)_{t=t_1} - \left(\int \frac{d\Omega}{dt}\,dt\right)_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Omega}{dt}\,dt. \qquad 37)$$

Daraus folgt:

$$\Omega_{t=t_1} = \Omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Omega}{dt}\,dt,$$

wenn das oskulierende Element für die Epoche t_0 kurz mit Ω_0 bezeichnet wird. Bei der Bildung des bestimmten Integrales $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Omega}{dt}\,dt$ nach den Formeln Seite 480 ist also in erster Linie darauf zu achten, daß die untere Grenze a bez. $a - \frac{w}{2}$ mit der Oskulationsepoche der vorgelegten Elemente zusammenfalle, weiter hat man nur die Differenzialquotienten $\frac{d\Omega}{dt}$ nach den Formeln 33) bis 35) in angemessenen Zeitintervallen w zu berechnen und deren Differenzen- und Summenschema zu bilden.

Die mittlere Anomalie bez. mittlere Länge bedürfen einer besonderen Behandlung. Aus

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\overline{L}_0}{dt} + \mu$$

folgt, da μ Funktion der Zeit ist, für die gestörte mittlere Länge der Epoche t_1:

$$L_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dL}{dt}\,dt + L_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\overline{L}_0}{dt} + \int_{t_0}^{t_1} \mu\,dt + L_0,$$

wo die hinzugefügte Konstante offenbar die mittlere Länge für die Epoche t_0 bedeutet. Nun ist ferner

$$\mu = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\,dt + \mu_0,$$

also

$$L_1 = L_0 + \mu_0 (t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\overline{L}_0}{dt}\,dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\,dt^2. \qquad 38)$$

Ebenso:

$$M_1 = M_0 + \mu_0 (t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\overline{M}_0}{dt}\, dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\, dt^2 . \qquad 39)$$

Bei diesen Elementen ist also eine doppelte Integration zu leisten. Es könnte befremden, daß man *sieben* Integrationen auszuführen hat, allein die eine überschüssige Integration steht dem eigentlichen Problem fern und wird nur zur Bequemlichkeit ausgeführt, um mit dem Element μ nicht von Intervall zu Intervall wechseln zu müssen. Das ist aber hier wegen der Multiplikation mit der Zeit nötig, während man nur Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt, wenn man sonst in den rechten Seiten der Gleichungen 35) die auftretenden Elemente konstant hält. Da $L_0 + \mu_0 (t - t_0)$ und $M_0 + \mu_0 (t - t_0)$ die ungestörte mittlere Länge bzw. Anomalie bedeuten, so stellen:

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\overline{L}_0}{dt}\, dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\, dt^2 \qquad 40)$$

$$\Delta M = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\overline{M}_0}{dt}\, dt + \iint_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\, dt^2 \qquad 41)$$

die Störungen in mittlerer Länge bzw. Anomalie dar.

Für die Berechnung ist es zweckmäßiger $\frac{d\overline{M}_0}{dt}$, $\frac{d\overline{L}_0}{dt}$ und $\frac{d\pi}{dt}$ nicht aus $\frac{d\chi}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ zusammenzusetzen, sondern sie direkt in den Komponenten (S), (T), (W) auszudrücken; man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{M}_0}{dt} &= \left(\operatorname{cotg}\varphi \cos(\nu - \pi) - 2\frac{r}{p}\cos\varphi\right)(S) - \operatorname{cotg}\varphi \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin(\nu - \pi)(T) \\
\frac{d\overline{L}_0}{dt} &= -\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \cos(\nu - \pi) + 2\frac{r}{p}\cos\varphi\right)(S) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin(\nu - \pi)(T) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \frac{r}{p}\sin(\nu - \Omega)(W) \\
\frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\cos(\nu - \pi)}{\sin\varphi}(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin(\nu - \pi)}{\sin\varphi}(T) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \frac{r}{p}\sin(\nu - \Omega)(W) \qquad 42) \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos(\nu - \pi)}{\sin\varphi}(S) + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin(\nu - \pi)}{\sin\varphi}(T) - \operatorname{cotg} i \frac{r}{p}\sin(\nu - \Omega)(W).
\end{aligned}$$

157. Berechnung der störenden Kräfte. Zur Aufstellung der Differenzialquotienten der Elemente bedarf man der Komponenten der störenden Kräfte S, T, W, welche unserer Seite 487 gemachten Voraussetzung gemäß längs der positiven Richtungen der Koordinatenachsen ξ, η, ζ des beweglichen Systems wirken. Wird der Anfangspunkt dieses Systems in den Mittelpunkt der Sonne gelegt, so werden die Koordinaten des gestörten Körpers P

$$\xi = r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \qquad 1)$$

Indem wir zuerst nur *einen* störenden Körper in Betracht ziehen, bezeichnen wir dessen Koordinaten in demselben System mit ξ_1, η_1, ζ_1, seine Entfernung von der

Sonne mit r_1, seine Entfernung vom Körper P mit ϱ_1 und seine Masse mit m_1; die von ihm auf die Sonne ausgeübte Beschleunigung ist dann $\frac{k^2 m_1}{r_1^2}$ und wenn sie nach den drei Achsen zerlegt wird:

$$k^2 m_1 \frac{\xi_1}{r_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\eta_1}{r_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\zeta_1}{r_1^3};$$

ebenso ist seine Wirkung auf den Körper P gleich $\frac{k^2 m_1}{\varrho_1^2}$ und nach denselben Achsen zerlegt:

$$k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi}{\varrho_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\eta_1 - \eta}{\varrho_1^3} \quad k^2 m_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{\varrho_1^3}.$$

Da wir die relative Bewegung von P um die Sonne suchen, haben wir die relative Bescheunigung der Masse m_1 auf P in Betracht zu ziehen, deren Komponenten S_1, T_1, W_1 also sein werden:

$$S_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\varrho_1^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3}\right), \quad T_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\varrho_1^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3}\right), \quad W_1 = k^2 m_1 \left(\frac{\zeta_1 - \zeta}{\varrho_1^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3}\right)$$

oder wenn

$$\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} = K_1$$

gesetzt und 1) beachtet wird:

$$S_1 = k^2 m_1 \left(\xi_1 K_1 - \frac{r}{\varrho_1^3}\right), \quad T_1 = k^2 m_1 \eta_1 K_1, \quad W_1 = k^2 m_1 \zeta_1 K_1. \qquad 2)$$

Hierin sind noch zur Berechnung von ϱ_1 und ξ_1, η_1, ζ_1 die von den Jahrbüchern gebotenen Stücke einzuführen. Diese geben von den hier in Betracht kommenden großen Planeten außer dem Radiusvektor r_1 die heliozentrische Länge und Breite λ_1 und β_1 bezogen auf die Ekliptik und den Frühlingspunkt. Ist wie früher u die Entfernung der ξ-Achse vom Knoten und nennt man $L_1 - u$ und B_1 die Polarkoordinaten des störenden Körpers J_1 im System $\xi\eta\zeta$, so wird

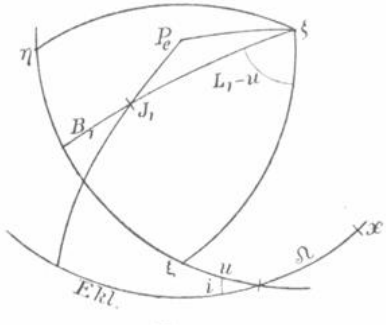


Fig. 60.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned} \qquad 3)$$

und L_1 und B_1 hängen mit λ_1 und β_1 durch folgende aus dem Dreieck zwischen J_1, ζ und dem Pol der Ekliptik sich ergebenden Formeln zusammen:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos(\lambda_1 - \Omega) \cos\beta_1 \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin i \sin\beta_1 + \cos i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega) \\ \sin B_1 &= \cos i \sin\beta_1 - \sin i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega). \end{aligned} \qquad 4)$$

Da ferner

$$\varrho_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2$$

so ergibt sich ϱ_1 aus der Durchrechnung des Systems

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - r \\ \varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \varrho_1 \sin\vartheta &= r_1 \sin B_1 . \end{aligned} \qquad 5)$$

Man hat also folgende Ausdrücke für die Komponenten der störenden Kraft, die von m_1 ausgeht:

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 m_1 \left(r_1 K_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - \frac{r}{\varrho_1^3} \right) \\ T_1 &= k^2 m_1 r_1 K_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ W_1 &= k^2 m_1 r_1 K_1 \sin B_1 \end{aligned} \qquad 6)$$

worin

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

und ϱ_1 durch 5) berechnet wird.

Zieht man mehrere störende Körper in Betracht, so werden die Gesamtkomponenten

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots, \quad T = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots, \quad W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots$$

Wir haben in den Schlußformeln der Nr. 156 (Seite 496—97) die Größen

$$(S) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} S, \quad (T) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} T, \quad (W) = \frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}} W$$

eingeführt; wenn man, um bei der Anwendung der Formeln der mechanischen Integration der schließlichen Multiplikation mit dem gewählten Intervall w überhoben zu sein, gleich den w-fachen Betrag von (S), (T), (W) rechnet, wenn man ferner, um die Störungsbeträge in den Elementen gleich in Sekunden zu erhalten, die Multiplikation mit 206 264.8 dadurch ausführt, daß man in den störenden Komponenten k'' ansetzt und wenn man endlich die stets unbekannte Masse $m = 0$ setzt, so werden die so modifizierten Ausdrücke der störenden Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{w(S)}{\sin 1''} &= \mathsf{S} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\left(r_1 K_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - \frac{r}{\varrho_1^3} \right) \\ \frac{w(T)}{\sin 1''} &= \mathsf{T} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\, r_1 K_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \\ \frac{w(W)}{\sin 1''} &= \mathsf{W} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\, r_1 K_1 \sin B_1 \end{aligned} \qquad 7)$$

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

L_1, B_1, ϱ_1 durch 4) und 5).

Die Faktoren $(k'' w m_1)$ sind für die großen Planeten und für die Intervalle $w = 20$ und 40 Tage in Taf. XXXXV zusammengestellt.

158. Zusammenstellung der Formeln. In der für die Anwendung geeignetsten Form zusammengestellt, werden die abgeleiteten Ausdrücke für die Berechnung der Störungen in den Elementen folgende.

Methode der Variation der Elemente für die Ellipse.

I.
$$M = L - \pi = M_0 + \mu(t - t_0) = L_0 - \pi + \mu(t - t_0)$$
$$E - e'' \sin E = M \qquad e'' = [5.314425] \sin\varphi$$
$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E \qquad \sqrt{a} = \left(\frac{k''}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$r \cos v = a(\cos E - \sin\varphi) \qquad \log k'' = 3.550007$$
$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega$$
$$p = a \cos\varphi^2.$$

II.
$$\cos B_1 \cos L_1 = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega)$$
$$\cos B_1 \sin L_1 = \sin i \sin\beta_1 + \cos i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega)$$
$$\sin B_1 = \cos i \sin\beta_1 - \sin i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega)$$
$$\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - r = \xi_1 - r$$
$$\varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u) \qquad = \eta_1$$
$$\varrho_1 \sin\vartheta \qquad = r_1 \sin B_1 \qquad = \zeta_1.$$

Es ist darauf zu achten, daß i, Ω, λ_1, β_1 sich auf Ekliptik und Äquinoktium derselben Epoche beziehen.

III.
$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}$$
$$\mathsf{S} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\left(\xi_1 K_1 - \frac{r}{\varrho_1^3}\right)$$
$$\mathsf{T} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\,\eta_1 K_1$$
$$\mathsf{W} = (k'' w m_1)\sqrt{p}\,\zeta_1 K_1.$$

IV.
$$w\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos u\,\mathsf{W}$$
$$w\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\,\mathsf{W}$$
$$w\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin v}{\cos\varphi}\,\mathsf{S} + \frac{1}{\cos\varphi}(\cos v + \cos E)\,\mathsf{T}$$
$$w\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{\sin\varphi}\,\mathsf{S} + \frac{1}{\sin\varphi}(\sin v + \sec\varphi \sin E)\,\mathsf{T} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \frac{r}{p}\sin u\,\mathsf{W}$$

oder
$$w\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos v}{\sin\varphi}\,\mathsf{S} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{\sin\varphi}\,\mathsf{T} - \operatorname{cotg} i \frac{r}{p}\sin u\,\mathsf{W}$$
$$w\frac{dL_0}{dt} = -(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \cos v + 2\frac{r}{p}\cos\varphi)\,\mathsf{S} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi(\sin v + \sec\varphi \sin E)\,\mathsf{T} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \frac{r}{p}\sin u\,\mathsf{W}$$

oder
$$w\frac{dM_0}{dt} = (\operatorname{cotg}\varphi \cos v - 2\frac{r}{p}\cos\varphi)\,\mathsf{S} - \operatorname{cotg}\varphi\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin v\,\mathsf{T}$$
$$w^2\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3kw}{\sqrt{a}}\frac{\sin\varphi}{p}\sin v\,\mathsf{S} - \frac{3kw}{\sqrt{a}}\frac{1}{r}\,\mathsf{T}$$
$$w = 20^d \quad \log 3kw = 0.013733$$
$$w = 40^d \quad \log 3kw = 0.314763.$$

In der letzten Formel wurde mit w^2 multipliziert, weil in μ eine doppelte Integration auszuführen ist; da auch das Resultat der ersten Integration zur Ermittelung von $\Delta\mu$ und Δa gebraucht wird, hat man dabei zu beachten, daß dann obiger Ausdruck $w\Delta\mu$ ergibt.

V. Läßt man die Oskulationsepoche auf $a - \frac{1}{2}w$ fallen, so berechne man obige $w\frac{di}{dt}, \ldots$ für die Zeitmomente

$$a - 2w, \quad a - w, \quad a + w, \quad a + 2w, \ldots a + nw,$$

bezeichne allgemein $w\frac{d\Omega}{dt} = f(a + iw)_\Omega$, $w^2\frac{d\mu}{dt} = f(a + iw)_\mu$, $\ldots$, dann bilde man das Differenzen- und Summenschema mit den Anfangsgliedern

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{I}}f(a - \tfrac{1}{2}w) &= -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}w) \\ {}^{\mathrm{II}}f(a) &= +\tfrac{1}{24}f(a - w) - \tfrac{17}{5760}(2f^{\mathrm{II}}(a - w) + f^{\mathrm{II}}(a)) \end{aligned}$$

und erhält schließlich für die Störungsbeträge bis zur Zeit $a + nw$:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= {}^{\mathrm{I}}f(a + nw)_\Omega - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a + nw)_\Omega + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a + nw)_\Omega - \cdots \\ w\Delta\mu &= {}^{\mathrm{I}}f(a + nw)_\mu - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a + nw)_\mu + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta L &= \Delta L_0 + {}^{\mathrm{II}}f(a + nw)_\mu + \tfrac{1}{12}f(a + nw)_\mu - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a + nw)_\mu + \cdots \\ \Delta M &= \Delta M_0 + {}^{\mathrm{II}}f(a + nw)_\mu + \tfrac{1}{12}f(a + nw)_\mu - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a + nw)_\mu + \cdots \end{aligned}$$

und für die neuen oskulierenden Elemente

$$\begin{aligned} i = i_0 + \Delta i, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega, \ldots, \qquad L &= L_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta L \\ M &= M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M. \end{aligned}$$

Zieht man eine Epoche von der Form $a + (n + \frac{1}{2})w$ vor, so wird hierfür:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= {}^{\mathrm{I}}f(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\Omega + \tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\Omega - \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\Omega + \cdots \\ \Delta L &= \Delta L_0 + {}^{\mathrm{II}}f(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\mu - \tfrac{1}{24}f(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\mu + \tfrac{17}{1920}f^{\mathrm{II}}(a + (n + \tfrac{1}{2})w)_\mu - \cdots \end{aligned}$$

Bei der Bildung der Werte $f(a + iw)$ für die einzelnen Zeitmomente kann man in verschiedener Weise verfahren. Man kann die Koeffizienten der störenden Komponenten mit den *ungestörten* Werten der Elemente und der Koordinaten u, v, r berechnen und begeht dann einen Fehler *zweiter* Ordnung in bezug auf die störenden Massen; dieser Weg hat den Vorteil, daß einige Faktoren konstant bleiben und die Koordinaten des gestörten Körpers in einem Zuge vorweg gerechnet werden können; er hat aber den Nachteil, daß die Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, was sich bei längerer Störungsrechnung immerhin im unregelmäßigen Verlauf der Differenzen und in der geringeren Exaktheit der Störungswerte bemerkbar machen wird; schlägt man ihn ein, so wird man wenigstens die Vorsicht gebrauchen, die Elemente zur Berechnung der Koordinaten und der Faktoren von Zeit zu Zeit, etwa alle Jahre, zu wechseln, wobei freilich einige Diskontinuität in den Differenzen nicht zu vermeiden sein wird. Der zweite strenge Weg ist der, die Elemente von Intervall zu Intervall zu wechseln, die Koeffizienten also mit ihren gestörten Werten anzusetzen; er setzt voraus, daß man die Rechnung für jedes Intervall zu Ende führt, ehe man das nächste beginnt, und daß man die Integration für jedes Intervall ausführt. Diese Art der Rechnung, die insbesondere von *Oppolzer* empfohlen worden ist, während man früher sich mit dem einfacheren Weg begnügte, hat den Vorteil, daß die Störungen zweiter Ordnung streng berücksichtigt werden, und er ist auch bei zweckmäßiger Anlage der Rechnung nicht erheblich unbequemer als der andere; man sollte sich daher, wenigstens bei strengen Rechnungen, an ihn gewöhnen. Bei

provisorischen Störungsrechnungen, die etwa mit noch ungenügenden Elementen vorgenommen werden müssen, kann aber immerhin der erste Weg eingeschlagen werden.

159. Beispiel. Störungen von (221) Eos durch Jupiter. Auf den Seiten 505 bis 507 ist der Anfang einer Störungsrechnung vollständig mitgeteilt, um für eine zweckmäßige Anordnung der Rechnung ein Muster zu geben; es ist dabei angenommen, daß von Intervall zu Intervall die Elemente gewechselt werden sollen, daß also eine strenge Berücksichtigung der Störungen höherer Ordnung beabsichtigt ist. Auf einem ersten Blatt (I) sind alle auf den gestörten Planeten bezüglichen Rechnungen enthalten, auf Blatt II die sich auf den störenden Körper beziehenden zugleich mit der Berechnung der störenden Komponenten und der Differenzialquotienten der Elemente; auf Blatt III sind die Differenzen- und Summenreihen gebildet und in der jeweils letzten Kolumne die genäherten Werte der Integrale eingesetzt, wie sie zur Berechnung der Ausdrücke für das nächste Intervall gebraucht werden. Die strenge Integration braucht man nur für die neue Oskulationsepoche durchzuführen.

Die Ausgangselemente sind:

Epoche und Oskulation 1888 April 16.0 M. Z. B.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 239^\circ\,23'\,56''.9 \\ \omega &= 187\ 55\ 11.5 \\ \Omega &= 142\ 38\ 43.1 \\ i &= 10\ 50\ 59.8 \end{aligned}\right\} 1890.0$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 5\ 54\ 3.5 \\ \mu &= 679''.1421 \\ \log a &= 0.478\,6973 \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \pi &= 330^\circ\,33'\,54''.6 \\ L_0 &= 209\ 57\ 51.5 \end{aligned}$$

Für die neue Oskulationsepoche 1888 Sept. 23.0 ergeben sich die Störungsbeträge in den Elementen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta i &= -6''.339 + \tfrac{1}{24}\,0''.894 = -6''.30 \\ \Delta\Omega &= -111''.206 - \tfrac{1}{24}\,6''.497 = -111''.48 = -1'\,51''.48 \\ \Delta\varphi &= -60''.447 - \tfrac{1}{24}\,0''.010 = -60''.45 = -1'\,0''.45 \\ \Delta\pi &= -1042''.020 - \tfrac{1}{24}\,14''.056 - \tfrac{17}{5760}\,7'' = -1042''.63 = -17'\,22''.63 \\ 40\,\Delta\mu &= -22''.7096 + \tfrac{1}{24}\,0''.0382 = -22''.7080 \\ \Delta\mu &= -0''.5677 \\ \Delta L_0 &= -36''.907 - \tfrac{1}{24}\,8''.450 = -37''.259 \\ \Delta\omega &= \Delta\pi - \Delta\Omega = -15'\,31''.15 \\ \Delta L &= -37''.259 - 43''.275 + \tfrac{1}{24}\,6''.274 + \tfrac{17}{1920}\,0''.4 = -1'\,20''.274. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mu_0(t - t_0) = 679''.1421 \times 160 = 30^\circ\,11'\,2''.736.$$

(Fortsetzung Seite 508.)

Blatt I. (221) Eos 1888 0^h M. Z. B.

Datum	März 27	Mai 6	Juni 15	Juli 25	Sept. 3	Okt. 13
μ	679".14	679".14	678".95	678".82	678".65	678".50
1890.0 L	206°11′29″	213°44′15″	221°16′53″	228°49′19″	236°21′36″	243°53′34″
1890.0 π	330 33 55	330 33 55	330 28 22	330 24 9	330 19 3	330 13 55
1890.0 Ω	142 38 43	142 38 43	142 38 13	142 37 44	142 37 11	142 36 30
1890.0 i	10 51 0	10 51 0	10 50 57	10 50 55	10 50 54	10 50 54
φ	5 54 3	5 54 3	5 53 41	5 53 26	5 53 10	5 52 55
μ	2.831 96	2.831 96	2.831 84	2.831 75	2.831 65	2.831 55
$k'' : \sqrt{\mu}$	0.718 05	0.718 05	0.718 17	0.718 26	0.718 36	0.718 46
$\sqrt{a}$	0.239 35	0.239 35	0.239 39	0.239 42	0.239 45	0.239 49
a	0.478 70	0.478 70	0.478 78	0.478 84	0.478 91	0.478 98
$\cos\varphi$	9.997 69	9.997 69	9.997 70	9.997 70	9.997 71	9.997 71
$\sin\varphi$	9.012 02	9.012 02	9.011 57	9.011 27	9.010 94	9.010 64
e''	4.326 45	4.326 45	4.326 00	4.325 70	4.325 36	4.325 06
M	235°37′34″	243°10′20″	250°48′31″	258°25′10″	266° 2′33″	273°39′39″
E	231 2 43	238 10 3	245 27 22	252 47 28	260 15 6	267 47 37
$\sin E$	9.890 78_n	9.929 21_n	9.958 87_n	9.980 11_n	9.993 68_n	9.999 68_n
$a\cos\varphi$	0.476 39	0.476 39	0.476 48	0.476 54	0.476 62	0.476 69
$\cos E$	9.798 45_n	9.722 17_n	9.618 46_n	9.471 08_n	9.228 71_n	8.585 45_n
$\cos E - \sin\varphi$	9.864 22_n	9.799 51_n	9.714 41_n	9.600 41_n	9.434 37_n	9.149 16_n
$r\sin v$	0.367 17_n	0.405 60_n	0.435 35_n	0.456 65_n	0.470 30_n	0.476 37_n
$r\cos v$	0.342 92_n	0.278 21_n	0.193 19_n	0.079 25_n	9.913 28_n	9.628 14_n
v	226°35′55″	233°17′ 7″	240°12′19″	247°14′54″	254°30′ 1″	261°55′39″
ω	187 55 12	187 55 12	187 50 9	187 46 25	187 41 52	187 37 25
u	54 31 7	61 12 19	68 2 28	75 1 19	82 11 53	89 33 4
r	0.505 90	0.501 63	0.496 77	0.491 83	0.486 39	0.480 70
p	0.474 08	0.474 08	0.474 18	0.474 24	0.474 33	0.474 40
$\cos v$	9.837 02_n	9.776 58_n	9.696 26_n	9.587 42_n	9.426 89_n	9.147 45_n
$\sin v$	9.861 27_n	9.903 97_n	9.938 42_n	9.964 82_n	9.983 91_n	9.995 67_n
$\cos u$	9.763 76	9.682 76	9.572 81	9.412 37	9.132 74	7.894 01
$\sin u$	9.910 79	9.942 68	9.967 29	9.984 99	9.995 96	9.999 99
$r : p$	0.031 82	0.027 55	0.022 59	0.017 59	0.012 06	0.006 30
$(r : p)\sin u$	9.942 61	9.970 23	9.989 88	0.002 58	0.008 02	0.006 29
$\sin i$	9.274 71	9.274 71	9.274 68	9.274 65	9.274 64	9.274 64
$\cos v + \cos E$	0.119 21_n	0.051 26_n	9.960 13_n	9.834 16_n	9.640 04_n	9.252 67_n
$\sec\varphi\sin E$	9.893 09_n	9.931 52_n	9.961 17_n	9.982 41_n	9.995 97_n	0.001 97_n
$\sin v + \sec\varphi\sin E$	0.178 50_n	0.219 00_n	0.250 97_n	0.274 73_n	0.291 01_n	0.299 86_n
$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$	8.712 15	8.712 15	8.711 69	8.711 39	8.711 06	8.710 75
$2r : p$	0.332 85	0.328 58	0.323 62	0.318 62	0.313 09	0.307 33
$(2r : p)\cos\varphi$	0.330 54	0.326 27	0.321 32	0.316 32	0.310 80	0.305 04
$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos v$	8.549 17_n	8.488 73_n	8.407 95_n	8.298 81_n	8.137 95_n	7.858 20_n
$\mathrm{tg}\frac{1}{2}i$	8.977 58	8.977 58	8.977 54	8.977 51	8.977 51	8.977 51
$(-3kw) : \sqrt{a}$	0.075 41_n	0.075 41_n	0.075 37_n	0.075 34_n	0.075 31_n	0.075 27_n
$\sin\varphi : p$	8.537 94	8.537 94	8.537 39	8.537 03	8.536 61	8.536 24
$\{i : \mathbf{W}\}$	9.795 58	9.710 31	9.595 40	9.429 96	9.144 80	7.900 31
$\{\Omega : \mathbf{W}\}$	0.667 90	0.695 52	0.715 20	0.727 93	0.733 38	0.731 65
$\{\varphi : \mathbf{S}\}$	9.863 58_n	9.906 28_n	9.940 72_n	9.967 12_n	9.986 20_n	9.997 96_n
$\{\varphi : \mathbf{T}\}$	0.121 52_n	0.053 57_n	9.962 43_n	9.836 46_n	9.642 33_n	9.254 96_n
$\{\pi : \mathbf{S}\}$	0.825 00	0.764 56	0.684 69	0.576 15	0.415 95	0.136 81
$\{\pi : \mathbf{T}\}$	1.166 48_n	1.206 98_n	1.239 40_n	1.263 46_n	1.280 07_n	1.289 22_n
$\{\pi : \mathbf{W}\}$	8.920 19	8.947 81	8.967 42	8.980 09	8.985 53	8.983 81
$\{L_0 : \mathbf{S}\}$	0.323 30_n	0.319 91_n	0.315 99_n	0.312 13_n	0.307 87_n	0.303 48_n
$\{L_0 : \mathbf{T}\}$	8.890 65_n	8.931 15_n	8.962 66_n	8.986 12_n	9.002 07_n	9.010 61_n
$\{\mu : \mathbf{S}\}$	8.474 62	8.517 32	8.551 18	8.577 19	8.595 83	8.607 18
$\{\mu : \mathbf{T}\}$	9.569 51_n	9.573 78_n	9.578 60_n	9.583 51_n	9.588 92_n	9.594 57_n
$\sqrt{p}$	0.237 04	0.237 04	0.237 09	0.237 12	0.237 16	0.237 20

Blatt II. Jupiter 1888 0^h M. Z. B.

Datum	März 27	Mai 6	Juni 15	Juli 25	Sept. 3	Okt. 13
1890.0 λ_1	$237^\circ 10' 45''$	$240^\circ 17' 32''$	$243^\circ 25' 5''$	$246^\circ 33' 25''$	$249^\circ 42' 36''$	$252^\circ 52' 40''$
1890.0 Ω	142 38 43	142 38 43	142 38 13	142 37 44	142 37 11	142 36 30
1890.0 β_1	+0 52 45.1	+0 49 30.6	+0 46 6.5	+0 42 33.2	+0 38 51.1	+0 35 1.1
$\lambda_1 - \Omega$	94 32 2	97 38 49	100 46 52	103 55 41	107 5 25	110 16 10
$\sin(\lambda_1 - \Omega)$	9.998 64	9.996 12	9.992 26	9.987 04	9.980 38	9.972 23
$\cos\beta_1$	— 5	— 5	— 4	— 3	— 3	— 2
$\cos(\lambda_1 - \Omega)$	$8.897\,89_n$	$9.124\,08_n$	$9.271\,97_n$	$9.381\,48_n$	$9.468\,17_n$	$9.539\,63_n$
i	$10^\circ 51' 0''$	$10^\circ 51' 0''$	$10^\circ 50' 57''$	$10^\circ 50' 55''$	$10^\circ 50' 54''$	$10^\circ 50' 54''$
$\sin i$	9.274 71	9.274 71	9.274 68	9.274 65	9.274 64	9.274 64
$\sin\beta_1$	8.185 94	8.158 40	8.127 49	8.092 64	8.053 13	8.008 01
$\cos i$	9.992 17	9.992 17	9.992 17	9.992 17	9.992 17	9.992 17
$\sin i \sin\beta_1$	7.460 65	7.433 11	7.402 17	7.367 29	7.327 77	7.282 65
$\cos i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega)$	9.990 76	9.988 24	9.984 39	9.979 18	9.972 52	9.964 38
$\cos B_1 \sin L_1$	9.992 04	9.989 44	9.985 52	9.980 24	9.973 50	9.965 29
$\cos B_1 \cos L_1$	$8.897\,84_n$	$9.124\,03_n$	$9.271\,93_n$	$9.381\,45_n$	$9.468\,14_n$	$9.539\,61_n$
$\cos i \sin\beta_1$	8.178 11	8.150 57	8.119 66	8.084 81	8.045 30	8.000 18
$-\sin i \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega)$	$9.273\,30_n$	$9.270\,78_n$	$9.266\,90_n$	$9.261\,66_n$	$9.254\,99_n$	$9.246\,85_n$
$\sin B_1$	$9.236\,94_n$	$9.236\,54_n$	$9.234\,80_n$	$9.231\,75_n$	$9.227\,35_n$	$9.221\,51_n$
r_1	0.730 59	0.729 73	0.728 82	0.727 87	0.726 88	0.725 85
$\cos B_1$	9.993 44	9.993 44	9.993 51	9.993 59	9.993 72	9.993 90
L_1	$94^\circ 36' 9''$	$97^\circ 45' 47''$	$100^\circ 56' 41''$	$104^\circ 8' 17''$	$107^\circ 20' 46''$	$110^\circ 34' 6''$
$L_1 - u$	40 5 2	36 33 28	32 54 13	29 6 58	25 8 53	21 1 2
$\sin(L_1 - u)$	9.808 82	9.774 98	9.734 98	9.687 15	9.628 35	9.554 67
$r_1 \cos B_1$	0.724 03	0.723 17	0.722 33	0.721 46	0.720 60	0.719 75
$\cos(L_1 - u)$	9.883 72	9.904 85	9.924 06	9.941 33	9.956 75	9.970 10
$\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u)$	0.607 75	0.628 02	0.646 39	0.662 79	0.677 35	0.689 85
r	0.505 90	0.501 63	0.496 77	0.491 83	0.486 39	0.480 70
$\eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u)$	0.532 85	0.498 15	0.457 31	0.408 61	0.348 95	0.274 42
$\xi_1 - r$	9.928 01	0.030 28	0.110 94	0.175 23	0.228 53	0.272 13
$\sin\theta$	9.987 00	9.976 18	9.959 88	9.936 23	9.901 45	9.850 63
$\zeta_1 = r_1 \sin B_1 = \varrho_1 \sin\vartheta$	$9.967\,53_n$	$9.966\,27_n$	$9.963\,62_n$	$9.959\,62_n$	$9.954\,23_n$	$9.947\,36_n$
$\varrho_1 \cos\vartheta$	0.545 85	0.521 97	0.497 43	0.472 38	0.447 50	0.423 79
$\cos\vartheta$	9.985 37	9.983 82	9.982 17	9.980 43	9.978 69	9.977 06
$1 : \varrho_1$	9.439 52	9.461 85	9.484 74	9.508 05	9.531 19	9.553 27
$1 : \varrho_1^2$	8.318 56	8.385 55	8.454 22	8.524 15	8.593 57	8.659 81
$1 : r_1^3$	7.808 23	7.810 81	7.813 54	7.816 39	7.819 36	7.822 45
K_1	8.158 17	8.251 11	8.341 42	8.429 42	8.513 60	8.591 56
$\xi_1 K_1$	8.765 92	8.879 13	8.987 81	9.092 21	9.190 95	9.281 41
$-r : \varrho_1^3$	$8.824\,46_n$	$8.887\,18_n$	$8.950\,99_n$	$9.015\,98_n$	$9.079\,96_n$	$9.140\,51_n$
$\xi_1 K_1 - r : \varrho_1^3$	$7.925\,16_n$	$7.151\,18_n$	7.897 89	8.298 98	8.544 13	8.723 98
$\eta_1 K_1$	8.691 02	8.749 26	8.798 73	8.838 03	8.862 55	8.865 98
$\zeta_1 K_1$	$8.125\,70_n$	$8.217\,38_n$	$8.305\,04_n$	$8.389\,04_n$	$8.467\,83_n$	$8.538\,92_n$
$k'' w m_1 \sqrt{p}$	2.369 01	2.369 01	2.369 06	2.369 09	2.369 13	2.369 17
S	$0.294\,17_n$	$9.520\,19_n$	0.266 95	0.668 07	0.913 26	1.093 15
T	1.060 03	1.118 27	1.167 79	1.207 12	1.231 68	1.235 15
W	$0.494\,71_n$	$0.586\,39_n$	$0.674\,10_n$	$0.758\,13_n$	$0.836\,96_n$	$0.908\,09_n$
$di : dt$	— 1".951	— 1".980	— 1".860	— 1".542	— 0".958	— 0".064
$d\Omega : dt$	— 14.542	— 19.139	— 24.508	— 30.623	— 37.128	— 43.625
·	+ 1.438	+ 0.267	— 1.613	— 4.317	— 7.933	— 12.334
·	— 15.190	— 14.853	— 13.496	— 11.055	— 7.482	— 3.091
$d\varphi : dt$	— 13.752	— 14.586	— 15.109	— 15.372	— 15.415	— 15.425
·	— 13.157	— 1.926	+ 8.946	+ 17.548	+ 21.341	+ 16.981
·	— 168.465	— 211.470	— 255.380	— 295.515	— 324.900	— 334.480
·	— 0.260	— 0.342	— 0.438	— 0.547	— 0.664	— 0.780
$d\pi : dt$	— 181.882	— 213.738	— 246.872	— 278.514	— 304.223	— 318.279
·	+ 4.144	+ 0.692	— 3.828	— 9.554	— 16.639	— 24.925
·	— 0.893	— 1.121	— 1.350	— 1.560	— 1.713	— 1.761
$d\bar{L}_0 : dt$	+ 2.991	— 0.771	— 5.616	— 11.661	— 19.016	— 27.466
·	— 0.0587	— 0.0109	+ 0.0658	+ 0.1759	+ 0.3229	+ 0.5016
·	— 4.2613	— 4.9210	— 5.5769	— 6.1749	— 6.6160	— 6.7565
$40 d\mu : dt$	— 4.3200	— 4.9319	— 5.5111	— 5.9990	— 6.2931	— 6.2549

Blatt III.

1888	i					Ω				
	f^{II}	f^{I}	$\frac{di}{dt}$	^{I}f	Δi	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\Omega}{dt}$	^{I}f	$\Delta\Omega$
März 27			− 1″.951					− 14″.542		
		− 0″.029		− 0″.001			− 4.597		+ 0″.192	
Mai 6	+ 0.091		− 1.980			− 0.772		− 19.139		
		+ 0.120		− 1.979			− 5.369		− 18.947	
Juni 15	+ 0.198		− 1.860		− 3″	− 0.746		− 24.508		− 30″
		+ 0.318		− 3.839			− 6.115		− 43.455	
Juli 25	+ 0.266		− 1.542		− 5	− 0.390		− 30.623		− 58
		+ 0.584		− 5.381			− 6.505		− 74.078	
Sept. 3	+ 0.310		− 0.958		− 6	+ 0.008		− 37.128		− 92
		+ 0.894		− 6.339			− 6.497		− 111.206	
Okt. 13			− 0.064		− 6			− 43.625		− 133
				− 6.403					− 154.831	
Nov. 22										

1888	φ					π				
	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\varphi}{dt}$	^{I}f	$\Delta\varphi$	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\pi}{dt}$	^{I}f	$\Delta\pi$
März 27			− 13″.752					− 181″.882		
		− 0″.834		+ 0″.035			− 31″.846		+ 1″.327	
Mai 6	+ 0.311		− 14.586			− 1″.278		− 213.738		
		− 0.523		− 14.551			− 33.134		− 212.411	
Juni 15	+ 0.260		− 15.109		− 22″	+ 1.492		− 246.872		− 333″
		− 0.263		− 29.660			− 31.642		− 459.283	
Juli 25	+ 0.220		− 15.372		− 37	+ 5.933		− 278.514		− 596
		− 0.043		− 45.032			− 25.709		− 737.797	
Sept. 3	+ 0.033		− 15.415		− 53	+ 11.653		− 304.223		− 888
		− 0.010		− 60.447			− 14.056		− 1042.020	
Okt. 13			− 15.425		− 68			− 318.279		− 1200
				− 75.872					− 1360.299	
Nov. 22										

1888	$\bar{L_0}$							
	f^{II}	f^{I}	$\frac{d\bar{L_0}}{dt}$	^{I}f	$\Delta\bar{L_0}$	$\int\int$	$L_0+\mu_0(t-t_0)$	L
März 27			+ 2″.991				206°11′29″	
		+ 3″.762		+ 0″.157				
Mai 6	− 1″.083		− 0.771				213 44 15	
		− 4.845		− 0.614				
Juni 15	− 1.200		− 5.616		− 3″	− 5″	221 17 1	221°16′53″
		− 6.045		− 6.230				
Juli 25	− 1.310		− 11.661		− 12	− 16	228 49 47	228 49 19
		− 7.355		− 17.891				
Sept. 3	− 1.095		− 19.016		− 27	− 32	236 22 33	236 21 34
		− 8.450		− 36.907				
Okt. 13			− 27.466		− 50	− 55	243 55 19	243 53 34
				− 64.373				
Nov. 22							251 28 5	

1888	μ						
	f^{II}	f^{I}	$40\frac{d\mu}{dt}$	^{I}f	^{II}f	$40\,\Delta\mu$	$\Delta\mu$
März 27			− 4″.3200				
		− 0″.6119		+ 0″.0255			
Mai 6	+ 327		− 4.9319		− 0″.1800		
		− 0.5792		− 4.9064			
Juni 15	+ 913		− 5.5111		− 5.0864	− 7.62	− 0″.19
		− 0.4879		− 10.4175			
Juli 25	+ 1938		− 5.9990		− 15.5039	− 13.38	− 0.33
		− 0.2941		− 16.4165			
Sept. 3	+ 3323		− 6.2931		− 31.9204	− 19.54	− 0.49
		+ 0.0382		− 22.7096			
Okt. 13			− 6.2549		− 54.6300	− 25.84	− 0.65
				− 28.9645			
Nov. 22					− 83.5945		

Die neuen oskulierenden Elemente werden also:

Epoche und Oskulation 1888 Sept. 23.0 M. Z. B.

$$\begin{aligned} L_0 &= 240^\circ\ 7'\ 34''.0 \\ \pi &= 330\ 16\ 32.0 \\ M_0 &= 269\ 51\ 2.0 \\ \omega &= 187\ 39\ 40.4 \\ \Omega &= 142\ 36\ 51.6 \\ i &= 10\ 50\ 53.5 \\ \varphi &= 5\ 53\ 3.0 \\ \mu &= 678''.5744 \\ \log a &= 0.4789394 \end{aligned}$$

Äquin. 1890.0

160. Variation der Elemente bei Kometenbahnen. Die bisher aufgestellten Formeln für die Variationen der Elemente sind durchaus bequem in der Anwendung auf Bahnen kleiner Planeten und kurzperiodischer Kometen. Handelt es sich dagegen um parabolische und langperiodische Kometenbahnen, so ist es vorzuziehen, statt der Störungen der mittleren Bewegung (oder der großen Halbachse) und der mittleren Anomalie (oder mittleren Länge) die Störungen der Periheldistanz q und der Durchgangszeit durchs Perihel $\mathfrak{T}$ zu berechnen. Unter $\mathfrak{T}$ für eine gewisse Zeit t ist dann jener Zeitpunkt zu verstehen, zu welchem der Perihelsdurchgang stattfinden würde, wenn von der Zeit t an keine störenden Kräfte mehr auf den Kometen einwirken würden.

Um für q und $\mathfrak{T}$ die Differenzialgleichungen aufzustellen, gehen wir aus von

$$q = \frac{p}{1+e} = a(1-e),$$

woraus folgt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{1+e}\frac{dp}{dt} - \frac{p}{(1+e)^2}\frac{de}{dt}$$

oder

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{1+e}\frac{dp}{dt} - \frac{q}{1+e}\frac{de}{dt}.$$

Wird hier $\frac{dp}{dt}$ aus 14) (Seite 490) und $\frac{de}{dt}$ aus 16) eingetragen, so ergibt sich zunächst:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2r\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{T}{1+e} - \frac{q}{1+e}\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\sin vS - \frac{q}{1+e}\frac{\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right)T$$

oder wenn man überall q einführt und wie früher

$$\frac{\sqrt{q(1+e)}}{k\sqrt{1+m}}S = (S), \qquad \frac{\sqrt{q(1+e)}}{k\sqrt{1+m}}T = (T)$$

setzt:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{1+e}\sin v\,(S) + \left(\frac{2r}{1+e} - \frac{q}{1+e}\frac{1}{e}\left(\frac{q(1+e)}{r} - \frac{r(1-e)}{q}\right)\right)(T).$$

Wird im Klammerausdruck rechts

$$\frac{q(1+e)}{r} = 1 + e\cos v$$

eingetragen, so folgt leicht:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{1+e}\sin v\,(S) + \frac{4r\sin\frac{1}{2}v^2}{(1+e)^2}\,(1+e\cos\tfrac{1}{2}v^2)\,(T)$$

oder nach Einführung der Seite 501 definierten **S**, **T**

$$w\frac{dq}{dt} = -\frac{q\sin v}{1+e}\,\mathbf{S} + \frac{4r\sin\frac{1}{2}v^2}{(1+e)^2}\,(1+e\cos\tfrac{1}{2}v^2)\,\mathbf{T}. \qquad 1)$$

Hieraus geht die Störung von q in Bogensekunden hervor und ist durch Multiplikation mit sin 1″ in Linearmaß zu übertragen.

Um die Gleichung für $\mathfrak{T}$ abzuleiten, setzen wir die mittlere Anomalie in der Gestalt an:

$$M = (t-\mathfrak{T})\mu,$$

woraus:

$$\mathfrak{T} = -\frac{M}{\mu} + t.$$

Wird dies vollständig nach der Zeit differenziert, so kommt:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{dM}{dt} + \frac{M}{\mu^2}\frac{d\mu}{dt} + 1$$

oder nach 29) (Seite 495):

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\overline{M}_0}{dt} + \frac{t-\mathfrak{T}}{\mu}\frac{d\mu}{dt}.$$

Wird weiter $\frac{d\overline{M}_0}{dt}$ aus 33) und $\frac{d\mu}{dt}$ aus 35) (Seite 497) eingetragen, so erscheint:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\cos v\,(S) + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\sin v\,(T) + \dfrac{2\sqrt{1-e^2}}{\mu}\dfrac{r}{p}\,(S) \\ -\dfrac{3e(t-\mathfrak{T})}{1-e^2}\sin v\,(S) - \dfrac{3q(t-\mathfrak{T})}{1-e}\dfrac{1}{r}\,(T) \end{cases}$$

oder wenn **S** und **T** eingetragen und $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} w\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = {} & \frac{2\sqrt{q}}{k(1-e)\sqrt{1+e}}\left(r - \frac{1+e}{2e}q\cos v - \frac{3}{2}\frac{k(t-\mathfrak{T})}{\sqrt{p}}e\sin v\right)\mathbf{S} \\ & + \frac{2\sqrt{q}}{k(1-e)\sqrt{1+e}}\left(\frac{1+e}{2e}\left(1+\frac{r}{p}\right)q\sin v - \frac{3}{2}\frac{k(t-\mathfrak{T})}{\sqrt{p}}\frac{p}{r}\right)\mathbf{T}. \end{aligned} \qquad 2)$$

Für die übrigen Elemente können die früheren Formeln beibehalten werden; doch ist es angezeigt, auch in ihnen die Periheldistanz einzuführen und die exzentrische Anomalie, die bei Bahnen dieser Art nicht gebraucht wird, zu beseitigen. Man erhält leicht:

$$w\frac{di}{dt} = \frac{r}{q(1+e)}\cos u\,\mathsf{W} \qquad 3)$$

$$w\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{q(1+e)}\frac{\sin u}{\sin i}\,\mathsf{W} \qquad 4)$$

$$w\frac{de}{dt} = \sin v\,\mathsf{S} + \frac{1}{e}\left(\frac{q(1+e)}{r} - \frac{r(1-e)}{q}\right)\mathsf{T} \qquad 5)$$

$$w\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\,\mathsf{S} + \frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{q(1+e)}\right)\sin v\,\mathsf{T} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\,\sin u\,\frac{r}{q(1+e)}\,\mathsf{W}. \qquad 6)$$

Mit *einer* Ausnahme sind diese Formeln durchaus zuverlässig und können auch unmittelbar dadurch, daß man $e = 1$ setzt, auf die Parabel angewendet werden. Die Ausnahme betrifft die Formel 2) für die Durchgangszeit durchs Perihel wegen des Divisors $1 - e$, der hier sehr klein wird und im Fall der Parabel verschwindet. Man muß daher die beiden Klammerausdrücke so umformen, daß der Faktor $(1 - e)$ aus ihnen heraustritt. Diese schwierige Aufgabe ist bereits in Nr. 146 (Seite 456 ff.) gelöst worden, denn nennt man obige Klammerausdrücke U' und V' und vergleicht sie mit den Seite 456 eingeführten Funktionen U und V, so findet man:

$$U' = U - \frac{1-e}{2e}\,q\cos v, \quad V' = V + \frac{1-e}{2e}\left(1+\frac{r}{p}\right)q\sin v.$$

Daß in beiden Problemen dieselben Ausdrücke auftreten, hat darin seinen Grund, daß diese in dr und rdv vorkommen. Für U und V erhält man aus den Seite 457 abgeleiteten Kombinationen derselben:

$$U = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\frac{1-e}{1+e}\left(+\cos\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v\,(1+m) + \cos\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v\,(1+n)\right)$$

$$V = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\frac{1-e}{1+e}\left(-\sin\tfrac{1}{2}v^2\,(1+m) + \cos\tfrac{1}{2}v^2\,(1+n)\right),$$

worin:

$$m = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^2}{1+e}\,\frac{1}{\xi} \qquad \xi \text{ und } \eta \text{ aus}$$

$$n = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^4}{1+e}\,\eta \qquad \text{Taf. XXVII.}$$

Setzt man:

$$f\sin(F - \tfrac{1}{2}v) = +m\sin\tfrac{1}{2}v$$
$$f\cos(F - \tfrac{1}{2}v) = +n\cos\tfrac{1}{2}v,$$

so wird

$$U = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\frac{1-e}{1+e}\,(\sin v + f\sin F)$$

$$V = \tfrac{1}{2}r\sin v\,\frac{1-e}{1+e}\,(\cos v + f\cos F)$$

und die Formel 2) läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$w\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{1+e}}\left[\frac{r\sin v}{1+e}\,(\sin v + f\sin F) - \frac{q\cos v}{e}\right]\mathsf{S}$$
$$+ \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{1+e}}\left[\frac{r\sin v}{1+e}\,(\cos v + f\cos F) + \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{q\sin v}{e}\right]\mathsf{T}$$

oder nach kurzer Reduktion etwas einfacher:

$$w\frac{d\Im}{dt} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{q}\,r}{k\sqrt{1+e}\,(1+e)}\left(\sin v \cdot f\sin F - \cos 2v - \dfrac{\cos v}{e}\right)\mathbf{S} \\ \dfrac{\sqrt{q}\sin v}{k\sqrt{1+e}}\left(\dfrac{r}{1+e}\cdot f\cos F + \dfrac{2q}{e}\right)\mathbf{T}. \end{cases} \qquad 2\,\text{a})$$

Rechnet man die Störungen unter Zugrundelegung einer parabolischen Bahn, wobei man dann Störungen zweiter Ordnung vernachlässigen muß, so nehmen die Formeln 1)—6) hierfür eine einfachere Gestalt an:

Formeln für die Parabel:

$$w\frac{dq}{dt} = -\tfrac{1}{2}q\sin v\,\mathbf{S} + q\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^2(1+\cos\tfrac{1}{2}v^2)\,\mathbf{T}$$

$$w\frac{d\Im}{dt} = \frac{\sqrt{q}}{2k\sqrt{2}}r(f\sin F\sin v - \cos 2v - \cos v)\,\mathbf{S} + \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{2}}\sin v\left(f\cos F\cdot\frac{r}{2} + 2q\right)\mathbf{T}$$

$$w\frac{di}{dt} = \frac{r}{2q}\cos u\,\mathbf{W}$$

$$w\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{2q}\frac{\sin u}{\sin i}\,\mathbf{W}$$

$$w\frac{de}{dt} = \sin v\,\mathbf{S} + \frac{2q}{r}\,\mathbf{T}$$

$$w\frac{d\pi}{dt} = -\cos v\,\mathbf{S} + \left(1+\frac{r}{2q}\right)\sin v\,\mathbf{T} + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}i\sin u\,\frac{r}{2q}\,\mathbf{W}$$

$$\frac{r}{2q} = \tfrac{1}{2}\sec\tfrac{1}{2}v^2.$$

Die Hilfsgrößen f und F gehen hier, da (Seite 495)

$$m = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^2, \qquad n = \tfrac{1}{5}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^4$$

wird, hervor aus:

$$f\sin(F-\tfrac{1}{2}v) = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^2\sin\tfrac{1}{2}v,$$
$$f\cos(F-\tfrac{1}{2}v) = \tfrac{1}{5}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^4\cos\tfrac{1}{2}v.$$

Die Werte von q, T, e erhält man mit 206264.8 multipliziert, hat also zum Schluß noch mit dieser Zahl zu dividieren.

Die Störungen parabolischer und parabelnaher Bahnen durch die Variation der Elemente zu berechnen, ist im allgemeinen nicht zu empfehlen, da man fast immer rascher und sicherer zum Ziel kommt, wenn man die Störungen in den Koordinaten rechnet, nämlich für kurze Zeiten in den rechtwinkligen und für lange in den Polarkoordinaten (siehe Abschnitt XXXII und XXXI).

161. Verfahren bei Bahnen von geringer Exzentrizität. Die Betrachtung der Formeln für $d\pi$ und dM_0 zeigt, daß bei nahe kreisförmigen Bahnen die Störungen in diesen Elementen wegen des Divisors $\sin\varphi$ sehr bedeutende Werte annehmen müssen. Da kleine Exzentrizitäten bei den kleinen Planeten häufig vorkommen, haben wir deshalb schon dL_0 statt dM_0 eingeführt und dadurch in diesem Element den Mißstand beseitigt; bei $d\pi$ und natürlich ebenso bei $d\omega$ ist er aber

geblieben. Wird nun die Exzentrizität sehr klein, so ist es nicht weiter möglich, von der Formel für $d\pi$ Gebrauch zu machen, sondern es muß ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Das von *Tietjen* angegebene (siehe *P. V. Neugebauer* Diss. Breslau 1901) hat sich gut bewährt und besitzt auch, wenn es nicht unbedingt angewendet werden muß, einige Vorzüge gegenüber dem früher besprochenen. Es beruht auf der Anwendung von $(\sin\varphi \sin\chi)$ und $(\sin\varphi \cos\chi)$*) als neuen Elementen, deren Störungen ermittelt werden. Schreibt man die Gleichungen von $d\chi$ und $d\varphi$ (Seite 497) in der Form:

$$w \sin\varphi \frac{d\chi}{dt} = -\cos v\,\mathsf{S} + (\sin v + \sec\varphi \sin E)\,\mathsf{T}$$
$$w \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \sin v\,\mathsf{S} + (\cos v + \cos E)\,\mathsf{T}$$

und verbindet sie durch leicht ersichtliche Operationen, so erscheint:

$$w \frac{d(\sin\varphi \sin\chi)}{dt} = -\cos(\chi + v)\,\mathsf{S} + \sin(\chi + v)\,\mathsf{T} + (\cos E \sin\chi + \sec\varphi \sin E \cos\chi)\,\mathsf{T}$$
$$w \frac{d(\sin\varphi \cos\chi)}{dt} = +\sin(\chi + v)\,\mathsf{S} + \cos(\chi + v)\,\mathsf{T} + (\cos E \cos\chi - \sec\varphi \sin E \sin\chi)\,\mathsf{T}.$$

Nun ist:

$$\sec\varphi \sin E = \frac{r}{p} \sin v$$
$$\cos E = \frac{r}{p}(\cos v + \sin\varphi)$$

also wird:

$$\cos E \sin\chi + \sec\varphi \sin E \cos\chi = \frac{r}{p}\sin(\chi + v) + \frac{r}{p}\sin\varphi \sin\chi$$
$$\cos E \cos\chi - \sec\varphi \sin E \sin\chi = \frac{r}{p}\cos(\chi + v) + \frac{r}{p}\sin\varphi \cos\chi,$$

und daher, wenn man die Elemente $\sin\varphi \sin\chi$ und $\sin\varphi \cos\chi$ mit Φ und Ψ bezeichnet und $\chi + v = \nu'$ setzt:

$$w \frac{d\Phi}{dt} = -\cos\nu'\,\mathsf{S} + \sin\nu'\left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathsf{T} + \frac{r}{p}\Phi\,\mathsf{T}$$
$$w \frac{d\Psi}{dt} = +\sin\nu'\,\mathsf{S} + \cos\nu'\left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathsf{T} + \frac{r}{p}\Psi\,\mathsf{T}. \qquad 1)$$

Kann man sich auf Störungen erster Ordnung beschränken, so ist die Anwendung dieser Formeln überaus bequem, denn es wird dann erlaubt sein, rechter Hand π_0 statt χ, d. h. für ν' die Länge in der Bahn zu gebrauchen. Nach der Integration erhält man $\Delta\Phi$ und $\Delta\Psi$ und mittels dieser die üblichen Elemente π und φ für die neue Oskulationsepoche durch folgendes Verfahren. Es ist, da $\chi_0 = \pi_0$ und $\Delta\Phi$ und $\Delta\Psi$ aus der Integration in Sekunden ausgedrückt hervorgehen:

$$\sin\varphi \sin\chi = \sin\varphi_0 \sin\pi_0 + \Delta\Phi \sin 1''$$
$$\sin\varphi \cos\chi = \sin\varphi_0 \cos\pi_0 + \Delta\Psi \sin 1'';$$

*) *Tietjen* selbst bedient sich der Elemente $\sin\varphi \sin\omega$ und $\sin\varphi \cos\omega$, es wurden aber obige vorgezogen, weil bei ihnen der Einfluß der Störungen zweiter Ordnung ein geringerer ist.

entnimmt man die Hilfsgrößen n und N den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \Delta\Phi \cdot \sin 1'' \\ n \cos N &= \Delta\Psi \cdot \sin 1'' \end{aligned}\right\}$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi \sin(\chi - \pi_0) &= n \sin(N - \pi_0) \\ \sin\varphi \cos(\chi - \pi_0) &= \sin\varphi_0 + n \cos(N - \pi_0) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

woraus $\Delta\chi = \chi - \pi_0$ und φ mit Sicherheit bestimmt werden können, wenn man siebenstellige Logarithmen benutzt und sich zur Ermittelung von $\sin\varphi_0 + n\cos(N - \pi_0)$ der Additionslogarithmen oder eines trigonometrischen Verfahrens bedient. Weiter wird nach Gl. 28) (Seite 495)

$$\Delta\omega = \Delta\chi - \cos i\,\Delta\Omega$$

oder nach Gl. 27)

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega &= \Delta\chi - \cos i\,\Delta\Omega \\ \Delta\pi &= \Delta\chi + 2\sin\tfrac{1}{2}i^2\,\Delta\Omega, \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

womit die Störungen der Elemente ω oder π bestimmt sind.

Da

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \sin\varphi\cos\chi\frac{d\chi}{dt} + \cos\varphi\sin\chi\frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\sin\varphi\sin\chi\frac{d\chi}{dt} + \cos\varphi\cos\chi\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

so wird auch mit Vernachlässigung von Störungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \sin\varphi\cos\chi\cdot\Delta\chi + \cos\varphi\sin\chi\cdot\Delta\varphi &= \Delta\Phi = n''\sin N \\ -\sin\varphi\sin\chi\cdot\Delta\chi + \cos\varphi\cos\chi\cdot\Delta\varphi &= \Delta\Psi = n''\cos N \end{aligned}$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi\cdot\Delta\varphi &= n''\cos(N - \chi) \\ \sin\varphi\cdot\Delta\chi &= n''\sin(N - \chi) \\ \Delta\omega &= \Delta\chi - \cos i\cdot\Delta\Omega. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Hierin ist in erster Näherung $\chi = \pi_0$ zu setzen und in zweiter $\chi = \pi_0 + \Delta\chi$.

Will man Störungen höherer Ordnung nicht übergehen, so muß man für jedes Intervall $\Delta\chi$ aus 4) bestimmen und in 1) $\nu' = \pi_0 + \Delta\chi + v$ setzen, sowie natürlich in den letzten Gliedern die gestörten Werte von Φ und Ψ. Dieses Verfahren ist ziemlich umständlich und man wird daher in diesem Falle von den Gl. 1) nur Gebrauch machen, wenn es unbedingt geboten ist, d. h. bei sehr kleinen Exzentrizitäten, während man sonst die früheren Formeln vorziehen wird. Bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung aber verdienen die Formeln 1) allgemein angewendet zu werden, da sie leichter zu berechnen sind als die früheren für $d\varphi$ und $d\pi$ oder $d\omega$.

Hat man $\Delta\chi$ nach der hier dargelegten Methode bestimmt, dann ist es auch nicht nötig, statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge einzuführen, denn man kann mittels $\Delta\chi$ für erstere einen hinlänglich sicheren Ausdruck aufstellen. Nach Gl. 33) (Seite 496) ist nämlich

$$w\frac{d\overline{M}_0}{dt} = -\cos\varphi\, w\frac{d\chi}{dt} - 2\cos\varphi\frac{r}{p}\mathsf{S},$$

und daher

$$\Delta\overline{M}_0 = -\cos\varphi\,\Delta\chi - \int 2\cos\varphi\frac{r}{p}\mathsf{S}\,dt. \quad 5)$$

Rechnet man also

$$w\frac{dM_0'}{dt} = -2\cos\varphi\,\frac{r}{p}\,\mathsf{S},$$

so wird

$$\Delta\overline{M}_0 = +\Delta M_0' - \cos\varphi\,\Delta\chi$$

und

$$M = M_0 + \mu_0(t-t_0) + \Delta M_0' - \cos\varphi\,\Delta\chi + \iint\frac{d\mu}{dt}\,dt^2.$$

Eine Zusammenstellung der Formeln geben wir am Schluß der nächsten Nummer.

162. Verfahren bei Bahnen von sehr geringer Neigung. Die Differenzialgleichung zur Bestimmung der gestörten Länge des Knotens

$$w\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i}\,\mathsf{W}$$

wird bei sehr kleinen Neigungen in der Anwendung beschwerlich, da die Störungsbeträge rasch zu sehr erheblichen Beträgen anwachsen. Die nächstliegende Abhilfe ist die, die Elemente ω, i, Ω auf eine andere Fundamentalebene etwa den Äquator zu beziehen und nach Ausführung der Integration wieder auf die Ekliptik zurückzugehen. Man kann aber auch leicht eine Umformung der Gleichungen angeben, bei der dies vermieden werden kann. Führt man nämlich, wie bei der Bahnverbesserung (Seite 435) die durch

$$\begin{aligned} d\nu &= \sin\omega\,\sin i\,d\Omega + \cos\omega\,di \\ d\lambda &= \cos\omega\,\sin i\,d\Omega - \sin\omega\,di \\ d\chi &= \qquad\cos i\,d\Omega + d\omega \end{aligned} \qquad 1)$$

definierten Differenziale ein (sie sind dort mit $d\mathsf{p}$, $d\mathsf{q}$, $d\mathsf{s}$ bezeichnet, welche Buchstaben im gegenwärtigen Abschnitt bereits in anderer Bedeutung vorkommen), so erhält man dafür aus den Gleichungen

$$w\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\sin u\,\mathsf{W}$$

$$w\,\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos u\,\mathsf{W}$$

sofort:

$$\begin{aligned} w\,\frac{d\nu}{dt} &= \frac{r}{p}\cos v\,\mathsf{W} \\ w\,\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{r}{p}\sin v\,\mathsf{W}, \end{aligned} \qquad 2)$$

aus denen die Störungsbeträge $\Delta\nu$ und $\Delta\lambda$ ermittelt werden können. Dann geben die Gl. D. (Seite 443)

$$\begin{aligned} \Delta i &= \cos\omega\cdot\Delta\nu - \sin\omega\cdot\Delta\lambda \\ \sin i\cdot\Delta\Omega &= \sin\omega\cdot\Delta\nu + \cos\omega\cdot\Delta\lambda \end{aligned}$$

wobei allerdings nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt sind. Die dritte Gleichung in 1) ist uns schon Seite 495 Gl. 28) entgegengetreten und in der vorigen Nummer benutzt worden. Geometrisch bedeuten die $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, wie schon früher

auseinandergesetzt, die Drehungsgeschwindigkeiten um die Achsen eines Systems, dessen ξ-Achse durch das Perihel geht, dessen η-Achse in der Bahnebene in 90° wahrer Anomalie liegt und dessen ζ-Achse durch den Nordpol der Bahnebene geht.

Zum Schluß dieses Abschnittes sammeln wir die in den letzten Nummern erhaltenen Formeln mit dem Bemerken, daß die Anwendung dieses Systems, welches sich an die Formelgruppen I.—III. Seite 502 anschließt, vor den Formeln IV. Seite 502 rechnerisch den Vorzug verdient, wenn es sich nur um Störungen erster Ordnung handelt, etwa mit der Modifikation, daß man die Formeln für i und Ω aus IV. beibehält, wenn die Neigung *nicht* sehr klein ist; außerdem bietet es den Vorteil, nicht zu versagen, wenn die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind.

$$\nu' = \pi + v$$

IV[a])

$$w\frac{d\Phi}{dt} = -\cos\nu' \cdot \mathsf{S} + \sin\nu' \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathsf{T} + \frac{r}{p}\sin\varphi\,\sin\pi\,\mathsf{T}$$

$$w\frac{d\Psi}{dt} = +\sin\nu' \cdot \mathsf{S} + \cos\nu' \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathsf{T} + \frac{r}{p}\sin\varphi\,\cos\pi\,\mathsf{T}$$

$$w\frac{dM_0'}{dt} = -\,2\cos\varphi\,\frac{r}{p}\,\mathsf{S}$$

$$w\frac{d\nu}{dt} = \frac{r}{p}\cos v \cdot \mathsf{W}$$

$$w\frac{d\lambda}{dt} = \frac{r}{p}\sin v \cdot \mathsf{W}$$

$$w^2\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3kw}{\sqrt{a}}\frac{\sin\varphi}{p}\sin v\,\mathsf{S} - \frac{3kw}{\sqrt{a}}\frac{1}{r}\,\mathsf{T}$$

$$w = 20^d,\quad \log 3kw = 0.013\,733$$
$$w = 40^d,\quad \log 3kw = 0.314\,763$$

$$n\sin N = \Delta\Phi\,\sin 1''$$
$$n\cos N = \Delta\Psi\,\sin 1''$$

$$\sin\varphi_1\,\sin(\chi - \pi_0) = n\sin(N - \pi_0)$$
$$\sin\varphi_1\,\cos(\chi - \pi_0) = \sin\varphi_0 + n\cos(N - \pi_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0, \qquad \Delta\chi = \chi - \pi_0$$
$$\Delta\omega = \Delta\chi - \cos i\,\Delta\Omega, \qquad \Delta\pi = \Delta\chi + 2\sin\tfrac{1}{2}i^2\,\Delta\Omega$$

$$M = M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M_0' - \cos\varphi\,\Delta\chi + \iint\frac{d\mu}{dt}\,dt^2$$

$$\Delta i = \cos\omega \cdot \Delta\nu - \sin\omega \cdot \Delta\lambda$$
$$\sin i\,\Delta\Omega = \sin\omega \cdot \Delta\nu + \cos\omega \cdot \Delta\lambda.$$

163. Variation hyperbolischer Elemente. Es kommen Fälle vor, wo man die Störungen hyperbolischer Elemente berechnen muß; zwar die wenigen wirklich konstatierten Hyperbelbahnen, welche von Kometen um die Sonne beschrieben werden, würden hierzu keinen Anlaß geben, da man bei ihnen entweder von den Formeln für die Parabel Gebrauch macht oder noch zweckmäßiger die Störungen in den Koordinaten rechnet; aber diejenigen kurzperiodischen Kometen, welche zeitweise in

die nächste Umgebung eines großen Planeten insbesondere des Jupiter kommen, beschreiben um diesen in der Regel Hyperbeln, deren Störungen durch die Sonne man berechnen muß, wenn man für die Dauer der Jupitersnähe diesen als Hauptkörper und die Sonne als störenden einführt. Wir stellen die Formeln daher auch für die Hyperbel auf, behalten aber hier die Sonne als Hauptkörper bei und nehmen die Übertragung auf Jupiter erst später vor.

Die Bewegung in der Hyperbel von der reellen Halbachse $a = -\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ positiv) und der Exzentrizität $e = \sec\psi$ wird nach Nr. 60 durch folgende Formeln beschrieben:

$$\mu = \frac{\text{Mod. } k}{\mathfrak{a}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Mod } e \operatorname{tg} F - \log\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}F) = \mu(t-T) = N$$

$$r\sin(\mathfrak{s}-\chi) = r\sin v = p\operatorname{cotg}\psi\operatorname{tg}F = \mathfrak{a}\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}F$$

$$r\cos(\mathfrak{s}-\chi) = r\cos v = p\operatorname{cotg}\psi^2(e-\sec F) = \mathfrak{a}(e-\sec F)$$

oder

$$\begin{cases} r = \mathfrak{a}(e\sec F - 1) \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\psi\operatorname{tg}\frac{1}{2}F. \end{cases}$$

$t - T$ ist die seit dem Perihelsdurchgang verflossene Zeit; der Winkel χ zeigt die Lage des Perihels an und wird wie $\mathfrak{s}$ in der momentanen Bahnebene von einer Richtung an gerechnet, die von der Knotenlinie aus um Ω in der $\xi\eta$-Ebene nach rückwärts liegt.

Für die Differenzialquotienten von r und $\mathfrak{s}$ nach der Zeit hat man wie bei der Ellipse die Ausdrücke:

$$\frac{\sqrt{p}}{k}\frac{dr}{dt} = e\sin(\mathfrak{s}-\chi)$$

$$\frac{\sqrt{p}}{k}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = e\cos(\mathfrak{s}-\chi) + 1$$

und erhält also wie dort (Seite 491)

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\sqrt{p}}{k}\frac{\cos(\mathfrak{s}-\chi)}{e}S + \frac{\sqrt{p}}{k}\frac{\sin(\mathfrak{s}-\chi)}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)T$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{k}\sin(\mathfrak{s}-\chi)S + \frac{\sqrt{p}}{k}\left(\frac{r}{p}e\sin(\mathfrak{s}-\chi)^2 + 2\cos(\mathfrak{s}-\chi)\right)T$$

oder wenn wieder

$$\frac{\sqrt{p}}{k}S = (S), \qquad \frac{\sqrt{p}}{k}T = (T)$$

gesetzt und in der zweiten Formel

$$\frac{r}{p} = \frac{1}{1+e\cos(\mathfrak{s}-\chi)} \quad \text{und} \quad \frac{e+\cos(\mathfrak{s}-\chi)}{1+e\cos(\mathfrak{s}-\chi)} = \sec F \text{ (Seite 202)}$$

beachtet wird:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\cos(\mathfrak{s}-\chi)}{e}(S) + \frac{\sin(\mathfrak{s}-\chi)}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)(T) \qquad 1)$$

$$\frac{de}{dt} = \sin(\mathfrak{s}-\chi)(S) + (\cos(\mathfrak{s}-\chi) + \sec F)(T). \qquad 2)$$

Ferner ergibt sich genau wie bei der Ellipse

$$-\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{2e}{p}\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(S) + \frac{2}{r}\,(T) \qquad 3)$$

und daraus

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{3\mu\mathfrak{a}e}{p}\sin(\mathfrak{s}-\chi)\,(S) + \frac{3\mu\mathfrak{a}}{r}\,(T). \qquad 4)$$

Um endlich die Differenzialgleichung für N aufzustellen, gehen wir von den Gleichungen

$$N = \operatorname{Mod} e\operatorname{tg}F - \log\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}F)$$

und

$$r = \mathfrak{a}(e\sec F - 1)$$

aus, die nach den für die Variation der Elemente geltenden Grundsätzen (Seite 490) differenziert auf die folgenden führen:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\operatorname{Mod} e\,\frac{1}{\cos F^2} - \operatorname{Mod}\frac{1}{\cos F}\right)\frac{dF}{dt} + \operatorname{Mod}\operatorname{tg}F\frac{de}{dt} = \frac{\operatorname{Mod}}{\cos F}\,\frac{r}{\mathfrak{a}}\,\frac{dF}{dt} + \operatorname{Mod}\operatorname{tg}F\frac{de}{dt}$$

$$0 = \mathfrak{a}e\,\frac{\sin F}{\cos F^2}\,\frac{dF}{dt} + \mathfrak{a}\sec F\frac{de}{dt} + \frac{r}{\mathfrak{a}}\,\frac{d\mathfrak{a}}{dt}.$$

Wird hieraus $\frac{dF}{dt}$ eliminiert, so folgt:

$$\frac{dN}{dt} = -\operatorname{Mod}\frac{r}{\mathfrak{a}}\,\frac{r\cos F}{e\sin F}\,\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\,\frac{d\mathfrak{a}}{dt} - \operatorname{Mod}\left(\frac{r}{\mathfrak{a}}\,\frac{1}{e\sin F} - \operatorname{tg}F\right)\frac{de}{dt}$$

oder wenn

$$\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\,\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{\mu\mathfrak{a}}\,\frac{d\mu}{dt}$$

eingetragen wird, nach einfacher Reduktion:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{Mod} r\sin\psi}{\mu\mathfrak{a}\sin v}\,\frac{d\mu}{dt} - \operatorname{Mod}\sin\psi\operatorname{cotg}v\,\frac{de}{dt}. \qquad 5)$$

Ersetzt man hier $d\mu$ und de durch 4) und 2) und beachtet, daß aus $r\cos v = \mathfrak{a}(e - \sec F)$ und $r = \mathfrak{a}e\sec F - \mathfrak{a}$ folgt:

$$\cos v\sec F = 1 - \frac{r}{p}\sin v^2,$$

so ergibt sich:

$$\frac{dN}{dt} = \operatorname{Mod}\sin\psi\left(\frac{2re}{p} - \cos v\right)(S) + \operatorname{Mod}\sin\psi\sin v\left(1 + \frac{r}{p}\right)(T). \qquad 6)$$

Man wird also etwas bequemer nach 5) rechnen unter Benutzung der vorher erhaltenen $d\mu$ und de oder noch besser nach:

$$\frac{dN}{dt} = \operatorname{Mod}\operatorname{tg}\psi\,\frac{d\chi}{dt} + \operatorname{Mod}\operatorname{tg}\psi\,\frac{2r}{p}\,(S), \qquad 7)$$

das sich durch Vergleichung von 6) mit 1) ergibt, und die vorherige Berechnung von $d\chi$ voraussetzt. Wird $N = \mu(t - T)$ *vollständig* nach der Zeit differenziert

$$\frac{dN}{dt} = (t - T)\,\frac{d\mu}{dt} - \mu\,\frac{dT}{dt} + \mu,$$

so sind die beiden ersten Glieder rechts durch die bisher aufgestellten Gleichungen 5), 6) oder 7) für den Bogen N gegeben und sollen kurz mit $\frac{d\mathsf{N}}{dt}$ bezeichnet werden, so daß also:

$$\frac{d\mathsf{N}}{dt} = \text{Mod tg}\,\psi\,\frac{d\chi}{dt} + \text{Mod tg}\,\psi\,\frac{2r}{p}\,(S) \qquad 8)$$

und dann

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d\mathsf{N}}{dt} + \mu$$

ist. Hierin stellt μ den durch Integration aus 4) gewonnenen Wert dar, muß also mit

$$\mu = \mu_0 + \int \frac{d\mu}{dt}\,dt$$

bewertet werden. Die Gesamtänderung des Bogens N wird hiernach:

$$\mu_0(t-T) + \int \frac{d\mathsf{N}}{dt}\,dt + \iint \frac{d\mu}{dt}\,dt^2. \qquad 9)$$

Die die Bahnlage bestimmenden Gleichungen bleiben natürlich dieselben, wie bei der Ellipse und ebenso wird wie dort die Ergänzung des Bogens χ zur Länge des Perihels gefunden.

Variation der Elemente für die Hyperbel.

$$\mathsf{S} = \frac{w\,(S)}{\sin 1''}, \qquad \mathsf{T} = \frac{w(T)}{\sin 1''}, \qquad \mathsf{W} = \frac{w\,(W)}{\sin 1''}$$

$$w\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos u\,\mathsf{W}$$

$$w\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i}\,\mathsf{W}$$

$$w\frac{de}{dt} = \sin v\,\mathsf{S} + (\cos v + \sec F)\,\mathsf{T}$$

$$w\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\,\mathsf{S} + \frac{\sin v}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathsf{T}$$

$$w\frac{d\pi}{dt} = w\frac{d\chi}{dt} + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}i\,\frac{r}{p}\sin u\,\mathsf{W}$$

$$w\frac{d\mathsf{N}}{dt} = \text{Mod tg}\,\psi\,w\frac{d\chi}{dt} + \text{Mod tg}\,\psi\,\frac{2r}{p}\,\mathsf{S}$$

$$w^2\frac{d\mu}{dt} = \frac{3\mu\,\mathsf{a}\,e\,w}{p}\sin v\,\mathsf{S} + \frac{3\mu\,\mathsf{a}\,w}{r}\,\mathsf{T}.$$

Abschnitt XXXI.

Berechnung der speziellen Störungen in den Polarkoordinaten.

164. Aufstellung der Grundgleichungen. Es ist, namentlich von *Hansen*, mit Nachdruck betont worden, daß die Berechnung der Störungen in den Polarkoordinaten entschiedene Vorteile gegenüber der Variation der Elemente besitze. An Gründen werden geltend gemacht, daß man Koordinatenstörungen nur *drei* gegen *sechs* bei den Elementen zu rechnen habe, daß die Koordinatenstörungen kleiner sind als die Elementenstörungen und daß infolge dessen auch die Störungen höherer Ordnung einen geringeren Einfluß bei ihnen haben, endlich daß das Verfahren wegen größerer Konvergenz der auftretenden Summationen eine höhere Genauigkeit besitze. Diese Gründe treffen zu, aber es steht ihnen ein Nachteil der Koordinatenstörungen gegenüber, der trotzdem der Variation der Elemente die größere Verwendbarkeit sichert, nämlich der, daß der Übergang von den Koordinaten- zu den Elementenstörungen nur durch langwierige und penible Rechnung zu erreichen ist; da aber oskulierende Elementensysteme für die Zwecke der Ephemeridenrechnung und der Bahnverbesserung immer die zweckmäßigste Grundlage bilden, so ist dieser Übergang nicht zu vermeiden. Bei der Methode der Variation der Elemente dagegen ist man ohne besondere Rechnung im Stande, die oskulierenden Elemente für jeden Zeitpunkt anzugeben. Aus diesem Grunde wird in der rechnerischen Praxis die Variation der Elemente bevorzugt mit Ausnahme von zwei Fällen, wo ihre Vorzüge nicht zur Geltung kommen und daher die zweifellos kürzere und bequemere Rechnung der Koordinatenstörungen eingeschlagen wird; nämlich 1) wenn ein sehr langer Zeitraum, in welchem keine Beobachtungen vorkommen, durch Störungsrechnung zu überbrücken ist, 2) wenn es sich um die Störungen eines langperiodischen Kometen während seiner Sichtbarkeitsdauer handelt; hier wird nämlich, wie wir schon Seite 511 erwähnt, die Variation der Elemente unbequem, während die Methode der Polarkoordinaten gerade die Störungen des Hauptelementes, der Durchgangszeit durch das Perihel, mit besonderer Einfachheit ergibt.

Den naturgemäßen Ausgangspunkt für die Ableitung der zugrunde zu legenden Differenzialgleichungen bilden auch hier wieder die Gleichungen (siehe Seite 488):

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= S \\ \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{ds}{dt}\right)}{dt} &= T \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= W, \end{aligned} \qquad 1)$$

in deren letzter wir statt der Drehung um den Radiusvektor (der ξ-Achse) die Beschleunigung längs der ζ-Achse direkt eingeführt haben. Es sei daran erinnert, daß s die Länge des gestörten Planeten in seiner instantanen Bahn bedeutet und daß S, T, W die Komponenten der störenden Kraft längs des Radiusvektors, senkrecht darauf in der instantanen Bahnebene, und senkrecht zu dieser letzteren sind. *Hansen* hat die beiden ersten Gleichungen, welche die Bewegung in der instantanen Bahnebene geben, beibehalten und statt der dritten eine andere eingeführt, welche die Störung in einer zur festen Bahnebene der Anfangsepoche senkrechten Achse gibt, woraus dann sofort die Breitenstörung in bezug auf die ungestörte Bahnebene folgt. Es haben aber *Brünnow* und dann *Tietjen* nachgewiesen, daß es rechnerisch zweckmäßiger ist, auch statt der Bewegung in der instantanen Ebene die in derselben festen, ungestörten Bahnebene zu betrachten. Wir wollen daher von vornherein das feste System einführen, um so mehr, als wir dadurch auf Gleichungen geführt werden, die den Gl. 1) ganz ähnlich sind und die die Anwendung der Hansenschen Analyse ebenso zulassen, wie diese.

In bezug auf ein im Raum festes Koordinatensystem xyz mit dem Anfangspunkt in der Sonne seien die Koordinaten des gestörten Körpers P: x, y, z, des störenden Körpers P_1: x_1, y_1, z_1, die Radienvektoren r und r_1 und die Entfernung zwischen P und P_1: ϱ_1, dann sind die von der Sonne bez. von P_1 herrührenden relativen Beschleunigungen von P:

$$-k^2(1+m)\frac{x}{r^3}, \qquad -k^2(1+m)\frac{y}{r^3}, \qquad -k^2(1+m)\frac{z}{r^3}$$

und

$$k^2 m_1\left(\frac{x_1-x}{\varrho_1^3}-\frac{x_1}{r_1^3}\right), \qquad k^2 m_1\left(\frac{y_1-y}{\varrho_1^3}-\frac{y_1}{r_1^3}\right), \qquad k^2 m_1\left(\frac{z_1-z}{\varrho_1^3}-\frac{z_1}{r_1^3}\right),$$

worin mit 1, m und m_1 die Massen von Sonne, P und P_1 bezeichnet sind. Die Komponenten der Gesamtbeschleunigung von P in bezug auf die Sonne sind also, wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{1}{r_1^3}=K_1$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{x}{r^3}+k^2 m_1\left(K_1 x_1-\frac{x}{\varrho_1^3}\right)\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{y}{r^3}+k^2 m_1\left(K_1 y_1-\frac{y}{\varrho_1^3}\right) \qquad 2)\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{z}{r^3}+k^2 m_1\left(K_1 z_1-\frac{z}{\varrho_1^3}\right).
\end{aligned}$$

Um diese Gleichungen auf die Form 1) überzuführen, führen wir Polarkoordinaten ein; sind (r) die Projektion des Radiusvektors r auf die xy-Ebene und l der Winkel, den (r) mit der x-Achse bildet, ferner L_1 und B_1 Länge und Breite von P_1, bezogen auf die xy-Ebene, so wird

$$\begin{aligned}
x &= (r)\cos l, & x_1 &= r_1\cos B_1\cos L_1\\
y &= (r)\sin l, & y_1 &= r_1\cos B_1\sin L_1 \qquad 3)\\
& & z_1 &= r_1\sin B_1,
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (r)^2 \\
xy_1 - yx_1 &= (r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\
xx_1 + yy_1 &= (r) r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\
dx &= d(r) \cos l - (r) \sin l\, dl = \frac{x}{(r)} d(r) - y\, dl \\
dy &= d(r) \sin l + (r) \cos l\, dl = \frac{y}{(r)} d(r) + x\, dl \\
x\, dy - y\, dx &= (r)^2 dl \\
x\, dx + y\, dy &= (r) d(r) \\
dx^2 + dy^2 &= d(r)^2 + (r)^2 dl^2 .
\end{aligned} \qquad 4)$$

Verbindet man nun die beiden ersten Gleichungen 2) durch die Operationen x, $+y$ und $-y$, $+x$, so erscheinen mit Beachtung von

$$x\, d^2x + y\, d^2y = d(x\, dx + y\, dy) - (dx^2 + dy^2)$$

und

$$x\, d^2y - y\, d^2x = d(x\, dy - y\, dx)$$

die Gleichungen:

$$\frac{d\left((r)\frac{d(r)}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d(r)}{dt}\right)^2 - (r)^2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = -k^2(1+m)\frac{(r)^2}{r^3} + k^2 m_1 \left(K_1 (r) r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - \frac{(r)^2}{\varrho_1{}^3}\right)$$

$$\frac{d\left((r)^2 \frac{dl}{dt}\right)}{dt} = k^2 m_1 K_1 (r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l)$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{(r)} k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\
U_1 &= (r) k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\
W_1 &= k^2 m_1 K_1 r_1 \sin B_1 \\
w_1 &= k^2 m_1 \frac{1}{\varrho_1{}^3}
\end{aligned} \qquad 5)$$

und die dritte Gleichung 2) ungeändert hinzugenommen wird, nach einfacher Reduktion:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(r)}{dt^2} - (r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + k^2(1+m)\frac{(r)}{r^3} &= (r) R_1 - (r) w_1 \\
\frac{d\left((r)^2 \frac{dl}{dt}\right)}{dt} &= U_1 \\
\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= W_1 - z w_1 .
\end{aligned} \qquad 6)$$

Die Form 1) ist hier hergestellt bis auf den Umstand, daß in 6) noch der Radiusvektor r selbst auftritt, der mit (r) im Zusammenhange

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (r)^2 + z^2$$

steht, aber einfach beseitigt werden kann, wenn wir z als kleine Größe annehmen dürfen. Dies tritt aber ein, sobald wir die xy-Ebene mit der Bahnebene von P zusammenfallen lassen, die durch die oskulierenden Elemente der Anfangsepoche

gegeben ist; denn dann wird z die Störung in der Breite über der festen Bahnebene. Es wird

$$\frac{1}{r^3} = ((r)^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(r)^3}\left(1 + \frac{z^2}{(r)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{(r)^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{z^2}{(r)^2}\left(1 - \frac{5}{2}\frac{z^2}{2(r)^2} + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 3}\frac{z^4}{2^2(r)^4} - \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{z^6}{2^3(r)^6} + \cdots\right)\right\}.$$

Die Reihe

$$f = 3\left(1 - \frac{5}{2}q + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 3}q^2 - \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4}q^3 + \cdots\right)$$

hat *Encke* (Berl. Jahrb. für 1858) mit dem Argumente q tabuliert. Setzt man also

$$\frac{z^2}{2(r)^2} = q,$$

so wird

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r)^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z^2}{(r)^2}\frac{1}{3}f\right)$$

und f kann mit dem Argument q der genannten Tafel entnommen werden (siehe »Tafeln« Nr. XXVI). Die in 6) auftretenden Glieder mit r werden also:

$$\frac{(r)}{r^3} = \frac{1}{(r)^2} - \frac{3}{2}(r)\frac{z^2}{(r)^5}\left(\tfrac{1}{3}f\right)$$

$$\frac{z}{r^3} = \frac{z}{(r)^3} - \frac{3}{2}\frac{z^3}{(r)^5}\left(\tfrac{1}{3}f\right)$$

und bei der Kleinheit der Breitenstörungen wird man hierin fast immer $\frac{1}{3}f = 1$ setzen dürfen. Wir setzen noch

$$\left.\begin{aligned} R_1 - w_1 + \tfrac{3}{2}k^2(1+m)\frac{z^2}{(r)^5}\left(\tfrac{1}{3}f\right) &= H \\ w_1 + \frac{k^2(1+m)}{(r)^3} &= w \\ W_1 + \tfrac{3}{2}k^2(1+m)\frac{z^3}{(r)^5}\left(\tfrac{1}{3}f\right) &= W \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

und erhalten dann statt 6):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(r)}{dt^2} - (r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2} &= (r)H \\ \frac{d\left((r)^2\frac{dl}{dt}\right)}{dt} &= U_1 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + wz &= W. \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Diese Gleichungen sind völlig von der Form 1); der Unterschied zwischen beiden Systemen besteht darin, daß 1) die in der instantanen Bahnebene gezählten Koordinaten r und s, 8) aber die in einer festen Ebene gezählten Koordinaten (r) und l geben. Ehe wir die Gl. 8) weiter behandeln, sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man sie auch durch eine Koordinatentransformation aus 1) ableiten kann; die direkte Aufstellung wurde aber vorgezogen, weil sie gestattete sofort die günstigsten Rechnungsgrößen einzuführen.

Die letzte Gleichung in 8) enthält nur die Koordinate z und gibt also durch Integration direkt die Breitenstörungen; die beiden ersten enthalten die Koordinaten (r) und l noch gemischt und man wird daher eine Trennung derselben anstreben müssen. Dabei ist es von Vorteil auch noch eine Zerlegung des Bogens l in zwei Teile vorzunehmen, die einzelnen bestimmt werden. Zunächst gibt die Integration der zweiten Gleichung

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p_0} + \int_{t_0}^{t} U_1 dt, \qquad 9)$$

indem die Integrationskonstante gleich durch ihren Wert ersetzt wurde, der offenbar gleich ist dem Wert, den $(r)^2 \frac{dl}{dt}$ in der ungestörten Bewegung, also für $U_1 = 0$, annimmt; mit p_0 ist der für die die Anfangsepoche t_0 oskulierende Parameter bezeichnet. Wird nun l zerlegt:

$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega, \qquad 10)$$

wo ω_0 eine Konstante, V und $\Delta\omega$ aber zunächst willkürlich zu wählende Bogen sind, so folgt:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (r)^2 \frac{dV}{dt} + (r)^2 \frac{d\Delta\omega}{dt}$$

und der Vergleich mit 9) zeigt, daß, wenn das eine Stück $\Delta\omega$ durch die Gleichung

$$(r)^2 \frac{d\Delta\omega}{dt} = \int_{t_0}^{t} U_1 dt \qquad 11)$$

bestimmt wird, dann das andere V aus

$$(r)^2 \frac{dV}{dt} = k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p_0} \qquad 12)$$

hervorgehen muß. Um gleich die Bedeutung der Bogen $\Delta\omega$ und V festzustellen, integrieren wir 9):

$$l = \int \frac{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p_0}}{(r)^2}\, dt + \int \frac{1}{(r)^2} \int_{t_0}^{t} U_1 dt \cdot dt + \text{const.} \qquad 13)$$

und haben die Konstante so zu bestimmen, daß bei Verschwinden der störenden Kraft der ungestörte Wert von l aus 13) hervorgeht. In der ungestörten Bewegung wird aber

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p_0}}{(r)^2} = \frac{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p_0}}{r_0^2} = \frac{dv_0}{dt} \quad \text{und} \quad U_1 = 0,$$

also

$$l_0 = v_0 + \text{const.},$$

wenn mit v_0 die ungestörte wahre Anomalie bezeichnet wird. Wird l_0 vom Schnitt der ungestörten Bahn mit der Ekliptik, also vom Knoten der oskulierenden Elemente für die Epoche t_0 ab gezählt, so stellt die Konstante den Abstand des Perihels vom Knoten dar. Bei der hierdurch definierten Lage der x-Achse wird also in 13) const. $= \omega_0$ und nach Substitution von 11) und 12)

$$l = V + \Delta\omega + \omega_0.$$

Es stellt also bei der Zerlegung 10) V die gestörte wahre Anomalie, gezählt in der festen xy-Ebene, ω_0 den Abstand des Perihels vom Knoten der ungestörten Bahn dar, und $\Delta\omega$, das nach 11) von der Ordnung der Störungen ist, kann als Störung des Perihelabstandes bezeichnet werden. $\Delta\omega$ können wir durch 11) bestimmen, da hierzu nur eine genäherte Kenntnis von (r) nötig ist. Dagegen muß V aus der Verbindung von 12) mit der ersten Gleichung in 8) hervorgehen und es muß dadurch zugleich (r) erhalten werden. Die Behandlung dieser Gleichungen in der ungestörten Bewegung führt bekanntlich auf das System

$$\begin{aligned} \overline{M} = M_0 + \mu_0(t - t_0) &= \overline{E} - \sin\varphi_0 \sin\overline{E} \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \cos\varphi_0 \sin\overline{E} \\ r_0 \cos v_0 &= a_0(\cos\overline{E} - \sin\varphi_0). \end{aligned}$$

Soll daraus statt der ungestörten wahren Anomalie v_0 die gestörte V hervorgehen, so muß man M um einen gewissen Betrag ΔM ändern; der damit erhaltene Radiusvektor $[r]$ wird sich von (r) nur um eine Größe von der Ordnung der Störungen unterscheiden, so daß etwa $(r) = [r](1+\nu)$ angesetzt werden kann und ν von der Ordnung der Störungen sein wird. Es gehen somit V und (r) aus dem System

$$\begin{aligned} M = M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M &= E - \sin\varphi_0 \sin E \\ [r] \sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\ [r] \cos V &= a_0(\cos E - \sin\varphi_0) \\ (r) &= [r](1+\nu) \end{aligned} \qquad 14)$$

hervor und die Aufgabe ist darauf hingeführt, ΔM und ν zu bestimmen. Um hierfür Differenzialgleichungen zu erlangen, muß 14) zweimal differenziert und das Resultat mit den beiden ersten Gleichungen 8) verglichen werden. Wird der aus 14) folgende Wert des Radiusvektors

$$(r) = \frac{p_0(1+\nu)}{1 + e_0 \cos V}$$

ein erstes Mal differenziert und 12) beachtet, so ergibt sich:

$$\frac{d(r)}{dt} = \frac{(r)}{1+\nu}\frac{d\nu}{dt} + \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{p_0(1+\nu)} \sin\varphi_0 \sin V$$

und nach nochmaliger Differenziation, wenn wieder 12) und der oben erhaltene Wert von $d(r)$ eingetragen wird:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} = \frac{(r)}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2}\frac{1}{1+\nu} e_0 \cos V.$$

Setzt man hierin

$$\frac{1}{1+\nu} = 1 - \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$e_0 \cos V = \frac{p_0(1+\nu)}{(r)} - 1,$$

so folgt:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2} = \frac{(r)}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2}\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^3} p_0.$$

Die erste Gleichung 9) ins Quadrat erhoben gibt ferner:

$$(r)^4\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = k^2(1+m)p_0 + 2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}\int U_1 dt\left\{1+\frac{\int U_1 dt}{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}\right\}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\int_{t_0}^{t_1} U_1 dt\cdot\left\{1+\frac{\int U_1 dt}{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}\right\} = \int U' dt \qquad 15)$$

gesetzt wird:

$$(r)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{k^2(1+m)}{(r)^3}p_0 + \frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{(r)^3}\int U' dt;$$

subtrahiert man dies von obiger Gleichung und vergleicht das Resultat mit der ersten Gleichung 8), so folgt:

$$\frac{(r)}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{(r)^2}\frac{\nu}{1+\nu} - \frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{(r)^3}\int U' dt = (r)H$$

oder nach Einführung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{(r)^4}\int U' dt + H &= H'\\ \frac{k^2(1+m)}{(r)^3} - H' &= h\end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

die definitive Differenzialgleichung für ν:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \nu h = H'. \qquad 17)$$

Um zweitens die Gleichung für ΔM aufzustellen, differenzieren wir die erste Gleichung 14):

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d\Delta M}{dt} = \frac{[r]}{a_0}\frac{dE}{dt},$$

beachten, daß (Nr. 46):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{[r]} = \frac{[r]}{a_0\cos\varphi_0}\frac{dV}{dt}$$

und erhalten:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a_0^2\cos\varphi_0}{[r]^2}\left(\mu_0 + \frac{d\Delta M}{dt}\right)$$

oder, wenn $(r)=[r](1+\nu)$ und $a_0^{\frac{3}{2}}\mu_0 = k\sqrt{1+m}$, $\sqrt{a_0}\cos\varphi_0 = \sqrt{p_0}$ eingetragen wird:

$$(r)^2\frac{dV}{dt} = (1+\nu)^2\frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{\mu_0}\left(\mu_0 + \frac{d\Delta M}{dt}\right).$$

Wird dies nun wieder mit dem Resultat des anderen Systems, nämlich mit der Gl. 12) verglichen, so folgt:

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \frac{\mu_0}{(1+\nu)^2} - \mu_0$$

oder

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -\mu_0\left(1-\frac{1}{(1+\nu)^2}\right) = -\mu_0\nu\frac{2+\nu}{(1+\nu)^2};$$

also schließlich mit der Abkürzung:

$$\sigma = 2\frac{1+\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{1}{1+\nu}\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right) \qquad 18)$$

die definitive Differenzialgleichung für ΔM

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -\mu_0 \sigma \nu. \qquad 19)$$

Das Problem, die gestörten Polarkoordinaten r, l, b zu ermitteln, ist jetzt auf die Lösung folgender Gleichungen hingeführt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{dt^2} + h\nu &= H' \\ \frac{d\Delta M}{dt} &= -\mu_0 \sigma \nu \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} &= \frac{1}{(r)^2}\int U_1 dt \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + wz &= W. \end{aligned} \qquad 20)$$

Sind hieraus ν, ΔM, $\Delta\omega$ und z gefunden, so wird:

$$\begin{aligned} M = M_0 + \mu_0(t-t_0) + \Delta M &= E - \sin\varphi_0 \sin E \\ [r]\sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\ [r]\cos V &= a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0 \\ (r) = [r](1+\nu), \qquad & l = V + \omega_0 + \Delta\omega \\ r^2 = (r)^2 + z^2, \qquad & \sin b = \frac{z}{r}. \end{aligned} \qquad 21)$$

Die Polarkoordinaten ergeben sich also schließlich durch eine nahezu ebenso einfache Rechnung, wie bei der elliptischen Bewegung; der Übergang von den auf das feste System der xyz (der festen Bahnebene) bezogenen Koordinaten l und z auf die rechtwinkligen Äquatorkoordinaten wird unten gezeigt werden (Nr. 167 am Schluß).

165. Berechnung der eingeführten Größen. Wir haben im Laufe der Entwicklungen eine Reihe von Größen eingeführt, deren Berechnung jetzt gezeigt werden muß; zunächst kommen folgende in Betracht:

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(r)} k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) \\ U_1 &= (r)\, k^2 m_1 K_1 r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \\ W_1 &= k^2 m_1 K_1 r_1 \sin B_1 \\ w_1 &= k^2 m_1 \frac{1}{\varrho_1^3}, \end{aligned} \qquad 1)$$

denen sich natürlich für einen zweiten, dritten, ... störenden Planeten entsprechende Glieder anreihen, die schließlich alle zu summieren sind; wir wollen der Einfachheit der Schreibweise halber es bei R_1, U_1, W_1, w_1 belassen, statt ΣR_i, ... zu schreiben.

Die Distanz ϱ_1 ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \\ &= (r_1 \cos B_1 \cos L_1 - (r)\cos l)^2 + (r_1 \cos B_1 \sin L_1 - (r)\sin l)^2 + (r_1 \sin B_1 - z)^2 \\ &= r_1^2 + (r)^2 - 2(r) r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) + z^2 - 2 r_1 z \sin B_1,\end{aligned}$$

man wird also am bequemsten nach den Formeln

$$\begin{aligned}\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - (r) \\ \varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \\ \varrho_1 \sin\vartheta &= r_1 \sin B_1 - z\end{aligned} \qquad 2)$$

rechnen, deren Quadratsumme den obigen Ausdruck gibt.

Da alle Größen 1) mit der störenden Masse m_1 multipliziert sind, wird man zu ihrer Berechnung genäherte Werte der Koordinaten (r) und l benutzen dürfen, die man sich leicht verschaffen kann; zu Beginn der Rechnung kann man die Störungen von (r) und l direkt Null setzen, und im weiteren Verlauf der Rechnung wird man die in

$$M = M_0 + \mu_0 t + \Delta M, \quad (r) = [r](1 + \nu), \quad l = V + \omega_0 + \Delta\omega$$

vorkommenden Störungswerte mit hinreichender Sicherheit extrapolieren können. Beabsichtigt man nur Störungen erster Ordnung zu berücksichtigen, was häufig für mehrere Jahre genügt, dann kann man 1) mit den elliptischen Werten von r und l aufstellen, wodurch die Rechnung an Annehmlichkeit erheblich gewinnt.

Die Koordinaten L_1 und B_1 des störenden Körpers beziehen sich auf die ungestörte Bahnebene des gestörten Planeten und zwar wird L_1 vom Knoten dieser letzteren mit der Ekliptik ab gezählt, da wir durch diesen die x-Achse gelegt haben; in den Ephemeriden findet man die heliozentrischen Längen und Breiten bezogen auf die Ekliptik: λ_1, β_1; es ist also der Zusammenhang zwischen L_1, B_1 und λ_1, β_1 zu ermitteln. Aus dem Dreieck zwischen dem Pol der ungestörten Bahn, dem Pol der Ekliptik und dem Ort des störenden Körpers findet man:

$$\begin{aligned}\cos B_1 \sin L_1 &= \sin i_0 \sin\beta_1 + \cos i_0 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega_0) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega_0) \\ \sin B_1 &= \cos i_0 \sin\beta_1 - \sin i_0 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega_0),\end{aligned} \qquad 3)$$

bei deren Anwendung man darauf zu sehen hat, daß λ_1, β_1 und Ω_0, i_0 sich auf dieselbe Ekliptik und dasselbe Äquinoktium beziehen. Die Berechnung von L_1 und B_1 läßt sich aber nicht unwesentlich vereinfachen, wenn die Ephemeriden der störenden Körper in einer gewissen Form gegeben werden, die auch tatsächlich seit 1880 auf einen Vorschlag *Oppolzers* hin im Berliner Jahrbuch angenommen ist. Man macht nämlich von dem Umstande Gebrauch, daß der störende Körper sich nie weit von einer bestimmten mittleren Lage seiner Bahnebene, gegeben durch i_1 und Ω_1, entfernen wird, daß also seine Breite B_0 über dieser Ebene eine kleine Größe sein wird. Geben die Ephemeriden diese Breite B_0 und die Länge L_0 in der Bahn $i_1\,\Omega_1$ — die angeführt sein muß —, so gestaltet sich die Berechnung von L_1 und B_1 aus L_0 und B_0 folgendermaßen. Zunächst kann ein für allemal die gegenseitige Lage der beiden Bahnebenen $\Omega_0 i_0$ des gestörten und $\Omega_1 i_1$ des störenden Körpers berechnet werden.

Aus dem von diesen Bahnen und der Ekliptik gebildeten Knotendreieck $\Omega_0 \Omega_1 O$ folgt nämlich in der Bezeichnung der Fig. 61:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi + {}^1\Psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \sin\tfrac{1}{2}(i_1 + i_0)\\
\sin\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi + {}^1\Psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \sin\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi - {}^1\Psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(i_1 + i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi - {}^1\Psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0)
\end{aligned} \qquad 4)$$

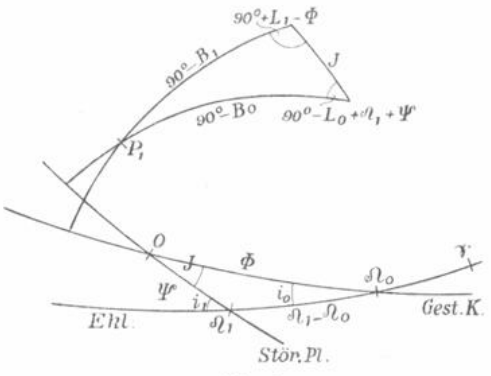


Fig. 61.

woraus die Größen J, Φ, ${}^1\Psi$ sich ergeben. Da L_1 von Ω_0, L_0 aber vom Frühlingspunkt aus gezählt wird, folgt weiter aus dem Dreieck zwischen dem Ort P_1 des störenden Körpers und den Polen der beiden Bahnen:

$$\begin{aligned}
\cos B_1 \sin(L_1 - \Phi) &= \\
\cos B_0 \sin(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi) \cos J &- \sin B_0 \sin J\\
\cos B_1 \cos(L_1 - \Phi) &= \cos B_0 \cos(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi)\\
\sin B_1 &= \cos B_0 \sin(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi) \sin J\\
&\quad + \sin B_0 \cos J.
\end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit von B_0 kann man immer $\cos B_0 = 1$ und $\sin B_0 = B_0 \sin 1''$ setzen, so daß schließlich kommt:

$$\begin{aligned}
\cos B_1 \sin(L_1 - \Phi) &= \sin(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi) \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J\\
\cos B_1 \cos(L_1 - \Phi) &= \cos(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi)\\
\sin B_1 &= \sin(L_0 - \Omega_1 - {}^1\Psi) \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J;
\end{aligned} \qquad 5)$$

die kleinen zweiten Glieder rechts wird man in vielen Fällen übergehen können. Die Gleichungen 5) sind einfacher aufzulösen als 3), vorausgesetzt, daß die Angaben L_0, B_0 gemacht sind, so daß sich die in der Regel nur für jedes Jahrzehnt einmal vorzunehmende Berechnung der Größen Φ, ${}^1\Psi$, J durch 4) lohnt.

Aus den Größen 1) setzen sich die in den Differenzialgleichungen auftretenden Koeffizienten in folgender Weise zusammen:

$$\begin{aligned}
R_1 - w_1 + \tfrac{3}{2}k^2(1+m)\frac{z^2}{(r)^5}\tfrac{1}{3}f &= H\\
w_1 + \frac{k^2(1+m)}{(r)^3} &= w\\
W_1 + \tfrac{3}{2}k^2(1+m)\frac{z^3}{(r)^5}\tfrac{1}{3}f &= W\\
\int U_1 dt \cdot \left\{1 + \frac{\int U_1 dt}{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}\right\} &= \int U' dt\\
\frac{2k\sqrt{1+m}\sqrt{p_0}}{(r)^4}\int U' dt + H &= H'\\
\frac{k^2(1+m)}{(r)^3} - H' &= h\\
\sigma = \frac{1}{1+\nu}\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right)&\cdot
\end{aligned} \qquad 6)$$

Betreff der Berechnung dieser Ausdrücke ist nur zur bemerken, daß das dritte Glied in H nur selten, das zweite Glied in W wohl niemals einen nennenswerten Betrag liefern werden und daß man darin immer $\frac{1}{3}f = 1$ wird setzen dürfen und den Wert von z extrapolieren muß.

166. Ausführung der Integration. Die aufzulösenden Differenzialgleichungen 20) (Seite 526) sind von den Formen:

$$\frac{dx}{dt} = Q, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = P - pz,$$

deren erste keiner weiteren Erläuterung bedarf, als daß x für die Zeit der Oskulation der vorgelegten Elemente verschwinden muß, da es hier die Störungsbeträge ΔM bzw. $\Delta\omega$ darstellt. Man wird also die Funktion Q in einem angemessenen Zeitintervall w (für einen kleinen Planeten und Jupiter reicht $w = 40$ Tage fast immer aus) tabulieren und dann die Formeln des Abschnittes XXIX zur Anwendung bringen; die ganze Rechnung ist direkt. Bei der zweiten Form dagegen hat man das Doppelintegral

$$z = \iint (P - pz)\, dt^2$$

zu bilden, was die Berechnung von

$$f(a + iw) = P - pz = P - p\iint f(a + iw)\, dt^2,$$

also die zu ermittelnde Funktion $f(a + iw)$ als bekannt voraussetzt; man wird also nur durch eine indirekte Rechnung zum Ziel kommen, die sich aber leicht in eine fast völlig direkte verwandeln läßt. In der hier bequemsten Integralformel ($w = 1$ gesetzt)

$$z = \iint_{a+iw} f(a + iw)\, dt^2 = {}^{II}f(a + iw) + \tfrac{1}{12}f(a + iw) - \tfrac{1}{240}f^{II}(a + iw) + \cdots$$

kann man ${}^{II}f(a+iw)$ als genau bekannt ansehen, da die bis zum Argument $f(a+(i-1)w)$ geführte Rechnung bereits zur Kenntnis von ${}^{II}f(a+iw)$ geführt hat, ferner wird man das Glied $-\frac{1}{240}f^{II}(a+iw)$ stets genau genug durch Extrapolation erhalten; es kommt also nur noch auf $\frac{1}{12}f(a+iw)$ an, das man zwar auch durch Extrapolation bilden könnte, aber ebenso leicht und sicherer durch folgende direkte Rechnung berücksichtigt. Es wird:

$$z = ({}^{II}f(a + iw) + \tfrac{1}{12}P - \tfrac{1}{12}pz - \tfrac{1}{240}f^{II}(a + iw) + \cdots)$$

oder

$$(1 + \tfrac{1}{12}p)z = {}^{II}f(a + iw) + \tfrac{1}{12}P - \tfrac{1}{240}f^{II}(a + iw) = S_z,$$

wo S_z als völlig bekannte Größe zu betrachten ist, und somit:

$$pz = \frac{p}{1 + \frac{1}{12}p} S_z.$$

Mit diesem Wert läßt sich $f(a + iw) = P - pz$ direkt rechnen.

Das gewählte Intervall w führt man als Zeiteinheit ein, d. h. man setzt in allen Formeln $(wk)^2$ statt k^2; in den Integralformeln ist dann $w = 1$ zu setzen, wie wir eben schon getan haben. Um ferner das Anschreiben vieler Nullen zu ersparen,

empfiehlt es sich, alles in Einheiten der siebenten Dezimale des Radius auszudrücken. Dies geschieht durch Multiplikation mit 10^7, die am einfachsten zugleich mit der von $(wk)^2$ ausgeführt wird; in den noch mit m_1 multiplizierten Gliedern hat man dann den Faktor $(wk)^2 10^7 \cdot m_1$, den man für $w = 20$ und 40 in Taf. XXXXV für alle großen Planeten angegeben findet.

167. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in Polarkoordinaten.

I.
$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi + \Psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \sin\tfrac{1}{2}(i_1 + i_0)\\
\sin\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi + \Psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \sin\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J \sin\tfrac{1}{2}(\Phi - \Psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(i_1 + i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J \cos\tfrac{1}{2}(\Phi - \Psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0) .
\end{aligned}$$

Ω_1 und i_1 sind am Fuß der Ephemeriden für die heliozentrischen Örter der großen Planeten im Berliner Jahrbuch angegeben; Ω_0 und i_0 muß man auf dasselbe Äquinoktium beziehen, wie diese.

II.
$$\begin{aligned}
\cos B_1 \sin(L_1 - \Phi) &= \sin(L_0 - \Omega_1 - \Psi) \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J\\
\cos B_1 \cos(L_1 - \Phi) &= \cos(L_0 - \Omega_1 - \Psi)\\
\sin B_1 &= \sin(L_0 - \Omega_1 - \Psi) \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J .
\end{aligned}$$

L_0 und B_0 sind als Länge in der Bahn und Breite über derselben im Berliner Jahrbuch angegeben.

Statt nach I. und II. kann man auch nach den Formeln 3) (Seite 527) rechnen, für welche die Länge und Breite λ_1, β_1, bezogen auf die Ekliptik, ebenfalls dem Berliner Jahrbuch entnommen werden können.

III.
$$\begin{aligned}
M = M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \Delta M &= E - \sin\varphi_0'' \sin E\\
[r] \sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E\\
[r] \cos V &= a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0\\
(r) = [r](1 + \nu), \qquad l &= V + \omega_0 + \Delta\omega .
\end{aligned}$$

IV.
$$\begin{aligned}
\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - (r) = \xi_1 - (r)\\
\varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \qquad = \eta_1\\
\varrho_1 \sin\vartheta &= r_1 \sin B_1 - z \qquad = \zeta_1 - z
\end{aligned}$$
$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3} .$$

V. $(kw)^2 m_1 10^7 = g_1$ aus Tafel XXXXV.

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= g_1 K_1 \frac{\xi_1}{(r)}\\
U_1 &= g_1 K_1 (r) \eta_1\\
W_1 &= g_1 K_1 \zeta_1\\
w_1 &= g_1 \frac{1}{\varrho_1^3}
\end{aligned}\right\} \text{ in Einheiten der 7. Dezimale.}$$

Werden mehrere störende Planeten berücksichtigt, so hat man diese Werte für jeden einzelnen zu bilden und dann alle zu summieren; die Summe tritt in die weiteren Rechnungen ein.

VI. Wenn die Breitenstörungen anfangen, merklicher zu werden, was jedenfalls erst in einem späteren Stadium der Rechnung eintritt, hat man

$$\tfrac{3}{2}(wk)^2 10^7 = c$$
$$w = 20, \qquad \log c = 6.2493$$
$$w = 40, \qquad \log c = 6.8514$$
$$\Delta R = c\frac{x^2}{(r)^5}$$
$$\Delta W = c\frac{x^3}{(r)^5}$$

zu rechnen, wo x die Summe der Breitenstörungen bedeutet.

$$H = R_1 - w_1 + \Delta R$$
$$W = W_1 + \Delta W.$$

VII. Mit den Werten U_1 bilde man $\int U_1 dt$ nach

$${}^{\mathrm{I}}f(a - \tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}w) - \cdots$$
$$\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} U_1 dt = {}^{\mathrm{I}}f(a + iw) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a + iw) + \tfrac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a + iw)$$

und dann

$$\int U' dt = \int U_1 dt \cdot \left\{1 + \frac{\int U_1 dt}{2(wk)10^7\sqrt{p_0}}\right\}$$
$$\log 2(wk)10^7 = \begin{cases} 6.8376414, & w = 20 \\ 7.1386714, & w = 40. \end{cases}$$

VIII.
$$\Delta H = \frac{2(wk)\sqrt{p_0}}{(r)^4}\int U' dt$$
$$\log 2(wk) = \begin{cases} 9.8376414, & w = 20 \\ 0.1386714, & w = 40 \end{cases}$$
$$H' = H + \Delta H, \qquad w = w_1 + \frac{(wk)^2 10^7}{(r)^3}$$
$$h = \frac{(wk)^2 10^7}{(r)^3} - H'$$
$$\log (wk)^2 10^7 = \begin{cases} 6.0732228, & w = 20 \\ 6.6752828, & w = 40. \end{cases}$$

IX.
$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = H' - h\nu \quad \text{(Auflösung nach Nr. 166)}$$
$$\frac{d\Delta M}{dt} = -(w\mu_0)\frac{\nu}{1+\nu}\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right)$$
$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{1}{(r)^2}\frac{206264''.8}{10^7}\int U_1 dt$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = W - wx, \qquad \log\frac{206264''.8}{10^7} = 8.314425.$$

In die Gleichung für ΔM ist μ_0 in Sekunden einzutragen, dann erscheint auch ΔM in dieser Einheit; ν, welches aus der ersten Gleichung in Einheiten der siebenten Dezimale hervorgeht, ist natürlich erst durch 10^7 zu dividieren. z ergibt sich aus der letzten Gleichung ebenfalls in Einheiten der 7. Dezimale.

X.
$$\begin{aligned} M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M &= E - (\sin\varphi_0)'' \sin E \\ [r] \sin V &= a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\ [r] \cos V &= a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0 \\ (r) &= [r](1 + \nu) \\ r &= (r)^2 + z^2 \\ l &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\ \sin b &= \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Sind r, l, z gefunden, von denen l in der ungestörten Bahn vom Knoten ab gerechnet wird, dann vollzieht sich die Berechnung des gestörten *geozentrischen* Ortes oder allgemeiner die Berechnung einer Ephemeride am einfachsten durch Berechnung der rechtwinkligen Äquatorealkoordinaten, für die man nach den Formeln 12) (Seite 29) sofort hat:

$$\begin{aligned} x' &= (r) \sin a \sin(A + l) + z \cos a \\ y' &= (r) \sin b \sin(B + l) + z \cos b \\ z' &= (r) \sin c \sin(C + l) + z \cos c. \end{aligned}$$

Hierin sind A, B, ... die auch sonst bei der Ephemeridenrechnung benutzten Gaußschen Konstanten, die mit den konstanten Elementen Ω_0, i_0 zu berechnen sind (Gl. 1, Seite 230).

168. Übergang von den Störungen in den Polarkoordinaten auf Elementenstörungen. Es ist ein Vorzug der Störungen in den Polarkoordinaten, daß sie nur langsam anwachsen, aber schließlich stellt sich doch die Notwendigkeit ein, ein neues oskulierendes Elementensystem den Rechnungen zugrunde zu legen. Es entsteht daher die Aufgabe, aus den ermittelten Störungen in den Polarkoordinaten solche in den Elementen herzustellen oder oskulierende Elemente für eine neue Oskulationsepoche zu bilden. Auch sonst kann die Kenntnis des neuen Systems von Interesse sein. Die Aufgabe läßt sich auf zwei Wegen lösen, entweder indem man die Elemente direkt aus den Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten für die neue Oskulationsepoche berechnet, oder indem man die Unterschiede der neuen Elemente von den früheren durch die ermittelten Störungsbeträge ausdrückt. Der erstere Weg ist der kürzere, aber weniger genaue, weshalb meist der letztere eingeschlagen werden muß.

Wir bezeichnen die ursprünglichen Elemente für die Zeit t_0 wie bisher mit a_0, e_0, ..., die für die neue Oskulationsepoche t mit a, e, ... und setzen voraus, daß die Störungsrechnung uns mit folgenden Größen, geltend für t, bekannt gemacht hat:

$$\Delta M, \quad \Delta\omega, \quad \nu, \quad \frac{d\nu}{dt}, \quad z, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \int_{t_0}^{t} U_1 dt,$$

also auch mit

$$(r) = [r](1 + \nu) \quad \text{und} \quad \frac{d(r)}{dt} = \frac{(kw)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin\varphi_0 \sin V}{1+\nu} + [r]\frac{d\nu}{dt}.$$

Die Gleichung 9) (Seite 523)

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (wk)\sqrt{p_0} + \int U_1 dt \qquad 1)$$

ist offenbar geeignet, zum Parameter p zu führen, wenn es gelingt, statt der in der ungestörten Bahnebene gezählten Länge l die Länge in der gestörten Bahn einzuführen. Bezeichnet man die gegenseitige Neigung der beiden Bahnen mit J und die Bogen von ihren Knoten mit der Ekliptik bis zum gegenseitigen Schnitt N (dem aufsteigenden Knoten der gestörten auf der ungestörten Bahn) mit K_0 und K, so wird in dem bei F rechtwinkligen Dreieck NPF (Fig. 62) $NF = l - K_0$, $FP = b$ und daher

$$\operatorname{tg} J \sin(l - K_0) = \operatorname{tg} b = \frac{z}{(r)}.$$

Durch Differenziation folgt hieraus, da nach Gl. 4) (Seite 487) bei oskulierenden Elementen

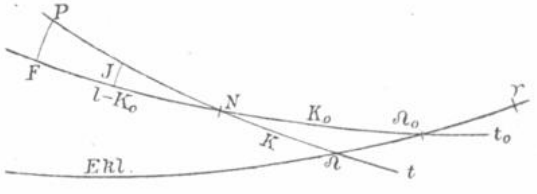


Fig. 62.

$$\cos NP \sin J \frac{dK_0}{dt} - \sin NP \frac{dJ}{dt} = 0$$

oder:

$$\cos(l - K_0) \sin J \frac{dK_0}{dt} - \frac{\sin(l - K_0)}{\cos J} \frac{dJ}{dt} = 0$$

ist, also J und K_0 konstant gehalten werden können:

$$\operatorname{tg} J \cos(l - K_0) = \frac{(r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt}}{(r)^2 \frac{dl}{dt}}.$$

Wird hier 1) substituiert, so hat man die zwei Gleichungen

$$\operatorname{tg} J \sin(l - K_0) = \frac{z}{(r)}$$

$$\operatorname{tg} J \cos(l - K_0) = \frac{(r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt}}{(wk)\sqrt{p_0} + \int U_1 dt} \qquad 2)$$

in denen rechts alles bekannt ist, aus denen also J und K_0 hervorgehen, da $l = V + \omega_0 + \Delta\omega$ ist. Nennt man die Länge in der gestörten Bahn von N aus gezählt $u = NP$, so ist

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(l - K_0) \sec J$$

oder

$$u = l - K_0 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2} J^2 \sin 2(l - K_0) + \cdots = l - K_0 + \Delta u. \qquad 3)$$

Das Flächenteilchen $r^2 \frac{du}{dt} = (wk)\sqrt{p}$ auf die ungestörte Bahnebene projiziert gibt $(r)^2 \frac{dl}{dt}$, also hat man:

$$(wk)\sqrt{p} = (r)^2 \frac{dl}{dt} \sec J = \left((wk)\sqrt{p_0} + \int U_1 \, dt\right) \sec J \qquad 4)$$

woraus p berechnet werden kann. Es ist aber vorzuziehen, die Differenz

$$\Delta(\sqrt{p}) = \sqrt{p} - \sqrt{p_0}$$

zu berechnen, für die man aus 4) sofort erhält, wenn $\sec J = 1 + 2 \sin \frac{1}{2} J^2 \sec J$ gesetzt wird:

$$\Delta\sqrt{p} = \left(\frac{1}{(wk)} \int U_1 \, dt + 2\sqrt{p_0} \sin \tfrac{1}{2} J^2\right) \sec J. \qquad 5)$$

Den Unterschied der Parameter selbst erhält man hieraus, wenn man $\sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \Delta\sqrt{p}$ mit $\sqrt{p} + \sqrt{p_0}$ multipliziert:

$$\Delta p = p - p_0 = \Delta\sqrt{p}\,(2\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p}). \qquad 6)$$

Wir gehen nun zur Exzentrizität über. Für den gestörten Ort gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{(kw)} \frac{dr}{dt} \\ e \cos v &= \frac{p}{r} - 1; \end{aligned} \qquad 7)$$

substituiert man darin

$$\begin{aligned} r^2 &= (r)^2 + z^2 \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{(r)}{r} \frac{d(r)}{dt} + \frac{z}{r} \frac{dz}{dt}, \end{aligned} \qquad 8)$$

so hat man alle Mittel, um e und v zu bestimmen, doch empfiehlt es sich auch hier die Differenzen zu rechnen. Aus 7) folgt, wenn der ungestörte Radiusvektor und sein Differenzialquotient für die Zeit t mit r_0 und $\frac{dr_0}{dt}$ bezeichnet und ferner die Differenzen

$$r - r_0 = \Delta r \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} = \Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

eingeführt werden:

$$\begin{aligned} e \sin v &= \frac{\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p_0}}{(wk)} \left(\frac{dr_0}{dt} + \Delta\frac{dr}{dt}\right) = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{wk}\left(\Delta\sqrt{p}\,\frac{dr_0}{dt} + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right) \\ e \cos v &= \frac{p_0}{r_0} - 1 + \left(\frac{p}{r} - \frac{p_0}{r_0}\right) = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r}\left(p_0 + \Delta p - \frac{r}{r_0} p_0\right) \\ &= e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r}\left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0} \Delta r\right); \end{aligned}$$

setzt man also

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= e_0 \sin v_0 \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}} \\ \frac{1}{wk}\left(\Delta\sqrt{p}\,\frac{dr_0}{dt} + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right) &= n \sin N \\ \frac{1}{r}\left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0} \Delta r\right) &= n \cos N \end{aligned} \qquad 9)$$

so wird:

$$e \sin v = e_0 \sin v_0 + n \sin N$$
$$e \cos v = e_0 \cos v_0 + n \cos N$$

und daher:

$$e \sin(v - v_0) = n \sin(N - v_0)$$
$$e \cos(v - v_0) = e_0 + n \cos(N - v_0). \qquad 10)$$

Hieraus folgt $v - v_0$ und durch Quadrieren und Addieren

$$e^2 - e_0^2 = 2 e_0 n \cos(N - v_0) + n^2. \qquad 11)$$

Führt man $\sin\varphi_0 = e_0$, $\sin\varphi = e$ ein, so wird:

$$e^2 - e_0^2 = \sin(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0)$$

also

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{e^2 - e_0^2}{\sin(\varphi + \varphi_0)}, \qquad 12)$$

was mit zwei Näherungen aufgelöst wird.

Zur Berechnung von 9) braucht man $\Delta r = r - r_0$ und $\Delta \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}$, deren Ausdrücke nun aufzustellen sind. In der ungestörten bzw. gestörten Bewegung hat man die Gleichungen:

$$M_0 + \mu_0 (t - t_0) = E_0 - e_0 \sin E_0$$
$$M_0 + \Delta M + \mu_0 (t - t_0) = E - e_0 \sin E,$$

mithin

$$\Delta M = (E - E_0) - 2 e_0 \sin\tfrac{1}{2}(E - E_0) \cos\tfrac{1}{2}(E + E_0)$$

oder, wenn das Verhältnis des sin zum Bogen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(E - E_0)}{\frac{1}{2}(E - E_0)} = \beta$$

(den Logarithmentafeln zu entnehmen) gesetzt wird:

$$E - E_0 = \frac{\Delta M}{1 - e_0 \beta \cos\frac{1}{2}(E + E_0)}. \qquad 13)$$

Ebenso hat man

$$r_0 = a_0(1 - e_0 \cos E_0)$$
$$[r] = a_0(1 - e_0 \cos E),$$

woraus

$$[r] - r_0 = 2 a_0 e_0 \sin\tfrac{1}{2}(E - E_0) \cos\tfrac{1}{2}(E + E_0). \qquad 14)$$

Endlich ist:

$$\sqrt{[r]} \sin\tfrac{1}{2} V = \sqrt{a_0(1 + e_0)} \sin\tfrac{1}{2} E \quad \Big| \quad \sqrt{r_0} \sin\tfrac{1}{2} v_0 = \sqrt{a_0(1 + e_0)} \sin\tfrac{1}{2} E_0$$
$$\sqrt{[r]} \cos\tfrac{1}{2} V = \sqrt{a_0(1 - e_0)} \cos\tfrac{1}{2} E \quad \Big| \quad \sqrt{r_0} \cos\tfrac{1}{2} v_0 = \sqrt{a_0(1 - e_0)} \cos\tfrac{1}{2} E_0$$

woraus:

$$\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0) = \frac{1}{\sqrt{r_0 [r]}} a_0 \cos\varphi_0 \sin\tfrac{1}{2}(E - E_0). \qquad 15)$$

Dies vorausgesetzt folgt aus $(r) = r \cos b$:

$$r = (r)\left(1 + \frac{2 \sin\frac{1}{2} b^2}{\cos b}\right)$$

oder

$$r - (r) = 2(r)\frac{\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b} \qquad 16)$$

und b kann hierin durch

$$\operatorname{tg} b = \frac{z}{(r)} \qquad 17)$$

als bekannt angesehen werden. Endlich ist

$$(r) - [r] = [r]\nu. \qquad 18)$$

Setzt man also $\Delta r = r - r_0$ aus $(r - (r)) + ((r) - [r]) + ([r] - r_0)$ d. h. aus 16), 18), 14) zusammen, so folgt:

$$\Delta r = r - r_0 = 2(r)\frac{\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b} + [r]\nu + 2a_0 e_0 \sin\tfrac{1}{2}(E - E_0)\cos\tfrac{1}{2}(E + E_0), \qquad 19)$$

worin b und $E - E_0$ durch 17) und 13) gegeben sind.

Um $\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)$ zu erhalten, substituieren wir in 8)

$$(r) = r\cos b, \qquad z = r\sin b$$
$$\frac{d(r)}{dt} = \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}}\frac{\sin\varphi_0\sin V}{1+\nu} + [r]\frac{d\nu}{dt},$$

so daß kommt:

$$\sec b\frac{dr}{dt} = \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}}\frac{\sin\varphi_0\sin V}{1+\nu} + [r]\frac{d\nu}{dt} + \operatorname{tg} b\frac{dz}{dt}.$$

Wird hiervon

$$\sec b\frac{dr_0}{dt} = \frac{(wk)\sin\varphi_0\sin v_0}{\sqrt{p_0}} + \frac{2\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b}\frac{(wk)\sin\varphi_0\sin v_0}{\sqrt{p_0}}$$

subtrahiert, so folgt nach geringer Reduktion:

$$\sec b\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\right) = [r]\frac{d\nu}{dt} + \frac{wk\sin\varphi_0}{\sqrt{p_0}}\left(\frac{\sin V - \sin v_0}{1+\nu} - \sin v_0\left(\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{2\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b}\right)\right) + \operatorname{tg} b\frac{dz}{dt},$$

oder

$$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{\cos b}{1+\nu}\left((r)\frac{d\nu}{dt} + \frac{(wk)\sin\varphi_0}{\sqrt{p_0}}\left(2\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0)\cos\tfrac{1}{2}(V + v_0) - \sin v_0\frac{\nu + 2\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b}\right) + \frac{z}{[r]}\frac{dz}{dt}\right). \qquad 20)$$

Zur Ermittelung der *großen Halbachse* hat man

$$a - a_0 = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p_0}{1-e_0^2} = \frac{p - p_0}{1-e^2} + p_0\left(\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{1-e_0^2}\right) = \frac{\Delta p + a_0(e^2 - e_0^2)}{1-e^2}$$

oder

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{\Delta p + a_0(e^2 - e_0^2)}{p_0 - a_0(e^2 - e_0^2)}. \qquad 21)$$

Daraus kann man $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ berechnen; es ist:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu = ka^{-\frac{3}{2}} = k(a_0 + \Delta a)^{-\frac{3}{2}} = ka_0^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\Delta a}{a_0}\right)^{-\frac{3}{2}};$$

wird also

$$\frac{\Delta a}{2a_0} = q$$

gesetzt, so folgt nach der Entwicklung Seite 522:

$$\mu = \mu_0 \left(1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \cdots\right)$$

oder

$$\Delta \mu = -\mu_0 q f \qquad 22)$$

(f mit Arg. q aus Taf. XXVI).

Die mittlere Anomalie für die Epoche t berechnet man am einfachsten mit Hilfe der durch 10) bekannt gewordenen wahren Anomalie v. Aus der Formel (VII. Seite 138)

$$\sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{\frac{r}{p}} \sin v \qquad 23)$$

folgt E, und dann M mit genügender Genauigkeit aus:

$$M = E - \sin\varphi \sin E. \qquad 24)$$

Auch aus 13) kann E zu diesem Zwecke entnommen werden.

Um endlich noch $i - i_0$, $\Omega - \Omega_0$, $\omega - \omega_0$ zu bestimmen, bedienen wir uns der bereits durch 2) und 3) bekannten Stücke J, K_0 und u und entnehmen aus dem Knotendreieck $\Omega_0 \Omega N$ (Fig. 62), die Seite ΩN mit K bezeichnend, nach den Napierschen Analogien (Seite 9):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(K + (\Omega - \Omega_0)) &= \frac{\cos \tfrac{1}{2}(i_0 - J)}{\cos \tfrac{1}{2}(i_0 + J)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} K_0 \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(K - (\Omega - \Omega_0)) &= \frac{\sin \tfrac{1}{2}(i_0 - J)}{\sin \tfrac{1}{2}(i_0 + J)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} K_0, \end{aligned} \qquad 25)$$

woraus $\Omega - \Omega_0$ und K, und dann:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(i - i_0) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(K + K_0)}{\cos \tfrac{1}{2}(K - K_0)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J, \qquad 26)$$

woraus $i - i_0$ hervorgehen. Endlich ist:

$$l_0 = v_0 + \omega_0, \qquad l = V + \omega_0 + \Delta\omega,$$

also

$$l - l_0 = V - v_0 + \Delta\omega \qquad 27)$$

und

$$\omega_0 = l_0 - v_0, \qquad \omega = u + K - v = l - K_0 + \Delta u + K - v,$$

also

$$\omega - \omega_0 = (l - l_0) + (K - K_0) + \Delta u - (v - v_0)$$

oder nach 27)

$$\omega - \omega_0 = (K - K_0) + \Delta u + \Delta\omega + (V - v_0) - (v - v_0); \qquad 28)$$

hier sind Δu, $V - v_0$, $v - v_0$ bezw. den Formeln 3), 15), 10) zu entnehmen.

169. Zusammenstellung der Formeln für den Übergang von den Störungen in Polarkoordinaten zu den Elementenstörungen.

I. Man berechne für die neue Oskulationsepoche t:

$$\begin{array}{l|l} M_0 + \mu_0 (t - t_0) = E_0 - \sin\varphi_0 \sin E_0 & M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \Delta M = E - \sin\varphi_0 \sin E \\ r_0 \sin v_0 = a_0 \cos\varphi_0 \sin E_0 & [r] \sin V = a_0 \cos\varphi_0 \sin E \\ r_0 \cos v_0 = a_0 \cos E_0 - a_0 \sin\varphi_0 & [r] \cos V = a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0 \end{array}$$

$$(r) = [r](1 + \nu), \qquad r = (r) \sec b, \qquad \frac{d(r)}{dt} = \frac{(kw)}{\sqrt{p_0}} \frac{\sin\varphi_0 \sin V}{1 + \nu} + [r] \frac{d\nu}{dt}, \qquad \operatorname{tg} b = \frac{z}{(r)}.$$

II.
$$\operatorname{tg} J \sin(l - K_0) = \frac{z}{(r)}$$
$$\operatorname{tg} J \cos(l - K_0) = \frac{(r)\frac{dz}{dt} - z\frac{d(r)}{dt}}{(wk)\sqrt{p_0} + \int U_1 dt}$$
$$l = V + \omega_0 + \Delta\omega$$
$$\Delta u = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J^2 \sin 2(l - K_0)\, 206264''.8.$$

III.
$$\sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \Delta\sqrt{p} = \left(\frac{1}{(wk)}\int U_1 dt + 2\sqrt{p_0}\sin\tfrac{1}{2}J^2\right)\sec J$$
$$p - p_0 = \Delta p = \Delta\sqrt{p}\,(2\sqrt{p_0} + \Delta\sqrt{p})$$
$$\log\beta = S - 4.6855749_{-10}$$
(S ist die am Fuß der Logarithmentafeln angegebene Größe zur Berechnung der sin kleiner Bogen)
$$E - E_0 = \frac{\Delta M}{1 - \beta\sin\varphi_0\cos\tfrac{1}{2}(E + E_0)}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0) = \frac{1}{\sqrt{r_0\,[r]}}\, a_0\cos\varphi_0\sin\tfrac{1}{2}(E - E_0)$$
$$\Delta r = r - r_0 = [r]\frac{\nu + 2\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b} + 2a_0 e_0\cos\tfrac{1}{2}(E + E_0)\sin\tfrac{1}{2}(E - E_0)$$
$$\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{\cos b}{1+\nu}\left((r)\frac{d\nu}{dt} + \frac{(wk)\sin\varphi_0}{\sqrt{p_0}}\left[2\sin\tfrac{1}{2}(V - v_0)\cos\tfrac{1}{2}(V + v_0) - \sin v_0\frac{\nu + 2\sin\frac{1}{2}b^2}{\cos b}\right] + \frac{z}{[r]}\frac{dz}{dt}\right).$$

IV.
$$n\sin N = \frac{1}{wk}\left(\Delta\sqrt{p}\,\frac{dr_0}{dt} + \sqrt{p}\,\Delta\left(\frac{dr}{dt}\right)\right), \qquad \frac{dr_0}{dt} = e_0\sin v_0\frac{(wk)}{\sqrt{p_0}}$$
$$n\cos N = \frac{1}{r}\left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0}\Delta r\right)$$
$$\left.\begin{aligned} e\sin(v - v_0) &= n\sin(N - v_0)\\ e\cos(v - v_0) &= e_0 + n\cos(N - v_0)\end{aligned}\right\} \text{ hieraus } v - v_0$$
$$e^2 - e_0^2 = 2e_0 n\cos(N - v_0) + n^2$$
$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{e^2 - e_0^2}{\sin(\varphi + \varphi_0)}.$$

V.
$$q = \frac{a - a_0}{2a_0} = \frac{\Delta p + a_0(e^2 - e_0^2)}{2\left(p_0 - a_0(e^2 - e_0^2)\right)}$$
$$\mu - \mu_0 = -\mu_0 q f \quad (f \text{ aus Taf. XXVI})$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(v - E) = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v$$
$$M = E - \sin\varphi\sin E.$$

VI.
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(K + (\Omega - \Omega_0)) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_0 - J)}{\cos\frac{1}{2}(i_0 + J)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}K_0$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(K - (\Omega - \Omega_0)) = \frac{\sin\frac{1}{2}(i_0 - J)}{\sin\frac{1}{2}(i_0 + J)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}K_0$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(i - i_0) = \frac{\cos\frac{1}{2}(K + K_0)}{\cos\frac{1}{2}(K - K_0)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J$$
$$\omega - \omega_0 = K - K_0 + \Delta u + \Delta\omega + (V - v_0) - (v - v_0).$$

Abschnitt XXXII.

Berechnung der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten.

170. Grundgleichungen der Enckeschen Methode. Diese Methode berechnet die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten durch fast unmittelbare Verwendung der in diesen Koordinaten aufgestellten allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Planeten. Bezeichnen x, y, z die Koordinaten des gestörten, x_1, y_1, z_1 die des störenden Planeten, dann r und r_1 die beiden Radienvektoren von der Sonne aus und ϱ_1 die gegenseitige Entfernung der beiden Körper, m und m_1 ihre Massen in Teilen der Sonnenmasse, so sind die genannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3}k^2(1+m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{x_1}{r_1^{\,3}} \right) \\
\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3}k^2(1+m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{y_1}{r_1^{\,3}} \right) \qquad 1) \\
\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3}k^2(1+m) &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{z_1}{r_1^{\,3}} \right).
\end{aligned}$$

Das Summenzeichen soll andeuten, daß die daneben stehenden Ausdrücke für jeden in Rechnung gezogenen störenden Planeten aufzustellen und dann zu summieren sind. Bezeichnen ferner x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der ungestörten Bewegung, wie sie sich gestalten würde, wenn keine störenden Massen vorhanden wären, so gelten für diese die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x_0}{r_0^{\,3}} &= 0 \\
\frac{d^2y_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y_0}{r_0^{\,3}} &= 0 \qquad 2) \\
\frac{d^2z_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z_0}{r_0^{\,3}} &= 0,
\end{aligned}$$

deren Integration die Kegelschnittsbewegung gibt; durch die vorhandenen oskulierenden Elemente lassen sich die x_0, y_0, z_0 für jede Zeit finden. Bezeichnen endlich ξ, η, ζ die Unterschiede zwischen den gestörten und den ungestörten Koordinaten oder wie wir uns ausdrücken können, die Störungen in den Koordinaten, so wird wegen $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, $\zeta = z - z_0$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}$$

u. s. f.

und daher nach Eintragung der Gl. 1) und 2):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{x_1}{r_1^{\,3}} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{x_0}{r_0^{\,3}} - \frac{x}{r^3} \right) \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{y_1}{r_1^{\,3}} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{y_0}{r_0^{\,3}} - \frac{y}{r^3} \right) \qquad 3) \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k^2 \sum m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{z_1}{r_1^{\,3}} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{z_0}{r_0^{\,3}} - \frac{z}{r^3} \right)
\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}
r_0^{\,2} &= x_0^{\,2} + y_0^{\,2} + z_0^{\,2} \\
r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
r_1^{\,2} &= x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} \\
\varrho_1^{\,2} &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 .
\end{aligned}$$

Dies sind die Differenzialgleichungen für die Störungsbeträge ξ, η, ζ, die den Koordinaten x_0, y_0, z_0 hinzuzufügen sind, um die gestörten Werte derselben zu erhalten; sie bilden die Grundlage für deren Berechnung und sind hierzu nur noch kleinen Umformungen zu unterwerfen.

Analysiert man die beiden Glieder, aus denen sich die rechten Seiten von 3) zusammensetzen, so bemerkt man zunächst, daß in beiden x, y, z, also auch die zu ermittelnden Größen ξ, η, ζ selbst auftreten; es besteht aber zwischen beiden der wesentliche Unterschied, daß die ersten mit den Faktoren m_1 multipliziert sind, die anderen aber nicht; da nun ξ, η, ζ selbst von der Ordnung der kleinen Größen m_1 sind, so begeht man nur einen Fehler zweiter Ordnung in bezug auf die Massen, wenn man in den ersten Gliedern statt x, y, z die ungestörten Werte x_0, y_0, z_0 setzt, die ebenso wie die x_1, y_1, z_1 als bekannt angenommen werden können; diese ersten Glieder können also bis auf Glieder zweiter Ordnung direkt berechnet werden und werden daher die direkten Glieder genannt; es wird später gezeigt werden, wie man in ihnen ohne besondere Mühe auch die Glieder zweiter, ... Ordnung aufnehmen kann.

Die zweiten Glieder verlangen dagegen zu ihrer Berechnung eine *genaue* Kenntnis der ξ, η, ζ; eine direkte Berechnung derselben ist also nicht möglich, wohl aber führt eine indirekte in der Regel rasch zum Ziel: man verschafft sich zuerst genäherte Werte von ξ, η, ζ, wie solche durch die nachher auseinanderzusetzende Integrationsmethode sich von selbst darbieten, setzt diese ein und erhält durch Integration Werte von ξ, η, ζ, die nun an Stelle der ersteren treten, worauf die Integration wiederholt wird. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich die ξ, η, ζ nicht mehr ändern. Man nennt diese Glieder die indirekten.

Bei den indirekten Gliedern tritt noch die weitere Schwierigkeit auf, daß sie Differenzen zweier nahe gleich großen Zahlen sind, so daß man zu ihrer scharfen Berechnung Tafeln von einer höheren Stellenzahl benötigte, um sie scharf rechnen zu können; dieser Mißstand wird durch folgende Umformung beseitigt. Es ist:

$$\frac{x_0}{r_0^{\,3}} - \frac{x}{r^3} = \frac{x - \xi}{r_0^{\,3}} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^{\,3}} \left(x \left(1 - \frac{r_0^{\,3}}{r^3} \right) - \xi \right)$$

und die Schwierigkeit ist jetzt auf den allen drei Koordinaten gemeinsamen Faktor $1 - \frac{r_0^{\,3}}{r^3}$ geworfen. Nun ist aber weiter:

$$r^2 = (x_0+\xi)^2+(y_0+\eta)^2+(z_0+\zeta)^2 = r_0^{\,2}+(2x_0+\xi)\xi+(2y_0+\eta)\eta+(2z_0+\zeta)\zeta,$$

also

$$\frac{r^2}{r_0^{\,2}} = 1+\frac{2}{r_0^{\,2}}\left((x_0+\tfrac{1}{2}\xi)\xi+(y_0+\tfrac{1}{2}\eta)\eta+(z_0+\tfrac{1}{2}\zeta)\zeta\right).$$

Setzt man also

$$q = \frac{1}{r_0^{\,2}}\left((x_0+\tfrac{1}{2}\xi)\xi+(y_0+\tfrac{1}{2}\eta)\eta+(z_0+\tfrac{1}{2}\zeta)\zeta\right), \qquad 4)$$

so wird

$$\frac{r^2}{r_0^{\,2}} = 1+2q$$

und

$$\frac{r_0^{\,3}}{r^3} = (1+2q)^{-\frac{3}{2}} = 1-3q+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}q^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}q^3+\cdots$$
$$= 1-q\{3(1-\tfrac{5}{2}q+\tfrac{35}{6}q^2-\tfrac{315}{24}q^3+\cdots)\}$$

oder wenn die Reihe $\{\cdots\}$ mit f bezeichnet wird:

$$\frac{r_0^{\,3}}{r^3} = 1-qf.$$

Die Reihe f kann mit dem Argument q leicht tabuliert werden, was zuerst von *Encke* (Astr. Nachr. Band 34, S. 355; Berl. Jahrb. 1858) ausgeführt wurde. Siehe Tafeln Nr. XXVI. Es wird also jetzt:

$$\frac{x_0}{r_0^{\,3}}-\frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^{\,3}}(qfx-\xi)$$

und die Grundgleichungen gehen in folgende über, die der Integration unterworfen werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= k^2\sum m_1\left(\frac{x_1-x}{\varrho_1^{\,3}}-\frac{x_1}{r_1^{\,3}}\right)+\frac{k^2}{r_0^{\,3}}(fqx-\xi)\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= k^2\sum m_1\left(\frac{y_1-y}{\varrho_1^{\,3}}-\frac{y_1}{r_1^{\,3}}\right)+\frac{k^2}{r_0^{\,3}}(fqy-\eta) \qquad 5)\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k^2\sum m_1\left(\frac{z_1-z}{\varrho_1^{\,3}}-\frac{z_1}{r_1^{\,3}}\right)+\frac{k^2}{r_0^{\,3}}(fqz-\zeta).
\end{aligned}$$

171. Ausführung der Integration. Um die Gl. 5) zu integrieren, berechnet man für eine Reihe äquidistanter zwischen die gegebene und die neue Oskulationsepoche eingeschobener Zeitpunkte die rechten Seiten. Dies ist möglich, denn die x_1, y_1, z_1 können aus den Angaben der Jahrbücher, die x_0, y_0, z_0 aus den gegebenen oskulierenden Elementen gefunden werden und weiter wird sich gleich zeigen, daß man, abgesehen vom Anfang des Verfahrens, durch die Rechnung für einen bestimmten Zeitmoment bereits einen genäherten Wert von ξ, η, ζ für den nächsten erhält. Mit diesen Näherungswerten $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ kann man in den direkten Gliedern sogleich die Störungen höherer Ordnung soviel wie vollständig mitnehmen, indem man setzt: $x_1 - x = x_1 - (x_0+\bar{\xi}), \ldots$, und die indirekten Glieder fast direkt ansetzen, indem man zuerst q aus 4) rechnet, damit f aus der Tafel entnimmt und $x = x_0+\bar{\xi}, \ldots$ $\xi = \bar{\xi}, \ldots$ setzt. Eine Wiederholung der Rechnung genügt, falls sich der Unterschied zwischen den Näherungswerten $\bar{\xi}, \ldots$ und den durch Integration erlangten,

genaueren als zu groß herausstellt. Am Anfang des Verfahrens wird unter Umständen eine mehrfache Wiederholung der Rechnung nötig sein, falls die Näherungswerte $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, von denen man ausgehen muß, trotz der Nähe der Oskulationsepoche zu fehlerhaft sein sollten. Man erhält auf diese Weise für eine Reihe äquidistanter Zeitmomente die Werte $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\cdots$, aus denen durch die Formeln der mechanischen Integration die ξ, η, ζ hervorgehen. Die für den vorliegenden Fall zweckmäßigste Formel ist, wenn $\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{t=a+iw} = f(a+iw)$ gesetzt wird:

$$\xi = \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+nw} f(t)dt^2 = w^2\left({}^{\mathrm{II}}f(a+nw) + \tfrac{1}{12}f(a+nw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+nw) + \cdots\right),$$

wobei die ersten Glieder der Summenreihen nach

$${}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \cdots$$
$${}^{\mathrm{II}}f(a) = +\tfrac{1}{24}f(a-w) - \tfrac{17}{5760}\left(2f^{\mathrm{II}}(a-w) + f^{\mathrm{II}}(a)\right) + \cdots$$

anzusetzen sind. ξ verschwindet hiernach für $t = a - \frac{1}{2}w$ und es ist also die Einteilung der Zeit so zu treffen, daß die Oskulationsepoche mit $t_0 = a - \frac{1}{2}w$ zusammenfällt.

Wenn die Berechnung der Funktionswerte bis einschließlich $f(a+iw)$ fortgeschritten ist, so ist dadurch, wie der Anblick des Schemas Seite 474 lehrt, ${}^{\mathrm{II}}f(a+(i+1)w)$ bekannt geworden; dies ist aber das Hauptglied in dem Ausdrucke von ξ für die Zeit $a+(i+1)w$, welcher lautet:

$$\xi_{a+(i+1)w} = w^2\left({}^{\mathrm{II}}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+(i+1)w) - \cdots\right).$$

Beachtet man, daß $f(a+(i+1)w)$ und $f^{\mathrm{II}}(a+(i+1)w)$, die mit kleinen Faktoren multipliziert sind, hinreichend genau durch Extrapolation ermittelt werden können, so ist ersichtlich, daß nach Abschluß der Rechnung für $a+iw$ bereits ein guter Näherungswert von ξ für $a+(i+1)w$ von selbst dargeboten wird, mit dem in der oben auseinandergestetzten Weise die Berechnung der direkten und indirekten Glieder erfolgen kann.

Oppolzer hat das Verfahren in folgendes Schema gebracht, welches eine indirekte Rechnung fast ganz ausschließt. Wir nehmen an, die Rechnung sei bis zum Argument $a+iw$ vollendet und man beginne mit $f(a+(i+1)w)$. Um die Multiplikation mit w^2 am Schluß zu ersparen, rechnen wir gleich $w^2 f(a+iw)$, was am einfachsten geschieht, wenn überall w^2k^2 statt k^2 genommen oder w als Zeiteinheit eingeführt wird. Setzt man dann zur Abkürzung die direkt zu berechnenden Glieder

$$\sum' w^2k^2m_1\left(\frac{x_1-x}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{x_1}{r_1^{\,3}}\right) = \sum'(X)$$
$$\frac{w^2k^2}{r_0^{\,3}} = h,$$

so wird aus der ersten Gleichung 5)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum'(X) + hfqx - h\xi. \qquad 6)$$

Nun ist

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{II}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \tfrac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w)$$

oder

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{II}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{a+(i+1)w} - \tfrac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w)$$

oder nach Eintragung der eben erhaltenen Gleichung

$$\xi_{a+(i+1)w} = {}^{II}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}\sum(X) + \tfrac{1}{12}hfqx - \tfrac{1}{12}h\xi - \tfrac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w).$$

Fassen wir die Glieder rechts, die direkt anzusetzen sind, nämlich ${}^{II}f(a+(i+1)w)$, $\frac{1}{12}\sum(X)$ und $\frac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w)$ (letzteres weil kleine Fehler in der Extrapolation durch den Faktor 1 : 240 vernichtet werden) unter einer Bezeichnung zusammen:

$$S_x = {}^{II}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}\sum(X) - \tfrac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w),$$

so wird

$$\xi(1+\tfrac{1}{12}h) = S_x + \tfrac{1}{12}hfqx. \qquad 7)$$

In dem Ausdrucke 4) von q kann man die $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$ durch extrapolierte Werte dieser Größen ersetzen, da sie nochmals mit ξ, η, ζ multipliziert werden; die ξ, η, ζ selbst werden durch 7) gegeben. Setzt man also zur Abkürzung die direkt zu berechnenden Größen

$$\alpha = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^2(1+\frac{1}{12}h)}, \qquad \beta = \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^2(1+\frac{1}{12}h)}, \qquad \gamma = \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^2(1+\frac{1}{12}h)}, \qquad 8)$$

so wird aus 4)

$$q = \alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z + \tfrac{1}{12}hfq(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

oder

$$q = \frac{\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z}{1 - \frac{1}{12}hf(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \qquad 9)$$

Hiermit läßt sich ein genauer Wert von q berechnen, denn die auf der rechten Seite noch auftretende, nicht direkt bekannte Größe f läßt sich wegen ihres einfachen Ganges leicht extrapolieren, wenn man es nicht vorzieht den ganzen Nenner zu extrapolieren.

Ferner folgt aus der Verbindung der Gleichungen 6) und 7)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum(X) + hfqx - \frac{h}{1+\frac{1}{12}h}(S_x + \tfrac{1}{12}hfqx)$$

oder wenn

$$\frac{h}{1+\frac{1}{12}h} = h' \qquad 10)$$

gesetzt wird:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum(X) + h'(fqx - S_x). \qquad 11)$$

Da q durch 9) bekannt geworden ist, gibt dies einen direkt berechenbaren Wert von

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{a+(i+1)w} = f(a+(i+1)w),$$

worauf ξ für dasselbe Argument aus

$$\xi = {}^{II}f(a+(i+1)w) + \tfrac{1}{12}f(a+(i+1)w) - \tfrac{1}{240}f^{II}(a+(i+1)w) \qquad 12)$$

folgt.

Diese Vorschriften setzen voraus, daß die Rechnung bereits im Gang ist; es ist also noch zu zeigen, wie man beim *Beginn* derselben zu verfahren hat, wenn man ${}^{II}f(a + iw)$ noch nicht kennt. Man rechnet für die vier die Oskulationsepoche $a - \frac{1}{2}w$ symmetrisch einschließenden Zeitpunkte $a - 2w$, $a - w$, a und $a + w$ nach 5) die Ausdrücke $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, indem man in den direkten Gliedern $\xi = 0$ setzt, was in der Nähe der Oskulationsepoche *nie* einen Fehler veranlassen kann, und indem man die indirekten Glieder ganz vernachlässigt. Mit den vier Werten bildet man die Differenzen- und Summenreihen und gelangt nach Integration zu genäherten Werten von ξ, mit denen die Rechnung wiederholt wird, nachdem man sie in die indirekten Glieder eingeführt hat. Dies wird so lange fortgesetzt, bis die ξ sich nicht mehr ändern, worauf diese als die strengen Werte betrachtet werden können. Daran schließt sich dann das oben auseinandergesetzte direkte Verfahren für die weiteren Zeitpunkte. Die ersten Näherungsrechnungen führt man zweckmäßig auf einem Nebenblatt aus.

172. Berechnung der Koordinaten. In der Regel wird die Störungsrechnung in einem Koordinatensystem ausgeführt, dessen xy-Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt und dessen x-Achse durch den Frühlingspunkt geht. Die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1 der störenden Planeten muß man dann aus den Ekliptikal-Polarkoordinaten r_1, λ_1, β_1, die in den Jahrbüchern gegeben werden, durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 \\ y_1 &= r_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 \\ z_1 &= r_1 \sin\beta_1 \end{aligned}$$

berechnen, wobei darauf zu sehen ist, daß das Äquinoktium, auf das sich die vorgelegten Elemente beziehen, in Übereinstimmung gebracht werde mit dem von λ_1 und β_1 oder umgekehrt. Das Berliner Jahrbuch gibt die λ_1, β_1 bezogen auf das Äquinoktium des benachbarten Jahrzehnts; auf dieses wird man also zweckmäßig die Elemente übertragen und erreicht dadurch den Vorteil, daß man im Laufe einer Rechnung das Äquinoktium in der Regel nicht zu wechseln braucht. Die rechtwinkligen Jupiterkoordinaten von 1770—1830 findet man in Publikation VI der Astronomischen Gesellschaft fertig berechnet vor; ebenso für 1830—1865 von Jupiter und den übrigen in Betracht kommenden Planeten in der Publikation I. Die älteren Jahrgänge des Berliner Jahrbuches geben bis 1867 neben dem Radiusvektor die heliozentrische Länge und Breite, bezogen auf das *wahre* Äquinoktium; diese muß man also vorher auf das *mittlere* Äquinoktium übertragen, das man der Rechnung überhaupt zugrunde legt. Das Berliner Jahrbuch für 1868—1870 gibt die rechtwinkligen Koordinaten direkt und noch die Glieder, die vom gestörten Planeten unabhängig sind. Vom Jahrgang 1871 an ist die oben erwähnte Einrichtung getroffen.

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des gestörten Planeten müssen aus den gegebenen Elementen der Anfangsepoche berechnet werden, wofür man nach Nr. 44 bzw. Nr. 55 und nach den Formeln 10) (Seite 27) hat:

Ellipse:

$$M_0 + \mu_0 (t - t_0) = E - \sin\varphi_0 \sin E$$
$$r_0 \sin v_0 = a_0 \cos\varphi_0 \sin E$$
$$r_0 \cos v_0 = a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0$$

Parabel:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_0 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_0^{\,3} = \frac{k(t-T)}{\sqrt{2}\, q_0^{\frac{3}{2}}}$$

(Barkersche Tafel)

$$r_0 = \frac{q_0}{\cos^2 \tfrac{1}{2} v_0}$$

$$u_0 = v_0 + \omega_0$$
$$x_0 = r_0 (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0)$$
$$y_0 = r_0 (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0)$$
$$z_0 = r_0 \sin u_0 \sin i_0$$

oder mit Einführung der Gaußschen Konstanten für die Ekliptik

$$\sin a \sin A = \cos \Omega_0 \qquad \sin b \sin B = \sin \Omega_0$$
$$\sin a \cos A = -\cos i_0 \sin \Omega_0 \qquad \sin b \cos B = \cos i_0 \cos \Omega_0$$

$$x_0 = r_0 \sin a \sin(A + u_0)$$
$$y_0 = r_0 \sin b \sin(B + u_0)$$
$$z_0 = r_0 \sin i_0 \sin u_0 .$$

Zur Ermittelung der gegenseitigen Entfernung ϱ_1 der beiden Planeten aus

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

rechnet man am besten das System durch:

$$\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta = x_1 - x$$
$$\varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta = y_1 - y$$
$$\varrho_1 \sin\vartheta = z_1 - z.$$

Es sind noch einige Bemerkungen über die praktische Ausführung der ganzen Rechnung zu machen. Eine allgemeine Regel, wie groß das Intervall w zu wählen sei, läßt sich namentlich bei Anwendung der Methode auf Kometen nicht geben. Man wird nur im Auge behalten müssen, daß die mechanische Integration stets mit Sicherheit ausführbar sei, daß also die Differenzen der Funktionswerte regelmäßig laufen. Das ist gerade bei den rechtwinkligen Koordinaten häufig nicht der Fall, weshalb man sich hüten muß, das Intervall zu groß zu nehmen. Bei kleinen Planeten, bei denen aber die Methode kaum mehr angewendet wird, kann außer in bedeutender Jupitersnähe $w = 40$ Tage gesetzt werden. Bei Kometen, die nur in einer Erscheinung sichtbar waren, wird die Methode wegen der Kürze und Übersichtlichkeit der Rechnung mit besonderen Vorteil angewendet, doch ist dann das Intervall von 20 Tagen oder nach Umständen noch ein kürzeres anzuraten. — Das Intervall w führt man als Zeiteinheit ein, d. h. man setzt $(wk)^2$ statt k^2, dann fällt in der Formel für mechanische Integration der Faktor w^2 weg. Ferner rechnet man meist in Einheiten der 7. Dezimale der astronomischen Einheit, d. h. man rechnet die mit 10^7 multiplizierten Störungen; den dann auftretenden Faktor $(wk)^2 10^7 m_1$ findet man in Taf. XXXXV für $w = 20$ und $w = 40$ und für alle Planeten; in den nicht mit m_1 multiplizierten Gliedern hat man:

$$\begin{array}{rrl} & & \log (wk)^2 \\ w = & 10 & 8.47\,1163 \\ & 20 & 9.07\,3223 \\ & 40 & 9.67\,5283. \end{array}$$

Zur Ausführung der Rechnung genügen meist sechsstellige Logarithmentafeln.

Die Verwertung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten ist eine ungemein einfache, besonders wenn es sich um die Aufstellung einer Ephemeride der gestörten geozentrischen Örter handelt. Da diese nämlich (Nr. 72) durch Benutzung der aus den Elementen berechneten ungestörten heliozentrischen Äquatorealkoordinaten $x_0 = r_0 \sin a \sin(A + \omega + v)$, ... entsteht, so kann man diesen die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten unmittelbar hinzufügen, wenn man diese nur vorher ebenfalls auf den Äquator bezogen hat. Die Umwandlung der Ekliptikalstörungen $\xi\ \eta\ \zeta$ in äquatoreale $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ aber vollzieht sich nach den Formeln (Nr. 10)

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \\ \eta' &= \eta \cos\varepsilon - \zeta \sin\varepsilon \\ \zeta' &= \eta \sin\varepsilon + \zeta \cos\varepsilon, \end{aligned}$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet. Die gestörte, geozentrische Rektaszension und Deklination geht dann hervor aus

$$\begin{aligned} \varrho \cos\delta \cos\alpha &= x_0 + X + \xi' \\ \varrho \cos\delta \sin\alpha &= y_0 + Y + \eta' \\ \varrho \sin\delta &= z_0 + Z + \zeta', \end{aligned}$$

wo X, Y, Z die Äquatorealkoordinaten der Sonne sind.

Man kann auch die Änderungen der ungestörten geozentrischen Rektaszension und Deklination infolge der Störungen durch $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ ausdrücken. Durch Differenziation der letzten Gleichungen erhält man nach leichter Umwandlung:

$$\begin{aligned} \varrho \cos\delta d\alpha &= -\sin\alpha \xi' + \cos\alpha \eta' \\ \varrho d\delta &= -\sin\delta \cos\alpha \xi' - \sin\delta \sin\alpha \eta' + \cos\delta \zeta'. \end{aligned}$$

Die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten haben den Nachteil ziemlich rasch stark anzuwachsen, sie überhaupt größer erscheinen zu lassen, als sie sind, was außer der Unannehmlichkeit des Operierens mit großen Zahlen auch Unsicherheit der Rechnung herbeiführt. Diesem Übelstand kann nur dadurch entgegengetreten werden, daß man zu neuen oskulierenden Elementen übergeht, von deren Oskulationsepoche aus man die Störungsrechnung von vorne beginnt. Die Aufgabe, neue Elemente aufzustellen, haben wir bereits in Nr. 110 gelöst, indem dort gezeigt ist, wie aus den rechtwinkligen Koordinaten eines Ortes und ihren ersten Differenzialquotienten die Bahn ermittelt wird. Es sind dort die Elemente direkt aus x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ abgeleitet; sicherer ist es offenbar, durch die ermittelten Störungsbeträge ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ selbst die Zuwächse der früheren Elemente darzustellen. Auch diese Aufgabe werden wir an anderer Stelle in einem anderen Zusammenhange lösen (Nr. 178), hier aber darauf verzichten, da der genannte Übergang auf neue oskulierende Ele-

mente nur selten ausgeführt wird. Da dieser nämlich erhebliche Rechenarbeit verursacht, durch welche die sonstige Kürze und Annehmlichkeit der Rechnung nach der Enckeschen Methode fast völlig kompensiert wird, so wird man von der Anwendung dieser Methode überhaupt absehen, wenn ein solcher Übergang in Aussicht steht. Tatsächlich ist die Methode nur für kürzere Zeiträume zu empfehlen, etwa für die Erscheinung eines Kometen, wo sie allerdings unschätzbare Dienste leistet, da sie auf Bahnen jeder Form gleich gut anwendbar ist.

173. Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten.

I.

Ellipse

$$M_0 + \mu_0 (t - t_0) = E - \sin\varphi_0 \sin E$$
$$r_0 \sin v_0 = a_0 \cos\varphi_0 \sin E$$
$$r_0 \cos v_0 = a_0 \cos E - a_0 \sin\varphi_0$$

Parabel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_0 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v_0^{\,3} = \frac{k(t-T)}{\sqrt{2}\, q_0^{\,\frac{3}{2}}}$$

$$r_0 = \frac{q_0}{\cos^2 \tfrac{1}{2} v_0}$$

$$u_0 = v_0 + \omega_0$$

$$\sin a \sin A = \cos \Omega_0 \qquad \sin b \sin B = \sin \Omega_0$$
$$\sin a \cos A = -\cos i_0 \sin \Omega_0 \qquad \sin b \cos B = \cos i_0 \cos \Omega_0$$

$$x_0 = r_0 \sin a \sin(A + u_0)$$
$$y_0 = r_0 \sin b \sin(B + u_0)$$
$$z_0 = r_0 \sin i_0 \sin u_0 .$$

II.

$$x_1 = r_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1$$
$$y_1 = r_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1$$
$$z_1 = r_1 \sin\beta_1 .$$

III.

$$h = \frac{w^2 k^2}{r_0^{\,3}}, \qquad h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h}, \qquad n = r_0^{\,2} (1 + \tfrac{1}{12} h)$$

$$\log (w k)^2$$
$$w = 10 \quad 8.47\,1163$$
$$20 \quad 9.07\,3223$$
$$40 \quad 9.67\,5283.$$

IV. Für die vier die Oskulationsepoche $a - \frac{1}{2} w$ einschließenden Zeitmomente $a - 2w$, $a - w$, a, $a + w$ rechnet man in erster Näherung:

$$\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta = x_1 - x_0$$
$$\varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta = y_1 - y_0$$
$$\varrho_1 \sin\vartheta = z_1 - z_0$$

$$f_x(a + iw) = \frac{d^2\xi}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x_0}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{x_1}{r_1^{\,3}}\right) + \cdots = \sum(X)$$
$$f_y(a + iw) = \frac{d^2\eta}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y_0}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{y_1}{r_1^{\,3}}\right) + \cdots = \sum(Y)$$
$$f_z(a + iw) = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 10^7 (wk)^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z_0}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{z_1}{r_1^{\,3}}\right) + \cdots = \sum(Z)$$

entsprechende Glieder für alle in Betracht kommenden störenden Planeten.

$10^7 (wk)^2 m_1$, ... aus Taf. XXXXV.

$$^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}w) - \cdots$$
$$^{\mathrm{II}}f(a) = \tfrac{1}{24}f(a-w) - \tfrac{17}{5760}(2f^{\mathrm{II}}(a-w) + f^{\mathrm{II}}(a)) + \cdots$$
$$\xi = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw)$$

Ebenso für η und ζ.

V. Die weiteren Näherungen für die genannten vier Zeitmomente und sodann die ganze Fortsetzung der Rechnung erfolgen nach:

$$\alpha = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{n}, \qquad S_x = {}^{\mathrm{II}}f_x(a+iw) + \tfrac{1}{12}\sum(X) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}{}_x(a+iw)$$
$$\beta = \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{n}, \qquad S_y = {}^{\mathrm{II}}f_y(a+iw) + \tfrac{1}{12}\sum(Y) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}{}_y(a+iw)$$
$$\gamma = \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{n}, \qquad S_z = {}^{\mathrm{II}}f_z(a+iw) + \tfrac{1}{12}\sum(Z) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}{}_z(a+iw)$$
$$q = \frac{\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z}{1 - \frac{1}{12}hf(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

f mit Arg. q aus Taf. XXVI

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = f_x(a+iw) = \sum(X) + h'(fqx - S_x)$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = f_y(a+iw) = \sum(Y) + h'(fqy - S_y)$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = f_z(a+iw) = \sum(Z) + h'(fqz - S_z)$$

$$\xi_{a+iw} = {}^{\mathrm{II}}f(a+iw) + \tfrac{1}{12}f(a+iw) - \tfrac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+iw) + \cdots$$

Ebenso η und ζ.

VI. $\xi' = \xi, \qquad \eta' = \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon, \qquad \zeta' = \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon$

$$\varrho\cos\delta\cos\alpha = x_0 + X + \xi'$$
$$\varrho\cos\delta\sin\alpha = y_0 + Y + \eta'$$
$$\varrho\sin\delta = z_0 + Z + \zeta'$$

oder

$$\varrho\cos\delta\, d\alpha = -\sin\alpha\,\xi' + \cos\alpha\,\eta'$$
$$\varrho\, d\delta = -\sin\delta\cos\alpha\,\xi' - \sin\delta\sin\alpha\,\eta' + \cos\delta\,\zeta'$$
$$\alpha = \alpha_0 + d\alpha, \qquad \delta = \delta_0 + d\delta.$$

174. Beispiel für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. Wir wählen die Berechnung der Störungen des periodischen Kometen Brooks durch Jupiter und Saturn während seiner Erscheinung im Jahre 1896. Die Elemente sind auf Ekliptik und Äquinoktium des benachbarten Jahrzehnts 1900.0 übertragen worden, um die Angaben des Berliner Jahrbuchs für die Koordinaten der störenden Planeten umgeändert benutzen zu können, und lauten:

Komet 1896 VI.

Oskulationsepoche 1896 Okt. 11.0 M. Z. Berlin

Epoche 1896 Nov. 4.5 M. Z. Berlin

$M_0 = 0^\circ\ 2'38''.12$

$\omega = 343\ 47\ 42.27$
$\Omega = 18\ 4\ 21.13$ } Ekliptik und Äquinoktium 1900.0
$i = 6\ 3\ 35.40$

$\varphi = 27\ 59\ 51.29$

$\mu = 499''.9894$

$\log a = 0.567\ 3639$

Rechtwinklige Ekliptikalkoordinaten:

$x_0 = r_0[9.999\ 7679]\sin(107^\circ 58'41''.03 + u_0)$
$y_0 = r_0[9.997\ 8018]\sin(\ 18\ 10\ \ 2.77 + u_0)$
$z_0 = r_0[9.023\ 5281]\sin u_0$

$\log a\cos\varphi$ 0.51 3309
$\log a\sin\varphi$ 0.23 8939
$\log(\sin\varphi)''$ 4.98 6000

Wir wählen ein 40-tägiges Intervall und berechnen zunächst für die vier Zeitmomente 1896 Aug. 12.0, Sept. 21.0, Okt. 31.0, Dez. 10.0, welche die Oskulationsepoche symmetrisch einschließen, in erster Näherung nach den Formeln I.—IV. die Störungswerte ξ, η, ζ; bis auf die Integration kann alles in definitiver Weise geschehen und im eigentlichen Schema (Blatt 1, 2, 3 Seite 550 ff.) eingetragen werden, diese selbst aber führt man zuerst auf einem Nebenblatt aus:

	^{II}f	^{I}f	$\Sigma(X)$	f^{I}	f^{II}	$\frac{1}{12}\Sigma(X)$	$\xi = S_x$
		− 108.66					
$a-2w$	+ 55.05		+ 55.68			+ 4.64	+ 59.69
		− 52.98		− 2.55			
$a-w$	+ 2.07		+ 53.13		− 1.03	+ 4.43	+ 6.50
		+ 0.15		− 3.58			
a	+ 2.22		+ 49.55		− 1.02	+ 4.13	+ 6.35
		+ 49.70		− 4.60			
$a+w$	+ 51.92		+ 44.95			+ 3.75	+ 55.67
		+ 94.65					

	^{II}f	^{I}f	$\Sigma(Y)$	f^{I}	f^{II}	$\frac{1}{12}\Sigma(Y)$	$\eta = S_y$
		+ 94.24					
$a-2w$	− 48.23		− 47.91			− 3.99	− 52.22
		+ 46.33		+ 1.55			
$a-w$	− 1.90		− 46.36		− 0.80	− 3.86	− 5.76
		− 0.03		+ 0.75			
a	− 1.93		− 45.61		− 0.97	− 3.80	− 5.73
		− 45.64		− 0.22			
$a+w$	− 47.57		− 45.83			− 3.82	− 51.39
		− 91.47					

	^{II}f	^{I}f	$\Sigma(Z)$	f^{I}	f^{II}	$\frac{1}{12}\Sigma(Z)$	$\zeta = S_z$
		− 0.47					
$a-2w$	− 0.12		+ 0.56			+ 0.05	− 0.07
		+ 0.09		− 0.62			
$a-w$	− 0.03		− 0.06		− 0.09	0.00	− 0.03
		+ 0.03		− 0.71			
a	0.00		− 0.77		− 0.09	− 0.06	− 0.06
		− 0.74		− 0.80			
$a+w$	− 0.74		− 1.57			− 0.14	− 0.88
		− 2.31					

(Fortsetzung Seite 554 unten.)

Blatt 1a. Komet.

	1896	Aug. 12.0	Sept. 21.0	Okt. 31.0	Dez. 10.0	Dez. 50.0
I.	M	348° 18′ 29″.0	353° 51′ 48″.6	359° 25′ 8″.2	4° 58′ 27″.7	10° 31′ 47″.3
	E	338 24 43.2	348 30 7.9	358 54 17.7	9 20 20.5	19 30 52.3
	$\sin E$	9.56 5765$_n$	9.29 9574$_n$	8.28 1298$_n$	9.21 0254	9.52 3806
	$\cos E$	9.96 8415	9.99 1196	9.99 9920	9.99 4205	9 97 4307
	$r_0 \sin v_0$	0.07 9074	9.81 2883$_n$	8.79 4607$_n$	9.72 3563	0.03 7115
	$r_0 \cos v_0$	0.23 0519	0.27 5359	0.29 1952	0.28 1116	0.24 2337
	$\cos v_0$	9.91 2264	9.97 5612	9.99 9780	9.98 3949	9.92 8704
	v_0	324° 47′ 36″.4	340° 58′ 39″.3	358° 10′ 39″.5	15° 28′ 53″.8	31° 56′ 24″.3
	r_0	0.31 8255	0.29 9747	0.29 2172	0.29 7167	0.31 3633
	$A + \omega + v_0$	56° 33′ 59″.7	72° 45′ 2″.6	89° 57′ 2″.8	107° 15′ 17″.1	123° 42′ 47″.6
	$\sin (A + \omega + v_0)$	9.92 1441	9.98 0014	0.00 0000	9.98 0001	9.92 0032
	$\log x_0$	0.23 9463	0.27 9528	0.29 1939	0.27 6935	0.23 3432
	x_0	+ 1.73 563	+ 1.90 339	+ 1.95 857	+ 1.89 206	+ 1.71 172
	$B + \omega + v_0$	326° 45′ 21″.4	342° 56′ 24″.2	0° 8′ 24″.5	17° 26′ 38″.8	33° 54′ 9″.3
	$\sin (B + \omega + v_0)$	9.73 8945$_n$	9.46 7418$_n$	7.38 8436	9.47 6796	9.74 6465
	$\log y_0$	0.05 5002$_n$	9.76 4967$_n$	7.67 8410	9.77 1765	0.05 7900
	y_0	— 1.13 502	— 0.58 206	+ 0.00 477	+ 0.59 124	+ 1.14 262
	$C + \omega + v_0$	308° 35′ 18″.7	324° 46′ 21″.6	341° 58′ 21″.8	359° 16′ 36″.1	15° 44′ 6″.6
	$\sin (C + \omega + v_0)$	9.89 3010$_n$	9.76 1042$_n$	9.49 0618$_n$	8.10 1187$_n$	9.43 3276
	$\log z_0$	9.23 4793$_n$	9.08 4317$_n$	8.80 6318$_n$	7.42 1882$_n$	8.77 0437
	z_0	— 0.17 171	— 0.12 143	— 0.06 402	— 0.00 264	+ 0.05 894
III.	r_0^2	0.63 6510	0.59 9494	0.58 4344	0.59 4334	0.62 7266
	r_0^3	0.95 4765	0.89 9241	0.87 6516	0.89 1501	0.94 0899
	h	8.72 0518	8.77 6042	8.79 8767	8.78 3782	8.73 4384
	$\frac{1}{12} h$	7.64 1337	7.69 6861	7.71 9586	7.70 4601	7.65 5203
	$1 + \frac{1}{12} h$	0.00 1898	0.00 2156	0.00 2271	0.00 2194	0.00 1959
	h'	8.71 8620	8.77 3886	8.79 6496	8.78 1588	8.73 2425
	n	0.63 8408	0.60 1650	0.58 6615	0.59 6528	0.62 9225
V.	α	9.60 105	9.67 788	9.70 532	9.68 041	9.60 421
	S_x	1.77 590	0.81 291	0.80 277	1.74 562	2.18 971
	αS_x	1.37 695	0.49 079	0.50 809	1.42 603	1.79 392
	β	9.41 659$_n$	9.16 332$_n$	7.09 180	9.17 524	9.42 868
	S_y	1.71 784$_n$	0.76 402$_n$	0.75 815$_n$	1.71 088$_n$	2.13 688$_n$
	βS_y	1.13 443	9.92 374	7.84 995$_n$	0.88 612$_n$	1.56 556$_n$
	γ	8.59 638$_n$	8.48 267$_n$	8.21 971$_n$	6.82 535$_n$	8.14 121
	S_z	8.845$_n$	8.477$_n$	8.778$_n$	9.94 45$_n$	0.51 455
	γS_z	7.441	6.960	6.998	6.770	8.65 576
	αS_x	+ 23.82	+ 3.10	+ 3.22	+ 26.67	+ 62.22
	βS_y	+ 13.62	+ 0.84	— 0.01	— 7.69	— 36.78
	γS_z	+ 0.00	0.00	0.00	0.00	+ 0.05
	Zähler	+ 37.44	+ 3.94	+ 3.21	+ 18.98	+ 25.49
	log »	1.5733	0.5955	0.5065	1.2783	1.4064
	αx	+ 0.693	+ 0.907	+ 0.994	+ 0.906	+ 0.688
	βy	+ 0.296	+ 0.085	+ 0.000	+ 0.088	+ 0.307
	γz	+ 0.007	+ 0.004	+ 0.001	+ 0.000	+ 0.000
	Summe	+ 0.996	+ 0.996	+ 0.995	+ 0.994	+ 0.995
	log (»)	9 9983	9.9983	9.9978	9.9974	9.9978
	$\frac{1}{12} h (\alpha x + \beta y + \gamma z)$	7.6396	7.6952	7.7174	7.7020	7.6530
	f	0.4771	0.4771	0.4771	0.4771	0.4771
		8.1167	8.1723	8.1945	8.1791	8.1301
	log Nenner	9.9943	9.9935	9.9931	9 9934	9.9941
	log q	1.5790	0.6020	0.5134	1.2849	1.4123
Taf. XXVI	log f	0.4771	0.4771	0.4771	0.4771	0.4771
	fq	2.0561	1.0791	0.9905	1.7620	1.8894

Blatt 1b. Komet.

1896	Aug. 12.0	Sept. 21.0	Okt. 31.0	Dez. 10.0	Dez. 50.0
fqx	2.2956	1.3586	1.2824	2.0389	2.1228
Zahl	+ 197.50	+ 22.84	+ 19.16	+ 109.37	+ 132.68
$-S_x$	— 59.69	— 6.50	— 6.35	— 55.67	— 154.78
$fqx - S_x$	+ 137.81	+ 16.34	+ 12.81	+ 53.70	— 22.10
$\log(fqx - S_x)$	2.1392	1.2133	1.1075	1.7300	1.3444_n
$h'(fqx - S_x)$	0.8578	9.9872	9.9040	0.5115	0.0768_n
Zahl	+ 7.21	+ 0.97	+ 0.80	+ 3.25	— 1.19
$\Sigma(X)$	+ 55.68	+ 53.13	+ 49.55	+ 44.95	+ 39.44
$d^2\xi$	+ 62.89	+ 54.10	+ 50.35	+ 48.20	+ 38.25
fqy	2.1111_n	0.8441_n	8.6689	1.5338	1.9473
Zahl	— 129.15	— 6.98	+ 0.05	+ 34.19	+ 88.58
$-S_y$	+ 52.22	+ 5.76	+ 5.73	+ 51.39	+ 137.05
$fqy - S_y$	— 76.93	— 1.22	+ 5.78	+ 85.58	+ 225.63
$\log(fqy - S_y)$	1.8851_n	0.0864_n	0.7619	1.9324	2.3534
$h'(fqy - S_y)$	0.6047_n	8.8603_n	9.5584	0.7140	1.0858
Zahl	— 4.02	— 0.07	+ 0.36	+ 5.18	+ 12.18
$\Sigma(Y)$	— 47.91	— 46.36	— 45.61	— 45.83	— 47.17
$d^2\eta$	— 51.93	— 46.43	— 45.25	— 40.65	— 34.99
fqz	1.2909_n	0.1634_n	9.7968_n	9.1839_n	0.6598
Zahl	— 19.54	— 1.46	— 0.63	— 0.15	+ 4.57
$-S_z$	+ 0.07	+ 0.03	+ 0.06	+ 0.88	+ 3.27
$fqz - S_z$	— 19.47	— 1.43	— 0.57	+ 0.73	+ 7.84
$\log(fqz - S_z)$	1.2894_n	0.1553_n	9.7559_n	9.8633	0.8943
$h'(fqz - S_z)$	0.0080_n	8.9292_n	8.5524_n	8.6449	9.6267
Zahl	— 1.02	— 0.08	— 0.04	+ 0.04	+ 0.42
$\Sigma(Z)$	+ 0.56	— 0.06	— 0.77	— 1.57	— 2.49
$d^2\zeta$	— 0.46	— 0.14	— 0.81	— 1.53	— 2.07

Berechnung der Störungen in geoz. AR. und Dekl.

VII. Dez. η	1.7243_n	0.778_n	0.778_n	1.6990_n	2.1335_n
9.6000 $\eta \sin\varepsilon$	— 21	— 2	— 2	— 20	— 54
9.9625 $\eta \cos\varepsilon$	— 49	— 6	— 6	— 46	— 125
VII. Dez. ζ	»	»	»	0.000_n	0.477_n
$\zeta \sin\varepsilon$	0	0	0	0	— 1
$\zeta \cos\varepsilon$	0	0	0	— 1	— 3
VII. Dez. ξ'	+ 61	+ 7	+ 6	+ 57	+ 155
VII. Dez. η'	— 49	— 6	— 6	— 46	— 124
VII. Dez. ζ'	— 21	— 2	— 2	— 21	— 57
Aus der Ephem. $\sin\alpha$	9.5662_n	9.6655_n	9.6175_n	9.2967_n	9.0346
Aus der Ephem. $\cos\alpha$	9.9683	9.9476	9.9591	9.9913	9.9974
Aus der Ephem. $\sin\delta$	9.5097_n	9.4975_n	9.3568_n	8.941_n	8.880
Aus der Ephem. $\cos\delta$	9.9760	9.9774	9.9885	9.9983	9.9988
Aus der Ephem. $\log\varrho$	0.0363	0.0292	0.1254	0.2418	0.3463
$\log\xi'$ in Sekunden	0.0998	9.1595	9.0926	0.0703	0.5048
$\log\eta'$ in Sekunden	0.0046_n	9.0926_n	9.0926_n	9.9772_n	0.4078_n
$\log\zeta'$ in Sekunden	9.6366_n	8.6154_n	8.6154_n	9.6366_n	0.0703_n
$d\alpha''$	— 0".47	— 0".04	— 0".05	— 0".40	— 1".31
$d\delta''$	+ 0.08	+ 0.02	0.00	— 0.18	— 0.63

Blatt 2. Jupiter.

1896		Aug. 12.0	Sept. 21.0	Okt. 31.0	Dez. 10.0	Dez. 50.0
II. 1900.0	λ_1	140° 8′ 9″.7	143° 16′ 9″.5	146° 23′ 22″.7	149° 29′ 51″.7	152° 35′ 39″.3
	β_1	+ 0 51 15.0	+ 0 54 25.8	+ 0 57 26.0	+ 1 0 15.4	+ 1 2 53.5
	$\cos\beta_1$	9.99 995	9.99 995	9.99 994	9.99 993	9.99 993
	$\cos\lambda_1$	$9.88\,512_n$	$9.90\,388_n$	$9.92\,055_n$	$9.93\,531_n$	$9.94\,830_n$
	r_1	0.72 830	0.72 923	0.73 011	0.73 095	0.73 173
	$\sin\lambda_1$	9.80 684	9.77 674	9.74 315	9.70 550	9.66 303
	$\sin\beta_1$	8.17 340	8.19 954	8.22 287	8.24 371	8.26 230
	$\log x_1$	$0.61\,337_n$	$0.63\,306_n$	$0.65\,060_n$	$0.66\,619_n$	$0.67\,996_n$
	» y_1	0.53 509	0.50 592	0.47 320	0.43 638	0.39 469
	» z_1	8.90 170	8.92 877	8.95 298	8.97 466	8.99 403
	x_1	− 4.1055	− 4.2960	− 4.4730	− 4.6365	− 4.7859
	y_1	+ 3.4284	+ 3.2057	+ 2.9731	+ 2.7314	+ 2.4814
	z_1	+ 0.0797	+ 0.0849	+ 0.0897	+ 0.0943	+ 0.0986
	r_1^3	2.18 490	2.18 769	2.19 033	2.19 285	2.19 519
	$x_0+\xi$	+ 1.7356	+ 1.9034	+ 1.9586	+ 1.8921	+ 1.7117
	$y_0+\eta$	− 1.1350	− 0.5821	+ 0.0048	+ 0.5912	+ 1.1426
	$z_0+\zeta$	− 0.1717	− 0.1214	− 0.0640	− 0.0026	+ 0.0589
	$x_1-x_0-\xi$	− 5.8411	− 6.1994	− 6.4316	− 6.5286	− 6.4976
	$y_1-y_0-\eta$	+ 4.5634	+ 3.7878	+ 2.9683	+ 2.1402	+ 1.3388
	$z_1-z_0-\zeta$	+ 0.2514	+ 0.2063	− 0.1537	+ 0.0969	+ 0.0397
IV.	$\varrho_1\cos\vartheta\cos\theta$	$0.76\,650_n$	$0.79\,235_n$	$0.80\,832_n$	$0.81\,482_n$	$0.81\,275_n$
	$\varrho_1\cos\vartheta\sin\theta$	0.65 929	0.57 839	0.47 250	0 33 045	0.12 672
	$\sin\theta$	9.78 933	9.71 716	9.62 225	9.49 347	9.30 494
	$\varrho_1\cos\vartheta$	0.86 996	0.86 123	0.85 025	0.83 698	0.82 178
	$\varrho_1\sin\vartheta$	9.40 037	9.31 450	9.18 667	8.98 632	8.59 879
	$\cos\vartheta$	9.99 975	9.99 982	9.99 990	9.99 996	9.99 999
	ϱ_1	0.87 021	0.86 141	0.85 035	0.83 702	0.82 179
	ϱ_1^3	2.61 063	2.58 423	2.55 105	2.51 106	2.46 537
	$(x_1-x_0-\xi):\varrho_1^3$	$8.15\,587_n$	$8.20\,813_n$	$8.25\,727_n$	$8.30\,376_n$	$8.34\,738_n$
	$(y_1-y_0-\eta):\varrho_1^3$	8.04 866	7.99 416	7.92 145	7.81 939	7.66 135
	$(z_1-z_0-\zeta):\varrho_1^3$	6.78 974	6.73 027	6.63 562	6.47 526	6.13 342
	$x_1:r_1^3$	$8.42\,847_n$	$8.44\,537_n$	$8.46\,027_n$	$8.47\,334_n$	$8.48\,477_n$
	$y_1:r_1^3$	8.35 019	8.31 823	8.28 287	8.24 353	8.19 950
	$z_1:r_1^3$	6.71 680	6.74 108	6.76 265	6.78 181	6.79 884
		+ 121.24	+ 126.05	+ 130.45	+ 134.44	+ 138.03
		− 64.72	− 72.99	− 81.73	− 90.96	− 100.57
	(X)	+ 56.52	+ 53.06	+ 48.72	+ 43.48	+ 37.46
		− 101.25	− 94.07	− 86.70	− 79.20	− 71.57
		+ 50.56	+ 44.60	+ 37.73	+ 29.82	+ 20.73
	(Y)	− 50.69	− 49.47	− 48.97	− 49.38	− 50.84
		− 2.35	− 2.49	− 2.62	− 2.73	− 2.84
		+ 2.78	+ 2.43	+ 1.95	+ 1.35	+ 0.61
	(Z)	+ 0.43	− 0.06	− 0.67	− 1.38	− 2.23

Blatt 3. Saturn.

	1896	Aug. 12.0	Sept. 21.0	Okt. 31.0	Dez. 10.0	Dez. 50.0
II.	1900.0 λ_1	228° 54′ 54″	230° 9′ 14″	231° 23′ 25″	232° 37′ 30″	233° 51′ 28″
	1900.0 β_1	+ 2 14 11	+ 2 12 43	+ 2 11 13	+ 2 9 38	+ 2 8 1
	$\cos\beta_1$	9.99 967	9.99 967	9.99 968	9.99 969	9.99 970
	$\cos\lambda_1$	9.81 768$_n$	9.80 668$_n$	9.79 519	9.78 321$_n$	9.77 070$_n$
	r_1	0.99 614	0.99 650	0.99 686	0.99 721	0.99 754
	$\sin\lambda_1$	9.87 722$_n$	9.88 523$_n$	9.89 288$_n$	9.90 019$_n$	9.90 717$_n$
	$\sin\beta_1$	8.59 130	8.58 657	8.58 159	8.57 636	8.57 088
	$\log x_1$	0.81 349$_n$	0.80 285$_n$	0.79 173$_n$	0.78 011$_n$	0.76 794$_n$
	$\log y_1$	0.87 303$_n$	0.88 140$_n$	0.88 942$_n$	0.89 709$_n$	0.90 441$_n$
	$\log z_1$	9.58 744	0.58 307	9.57 845	9.57 357	9.56 842
	x_1	− 6.5087	− 6.3511	− 6.1906	− 6.0271	− 5.8606
	y_1	− 7.4650	− 7.6103	− 7.7522	− 7.8902	− 8.0243
	z_1	+ 0.3868	+ 0.3829	+ 0.3788	+ 0.3746	+ 0.3702
	r_1^3	2.98 842	2.98 950	2.99 058	2.99 163	2.99 262
	$x_0 + \xi$	+ 1.7356	+ 1.9034	+ 1.9586	+ 1.8921	+ 1.7117
	$y_0 + \eta$	− 1.1350	− 0.5821	+ 0.0048	+ 0.5912	+ 1.1426
	$z_0 + \zeta$	− 0.1717	− 0.1214	− 0.0640	− 0.0026	+ 0.0589
	$x_1 - x_0 - \xi$	− 8.2443	− 8.2545	− 8.1492	− 7.9192	− 7.5723
	$y_1 - y_0 - \eta$	− 6.3300	− 7.0282	− 7.7570	− 8.4814	− 9.1669
	$z_1 - z_0 - \zeta$	+ 0.5585	+ 0.5043	+ 0.4428	+ 0.3772	+ 0.3113
III.	$\varrho_1 \cos\vartheta \cos\theta$	0.91 615$_n$	0.91 669$_n$	0.91 111$_n$	0.89 868$_n$	0.87 923$_n$
	$\varrho_1 \cos\vartheta \sin\theta$	0.80 140$_n$	0.84 684$_n$	0.88 969$_n$	0.92 845$_n$	0.96 223$_n$
	$\sin\theta$	9.78 461$_n$	9.81 177$_n$	9.83 851$_n$	9.86 386$_n$	9.88 704$_n$
	$\varrho_1 \cos\vartheta$	1.01 679	1.03 507	1.05 118	1.06 459	1.07 519
	$\varrho_1 \sin\vartheta$	9.74 702	9.70 269	9.64 621	9.57 657	9.49 318
	$\cos\vartheta$	9.99 937	9.99 953	9.99 967	9.99 977	9.99 985
	ϱ_1	1.01 742	1.03 554	1.05 151	1.06 482	1.07 534
	ϱ_1^3	3.05 226	3.10 662	3.15 453	3.19 446	3.22 602
	$(x_1 - x_0 - \xi) : \varrho_1^3$	7.86 389$_n$	7.81 007$_n$	7.75 657$_n$	7.70 422$_n$	7.65 321$_n$
	$(y_1 - y_0 - \eta) : \varrho_1^3$	7.74 914$_n$	7.74 022$_n$	7.73 516$_n$	7.73 399$_n$	7.73 621$_n$
	$(z_1 - z_0 - \zeta) : \varrho_1^3$	6.69 476	6.59 607	6.49 168	6.38 211	6.26 716
	$x_1 : r_1^3$	7.82 507$_n$	7.81 335$_n$	7.80 115$_n$	7.78 848$_n$	7.77 532$_n$
	$y_1 : r_1^3$	7.88 461$_n$	7.89 190$_n$	7.89 884$_n$	7.90 546$_n$	7.91 179$_n$
	$z_1 : r_1^3$	6.59 902	6.59 357	6.58 787	6.58 194	6.57 580
		+ 9.04	+ 8.80	+ 8.55	+ 8.31	+ 8.06
		− 9.88	− 8.73	− 7.72	− 6.84	− 6.08
	(X)	− 0.84	+ 0.07	+ 0.83	+ 1.47	+ 1.98
		+ 10.37	+ 10.54	+ 10.71	+ 10.88	+ 11.04
		− 7.59	− 7.43	− 7.35	− 7.33	− 7.37
	(Y)	+ 2.78	+ 3.11	+ 3.36	+ 3.55	+ 3.67
		− 0.54	− 0.53	− 0.52	− 0.52	− 0.51
		+ 0.67	+ 0.53	+ 0.42	+ 0.33	+ 0.25
	(Z)	+ 0.13	0.00	− 0.10	− 0.19	− 0.26

Blatt 4.

X

	f^{II}	f^{I}	$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	^{I}f	^{II}f	$\frac{1}{12}\Sigma(X)$	$-\frac{1}{240}f^{II}$	S_x	ξ (VII. Dez.)
				− 116.72					
Aug. 12			− 62.89		+ 56 01	+ 4.64		+ 59.69	+ 61
		− 8.79		− 53.93					
Sept. 21	+ 5.04		+ 54.10		+ 2.08	+ 4.43	− 0.02	+ 6.50	+ 7
		− 3.75		+ 0.17					
a Okt. 31	+ 1.60		+ 50.35		+ 2.25	+ 4.13	− 0.01	+ 6.35	+ 6
		− 2.15		+ 50.52					
Dez. 10	− 7 80		+ 48.20		+ 52.77	+ 3.75		+ 55.67	+ 57
		− 9.95		+ 98.72					
Dez. 50			+ 38.25		+ 151.49	+ 3.29		+ 154.78	+ 155
				+ 136.97					
					+ 288.46				

Y

	f^{II}	f^{I}	$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	^{I}f	^{II}f	$\frac{1}{12}\Sigma(Y)$	$-\frac{1}{240}f^{II}$	S_y	η (VII. Dez.)
				+ 98.33					
Aug. 12			− 51.93		− 48.28	− 3.99		− 52.22	− 53
		+ 5.50		+ 46.40					
Sept. 21	− 4.32		− 46.43		− 1.88	− 3.86		− 5.76	− 6
		+ 1.18		− 0.03					
a Okt. 31	+ 3.42		− 45.25		− 1.91	− 3.80		− 5.73	− 6
		+ 4.60		− 45.28					
Dez. 10	+ 1.06		− 40.65		− 47.19	− 3.82		− 51.39	− 50
		+ 5.66		− 85.93					
Dez. 50			− 34.99		− 133.12	− 3.93		− 137.05	− 136
				− 120.92					
					− 254.04				

Z

	f^{II}	f^{I}	$\frac{d^2\zeta}{dt^2}$	^{I}f	^{II}f	$\frac{1}{12}\Sigma(Z)$	$-\frac{1}{240}f^{II}$	S_z	ζ (VII. Dez.)
				+ 0.63					
Aug. 12			− 0.46		− 0.20	+ 0.05		− 0.07	0
		+ 0.32		+ 0.17					
Sept. 21	− 0.99		− 0.14		− 0.03	0.00		− 0.03	0
		− 0.67		+ 0.03					
a Okt. 31	− 0.05		− 0.81		+ 0.03	− 0.06		− 0.06	0
		− 0.72		− 0.78					
Dez. 10	+ 0.18		− 1.53		− 0.75	− 0.14		− 0.88	− 1
		− 0.54		− 2.31					
Dez. 50			− 2.07		− 3.06	− 0.21		− 3.27	− 3
				− 4.38					
					− 7.44				

und setzt dann mit den erhaltenen, genäherten Werten ξ, η, ζ die Rechnung nach V. auf dem Blatt 1 fort. Sind die strengen Werte von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, ... erlangt, so wird die endgültige Integration auf Blatt 4 bewerkstelligt; auf diesem führt man zweckmäßig auch die Berechnung von S_x, S_y, S_z aus.

Um den Raum nicht über Gebühr in Anspruch zu nehmen, ist hier die Rechnung nur für die fünf ersten Intervalle durchgeführt, die Fortsetzung nach vor- oder rückwärts vollzieht sich ganz schematisch ohne jede Schwierigkeit.

Abschnitt XXXIII.

Spezielle Störungen bei Kometenbahnen.

175. Kometenstörungen in den Polarkoordinaten. Während bei den kleinen Planeten die Erfahrung immer mehr zu dem Ergebnis führt, daß die Variation der Elemente zur Berechnung der speziellen Störungen die größten Vorteile bietet, und die anderen Methoden kaum mehr zur Anwendung gelangen, läßt sich ein ähnlich allgemeiner Satz für die Kometen infolge der verschiedenen dabei auftretenden Verhältnisse nicht aufstellen. Bei *kurzperiodischen* Kometen (Jupitergruppe), wo die wahre Anomalie noch mittels der exzentrischen gerechnet wird, liegen die Bedingungen ganz ähnlich wie bei den kleinen Planeten und es wird daher auch hier die Variation der Elemente den Vorrang behaupten. Bei den Kometen von längerer Periode kann man durch Einführung anderer Elemente (siehe Nr. 159) zwar die Methode noch anwenden, aber sie wird um so lästiger, je mehr die Bahn sich der Parabel nähert; kann man direkt eine Parabel zugrunde legen und verzichtet man auf die Störungen höherer Ordnung, so bleibt die Rechnung zwar noch einfach genug; ist dies aber nicht der Fall, so ist entschieden zu empfehlen, die Störungsrechnung in den Koordinaten vorzunehmen, und zwar in den rechtwinkligen, wenn es sich nur um Störungen während *einer* Erscheinung handelt, und in den Polarkoordinaten, wenn es gilt, mehrere Erscheinungen miteinander zu verbinden. Die erstere Methode bedarf hierbei keiner Modifikation; ihr Vorzug, Kürze und Übersichtlichkeit der Rechnung kommt voll zur Geltung, ihr Nachteil, starkes Anwachsen der Störungen, kann außer in Ausnahmefällen nicht auftreten. Bei Anwendung der letzteren Methode dagegen auf langperiodische Kometen, muß man an den Gleichungen eine kleine Änderung vornehmen, die nun besprochen werden soll. Man bedient sich nämlich bei solchen Kometen der mittleren Anomalie *nicht* und es muß daher die Differenzialgleichung für die Störung in dieser durch eine andere ersetzt werden. Die drei übrigen Gleichungen jedoch für ν, $\Delta\omega$ und z bleiben ungeändert fortbestehen (Abschnitt XXXI).

Bei langperiodischen Kometen wird die wahre Anomalie aus der seit dem Perihel-durchgang verflossenen *Zeit* berechnet; es liegt daher nahe, die Differenzialgleichung für den Betrag der Zeit aufzustellen, um welchen zu einem bestimmten Zeitmoment die genannte Zeit korrigiert werden muß, damit mit derselben statt der ungestörten wahren Anomalie v_0 die gestörte V (berechnet mit den konstanten Elementen $\mathfrak{E}_0$ und q_0) enthalten werde. Nennt man diese Korrektion gewissermaßen die »Störung der Zeit« und bezeichnet sie mit Δt, so hat man offenbar:

$$\Delta M = \mu_0 \Delta t$$

und daher statt der Gleichung

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -\mu_0 \sigma \nu$$

die andere:

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\sigma\nu, \qquad \left(\sigma = \frac{1}{1+\nu}\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right)\right),$$

die auch unmittelbar für die Parabel verwendbar ist.

Die aus der Integration dieser Gleichung hervorgehenden Δt geben für jeden Zeitmoment t den zugehörigen $t+\Delta t$, mittels dessen unter Anwendung von q_0 und $\mathfrak{T}_0$ sich nach den Methoden Nr. 64 V und $[r]$ ergeben, worauf wie früher (Seite 526):

$$(r) = [r](1+\nu), \qquad l = V + \omega_0 + \Delta\omega$$

$$r^2 = (r)^2 + z^2, \qquad \sin b = \frac{z}{r}.$$

Für die Parabel hat man natürlich einfach

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}V + \frac{\sqrt{2}}{3k}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}V^3 = \frac{t+\Delta t-\mathfrak{T}_0}{q_0^{\frac{3}{2}}}$$

$$[r] = \frac{q_0}{\cos\frac{1}{2}V^2} \quad \text{usf.}$$

Bei langperiodischen Kometen ist es von Interesse, die »Störung der Durchgangszeit durchs Perihel« für den Moment des neuen Perihelduchganges kennen zu lernen. Da

$$t + \Delta t - \mathfrak{T}_0 = t - (\mathfrak{T}_0 - \Delta t)$$

in jedem Augenblick t die seit dem Perihelsdurchgang verflossene Zeit darstellt, so ist $-\Delta t$ die Störung der Durchgangszeit durchs Perihel für jeden Moment t. Wird $(\Delta t)'$ durch Interpolation für jenen Zeitmoment t' bestimmt, für den $V = 360^\circ$ wird, so stellt $-(\Delta t)'$ die Störung der Durchgangszeit durchs Perihel für den ganzen Umlauf dar. Der neue Perihelsdurchgang findet zur Zeit t' statt und liegt um $-(\Delta t)'$ später als jener, der statthaben würde, wenn keine Störungen vorhanden wären; die gestörte Umlaufszeit wird $t' - \mathfrak{T}_0$, während die ungestörte sich zu $t' + (\Delta t)' - \mathfrak{T}_0$ stellen würde.

Ist ein langperiodischer Komet nur in *einer* Erscheinung beobachtet, so ist die große Halbachse seiner Bahn beträchtlich unsicher, sonach auch seine mittlere tägliche Bewegung und die Umlaufszeit. Die Zeit seiner Wiederkehr zur Sonnennähe kann also nur roh vorausberechnet werden, zumal da auch die Störungsbeträge erheblichen Fehlern unterworfen sein können. Um seine Aufsuchung durch Ephemeriden zu erleichtern bleibt dann nichts übrig, als die Durchgangszeit durchs Perihel zu variieren und für jede Annahme eine geozentrische Ephemeride zu rechnen. Innerhalb der Grenzen aller Ephemeriden muß dann gesucht werden und die erste Beobachtung entscheidet, welche Annahme für $\mathfrak{T}_0$ die richtigere war.

176. Störungen der Kometen in unmittelbarer Nähe der großen Planeten. Die Berechnung der speziellen Störungen nach jeder der im vorigen auseinandergesetzten Methoden führt zu bedeutenden Schwierigkeiten, wenn der gestörte Körper in die unmittelbare Nähe des störenden Körpers gelangt. Dieser Fall tritt besonders ein bei Kometen, deren Aphel in der Nähe der Jupiterbahn liegt. Es ist dann ein Verfahren einzuschlagen, das von Laplace (Méc. cél. Livre IX, Chap. II) entwickelt

wurde, und darin besteht, daß Jupiter als Hauptkörper und die Sonne als störender Körper eingeführt wird.

In bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sonne liegt, seien

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen,

x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Jupiter;

ferner seien in Bezug auf ein zum ersten paralleles System, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Jupiter liegt,

ξ, η, ζ die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen.

Sind endlich r und r_1 die Entfernungen des Kometen und des Jupiter von der Sonne, ϱ die Entfernung Jupiter—Komet, 1 die Masse der Sonne, m_1 die Masse des Jupiter, so hat man für die Bewegung der beiden Körper in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne die bekannten Gleichungen, bei denen angenommen ist, daß außer Sonne, Jupiter und Komet kein weiterer Körper vorhanden ist und daß die Masse des Kometen Null ist:

für den Kometen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} &= k^2 m_1\left(\frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right)\\
\frac{d^2y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} &= k^2 m_1\left(\frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right) \qquad 1)\\
\frac{d^2z}{dt^2} + k^2\frac{z}{r^3} &= k^2 m_1\left(\frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right)
\end{aligned}$$

für Jupiter:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{x_1}{r_1^3} &= 0\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r_1^3} &= 0 \qquad 2)\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{z_1}{r_1^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Setzt man in 1)

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

und subtrahiert davon die Gl. 2), so kommt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2 m_1\frac{\xi}{\varrho^3} &= k^2\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3}\right)\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2 m_1\frac{\eta}{\varrho^3} &= k^2\left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3}\right) \qquad 3)\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2 m_1\frac{\zeta}{\varrho^3} &= k^2\left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen 1) geben die *heliozentrische* Bewegung des Kometen unter dem Einfluß der Hauptkraft Attraktion der Sonne: R, und der störenden Kraft des Jupiter: F; die Ausdrücke dieser Kräfte sind

$$R = k^2\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}} = \frac{k^2}{r^2};$$

$$F = k^2 m_1\sqrt{\left(\frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right)^2}.$$

Die Gleichungen 3) stellen ebenso die *jovizentrische* Bewegung des Kometen dar unter dem Einfluß der Hauptkraft Attraktion des Jupiter R_1 und der störenden Kraft der Sonne F_1, und die Ausdrücke für diese Kräfte werden:

$$R_1 = \frac{k^2 m_1}{\varrho^2}, \qquad F_1 = k^2 \sqrt{\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3}\right)^2}.$$

Es fragt sich nun in erster Linie, *von welcher Lage des Kometen an ist es zweckmäßig, den Jupiter als Hauptkörper, die Sonne als störenden Körper zu betrachten.* Hierfür maßgebend ist das Verhältnis der störenden Kraft zur Hauptkraft $\frac{F}{R}$ und es wird die Wahl des Hauptkörpers so zu treffen sein, daß dieses Verhältnis kleiner wird, als wenn man den andern Körper als Hauptkörper gewählt hätte. Ist

$$\frac{F}{R} < \frac{F_1}{R_1} \quad \text{so wird man die Sonne}$$

und ist

$$\frac{F}{R} > \frac{F_1}{R_1}, \quad \text{so wird man den Jupiter}$$

als Hauptkörper wählen. Die Grenze wird also gegeben sein durch

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}; \tag{4}$$

wird die durch diese Gleichung definierte Fläche vom Kometen überschritten, so ist es zweckmäßiger auf den Jupiter als Hauptkörper überzugehen.

Die Diskussion dieser Fläche gehört nicht hierher; es sei betreff derselben auf Tisserand, Mécanique céleste Tome IV. p. 198 verwiesen und nur als Resultat angeführt, daß ihre Gleichung in Polarkoordinaten ϱ und θ in Bezug auf Jupiter als Ausgangspunkt, sehr nahe durch

$$\varrho = r_1 \left(\frac{m_1^2}{\sqrt{1 + 3\cos\theta^2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

wiedergegeben wird. Es ist dies eine Rotationsfläche, deren Polarhalbachse ($\theta = 0^\circ$) in r_1 liegt und den Wert

$$\varrho_p = r_1 \sqrt[5]{\frac{m_1^2}{2}}$$

hat und deren Äquatorealhalbachse ($\theta = 90^\circ$) senkrecht dazu liegt und den Wert

$$\varrho_a = r_1 \sqrt[5]{m_1^2}$$

annimmt. Da das Verhältnis der beiden Achsen gleich $\sqrt[5]{2} = 1.15\ldots$ ist, so ist die Fläche nahe eine Kugel vom Radius $r_1 \sqrt[5]{m_1^2}$. Laplace nennt sie die Wirkungssphäre des Planeten (sphère d'activité). Nach Tisserand hat sie für die verschiedenen Planeten folgende Radien in astronomischen Einheiten:

Merkur	0.001	Jupiter	0.322
Venus	0.004	Saturn	0.363
Erde	0.006	Uranus	0.339
Mars	0.004	Neptun	0.576.

Solange der Komet außerhalb dieser Sphären sich befindet, behält man die Sonne als Hauptkörper bei; dringt er aber in sie ein, so ist es vorteilhafter, den Planeten als Hauptkörper und die Sonne als störenden einzuführen. Da die Sphären klein sind, verweilt der Komet in der Regel nur kurze Zeit innerhalb derselben und es ist oft gestattet, die Störungen durch die Sonne während dieser kurzen Zeit ganz zu vernachlässigen. Ist dies nicht der Fall, so werden die Störungen nach einer der besprochenen Methoden ermittelt, worüber unten noch einiges zu sagen ist. Beim Austritt aus der Sphäre wird auf die Sonne als Hauptkörper zurückgegangen und werden die Störungen durch den Planeten berechnet, wie vorher.

Um den Kometen während seines Aufenthaltes in der Wirkungssphäre verfolgen zu können, stellt sich die Aufgabe: *seine Bahn in bezug auf den neuen Hauptkörper zu ermitteln.*

Hiezu berechnet man für einen runden Zeitpunkt, welcher demjenigen nahe ist, für den $\varrho = r_1 \sqrt[5]{m_1^2}$ wird (also für Jupiter etwa $\frac{1}{3}$ der astronomischen Einheit) die heliozentrischen Koordinaten x, y, z und ihre Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, erstere nach den bekannten Ausdrücken, letztere am einfachsten nach den Formeln für die mechanische Differenziation, indem man als Einheit der Zeit den Tag nimmt. Für dieselbe Zeit berechnet man aus den Angaben der astronomischen Jahrbücher die heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten $x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ des Jupiter. Dann hat man offenbar in den Größen

$$\xi = x - x_1, \qquad \eta = y - y_1, \qquad \zeta = z - z_1$$

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}, \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}$$

die relativen Koordinaten und ihre Geschwindigkeiten des Kometen in bezug auf den Jupiter als Zentralkörper. Aus diesen sechs Größen aber lassen sich, wie wir in Nr. 110 gezeigt haben, die Elemente des Kegelschnittes berechnen, den der Komet um den Jupiter beschreibt. Die Gleichungen für seine ungestörte Bewegung werden nach 3)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{\varrho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{\varrho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{\varrho^3} = 0,$$

es ist also in den dortigen Formeln allenthalben $k^2 m_1$ statt k^2, d. h. die anziehende Kraft des Jupiter in der Distanz 1 statt der der Sonne zu setzen. Alle Einheiten bleiben dieselben, insbesondere ist m_1 in Einheiten der Sonnenmasse auszudrücken. Wir stellen die Formeln aus Nr. 110 zusammen mit dem Bemerken, daß wir hier natürlich die Ekliptik als Grundebene beibehalten und daß mit Ω, i, ... die jovizentrischen Elemente bezeichnet sind.

I.
$$\begin{aligned}\sqrt{m_1}\, k\sqrt{p}\, \sin i \sin \Omega &= \eta\zeta' - \zeta\eta'\\ \sqrt{m_1}\, k\sqrt{p}\, \sin i \cos \Omega &= \xi\zeta' - \zeta\xi'\\ \sqrt{m_1}\, k\sqrt{p}\, \cos i &= \xi\eta' - \eta\xi'.\end{aligned}$$

II.
$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{m_1}\, k\varrho}(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')$$
$$e \cos v = \frac{p}{\varrho} - 1.$$

III.
$$\varrho \sin u = -\xi \sin \Omega \sec i + \eta \cos \Omega \sec i = \frac{\zeta}{\sin i}$$

IV.
$$\varrho \cos u = \xi \cos \Omega + \eta \sin \Omega$$
$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \qquad \omega = u - v.$$

V.

Ellipse.	Hyperbel.
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$,	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$
$M = E - e'' \sin E$,	$\mu = \frac{k \operatorname{Mod.} \sqrt{m_1}}{a^{\frac{3}{2}}}$
$\mu = \frac{k'' \sqrt{m_1}}{a^{\frac{3}{2}}}$,	$\mu (t - \mathrm{T}) = \operatorname{Mod.} e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} (\frac{1}{2} F + 45^\circ)$.

Parabel.
$$q = \tfrac{1}{2} p$$
$$t - \mathrm{T} = q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_1}\, k} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3).$$

Betreff einer Auswahl von Kontrollen sei auf Nr. 110 verwiesen.

Mit den erlangten Elementen kann der Weg des Kometen durch die Wirkungssphäre verfolgt werden; ist der Aufenthalt in ihr ein längerer, so wird man die Sonnenstörungen nicht übergehen dürfen. Deren Berechnung erfolgt ganz nach den gewöhnlichen Methoden; man wird nur zu beachten haben, daß als störende Masse die Sonnenmasse $= 1$ einzuführen ist und daß die Koordinaten der Sonne in bezug auf Jupiter gleich $180^\circ + \lambda$ und $-\beta$ werden, wenn λ und β die Koordinaten von Jupiter in bezug auf die Sonne sind. Am meisten wird sich die Anwendung der Methode der Variation der Elemente empfehlen, da bei den anderen Methoden die Berechnung der indirekten Glieder wegen der Kleinheit von ϱ Schwierigkeiten verursacht. Die jovizentrischen Bahnen sind meist Hyperbeln; wir haben daher in Nr. 163 die Formeln für die Variation hyperbolischer Elemente entwickelt und haben betreffs ihrer Anwendung auf den vorliegenden Fall nur auf die oben gemachten Bemerkungen über die Berechnung der störenden Komponenten hinzuweisen.

Beim Austritt aus der Wirkungssphäre geht man wieder auf die Sonne als Hauptkörper zurück, was mit entsprechender Vertauschung der Größen nach denselben Formeln bewerkstelligt wird, wie beim Eintritt.

Beim Durchgang eines Kometen durch die Wirkungssphäre des Jupiter können seine Bahnelemente eine vollständige Umänderung erfahren, so zwar, daß sie jenen vor der Annäherung nicht einmal mehr ähnlich sind. Es wäre unter diesen Umständen sehr schwierig, die Identität eines Kometen in zwei Erscheinungen festzustellen, zwischen denen der Komet eine Jupitersnähe passiert hat, wenn man nicht ein Kriterium hätte, mittels dessen erkannt werden kann, ob zwei Elementensysteme einem und demselben Körper angehören können. Ein solches Kriterium hat *Tisserand* aus einem Integral von Jacobi abgeleitet*). Es kann wie folgt mit elementaren Hilfsmitteln abgeleitet werden**). Berücksichtigt man nur die Störungen durch Jupiter (Masse m_1, Koordinaten x_1, y_1, z_1), so werden die Bewegungsgleichungen des Kometen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3} + k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}$$

. . . . . .

Nach Multiplikation mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und Addition folgt daraus:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = &-\frac{k^2}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)\\ &+\frac{k^2 m_1}{\varrho^3}\left((x_1 - x)\frac{dx}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy}{dt} + (z_1 - z)\frac{dz}{dt}\right)\\ &-\frac{k^2 m_1}{r_1^3}\left(x_1\frac{dx}{dt} + y_1\frac{dy}{dt} + z_1\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}$$

Nennt man V die Geschwindigkeit des Kometen, so ist

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und daher

$$V\frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2};$$

ferner ist

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

und

$$(x_1 - x)\frac{dx}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy}{dt} + (z_1 - z)\frac{dz}{dt} = -\varrho\frac{d\varrho}{dt} + (x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy_1}{dt} + (z_1 - z)\frac{dz_1}{dt};$$

also gibt obige Gleichung:

$$V\frac{dV}{dt} = -\frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{dt} - \frac{k^2 m_1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt} + \frac{k^2 m_1}{\varrho^3}\left((x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} + \cdots\right) - \frac{k^2 m_1}{r_1^3}\left(x_1\frac{dx}{dt} + \cdots\right),$$

und wenn integriert wird:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2k^2 m_1 \int\frac{dt}{\varrho^3}\left((x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} + \cdots\right) - 2k^2 m_1 \int\frac{dt}{r_1^3}\left(x_1\frac{dx}{dt} + \cdots\right). \quad \text{(a)}$$

*) Méc. cél. Tome IV, p. 203.

**) *Seeliger*, Astr. Nachr. Band 124, p. 209.

Nimmt man nun an, daß Jupiter sich in einer Kreisbahn um die Sonne bewege und daß die Ebene derselben als xy-Ebene gewählt werde, so wird

$$x_1 = a_1 \cos \mu_1 t, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -y_1 \mu_1$$

$$y_1 = a_1 \sin \mu_1 t, \qquad \frac{dy_1}{dt} = +x_1 \mu_1$$

$$z_1 = 0, \qquad \frac{dz_1}{dt} = 0$$

und daher das erste Integral in (a):

$$2k^2 m_1 \mu_1 \int \frac{dt}{\varrho^3}(xy_1 - yx_1).$$

Weiter folgt aus den beiden ersten Grundgleichungen:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = k^2 m_1 (xy_1 - yx_1)\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)$$

und nach Integration:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k^2 m_1 \int \frac{dt}{\varrho^3}(xy_1 - yx_1) - k^2 m_1 \int \frac{dt}{r_1^3}(xy_1 - yx_1);$$

also wird man (a) folgendermaßen schreiben können:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) - \frac{2k^2 m_1}{a_1^3}\int\left(x\frac{dx_1}{dt} + y\frac{dy_1}{dt} + x_1\frac{dx}{dt} + y_1\frac{dy}{dt}\right)dt$$

oder wenn $x\frac{dx_1}{dt} + y\frac{dy_1}{dt} + x_1\frac{dx}{dt} + y_1\frac{dy}{dt} = -\varrho\frac{d\varrho}{dt} + r\frac{dr}{dt}$ beachtet und das Integral ausgeführt wird:

$$V^2 = 2C + \frac{2k^2}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \frac{k^2 m_1}{a_1^3}(\varrho^2 - r^2).$$

Nennt man a und p große Halbachse und Parameter der Kometenbahn, i ihre Neigung gegen die Jupiterbahnebene, so wird

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}\cos i$$

und

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

also folgt aus obiger Gleichung endlich:

$$2C + \frac{k^2}{a} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 k\sqrt{p}\cos i + \frac{k^2 m_1}{a_1^3}(\varrho^2 - r^2) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Legt man nun um den Mittelpunkt des Jupiter eine Kugel mit dem Radius ϱ und stellt für die beiden Punkte, in denen der Komet in diese Kugel ein- und austritt, die Gleichung (b) auf, indem man die Elemente beim Eintritt mit dem Index e, beim Austritt mit dem Index a bezeichnet, so kommt:

$$2C + \frac{k^2}{a_e} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 k\sqrt{p_e}\cos i_e + \frac{k^2 m_1}{a_1^3}(\varrho^2 - r_e^2) = 0$$

$$2C + \frac{k^2}{a_a} + \frac{2k^2 m_1}{\varrho} + 2\mu_1 k\sqrt{p_a}\cos i_a + \frac{k^2 m_1}{a_1^3}(\varrho^2 - r_a^2) = 0$$

und daher

$$\frac{k^2}{a_e} + 2\mu_1 k\sqrt{p_e}\cos i_e = \frac{k^2}{a_a} + 2\mu_1 k\sqrt{p_a}\cos i_a + \frac{k^2 m_1}{a_1^3}(r_e^2 - r_a^2).$$

Das letzte Glied rechts wird stets sehr klein sein; läßt man es weg und setzt außerdem

$$\mu_1 = \frac{k}{a_1^{\frac{3}{2}}},$$

so erscheint das gesuchte Kriterium:

$$\frac{1}{a_e} + \frac{2\sqrt{p_e}}{a_1^{\frac{3}{2}}}\cos i_e = \frac{1}{a_a} + \frac{2\sqrt{p_a}}{a_1^{\frac{3}{2}}}\cos i_a.$$

Vergleicht man die Elemente a, p, i zweier Kometenerscheinungen durch diese Formel, so kann man sofort entscheiden, ob dieselben einem und demselben Körper, der in der Zwischenzeit die Jupitersnähe passiert hat, angehören oder nicht. *Callandreau* nennt den Ausdruck

$$\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{p}}{a_1^{\frac{3}{2}}}\cos i$$

die *Invariante* des Kometen.

Interessante Beispiele für die in dieser Nummer gegebenen Entwicklungen sind die Bearbeitungen des Lexellschen Kometen von *Leverrier* (Annales de l'Obs. de Paris T. I), des Wolfschen Kometen von *Lehmann-Filhés* (Astr. Nachr. Band 124) und des Brooksschen Kometen von *C. L. Poor* (Contr. from the Observatory of Columbia University New York No. 22, Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. XV).

177. Kometenstörungen bei sehr weiter Entfernung des störenden Körpers. Wenn ein Komet sich weit von den störenden Planeten entfernt, so werden die Störungen naturgemäß sehr klein und wenn der Planet sich rasch um die Sonne bewegt, wie das bei den inneren der Fall ist, so wechseln die Störungen zudem periodisch das Zeichen, so daß das Schlußresultat einer sehr langen Rechnung nahezu Null ist. Diese also ziemlich vergeblich zu führende Rechnung ist noch um so lästiger, als bei der raschen Bewegung des störenden Körpers das Intervall *klein* gewählt werden muß, wenn die Integration nicht alle Sicherheit verlieren soll. Diesem Übelstand begegnet man nach einer Bemerkung von *Bessel* am geschicktesten dadurch, daß man das ursprüngliche Elementensystem, das sich auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht, auf den Schwerpunkt des Systems: Sonne und störender Planet, überträgt. Der Grund hierfür liegt in folgendem. Bezogen auf ein System mit beliebigem *festem* Anfangspunkt, seien X, Y, Z die Koordinaten der Sonne, X', Y', Z' die des Planeten, dann ist vermöge der Anziehung der Sonne auf den Planeten

$$\frac{d^2X'}{dt^2} + k^2\frac{X' - X}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2Y'}{dt^2} + k^2\frac{Y' - Y}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2Z'}{dt^2} + k^2\frac{Z' - Z}{\varrho^3} = 0$$

und vermöge der Anziehung des Planeten auf die Sonne, wenn die Masse des Planeten m' ist:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + k^2m'\frac{X-X'}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} + k^2m'\frac{Y-Y'}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2} + k^2m'\frac{Z-Z'}{\varrho^3} = 0,$$

wo

$$\varrho^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 + (Z'-Z)^2.$$

Für die *relative* Bewegung des Planeten zur Sonne ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\frac{d^2(X'-X)}{dt^2} + k^2(1+m')\frac{X'-X}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2(Y'-Y)}{dt^2} + k^2(1+m')\frac{Y'-Y}{\varrho^3} = 0$$
$$\frac{d^2(Z'-Z)}{dt^2} + k^2(1+m')\frac{Z'-Z}{\varrho^3} = 0.$$

Der Schwerpunkt des Systems Sonne und Planet liegt auf der Verbindungslinie beider und hat die Koordinaten X_0, Y_0, Z_0; letztere sind bestimmt durch:

$$X_0 = \frac{X}{1+m'} + \frac{m'}{1+m'}X'$$
$$Y_0 = \frac{Y}{1+m'} + \frac{m'}{1+m'}Y'$$
$$Z_0 = \frac{Z}{1+m'} + \frac{m'}{1+m'}Z'.$$

Daraus folgt unmittelbar mit Bezug auf die vorigen Gleichungen

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} = 0$$
$$\frac{d^2Y_0}{dt^2} = 0$$
$$\frac{d^2Z_0}{dt^2} = 0$$

d. h. auf den Schwerpunkt wirkt eine Kraft, welche durch relative Anziehung zweier Körper hervorgebracht werden könnte, *nicht* ein. Er bleibt also entweder in Ruhe oder er bewegt sich auf einer geraden Linie gleichförmig, was zur Folge hat, daß er in bezug auf die *relative* Bewegung der zwei Körper als ruhend betrachtet werden kann. — Es läßt sich nun zeigen, daß die periodischen Störungen, welche bei einer auf den Sonnenmittelpunkt bezogenen Bahn starke, abwechselnd positive und negative Schwankungen haben, bei einer auf den Schwerpunkt bezogenen Bahn nur einen sehr geringen Gesamtbetrag geben, so gering, daß man in vielen Fällen ihn ganz vernachlässigen kann.

In der Tat, es seien:

$x,\ y,\ z,\ r$	die	Koordinaten	des	Kometen	bezogen	auf	den	Sonnenmittelpunkt
$x',\ y',\ z',\ r'$	»	»	»	Planeten	»	»	»	»
$x_0,\ y_0,\ z_0,\ r_0$	»	»	»	Kometen	»	»	»	Schwerpunkt
$x_0',\ y_0',\ z_0',\ r_0'$	»	»	»	Planeten	»	»	»	»

Da nach der Definition des Schwerpunktes:

$$x' - x_0' = m' x_0', \quad y' - y_0' = m' y_0', \quad z' - z_0' = m' z_0'$$

so folgt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + m' x_0', & x' &= x_0'(1 + m') \\ y &= y_0 + m' y_0', & y' &= y_0'(1 + m') \\ z &= z_0 + m' z_0', & z' &= z_0'(1 + m') \end{aligned}$$
$$r' = r_0'(1 + m').$$

Die Differenzialgleichungen für die gestörte Bewegung des Kometen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{x' - x}{\varrho^3} - \frac{x}{r'^3} \right), \text{ usw.}$$

kann man damit schreiben:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + m' \frac{d^2x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0 + m' x_0'}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{x_0' - x_0}{\varrho^3} - \frac{x_0' + m' x_0'}{r'^3} \right)$$

und die hierin vorkommenden Glieder

$$m' \left(\frac{d^2x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0' + m' x_0'}{r'^3} \right)$$

kann man ersetzen durch:

$$m' \left(\frac{d^2x_0'}{dt^2} + k^2 \frac{x_0'}{r_0'^3} \frac{1}{(1 + m')^2} \right).$$

Daraus ist ersichtlich, daß letztere bis auf Größen 2. Ordnung in bezug auf m' verschwinden, wenn der störende Planet in elliptischer Bewegung angenommen wird; sie können also vernachlässigt werden. Die übrigen Glieder lassen sich so zusammenfassen:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{(1 + m') k^2 x_0}{r_0^3} + k^2 (x_0 + m' x_0') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) = k^2 m' (x_0' - x_0) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right).$$

Die beiden ersten Glieder links sind die, welche eine rein elliptische Bewegung um den Schwerpunkt ergeben würden, wenn man in demselben sich die Masse $1 + m'$ vereinigt denkt. Die anderen Glieder der Gleichung stellen die störenden Kräfte dar; von ihnen ist jenes, welches den Faktor $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}$ hat, sehr klein, weil der Unterschied zwischen r und r_0 nie groß sein kann; setzt man

$$r = r_0 + \varepsilon,$$

so wird:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} = \frac{r_0^3 - r^3}{r^3 r_0^3} = \frac{(r_0 - r)(r_0^2 + r r_0 + r^2)}{r^3 r_0^3} = \frac{(r_0^2 - r^2)(r_0^2 + r r_0 + r^2)}{(r_0 + r) r^3 r_0^3}$$

oder

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} = (r_0^2 - r^2)\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{r_0^5} - \frac{15}{4}\frac{\varepsilon}{r_0^6} + \frac{55}{8}\frac{\varepsilon^2}{r_0^7} - \cdots\right\}.$$

Ist V der Winkel, den ϱ mit r' oder r_0' einschließt, so wird:

$$r^2 = \varrho^2 + r'^2 - 2\varrho r' \cos V$$

oder

$$r^2 = \varrho^2 + (1+m')^2 r_0'^2 - 2\varrho r_0' (1+m') \cos V,$$

ebenso:

$$r_0^2 = \varrho^2 + r_0'^2 - 2\varrho r_0' \cos V;$$

folglich

$$r^2 - (1+m') r_0^2 = -m'\varrho^2 + m'(m'+1) r_0'^2$$

oder

$$r^2 - r_0^2 = m'(r_0^2 - \varrho^2 + (m'+1) r_0'^2) = m'\mathrm{E}.$$

Andererseits ist

$$r^2 - r_0^2 = (r - r_0)(r + r_0) = \varepsilon(2r_0 + \varepsilon) = 2r_0\varepsilon + \varepsilon^2$$

also

$$2r_0\varepsilon + \varepsilon^2 = m'\mathrm{E}$$

woraus

$$\varepsilon = \frac{m'\mathrm{E}}{2r_0} - \frac{1}{8}\frac{m'^2\mathrm{E}^2}{r_0^3}.$$

Wird also gesetzt

$$\mathrm{E} = r_0^2 - \varrho^2 + (m'+1) r_0'^2,$$

so folgt nach leichter Umrechnung:

$$k^2(x_0 + m'x_0')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) = -k^2(x_0 + m'x_0')\, m'\mathrm{E}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{r_0^5} - \frac{15}{8}m'\frac{\mathrm{E}}{r_0^7} + \cdots\right\}$$

oder wenn die Glieder mit m'^2 weggelassen werden:

$$k^2(x_0 + m'x_0')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) = -k^2 x_0\, m'\mathrm{E}\,\frac{3}{2}\frac{1}{r_0^5}.$$

Wird dies jetzt in die Hauptgleichungen substituiert, so gehen diese über in:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{(1+m')k^2}{r_0^3}\, x_0 = k^2 m'(x_0' - x_0)\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) + \frac{k^2 m'}{r_0^5}\frac{3}{2}\mathrm{E}x_0, \text{ usw.}$$

Da E mit m' multipliziert ist, so kann man zur Berechnung von E auch verwenden

$$\mathrm{E} = r_0^2 + r_0'^2 - \varrho^2 = 2r_0 r_0' \cos V',$$

wo V' der Winkel zwischen r_0 und r_0' ist.

Zu der durch die Gleichungen

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{(1+m')k^2}{r_0^3}\, x_0 = 0, \text{ usw.}$$

bestimmten elliptischen Bewegung um den Schwerpunkt des Systems kommen also noch Störungsglieder hinzu, die von den rechtsstehenden störenden Kräften abhängen. Führen wir zur bequemen Berechnung dieser letzteren das Koordinatensystem derart ein, daß wir die X-Achse durch r_0 legen, die Y-Achse in der Bahnebene des Kometen und senkrecht zur X-Achse, die Z-Achse senkrecht zur Bahnebene und

nennen wir die Komponenten der störenden Kraft in diesem System R, S, W, so werden diese, da

$$x_0 = r_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \mathrm{E} = 2 r_0 r_0' \cos V' = 2 r_0 x_0'$$

$$R = k^2 m' (x_0' - r_0)\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) + \frac{3 k^2 m' x_0'}{r_0^3},$$

$$S = k^2 m' y_0' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)$$

$$W = k^2 m' z_0' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3}\right).$$

Aus diesen Gleichungen ist nun der große Vorzug, den die Betrachtung der Bewegung um den *Schwerpunkt* gewährt, sofort herauszulesen. Man erkennt, daß derjenige Teil der störenden Kraft, der r'^3 im Nenner hat, der also bei sonnennahen Planeten den Hauptteil der störenden Kraft ausmacht und der wegen der raschen Bewegung fortwährend das Zeichen wechselt, nämlich

$$-k^2 m' \frac{x'}{r'^3}, \quad -k^2 m' \frac{y'}{r'^3}, \quad -k^2 m' \frac{z'}{r'^3}$$

in Wegfall gekommen ist. Ist zudem der Komet sehr weit entfernt und der störende Planet ein sonnennaher, so werden sich ϱ und r_0 nicht sehr voneinander unterscheiden und daher die störenden Kräfte wegen des Faktors $\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)$ auch sehr klein werden, so daß sie unter Umständen für längere Zeiträume (Komet im Aphel) unberücksichtigt bleiben können.

Damit ist nachgewiesen, daß der *Übergang auf den Schwerpunkt* bedeutende Vorteile darbietet und es ist jetzt zu zeigen, wie er ausgeführt wird.

Die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen x, y, z und ihre Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, bezogen auf den Sonnenmittelpunkt gehen, sobald sie auf den Schwerpunkt bezogen werden, über in x_0, y_0, z_0, $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$; die Unterschiede sind:

$$\delta x = x_0 - x = -m' x_0' = -\frac{m'}{1+m'} x'$$

$$\delta y = y_0 - y = -m' y_0' = -\frac{m'}{1+m'} y'$$

$$\delta z = z_0 - z = -m' z_0' = -\frac{m'}{1+m'} z'$$

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dx'}{dt}$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy_0}{dt} - \frac{dy}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dy'}{dt}$$

$$\delta\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{dz_0}{dt} - \frac{dz}{dt} = -\frac{m'}{1+m'} \frac{dz'}{dt}.$$

Außerdem geht k^2 beim Wechsel des Attraktionszentrums über in $k^2(1+m')$ und der Unterschied $\delta(k^2)$ wird $m'k^2$ oder

$$2k\delta k = m'k^2$$

oder

$$\frac{\delta k}{k} = \tfrac{1}{2}m'.$$

Diese Unterschiede sind also sofort angebbar und damit auch die x_0, y_0, z_0, $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$. Aus diesen letzteren aber kann man das zugehörige Elementensystem nach den Formeln der Nr. 110 sofort ableiten; man hat nur zu setzen $k^2(1+m')$ statt k^2.

Diese Art der Lösung der Aufgabe ist aber hier wenig zweckmäßig, da die $\delta x, \ldots$ naturgemäß kleine Größen sind und daher auch die auf den Schwerpunkt bezogenen Elemente nur wenig von jenen, die auf den Sonnenmittelpunkt sich beziehen, abweichen werden. Es ist sicherer, die Differenzen der Elemente direkt durch die Differenzen der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten auszudrücken. Diese Aufgabe, die auch zu lösen ist, wenn man bei der Encke'schen Methode, spezielle Störungen zu berechnen, auf neue oskulierende Elemente, die den gestörten Koordinaten

$$x + \delta x, \cdots \frac{dx}{dt} + \delta\frac{dx}{dt}, \cdots$$

entsprechen, übergehen will, soll in der nächsten Nummer im Anschluß an die von *Encke* im Berl. Jahrb. für 1858 gegebenen Entwickelungen behandelt werden.

178. Übertragung der Elemente vom Sonnenmittelpunkt auf den Schwerpunkt von Sonne und störendem Planeten. Der Zusammenhang zwischen den Differenzialen der Elemente und den Differenzialen von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ muß sich durch Differenziation der Ausdrücke ergeben, die zwischen den Elementen und den rechtwinkligen Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten bestehen. Diese sind nach Nr. 110:

$$M = E - e\sin E$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \qquad 1)$$

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos v$$

$$\begin{aligned} x &= r\left(\cos(\omega+v)\cos\Omega - \sin(\omega+v)\sin\Omega\cos i\right)\\ y &= r\left(\cos(\omega+v)\sin\Omega + \sin(\omega+v)\cos\Omega\cos i\right) \qquad 2)\\ z &= r\sin(\omega+v)\sin i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\left(\left(\sin(v+\omega) + e\sin\omega\right)\cos\Omega + \left(\cos(v+\omega) + e\cos\omega\right)\sin\Omega\cos i\right)\\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}}\left(\left(\sin(v+\omega) + e\sin\omega\right)\sin\Omega - \left(\cos(v+\omega) + e\cos\omega\right)\cos\Omega\cos i\right) \qquad 3)\\ \frac{dz}{dt} &= +\frac{k}{\sqrt{p}}\left(\cos(v+\omega) + e\cos\omega\right)\sin i. \end{aligned}$$

Setzt man die Richtungscosinus des Systems xyz gegen das durch Ort und Bahn des Kometen bestimmte System ($u = \omega + v$)

$$\begin{aligned}
\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i &= \cos \alpha_1 \\
\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i &= \cos \alpha_2 \\
\sin u \sin i &= \cos \alpha_3 \\
-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i &= \cos \beta_1 \\
-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i &= \cos \beta_2 \\
\cos u \sin i &= \cos \beta_3 \\
\sin \Omega \sin i &= \cos \gamma_1 \\
-\cos \Omega \sin i &= \cos \gamma_2 \\
\cos i &= \cos \gamma_3
\end{aligned} \qquad 4)$$

und führt gleich hier die weiterhin gebrauchten und völlig bekannten Größen

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_1 \delta x + \cos \alpha_2 \delta y + \cos \alpha_3 \delta z &= M^0 \\
\cos \beta_1 \delta x + \cos \beta_2 \delta y + \cos \beta_3 \delta z &= N^0 \\
\cos \gamma_1 \delta x + \cos \gamma_2 \delta y + \cos \gamma_3 \delta z &= P^0 \\
\cos \alpha_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \alpha_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \alpha_3 \delta \frac{dz}{dt} &= M' \\
\cos \beta_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \beta_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \beta_3 \delta \frac{dz}{dt} &= N' \\
\cos \gamma_1 \delta \frac{dx}{dt} + \cos \gamma_2 \delta \frac{dy}{dt} + \cos \gamma_3 \delta \frac{dz}{dt} &= P'
\end{aligned} \qquad 5)$$

ein, so wird zunächst:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \alpha_1 \\
y &= r \cos \alpha_2 \\
z &= r \cos \alpha_3 .
\end{aligned} \qquad 2^a)$$

Schreibt man weiter in 3)

$$\sin u + e \sin \omega = \sin u (1 + e \cos v) - \cos u \cdot e \sin v = \frac{p}{r} \sin u - e \sin v \cdot \cos u$$

$$\cos u + e \cos \omega = \cos u (1 + e \cos v) + \sin u \cdot e \sin v = \frac{p}{r} \cos u + e \sin v \cdot \sin u ,$$

so wird daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_1 + e \sin v \cdot \cos \alpha_1 \right) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_2 + e \sin v \cdot \cos \alpha_2 \right) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{r} \cos \beta_3 + e \sin v \cdot \cos \alpha_3 \right) .
\end{aligned} \qquad 3^a)$$

Aus $2^a)$ und $3^a)$ folgt dann mit Beachtung der Formeln in Nr. 2:

$$x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 = 0 \qquad 6)$$

$$\frac{dx}{dt} \cos \gamma_1 + \frac{dy}{dt} \cos \gamma_2 + \frac{dz}{dt} \cos \gamma_3 = 0 \qquad 7)$$

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{p}\cos\gamma_1 \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= k\sqrt{p}\cos\gamma_2 \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{p}\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

und aus den letzten drei Formeln durch Quadrieren und Addieren:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2=k^2p. \quad 9)$$

Endlich gibt die bekannte Formel

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

sofort:

$$\frac{k^2}{a} = \frac{2k^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right). \quad 10)$$

Differenziert man nun 2^a) total, so kommt

$$\begin{aligned} \delta x &= \cos\alpha_1\,\delta r + r\,\delta\cos\alpha_1 \\ \delta y &= \cos\alpha_2\,\delta r + r\,\delta\cos\alpha_2 \\ \delta z &= \cos\alpha_3\,\delta r + r\,\delta\cos\alpha_3 \end{aligned}$$

und hieraus nach den Formeln in Nr. 6, die auch im folgenden fortwährend zur Anwendung gelangen:

$$\begin{aligned} \delta r &= M^0 \\ r\delta\mathbf{s} &= N^0 \\ -r\delta\mathbf{q} &= P^0. \end{aligned} \quad 11)$$

Statt die Gleichungen 3^a) zu differenzieren, behandeln wir die an ihre Stelle getretenen 6), 7), 9) und 10); die totale Differenziation von 6) und 7) ergibt:

$$-r\delta\mathbf{q} = P^0$$

$$\frac{dx}{dt}(\cos\alpha_1\delta\mathbf{q}-\cos\beta_1\delta\mathbf{p})+\frac{dy}{dt}(\cos\alpha_2\delta\mathbf{q}-\cos\beta_2\delta\mathbf{p})+\frac{dz}{dt}(\cos\alpha_3\delta\mathbf{q}-\cos\beta_3\delta\mathbf{p})=-P',$$

wovon die erste bereits in 11) vorkommt, die zweite aber nach Substitution der Werte von 3^a) in:

$$\frac{k}{\sqrt{p}}\left(\frac{p}{r}\delta\mathbf{p}-e\sin v\,\delta\mathbf{q}\right)=P'$$

übergeht. Dies gibt nach Eintragung von $\delta\mathbf{q}$ aus 11):

$$\delta\mathbf{p} = \frac{r}{k\sqrt{p}}P' - \frac{e\sin v}{p}P^0. \quad 12)$$

Bei den Differenziationen von 9) und 10) treten einige Differenziale auf, die wir vorweg ableiten. Nach 10) ist:

$$\delta(x^2+y^2+z^2) = \delta(r^2) = 2r\delta r = 2rM^0; \quad 13)$$

ferner folgt aus 2^a) direkt:

$$x\delta\frac{dx}{dt}+y\delta\frac{dy}{dt}+z\delta\frac{dz}{dt} = rM' \quad 14)$$

und ebenso aus 3a)

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z = \frac{k}{\sqrt{p}}\left(\frac{p}{r}N^0 + e\sin v \cdot M^0\right) \qquad 15)$$

$$\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}}\left(\frac{p}{r}N' + e\sin v \cdot M'\right). \qquad 16)$$

Also hat man:

$$\delta\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \frac{2k}{\sqrt{p}}\left(\frac{p}{r}N' + e\sin v \cdot M'\right) \qquad 17)$$

und

$$\delta\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)\left[\frac{k}{\sqrt{p}}\left(\frac{p}{r}N^0 + e\sin v M^0\right) + rM'\right]$$

oder mit Rücksicht auf

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = r\frac{dr}{dt} = r\frac{k}{\sqrt{p}}e\sin v:$$

$$\delta\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{p}\left(re^2\sin v^2 M^0 + pe\sin v N^0 + \frac{\sqrt{p}}{k}r^2 e\sin v M'\right). \qquad 18)$$

Die Differenziation von 9) ergibt nun:

$$k^2\delta p = 2k^2\sqrt{p}\;\delta\sqrt{p} =$$

$$\delta(x^2+y^2+z^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right) + (x^2+y^2+z^2)\,\delta\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right) - \delta\left(x\frac{dx}{dt} + \cdots\right)^2,$$

also mit Beachtung von

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k^2}{p}(1 + 2e\cos v + e^2),$$

ferner von 13), 17) und 18) nach leichter Reduktion:

$$\delta\sqrt{p} = \frac{\sqrt{p}}{r}M^0 - \frac{e\sin v}{\sqrt{p}}N^0 + \frac{r}{k}N'. \qquad \text{I.}$$

Desgleichen gibt die Differenziation von 10)

$$k^2\delta\frac{1}{a} = -\frac{2k^2}{r^2}\delta r - \delta\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right),$$

also nach 11) und 17)

$$\delta\frac{1}{a} = -\frac{2}{r^2}M^0 - \frac{2e\sin v}{k\sqrt{p}}M' - \frac{2\sqrt{p}}{rk}N'. \qquad \text{II.}$$

Da aus $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ folgt: $\delta\mu = \frac{3}{2}\mu a\delta\frac{1}{a}$, so ist weiter

$$\delta\mu = -\frac{3\mu a}{r^2}M^0 - \frac{3e\sin v}{k\sqrt{p}}\mu a M' - \frac{3\sqrt{p}}{rk}\mu a N' \qquad \text{III.}$$

und da $p = a(1-e^2)$ ergibt: $\delta p = (1-e^2)\delta a - 2ae\delta e$ oder

$$\delta e = \frac{1-e^2}{2ae}\delta a - \frac{\delta p}{2ae} = -\frac{p}{2e}\delta\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{p}}{ae}\delta\sqrt{p},$$

so hat man auch nach einfacher Zusammenziehung:

$$\delta e = \frac{e + \cos v}{r} M^0 + \frac{\sin v}{a} N^0 + \frac{\sqrt{p}}{k} \sin v M^0 + \frac{\sqrt{p}}{k} (\cos v + \cos E) N' \qquad \text{IV.}$$

(E = exzentrische Anomalie).

Wir gehen nun zur Verwertung der Gleichungen 11) und 12) über; im vorliegenden Fall ist nach den Gl. 6) (Seite 13), da $\varphi = u$, $\psi = -\Omega$, $\theta = i$ zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{p} &= \sin u \sin i \delta \Omega + \cos u \delta i \\ \delta \mathfrak{q} &= \cos u \sin i \delta \Omega - \sin u \delta i \\ \delta \mathfrak{s} &= \delta u + \cos i \delta \Omega \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \delta i &= \cos u \delta \mathfrak{p} - \sin u \delta \mathfrak{q} \\ \sin i \, \delta \Omega &= \sin u \delta \mathfrak{p} + \cos u \delta \mathfrak{q} \\ \delta u &= \delta \mathfrak{s} - \cos i \delta \Omega \end{aligned}$$

oder nach 11) und 12)

$$\begin{aligned} \delta i &= \left(\frac{r}{k\sqrt{p}} P' - \frac{e \sin v}{p} P^0 \right) \cos u + \frac{P^0}{r} \sin u \\ \sin i \delta \Omega &= \left(\frac{r}{k\sqrt{p}} P' - \frac{e \sin v}{p} P^0 \right) \sin u - \frac{P^0}{r} \cos u \end{aligned}$$

$$\delta u = \frac{1}{r} N^0 - \cos i \delta \Omega \qquad 19)$$

oder endlich, wenn $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ beachtet wird:

$$\delta i = \frac{\sin u + e \sin \omega}{p} P^0 + \frac{r \cos u}{k\sqrt{p}} P' \qquad \text{V.}$$

$$\sin i \, \delta \Omega = - \frac{\cos u + e \cos \omega}{p} P^0 + \frac{r \sin u}{k\sqrt{p}} P' . \qquad \text{VI.}$$

Um $\delta \omega$ und δM zu erlangen, muß das Differenzial der Gleichungen 1) gebildet werden. Die Gleichung

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos (u - \omega)$$

gibt:

$$\frac{1}{r} \delta p - \frac{p}{r^2} \delta r = \cos (u - \omega) \delta e - e \sin (u - \omega) \delta u + e \sin (u - \omega) \delta \omega$$

oder

$$\delta \omega = \frac{2\sqrt{p}}{re \sin v} \delta \sqrt{p} - \frac{p}{r^2 e \sin v} \delta r - \frac{\cos v}{e \sin v} \delta e + \delta u .$$

Werden hier die Ausdrücke I., 11), IV. und 19) eingetragen, so kommt nach einiger Reduktion:

$$\delta \omega = \frac{\sin v}{re} M^0 - \frac{\cos E}{re} N^0 - \frac{\sqrt{p} \cos v}{ke} M' + \frac{(r + p) \sin v}{ke\sqrt{p}} N' - \cos i \delta \Omega . \qquad \text{VII.}$$

Aus den Gleichungen

$$M = E - e \sin E$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E$$

folgt

$$\delta M = \frac{r}{a} \delta E - \frac{r \sin v}{a \sqrt{1 - e^2}} \delta e$$

und durch logarithmische Differenziation der zweiten:

$$\frac{\delta v}{\sin v} = \frac{\delta \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\delta E}{\sin E} = \frac{\delta e}{\cos \varphi^2} + \frac{a \cos \varphi}{r \sin v} \delta E$$

oder

$$\delta E = \frac{r}{a \cos \varphi} \delta v - \frac{r}{a} \frac{\sin v}{\cos \varphi^3} \delta e.$$

Dies in δM eingetragen führt auf

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} (\delta u - \delta \omega) - \frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^3} \left(1 + \frac{p}{r}\right) \delta e$$

oder nach Eintragung von 19), VII. und IV.:

$$\delta M = -\left(\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a}\right) \sin v M^0 + \frac{\cos v}{a \operatorname{tg} \varphi} N^0 - \frac{1}{k \sqrt{a}} \left(2r - \frac{p \cos v}{e}\right) M' - \frac{\sqrt{p} \sin v}{k \operatorname{tg} \varphi} \left(1 + \frac{r}{p}\right) N'. \quad \text{VIII.}$$

In der bis jetzt angegebenen Weise sind die Formeln I.—VIII. zu verwenden, wenn lediglich eine Änderung der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten vorliegt, also etwa bei der Umwandlung von Koordinatenstörungen in Elementenstörungen, wie sie bei der Enckeschen Methode behufs Erlangung neuer oskulierender Elemente vorzunehmen ist. Bei der Übertragung der Elemente auf den Schwerpunkt eines Systems kommt noch ein weiterer Punkt in Frage, nämlich die Änderung der Anziehungskraft, die im System des Mittelpunkts der Sonne gleich k^2, im System des Schwerpunktes von Sonne und Planet aber gleich $k^2(1 + m')$ anzusetzen ist. Man hat also in diesem Falle noch ein δk einzuführen und den früheren Formeln hinzuzufügen; es ist schon Seite 568 angegeben, daß

$$\frac{\delta k}{k} = \tfrac{1}{2} m'.$$

Die Formel I. ging hervor aus 9); hierin muß man nun setzen

$$\delta (p k^2) = 2 k^2 \sqrt{p} \, \delta \sqrt{p} + 2 p k \delta k$$

d. h. man muß dem Ausdruck I. für $\delta \sqrt{p}$ hinzufügen

$$-\sqrt{p} \frac{\delta k}{k}. \qquad \text{I}^a.$$

Die Formel II. ging hervor aus 10), welches so geschrieben werden kann

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{k^2};$$

daraus ist ersichtlich, daß II. den Zusatz erheischt

$$\frac{2 V^2}{k^3} \delta k = 2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \frac{\delta k}{k}. \qquad \text{II}^a.$$

Aus $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ folgt $\delta\mu = \frac{3}{2}\mu a\delta\frac{1}{a} + \mu\frac{\delta k}{k}$; es ist also zu III. im ganzen hinzuzufügen:

$$\left(\frac{3}{2}\mu a\,2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)+\mu\right)\frac{\delta k}{k} = \left(\frac{6a}{r}-2\right)\mu\frac{\delta k}{k}. \qquad \text{III}^a.$$

Vermöge der Zusammensetzung von δe aus $\delta\frac{1}{a}$ und $\delta\sqrt{p}$ folgt als Zusatz von IV.:

$$\left(-\frac{p}{2e}\,2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)+\frac{\sqrt{p}}{ae}\sqrt{p}\right)\frac{\delta k}{k} = -2(\cos v+e)\frac{\delta k}{k} = -\frac{2p\cos E}{r}\frac{\delta k}{k}. \qquad \text{IV}^a.$$

In den Formeln 6) und 7), aus denen δi und $\delta\Omega$ hervorgingen, kommt k nicht vor, die Ausdrücke V. und VI. erheischen also keinen Zusatz. Ebenso geht daraus hervor, daß δr und δu keinen Zusatz erfordern, so daß der Zusatz von $\delta\omega$ in Formel VII. sich lediglich aus den von $\delta\sqrt{p}$ und δe herrührenden Inkrementen zusammensetzt; diese geben:

$$\left(-\frac{2\sqrt{p}}{re\sin v}\sqrt{p}+\frac{2\cos v}{e\sin v}p\,\frac{\cos E}{r}\right)\frac{\delta k}{k} = -\frac{2}{e}\sin v\,\frac{\delta k}{k}. \qquad \text{VII}^a.$$

Der Zusatz von δM endlich setzt sich aus dem von $\delta\omega$ und δe zusammen und wird nach einiger Reduktion:

$$+\left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r}+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}\right)2r\sin v\,\frac{\delta k}{k}. \qquad \text{VIII}^a.$$

Wir stellen zum Schluß die vollständigen Formeln für die Übertragung eines Elementensystems vom Mittelpunkt der Sonne auf den Schwerpunkt von Sonne und störender Planet zusammen. Sind m', x', y', z' Masse und Koordinaten des störenden Planeten, so rechne man zuerst

$$\delta x = -\frac{m'}{1+m'}x', \cdots, \qquad \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{m'}{1+m'}\frac{dx'}{dt}, \cdots,$$

sodann die sechs Größen $M^0, N^0, P^0, M', N', P'$ aus den Gl. 5) (Seite 569); dann wird:

$$\begin{aligned}
\delta\mu &= -\frac{3\mu a}{r^2}M^0 - \frac{e\sin v}{\sqrt{p}}3\mu a\frac{M'}{k} - \frac{\sqrt{p}}{r}3\mu a\frac{N'}{k} + \left(\frac{6a}{r}-2\right)\mu\frac{\delta k}{k}\\
\delta e &= \frac{e+\cos v}{r}M^0 + \frac{\sin v}{a}N^0 + \sqrt{p}\sin v\,\frac{M'}{k} + \sqrt{p}\,(\cos v+\cos E)\frac{N'}{k} - \frac{2p\cos E}{r}\frac{\delta k}{k}\\
\delta i &= \frac{\sin u + e\sin\omega}{p}P^0 + \frac{r\cos u}{\sqrt{p}}\frac{P'}{k}\\
\delta\Omega &= -\frac{\cos u + e\cos\omega}{p\sin i}P^0 + \frac{r\sin u}{\sqrt{p}\sin i}\frac{P'}{k}\\
\delta\omega &= \frac{\sin v}{re}M^0 - \frac{\cos E}{re}N^0 - \frac{\sqrt{p}\cos v}{e}\frac{M'}{k} + \frac{(r+p)\sin v}{e\sqrt{p}}\frac{N'}{k} - \cos i\,\delta\Omega - \frac{2\sin v}{e}\frac{\delta k}{k}\\
\delta M &= -\left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r}+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}\right)\sin v\cdot M^0 + \frac{\cos v}{a\operatorname{tg}\varphi}N^0 - \frac{1}{\sqrt{a}}\left(2r-\frac{p\cos v}{e}\right)\frac{M'}{k} - \frac{\sqrt{p}\sin v}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{N'}{k}\\
&\qquad + \left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r}+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}\right)2r\sin v\,\frac{\delta k}{k}.
\end{aligned}$$

Sind $\delta x, \ldots \delta \frac{dx}{dt}, \ldots$ die Störungsbeträge in den rechtwinkligen Koordinaten bei einer nach der Enckeschen Methode geführten Störungsrechnung, so kann man die ihnen entsprechenden Inkremente der oskulierenden Elemente nach denselben Formeln rechnen, nur fallen dann die mit $\frac{\delta k}{k}$ multiplizierten Glieder weg.

Um ein auf den Schwerpunkt bezogenes Elementensystem wieder auf den Mittelpunkt der Sonne zurückzuführen, eine Operation, die man vornehmen muß, wenn der Komet sich dem störenden Körper wieder nähert, hat man obige Formeln mit entgegengesetzten Zeichen zu benutzen.

Die obigen Rechenvorschriften entbehren noch der wünschenswerten Kontrollen. Es lassen sich wirklich durchgreifende auch kaum aufstellen, so daß man, um größere Fehler zu vermeiden, gut tun wird, die Elemente auch direkt aus den variierten Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten zu berechnen. Weiter hat man nur die Möglichkeit, die Formel

$$r \cos u \cdot \sin i \delta \Omega - r \sin u \cdot \delta i = - P^0$$

anzuwenden, und etwa auch $\delta \sqrt{p}$ und $\delta \frac{1}{a}$ nach I. und II. zu rechnen und nachzusehen, ob die Gleichungen

$$\delta e = - \frac{p}{2e} \delta \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{p}}{ae} \delta \sqrt{p}$$

$$\delta \mu = \frac{3 \mu a}{2} \delta \frac{1}{a} + \mu \frac{\delta k}{k}$$

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} \left(\frac{1}{r} N^0 - \cos i \delta \Omega - \delta \omega \right) - \frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^3} \left(1 + \frac{p}{r} \right) \delta e$$

befriedigt werden.

Abschnitt XXXIV.

Die definitive Bahn.

179. Begriff und Bestimmung der definitiven Bahn. Die definitive Bahn ist der Abschluß des Näherungsprozesses, den die Aufgabe, die Bewegungen der Himmelskörper zu beschreiben, zu ihrer Lösung erheischt. Man versteht darunter dasjenige oskulierende Elementensystem, welches nach Anbringung der jeweiligen Störungsbeträge die Gesamtheit der vorhandenen Beobachtungen am besten darstellt. Seine Bildung ist durch die schon früher gegebenen Erläuterungen (Nr. 140, 155) vorgeschrieben und braucht hier nur mehr in Kürze zusammengefaßt zu werden. Notwendige Voraussetzung ist ein genähert richtiges Elementensystem, mittels dessen man für den ganzen von den Beobachtungen bedeckten Zeitraum die Störungen durch die großen Planeten mit hinlänglicher Genauigkeit berechnen kann; hinlänglich ist diese Genauigkeit dann, wenn die Störungsbeträge, berechnet mit dem definitiven System, sich nicht wesentlich anders ergeben würden, als mit dem vorläufigen. Das genäherte System kann ferner dazu benutzt werden, die Beobachtungen zu Normalörtern zusammenzufassen, indem die Ephemeridenkorrektionen zeitlich nahe gelegener Beobachtungen zu Mitteln vereinigt und diese zum Ephemeridenort für das Mittel der Beobachtungszeiten hinzugefügt werden; übrigens können die einzelnen Normalörter auch mittels verschiedener, etwa schon früher erhaltener provisorischer Elemente gebildet werden, wenn diese nur genau genug sind, um für einen beschränkten Zeitraum die Bewegung des Himmelskörpers ohne systematischen Fehler darzustellen. Das genäherte System einschließlich der Störungen wird endlich mit allen Normalörtern verglichen und durch eine der im Abschnitt XXVII auseinandergesetzten Bahnverbesserungsmethoden unter Zugrundelegung eines plausiblen Ausgleichungsprinzips — in der Regel wird das der kleinsten Fehlerquadratsumme genommen — zur definitiven Bahn verbessert.

Die Berücksichtigung der Störungen kann entweder dadurch geschehen, daß man direkt gestörte Örter rechnet und diese dann mit den Beobachtungen vergleicht, oder dadurch, daß man die Beobachtungen von den Störungen befreit und die reduzierten Örter mit der aus dem vorhandenen Elementensystem hervorgehenden Ephemeride vergleicht. Der letztere Weg setzt voraus, daß die Umwandlung der Elementenstörungen bzw. der Störungen der heliozentrischen Koordinaten in die Störungen der geozentrischen Koordinaten leicht und sicher bewerkstelligt werden kann. Es wird dies in der Regel nur dann der Fall sein, wenn die Störungsbeträge *klein* sind, so daß man mit Differenzialformeln ausreicht, und wenn man die nötigen Differenzialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen bzw. heliozentrischen Koordinaten entweder ohnehin berechnen muß oder leicht bilden kann. Klein genug sind die Störungen meist nur, wenn es sich um kleinere Zeiträume handelt, also etwa um die Erscheinung eines nichtperiodischen Kometen. Die genannten Differenzial-

quotienten nach den *Elementen* braucht man für die Zeiten der Normalörter ohnehin für die Bahnverbesserung. Treffen beide Umstände zusammen, so ist es vorzuziehen, diesen Weg einzuschlagen, da man dann die ganze Ephemeride mit *einem* Elementensystem rechnen kann. Auch die genannten Differenzialquotienten nach den rechtwinkligen Koordinaten sind nach den Formeln Seite 546 so leicht zu bilden, daß man von der Methode Gebrauch machen kann. Hat man aber die Störungen in den Polarkoordinaten gerechnet, so werden die nötigen Differenzialquotienten weder anderweitig gebraucht, noch sind sie leicht zu rechnen; hier wird man also von diesem Wege um so mehr absehen, als sich die Ephemeridenrechnung dann auch für die gestörten Örter sehr einfach gestaltet (Seite 532).

Bei langen Zeiträumen schlägt man den oben angegebenen ersten Weg ein d. h. man rechnet die gestörten Örter. Hat man die Störungen durch die Variation der Elemente berechnet, so stellt man für die Zeit jedes Normalortes das oskulierende Elementensystem auf und berechnet daraus den Ort; hat man die Störungen in den Koordinaten gerechnet, so fügt man diese auf die Seite 532 bzw. 546 angegebene Weise bei der Ephemeridenrechnung hinzu.

180. Beispiel. (221) Eos. Um die Berücksichtigung der Störungen bei definitiven Bahnbestimmungen an einem Beispiel zu erläutern, soll die in Nr. 143 bereits durchgeführte Rechnung mit den hierhergehörigen Ergänzungen versehen werden. Die Störungsrechnung nach der Methode der Variation der Elemente ergibt folgende Störungsbeträge zwischen den einzelnen Oskulationsepochen:

		ΔM	$\Delta\omega$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
Von 1882 Febr. 7.0	bis 1883 Mai 13.0	+10′40″.1	−11′19″.4	− 31″.2	− 7″.2	−1′22″.0	−0″.5007
» 1883 Mai 13.0	» 1884 Juli 6.0	+ 9 44.9	−11 48.6	− 27.5	+ 1.9	−0 16.1	−0.3131
» 1883 Mai 13.0	» 1887 Febr. 1.0	+29 34.4	−32 25.0	− 58.0	+ 5.7	−0 32.6	+0.2632
» 1887 Febr. 1.0	» 1888 Apr. 16.0	+16 41.0	−15 5.1	− 44.7	− 9.6	−1 10.4	−0.4591
» 1888 Apr. 16.0	» 1889 Juni 30.0	+30 47.3	−34 29.5	−428.2	+19.6	−3 26.3	−0.9051
» 1889 Juni 30.0	» 1894 Juni 4.0	− 7 6.5	+23 27.8	−109.8	+ 8.1	−7 50.6	+0.1382
» 1894 Juni 4.0	» 1898 März 15.0	−11 44.5	+15 53.4	− 35.4	−21.1	−7 59.0	−1.0206

Zu bemerken ist hierbei nur, daß Jupiter und Saturn als störende Körper berücksichtigt sind und daß unter ΔM der Gesamtbetrag der Störung in mittlerer Anomalie zusammengefaßt ist. Hiermit ergibt sich folgendes System von oskulierenden Elementen:

	I	II	III	IV
Ep. und Osk.	1882 Febr. 7.0	1883 Mai 13.0	1884 Juli 6.0	1887 Febr. 1.0
M	171°52′22″.5	258°55′13″.5	338°20′25″.1	156° 3′22″.8
ω	188 54 9.1	188 42 49.7	188 31 1.1	188 10 37.7
Ω	142 32 46.1	142 32 14.9	142 31 47.5	142 39 26.6
i	10 51 14.7	10 51 7.5	10 51 9.4	10 51 9.1
φ	5 57 6.5	5 55 44.5	5 55 28.4	5 55 11.9
μ	679″.8499	679″.3492	679″.0361	679″.6124
log a	0.478 3957	0.478 6090	0.478 7425	0.478 4969
Äqu.	1880.0	1880.0	1880.0	1890.0
t	0	+ 460	+ 880	+ 1820

	V	VI	VII	VIII
Ep. und Osk.	1888 Apr. 16.0	1889 Juni 30.0	1894 Juni 4.0	1898 März 15.0
M	239°23′53″.2	322°55′ 8″.0	301°55′28″.3	201°46′37″.0
ω	187 55 32.6	187 21 3.1	187 44 43.9	188 0 37.3
Ω	142 38 41.9	142 31 33.7	142 37 53.7	142 37 18.3
i	10 50 59.5	10 51 19.1	10 51 23.1	10 51 2.0
φ	5 54 1.5	5 50 35.2	5 42 44.6	5 34 45.6
μ	679″.1533	678″.2482	678″.3864	677″.3658
log a	—	—	—	0.479 4555
Äqu.	1890.0	1890.0	1900.0	1900.0
t	+ 2260	+ 2700	+ 4500	+ 5880

	$\Delta\omega$	$\Delta\Omega$	Δi
Präzession von 1880.0 bis 1890.0	+ 13″.0	+ 8′ 9″.7	− 4″.1
» 1890.0 » 1900.0	+ 13.0	+ 8 9.8	− 4.1

Mit den Elementen I, II, III, IV, VIII sind für die Zeiten der beobachteten Normalörter die geozentrischen Koordinaten gerechnet und in der in Nr. 143 ausführlich angegebenen Weise zur Ermittlung der definitiven Bahn verwertet worden.

Siebenter Teil.

Bahnbestimmung der Meteore, Satelliten und Doppelsterne.

Abschnitt XXXV.

Bahnbestimmung der Meteore.

181. Einleitung. Forschungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, die insbesondere durch *Schiaparelli* zu einem gewissen Abschluß gebracht wurden, haben gezeigt, daß der Raum um die Sonne nicht nur von Planeten und Kometen, sondern auch von einer zahllosen Menge von Körpern eingenommen wird, die uns wegen ihrer Kleinheit nur dann sichtbar werden, wenn sie mit der Erde auf ihrem Weg um die Sonne direkt in Berührung kommen: sie fallen auf ihre Oberfläche nieder — *Meteorsteine* —, oder sie entzünden sich durch Reibung bei ihrer Bewegung durch die Atmosphäre und künden durch die kurze Lichterscheinung bis zu ihrer vollständigen Verbrennung ihr Dasein an — *Sternschnuppen* —, oder endlich sie durchziehen in längerer Lichtbahn die unteren Schichten der Atmosphäre und zersplittern schließlich in der Luft oder durch Auffallen auf die feste Erde — *Feuerkugeln*, alle drei nur verschiedene Erscheinungsformen desselben Ereignisses, der Vereinigung kosmischer Körper mit der Erde. Nachdem dieser Sachverhalt konstatiert war, entstand die Aufgabe, die von diesen Körperchen *vorher* beschriebenen *Bahnen* aus den zur Verfügung stehenden Beobachtungen zu ermitteln, um Aufschluß über ihre kosmische Stellung zu erlangen; mit dieser Aufgabe allein wollen wir uns hier beschäftigen, alle anderen Fragen der Meteor-Astronomie aber bei Seite lassen.

Die Körperchen unterliegen der Anziehungskraft der Sonne und beschreiben infolgedessen Bahnen um diese. Von diesen Bahnen ist uns von vorneherein ein Punkt bekannt, nämlich der Ort, den die Erde zur Zeit des Phänomens einnahm. Gelingt es also noch, Richtung und Größe der Geschwindigkeit des Körperchens in diesem Ort aus Beobachtungen abzuleiten, so kann die Bahn bestimmt werden (Nr. 43). Nimmt man die Form der Bahnkurve von vornherein als *Parabel* an, so ist die Größe der Geschwindigkeit v durch (Nr. 42)

$$v^2 = \frac{2k^2}{R}$$

gegeben, wenn R die Entfernung der Erde und des Körperchens von der Sonne bedeutet. Hat man Grund zu der Annahme, daß die Kurve eine Ellipse von der großen Halbachse a ist, so kann man die Geschwindigkeit aus der allgemeineren Formel

$$v^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

entnehmen. In diesen beiden Fällen hat man also nur die *Richtung* der Geschwindigkeit aus den Beobachtungen abzuleiten. Kann man keinerlei Voraussetzung über die Kurve machen, so muß man auch die Größe der Geschwindigkeit den Beobachtungen entnehmen, was offenbar nur möglich ist, wenn zwei Punkte der Bahn mit den zugehörigen Zeiten beobachtet sind; bei den sogenannten Feuerkugeln gelingt dies in der Tat und für diese wird also das Problem in der allgemeinsten Form zu lösen sein.

Die Richtung, aus der ein Meteor zur Erde gelangt, wird durch die sphärischen Koordinaten des sogenannten *Radiationspunktes* gegeben. Bei Feuerkugeln wird derselbe dadurch bestimmt, daß zwei Punkte der Bahn, die während ihrer kurzen Sichtbarkeitsdauer als Gerade angenommen werden kann, durch Visieren von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus festgelegt werden und der Schnitt ihrer Verbindungslinie mit der Sphäre aufgesucht wird; die hierzu nötigen Formeln werden unten abgeleitet werden. Bei den gewöhnlichen Sternschnuppenerscheinungen aber wird von dem Umstande Gebrauch gemacht, daß dieselben in der Regel nicht vereinzelt auftreten, sondern in größeren Schwärmen, deren einzelne Partikel für kurze Zeit in parallelen geradlinigen Bahnen angenommen werden dürfen. Tritt die Erde in einen solchen Schwarm ein, so schneiden die einzelnen Partikel die Atmosphäre in parallelen Lichtlinien, die vom Beobachter an der Sphäre als Stücke größter Kreise wahrgenommen werden, die sich alle in einem Punkte schneiden; dieser Punkt ist der Radiationspunkt, denn er zeigt offenbar die gemeinsame Richtung an, aus der die Partikel kommen.

Man hat sich diese Schwärme als Bestandteile von Meteorströmen vorzustellen, die in Kegelschnittskurven die Sonne umziehen und die Erdbahn schneiden. Jedes Jahr, wenn die Erde den Schnittpunkt passiert, tritt der Strom aus dem betreffenden Radiationspunkt in Tätigkeit. Im allgemeinen muß man die Bahnen dieser Ströme als Parabeln betrachten, da man kein Mittel besitzt, Abweichungen von der parabolischen Geschwindigkeit zu konstatieren. Nur wenn das Phänomen der Sternschnuppen periodische Schwankungen der Intensität aufweist oder wenn es gelingt, die Bahn eines Meteorstromes mit einer Kometenbahn zu identifizieren, kann man annehmen, daß eine Stelle größerer Dichtigkeit im Strom vorhanden ist, aus deren Umlaufszeit, der Periode der Intensitätsschwankung, die große Achse der elliptischen Bahn erschlossen werden kann.

182. Zenithattraktion. Aberration des Radiationspunktes. Apex. Ehe wir die Bahnbestimmung der Meteorströme und Feuerkugeln vornehmen, muß der Einfluß der Anziehung und der Bewegung der Erde auf das beobachtete Phänomen besprochen werden, damit der Bahnbestimmung korrigierte Daten zugrunde gelegt

werden können. Die relative Bewegung eines Meteors zu der als ruhend gedachten Erde kann, bevor die Anziehungskraft der Erde merklich zu werden beginnt, für kurze Zeit als geradlinig und gleichförmig angesehen werden. Durch die Attraktion der Erde wird die Bahn zu einem Kegelschnitt mit dem Brennpunkt im Mittelpunkte der Erde gekrümmt und die ursprüngliche Geschwindigkeit u geändert. Der Kegelschnitt wird, als aus dem Unendlichen kommend, eine Hyperbel sein, deren eine Asymptote die Gerade ist, in der das Meteor sich ursprünglich bewegte. Es sei in Fig. 63 O der Mittelpunkt der Erde, QN die Gerade, in der das Meteor sich bewegen würde, wenn keine Erdattraktion stattfände; die Hyperbel, in der es sich tatsächlich bewegt, treffe die Erdoberfläche im Punkte M. Die Tangente MV in M an die Hyperbel gezogen zeigt die Richtung an, aus der der Beobachter das Meteor kommen sieht; die wahre relative Bewegungsrichtung aber ist QN. Da die Hyperbelebene durch den Mittelpunkt der Erdkugel geht, so liegt die Tangente MV in der Vertikalebene des Ortes M, wo das Meteor endet und bildet mit der Zenithlinie MZ dieses Ortes den Winkel z, der offenbar kleiner ist, als der Winkel ζ, den die ursprüngliche Richtung QN oder AM mit der Zenithlinie bildet. Die Attraktion der Erde äußert sich also in einer Verminderung der Zenithdistanz des Punktes der Sphäre, von dem das Meteor herkommt oder des *Radiationspunktes*. Die Zenithdistanz des beobachteten Radiationspunktes ist hiernach um $\zeta - z$ zu korrigieren, um die des wahren zu erhalten. Den Unterschied $\zeta - z$ nennt *Schiaparelli* die *Zenithattraktion*; ihre Bestimmung wird uns nachher beschäftigen, wenn wir erst noch den Unterschied der wahren ungestörten Geschwindigkeit u des Meteors und der scheinbaren, in M beobachteten, die wir mit w bezeichnen wollen, festgestellt haben. Die Anziehungskraft der Erde in der Entfernung der astronomischen Einheit ist $k^2 M$, wo k^2 die Gaußsche Konstante, M die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse ist; an der Erdoberfläche wird sie also $\frac{k^2 M}{\varrho^2}$, wenn ϱ der Radius der Erdkugel in astronomischen Einheiten ist; wird sie in üblicher Weise mit g bezeichnet, so hat man

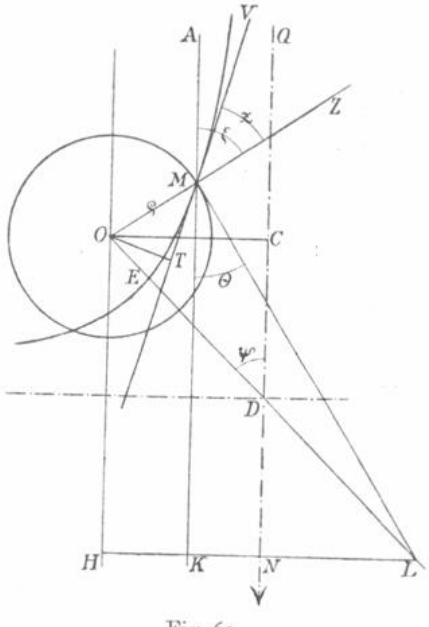


Fig. 63.

$$k^2 M = \varrho^2 g \,. \qquad 1)$$

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Hyperbel mit dem Radiusvektor r ergibt sich aus

$$v^2 = k^2 M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) = \varrho^2 g \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right),$$

wo a den absoluten Wert der reellen Halbachse bezeichnet. Da u als Geschwindigkeit in unendlicher Ferne aufgefaßt werden darf, so wird:

$$u^2 = \frac{g\varrho^2}{a} \qquad 2)$$

und für die Geschwindigkeit w im Punkte M mit dem Radiusvektor ϱ folgt:

$$w^2 = \varrho^2 g\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{a}\right).$$

Also wird

$$w^2 = u^2 + 2\varrho g. \qquad 3)$$

Hieraus kann u berechnet werden, wenn w beobachtet ist. Wählt man als Längen- und Zeit-Einheit das Meter und die Sekunde mittlerer Zeit, so ist bekanntlich $g = 9.80$ m und $\varrho = 6\,370\,000$ m (rund), also wird

$$2\varrho g = 124\,852\,000.$$

Die Elemente der Hyperbel bestimmt man nach Nr. 43. Zunächst folgt aus 2) die reelle Halbachse:

$$a = \frac{g\varrho^2}{u^2}. \qquad 4)$$

Ist ferner $OT = \varrho \sin z$ das Lot von O auf die Richtung der Geschwindigkeit w, und $p = a(e^2 - 1)$ der Parameter, so wird, wenn die Masse des Meteors gleich Null gesetzt wird:

$$k\sqrt{M}\sqrt{p} = \varrho \sin z \cdot w$$

oder nach 1)

$$a(e^2 - 1) = \frac{\sin z^2 \cdot w^2}{g}. \qquad 5)$$

Nennt man ψ den Winkel der Asymptote mit der Achse der Hyperbel, also $e = \sec\psi$, so folgt aus 4) und 5)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{uw}{g\varrho}\sin z. \qquad 6)$$

Die Entfernung $OC = s$ der Asymptote vom Brennpunkt O wird erhalten, wenn man beachtet, daß die Strecke vom Mittelpunkt D der Hyperbel bis C gleich a ist, nach 4) und 6):

$$s = a \operatorname{tg}\psi = \varrho\frac{w}{u}\sin z. \qquad 7)$$

Um nun die Beziehung zwischen ζ und z aufzusuchen, konstruieren wir den zweiten Brennpunkt L der Hyperbel, indem wir DL gleich OD machen, und setzen $ML = \varrho'$ und den Winkel, den ϱ' mit der Richtung QN oder AMK bildet, gleich θ; endlich fällen wir das Lot LNK auf die letztgenannte Richtung. Dann ist $CN = 2a$ und daher $MK = 2a + \varrho\cos\zeta$; ferner nach der Fundamentaleigenschaft der Hyperbel $ML = \varrho' = \varrho + 2a$, also

$$(\varrho + 2a)\cos\theta = 2a + \varrho\cos\zeta$$

oder wenn für a sein Wert aus 4) eingetragen und 3) beachtet wird:

$$w^2\cos\theta = 2g\varrho + u^2\cos\zeta.$$

Da die Tangente in M den Winkel zwischen ϱ und ϱ' halbiert, so wird Winkel OML einerseits gleich $2x$ und andererseits ist er gleich $\zeta + \theta$, so daß $\theta = 2x - \zeta$ sich ergibt; dies in der letzten Formel eingetragen führt auf die gesuchte Beziehung:

$$w^2 \cos(2x - \zeta) = 2g\varrho + u^2 \cos\zeta,$$

die aber eleganter geschrieben werden kann, wenn man sie von 3) abzieht:

$$w^2 (1 - \cos(2x - \zeta)) = u^2 (1 - \cos\zeta)$$

oder

$$w \sin(x - \tfrac{1}{2}\zeta) = u \sin\tfrac{1}{2}\zeta. \qquad 8)$$

Diese Formel giebt x, wenn ζ gegeben ist; um die häufiger vorkommende umgekehrte Aufgabe zu lösen, wird man am besten die Zenithattraktion $\varphi = \zeta - x$ direkt berechnen; denn mit $\zeta = x + \varphi$ folgt aus 8)

$$w \sin\tfrac{1}{2}(x - \varphi) = u \sin\tfrac{1}{2}(x + \varphi)$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{w - u}{w + u} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x. \qquad 9)$$

Hierdurch kann der scheinbare Radiationspunkt in den wahren verwandelt werden, soweit die Zenithattraktion in Betracht kommt. Es ist nun aber auch noch die Bewegung der Erde in Rechnung zu ziehen, denn u stellt die relative Geschwindigkeit des Meteors zur Erde vor. Nennt man die wahre Geschwindigkeit des Meteors in Bezug auf die Sonne v, die der Erde V, den Winkel zwischen V und v s und den zwischen u und V n, so hat man (Fig. 64):

$$u \sin n = v \sin s$$
$$V \sin n = v \sin(s - n). \qquad 10)$$

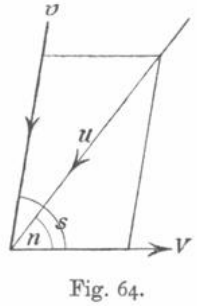


Fig. 64.

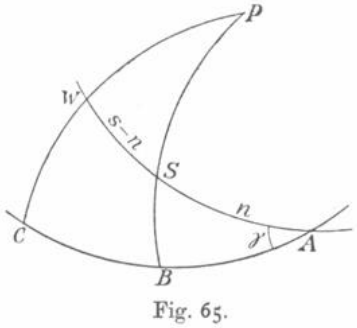


Fig. 65.

Verlängert man die Richtungen von V, u und v bis zur Sphäre und nennt A, S, W die Schnittpunkte, so stellt A den Punkt der Sphäre dar, auf welchen sich die Erde bei ihrem Lauf um die Sonne zu bewegt und der *Apex* genannt wird, ferner ist S der scheinbare und W der wahre Radiationspunkt. Der Apex liegt in der Ekliptik und seine heliozentrische Länge L ist leicht anzugeben; denn sind R und λ Radiusvektor und Länge der Erde, $\odot = 180^\circ + \lambda$ die Sonnenlänge, so werden ihre Geschwindigkeitskomponenten

$$V \cos L = \frac{d(R \cos\lambda)}{dt} = -\frac{d(R \cos\odot)}{dt}$$
$$V \sin L = \frac{d(R \sin\lambda)}{dt} = -\frac{d(R \sin\odot)}{dt}$$

woraus

$$V \sin (L - \odot) = - R \frac{d\odot}{dt}$$

$$V \cos (L - \odot) = - \frac{dR}{dt}$$

also:

$$\operatorname{tg} (L - \odot) = R \frac{d\odot}{dR}.$$

Nun ist

$$R = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos (\lambda - \omega)} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos (\odot - \omega)},$$

wenn e und ω die Exzentrizität der Erdbahn und die Länge ihres Perihels bedeuten. Vernachlässigt man, was hier völlig gestattet ist, die zweiten Potenzen der Exzentrizität, so wird

$$R = 1 + e \cos (\odot - \omega)$$

also

$$\frac{dR}{d\odot} = - e \sin (\odot - \omega)$$

und daher

$$\operatorname{tg} (L - \odot) = - \frac{R}{e \sin (\odot - \omega)}$$

oder

$$\operatorname{tg} (90^\circ + L - \odot) = \frac{e \sin (\odot - \omega)}{R}$$

oder wenn $R = 1$ gesetzt und die tang mit dem Bogen vertauscht wird:

$$L = \odot - 90^\circ + \frac{e}{\sin 1'} \sin (\odot - \omega). \qquad 11)$$

Hierin ist

$$\omega = 101^\circ\, 13'.2 + 1'.028\, (t - 1900) \text{ (incl. Präzession)}$$

$$\frac{e}{\sin 1'} = 57'.6.$$

Nennt man l', b' die auf die Ekliptik bezogenen Koordinaten von S, l, b jene von W, ferner γ die Neigung des größten Kreises ASW gegen die Ekliptik, so gibt zunächst das Dreieck ABS (Fig. 65)

$$\begin{aligned} \sin n \sin \gamma &= \sin b' \\ \sin n \cos \gamma &= \cos b' \sin (l' - L) \\ \cos n &= \cos b' \cos (l' - L) \end{aligned} \qquad 12)$$

woraus mittels der beobachteten Koordinaten l', b' und dem durch 11) bestimmten L die Größen n und γ unzweideutig berechnet werden können.

Ferner werden die Geschwindigkeitskomponenten des Meteors in bezug auf die Erde

$$- u \cos b' \cos l', \qquad - u \cos b' \sin l', \qquad - u \sin b',$$

da die Richtung der Geschwindigkeit der Visierrichtung entgegengesetzt ist; und jene in bezug auf die Sonne

$$- v \cos b \cos l, \qquad - v \cos b \sin l, \qquad - v \sin b;$$

endlich sind

$$V\cos L, \qquad V\sin L, \qquad 0$$

die Geschwindigkeitskomponenten der Erde in bezug auf die Sonne. Also hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} -v\cos b\cos l &= -u\cos b'\cos l' + V\cos L \\ -v\cos b\sin l &= -u\cos b'\sin l' + V\sin L \\ -v\sin b &= -u\sin b' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} v\cos b\cos(l-L) &= u\cos b'\cos(l'-L) - V \\ v\cos b\sin(l-L) &= u\cos b'\sin(l'-L) \\ v\sin b &= u\sin b'. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Formel

$$v^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos n, \tag{13}$$

welche die Berechnung von v ermöglicht. Um die Koordinaten l und b des wahren Radiationspunktes zu erlangen, hat man mit Benutzung von 10)

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-L) &= \cos s \\ \cos b\sin(l-L) &= \sin s\cos\gamma \\ \sin b &= \sin s\sin\gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

Diese Formeln kann man auch unmittelbar dem Dreieck AWC entnehmen. Sie setzen die Berechnung des Winkels s aus

$$\sin(s-n) = \frac{V}{v}\sin n \tag{15}$$

voraus. Läßt man γ von 0° bis 360° laufen, dann kann man den Winkel s auf 0° bis 180° beschränken, so daß $\sin s$ stets positiv angenommen werden kann. Geht, wie bei den Feuerkugeln, die Geschwindigkeit u aus Beobachtungen direkt hervor, so muß v aus 13) berechnet werden, worauf sich die Lage des wahren Radiationspunktes aus 12), 15), 14) ergibt. Nimmt man von vornherein an, daß das Meteor sich in einem Kegelschnitt von der großen Halbachse a bewegt, so hat man für die Geschwindigkeiten V und v von Erde und Meteor zur Zeit des Zusammentreffens:

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - 1\right)$$
$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

also:

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}R}{1-\frac{R}{2a}}}. \tag{16}$$

a wird nur bekannt sein, wenn wie bei gewissen Meteorströmen die Umlaufszeit U aus anderen Erscheinungen erschlossen werden kann, da dann

$$a = \sqrt[3]{U^2}$$

wird, falls U in Jahren ausgedrückt ist. Sonst muß man die Bahn als Parabel annehmen, so daß wird:

$$\frac{V}{v} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}R}$$

oder mit Vernachlässigung des Quadrats der Exzentrizität:

$$\frac{V}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \tfrac{1}{2}e\cos(\odot - \omega)\right). \qquad 17)$$

Ist die Lage des wahren Radiationspunktes durch l und b und die wahre Geschwindigkeit v ermittelt, dann kann zur Bestimmung der Bahn um die Sonne geschritten werden. Wir werden nach den Auseinandersetzungen in Nr. 181 zwei Teile unterscheiden, je nachdem die kosmische Geschwindigkeit von vornherein als bekannt angenommen wird, oder erst aus den Beobachtungen erschlossen wird.

183. Bahnbestimmung von Meteorschwärmen. Die Grundlagen für die Berechnung solcher Bahnen sind die Beobachtungszeit des Sternschnuppenfalls, die Koordinaten l und b des *wahren* Radiationspunktes und die *wahre* Geschwindigkeit v. Aus der Beobachtungszeit ergibt sich der Ort der Erde in ihrer Bahn, welcher gleich ist $180^\circ + \odot$, wenn $\odot$ die Sonnenlänge bedeutet, und damit die Länge des auf- oder absteigenden Knotens der Meteorbahn auf der Ekliptik. Liegt der Radiationspunkt nördlich von der Ekliptik, so zeigt der Erdort den absteigenden Knoten an und die Länge des aufsteigenden Knotens wird also

$$\Omega = \odot \qquad b \text{ positiv.} \qquad 18)$$

Liegt der Radiationspunkt südlich von der Ekliptik, so zeigt der Erdort den aufsteigenden Knoten an und dessen Länge ist also:

$$\Omega = 180^\circ + \odot \qquad b \text{ negativ.} \qquad 18^a)$$

Da die Meteorbahn außer durch die Erde auch durch den Radiationspunkt gehen muß, läßt sich auch ihre Neigung sofort angeben. Es sei in Fig. 66 E der Ort der

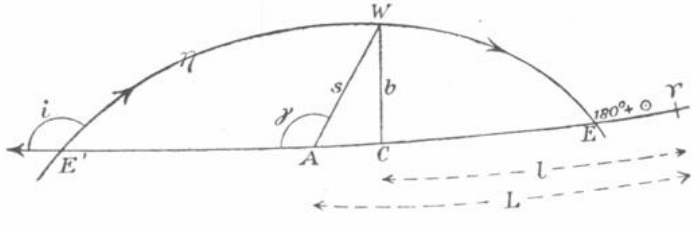


Fig. 66.

Erde, E' der in der Ekliptik 180° davon abstehende Punkt, A der Apex mit der Länge L, W der Radiationspunkt. Nehmen wir letzteren zuerst nördlich der Ekliptik an, so liegt der aufsteigende Knoten der Meteorbahn EWE' in E' und ihre Neigung i ist der zwischen den Bewegungsrichtungen liegende Winkel bei E'. Führt man noch den später gebrauchten Winkel $E'W = \eta$ ein und nennt wie früher den Bogen AW s und seine Neigung gegen die Ekliptik γ, so hat man im Dreieck $E'AW$ außerdem: $AE' = \odot - L$ und daher:

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos s\cos(\odot - L) + \sin s\sin(\odot - L)\cos\gamma \\ \sin\eta\sin i &= \sin s\sin\gamma \\ \sin\eta\cos i &= -\cos s\sin(\odot - L) + \sin s\cos(\odot - L)\cos\gamma. \end{aligned} \qquad 19)$$

Führt man hier für $\cos s$, $\sin s\cos\gamma$ und $\sin s\sin\gamma$ ihre Werte aus 14) ein, so gehen die Formeln über in:

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos b\cos(\odot - l) \\ \sin\eta\sin i &= \sin b \\ \sin\eta\cos i &= -\cos b\sin(\odot - l), \end{aligned} \qquad 20)$$

die man auch direkt hätte dem Dreieck $E'WC$ entnehmen können.

Liegt der Radiationspunkt südlich der Ekliptik, so kommt der aufsteigende Knoten nach E, der Winkel bei E' im Dreieck $E'AW$ wird also wieder $180^\circ - i$, der Winkel bei A aber gleich $360^\circ - \gamma$, folglich erleiden die Gl. 19) und 20) nur insofern eine Änderung, als die zweiten Gleichungen das Zeichen wechseln. Die Formeln zur Bestimmung von Knoten und Neigung der Meteorbahn für beide Fälle zusammengestellt, werden also:

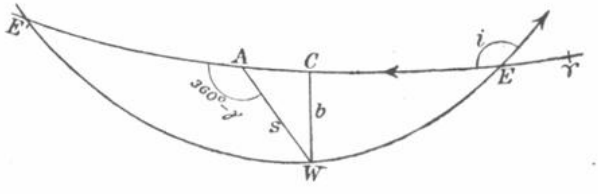


Fig. 67.

$\Omega = \odot$ Radiationspunkt nördlich von der Ekliptik
$\Omega = 180^\circ + \odot$ » südlich » » »

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \cos b\cos(\odot - l) \\ \sin\eta\sin i &= \pm\sin b \\ \sin\eta\cos i &= -\cos b\sin(\odot - l) \end{aligned}$$

Zeichen + für b positiv
Zeichen − für b negativ.

Die bisherigen Entwicklungen sind von der Art des Kegelschnittes unabhängig; zur Bestimmung der weiteren Elemente aber haben wir zwischen den Kurven zu unterscheiden. Wir betrachten zuerst die *Parabel*.

In dem Punkte E, in welchem die Erde die Meteorbahn trifft, ziehen wir an letztere die Tangente; in deren Richtung liegt dann der Radiationspunkt und zwar je nach der Bewegungsrichtung des Stromes auf der einen oder der anderen Seite. Wir untersuchen zuerst den Fall, wo der Durchgang des Stromes durch sein Perihel noch bevorsteht (Fig. 68); hier wird Winkel $E'SW = \eta = SEW$, also nach der bekannten Eigenschaft der Parabel Winkel $SEZ = UEW = \eta - \Theta$, wenn Θ der Winkel des Radiusvektors SE mit der Richtung nach dem Perihel SP genannt wird; folglich hat man

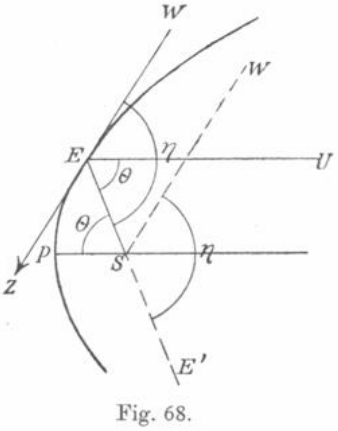


Fig. 68.

$$\Theta = 180^\circ - 2(\eta - \Theta)$$

oder

$$\Theta = 2\eta - 180^\circ.$$

Hat der Durchgang durchs Perihel schon stattgefunden (Fig. 69), so wird

$$\text{Winkel } SEW = UEZ = \eta$$

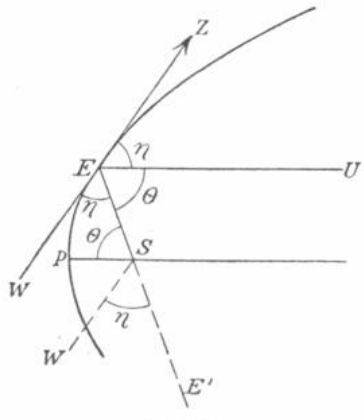


Fig. 69.

und daher

$$\Theta = 180^\circ - 2\eta.$$

Um daraus die Länge des Perihels π abzuleiten, haben wir zu beachten, ob der aufsteigende Knoten der Meteorbahn in E' (Radiationspunkt nördlich) oder in E (Radiationspunkt südlich) liegt. Im ersteren Falle wird

$\pi = \Omega + (180^\circ - \Theta)$, wenn der Perihelsdurchgang bevorsteht,

und

$\pi = \Omega - (180^\circ - \Theta)$, wenn er schon stattgefunden hat;

im letzteren Falle wird

$\pi = \Omega + \Theta$, wenn der Perihelsdurchgang bevorsteht,

und $\pi = \Omega - \Theta$, wenn er schon stattgefunden hat.

Da im ersteren Fall $\Omega = \odot$ und im letzteren $\Omega = 180^\circ + \odot$ ist, so folgt allgemein für alle vier Fälle

$$\pi = \odot + 2\eta. \qquad 21)$$

Die Periheldistanz q ergibt sich unmittelbar aus

$$R = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}\Theta^2},$$

da in obiger Ableitung $-\Theta$ bzw. $+\Theta$ die wahre Anomalie darstellt; wird der Wert von Θ eingetragen, so folgt:

$$q = R \sin \eta^2. \qquad 22)$$

Die Zeit des Periheldurchganges findet sich aus Θ mittels der Barkerschen Tafel, ist übrigens im vorliegenden Fall ohne praktische Bedeutung, da es kein Interesse bietet, sie gerade für denjenigen Teil des Stromes kennen zu lernen, der der Erde begegnete.

Inspiziert man die einfachen Formeln, welche die Bestimmung parabolischer Elemente von Meteorströmen vermitteln, so sieht man, daß sie sich leicht durch Tabulierung auflösen lassen. Solche Tafeln hat *Lehmann-Filhés* entworfen (»Die Bestimmung von Meteorbahnen«, Berlin 1883).

Wir gehen nun zur Bestimmung *elliptischer* Bahnen über. Die große Halbachse a muß dabei als von vornherein bekannt angenommen werden, d. h. sie muß aus der Umlaufszeit des Schwarms abgeleitet sein. Damit folgt dann die Geschwindigkeit v im Moment des Zusammentreffens mit der Erde aus

$$v^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) \qquad 23)$$

und das Geschwindigkeitsverhältnis der Erde und des Schwarms aus 16) (Seite 585):

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}R}{1 - \frac{R}{2a}}}. \qquad 24)$$

Weiter wird aus dem scheinbaren Radiationspunkt l', b' und der Länge des Apex L nach 12) (Seite 584) n und γ berechnet:

$$\begin{aligned} \sin n \sin \gamma &= \sin b' \\ \sin n \cos \gamma &= \cos b' \sin (l' - L) \\ \cos n &= \cos b' \cos (l' - L); \end{aligned} \qquad 25)$$

sodann der Abstand s des wahren Radiationspunktes vom Apex aus 15) (Seite 585):

$$\sin (s - n) = \frac{V}{v} \sin n; \qquad 26)$$

und endlich die Koordinaten l und b des wahren Radiationspunktes aus 14) (Seite 585):

$$\begin{aligned} \cos b \cos (l - L) &= \cos s \\ \cos b \sin (l - L) &= \sin s \cos \gamma \\ \sin b &= \sin s \sin \gamma. \end{aligned} \qquad 27)$$

Die Elemente Ω und i ergeben sich genau wie bei der Parabel aus

$$\begin{aligned} \Omega &= \odot && b \text{ positiv} \\ \Omega &= 180^\circ + \odot && b \text{ negativ} \\ \cos \eta &= \cos b \cos (\odot - l) && \\ \sin \eta \sin i &= \pm \sin b && \left\{ \begin{array}{l} + \text{ bei } b \text{ positiv} \\ - \text{ bei } b \text{ negativ} \end{array} \right. \\ \sin \eta \cos i &= - \cos b \sin (\odot - l), && \end{aligned} \qquad 28)$$

für die noch übrigen Elemente e und π aber müssen besondere Formeln aufgestellt werden. Wir verfahren am einfachsten nach den Vorschriften der Nr. 110 und müssen hierzu in erster Linie die Koordinaten des Schwarms und ihre Geschwindigkeiten im Moment des Zusammentreffens mit der Erde aufstellen. Die Koordinaten sind die der Erde, also:

$$x = - R \cos \odot, \quad y = - R \sin \odot, \quad z = 0.$$

Die Geschwindigkeiten fanden wir Seite 584 zu:

$$\frac{dx}{dt} = - v \cos b \cos l, \qquad \frac{dy}{dt} = - v \cos b \sin l, \qquad \frac{dz}{dt} = - v \sin b,$$

also wird nach den Formeln (c) (Seite 344), wenn mit p der Parameter bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} k\sqrt{p} \cos i &= Rv \cos b \sin (l - \odot) \\ k\sqrt{p} \cos \Omega \sin i &= Rv \sin b \cos \odot \\ k\sqrt{p} \sin \Omega \sin i &= Rv \sin b \sin \odot \end{aligned} \qquad 29)$$

oder wenn $\Omega = \odot$ bez. $= 180 + \odot$ eingetragen wird:

$$\begin{aligned} k\sqrt{p} \cos i &= Rv \cos b \sin (l - \odot) \\ k\sqrt{p} \sin i &= \pm Rv \sin b \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ für } b \text{ positiv} \\ - \text{ für } b \text{ negativ.} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt für i derselbe Wert wie oben, außerdem aber noch $p = a\cos\varphi^2$, wo $e = \sin\varphi$. Die Formel für φ wird:

$$\cos\varphi = \frac{Rv\cos b\sin(l-\odot)}{k\sqrt{a}\cos i} = \pm\frac{Rv\sin b}{k\sqrt{a}\sin i}. \qquad 30)$$

Für die Periheldistanz erhält man:

$$q = a(1-e). \qquad 31)$$

Ist Θ die wahre Anomalie, so wird die Länge des Perihels π:

$$\pi = \Omega + 180^\circ - \Theta \text{ bez. } \pi = \Omega - \Theta,$$

also in jedem Fall

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta, \qquad 32)$$

so daß es nur mehr der Berechnung der wahren Anomalie bedarf. Hierzu bedienen wir uns der Gleichungen (Seite 346):

$$e\sin\Theta = \frac{\sqrt{p}}{kR}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

welche hier geben:

$$e\sin\Theta = \frac{\sqrt{p}}{kR}Rv\cos b\cos(l-\odot)$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

oder nach der ersten Gl. 29) und nach 28):

$$e\sin\Theta = \frac{p}{R}\cos i\,\mathrm{cotg}(l-\odot) = \frac{p}{R}\mathrm{cotg}\,\eta$$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1,$$

so daß schließlich:

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\mathrm{cotg}\,\eta}{1-\frac{R}{p}}. \qquad 33)$$

Wir kommen endlich zu den geringen Modifikationen, welche die bisherigen Formeln erleiden, wenn es sich um eine *hyperbolische Bahn* handelt. Wie wir in Nr. 185 sehen werden, wird bei solchen Bahnen die Geschwindigkeit v durch Beobachtung ermittelt und die Gleichung

$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

kann also dazu dienen, die reelle Halbachse der Hyperbel abzuleiten; ist a der absolute Wert derselben, so folgt:

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\frac{v^2}{k^2} - \frac{2}{R}}. \qquad 34)$$

Den Parameter wird man aus den Gl. 29) erhalten, welche ergeben

$$\sqrt{p} = \frac{Rv\cos b\sin(l-\odot)}{k\cos i} = \pm\frac{Rv\sin b}{k\sin i} \qquad 35)$$

(+ für b positiv, − für b negativ)

und hierauf die Exzentrizität e aus

$$e = \sqrt{1+\frac{p}{a}}. \qquad 36)$$

Da die Länge des Perihels auch hier

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta \qquad 37)$$

sein wird, so braucht man nur noch die wahre Anomalie, welche durch die ungeänderte Gleichung 33) geboten wird. Die Durchgangszeit durchs Perihel kann man durch

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \\ &\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}(t-T) = e\operatorname{tg}F - \log\operatorname{nat}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}F+45^\circ\right) \end{aligned}\right\} \qquad 38)$$

finden, falls sie von Interesse sein sollte. Für Knoten und Neigung gelten dieselben Formeln, wie bei der Parabel und der Ellipse.

184. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Bahnen von Meteorströmen.

I. Für die Zeit des Sternschnuppenfalles entnehme man die Sonnenlänge $\odot$ und den Radiusvektor R dem Jahrbuch und berechne die Länge des Apex L aus:

$$L = \odot - 90^\circ + 57.'6\sin(\odot-\omega)$$
$$\omega = 101^\circ 13.'2 + 1.'028\,(t-1900).$$

II. Sind l', b' die Koordinaten des scheinbaren, l, b jene des wahren Radiationspunktes, so ergeben sich letztere aus:

$$\begin{aligned} \sin n\sin\gamma &= \sin b' \\ \sin n\cos\gamma &= \cos b'\sin(l'-L) \\ \cos n &= \cos b'\cos(l'-L) \end{aligned}$$

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}R}{1-\frac{R}{2a}}}$$

$$\sin(s-n) = \frac{V}{v}\sin n$$

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-L) &= \cos s \\ \cos b\sin(l-L) &= \sin s\cos\gamma \\ \sin b &= \sin s\sin\gamma \end{aligned} \qquad \sin s \text{ positiv.}$$

Bei der Parabel wird $\frac{1}{a} = 0$; in der Ellipse wird a durch $a = U^{\frac{2}{3}}$ gefunden,

wo U die Umlaufszeit des Schwarmes in Jahren ist; bei der Hyperbel muß a aus

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{v^2}{k^2}$$

abgeleitet werden.

III.

b positiv	b negativ
$\Omega = \odot$	$\Omega = 180^\circ + \odot$
$\sin\eta \sin i = \sin b$	$\sin\eta \sin i = -\sin b$
$\sin\eta \cos i = \cos b \sin(l - \odot)$	$\sin\eta \cos i = \cos b \sin(l - \odot)$
$\cos\eta = \cos b \cos(l - \odot)$	$\cos\eta = \cos b \cos(l - \odot)$.

IV. A) Parabel:

$$\pi = \odot + 2\eta, \qquad q = R \sin\eta^2.$$

B) Ellipse:

$$\frac{v}{k} = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}}$$

$$\cos\varphi = \frac{R \cos b \sin(l - \odot)}{\sqrt{a} \cos i} \frac{v}{k} = \pm \frac{R \sin b}{\sqrt{a} \sin i} \frac{v}{k}$$

(+ für b positiv, − für b negativ)

$$e = \sin\varphi, \qquad p = a\cos\varphi^2, \qquad q = a(1 - e)$$

$$\sin\varphi \sin\Theta = \frac{p}{R} \operatorname{cotg}\eta$$

$$\sin\varphi \cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta.$$

C) Hyperbel: a absoluter Wert der reellen Halbachse

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\frac{v^2}{k^2} - \frac{2}{R}}$$

$$\sqrt{p} = \pm \frac{R \sin b}{\sin i} \frac{v}{k}$$

+ für b positiv, − für b negativ

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mathrm{a}}} \qquad q = \mathrm{a}(e - 1)$$

$$e \sin\Theta = \frac{p}{R} \operatorname{cotg}\eta$$

$$e \cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

$$\pi = 180^\circ + \odot - \Theta$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$

$$\frac{k\,\mathrm{Mod}}{\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}(t - T) = e\,\mathrm{Mod}\operatorname{tg}F - \log\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}F + 45^\circ).$$

185. Bahnbestimmung von Feuerkugeln. Bei sehr hellen Meteoren, die einen bedeutenden Weg in der Atmosphäre zurücklegen und von einem großen Ländergebiet aus gesehen werden, können zwei oder mehrere Punkte ihrer scheinbaren Bahn nach Zeit und Ort festgelegt und zur Bestimmung ihrer wahren um die Sonne beschriebenen Bahn herangezogen werden. Die sich hier darbietende Aufgabe läßt sich auf die im vorigen behandelte zurückführen, wenn man zuerst die in der Atmosphäre beschriebene Bahn, die als gerade Linie betrachtet werden kann, bestimmt und damit den Radiationspunkt des Meteors und seine wahre Geschwindigkeit aufsucht. Ersterer ist der Schnitt der genannten Geraden mit der Sphäre und die letztere ergibt sich durch Division des vom Meteor in der Atmospäre zurückgelegten Weges durch die Zeit. Da hierdurch die Daten des in Nr. 183 behandelten Problems gewonnen sind, kann die *kosmische* Bahnbestimmung als erledigt gelten. Dagegen ist noch zu zeigen, in welcher Weise die *atmosphärische* Bahn am sichersten festgelegt wird. Die besonderen Verhältnisse, unter denen hier die Beobachtungen zustande kommen, schließen die Aufstellung eines allgemeinen Typus aus und es kann daher hier nur *ein* Verfahren auseinandergesetzt werden, das in den häufigsten Fällen zum Ziel führen wird. Es ist von *Galle* in den Astr. Nachrichten Band 83 Seite 321 angegeben und bereits vielfach mit Erfolg angewendet worden.

Da der *Endpunkt* des Meteors in der Regel am sichersten und häufigsten beobachtet ist, empfiehlt es sich, seine geographische Lage und Höhe zuerst zu bestimmen und zur Grundlage des Ganzen zu machen. Die Beobachtung irgend eines anderen Punktes der Bahn von einem beliebigen Ort aus gibt dann die scheinbare Bahn für diesen Ort und der gemeinsame Schnitt aller auf diese Weise erhaltenen scheinbaren Bahnen ist der Radiationspunkt. Ist so die Richtung der Bahn festgelegt, dann werden die in der Regel spärlichen und unsicheren Beobachtungen des *Anfangspunktes* zur Fixierung desselben auf der Geraden benutzt und damit schließlich die Länge der atmosphärischen Bahn und die Geschwindigkeit abgeleitet.

Die *geographische Lage des Endpunktes* des Meteors wird entweder durch Ermittlung des Ortes bekannt, wo es im Zenith zersprang oder sie ist durch die Auffindung der herabgefallenen Meteoriten direkt gegeben oder endlich, wenn keiner dieser Fälle zutrifft, sie wird durch die beobachteten Azimute ermittelt. Nur im letzten Falle ist ein rechnerisches Verfahren notwendig, das wir unter der Annahme ableiten, daß eine größere Zahl von Beobachtungen als zwei vorliegt, so daß eine Ausgleichung stattfinden muß. Die beobachteten Azimutlinien schneiden sich wegen der hier häufig nicht unbeträchtlichen Beobachtungsfehler nicht in einem Punkte, sondern alle Schnittpunkte je zweier füllen einen Bereich aus und man muß sich entscheiden, welche Stelle desselben man als die plausibelste für die Lage des Endpunktes betrachten will. Wir wollen jene wählen, für welche die Summe der Quadrate der sphärischen Lote auf die beobachteten Azimutlinien ein Minimum wird. Der Ausdruck für das genannte Lot

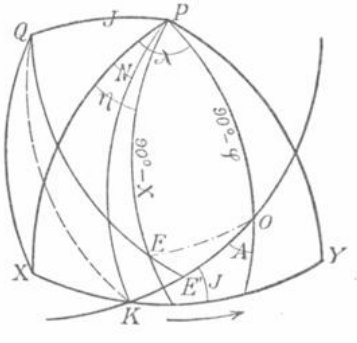


Fig. 70.

kann leicht aufgestellt werden, wenn man für die Oberfläche der Erde jene Kugel substituiert, die sich dem betreffenden Ländergebiet möglichst eng anschmiegt. Es sei XY die Äquatorebene, P der Pol dieser Kugel, PX der Anfangsmeridian, von dem aus die geographischen Längen nach Osten positiv gezählt werden; O sei der Ort, in welchem das Azimut A des Endpunktes beobachtet wurde (positiv vom südlichen Teil des Meridians nach Westen zu gerechnet) und habe die geographischen Koordinaten λ und φ; die beobachtete Azimutallinie OK habe zum Pol den Punkt Q, ihre Neigung gegen den Äquator sei J und die Länge ihres Knotens K auf ihm sei N; endlich seien η und χ die gesuchten Koordinaten des plausibelsten Ortes E des Endpunktes. Da mit diesen Bezeichnungen die Richtungskosinus von E im genannten Koordinatensystem

$$\cos\chi\cos\eta, \qquad \cos\chi\sin\eta, \qquad \sin\chi,$$

und ebenso jene von Q

$$\sin N\sin J, \qquad -\cos N\sin J, \qquad \cos J$$

werden, so hat man unmittelbar für das gesuchte Lot $EE' = \varepsilon = 90^\circ - QE$ den Ausdruck:

$$\sin\varepsilon = \sin N\sin J\cdot\cos\chi\cos\eta - \cos N\sin J\cdot\cos\chi\sin\eta + \cos J\cdot\sin\chi.$$

Die ersten Faktoren der Glieder rechts sind durch die Beobachtung des Azimutes A m Orte O gegeben, denn man hat (Dreieck POK)

$$\begin{aligned} \sin J\sin(\lambda - N) &= \sin A\sin\varphi \\ \sin J\cos(\lambda - N) &= \cos A \\ \cos J &= \sin A\cos\varphi; \end{aligned} \qquad 1)$$

die zweiten Faktoren sind die gesuchten Unbekannten, die man durch

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{cotg}\chi\cos\eta \\ y &= \operatorname{cotg}\chi\sin\eta \end{aligned} \qquad 2)$$

auf zwei reduzieren kann. Wird noch

$$\begin{aligned} a &= \sin N\sin J \\ b &= -\cos N\sin J \\ c &= \cos J \end{aligned} \qquad 3)$$

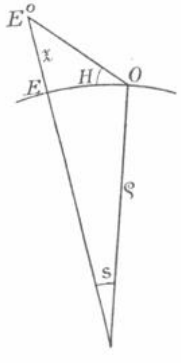


Fig. 71.

gesetzt, so hat man die Gleichung:

$$ax + by + c = \delta. \qquad 4)$$

Jedes beobachtete Azimut gibt eine solche Gleichung; aus der Gesamtheit aller ermittelt man nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung die Unbekannten x und y und hierauf durch 2) η und χ.

Die *lineare Höhe* z *des Endpunktes über der Erdoberfläche* ergibt sich aus den Messungen der Höhenwinkel. Ist im Orte O die Höhe H des Zerspringungspunktes E^0 über dem eben bestimmten Punkt E beobachtet, so wird im ebenen Dreieck zwischen dem Mittelpunkt der Erde C, E^0 und O, wenn ϱ der Radius der Erdkugel genannt wird:

$$\varrho\cos H = (\varrho + z)\cos(H + s).$$

Für den Winkel $s = EO$ folgt aus Fig. 70 sofort:

$$\cos s = \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \cos(\lambda - \eta)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}s^2 = \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \chi)^2 + \cos\varphi \cos\chi \sin\tfrac{1}{2}(\lambda - \eta)^2, \qquad 5)$$

so daß in

$$z = 2\varrho \sin\tfrac{1}{2}s \frac{\sin(H + \tfrac{1}{2}s)}{\cos(H + s)} \qquad 6)$$

rechts alles bekannt ist. Eine etwaige Verschiedenheit der Meereshöhen von O und E kann natürlich leicht berücksichtigt werden.

Ist nun die Lage von E^0 vollständig bekannt, so kann man den *scheinbaren Ort* am Himmel *berechnen*, den der Punkt von jedem Beobachtungsort aus eingenommen hat, und man wird bei Bestimmung der an diesem Ort gesehenen scheinbaren *Bahn* von diesem berechneten Ort Gebrauch machen gleichviel ob eine direkte Beobachtung desselben vorliegt oder nicht. Sind α, δ, Δ scheinbare Rektaszension, Deklination und Entfernung des Punktes E^0 von O aus, ferner Θ, ϱ, φ Sternzeit, Erdhalbmesser, geozentrische Breite für O; Θ^0, $\varrho^0 = \varrho + z$, φ^0 dieselben Größen für E^0, so hat man:

$$\begin{aligned} \Delta \cos\delta \cos(\alpha - \Theta) &= \varrho^0 \cos\varphi^0 \cos(\Theta^0 - \Theta) - \varrho \cos\varphi \\ \Delta \cos\delta \sin(\alpha - \Theta) &= \varrho^0 \cos\varphi^0 \sin(\Theta^0 - \Theta) \\ \Delta \sin\delta &= \varrho^0 \sin\varphi^0 - \varrho \sin\varphi . \end{aligned} \qquad 7)$$

Wird mit den hieraus folgenden α, δ eine am selben Orte gelungene Beobachtung α', δ' eines anderen Punktes der scheinbaren Bahn verbunden, so kann Knoten Γ und Neigung γ der letzteren gegen den Himmelsäquator aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma \sin(\alpha' - \Gamma) &= \operatorname{tg}\delta' \\ \operatorname{tg}\gamma \cos(\alpha' - \Gamma) &= \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\delta' \cos(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha - \alpha')} \end{aligned} \qquad 8)$$

entnommen werden (Nr. 69).

Die für alle Orte berechneten scheinbaren Bahnen müssen sich im *Radiationspunkt* schneiden. Da dies wieder nur genähert der Fall sein wird, hat man dieselbe Aufgabe zu lösen, wie oben bei Bestimmung von E. Die Bedingungsgleichungen werden hier ganz wie dort, wenn A und D Rektaszension und Deklination des Radiationspunktes genannt werden:

$$\sin\Gamma \sin\gamma \cdot \cos D \cos A - \cos\Gamma \sin\gamma \cdot \cos D \sin A + \cos\gamma \sin D = 0$$

oder wenn wieder

$$\begin{aligned} \sin\Gamma \sin\gamma &= a \\ -\cos\Gamma \sin\gamma &= b \\ \cos\gamma &= c \end{aligned} \qquad 9)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} D \cos A &= x \\ \operatorname{cotg} D \sin A &= y \end{aligned} \qquad 10)$$

gesetzt wird:

$$ax + by + c = \delta . \qquad 11)$$

Statt der Unbekannten x und y wird man unter Umständen zweckmäßiger tg A und tg D : cos A oder cotg A und tg D : sin A einführen, überhaupt immer obige Gleichung durch den größten der drei Faktoren cos D cos A, cos D sin A, sin D dividieren.

Nach Ermittelung des Radiationspunktes wird man zur Bestimmung der *linearen Länge der Bahn innerhalb der Atmosphäre* schreiten. Hiezu dienen die Beobachtungen des *Anfangs*punktes von den Orten O aus; nennt man dessen beobachtete Koordinaten α' und δ' (bezogen auf den Äquator) und wie oben α und δ die Koordinaten des Endpunktes, so wird zunächst der Bogen σ der in O gesehenen scheinbaren Bahn zwischen den Richtungen nach dem Anfangs- und Endpunkt gegeben sein durch:

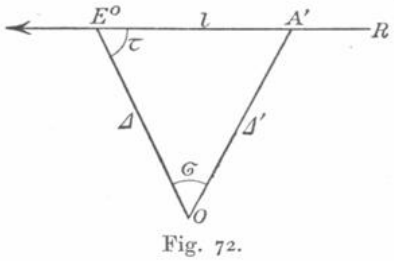


Fig. 72.

$$\cos\sigma = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos(\alpha - \alpha') \quad 12)$$

und sodann der Winkel τ bei E^0 im ebenen Dreieck OE^0A' durch

$$\cos\tau = -\sin D\sin\delta - \cos D\cos\delta\cos(A - \alpha), \quad 13)$$

da nämlich die Richtung E^0A' zusammenfällt mit der nach dem Radiationspunkt R, und die Richtung E^0O nach dem Gegenpunkte von $\alpha\delta$ zielt; außerdem ist bereits aus 7) die Entfernung $\Delta = OE^0$ bekannt, so daß die lineare Länge $l = A'E^0$ sich aus

$$l = \frac{\Delta\sin\sigma}{\sin(\sigma + \tau)} \quad 14)$$

ergibt. Auch die Entfernung $OA' = \Delta'$ kann durch

$$\Delta' = \frac{\Delta\sin\tau}{\sin(\sigma + \tau)} \quad 15)$$

berechnet werden. Die Division von l durch die zu seiner Beschreibung gebrauchte Zeit gibt die *Geschwindigkeit* des Meteors in der Atmosphäre.

Es kann schließlich von Interesse sein, die *Lage des Anfangspunktes* A' nach Länge λ', Breite φ' und Höhe x' über der Erdoberfläche zu erfahren. Hiezu berechnet man zuerst Azimut a und Höhe h des Radiationspunktes für den Ort E; da Rektaszension und Deklination A und D des ersteren und die Koordinaten Θ^0 und φ^0 des Ortes E bekannt sind, hat man:

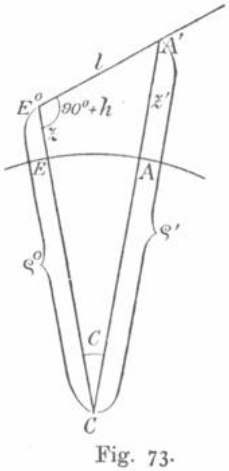


Fig. 73.

$$\begin{aligned}\cos h\sin a &= \cos D\sin(\Theta^0 - A)\\ \cos h\cos a &= -\cos\varphi^0\sin D + \sin\varphi^0\cos D\cos(\Theta^0 - A)\\ \sin h &= \sin\varphi^0\sin D + \cos\varphi^0\cos D\cos(\Theta^0 - A).\end{aligned} \quad 16)$$

Verbindet man dann den Anfangspunkt A' und den Endpunkt E^0 durch gerade Linien mit dem Mittelpunkt C der Erde, welche die Erdoberfläche in A und E schneiden, so sind in dem ebenen Dreieck $CA'E^0$ die Seiten $CE^0 = \varrho^0$, $A'E^0 = l$ und der Winkel bei $E^0 = 90^0 + h$ bekannt; man bekommt also, wenn der Winkel bei C gleich C gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} C = \frac{l\cos h}{\varrho^0 + l\sin h} \quad 17)$$

und wenn $CA' = \varrho' = \varrho^0 + \zeta$ gesetzt wird:

$$\varrho' = \frac{l \cos h}{\sin C}$$

$$\varrho^0 = \frac{l \cos (h + C)}{\sin C}$$

also $$\zeta = \varrho' - \varrho^0 = \frac{l}{\sin C} (\cos h - \cos (h + C)) = \frac{l \sin (h + \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2} C}; \qquad 18)$$

schließlich ist:

$$x' = x + \zeta. \qquad 19$$

Zur Berechnung der geographischen Länge und Breite λ' und φ' von A dient am besten das sphärische Dreieck auf der Erdoberfläche zwischen dem Pol, dem Ort E und dem Ort A; dieses gibt, wenn λ^0, φ^0 die Koordinaten von E genannt werden:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda^0 - \lambda') \cos\varphi' &= \cos C \cos\varphi^0 + \sin C \sin\varphi^0 \cos a \\ \sin(\lambda^0 - \lambda') \cos\varphi' &= \sin C \sin a \qquad 20) \\ \sin\varphi' &= \cos C \sin\varphi^0 - \sin C \cos\varphi^0 \cos a. \end{aligned}$$

Das Azimut a ist durch 16) bekannt geworden.

Die hier entwickelten Formeln haben neben dem Vorzug, genau den eigentümlichen Beobachtungsverhältnissen angepaßt zu sein, auch den, an jeder Stelle den plausibelsten Wert der Unbekannten und seine Unsicherheit nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung aufstellen zu können, was gerade beim vorliegenden Problem von nicht geringer Bedeutung ist. Liegen die Beobachtungen von nur zwei Stationen vor, etwa die in Sternkarten eingezeichneten scheinbaren Bahnen, so ergibt sich die atmosphärische Bahn als Schnitt der beiden Ebenen, die durch die Stationen und die zugehörigen scheinbaren Bahnen gelegt werden. Die Gleichung für die Schnittgerade erhält man dann einfacher, als nach dem obigen Verfahren, allein bei mehreren Beobachtungen kehrt sich das Verhältnis gerade um. Wir gehen daher auf dieses Verfahren nicht näher ein und verweisen auf die Abhandlungen von *Bessel* (Astr. Nachr. Band 16, S. 321; Ges. Abh. Band III, S. 328) und *H. Rosenberger* (Astr. Nachr. Bd. 167, S. 49).

Abschnitt XXXVI.

Bahnbestimmung der Satelliten.

186. Einleitung. Die Satelliten der großen Planeten bewegen sich um diese unter dem Einflusse einer anziehenden Hauptkraft, deren Betrag für die Einheit der Entfernung auf k^2M anzusetzen ist, wo k die Gaußsche Konstante und M die Masse des Planeten in Teilen der Sonnenmasse bedeutet; außerdem wirken als störende Kräfte solche, die von den Massen der Sonne und der übrigen Planeten herrühren, und solche, die durch die Abweichung der Figur der Hauptkörper von der Kugelgestalt bedingt sind. Sieht man von diesen störenden Kräften vorläufig ab, so resultiert durch die Hauptkraft eine Bewegung der Satelliten um ihre Hauptkörper nach den Keplerschen Gesetzen d. h. nach den Formeln:

$$M_0 + \mu t = E - e \sin E$$
$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$$
$$r \cos v = a (\cos E - e)$$
$$\text{Länge in der Bahn } u = \pi + v,$$

welche die Bewegung in der Bahnebene ergeben; rechnet man hiezu die beiden Stücke, welche die Lage der Bahnebene im Raum bestimmen, nämlich die Länge des Knotens N und die Neigung J, so kommt man auf *sieben* Elemente, welche zur Beschreibung der Bewegung eines Satelliten nötig sind, nämlich

$$M_0, \quad \mu, \quad a, \quad e, \quad \pi, \quad N, \quad J.$$

Statt der mittleren Bewegung μ kann man auch die Umlaufszeit einführen. Zwischen den Elementen a und μ besteht zwar auch hier die Beziehung

$$\mu^2 a^3 = k^2 (M + m)$$

oder wenn die Satellitenmasse vernachlässigt wird:

$$\mu = \frac{k\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

allein dieselbe kann hier nicht zur Verminderung der Zahl der Elemente dienen, es sei denn, daß man die Masse M als bekannt voraussetzt oder *sie* als Element einführt, womit die Zahl wieder auf sieben steigt. Es ist Aufgabe der Bahnbestimmung, diese sieben Elemente aus den Beobachtungen abzuleiten. Man könnte dabei so vorgehen, wie bei den Planetenbahnen um die Sonne, indem man aus sieben Beobachtungsdaten die Elemente darstellt; dieser Weg würde aber hier wegen der Unsicherheit der Beobachtungen zu ziemlich unbrauchbaren Resultaten führen. Man macht daher von vornherein von den besonderen Verhältnissen Gebrauch, die bei Satellitenbahnen vorliegen; zunächst von dem Umstande, daß die Umlaufszeiten direkt aus den Beobachtungen hervorgehen, wenn man die Zeitunterschiede gleicher Stellungen des Satelliten zum Hauptkörper unter Berücksichtigung der geozentrischen

Bewegung des letzteren bildet; sodann davon, daß die Bahnen fast aller Satelliten so nahe Kreisbahnen sind, daß diese als erste Näherungen aufgefaßt werden dürfen. Das Geschäft der eigentlichen Bahnbestimmung fällt infolgedessen auf die *Bahnverbesserung*, sobald Kreisbahnelemente vorliegen. Die hier zu lösende Aufgabe wird also eine doppelte sein: 1. Ableitung eines Verfahrens, durch welches Kreisbahnen erlangt werden, 2. Ableitung der Formeln, aus welchen die von den Beobachtungen erheischten Verbesserungen hervorgehen. Beide Probleme haben wir im Prinzip schon bei den Planetenbahnen gelöst und es wird hier also nur darauf ankommen, die früheren Entwicklungen den hier vorliegenden Verhältnissen anzupassen. Es versteht sich von selbst, daß wenn bereits elliptische Elemente vorliegen, das Verbesserungsverfahren auf diese anzuwenden ist.

187. Bestimmung der Kreisbahn eines Satelliten.*) Wird die Umlaufszeit als bekannt vorausgesetzt, so bleiben nach Ausscheidung der Elemente e und π vier Elemente M_0, a, N, J zu bestimmen übrig. Es sind also vier Beobachtungsdaten nötig. Als solche nehmen wir an die von der Erde aus gemessenen Positionswinkel und Distanzen des Satelliten in bezug auf das Zentrum des Hauptkörpers für zwei Beobachtungszeiten. Bekannt sind ferner die geozentrischen Koordinaten des Hauptkörpers für dieselben Zeiten, bezogen auf das Koordinatensystem des Äquators, das wir hier zugrunde legen wollen. Die Daten zusammengestellt bezeichnen wir in folgender Weise:

$$\begin{array}{cccccc} t & s & p & A & D & \Delta \\ t' & s' & p' & A' & D' & \Delta'. \end{array}$$

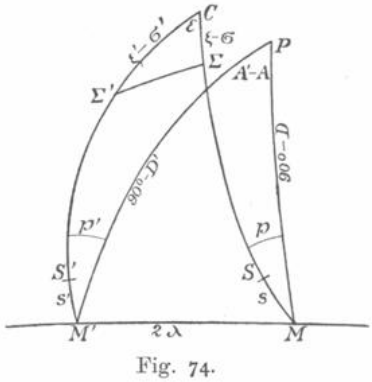


Fig. 74.

Verbindet man die Planetenörter M und M' einerseits mit dem Pol P des Äquators, andererseits mit den zugehörigen Satellitenörtern S und S', und nennt im Dreieck $MM'P$ die Seite $MM' = 2\lambda$ und die Winkel bei M und M' γ und γ', ferner im Dreieck $MM'C$ die Seiten $MC = \zeta$ und $M'C = \zeta'$ und den Winkel bei C: ε, so führt die Durchrechnung folgender Formelgruppen zur Kenntnis der letztgenannten Größen ζ, ζ' und ε:

$$\begin{aligned}
&\sin\lambda \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') = \cos\tfrac{1}{2}(A' - A) \sin\tfrac{1}{2}(D - D')\\
&\sin\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') = \sin\tfrac{1}{2}(A' - A) \cos\tfrac{1}{2}(D + D')\\
&\cos\lambda \sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') = \cos\tfrac{1}{2}(A' - A) \cos\tfrac{1}{2}(D - D')\\
&\cos\lambda \cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') = \sin\tfrac{1}{2}(A' - A) \sin\tfrac{1}{2}(D + D')\\
&\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta) = \sin\lambda \cos\left(\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') - \tfrac{1}{2}(p' + p)\right)\\
&\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta) = \cos\lambda \cos\left(\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') + \tfrac{1}{2}(p' - p)\right)\\
&\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \sin\lambda \sin\left(\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') - \tfrac{1}{2}(p' + p)\right)\\
&\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \cos\lambda \sin\left(\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') + \tfrac{1}{2}(p' - p)\right).
\end{aligned} \qquad 1)$$

*) *A. Marth*, Researches on Satellites, Astr. Nachr. Band 44, Seite 134.

In dem ebenen Dreieck Erde-Planet-Satellit nennen wir die Seite $PS = a =$ Radius der Kreisbahn und den Winkel, den dieser mit der Richtung Planet-Erde bildet, $180^\circ - \sigma$, dann ist:

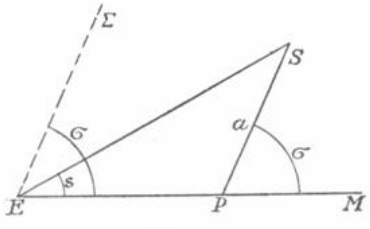


Fig. 75.

$$\left.\begin{aligned} \sin(\sigma - s) &= \frac{\Delta}{a}\sin s \\ \text{und ebenso} \quad \sin(\sigma' - s') &= \frac{\Delta'}{a}\sin s'. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Eine durch die Erde zur Richtung PS gezogene Parallele $E\Sigma$ trifft die geozentrische Sphäre in einem Punkte Σ des größten Kreises MSC und zwar im Abstande $M\Sigma = \sigma$, so daß $\Sigma C = \zeta - \sigma$ wird. Macht man dieselbe Konstruktion mit dem zweiten Ort, so entsteht das sphärische Dreieck $C\Sigma\Sigma'$, in welchem die Seite $\Sigma\Sigma'$ offenbar identisch mit der planetozentrischen Bewegung des Satelliten in der Zwischenzeit $t' - t$ ist. Hat man also die mittlere tägliche Bewegung μ aus der Umlaufszeit U durch

$$\mu = \frac{360^\circ}{U}$$

berechnet, so wird

$$\Sigma\Sigma' = \mu(t' - t)$$

als bekannte Größe angenommen werden dürfen. Das Dreieck $\Sigma\Sigma' C$ ergibt nun die Gleichung

$$\cos\mu(t' - t) = \cos(\zeta - \sigma)\cos(\zeta' - \sigma') + \sin(\zeta - \sigma)\sin(\zeta' - \sigma')\cos\varepsilon \qquad 3)$$

mit den einzigen unbekannten Größen σ und σ', die ihrerseits durch 2) ausschließlich von der Unbekannten a abhängig sind. Man hat in 2) und 3) also die Mittel, a durch sukzessive Näherung zu bestimmen. Mit einem Werte von a berechnet man aus 2) σ und σ' und untersucht, ob durch dieselben die Gl. 3) befriedigt wird. Durch geeignete Variation von a unter Anwendung der regula falsi kommt man rasch zum Ziel. Hiebei ist noch folgendes zu beachten. Die Winkel σ und σ' kann man zwischen 0° und 180° annehmen, allein da sie in 2) durch ihre Sinus bestimmt sind, bleibt der Quadrant, in dem sie liegen, unbestimmt. Diese Zweideutigkeit liegt aber in der Natur der Sache und kann auch ohne sonstige Wahrnehmungen über die Bewegungsrichtung oder Stellung der Satelliten nicht beseitigt werden. Denn die Beobachtungen der Winkel s und s' allein lassen nicht entscheiden, ob der Satellit in S oder in S_1, in S' oder in S_1' sich befindet, d. h. ob er sich in der Richtung SS' direkt oder in der Richtung S_1S_1' retrograd um den Planeten bewegt. Beide Hypothesen sind also zu verfolgen, bis anderweitig die Bahnlage festgelegt ist. Hat man einmal entscheiden können, daß die Neigung der Bahnebene kleiner als 90° ist, d. h. daß die Bewegung eine direkte ist, so wird östlich vom Planeten σ aus dem

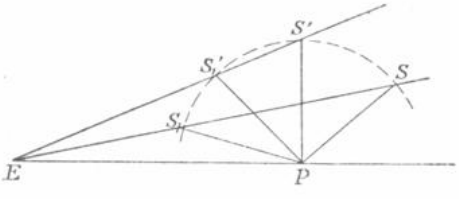


Fig. 76.

ersten in den zweiten Quadranten übergehen, westlich dagegen vom zweiten in den ersten.

Zur Ermittelung der weiteren Elemente geht man zum planetozentrischen Standpunkt über und bestimmt zunächst die planetozentrischen Äquatorealkoordinaten a, d bez. a', d' des Satelliten. Das Dreieck zwischen dem Pol, dem Gegenpunkt der Erde M und dem Satelliten S gibt:

$$\begin{aligned}
\cos d \sin(a - A) &= \sin p \sin\sigma \\
\cos d \cos(a - A) &= \cos\sigma \cos D - \sin\sigma \sin D \cos p \\
\sin d &= \cos\sigma \sin D + \sin\sigma \cos D \cos p \\
\cos d' \sin(a' - A') &= \sin p' \sin\sigma' \\
\cos d' \cos(a' - A') &= \cos\sigma' \cos D' - \sin\sigma' \sin D' \cos p' \\
\sin d' &= \cos\sigma' \sin D' + \sin\sigma' \cos D' \cos p'.
\end{aligned} \tag{4}$$

Hierauf ergeben sich Knoten und Neigung durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} J \sin(a - N) &= \operatorname{tg} d \\
\operatorname{tg} J \sin(a' - N) &= \operatorname{tg} d',
\end{aligned}$$

die man wie in Nr. 69 in der Form

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} J \cos(a - N) &= \frac{\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d \cos(a' - a)}{\sin(a' - a)} \\
\operatorname{tg} J \sin(a - N) &= \operatorname{tg} d
\end{aligned} \tag{5}$$

schreiben wird. Schließlich werden die Argumente der Breite u und u' gefunden aus:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} u &= \operatorname{tg}(a - N) \sec J \\
\operatorname{tg} u' &= \operatorname{tg}(a' - N) \sec J
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{Kontrolle} \quad u' - u = \mu (t' - t).$$

Hiermit sind die vier Elemente der Kreisbahn ermittelt. Selbstverständlich hängt der Erfolg der Methode im hohen Grade von der Genauigkeit der beiden benutzten Beobachtungen ab. Es wird sich daher in Fällen, wo man über eine größere Anzahl von Beobachtungen verfügt, die in guter Verteilung *einem* Umlauf angehören, ein *graphisches Verfahren* empfehlen, indem man die scheinbare (an die Sphäre projizierte) Bahnellipse durch die aufgezeichneten Beobachtungspunkte hindurchlegt und aus ihr die Elemente ableitet.

Es seien α und β die große und die kleine Halbachse der Projektionsellipse, p_0 der Positionswinkel der ersteren, ferner nach wie vor A, D die geozentrische Rektaszension und Deklination des Planeten. Wird durch die Erde, den Planeten und den Pol der Bahnebene des Satelliten eine Ebene gelegt, so schneidet diese die wahre Bahn nach dem Kreishalbmesser $a = \alpha$, dessen Projektion die kleine Halbachse β ist, und der von beiden eingeschlossene Winkel ist i, die Neigung der wahren Bahn gegen die Projektionsebene. Man hat also

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{7}$$

Konstruiert man ferner das sphärische Dreieck zwischen dem geozentrischen Ort des Planeten M, dem Pol P des Erdäquators und dem Pol der Satellitenbahn P', so wird,

da M der Pol der Projektionsebene ist, $MP' = i$, und da in MP' die kleine Achse β liegt, so wird der Winkel bei M gleich $90^\circ - p_0$; ferner ist, wenn wie früher N und J Knoten und Neigung der Satellitenbahn gegen den Erdäquator genannt werden, $PP' = J$, $PM = 90^\circ - D$ und der Winkel bei P gleich $90^\circ + A - N$. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin J \sin(N - A) &= \cos i \cos D - \sin i \sin D \sin p_0 \\ \sin J \cos(N - A) &= \sin i \cos p_0 \\ \cos J &= \cos i \sin D + \sin i \cos D \sin p_0 \end{aligned} \qquad 8)$$

und daraus N und J; die zwei aus 7) sich ergebenden Werte von i liefern zwei Wertepaare N und J, von denen das eine der direkten, das andere der retrograden Bewegung entspricht. Welches das richtige ist, kann nur durch hinzutretende Erscheinungen entschieden werden. Da die große Achse der Projektionsellipse gleich dem Radius der Kreisbahn ist und die Umlaufszeit direkt aus den Beobachtungen erschlossen wird, so fehlt als letztes Element nur noch der Ort in der Bahn für eine bestimmte Zeitepoche. Man erhält denselben am bequemsten mittels Durchrechnung der Formelgruppen 1) und 2) der nächsten Nr., auf die wir hier vorgreifend verweisen müssen.

188. Darstellung der beobachteten Koordinaten durch die Elemente. Um die Unterschiede der Beobachtung von der Rechnung bilden zu können, die für das Verbesserungsverfahren gebraucht werden, sowie um die Grundlagen für die Bildung der ebenfalls hierzu notwendigen Differenzialkoeffizienten der Koordinaten nach den Elementen zu erhalten, muß gezeigt werden, in welchem Zusammenhange die Stücke der Beobachtung mit den Elementen der planetozentrischen Bewegung stehen.

Wir beschreiben um das Zentrum des Planeten eine Kugel und zeichnen auf ihr den größten Kreis mit dem Pole P, der durch eine Parallelebene zum Erdäquator ausgeschnitten wird. Wir wählen diese Ebene als Fundamentalebene, weil sich auf sie die Messungen beziehen; der Übergang auf eine andere Fundamentalebene, sei es Ekliptik oder Planetenäquator, kann immer leicht durch Auflösung des von den drei in Betracht kommenden größten Kreisen gebildeten sphärischen Dreieckes ausgeführt werden. Wir ziehen ferner den größten Kreis, der durch die Ebene der Satellitenbahn ausgeschnitten wird und bestimmen dessen Lage durch die Länge des aufsteigenden Knotens N und die Neigung J; sein Pol P' hat dann die Rektaszension $N - 90^\circ$ und die Deklination $90^\circ - J$. Endlich verlängern wir die Verbindungslinie der Erde mit dem Planeten über letzteren hinaus und nennen den Schnittpunkt mit der Sphäre Z; die Koordinaten desselben, die wir mit A und D bezeichnen wollen, sind natürlich identisch mit den geozentrischen Koordinaten des Planeten. Aus dem sphärischen Dreieck $PP'Z$, in welchem $PP' = J$, $PZ = 90^\circ - D$ und der Winkel bei P gleich $A - N + 90^\circ = 90^\circ - (N - A)$ sind, können dann der Positionswinkel K von P' in Z, sowie die Koordinaten von Z bezogen auf die Bahnebene des Satelliten abgeleitet werden; letztere bezeichnen wir mit U (vom Knoten aus gerechnet) und $-B$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos B \sin U &= \sin D \sin J - \cos D \cos J \sin(N - A) \\
\cos B \cos U &= \cos(N - A) \cos D \\
\cos B \sin K &= -\cos(N - A) \sin J \\
\cos B \cos K &= \cos J \cos D - \sin J \sin D \sin(N - A) \\
\sin B &= -\cos J \sin D - \sin J \cos D \sin(N - A).
\end{aligned} \qquad 1)$$

Ist ferner S die Projektion des Satelliten an die Sphäre, u seine Länge in der Bahn, gezählt vom Knoten aus, und σ der Winkel am Planeten zwischen den Richtungen nach Z und S, also der Bogen SZ, so wird im Dreieck $P'ZS$, da der Winkel bei $Z = p - K$ und der Winkel bei $P' = u - U$ ist:

$$\begin{aligned}
\sin\sigma \sin(p - K) &= \sin(u - U) \\
\sin\sigma \cos(p - K) &= \sin B \cos(u - U) \\
\cos\sigma &= \cos B \cos(u - U).
\end{aligned} \qquad 2)$$

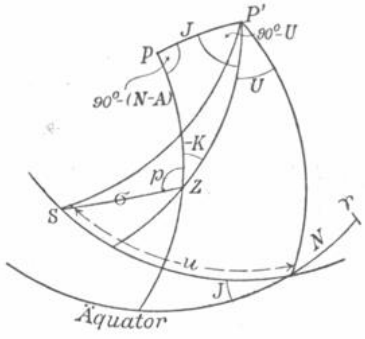


Fig. 77.

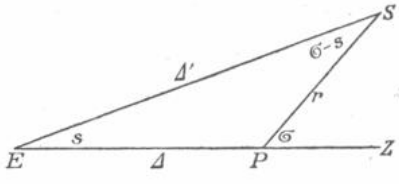


Fig. 78.

Betrachtet man jetzt das ebene Dreieck zwischen Erde E, Planet P und Satellit S, nennt dessen Seiten $EP = \Delta$, $ES = \Delta'$ und $PS = r$ und dessen Winkel bei E s und bei P $180^\circ - \sigma$, wo augenscheinlich σ der oben eingeführte Winkel ist und s die gemessene scheinbare Distanz des Satelliten vom Planeten, so erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
\Delta' \sin s &= r \sin\sigma \\
\Delta' \cos s &= r \cos\sigma + \Delta.
\end{aligned} \qquad 3)$$

Die mit r multiplizierten Gleichungen 2) führen also mit Benutzung von 3) auf:

$$\begin{aligned}
\Delta' \sin s \sin(p - K) &= r \sin(u - U) \\
\Delta' \sin s \cos(p - K) &= r \sin B \cos(u - U) \\
\Delta' \cos s &= r \cos B \cos(u - U) + \Delta.
\end{aligned} \qquad 4)$$

Hieraus kann man Δ', s und p berechnen, wenn durch die Elemente der Bahnlage B, U und K (Formeln 1) berechnet sind und die Bewegung des Satelliten in seiner Bahnebene (r und u) gegeben ist. In der Regel ist Δ' ohne Interesse; man wird dann 4) so schreiben:

$$\operatorname{tg} s \sin(p - K) = \frac{\frac{r}{\Delta} \sin(u - U)}{1 + \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U)}$$

$$\operatorname{tg} s \cos(p - K) = \frac{\frac{r}{\Delta} \sin B \cos(u - U)}{1 + \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U)}, \qquad 4^a)$$

oder wohl immer ausreichend:

$$\begin{aligned} s'' \sin(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin(u - U)\, \frac{1}{1+\zeta} \\ s'' \cos(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin B \cos(u - U)\, \frac{1}{1+\zeta} \\ \zeta &= \frac{r}{\Delta} \cos B \cos(u - U). \end{aligned} \qquad 5)$$

Da man die Gleichung hat:

$$\sin s = \frac{r}{\Delta} \sin(\sigma - s), \qquad 6)$$

so kann man p und σ auch aus 2) berechnen, worauf sich s durch indirekte Auflösung von 6) ergibt; wegen der Kleinheit von s ist dieser Weg durchaus bequem. In vielen im Sonnensystem vorliegenden Fällen kann man aber noch kürzer wie folgt verfahren. Aus 3) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} s = \frac{r \sin\sigma}{r\cos\sigma + \Delta} = \frac{r}{\Delta} \sin\sigma \left\{ 1 - \frac{r}{\Delta}\cos\sigma + \left(\frac{r}{\Delta}\right)^2 \cos\sigma^2 - + \cdots \right\};$$

da $\frac{r}{\Delta}$ meistens so klein ist, daß $\left(\frac{r}{\Delta}\right)^2$, ... vernachlässigt werden können, so folgt weiter

$$s'' = \frac{r}{\Delta} \sin\sigma \cdot 206\,264''.8,$$

und wenn der hieraus folgende Wert von $\sin\sigma$ in 2) eingetragen wird:

$$\begin{aligned} s'' \sin(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin(u - U) \\ s'' \cos(p - K) &= \frac{r}{\Delta}\, 206\,264''.8 \sin B \cos(u - U). \end{aligned} \qquad 7)$$

Diese Formeln in Verbindung mit 1) stellen die einfachsten Mittel dar, um s'' und p aus den Elementen des Satelliten zu berechnen.

Die bisherigen Formeln geben die rechtwinkligen Koordinaten $s'' \sin(p - K)$ und $s'' \cos(p - K)$ bezogen auf das System der Satellitenbahn. Hat man Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen gemessen, so kann es erwünscht sein, diese direkt durch die Elemente auszudrücken; man erreicht dies durch folgende von *Bessel**) aufgestellte Formeln, die zwar aus obigen abgeleitet werden könnten, ebenso einfach aber auch direkt gefunden werden.

Es seien A, D, Δ die geozentrische Rektaszension, Deklination und Entfernung des Planeten, s die scheinbare Distanz des Satelliten vom Planeten, p der Positionswinkel; ferner r und Δ' die linearen Entfernungen des Satelliten vom Planeten und von der Erde; endlich σ der planetozentrische Winkelabstand des Satelliten vom Gegenpunkt der Erde. Denkt man sich nun ein Koordinatensystem, dessen Z-Achse

---

*) *Bessel*, Ges. Abh. Band I, Seite 130.

durch die Richtung Erde-Planet gegeben ist, dessen Y-Achse in der Deklinationsebene des Planeten in der Richtung auf den Nordpol zu liegt und dessen X-Achse auf der Seite der wachsenden Rektaszensionen liegt, und projiziert auf die Achsen desselben das Dreieck Erde-Planet-Satellit, so erhält man zuerst

$$\begin{aligned} \Delta' \cos(X\Delta') &= \Delta \cos(X\Delta) + r \cos(Xr) \\ \Delta' \cos(Y\Delta') &= \Delta \cos(Y\Delta) + r \cos(Yr) \\ \Delta' \cos(Z\Delta') &= \Delta \cos(Z\Delta) + r \cos(Zr) \end{aligned}$$

und ferner, wenn man die Werte der Richtungskosinus:

$\cos(X\Delta') = \sin s \sin p$	$\cos(X\Delta) = 0$	$\cos(Xr) = \sin\sigma \sin p$
$\cos(Y\Delta') = \sin s \cos p$	$\cos(Y\Delta) = 0$	$\cos(Yr) = \sin\sigma \cos p$
$\cos(Z\Delta') = \cos s$	$\cos(Z\Delta) = 1$	$\cos(Zr) = \cos\sigma$

einträgt:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin s \sin p &= r \sin\sigma \sin p \\ \Delta' \sin s \cos p &= r \sin\sigma \cos p \\ \Delta' \cos s &= r \cos\sigma + \Delta. \end{aligned} \qquad 8)$$

Die Richtungscosinus $\cos(Xr)$, $\cos(Yr)$, $\cos(Zr)$ lassen sich aber sofort auch durch die Elemente ausdrücken. Zeichnet man auf der planetozentrischen Sphäre (Fig. 79) das eben benutzte Koordinatensystem XYZ, die Projektion der Bahnebene des Satelliten und ihren Pol P', zieht die Linien $P'X = f$, $P'Y = g$, $P'Z = h$ und nennt ihre Winkel mit $P'P$ beziehungsweise F, G, H, nennt ferner die Bahnelemente des Satelliten bezogen auf den Äquator N und J, so hat man einerseits aus den Dreiecken $PP'X$, $PP'Y$, $PP'Z$:

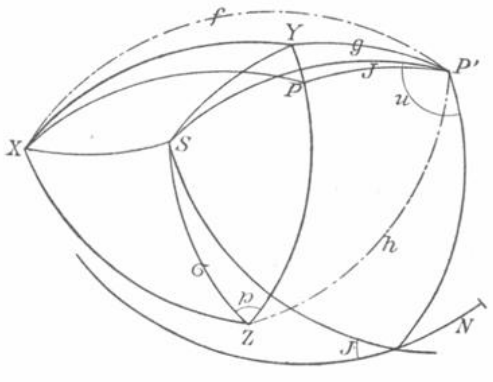


Fig. 79.

$$\begin{aligned} \sin f \sin F &= -\sin(A - N) \\ \sin f \cos F &= +\cos J \cos(A - N) \\ \cos f &= -\sin J \cos(A - N) \\ \sin g \sin G &= -\sin D \cos(A - N) \\ \sin g \cos G &= +\cos D \sin J - \sin D \cos J \sin(A - N) \\ \cos g &= +\cos D \cos J + \sin D \sin J \sin(A - N) \\ \sin h \sin H &= +\cos D \cos(A - N) \\ \sin h \cos H &= +\sin D \sin J + \cos D \cos J \sin(A - N) \\ \cos h &= +\sin D \cos J - \cos D \sin J \sin(A - N) \end{aligned} \qquad 9)$$

und andererseits, wenn mit u die Länge des Satelliten in seiner Bahn, gezählt vom Knoten ab, bezeichnet wird, aus den Dreiecken $P'XS$, $P'YS$, $P'ZS$

$$\begin{aligned} \cos(XS) = \cos(Xr) &= \sin f \sin(F + u) \\ \cos(YS) = \cos(Yr) &= \sin g \sin(G + u) \\ \cos(ZS) = \cos(Zr) &= \sin h \sin(H + u). \end{aligned}$$

Die gesuchten Beziehungen sind also:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin s \sin p &= r \sin f \sin(F+u) \\ \Delta' \sin s \cos p &= r \sin g \sin(G+u) \\ \Delta' \cos s &= r \sin h \sin(H+u) + \Delta. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{\Delta} \sin f \sin(F+u) \\ \eta &= \frac{r}{\Delta} \sin g \sin(G+u) \\ \zeta &= \frac{r}{\Delta} \sin h \sin(H+u), \end{aligned} \qquad 10)$$

so wird daraus

$$\Delta' \sin s \sin p = \xi \Delta, \quad \Delta' \sin s \cos p = \eta \Delta, \quad \Delta' \cos s = (1+\zeta)\Delta$$

und daher mit überall genügender Genauigkeit:

$$\begin{aligned} s'' \sin p &= \frac{\xi}{1+\zeta} 206\,264''.8 \\ s'' \cos p &= \frac{\eta}{1+\zeta} 206\,264''.8. \end{aligned} \qquad 11)$$

Sind die Größen f, g, h, F, G, H vermittels der Elemente N und J der Bahnlage aus den Formeln 9) berechnet und hat man r und u durch die Formeln der elliptischen Bewegung ermittelt:

$$\begin{aligned} M_0 + \mu t &= E - e \sin E \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u-\pi) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \qquad 12)$$

(π = Länge des Perihels, gezählt vom Knoten aus),

so geben die Formeln 10) und 11) Distanz und Positionswinkel des Satelliten gesehen von der Erde aus, beziehungsweise direkt die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz.

Wir wollen noch eine dritte Gruppe von Formeln ableiten, die in vielen Fällen bedeutende Vorteile gewähren. Wenn nämlich die Satellitenbahn nahe mit einer sonst bekannten Ebene zusammenfällt, z. B. mit dem Planetenäquator, so empfiehlt es sich, diese und nicht den Erdäquator als Fundamentalebene einzuführen.

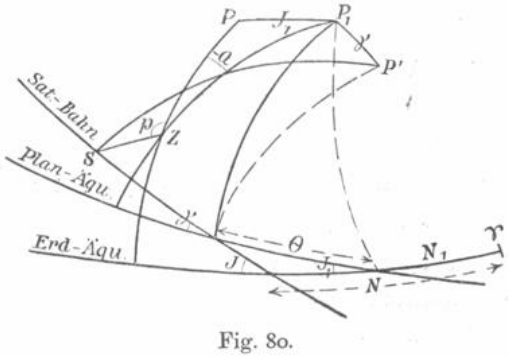


Fig. 80.

Es ergeben sich zunächst die auf den Planetenäquator bezogenen Koordinaten des Gegenpunktes Z, nämlich $\mathfrak{U}$ (vom Schnitt des Planetenäquators mit dem Erdäquator aus gezählt) und $-\mathfrak{B}$, sowie der Positionswinkel Q des Poles P_1 des Planetenäquators, aus der geozen-

trischen Rektaszension und Deklination A und D des Planeten durch dieselben Formeln wie oben, nur tritt hier N_1 und J_1, Knoten und Neigung des Planetenäquators gegen den Erdäquator, ein (Dreieck PP_1Z):

$$\begin{aligned}
\cos\mathfrak{B}\sin\mathfrak{U} &= \sin D\sin J_1 - \cos D\cos J_1\sin(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{U} &= \cos D\cos(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\sin Q &= -\sin J_1\cos(N_1 - A)\\
\cos\mathfrak{B}\cos Q &= \cos J_1\cos D - \sin J_1\sin D\sin(N_1 - A)\\
\sin\mathfrak{B} &= -\cos J_1\sin D - \sin J_1\cos D\sin(N_1 - A).
\end{aligned} \tag{13}$$

Nennt man ferner Θ und γ Knoten und Neigung der Satellitenbahn gegen den Planetenäquator, $\mathfrak{u}$ die Länge des Satelliten in der Bahn und zählt Θ und $\mathfrak{u}$ vom Knoten des Planetenäquators mit dem Erdäquator ab, so ergibt sich gegen die vorhin gelöste Aufgabe nur der Unterschied, daß an Stelle des Erdäquators der Planetenäquator tritt und daß daher

für	zu setzen ist:
p	$p - Q$
J	γ
N	Θ
A	$\mathfrak{U}$
u	$\mathfrak{u} - \Theta$
D	$-\mathfrak{B}$.

Die Formeln werden dann:

$$\begin{aligned}
\Delta'\sin s\sin(p - Q) &= r\sin\mathfrak{f}\sin(\mathfrak{F} + \mathfrak{u} - \Theta)\\
\Delta'\sin s\cos(p - Q) &= r\sin\mathfrak{g}\sin(\mathfrak{G} + \mathfrak{u} - \Theta)\\
\Delta'\cos s &= r\sin\mathfrak{h}\sin(\mathfrak{H} + \mathfrak{u} - \Theta) + \Delta
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{F} &= -\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{F} &= +\cos\gamma\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{f} &= -\sin\gamma\cos(\mathfrak{U} - \Theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{g}\sin\mathfrak{G} &= \sin\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{G} &= \cos\mathfrak{B}\sin\gamma + \sin\mathfrak{B}\cos\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{g} &= \cos\mathfrak{B}\cos\gamma - \sin\mathfrak{B}\sin\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\sin\mathfrak{h}\sin\mathfrak{H} &= \cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{H} &= -\sin\mathfrak{B}\sin\gamma + \cos\mathfrak{B}\cos\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\\
\cos\mathfrak{h} &= -\sin\mathfrak{B}\cos\gamma - \cos\mathfrak{B}\sin\gamma\sin(\mathfrak{U} - \Theta).
\end{aligned}$$

Ist, wie hier vorausgesetzt werden soll, γ klein, so wird man diese strengen Formeln sofort durch viel einfachere ersetzen können. Es gibt nämlich die Auflösung obiger $\sin(\mathfrak{F} + \mathfrak{u} - \Theta)$, ... und Eintragung der Werte von $\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{F}$, ... zunächst noch streng:

$$\begin{aligned}
\Delta'\sin s\sin(p - Q) &= r\,(\sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta))\\
\Delta'\sin s\cos(p - Q) &= r\,(\sin\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\gamma\\
&\qquad - 2\sin\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)\\
\Delta'\cos s &= r\,(\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\gamma\\
&\qquad - 2\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{U} - \Theta)\sin(\mathfrak{u} - \Theta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2) + \Delta,
\end{aligned}$$

dann aber, wenn man die zweiten Potenzen der Neigungen vernachlässigt und zugleich Δ' eliminiert:

$$s'' \sin(p - Q) = \frac{r}{\Delta} 206\,264''.8 \sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) \frac{1}{1 + \zeta}$$

$$s'' \cos(p - Q) = \frac{r}{\Delta} 206\,264''.8 \,(\sin \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma) \frac{1}{1 + \zeta} \quad 15)$$

$$\zeta = \frac{r}{\Delta} (\cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma).$$

Dieser Formeln hat sich *H. Struve* bei den inneren Saturnssatelliten bedient.

Der Übergang von den Elementen Θ und γ auf die auf den Erdäquator bezüglichen N und J wird durch folgende aus dem Knotendreieck hervorgehende Formeln vermittelt:

$$\begin{aligned} \sin J \sin(N - N_1) &= \sin\gamma \sin\Theta \\ \sin J \cos(N - N_1) &= \cos\gamma \sin J_1 + \sin\gamma \cos J_1 \cos\Theta \\ \cos J &= \cos\gamma \cos J_1 - \sin\gamma \sin J_1 \cos\Theta. \end{aligned} \quad 16)$$

In den bisherigen Formeln ist der Radiusvektor r des Satelliten in astronomischen Einheiten auszudrücken. Es ist aber zweckmäßig und üblich, ihn in Einheiten der halben großen Achse der Bahnellipse des Satelliten einzuführen d. h. zu setzen

$$r = 1 - e \cos E;$$

es ist dann überall statt r zu schreiben: ra. Auch für a behält man nicht den Wert in astronomischen Einheiten, sondern führt die sogenannte mittlere Elongation des Satelliten ein, d. h. die größtmögliche Winkelentfernung a'', die er bei mittlerer Entfernung Δ_0 des Planeten von der Sonne, von der Sonne gesehen erreichen kann. Es wird dann

$$a = \Delta_0 \sin a'' = \frac{\Delta_0 a''}{206\,264''.8}$$

und statt $\frac{r}{\Delta}$ wird in unseren Formeln zu schreiben sein:

$$r \frac{\Delta_0}{\Delta} \frac{a''}{206\,264''.8}.$$

Die drei Formelgruppen 5), 11) und 15) nehmen damit folgende Gestalt an:

A) Koordinaten x, y, bezogen auf die Bahn des Satelliten:

$$\begin{aligned} x &= s'' \sin(p - K) = r\nu \sin(u - U) \\ y &= s'' \cos(p - K) = r\nu \cos(u - U) \sin B \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1 + \zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r \cos B \cos(u - U) \frac{1}{206\,264''.8}$$

K, U, B aus 1) (Seite 603).

B) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator:

$$x = s'' \sin p = r\nu \sin f \sin(F + u)$$
$$y = s'' \cos p = r\nu \sin g \sin(G + u)$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1+\zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r \sin h \sin(H+u) \frac{1}{206\,264''.8}$$

f, g, h, F, G, H aus 9) Seite 605.

C) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator (bei kleiner Neigung γ der Bahn gegen diesen):

$$x = s'' \sin(p - Q) = r\nu \sin(\mathfrak{u} - \mathfrak{U})$$
$$y = s'' \cos(p - Q) = r\nu (\sin \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) + \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma)$$

$$\nu = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} \frac{1}{1+\zeta}; \qquad \zeta = \frac{a''\Delta_0}{\Delta} r (\cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{u} - \mathfrak{U}) - \sin \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{u} - \Theta) \sin\gamma) \frac{1}{206\,264''.8}$$

Q, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ aus 13) Seite 607.

In A) und B) wird die Länge u des Satelliten in seiner Bahn vom aufsteigenden Knoten der Bahn auf dem Erdäquator gezählt; in C) wird die Länge $\mathfrak{u}$ vom aufsteigenden Knoten des Planetenäquators auf dem Erdäquator ab gezählt. Ist π die Länge des Perihels gezählt von denselben Punkten ab, so ist allgemein:

$$M = E - e \sin E, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u - \pi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E, \qquad r = 1 - e\cos E.$$

189. Die Differenzialformeln der Bahnverbesserung. Wir wollen jetzt die Differenzialquotienten der beobachteten Koordinaten nach den Bahnelementen aufstellen; wie mittels dieser die Bahnverbesserung durchgeführt wird, brauchen wir nach den Erläuterungen in Nr. 140 nicht mehr besonders auseinanderzusetzen.

Wir nehmen als beobachtete Koordinaten zuerst Positionswinkel und Distanz: p und s.*) Die Differenziation der Gleichungen 2) (Seite 603) gibt, wenn alle Größen variabel gesetzt werden:

$$\sin\sigma^2(dp - dK) = \sin B\,(du - dU) - \cos\sigma \sin(u - U)\,dB$$
$$\sin\sigma\, d\sigma \qquad\quad = \cos B \sin(u - U)\,(du - dU) + \sin B \cos(u - U)\,dB.$$

Ebenso gibt die Differenziation der Gl. 1) (Seite 603), wobei jedoch A und D als konstante Größen zu betrachten sind:

$$\cos B\,dU = -\sin B \cos U\,dJ - \cos K \cos D\,dN$$
$$\cos B\,dK = -\cos U\,dJ - \sin U \sin J\,dN$$
$$dB = \sin U\,dJ + \sin K \cos D\,dN$$
$$dB = \sin U\,dJ - \cos U \sin J\,dN.$$

Natürlich ergeben sich beide Gruppen von Gleichungen auch durch Anwendung der Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie auf die Dreiecke SZP' und $PP'Z$ (Fig. 77 Seite 603). Führt man die zweite Gruppe in die erste ein, so folgt nach einfacher Reduktion:

*) *Marth* a. a. O. S. 118.

$$\sin\sigma^2 dp = \sin B du - \cos B \sin(u-U)\sin u dJ + (\cos B\cos(u-U)\sin u\sin J - \sin D)dN$$
$$\sin\sigma d\sigma = \cos B\sin(u-U)du + \sin B\sin u dJ + (\cos K\sin(u-U) + \sin K\cos(u-U)\sin B)\cos D dN.$$

Hierin kann noch $\cos B\cos(u-U) = \cos\sigma$ und der Faktor von $\cos D dN$ gleich $\sin\sigma\sin p$ gesetzt werden. Differenziert man ferner die Gl. 6), wobei Δ konstant zu halten ist, so kommt:

$$\frac{ds}{\sin s} = \frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}\frac{dr}{r} + \frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}d\sigma,$$

woraus nach Eintragung von $d\sigma$ sich ds ergibt:

$$\frac{\sin\sigma}{\sin s}ds = \sin(\sigma-s)\frac{dr}{r} + \frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}(\cos B\sin(u-U)du + \sin B\sin u dJ + \sin\sigma\sin p\cos D dN).$$

Drückt man r in der oben (Seite 608) besprochenen Einheit aus, dann ist statt $\frac{dr}{r}$ hier einzutragen:

$$\frac{dr}{r} + \frac{da''}{a''};$$

wir setzen gleichzeitig:

$$\frac{\sin s}{\sin\sigma} = \frac{r}{\Delta}\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma} = r\frac{\Delta_0}{\Delta}\frac{a''}{206\,264''.8}\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}$$

und

$$\frac{\Delta_0}{\Delta}\frac{a''\sin(\sigma-s)}{206\,264''.8\sin\sigma} = \varkappa,$$

worauf die beiden Formeln für dp und ds in folgender Form erscheinen:

$$\sin s dp = r\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}du - r\varkappa\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u dJ + r\varkappa(\cos\sigma\sin u\sin J - \sin D)\frac{dN}{\sin\sigma}$$

$$ds'' = \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)du + \varkappa r\sin(\sigma-s)\frac{dr}{r}\,206\,264''.8$$
$$+ \varkappa r\sin(\sigma-s)\frac{da''}{a''}\,206\,264''.8$$
$$+ \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u dJ + \varkappa r\cos(\sigma-s)\sin p\cos D dN.$$

Hier sind nun noch die Ausdrücke von du und dr in den elliptischen Elementen zu substituieren. Aus der Differenziation der hier zugrunde zu legenden Formeln

$$M_0 + (t-t_0)\mu = E - e''\sin E$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$
$$u = v + \pi \quad (\pi \text{ vom Knoten aus gezählt})$$
$$r = 1 - \sin\varphi\cos E$$

folgt, wie in Nr. 142 gezeigt ist:

$$du = d\pi + \frac{\cos\varphi}{r^2}dM_0 + \frac{\cos\varphi}{r^2}(t-t_0)d\mu + 206\,264''.8\sin v\left(\frac{1}{r} + \sec\varphi^2\right)de$$

$$dr = \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin v dM_0}{206\,264''.8} + \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin v(t-t_0)}{206\,264''.8}d\mu - \cos v de,$$

und man erhält daher schließlich:

$$\begin{aligned}\sin s\,dp = {} & \varkappa \frac{\sin B}{\sin\sigma}\frac{\cos\varphi}{r}\,(dM_0 + (t-t_0)\,d\mu)\\ & + \varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\,(1 + r\sec\varphi^2)\;206\,264''.8\;de + \varkappa r\frac{\sin B}{\sin\sigma}\,d\pi\\ & - \varkappa r\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u\,dJ\\ & + \varkappa r\,(\cos\sigma\,\sin u\,\sin J - \sin D)\,\frac{dN}{\sin\sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ds'' = {} & \left(\varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\frac{\cos\varphi}{r} + \varkappa\sin(\sigma-s)\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin v\right)(dM_0+(t-t_0)d\mu)\\ & + \left(\varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\sin v\,(1+r\sec\varphi^2) - \varkappa\sin(\sigma-s)\cos v\right)206\,264''.8\,de\\ & + \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\,d\pi\\ & + \varkappa r\sin(\sigma-s)\;206\,264''.8\,\frac{da''}{a''}\\ & + \varkappa r\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u\,dJ\\ & + \varkappa r\cos(\sigma-s)\sin p\cos D\,dN.\end{aligned}$$

Etwas einfacher werden die Ausdrücke für die Differenziale der rechtwinkligen Koordinaten, die wir oben für drei Achsenlagen aufgestellt haben. Es ist unnötig, die Entwicklungen hier vorzuführen, da sich die Differenziale mit Benutzung der bereits aufgestellten Formeln für du, dr, dU, ... ohne jede Schwierigkeit bilden lassen. Wir wollen dabei statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge ε, gezählt vom Knoten der Bahn mit dem Erdäquator einführen, so daß $\varepsilon = M + \pi$ wird. Auf die Änderungen von ζ braucht man wegen der Kleinheit desselben keine Rücksicht zu nehmen.

A) Koordinaten x, y, bezogen auf die Satellitenbahn:

$$\begin{aligned}dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi}\,(\cos(u-U) + e\cos(\pi-U))\,d\varepsilon\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\left(\cos(\pi-U) + \cos(u-U)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)e\,d\pi\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\,(\sin(\pi-U)\cos\varphi - \cos(u-U)\sin E)\,de + x\frac{da''}{a''}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy = {} & -\frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\,(\sin(u-U) + e\sin(\pi-U))\,d\varepsilon\\ & + \frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\left(\sin(\pi-U) + \sin(u-U)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)e\,d\pi\\ & - \frac{\nu}{\cos\varphi}\sin B\,(\cos(\pi-U)\cos\varphi + \sin(u-U)\sin E)\,de + y\frac{da''}{a''}\\ & - r\nu\cos B\cos u\,\sin J\,dN + r\nu\cos B\sin u\,dJ.\end{aligned}$$

B) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator.

$$
\begin{aligned}
dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \,(\cos(F+u) + e\cos(F+\pi))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \left(\cos(F+\pi) + \cos(F+u)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin f \,(\sin(F+\pi)\cos\varphi - \cos(F+u)\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''} \\
& + r\nu\,(\sin h \sin(H+u)\cos D - \sin g \sin(G+u)\sin D)\, dN + r\nu\cos f \sin u\, dJ \\
dy = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \,(\cos(G+u) + e\cos(G+\pi))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \left(\cos(G+\pi) + \cos(G+u)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin g \,(\sin(G+\pi)\cos\varphi - \cos(G+u)\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''} \\
& + r\nu \sin D \sin f \sin(F+u)\, dN + r\nu\cos g \sin u\, dJ.
\end{aligned}
$$

Ist E die mittlere Länge in der Bahn, gezählt vom Äquinoktium aus und Π die vom selben Punkte gezählte Länge der Perihels, so wird

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon &= d\mathrm{E} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
d\pi &= d\Pi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

Schreibt man in obigen Formeln also $d\mathrm{E}$ und $d\Pi$ statt $d\varepsilon$ und $d\pi$, so treten folgende Glieder hinzu:

In den Formeln A)

$$
\begin{aligned}
dx &= \cdots - r\nu\cos(u-U)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
dy &= \cdots + r\nu\sin(u-U)\sin B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

In den Formeln B)

$$
\begin{aligned}
dx &= \cdots - r\nu \sin f\cos(F+u)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN \\
dy &= \cdots - r\nu \sin g\cos(G+u)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J \sin J\, dN.
\end{aligned}
$$

C) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator.

$\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}$ sind hier konstant.

$$
\begin{aligned}
dx = {} & \frac{\nu}{\cos\varphi} \,(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N}) + e\cos(\pi-\mathfrak{N}))\, d\varepsilon \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \left(\cos(\pi-\mathfrak{N}) + \cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N})\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\, d\pi \\
& - \frac{\nu}{\cos\varphi} \,(\sin(\pi-\mathfrak{N})\cos\varphi - \cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{N})\sin E)\, de + x\,\frac{da''}{a''}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dy = &- \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\,(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U}) + e\sin(\pi-\mathfrak{U}))\,d\varepsilon \\
&+ \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\left(\sin(\pi-\mathfrak{U}) + \sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right) e\,d\pi \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \sin\mathfrak{B}\,(\cos(\pi-\mathfrak{U})\cos\varphi + \sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin E)\,de + y\frac{da''}{a''} \\
&\left\{\begin{aligned}
&+ \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\,(\cos(\mathfrak{u}-\Theta) + e\cos(\pi-\Theta))\sin\gamma\,d\varepsilon \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\left(\cos(\pi-\Theta) + \cos(\mathfrak{u}-\Theta)\left[\cos\varphi\cos E + \frac{e}{1+\cos\varphi}\right]\right)\sin\gamma\,e\,d\pi \\
&- \frac{\nu}{\cos\varphi} \cos\mathfrak{B}\,(\sin(\pi-\Theta)\cos\varphi - \cos(\mathfrak{u}-\Theta)\sin E)\sin\gamma\,de
\end{aligned}\right\} \\
&+ r\nu\cos\mathfrak{B}\sin\mathfrak{u}\,d(\sin\gamma\cos\Theta) - r\nu\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{u}\,d(\sin\gamma\sin\Theta).
\end{aligned}
$$

Die mit $\sin\gamma$ multiplizierten Glieder $\{\cdots\}$ werden wohl in allen Fällen weggelassen werden können, wo man überhaupt von diesen Formeln Gebrauch macht.

Die Differenzialformeln vereinfachen sich bedeutend, wenn man als zu verbessernde Bahn eine *Kreisbahn* zugrunde legt. Es wird dann $u = \varepsilon$, $\nu = 1$, ferner

$$
\begin{aligned}
dr &= -e\cos v = -\sin u\cdot e\sin\pi - \cos u\cdot e\cos\pi \\
du &= d\varepsilon + 2e\sin v = d\varepsilon - 2\cos u\cdot e\sin\pi + 2\sin u\cdot e\cos\pi
\end{aligned}
$$

und somit zunächst die Formeln für Positionswinkel und Distanz:

$$
\varkappa = \frac{\Delta_0}{\Delta}\,\frac{a''}{206264''.8}\,\frac{\sin(\sigma-s)}{\sin\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin s\cdot dp = &\ \varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\cdot d\varepsilon \\
&- 2\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\cos u\cdot e\sin\pi \\
&+ 2\varkappa\frac{\sin B}{\sin\sigma}\sin u\cdot e\cos\pi \\
&- \varkappa\frac{\cos B}{\sin\sigma}\sin(u-U)\sin u\cdot dJ \\
&+ \frac{\varkappa}{\sin\sigma}(\cos\sigma\sin u\sin J - \sin D)\cdot dN
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ds'' = &\ \varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\cos B\sin(u-U)\cdot d\varepsilon \\
&- \varkappa\left(\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\,2\cos B\sin(u-U)\cos u + \sin(\sigma-s)\sin u\right)\cdot e\sin\pi \\
&+ \varkappa\left(\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\,2\cos B\sin(u-U)\sin u - \sin(\sigma-s)\cos u\right)\cdot e\cos\pi \\
&+ \varkappa\sin(\sigma-s)\frac{da''}{a''}\,206264''.8 \\
&+ \varkappa\frac{\cos(\sigma-s)}{\sin\sigma}\sin B\sin u\cdot dJ \\
&+ \varkappa\cos(\sigma-s)\sin p\cos D\cdot dN.
\end{aligned}
$$

Ferner für die rechtwinkligen Koordinaten in den oben behandelten drei Achsenlagen:

A_1) Koordinaten x, y, bezogen auf die Satellitenbahn:

$$\begin{aligned} dx &= \nu\cos(u-U)\cdot d\varepsilon + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad -\nu(\cos(u-U)\cos u+\cos U)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu(\cos(u-U)\sin u+\sin U)\cdot e\cos\pi \\ dy &= -\nu\sin B\sin(u-U)\,d\varepsilon + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu\sin B(\sin(u-U)\cos u-\sin U)\cdot e\sin\pi \\ &\quad -\nu\sin B(\sin(u-U)\sin u+\cos U)\cdot e\cos\pi \\ &\quad -\nu\cos B\cos u\sin J dN+\nu\cos B\sin u\,dJ. \end{aligned}$$

B_1) Koordinaten x, y, bezogen auf den Erdäquator:

$$\begin{aligned} dx &= \nu\sin f\cos(F+u)d\varepsilon \\ &\quad -\nu\sin f(\cos(F+u)\cos u+\cos F)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu\sin f(\cos(F+u)\sin u-\sin F)\cdot e\cos\pi + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu(\sin h\sin(H+u)\cos D-\sin g\sin(G+u)\sin D)\,dN \\ &\quad +\nu\cos f\sin u dJ \\ dy &= \nu\sin g\cos(G+u)d\varepsilon \\ &\quad -\nu\sin g(\cos(G+u)\cos u+\cos G)\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu\sin g(\cos(G+u)\sin u-\sin G)\cdot e\cos\pi + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu\sin f\sin(F+u)\sin D dN \\ &\quad +\nu\cos g\sin u\,dJ. \end{aligned}$$

C_1) Koordinaten x, y, bezogen auf den Planetenäquator (mit Weglassung der in $\sin\gamma$ multiplizierten Glieder):

$$\begin{aligned} dx &= \nu\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})d\varepsilon + x\frac{da''}{a''} \\ &\quad -\nu(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\cos\mathfrak{u}+\cos\mathfrak{U})\cdot e\sin\pi \\ &\quad +\nu(\cos(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{u}+\sin\mathfrak{U})\cdot e\cos\pi \\ dy &= -\nu\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}d\varepsilon + y\frac{da''}{a''} \\ &\quad +\nu(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\cos\mathfrak{u}-\sin\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}\cdot e\sin\pi \\ &\quad -\nu(\sin(\mathfrak{u}-\mathfrak{U})\sin\mathfrak{u}+\cos\mathfrak{U})\sin\mathfrak{B}\cdot e\cos\pi \\ &\quad +\nu\sin\mathfrak{u}\cos\mathfrak{B}d(\sin\gamma\cos\Theta) \\ &\quad -\nu\cos\mathfrak{u}\cos\mathfrak{B}d(\sin\gamma\sin\Theta). \end{aligned}$$

Abschnitt XXXVII.

Bahnbestimmung der Doppelsterne.

190. Allgemeine Sätze über die Bewegungen bei Doppelsternen. Die bei Doppelsternen beobachteten Bewegungen können, wie die Erfahrung gelehrt hat, durch die Newtonsche Gravitation erklärt werden. Unter dieser Voraussetzung die wahren Bahnen dieser Körper im Raum aus den beobachteten, scheinbaren zu bestimmen, ist die Aufgabe, der wir uns nun zuwenden.

Zwei in Punkte konzentrierte Massen m und m' ziehen sich in der Entfernung ϱ nach dem Newtonschen Gesetz gegenseitig mit der Kraft $\frac{k^2 m m'}{\varrho^2}$ an, die bei der Masse m die Beschleunigung $\frac{k^2 m'}{\varrho^2}$, bei der Masse m' die Beschleunigung $\frac{k^2 m}{\varrho^2}$ hervorbringt, so daß, bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem, in welchem x, y, z; x', y', z' die Koordinaten der beiden Massenpunkte sind, die Bewegungsgleichungen dieser werden:

für m:		für m':	
$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2 m'(x'-x)}{\varrho^3}$		$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(x'-x)}{\varrho^3}$	
$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2 m'(y'-y)}{\varrho^3}$	1)	$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(y'-y)}{\varrho^3}$	2)
$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{k^2 m'(z'-z)}{\varrho^3}$		$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{k^2 m(z'-z)}{\varrho^3}$	

$$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

k^2 ist eine Konstante, deren Bestimmung wir uns vorbehalten, und die vorläufig als Anziehung zweier Massen 1 in der Entfernung 1 definiert werden kann. Aus den beiden Gleichungsgruppen folgt:

$$\frac{d^2\,\frac{mx+m'x'}{m+m'}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\,\frac{my+m'y'}{m+m'}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\,\frac{mz+m'z'}{m+m'}}{dt^2} = 0$$

d. h. der *Schwerpunkt* des Systems, dessen Koordinaten

$$X = \frac{mx+m'x'}{m+m'}, \qquad Y = \frac{my+m'y'}{m+m'}, \qquad Z = \frac{mz+m'z'}{m+m'}$$

sind, bewegt sich geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Diese Bewegung verbindet sich mit der Eigenbewegung des Systems und soll hier außer Betracht bleiben. Nennt man ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' die relativen Koordinaten von m und m' in bezug auf den Schwerpunkt, so daß $x = X + \xi, \cdots x' = X + \xi', \cdots$ wird, und ferner $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die relativen Koordinaten von m' zu m, so daß $x' = x + \mathfrak{x}, \cdots x = x' - \mathfrak{x}, \cdots$ wird, so wird aus den Gl. 1), da $\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \cdots$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{k^2 m'(\xi' - \xi)}{\varrho^3}, \cdots$$

oder wegen $\xi = x - X = x - \frac{mx + m'x'}{m + m'} = -\frac{m'}{m + m'}(x' - x) = -\frac{m'}{m + m'}(\xi' - \xi)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\xi}{\varrho^3}, \cdots \qquad 3)$$

In derselben Weise findet man aus 2)

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\xi'}{\varrho^3}, \cdots. \qquad 4)$$

In 3) und 4) ist

$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 =$$
$$= \left(\frac{m + m'}{m'}\xi\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m'}\eta\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m'}\zeta\right)^2 = \left(\frac{m + m'}{m}\xi'\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m}\eta'\right)^2 + \left(\frac{m + m'}{m}\zeta'\right)^2;$$

sind also g und g' die Entfernungen der Massen m und m' von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt, so wird

$$g^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad g'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und daher

$$\varrho = \frac{m + m'}{m'}g = \frac{m + m'}{m}g'.$$

Aus 3) und 4) wird also:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\frac{m'^3}{(m + m')^2}\frac{\xi}{g^3}, \cdots, \qquad g^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \qquad 3^a)$$

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -k^2\frac{m^3}{(m + m')^2}\frac{\xi'}{g'^3}, \cdots, \qquad g'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \qquad 4^a)$$

und durch Subtraktion:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -k^2(m + m')\frac{\mathfrak{x}}{\varrho^3}, \cdots, \qquad \varrho^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2. \qquad 5)$$

Die Gleichungen $3^a)$, $4^a)$, 5) sind von genau derselben Form; die durch sie beschriebenen Bewegungen finden, wie nachher gezeigt wird, in Ellipsen nach den Keplerschen Gesetzen statt; in dem einen der Brennpunkte liegen die Anfangspunkte der Koordinaten, also im Falle von $3^a)$ und $4^a)$ der Schwerpunkt, im Falle von 5) die eine Masse. Man hat also die Sätze:

I. *Die Komponenten eines Doppelsternsystems beschreiben um ihren gemeinsamen Schwerpunkt als Brennpunkt Ellipsen.*

II. *Jede Komponente eines Doppelsternes beschreibt um die andere als Brennpunkt eine Ellipse.*

Da die Radienvektoren g, g', ϱ in einem linearen Verhältnis stehen, indem stets

$$g = \frac{m'}{m + m'}\varrho, \qquad g' = \frac{m}{m + m'}\varrho, \qquad g = \frac{m'}{m}g',$$

so sind alle genannten Ellipsen einander ähnlich und ihre großen Achsen liegen in derselben Geraden.

Da man in der Regel nur die relative Bewegung des einen Sternes um den anderen beobachten kann, brauchen wir uns nur mit den Gleichungen 5) zu beschäftigen, wissen aber, daß die absoluten Bahnen der beiden Körper der sich hieraus ergebenden Ellipse ähnlich sind. Die Gleichungen $5^a)$, die wir jetzt bequemer so schreiben wollen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{z}{r^3} &= 0 \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & \end{aligned} \qquad 5^a)$$

(x, y, z Relativkoordinaten von m' zu m)

liegen auch der Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne zugrunde; da wir aber bei Behandlung dieser Aufgabe (Nr. 41) von anderen Gleichungen ausgegangen sind, wollen wir hier die Integration von $5^a)$ kurz durchführen. Wird die zweite Gleichung mit $-z$, die dritte mit y multipliziert und addiert, so entsteht ein Ausdruck, dessen Integral ist:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_1.$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c_2 \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c_3. \end{aligned} \qquad 6)$$

Das sind die Flächenintegrale, welche besagen, daß die vom Radiusvektor beschriebenen Flächenräume auf irgend eine Ebene projiziert proportional zu den Zeiten sind. Verbindet man ferner die Gl. 5) durch die Multiplikatoren $2dx$, $2dy$, $2dz$, so kommt nach der Integration:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = k^2(m+m')\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad 7)$$

worin a, ebenso wie oben c_1, c_2, c_3 die Integrationskonstante bezeichnet. Aus den Gl. 6) folgt

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

d. h. die Bewegung findet in einer Ebene statt, die durch den Anfangspunkt geht. Nimmt man diese Ebene als Fundamentalebene der xy der Art, daß z konstant Null ist, so reduzieren sich die bisherigen Integrale 6) und 7) auf

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= k^2(m+m')\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

oder wenn durch

$$x = r\cos s, \qquad y = r\sin$$

Polarkoordinaten eingeführt werden:

$$r^2 \frac{ds}{dt} = c \tag{8}$$

$$r^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k^2 (m + m') \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{9}$$

Wird vermittels der ersten Gleichung aus der zweiten die Zeit eliminiert, so kommt:

$$ds = \frac{c d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{k^2(m+m')}{a} + \frac{2k^2(m+m')}{r} - \frac{c^2}{r^2}}}$$

oder:

$$ds = \frac{d\left(\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2 - \frac{k^2(m+m')}{a} - \left(\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist:

$$s - \omega = \arccos \frac{\frac{c}{r} - \frac{k^2(m+m')}{c}}{\sqrt{\left(\frac{k^2(m+m')}{c}\right)^2 - \frac{k^2(m+m')}{a}}}$$

woraus:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(s - \omega)} \tag{10}$$

wenn gesetzt wird:

$$p = \frac{c^2}{k^2(m+m')}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2(m+m')a}}. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt vor mit dem Parameter p, der Exzentrizität e und der wahren Anomalie $s - \omega$, dessen einer Brennpunkt im Anfangspunkt liegt; die oben eingeführte Konstante ω bedeutet also die Länge des Perihels, von der X-Achse an gezählt, und die Konstante a wegen $p = a(1 - e^2)$ die große Halbachse.

Nach 8) ist $\frac{1}{2}c$ der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichene Flächenraum. Ist $ab\pi = a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi$ die Fläche der Ellipse und U die Zeit, welche der Radiusvektor braucht, um sie zu beschreiben, also die Umlaufszeit, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}c = \frac{a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi}{U}$$

oder wenn quadriert und nach 11)

$$c^2 = k^2(m + m')p = k^2(m + m')\,a(1 - e^2)$$

eingetragen wird:

$$\frac{4a^3\pi^2}{U^2} = k^2(m + m'). \tag{12}$$

Diese Beziehung zwischen großer Halbachse und Umlaufszeit, die im Sonnensystem

zum dritten Keplerschen Gesetz führt, vermittelt bei Doppelsternen, wenn auch ihre Parallaxe bekannt ist, die Bestimmung ihrer Gesamtmasse. k^2 ist die Anziehung, welche zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 aufeinander ausüben; nimmt man als Einheit der Masse die Sonnenmasse, als Längeneinheit die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne und als Zeiteinheit das siderische Jahr, so gibt die Gl. 12) für das System Sonne-Erde

$$4\pi^2 = k^2(1 + m')$$

oder wenn die sehr kleine Erdmasse m' vernachlässigt wird:

$$k = 2\pi.$$

Mit den festgesetzten Einheiten wird also aus Gl. 12)

$$m + m' = \frac{a^3}{U^2}. \qquad 13)$$

Bezeichnet man mit p'' die Parallaxe des Doppelsternes, d. h. den Winkel, unter welchem die Erdbahnhalbachse — die Längeneinheit — von ihm aus erscheint, so ist $\frac{1}{\sin p''}$ die lineare Entfernung desselben von der Sonne; nennt man ferner a'' den Winkel, unter dem a von der Erde aus gesehen wird, also eine Größe, die man ermitteln kann, wenn eine Bahnbestimmung gelingt, so wird:

$$\sin a'' = a \sin p''$$

oder

$$a = \frac{a''}{p''}.$$

Somit kann 13) so geschrieben werden:

$$a'' = p'' \sqrt[3]{(m + m')\, U^2}. \qquad 14)$$

Diese wichtige Beziehung gibt die Gesamtmasse $m + m'$, wenn durch die Bahnbestimmung a'' und U und durch Parallaxenbestimmung p'' bekannt geworden sind.

Wir fahren in der Entwicklung der Relationen für die elliptische Bewegung fort, indem wir die Gleichung 8) unter Benutzung des Wertes für c und des Umstandes, daß sich s und $s - \omega = v$ nur um einen konstanten Winkel unterscheiden, in der Gestalt

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{k^2(m + m')\, a(1 - e^2)}$$

mit der Polargleichung der Ellipse 10)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

in Verbindung setzen. Aus letzterer folgt

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2)}{er} - \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{er} \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2};$$

also, wenn der Ausdruck von $\cos v$ differenziert und dann $\sin v$ eingetragen wird:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{r\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} \frac{dr}{dt}.$$

Somit wird aus 8) unter gleichzeitiger Benutzung von 12)

$$\frac{r}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{k^2(m+m')}{a^3}}=\frac{2\pi}{U}.$$

Um diese Gleichung integrieren zu können, führt man den Hilfswinkel E durch

$$a-r=ae\cos E$$

ein, welcher einerseits zur Berechnung von r die Gleichung

$$r=a(1-e\cos E) \qquad 15)$$

mit dem Differenzial

$$dr=ae\sin E\cdot dE$$

liefert, anderseits die zu integrierende Gleichung in die Form überzuführen gestattet:

$$(1-e\cos E)\frac{dE}{dt}=\frac{2\pi}{U},$$

die unmittelbar integriert werden kann:

$$E-e\sin E=\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T}). \qquad 16)$$

Wenn $E=0$ wird, nimmt r seinen kleinsten Wert an und umgekehrt; E ist also im Periastron Null und hierfür wird auch $t-\mathrm{T}=0$, d. h. die eingeführte Konstante T stellt die Durchgangszeit durchs Periastron dar. Da die Gl. 16) die Bestimmung des Winkels E aus der Zeit gestattet, bedarf es zur Bestimmung von v nur mehr einer Beziehung zwischen E und v. Werden die beiden Werte von r einander gleichgesetzt:

$$a(1-e\cos E)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

so folgt leicht:

$$\cos v=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}$$

und

$$1+\cos v=2\cos\tfrac{1}{2}v^2=\frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}$$

$$1-\cos v=2\sin\tfrac{1}{2}v^2=\frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}$$

also schließlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E. \qquad 17)$$

Stellt man die Gleichungen 15), 16), 17) zusammen:

$$E-e\sin E=\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T})$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \qquad 18)$$

$$s=\omega+v$$

$$r''=a''(1-e\cos E),$$

so erkennt man, daß mittels der Konstanten U, T, e, a'', ω für jede beliebige Zeit der Ort in der Bahn durch r und s gefunden werden kann. $\frac{2\pi}{U}$ nennt man die *mittlere jährliche Bewegung*; man kann sie statt U als Element einführen; man gibt ihr das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem die Bewegung in der Richtung der wachsenden Positionswinkel stattfindet oder in der entgegengesetzten.

Durch die bisherigen Betrachtungen ist die Bewegung in der Bahnebene erkannt; es kommt nun darauf an, Feststellungen betreff der Lage der Bahnebene im Raum zu machen. Man denkt sich zur Verbindungslinie Erde-Stern, dem *Visionsradius*, im Stern die dazu senkrechte Ebene errichtet, welche eine Tangentialebene der Sphäre sein wird. Auf diese Ebene, die man die *Projektionsebene* nennt, projiziert sich von der Erde aus gesehen die wahre Bahnellipse und es erscheint auf ihr die *scheinbare Bahn*, die durch Beobachtung festgelegt werden kann. Es geschieht dies in der Regel durch Angabe von Positionswinkel und scheinbarer Distanz des einen Sternes — des Nebensternes — in bezug auf den andern — den Hauptstern, für die Beobachtungszeiten; der Positionswinkel P wird vom nördlichen Teil des durch den Hauptstern gelegten Meridianes nach Osten zu von 0° bis 360° gerechnet, die scheinbare Distanz ϱ wird in Bogensekunden angegeben. Dies vorausgesetzt wird die Lage der wahren Bahnebene bestimmt durch ihre *Neigung* i gegen die Projektionsebene und durch den Positionswinkel, den ihre Schnittlinie mit der Projektionsebene — *die Knotenlinie* — mit dem Schnitt des Meridianes und der Projektionsebene einschließt, der *Länge des Knotens* Ω. Betreff dieser beiden Bestimmungsstücke i und Ω kann hier gleich folgende Bemerkung gemacht werden. Offenbar reicht die Kenntnis der scheinbaren Bewegung allein nicht aus, um zu entscheiden, ob in einem bestimmten Teile der Bahn der Nebenstern sich vor oder hinter der Projektionsebene befindet, d. h. die scheinbare Bahn bleibt dieselbe, ob wir die Neigung mit $+ i$ oder mit $- i$ ansetzen. Es kann also eine Unterscheidung zwischen auf- und absteigendem Knoten nicht getroffen werden. Man ist übereingekommen, die Neigungen stets positiv und kleiner als 90° anzusetzen; dann kann die Länge des aufsteigenden Knotens Ω oder $180° + \Omega$ sein. Man hat sich also für einen dieser Werte zu entscheiden, dann ist alles weitere unzweideutig bestimmt. Nur wenn durch spektroskopische Messung auch die Bewegung im Visionsradius bekannt ist, kann die Zweideutigkeit gehoben werden.

Läßt man die früher benutzte X-Achse, von der aus die Winkel s und ω gezählt werden, mit der Knotenlinie zusammenfallen, so wird die Lage der Ellipse in ihrer Ebene durch den Winkel ω gegeben, den ihre große Achse (Richtung nach dem Perihel) mit der Knotenlinie bildet: *Abstand des Perihels vom Knoten.*

Man erkennt jetzt, daß eine Doppelsternbahn durch *sieben* Stücke gegeben ist: a, e, U, T, ω, Ω, i und es läßt sich auch sofort nachweisen, daß diese Stücke genügen, um für jede Zeit den scheinbaren Ort des Nebensterns in bezug auf den Hauptstern an der Sphäre durch Positionswinkel und Distanz zu berechnen. In der Tat gibt das System 18) r'' und v; zieht man ferner vom Hauptstern H den Radiusvektor r nach dem Nebenstern N, seine Projektion HN' auf die Projektionsebene und die Knotenlinie, so hat man ein Dreikant, in dem die Seiten $\Omega N = \omega + v$,

$\Omega N' = P - \Omega$ sind und der Winkel bei Ω gleich i und der bei N' gleich 90° ist. Da nun $\varrho = r\cos(NN')$, so ergibt dasselbe:

$$\operatorname{tg}(P-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + v)$$
$$\varrho = r\frac{\cos(\omega+v)}{\cos(P-\Omega)} \qquad 19)$$

oder auch

$$\varrho \sin(P-\Omega) = r\cos i \sin(\omega+v)$$
$$\varrho\cos(P-\Omega) = r\cos(\omega+v) \qquad 19^a)$$

woraus P und ϱ berechnet werden können; $P-\Omega$ und $\omega+v$ liegen stets im selben Quadranten.

Das Ziel der Bahnbestimmung eines Doppelsternes wird also sein, diese sieben Elemente zu bestimmen; zur Verfügung stehen beobachtete Positionswinkel und Distanzen oder wie wir gleich allgemeiner sagen können, die *scheinbare* Bahn. Das Studium der Beziehungen, die zwischen der wahren und scheinbaren Bahn bestehen, wird den Weg anzeigen, der einzuschlagen ist. Ehe wir dazu übergehen, sei noch in Kürze der Korrektionen gedacht, die an die beobachteten Größen ϱ und P angebracht werden müssen, ehe sie der Bahnbestimmung zugrunde gelegt werden können. Refraktion, Aberration und Nutation haben auf so enge Paare, wie sie hier in Frage kommen, einen ganz verschwindenden Einfluß. Dagegen wird man den Einfluß der Präzession nicht vernachlässigen. Da diese eine Lagenänderung des Äquators und damit des Meridians, von dem aus die Positionswinkel gezählt werden, hervorbringt, so müssen die direkt beobachteten Positionswinkel auf eine bestimmte Lage des Meridians reduziert werden, ehe sie miteinander verglichen werden können; die Distanzen bleiben natürlich ungeändert. Man kann die zu ermittelnde Korrektion des Positionswinkels leicht angeben. Da zwischen dem Rektaszensions- und Deklinationsunterschied $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der Komponenten des Doppelsternes und ϱ und P die Beziehungen

$$\cos\delta\,\Delta\alpha = \varrho\sin P, \qquad \Delta\delta = \varrho\cos P$$

bestehen und die Präzession in Deklination $+ 20''.05\cos\alpha\,(t-t_0)$ beträgt (Nr. 20), so wird die Präzession im Positionswinkel dP gegeben sein durch

$$-\varrho\sin P\cdot dP = -20''.05\sin\alpha\,(t-t_0)\,\Delta\alpha$$

oder

$$dP = +0^\circ.00056\sin\alpha\sec\delta\,(t-t_0).$$

Ist P_0 der auf den Meridian der Zeit t_0 bezogene Positionswinkel, so wird der auf den Meridian von t bezogene:

$$P = P_0 + 0^\circ.00056\sin\alpha\sec\delta\,(t-t_0). \qquad 20)$$

Wesentlich schwieriger sind die sogenannten persönlichen Messungsfehler zu behandeln, von denen die Beobachtungen ebenfalls befreit werden müssen, doch ist hier nicht der Ort, auf diese weitläufige Frage einzugehen.

191. Beziehungen zwischen der scheinbaren und der wahren Bahnellipse. Die Projektion der wahren vom Nebenstern beschriebenen Bahnellipse auf die Projektionsebene ist, wie die Geometrie lehrt, wieder eine Ellipse. Zwischen beiden

Ellipsen und den Bewegungen in ihnen bestehen Beziehungen, die wir kennen lernen wollen.

1. Zunächst ist klar, daß auch in der scheinbaren Ellipse das Gesetz der Flächen gilt, d. h. der Radiusvektor vom Hauptstern zum Nebenstern beschreibt auch in der projizierten Bahn Flächenräume, die den Zeiten proportional sind. In der Tat haben wir unser ursprüngliches Koordinatensystem ganz beliebig gelegt und da der Flächensatz nachgewiesen ist für alle Ebenen desselben, so gilt er auch für die Ebene senkrecht zum Visionsradius. Diese Eigenschaft der scheinbaren Bahn wird oft mit Vorteil zur Ausgleichung der Beobachtungen benutzt und namentlich zur Ermittlung von Distanzen durch Rechnung, wenn ihre Messung mit Schwierigkeiten verknüpft war; denn der Flächensatz lautet hier

$$\varrho^2 \frac{dP}{dt} = \text{const.},$$

man kann daraus also ϱ bestimmen, wenn von anderen Bahnteilen her die const. bekannt geworden und die Geschwindigkeit des Positionswinkels $\frac{dP}{dt}$ beobachtet ist.

2. Der Hauptstern, der in einem Brennpunkt der wahren Bahn liegt, liegt *nicht* in einem Brennpunkt der projizierten Ellipse, sondern irgendwo im Innern derselben.

3. Die Projektion des Mittelpunktes der wahren Bahn ist der Mittelpunkt der scheinbaren Bahn.

4. In der wahren Bahn liegen die drei Punkte: Mittelpunkt, Hauptstern (Brennpunkt) und Periastron auf einer Geraden, der großen Achse; die Projektionen dieser drei Punkte müssen folglich ebenfalls auf einer Geraden liegen. Mithin hat man den Satz: Verbindet man den Hauptstern mit dem Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse durch eine Gerade, so liegt auf dieser die Projektion des Periastrons; die Schnittpunkte dieser Geraden mit der scheinbaren Ellipse sind also die Projektionen von Periastron und Apastron der wahren Bahn. Oder: *Der Durchmesser der scheinbaren Bahn, welcher durch den Hauptstern geht, ist die Projektion der großen Achse der wahren Bahnellipse.* Dieser Satz gibt offenbar die Durchgangszeit durchs Periastron, wenn man in der scheinbaren Bahn den diesem Durchmesser entsprechenden Positionswinkel aufsucht und mit den Beobachtungsdaten vergleicht.

5. Die wahre und die scheinbare Bahnellipse haben zwei Punkte gemeinsam, nämlich jene, die auf der Knotenlinie liegen. Die beiden vom Hauptstern gezogenen Radienvektoren der scheinbaren Bahn, welche in die Knotenlinie fallen, sind also gleich den Radienvektoren der wahren Bahn, die in der Knotenlinie liegen.

6. Da die Exzentrizität das Verhältnis des Abstandes des Brennpunktes vom Mittelpunkt zur großen Halbachse ist und dieses Verhältnis durch die Projektion nicht geändert wird, so hat man: *Die Exzentrizität e der wahren Bahn ist gleich dem Verhältnis des Abstandes d des Hauptsternes vom Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse zu dem in der Richtung dieses Abstandes genommenen Halbmesser a' der scheinbaren Ellipse*: $e = \frac{d}{a'}$.

7. In der wahren Ellipse werden die senkrecht zur großen Achse (parallel zur

kleinen) gezogenen Sehnen von ihr halbiert; diese Eigenschaft bleibt in der Projektion erhalten, also: Man erhält in der Projektionsebene die Richtung der Projektion der kleinen Halbachse der wahren Ellipse, wenn man jene Sehnen der scheinbaren Ellipse aufsucht, welche durch die nach Satz 4. bekannte Projektion der großen Achse der wahren Ellipse halbiert werden; die durch den Mittelpunkt gelegte Sehne ist die Projektion der kleinen Achse. Oder: *Die Projektion der großen und der kleinen Achse der wahren Ellipse bilden konjugierte Durchmesser der scheinbaren Ellipse.*

8. Es sei $\varkappa$ das nach Satz 6. bekannte Verhältnis der großen zur kleinen Halbachse der wahren Ellipse:

$$\varkappa = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

dann gilt bekanntlich der Satz: Wenn man alle Ordinaten der wahren Ellipse in dem Verhältnis $1 : \varkappa$ verlängert, so liegen die Endpunkte auf dem um die große Achse als Durchmesser gezogenen Kreis. Dieser Kreis, auf die Projektionsebene projiziert, gibt eine Ellipse, die sofort konstruiert werden kann, da man nur alle parallel zu dem in 7. genannten, der kleinen Achse entsprechenden konjugierten Durchmesser der scheinbaren Ellipse, gezogenen Sehnen im Verhältnis $1 : \varkappa$ zu verlängern braucht. Wir nennen diese Ellipse die »*Hilfsellipse*« und behaupten: *Die große Achse der Hilfsellipse ist gleich der großen Achse der wahren Bahn und ihre Richtung gibt die Richtung der Knotenlinie an.*

In der Tat hat der Kreis, von dem die Hilfsellipse die Projektion ist, als Durchmesser die große Achse der wahren Bahn. Die Durchmesser dieses Kreises werden bei der Projektion alle verkürzt mit Ausnahme eines einzigen; die Projektion dieses einen muß also den größten Durchmesser der Hilfsellipse oder ihre große Achse ergeben. Der unverkürzt projizierte Durchmesser des Kreises muß parallel zur Projektionsebene sein, also auch parallel zur Schnittlinie der Kreisebene mit der Projektionsebene, d. h. parallel zur Knotenlinie. Mittels dieses Satzes kann die große Achse und die Knotenlinie der wahren Bahn aus der scheinbaren Bahn durch Konstruktion gefunden werden (*Zwiers*, Astr. Nachr. Band 139, Seite 369).

Nachdem die Hilfsellipse konstruiert ist, kann man ihre große Achse durch Versuch ziehen; sicherer aber ist es, sie durch Konstruktion zu finden. Bezogen auf das Paar konjugierter Durchmesser, von denen der eine durch den Hauptstern gelegt wurde, ist die Gleichung der scheinbaren Ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

wenn a' und b' die Längen der konjugierten Halbmesser sind. Bezogen auf dieselben Achsen wird die Gleichung der Hilfsellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{(\varkappa b')^2} = 1.$$

Die Achsenrichtungen deuten daher auch in der Hilfsellipse zwei konjugierte Halbmesser an; wir nennen sie a' und $b'' = \varkappa b'$. Aus diesen der Größe und Richtung nach gegebenen konjugierten Halbmessern können aber die große und kleine Halbachse durch folgende bekannte Konstruktion gefunden werden. Im Endpunkt von

a' zieht man die Parallele zu b''; das ist eine Tangente an die scheinbare und an die Hilfsellipse. Zu dieser Tangente errichtet man das Lot und trägt beiderseits b'' auf. Ein durch diese beiden Punkte und den Mittelpunkt geschlagener Kreis schneidet auf der Tangente Punkte ab, die mit dem Mittelpunkt verbunden die Richtungen der großen und der kleinen Achse ergeben.

9. Von den Durchmessern des oben betrachteten Kreises in der Ebene der wahren Bahn wird *einer* unverkürzt auf die Projektionsebene projiziert, die große Achse α der Hilfsellipse, und einer erleidet die stärkste Verkürzung, die kleine Achse β der Hilfsellipse; der erstere ist jener Kreisdurchmesser, der parallel zur Schnittlinie verläuft, der letztere jener, der senkrecht darauf steht; dieser letztere schließt mit seiner Projektion den Winkel i, die gegenseitige Neigung der beiden Ebenen ein; mithin:

Das Verhältnis $\beta : \alpha$ der beiden rechtwinkligen Halbachsen der Hilfsellipse gibt den cos des Neigungswinkels der Bahnebene gegen die Projektionsebene.

10. Nach dem Vorhergehenden ist der durch den Hauptstern gelegte Halbmesser der scheinbaren Ellipse die Projektion der großen Halbachse a der wahren Ellipse, und die große Halbachse α der Hilfsellipse gibt die Richtung der Knotenlinie an. Der Winkel zwischen a und α ist also der Abstand des Periastrons vom Knoten ω und der Winkel zwischen a' und α die Projektion ω' von ω auf die Projektionsebene. Das von den Strahlen a, α, a' gebildete Dreikant gibt also

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\cos i} = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega' .$$

Schlägt man um α als Halbmesser einen Kreis und fällt vom Endpunkt B von a' ein Lot auf α, welches den Kreis im Punkte C trifft, so schließt die Verbindungslinie von C mit dem Mittelpunkt M mit α einen Winkel E ein, mittels dessen bekanntlich (Nr. 37) die rechtwinkligen Koordinaten von B im System $\alpha\beta$ durch

$$\alpha\cos E \text{ und } \beta\sin E$$

ausgedrückt werden können. Man hat also

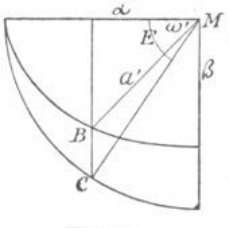


Fig. 81.

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}E \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}E = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega' ,$$

d. h. E ist identisch mit ω: *Der Abstand des Periastrons vom Knoten ist gleich dem Winkel, den MC mit der großen Achse der Hilfsellipse bildet.*

192. Die Bahnbestimmung der Doppelsterne. Allgemeines. Die Methoden der Bahnbestimmung der Doppelsterne unterscheiden sich in rein analytische, in rein graphische und in solche, bei denen Zeichnung *und* Rechnung zur Verwendung gelangen. Unter den rein analytischen findet man solche, die das Problem auffassen wie das Planeten- oder Kometenproblem und eine Darstellung der sieben Elemente durch sieben Beobachtungsstücke erstreben, und solche, die von vornherein möglichst viele Beobachtungen zur Verwendung zu bringen suchen. Die sieben Beobachtungsdaten,

unter denen sich offenbar mindestens ein Positionswinkel und eine Distanz befinden muß, sind variiert worden: *Savary* (Conn. d. Temps 1830) wählt 4 Pos. W. und 3 Distanzen, *Encke* (Berl. Jahrb. 1832) 4 Pos. W. und 4 Dist., *Klinkerfues* (Theor. Astr.) 6 Pos. W. und 1 Dist., allein diese Methoden, deren man noch mehr entwickeln könnte, sind wohl theoretisch elegant, aber praktisch fast wertlos wegen der starken Fehler, denen die einzelnen Beobachtungen unterworfen sind. Die andere Klasse analytischer Methoden, die jetzt ausschließlich zur Verwendung gelangt, trägt von vornherein den Eigentümlichkeiten der Doppelsternbeobachtungen mehr Rechnung, indem sie möglichst viele Beobachtungen heranzieht; viele Forscher haben an der Ausbildung dieser Methode gearbeitet, die denn auch kaum mehr etwas zu wünschen übrig lässt; wir nennen *J. Herschel* (Mem. Roy. Astr. Soc. Vol. 18), *Y. Villarceau* (Conn. des Temps 1877), *Kowalski* (Mém. Univ. Kasan 1873), *Glasenapp* (Monthly Not. Vol. 49), *Seeliger* (Handwörterbuch der Astronomie, Band I) u. a.

Bei allen graphischen Methoden wird die Gesamtheit der Beobachtungen graphisch dargestellt und dadurch der Zug der *scheinbaren Bahnellipse* festgelegt. Aus dieser werden dann die Elemente entweder durch Konstruktion oder durch Rechnung gefunden. Die Methoden von *Klinkerfues* (Theor. Astr. und Astr. Nachr. Bd. 42), *Zwiers* (Astr. Nachr. Bd. 139) u. a. gehören hierher. Die graphischen Methoden spielen auf dem jetzigen Standpunkt der Doppelstern-Astronomie noch eine große Rolle, da sie meist ein ebenso genaues Resultat geben, als eine lange Rechnung. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Herstellung der scheinbaren Ellipse; die Ableitung der Elemente daraus erfolgt graphisch und rechnerisch mit gleicher Leichtigkeit und Schärfe.

Wir wollen zuerst einige graphische Methoden besprechen, zugleich mit den daraus sich ergebenden Rechenvorschriften und dann die rein analytische Methode anschließen.

193. Graphische Methode von Zwiers. Wir nehmen an, daß die scheinbare Ellipse gezeichnet vorliege, ferner der Ort H des Hauptsternes in ihrem Innern und die Richtung nach dem Nordpol. Haben die Beobachtungen für einen vollen Umlauf oder mehr zur Verfügung gestanden, so kann daraus die Umlaufszeit U unmittelbar entnommen werden; bedecken die Beobachtungen nur ein Stück der Bahn, so wird man die Umlaufszeit mit Anwendung des Flächensatzes und Benutzung eines Planimeters oder ähnlichen Hilfsmittels ableiten. — Wird der durch den Hauptstern gehende Durchmesser $2a'$ der scheinbaren Ellipse gezogen, so erhält man den Ort, der dem Periastron entspricht (Nr. 191, Satz 4) und durch Vergleichung mit den Beobachtungen das Element T. Ferner ergibt Satz 6 die Exzentrizität $e = \sin\varphi = \frac{d}{a'}$, wo d die Entfernung des Hauptsternes vom Mittelpunkt ist. Zu $2a'$ sucht man den konjugierten Durchmesser $2b'$ der scheinbaren Ellipse und konstruiert dann mittels $\varkappa = \sec\varphi$ nach Satz 8 die Hilfsellipse und ihre große und kleine Achse 2α und 2β. Die zu α durch H gezogene Parallele gibt dann die Knotenlinie und deren Winkel mit der Richtung nach dem Pol ist die Länge des Knotens Ω; α ist gleich der großen

Halbachse a der wahren Bahn und $\beta : \alpha = \cos i$; endlich folgt ω nach der in Satz 10 angegebenen Konstruktion als Winkel, den α mit MC bildet.

Wenn man der gezeichnet vorliegenden scheinbaren Ellipse die Entfernung d des Hauptsternes vom Mittelpunkte, den durch den Hauptstern gelegten Halbmesser a' und den dazu konjugierten b', endlich die Positionswinkel χ_1 und χ_2 dieser letzteren entnimmt, dann können die Elemente mit Ausnahme der rein dynamischen T und U auch durch einfache Rechnung statt durch Konstruktion gefunden werden. Betreff χ_1 und χ_2 muß die Festsetzung getroffen werden daß χ_1 die Richtung des Hauptsternes vom Mittelpunkt aus gesehen angibt und daß unter der Richtung χ_2 jene zu verstehen ist, die mit der von χ_1 einen spitzen Winkel bildet. Man hat dann zuerst $e = \frac{d}{a'} = \sin\varphi$ und $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \sec\varphi$. Ferner werden a' und $b'' = \varkappa b'$ konjugierte Halbmesser der Hilfsellipse, die bekanntlich mit der großen und kleinen Halbachse α und β derselben in der Beziehung stehen:

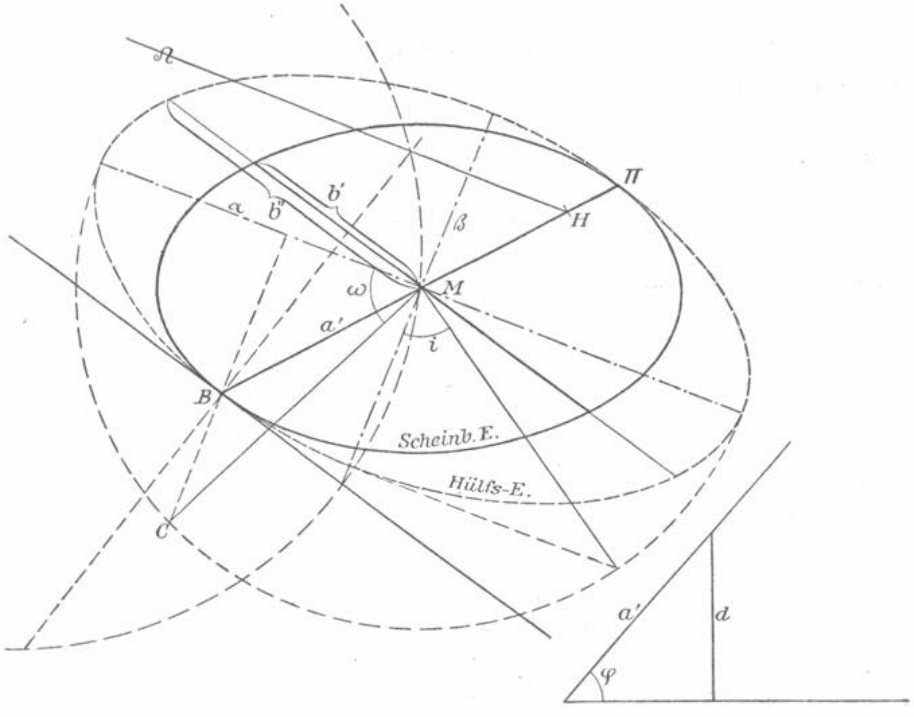


Fig. 82.

$$\alpha^2 + \beta^2 = a'^2 + b''^2$$
$$\alpha\beta = a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2) \quad \text{sin stets positiv.}$$

Hieraus folgen aber die Formeln:

$$(\alpha + \beta)^2 = a'^2 + b''^2 + 2a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)$$
$$(\alpha - \beta)^2 = a'^2 + b''^2 - 2a'b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)$$

aus denen man α und β berechnen kann. Dann ist:

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$a = \alpha.$$

Aus der in Nr. 191, Satz 10 gegebenen Konstruktion folgt weiter (Fig. 81):

$$a'^2 = \alpha^2 \cos E^2 + \beta^2 \sin E^2$$

oder

$$a'^2 (\sin E^2 + \cos E^2) = \alpha^2 \cos E^2 + \beta^2 \sin E^2$$

oder

$$\operatorname{tg} E = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}}$$

oder da E identisch ist mit ω:

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}}.$$

Die Projektion von ω auf die Projektionsebene wird nach der eben zitierten Nummer gefunden durch

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tg} \omega$$

und dies führt auf:

$$\Omega = \chi_1 - \omega'.$$

Wir stellen die Formeln nochmals zusammen:

Daten aus der scheinbaren Ellipse: d, a', b', χ_1, χ_2.

$$\begin{aligned}
e &= \sin \varphi = \frac{d}{a'} \\
\varkappa &= \sec \varphi \\
b'' &= \varkappa b' \\
\alpha + \beta &= \sqrt{a'^2 + b''^2 + 2 a' b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)} \\
\alpha - \beta &= \sqrt{a'^2 + b''^2 - 2 a' b'' \sin(\chi_1 - \chi_2)} \\
a &= \alpha \\
\cos i &= \frac{\beta}{\alpha} \\
\operatorname{tg} \omega &= \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}} \\
\operatorname{tg} \omega' &= \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tg} \omega \\
\Omega &= \chi_1 - \omega'.
\end{aligned}$$

194. Graphische Methode von Klinkerfues. Wir wollen auch hier als vorliegende Daten die gezeichnete scheinbare Bahnellipse, den durch den Hauptstern gehenden Halbmesser a' derselben, den dazu konjugierten b' und die Positionswinkel χ_1 und χ_2 von a' und b' voraussetzen und zuerst eine Beziehung zwischen diesen Stücken und Knoten und Neigung ableiten. Zieht man durch den Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse eine Parallele zur Knotenlinie, fällt darauf von jedem Punkt der

Ellipse ein Lot und errichtet im Fußpunkt desselben das Lot in der wahren Bahn, so schließen diese beiden die Neigung i miteinander ein; man erhält daher die wahre Bahnellipse, wenn man jedes der erstgezogenen Lote im Verhältnisse $1 : \sec i$ verlängert (Fig. 83). Es liegen dann auf jedem Lot ein Punkt der wahren Ellipse und seine Projektion in der scheinbaren Ellipse. Nach Nr. 191 Satz 4 sind a' und b' die Projektionen der großen und kleinen Halbachse a und b der wahren Ellipse; man kann diese letzteren also unmittelbar durch Konstruktion finden, wenn man von den Endpunkten von a' und b' die Lote auf die Knotenlinie fällt und bis zum Schnitt mit der wahren Ellipse verlängert. Man liest nun unmittelbar aus der Figur ab:

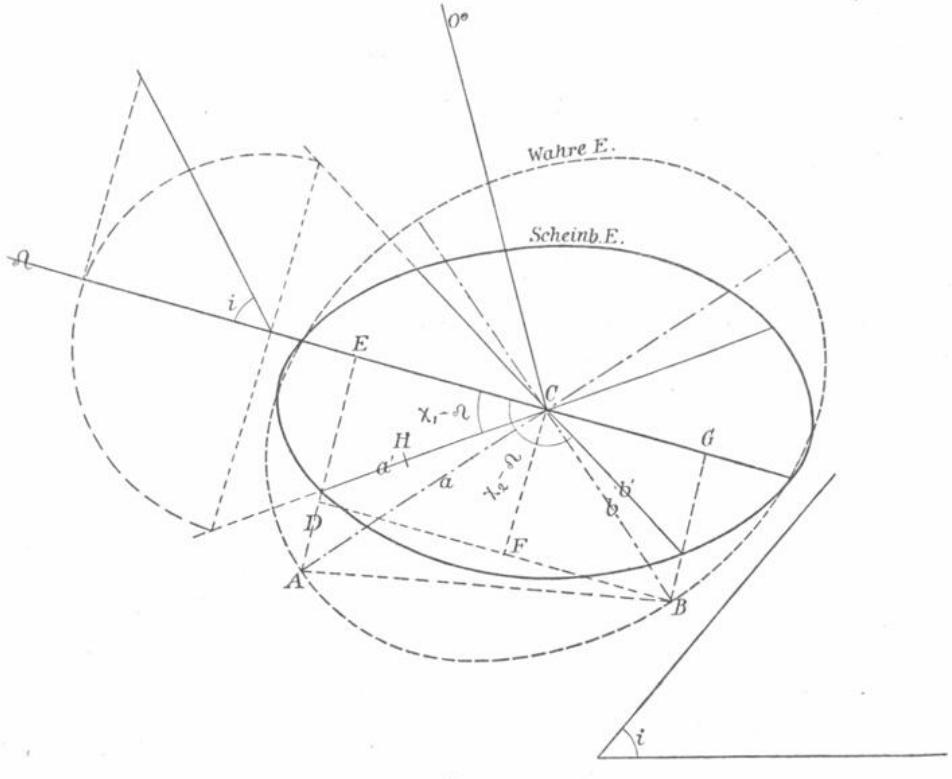


Fig. 83.

$$a^2 = a'^2 \cos(\chi_1 - \Omega)^2 + a'^2 \sin(\chi_1 - \Omega)^2 \sec i^2$$
$$b^2 = b'^2 \cos(\chi_2 - \Omega)^2 + b'^2 \sin(\chi_2 - \Omega)^2 \sec i^2;$$

die Summe dieser beiden gibt das Quadrat der Sehne s, die zwischen den Endpunkten von a und b gezogen wird. Zieht man BD parallel zur Knotenlinie, so läßt sich s^2 auch in folgender Weise ausdrücken:

$$s^2 = (AE - DE)^2 + (EC + CG)^2$$
$$= (a' \sin(\chi_1 - \Omega) \sec i - b' \sin(\chi_2 - \Omega) \sec i)^2 + (a' \cos(\chi_1 - \Omega) - b' \cos(\chi_2 - \Omega))^2,$$

so daß man durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält:

$$\cos i^2 = - \operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega) \operatorname{tg}(\chi_2 - \Omega). \qquad 1)$$

Dividiert man die Gleichungen für a^2 und b^2 durcheinander, so folgt:

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{\sin(\chi_2 - \Omega)^2 + \cos(\chi_2 - \Omega)^2 \cos i^2}{\sin(\chi_1 - \Omega)^2 + \cos(\chi_1 - \Omega)^2 \cos i^2}$$

oder wenn für $\cos i^2$ sein Wert aus 1) eingetragen und $b^2 : a^2 = 1 - e^2$ beachtet wird, nach leichter Reduktion:

$$\frac{\sin 2(\chi_2 - \Omega)}{\sin 2(\chi_1 - \Omega)} = -\frac{a'^2}{b'^2}(1 - e^2). \qquad 2)$$

Da die Exzentrizität e nach Nr. 191 Satz 6 gefunden werden kann, so ist die rechte Seite von 2) völlig bekannt und die Gleichung gibt also den Knoten Ω, worauf aus 1) die Neigung i folgt.

Um 2) durch Rechnung aufzulösen, setzt man:

$$\pm\frac{a'}{b'}\sqrt{1 - e^2} = \operatorname{tg}\zeta, \qquad 3)$$

worauf man erhält

$$\frac{\sin 2(\chi_1 - \Omega) - \sin 2(\chi_2 - \Omega)}{\sin 2(\chi_1 - \Omega) + \sin 2(\chi_2 - \Omega)} = \frac{1 + \operatorname{tg}\zeta^2}{1 - \operatorname{tg}\zeta^2}$$

oder

$$\frac{\cos(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega)\sin(\chi_1 - \chi_2)}{\sin(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega)\cos(\chi_1 - \chi_2)} = \sec 2\zeta$$

oder

$$\operatorname{tg}(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega) = \operatorname{tg}(\chi_1 - \chi_2)\cos 2\zeta. \qquad 4)$$

Die Gleichung 3) gibt vier Werte von ζ, denen vier Werte von 2Ω aus 4) entsprechen; da aber die Gleichung 1) einen positiven Wert von $\cos i^2$ ergeben muß, der kleiner als 1 ist, scheiden zwei Werte aus und es bleiben nur zwei Werte Ω übrig, die sich voneinander um 180° unterscheiden. Diese Zweideutigkeit ist aber, wie schon früher gezeigt, notwendig mit dem Problem verknüpft.

Man kann mittels 2) den Knoten auch leicht durch eine Konstruktion finden. Man braucht nur aus dem Zentrum der scheinbaren Ellipse zwei Gerade zu ziehen, die den Winkeln $2\chi_1$ und $2\chi_2$ entsprechen; zieht man diesen parallel zwei Gerade in Abständen, deren Verhältnis gleich ist $\frac{a'^2}{b'^2}(1 - e^2)$ (welches zu rechnen ist) und verbindet deren Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt der Ellipse, so erhält man eine Gerade, deren Richtung dem Winkel 2Ω entspricht.

Um i nach der Formel 1) zu konstruieren, errichtet man auf der Linie Ω in der Entfernung 1 das Lot; auf diesem werden von den Linien χ_1 und χ_2 Strecken abgeschnitten, welche die tang von $\Omega - \chi_2$ und $\chi_1 - \Omega$ sind; zu diesen wird das geometrische Mittel genommen, indem man über der ganzen Strecke den Halbkreis schlägt usf.

Der Abstand des Periastrons vom Knoten: ω ergibt sich aus dem von den Geraden Ω, a, a' gebildeten Dreikant:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)}{\cos i}$$

oder, wenn quadriert und der Werth von $\cos i^2$ aus 1) eingetragen wird:

$$\operatorname{tg}\omega^2 = \operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)\operatorname{cotg}(\Omega - \chi_2). \qquad 5)$$

$\operatorname{tg}\omega$ wird also wieder als geometrisches Mittel aus den Strecken $\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)$ und $\operatorname{cotg}(\Omega - \chi_2)$ konstruiert. $\chi_1 - \Omega$ und ω liegen im selben Quadranten.

Um die Durchgangszeit durch Periastron: T festzustellen, berechnet man den Positionswinkel P_0, welcher dem Stern entspricht, wenn er im Periastron seiner wahren Bahn sich befindet; da allgemein (Gl. 19, Seite 622)

$$\operatorname{tg}(P - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + v),$$

so folgt für $v = 0$:

$$\operatorname{tg}(P_0 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}\omega. \qquad 6)$$

Wird hieraus P_0 berechnet, so läßt sich durch Vergleichung mit den beobachteten Positionswinkeln die dazugehörige Zeit feststellen, welche T sein wird.

Mit jedem beobachteten Positionswinkel kann man durch

$$\operatorname{tg}(\omega + v) = \frac{\operatorname{tg}(P - \Omega)}{\cos i} \qquad 7)$$

das Argument der Breite $\omega + v$ berechnen und dann mittels der gleichzeitig gemessenen Distanz ϱ den wahren Radiusvektor (Gl. 19) Seite 622)

$$r = \varrho \frac{\cos(P - \Omega)}{\cos(\omega + v)}. \qquad 8)$$

Durch v und r aber findet man die große Halbachse

$$a = \frac{r(1 + e\cos v)}{1 - e^2}. \qquad 9)$$

So kann aus jeder gemessenen Distanz die Halbachse a abgeleitet und damit dieses unsicherste Element mit möglichster Schärfe aus der Gesamtheit der Beobachtungen ermittelt werden; die beste Bestimmung ergeben in der Regel die Messungen im Apastron ($v = 180^0$), wofür man einfach hat:

$$a = \frac{r}{1 + e}, \qquad r = -\varrho \frac{\cos(P - \Omega)}{\cos\omega}.$$

Zur Ermittelung der Umlaufszeit U kann man zwei Wege einschlagen. Man wählt nach dem ersten zwei beobachtete Positionswinkel P_1 und P_2, welche durch eine möglichst große Zwischenzeit $t_2 - t_1$ voneinander getrennt sind, und berechnet dafür die zugehörigen wahren Anomalien nach

$$\operatorname{tg}(v_1 + \omega) = \frac{\operatorname{tg}(P_1 - \Omega)}{\cos i}, \qquad \operatorname{tg}(v_2 + \omega) = \frac{\operatorname{tg}(P_2 - \Omega)}{\cos i}$$

und dann die exzentrischen nach

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2.$$

Mittels dieser wird

$$\frac{2\pi}{U}(t_1 - \mathrm{T}) = E_1 - e\sin E_1$$

$$\frac{2\pi}{U}(t_2 - \mathrm{T}) = E_2 - e\sin E_2$$

und hieraus

$$\frac{2\pi}{U} = \frac{(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)}{t_2 - t_1},$$

welches die mittlere jährliche Bewegung ist.

Auf dem zweiten Wege bedient man sich des Flächensatzes, indem man die Fläche der ganzen scheinbaren Ellipse F mit dem vom Radiusvektor in der Zeit $t_2 - t_1$ überstrichenen Raum f vergleicht, nachdem man beide mittels des Planimeters oder durch Abzählen der Quadrate auf Millimeterpapier ausgemessen hat; es ist dann

$$U = \frac{F}{f}(t_2 - t_1).$$

Wir stellen die Formeln für die Rechnung nochmals zusammen:

Daten: a', b', χ_1, χ_2, d.

$$e = \frac{d}{a'}$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \pm\frac{a'}{b'}\sqrt{1 - e^2}$$

$$\operatorname{tg}(\chi_1 + \chi_2 - 2\Omega) = \operatorname{tg}(\chi_1 - \chi_2)\cos 2\zeta$$

$$\cos i^2 = -\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)\operatorname{tg}(\chi_2 - \Omega)$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}(\chi_1 - \Omega)}{\cos i}$$

($\chi_1 - \Omega$ und ω liegen in demselben Quadranten)

$$\operatorname{tg}(P_0 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}\omega \qquad \text{(hiermit T)}$$

$$\operatorname{tg}(\omega + v) = \frac{\operatorname{tg}(P - \Omega)}{\cos i}$$

$$r = \varrho\frac{\cos(P - \Omega)}{\cos(\omega + v)}$$

$$a = \frac{r(1 + e\cos v)}{1 - e^2}$$

$$\overset{t_1}{\operatorname{tg}(v_1 + \omega)} = \frac{\operatorname{tg}(P_1 - \Omega)}{\cos i} \qquad \overset{t_2}{\operatorname{tg}(v_2 + \omega)} = \frac{\operatorname{tg}(P_2 - \Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$\frac{2\pi}{U} = \frac{(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)}{t_2 - t_1}.$$

195. Analytische Methode. Es soll hier keine der rein analytischen Methoden zur Darstellung gelangen, die sich gerade so vieler Beobachtungsdaten bedienen, als Elemente zu bestimmen sind, da sie nur theoretischen Wert besitzen und zur praktischen Ausführung einer Bahnbestimmung nicht mehr verwendet werden; sondern es soll diejenige Methode beschrieben werden, deren man sich gegenwärtig fast ausschließlich bedient, wenn man *nur* die Rechnung anwenden will; wir lehnen uns dabei an die Formulierung an, die ihr *Seeliger* a. a. O. gegeben hat.

Voraussetzung der Methode ist, daß mindestens fünf zusammengehörige Positionswinkel und Distanzen gegeben seien. Fehlt es an guten Distanzen, was bei engen Doppelsternen vorkommen kann, so muß wenigstens eine derartig fortlaufende Reihe von Positionswinkeln P gegeben sein, daß man daraus für fünf Zeitepochen den Wert der Differenzialquotienten $\frac{dP}{dt}$ berechnen kann; ist dies möglich, so kann man nach dem Flächensatz $\varrho^2 \frac{dP}{dt} = \text{const.}$ die const. mittels *einer* guten Distanz berechnen und dann für die vier anderen Zeiten die zugehörigen ϱ durch Rechnung finden. Man kann die eine Distanz auch beliebig annehmen und erhält dann natürlich die Dimensionen der wahren Ellipse in diesem willkürlichen Maßstab ausgedrückt, sonst aber alles andere ebenso richtig, als ob die eine Distanz bekannt gewesen wäre. Man wird sogar meistens die Distanz anfänglich willkürlich lassen und erst zum Schluß aus allen guten Distanzmessungen die gewählte Einheit in Bogensekunden ermitteln.

Durch die fünf (ϱ, P) sind fünf Paar rechtwinklige Koordinaten x, y bestimmt, durch welche die Punkte der scheinbaren Ellipse ebenfalls bestimmt werden können. Konstruiert man nämlich ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Hauptstern liegt, dessen $+X$-Achse der nördliche Teil des Meridians ist und dessen $+Y$-Achse nach Osten gerichtet ist, so wird

$$x = \varrho \cos P, \qquad y = \varrho \sin P.$$

In diesen rechtwinkligen Koordinaten wird die Gleichung der scheinbaren Ellipse, allgemein angesetzt und mit Beachtung, daß der Hauptstern (Anfangspunkt) nicht im Brennpunkt liegt:

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0, \qquad 1)$$

worin $\beta, \gamma, \beta\gamma - \delta^2$ positiv sein müssen. Setzt man hier die fünf gegebenen Paare x, y ein, so hat man fünf lineare Gleichungen mit den fünf Unbekannten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, aus welchen diese bestimmt werden können. Man wird indessen niemals versäumen, etwa mehr vorhandene Daten mit zu benutzen und so viele lineare Gleichungen aufzustellen, als zusammengehörige x, y vorhanden sind. Man wird dann aus allen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der $\beta, \gamma, \ldots$ berechnen. Ist dies geschehen, so ist die *Gleichung der scheinbaren Bahn* bekannt. Aus dieser aber läßt sich Form und Lage der wahren Ellipse bestimmen, indem man einfach in Zeichen umsetzt, daß die scheinbare Ellipse die rechtwinklige Projektion der wahren und daß der Koordinatenanfangspunkt der Brennpunkt der wahren ist.

Die Gl. 1) stellt einen elliptischen Zylinder dar, dessen Achse — die Z-Achse — mit dem Visionsradius zusammenfällt. Wir transformieren sie auf ein anderes System, dessen x-Achse mit der Knotenlinie zusammenfällt und dessen y-Achse in der wahren Bahnebene liegt. Hierzu haben wir zuerst das bisherige System um die z-Achse um den Winkel Ω zu drehen; es wird dann

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\Omega - y' \sin\Omega \\ y &= x' \sin\Omega + y' \cos\Omega \\ z &= z' \end{aligned}$$

sodann ist das System $X'Y'Z$ um die Neigung i um die X'-Achse zu drehen; das gibt:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \\ y' &= y'' \cos i - z'' \sin i \\ z' &= y'' \sin i + z'' \cos i \end{aligned}$$

und daher wird:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i + z'' \sin \Omega \sin i \\ y &= x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i - z'' \cos \Omega \sin i \\ z &= \qquad\quad y'' \sin i \qquad\quad + z'' \cos i . \end{aligned}$$

Trägt man dies in 1) ein, so erhält man die Gleichung des Zylinders im X''-Y''-Z''-System; setzt man darin $z'' = 0$, so erhält man den Schnitt des Zylinders mit der Ebene $z'' = 0$, d. h. mit der wahren Bahnebene oder man erhält die *Gleichung der wahren Bahnellipse*, bezogen auf die $X''Y''$-Achsen. Diese wird also:

$$\begin{aligned} &\beta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)^2 + \gamma(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i)^2 + \\ &\qquad + 2\delta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) + \\ &+ 2\varepsilon(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) + 2\zeta(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) - 1 = 0. \end{aligned} \qquad 2)$$

Die Gleichung der wahren Bahnellipse kann aber auch auf einem anderen Wege aufgestellt werden. In bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der wahren Ellipse liegt und dessen Achsen mit der großen und kleinen Halbachse a und b zusammenfallen, wird sie

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 ;$$

führt man ein hierzu paralleles System $\xi'\eta'$ ein, dessen Anfangspunkt im Brennpunkt liegt, so wird

$$\xi = \xi' + ae , \qquad \eta = \eta'$$

und daher die Gleichung im letzten System:

$$\frac{(\xi' + ae)^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} = 1 .$$

Dreht man jetzt noch das $\xi'\eta'$-System um den Winkel ω, den die Apsidenlinie mit der Knotenlinie bildet — Abstand des Periastrons von Knoten —, so fällt es mit dem $x''y''$-System zusammen und es wird daher

$$\begin{aligned} \xi' &= \quad x'' \cos \omega + y'' \sin \omega \\ \eta' &= -x'' \sin \omega + y'' \cos \omega \end{aligned}$$

und die Gleichung der wahren Ellipse:

$$\frac{(x'' \cos \omega + y'' \sin \omega + ae)^2}{a^2} + \frac{(-x'' \sin \omega + y'' \cos \omega)}{b^2} = 1 . \qquad 3)$$

Die Gl. 2) und 3) sind die Gleichungen derselben Kurve bezogen auf dasselbe System; sie müssen also identisch sein, d. h. ihre Koeffizienten müssen bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ übereinstimmen. Dies führt auf folgende Beziehungen:

$$\beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + \delta \sin 2\Omega = \varkappa \left(\frac{\cos \omega^2}{a^2} + \frac{\sin \omega^2}{b^2} \right) \quad 4)$$

$$\cos i^2 (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - \delta \sin 2\Omega) = \varkappa \left(\frac{\sin \omega^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2} \right) \quad 5)$$

$$\cos i (-\beta \sin 2\Omega + \gamma \sin 2\Omega + 2\delta \cos 2\Omega) = \varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin 2\omega \quad 6)$$

$$\varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega = \varkappa \frac{ae \cos \omega}{a^2} \quad 7)$$

$$\cos i (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) = \varkappa \frac{ae \sin \omega}{a^2} \quad 8)$$

$$-1 = \varkappa (e^2 - 1), \quad 9)$$

deren Auflösung die fünf Elemente a, e, ω, Ω, i liefern muß. Aus 9) folgt

$$\varkappa = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

also

$$\varkappa \frac{e}{a} = \frac{e}{p} \qquad (p = \text{Parameter})$$

$$\varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \varkappa \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varkappa}{a^2} \right) = -\frac{e^2}{p^2}.$$

Damit werden 7) und 8)

$$\frac{e}{p} \cos \omega = \varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega \quad 7^a)$$

$$\frac{e}{p} \sin \omega = (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) \cos i, \quad 8^a)$$

deren doppeltes Produkt

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2\omega = \cos i (-\varepsilon^2 \sin 2\Omega + \zeta^2 \sin 2\Omega + 2\varepsilon\zeta \cos 2\Omega)$$

mit der so geschriebenen Gl. 6):

$$-\frac{e^2}{p^2} \sin 2\omega = \cos i (-\beta \sin 2\Omega + \gamma \sin 2\Omega + 2\delta \cos 2\Omega)$$

durch Addition vereinigt, auf

$$(-\varepsilon^2 - \beta) \sin 2\Omega + (\zeta^2 + \gamma) \sin 2\Omega + (2\varepsilon\zeta + 2\delta) \cos 2\Omega = 0$$

führt, woraus:

$$\operatorname{tg} 2\Omega = -\frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\zeta^2 + \gamma - \varepsilon^2 - \beta}. \quad 10)$$

Die Differenz der Gleichungen 4) und 5)

$$-\frac{e^2}{p^2} \cos 2\omega = \beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + \delta \sin 2\Omega - (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - \delta \sin 2\Omega) \cos i^2$$

hinzugefügt zur Gleichung

$$\frac{e^2}{p^2} \cos 2\omega = (\varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega)^2 - (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega)^2 \cos i^2,$$

welche die Differenz der Quadrate von $7^a)$ und $8^a)$ ist, führt auf:

$$\cos i^2 = \frac{(\beta + \varepsilon^2)\cos\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\sin\Omega^2 + (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega}{(\beta + \varepsilon^2)\sin\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\cos\Omega^2 - (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega}. \qquad 11)$$

Von den *vier* Werten von Ω, welche 10) gibt, werden zwei dadurch ausgeschieden, daß die rechte Seite von 11) kleiner als 1 herauskommen muß. Es bleibt also, wie es sein muß, nur eine zweifache Lösung übrig.

Die rechte Seite der Gl. 5) kann so geschrieben werden:

$$\varkappa\left(\frac{\sin\omega^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2}\right) = \frac{\varkappa}{b^2} + \varkappa\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin\omega^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2}\sin\omega^2,$$

man hat also:

$$\frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2}\sin\omega^2 = (\beta\sin\Omega^2 + \gamma\cos\Omega^2 - \delta\sin 2\Omega)\cos i^2.$$

Wird hiezu das Quadrat von $8^a)$ addiert, so kommt:

$$\frac{1}{p^2} = ((\beta + \varepsilon^2)\sin\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\cos\Omega^2 - (\delta + \zeta\varepsilon)\sin 2\Omega))\cos i^2$$

oder nach Eintragung von 11)

$$\frac{1}{p^2} = (\beta + \varepsilon^2)\cos\Omega^2 + (\gamma + \zeta^2)\sin\Omega^2 + (\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega. \qquad 12)$$

Diese Gleichung gibt den Parameter p, worauf die in der Form

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= \quad p(\varepsilon\cos\Omega + \zeta\sin\Omega) \\ e\sin\omega &= -p(\varepsilon\sin\Omega - \zeta\cos\Omega)\cos i \end{aligned} \qquad 13)$$

geschriebenen Gleichungen $7^a)$ und $8^a)$ die Elemente e und ω liefern.

Man kann leicht ein Kriterium aufstellen, wodurch die aus 10) sich ergebenden unzulässigen Werte von Ω von vorneherein ausgeschieden werden können. Es muß nämlich der Zähler von 11), welcher identisch ist mit der rechten Seite von 12), notwendig positiv sein; also muß auch der Nenner positiv sein und überdies größer als der Zähler; dies giebt die Bedingung

$$(\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \zeta^2)\cos 2\Omega + 2(\delta + \varepsilon\zeta)\sin 2\Omega < 0,$$

die sich, da nach 10)

$$(\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \zeta^2) = \frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\operatorname{tg} 2\Omega}$$

ist, sofort so schreiben läßt:

$$\frac{2(\varepsilon\zeta + \delta)}{\sin 2\Omega} < 0;$$

$\sin 2\Omega$ *muß also das Zeichen von* $-(\delta + \varepsilon\zeta)$ *haben.*

Man kann die abgeleiteten Formeln, die zur Ermittelung der fünf Elemente a, e, i, Ω, ω dienen, durch Einführung einiger Hilfsgrößen in bequemere Form bringen. Setzt man

$$\begin{aligned} \gamma + \zeta^2 &= \mu \\ \beta + \varepsilon^2 &= \nu \\ \delta + \zeta\varepsilon &= \lambda \end{aligned}$$

dann wird aus 10)

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{-2\lambda}{\mu - \nu}$$

($\sin 2\Omega$ hat das Zeichen von -2λ)

und aus 12)

$$\frac{1}{p^2} = \nu \cos\Omega^2 + \mu \sin\Omega^2 + \lambda \sin 2\Omega = A$$

oder

$$\frac{1}{p^2} = \tfrac{1}{2}(\nu + \mu) + \tfrac{1}{2}(\nu - \mu)\cos 2\Omega + \lambda \sin 2\Omega = A$$

und endlich aus 11)

$$\cos i^2 = \frac{\nu \cos\Omega^2 + \mu \sin\Omega^2 + \lambda \sin 2\Omega}{\nu \sin\Omega^2 + \mu \cos\Omega^2 - \lambda \sin 2\Omega} = \frac{A}{B}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} i^2 = \frac{1 - \cos i^2}{\cos i^2} = \frac{B - A}{A} = \frac{A + B}{A} - 2$$

also, da $A + B = \mu + \nu$ und $\frac{1}{A} = p^2$,

$$\operatorname{tg} i^2 = (\mu + \nu)p^2 - 2.$$

Die mittlere jährliche Bewegung und die Durchgangszeit durchs Periastron rechnet man hier ebenso wie in Nr. 194.

196. Zusammenstellung der Formeln für Berechnung einer Doppelsternbahn.

I. Für jede Beobachtung P, ϱ rechne man

$$x = \varrho \cos P, \qquad y = \varrho \sin P$$
$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0$$

und löse das System linearer Gleichungen mit den Unbekannten β, γ, δ, ε, ζ nach einem geeigneten Ausgleichungsverfahren auf.

II.
$$\mu = \gamma + \zeta^2$$
$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$
$$\lambda = \delta + \zeta\varepsilon.$$

III.
$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{-2\lambda}{\mu - \nu} \qquad (\sin 2\Omega \text{ hat das Zeichen von } -2\lambda)$$
$$\frac{1}{p^2} = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu) + \tfrac{1}{2}(\nu - \mu)\cos 2\Omega + \lambda \sin 2\Omega$$
$$\operatorname{tg} i^2 = (\mu + \nu)p^2 - 2.$$

IV.
$$e \sin\omega = p(-\varepsilon \sin\Omega + \zeta \cos\Omega)\cos i$$
$$e \cos\omega = p(\quad \varepsilon \cos\Omega + \zeta \sin\Omega)$$
$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

V. Für jede Beobachtung rechne man:

$$\operatorname{tg}(v+\omega) = \frac{\operatorname{tg}(P-\Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{2\pi}{U}(t-\mathrm{T}) = E - e\sin E$$

und bestimme aus dem ganzen System der letzten Gleichung die Elemente U und T.

197. Die Differenzialformeln der Bahnverbesserung. Hat man nach einer der im vorigen beschriebenen Methoden die Bahnelemente eines Doppelsternes aufgestellt, so wird man in der Regel nur dann Veranlassung zu einer Verbesserung derselben nehmen, wenn man Elemente wünscht, die den strengen Anforderungen einer Ausgleichung genügen. Für diese gegenwärtig noch seltenen Fälle wollen wir die Beziehungen zwischen den Differenzialen der beobachteten Koordinaten P und ϱ und den Differenzialen der Elemente aufstellen; betreff der Anwendung dieser Gleichungen können wir auf die allgemeinen Ausführungen in Nr. 140 verweisen.

Differenziert man die erste der Gleichungen 19) (Seite 622)

$$\operatorname{tg}(P-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega+v)$$
$$\varrho = r\cos(\omega+v)\sec(P-\Omega)$$

total, so kommt:

$$\frac{dP}{\cos(P-\Omega)^2} - \frac{d\Omega}{\cos(P-\Omega)^2} = -\sin i \operatorname{tg}(\omega+v)\, di + \frac{\cos i}{\cos(\omega+v)^2}d\omega + \frac{\cos i}{\cos(\omega+v)^2}dv$$

oder nach der zweiten:

$$dP = d\Omega - \frac{r}{\varrho}\sin i \sin(\omega+v)\cos(P-\Omega)\,di + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \cos i\, d\omega + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \cos i\, dv.$$

Wird hier (Gl. 15, Seite 440)

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\varphi\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) + \frac{a}{r}\cos\varphi\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)d\varphi$$

eingetragen, so erscheint schließlich:

$$\begin{aligned} dP = {} & d\Omega - \frac{r}{\varrho}\sin i\sin(\omega+v)\cos(P-\Omega)\,di + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\cos i\, d\omega \\ & + \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos i\cos\varphi\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) + \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sin E\cos i\left(\frac{r}{a}+\cos\varphi^2\right)d\varphi. \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Schreibt man die zweite der obigen Gleichungen unter Benutzung der ersten in der Form:

$$\varrho^2 = r^2\left(\cos(\omega+v)^2 + \cos i^2 \sin(\omega+v)^2\right)$$

und differenziert total, so kommt mit Beachtung von (Gl. 16 Seite 440)

$$dr = \frac{r}{a}\,da + a\operatorname{tg}\varphi\sin v\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\, d\mathrm{T}) - a\cos\varphi\cos v\, d\varphi$$

nach leichter Reduktion:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} - \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\cdot d\omega - \sin(P-\Omega)^2\,\mathrm{tg}\,i\cdot di$$
$$+\left(\frac{a}{r}\right)^2(e\sin E - \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\cos\varphi)\,((t-\mathrm{T})\,d\mu - \mu\,d\mathrm{T}) \qquad \text{II.}$$
$$-\left(\frac{a}{r}\right)^2\left((\cos E - e)\cos\varphi + \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega)\sin i\,\mathrm{tg}\,i\sin E\left(\frac{r}{a}+\cos\varphi^2\right)\right)d\varphi.$$

Die Gleichungen I. und II. geben die Bedingungsgleichungen zur Verbesserung der Elemente.

198. Veränderliche Eigenbewegung. Man hat einige Sterne kennen gelernt, die einfach erscheinen, aber doch eine periodische Bewegung wahrnehmen lassen, indem ihre Eigenbewegung nicht rein proportional der Zeit fortschreitet, sondern ein periodisches Auf- und Abschwanken zeigt (*Veränderliche Eigenbewegung*). Zur Erklärung dieser Erscheinung hat *Bessel* die Hypothese herangezogen, daß sich in der Nähe dieser Sterne *dunkle* Begleiter befinden, dieselben also Doppelsternsysteme bilden, von denen nur die eine Komponente sichtbar ist. Diese Hypothese hat dadurch, daß bei einem dieser Sterne der Begleiter nachträglich aufgefunden wurde, sehr an Wahrscheinlichkeit gewonnen und es läßt sich auch kaum eine andere aufstellen. In der Verfolgung dieser Hypothese entsteht nun das Problem: *Man soll aus den absoluten Koordinaten eines Sternes mit veränderlicher Eigenbewegung die Bahn ableiten, die er um den Schwerpunkt des aus ihm selbst und einem dunklen Begleiter bestehenden Systems beschreibt.*

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem größten Kreise. Sind A_0 und D_0 seine Koordinaten zur Zeit t_0, μ und μ' die jährlichen Eigenbewegungen in diesen Koordinaten, so werden die Koordinaten des Schwerpunktes für die Zeit t:

$$A_0 + (t-t_0)\,\mu$$
$$D_0 + (t-t_0)\,\mu'.$$

Nennt man ferner ξ, η die rechtwinkligen *relativen* Koordinaten des sichtbaren Sternes in Bezug auf den Schwerpunkt, so werden die absoluten Koordinaten A und D des sichtbaren Sternes folgende Werte annehmen:

$$A = A_0 + (t-t_0)\,\mu + \eta\sec D_0$$
$$D = D_0 + (t-t_0)\,\mu' + \xi.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_0 + (t-t_0)\mu = a, \qquad D_0 + (t-t_0)\,\mu = d$$

so folgt daraus:

$$(A-a)\cos D_0 = \eta$$
$$(D-d) \qquad\quad = \xi.$$

Die A, D liegen für eine Reihe von Zeitepochen als beobachtete Größen vor, die a, d enthalten vier Unbekannte A_0, D_0, μ, μ', doch ist es leicht für sie aus langjährigen Beobachtungsreihen gute Näherungswerte aufzustellen, die eventuell durch Wiederholung des Verfahrens verbessert werden. Die ξ, η sind also für eine Reihe

von Epochen bekannt. Da sie nun der Gleichung der scheinbaren Ellipse genügen müssen, die der sichtbare Stern um den Schwerpunkt beschreibt, so hat man den Ansatz

$$\beta\xi^2 + \gamma\eta^2 + 2\delta\xi\eta + 2\varepsilon\xi + 2\zeta\eta - 1 = 0$$

und erhält, wenn er für jede Beobachtung aufgestellt wird, eine Reihe linearer Gleichungen mit den Unbekannten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Sind diese ermittelt, so ergeben sich daraus die Elemente a, e, i, Ω, ω der wahren Ellipse nach dem in Nr. 195 entwickelten Algorithmus. Für die Umlaufszeit hat man in der Periode der Differenzen $A - a$ und $D - d$ von vorneherein einen genügenden Näherungswert, doch kann man sie auch direkt zugleich mit der Durchgangszeit durchs Perihel ableiten. Aus den Formeln 19[a]) (Seite 622) folgt wegen

$$\varrho\cos P = \xi, \qquad \varrho\sin P = \eta:$$
$$r\sin(\omega + v) = (\eta\cos\Omega - \xi\sin\Omega)\sec i$$
$$r\cos(\omega + v) = \eta\sin\Omega + \xi\cos\Omega;$$

wird hieraus für jedes beobachtete $\xi\eta$ v berechnet, so hat man weiter

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

und schließlich eine Reihe von Bedingungsbegleichungen:

$$\frac{2\pi}{U}(t - \mathrm{T}) = E - e\sin E,$$

aus denen die Unbekannten $\frac{2\pi}{U}$ und $\frac{2\pi}{U}\mathrm{T}$ durch Ausgleichung zu ermitteln sind.

Auf diese Weise erhält man die Bahn, welche der sichtbare Stern um den Schwerpunkt des Systems beschreibt. Wünscht man eine Ephemeride des sichtbaren Sternes, so wird man folgende Formeln zur Verfügung haben, die sich leicht aus obigen ergeben:

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{U}(t - \mathrm{T})$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$
$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$\xi = r(\cos(\omega + v)\cos\Omega - \sin(\omega + v)\sin\Omega\cos i)$$
$$\eta = r(\cos(\omega + v)\sin\Omega + \sin(\omega + v)\cos\Omega\cos i)$$
$$A = A_0 + \mu(t - t_0) + \eta\sec D_0$$
$$D = D_0 + \mu'(t - t_0) + \xi$$

oder auch nach Berechnung von v und r:

$$\operatorname{tg}(P - \Omega) = \cos i\operatorname{tg}(\omega + v)$$
$$\varrho = r\frac{\cos(\omega + v)}{\cos(P - \Omega)}$$
$$\xi = \varrho\cos P$$
$$\eta = \varrho\sin P \quad \text{usf.}$$

Ist der Begleiter auch optisch sichtbar, so kann seine Bahn um den Hauptstern angegeben werden, sobald *eine* Messung seiner Distanz vom Hauptstern gelungen ist. Denn ist ϱ die aus der Bahn um den Schwerpunkt sich ergebende Distanz des Hauptsternes vom Schwerpunkt, ϱ' die Distanz des Begleiters vom Hauptstern, m die Masse des Hauptsternes, m' die des Begleiters, so hat man nach der Definition des Schwerpunktes

$$m\varrho = m'(\varrho' - \varrho),$$

woraus das *Verhältnis der Massen* bekannt wird:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}.$$

Nennt man a' die große Halbachse der Bahn, welche der Begleiter um den Hauptstern beschreibt, so ist auch

$$\frac{a' - a}{a} = \frac{m}{m'}$$

woraus:

$$a' = a\left(1 + \frac{m}{m'}\right).$$

Die übrigen Elemente sind beiden Ellipsen gemeinsam (Nr. 190).

Ist die Parallaxe p'' des Systems bekannt, so läßt sich auch die *Summe der Massen* berechnen, ausgedrückt in Einheiten der Sonnenmasse; denn man hat nach 14) (Seite 619)

$$m + m' = \left(\frac{(a')''}{p''}\right)^3 \frac{1}{U^2}.$$

In diesem allerdings seltenen Falle werden also die Massen der Komponenten selbst berechenbar.

199. Bahnbestimmung aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius. Spektroskopische Beobachtungen der Linienverschiebung unter Anwendung des Dopplerschen Prinzips führen zur Kenntnis der linearen Geschwindigkeiten im Visionsradius, ausgedrückt in einem absoluten Maß, z. B. in Kilometern pro Sekunde. Es sind dies relative Geschwindigkeiten zur Erde, die aber leicht nach Abzug der Geschwindigkeit der Erde, gemessen in derselben Richtung, in Geschwindigkeiten der Gestirne relativ zur Sonne verwandelt werden können. Wir wollen, wie üblich, die Geschwindigkeit, welche den Körper von der Erde bez. Sonne wegführt, als positiv bezeichnen. Nennt man für die Beobachtungszeit $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ die Komponenten der Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, bezogen auf die rechtwinkligen Achsen des Äquatorealsystems (also Größen, die den Jahrbuchangaben unmittelbar entnommen werden können, wenn man den Tag und die astronomische Einheit als Einheiten einführt), so wird die Geschwindigkeit der Erde in der Achse des Visionsradius, die durch die Koordinaten α, δ des Gestirnes gegeben ist:

$$-(X'\cos\delta\cos\alpha + Y'\cos\delta\sin\alpha + Z'\sin\delta)\,\tfrac{149480976}{86400}$$ Kilometer pro Sekunde

und die Korrektion der gemessenen Geschwindigkeit, um sie auf die Sonne zu beziehen, wird also:

$+ [3.238072] (X' \cos\delta \cos\alpha + Y' \cos\delta \sin\alpha + Z' \sin\delta)$ Kilometer pro Sekunde (X', Y', Z' = Geschwindigkeiten der äquatorealen geozentrischen Sonnenkoordinaten für 1 Tag in astronomischen Einheiten).

Bei einer ganzen Reihe von Sternen, deren immer noch weitere bekannt werden, zeigen nun die Geschwindigkeiten im Visionsradius, bezogen auf die Sonne, ein periodisches Auf- und Abschwanken, das kaum anders zu erklären ist, als durch die Annahme, daß das Gestirn aus zwei sehr nahen Komponenten besteht, die sich umeinander und um ihren Schwerpunkt bewegen. Es entsteht dann die Aufgabe, aus den beobachteten Geschwindigkeiten soweit möglich die Bahnelemente dieses »spektroskopischen Doppelsternes« zu ermitteln.

Man muß zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die beobachtete Linienverschiebung als von *einer* Komponente oder von beiden herrührend anzunehmen ist. Im ersteren Fall, wo also die zweite Komponente als dunkel oder von verschwindender Lichtstärke angenommen wird, setzt sich die beobachtete Geschwindigkeit aus derjenigen des Schwerpunktes und aus der der ersten Komponente um den Schwerpunkt zusammen; im zweiten Fall stellt sie die relative Geschwindigkeit der beiden Körper dar. Man bekommt also im ersten Fall, nach Abzug der konstanten Geschwindigkeit des Schwerpunktes, die Bahn der hellen Komponente um diesen, im zweiten Fall die Bahn der Komponenten umeinander.

Bezogen auf ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sonne und der x-Achse zusammenfallend mit dem Visionsradius seien ζ und ζ' die in dieser Achse gemessenen Koordinaten der beiden Massen m und m', Z die Koordinate ihres Schwerpunktes; dann folgt aus

$$(m + m')\, Z = m\zeta + m'\zeta'$$

leicht:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{m'}{m + m'} \frac{d(\zeta - \zeta')}{dt}$$

oder wenn $\zeta - \zeta' = x$ gesetzt wird:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{m'}{m + m'} \frac{dx}{dt}. \qquad 1)$$

Im ersten Fall wird $\frac{d\zeta}{dt}$ beobachtet, das sich hiernach zusammensetzt aus der konstanten Geschwindigkeit des Schwerpunktes und aus der rein periodischen des Körpers m um den Schwerpunkt; im zweiten Fall wird nur das rein periodische $\frac{dx}{dt}$ beobachtet, welches die Geschwindigkeit von m in bezug auf m' darstellt, und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bleibt hier demnach unbekannt.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die beiden Fälle ganz gleichartig behandelt werden können. Legt man im ersten die $\xi\eta$-Ebene eines Systems durch den Schwerpunkt senkrecht zum Visionsradius, die ξ-Achse durch den aufsteigenden Knoten der Bahn auf dieser Ebene, zählt von der ξ-Achse aus die Längen in der Bewegungsrichtung auf die $+\eta$-Achse zu, nimmt endlich die $+\zeta$-Achse in der Fortsetzung des Visionsradius über das Gestirn hinaus, so hat man nach Nr. 110 Gl. (a) und (b)

$$\zeta = r \sin(\omega + v) \sin i$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{f}{\sqrt{a_1 (1 - e^2)}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega) \sin i,$$

wenn mit f die für die Bewegung um den Schwerpunkt maßgebende Attraktionskonstante bezeichnet wird; diese ist aber nach Gl. 3a) (Seite 616)

$$f = k \frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m + m'} \qquad \begin{matrix} (k = \text{Gaußsche Konstante; } m, m' \\ \text{in Teilen der Sonnenmasse}) \end{matrix}$$

und man hat ferner (U = Umlaufszeit, μ = mittlere tägliche Bewegung)

$$\frac{2\pi}{U} a_1^{\frac{3}{2}} = \mu a_1^{\frac{3}{2}} = k \frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m + m'},$$

so daß nun mit Beachtung von $\zeta = \xi - Z$ nach 1) geschrieben werden kann:

$$\frac{m'}{m + m'} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\mu a_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega). \qquad 2)$$

Das Integral hierüber zwischen den Grenzen t und $t + U$ ist Null, da die $\frac{dx}{dt}$ rein periodisch verlaufen; also gibt 1), da $\frac{dZ}{dt}$ eine Konstante ist:

$$U \frac{dZ}{dt} = \int_t^{t+U} \frac{d\xi}{dt} dt. \qquad 2a)$$

Bestimmt man hieraus durch mechanische Integration oder graphisch (mit Planimeter oder Millimeterpapier) $\frac{dZ}{dt}$ und bringt es von allen beobachteten $\frac{d\xi}{dt}$ in Abzug, so erhält man die $\frac{d\zeta}{dt}$, aus denen mittels 2) die Bahn zu ermitteln ist, wie nachher zu zeigen sein wird.

Im zweiten Fall legen wir das Achsensystem xyz durch den Körper m' parallel zum vorigen; dann wird, da die Bewegung von m um m' in einer ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipse erfolgt, wie die von m um den Schwerpunkt, ebenso wie vorhin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f}{\sqrt{a(1 - e^2)}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega) \sin i,$$

wo aber jetzt nach Gl. 5) (Seite 616)

$$f = k\sqrt{m + m'}$$

und

$$\frac{2\pi}{U} a^{\frac{3}{2}} = \mu a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{m + m'}$$

zu setzen ist; es wird also:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\omega + v) + e \cos\omega). \qquad 3)$$

Da nach Seite 616

$$a_1 = \frac{m'}{m + m'} a,$$

so ist 3) identisch mit 2) und der Zusammenhang der Elemente mit den Größen $\frac{d\eta}{dt}$ bez. $\frac{dx}{dt}$ ist derselbe.

Wenn wir demgemäß jetzt die Gl. 3) allein weiter behandeln, so ist in erster Linie zu konstatieren, daß dieselbe das Element Ω nicht enthält, daß dasselbe also notwendig unbestimmt bleibt; ferner daß a und i sich nicht trennen lassen, daß also nur die Kombination $a \sin i$ bestimmt werden kann; endlich daß man hier ebenso wie bei den visuellen Doppelsternen die Umlaufszeit bez. μ direkt aus den Beobachtungen ableitet, was hier, wo in der Regel viele Umläufe zur Verfügung stehen, keinerlei Schwierigkeit macht. Es bleiben somit nur die Elemente

$$a \sin i,\ e,\ \omega,\ T \text{ (Durchgangszeit durchs Periastron)}$$

zu bestimmen, was nach der von *Lehmann-Filhés* ausgearbeiteten Methode (Astr. Nachr. Bd. 136, S. 17) in folgender Weise geleistet wird.

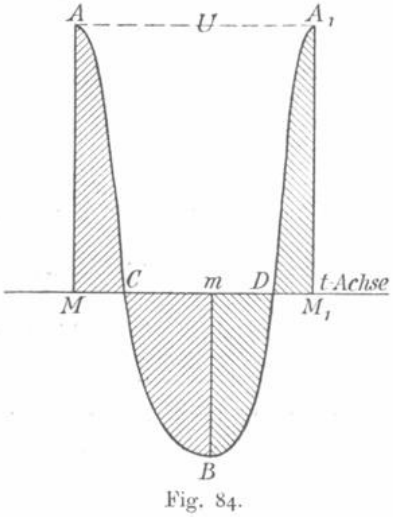


Fig. 84.

Bei der Unsicherheit der Beobachtungen wäre es müßige Arbeit, wollte man die Elemente aus vier Beobachtungen ableiten; man wird vielmehr unter Zuziehung sämtlicher Beobachtungen ein graphisches Verfahren einschlagen, indem man zunächst zu den Abszissen der Zeit als Ordinaten die $\frac{dx}{dt}$ aufträgt, nachdem man sie sämtlich mittels der bekannten Umlaufszeit auf einen Umlauf reduziert hat. Man erhält dann eine Kurve von der nebenstehenden Form (Fig. 84), deren Eigenschaften leicht zu diskutieren sind. Nach 3) hat die Kurve ein Maximum für $\omega + v = 0°$ (Punkt A) und ein Minimum für $\omega + v = 180°$ (Punkt B); die Punkte A und B zeigen also die Geschwindigkeiten beim Durchgang durch den aufsteigenden bez. absteigenden Knoten an. Die Kurvenzweige AB und BA_1 schneiden die Abszissenachse in den Punkten C und D, welche die Zeiten anzeigen, wo die Geschwindigkeiten Null sind oder wo der Körper sich parallel zur Knotenlinie bewegt. Die zu diesen Punkten gehörigen $\omega + v$ ergeben sich nach 3) aus

$$\begin{aligned} \cos(\omega + v_1) &= -e\cos\omega \\ \cos(\omega + v_2) &= -e\cos\omega \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} \cos(\omega + v_2) &= \cos(\omega + v_1) \\ \sin(\omega + v_2) &= -\sin(\omega + v_1) \end{aligned} \qquad 4)$$

wird. C liegt auf dem Wege vom aufsteigenden zum absteigenden, D auf dem Wege

vom absteigenden zum aufsteigenden Knoten, bei $\omega + v_1$ ist also der $\sin(\omega + v)$ positiv, bei $\omega + v_2$ aber negativ. Nennt man die

den Punkten	A	C	B	D	A_1
entsprechenden Zeiten	t_M	t_1	t_m	t_2	$t_M + U_2$

so werden die z-Koordinaten der beiden den Punkten C und D entsprechenden Punkte der Bahn:

$$z_1 = +\int_{t_M}^{t_1} \frac{dz}{dt}\,dt = -\int_{t_1}^{t_m} \frac{dz}{dt}\,dt = r_1 \sin(\omega + v_1)\sin i$$
$$z_2 = +\int_{t_m}^{t_2} \frac{dz}{dt}\,dt = -\int_{t_2}^{t_M+U} \frac{dz}{dt}\,dt = r_2 \sin(\omega + v_2)\sin i. \qquad 5)$$

Die Werte dieser Integrale kann man der Zeichnung entnehmen entweder mittels des Planimeters oder, wenn man Millimeterpapier benutzt hat, durch Abzählung der kleinen Quadrate; die Einheit, in der sie ausgedrückt werden, ist nicht von Belang, da im weiteren nur das Verhältnis $z_1 : z_2$ vorkommt; z_1 ist notwendig positiv, z_2 negativ. Die Größen z_1 und z_2 sind also bekannt; nimmt man dazu die Ordinaten der Punkte A und B, die wir in Kilometern ausgedrückt mit A und $-B$ bezeichnen wollen und die gleichfalls der Zeichnung entnommen werden können, so hat man alle Mittel, um die bestimmbaren Elemente zu berechnen. Die Gleichungen hierfür lassen sich unmittelbar hinschreiben. In der Tat folgt aus 3):

$$A = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e\cos\omega)$$
$$B = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}(1 - e\cos\omega);$$

also

$$\frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = \tfrac{1}{2}(A+B) \qquad 6)$$

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B} \qquad 7)$$

und allgemein

$$\frac{dz}{dt} = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos(\omega+v) + \tfrac{1}{2}(A-B). \qquad 8)$$

Diese letzte Gleichung empfiehlt sich zur Ephemeridenrechnung. Weiter gibt 5) mit Beachtung von 4):

$$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1+e\cos v_2}{1+e\cos v_1} = \frac{1+e\cos(\omega+v_2)\cos\omega + e\sin(\omega+v_2)\sin\omega}{1+e\cos(\omega+v_1)\cos\omega + e\sin(\omega+v_1)\sin\omega}$$
$$= \frac{\sin(\omega+v_1)^2 - e\sin(\omega+v_1)\sin\omega}{\sin(\omega+v_1)^2 + e\sin(\omega+v_1)\sin\omega} = \frac{\sin(\omega+v_1) - e\sin\omega}{\sin(\omega+v_1) + e\sin\omega}$$

woraus:

$$e\sin\omega = \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}\sin(\omega+v_1).$$

Nun folgt aus 8), da für $\omega + v = \omega + v_1$ $\dfrac{dz}{dt} = 0$ ist:

$$\cos(\omega + v_1) = -\frac{A-B}{A+B}$$

und daher

$$\sin(\omega + v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}.$$

Somit wird schließlich

$$e\sin\omega = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\,\frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}. \qquad 9)$$

Aus den Gl. 7) und 9) kann e und ω berechnet werden, worauf die Gl. 6) $a\sin i$ ergibt und die Durchgangszeit durchs Periastron T folgendermaßen gefunden wird. Da für sie $v = 0$ ist, so wird das zu T gehörige $\dfrac{dz}{dt}$ nach 3) und 6)

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_T = \tfrac{1}{2}(A+B)(1+e)\cos\omega$$

oder nach 8)

$$= \tfrac{1}{2}(A+B)\cos\omega + \tfrac{1}{2}(A-B). \qquad 10)$$

Zu dem hieraus folgenden Wert von $\dfrac{dz}{dt}$ sucht man in der Zeichnung die Abszisse, welche T sein wird. Auf welchem der Kurvenzweige AB oder BA_1 der Punkt, welcher dem Periastron entspricht, anzunehmen ist, kann leicht dadurch entschieden werden, daß in den Punkten

	A	B	A_1
$\omega + v =$	0°	180°	360°

ist; da man ω kennt, sieht man sofort, wo $v = 0$ wird. Dieses Verfahren wird ungenau, wenn das Periastron in der Nähe eines der Maximalpunkte A, B, A_1 der Kurve liegt. Man geht dann besser von den Zeiten t_1 bzw. t_2 aus, für welche $\dfrac{dz}{dt} = 0$ wird und für welche man die wahre Anomalie auch kennt; diese wird nämlich

$$\text{für } t_1 \text{ aus: } \sin(\omega + v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}, \quad \cos(\omega + v_1) = -\frac{A-B}{A+B}$$

$$\text{und für } t_2 \text{ aus: } \sin(\omega + v_2) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}, \quad \cos(\omega + v_2) = -\frac{A-B}{A+B}$$

gefunden, worauf zu rechnen ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$t_1 - T = \frac{E_1 - e\sin E_1}{\mu} \qquad t_2 - T = \frac{E_2 - e\sin E_2}{\mu}.$$

Zusammenstellung der Formeln.

$$\mu = \frac{2\pi}{U} \qquad (U \text{ in Tagen})$$

$$\left.\begin{aligned} e\sin\omega &= \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\,\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} \\ e\cos\omega &= \frac{A-B}{A+B} \end{aligned}\right\} \quad A,\ B \text{ in Kilometern pro Sekunde}$$

$$a\sin i = \tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu}\,86400$$

$$\sin(\omega+v_1) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \qquad \sin(\omega+v_2) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

$$\cos(\omega+v_1) = -\frac{A-B}{A+B} \qquad \cos(\omega+v_2) = -\frac{A-B}{A+B}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1 \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_2$$

$$T = t_1 - \frac{E_1 - e\sin E_1}{\mu} \qquad T = t_2 - \frac{E_2 - e\sin E_2}{\mu}$$

(E_1, E_2 in Teilen des Radius).

Statt die letzten Formeln anzuwenden, kann man in geeigneten Fällen auch die Abszisse aufsuchen, die zur Ordinate

$$\tfrac{1}{2}(A+B)(1+e)\cos\omega = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos\omega + \tfrac{1}{2}(A-B)$$

gehört; diese gibt ebenfalls T.

Eine andere Methode der Elementenbestimmung hat *Schwarzschild* angegeben (Astr. Nachr. Bd. 152, S. 65). Das Periastron und das Apastron liegen um die halbe Umlaufszeit auseinander; ferner ist nach 8)

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{dz}{dt} - \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)\cos(\omega+v);$$

d. h. verschiebt man in der Zeichnung Fig. 84 die Abszissenachse um den Betrag $\frac{1}{2}(A-B)$ nach oben, so werden die entstehenden Ordinaten $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ rein periodisch und haben die Eigenschaft, daß sie im Periastron den entgegengesetzt gleichen Wert haben wie im Apastron. Sucht man also im neuen Koordinatensystem diejenigen Punkte der Kurve auf, welche gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten haben und deren Abszissen um $\frac{1}{2}U$ verschieden sind, so sind dies die dem Periastron und Apastron entsprechenden Punkte. Man braucht zur praktischen Ausführung die Kurve nur ein zweites Mal auf Pauspapier zu zeichnen, um die neue Abszissenachse umzuklappen und um $\frac{1}{2}U$ zu verschieben. Die zum Periastron gehörige Abszisse gibt T, die Ordinate ist $\frac{1}{2}(A+B)\cos\omega$, so daß ω ebenfalls bekannt wird. Hierauf geben die Gl. 6) und 7), nämlich

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B} \quad \text{und} \quad a\sin i = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu}(A+B)$$

die Elemente e und $a\sin i$.

Die mechanische Quadratur kommt bei dieser Methode nur gelegentlich der Bestimmung von $\frac{dZ}{dt}$ nach 2[a]) (Seite 643) zur Anwendung, wenn es sich um eine Bewegung um den Schwerpunkt handelt. Sie läßt sich auch hier vermeiden, doch wird dann die Bestimmung der Exzentrizität komplizierter. Es muß in dieser Hinsicht auf die zitierte Abhandlung verwiesen werden, welche auch das erforderliche tabellarische Hilfsmittel enthält.

Zwischen den Massen des Systems und den Bahnelementen bestehen Beziehungen, die sich leicht aufstellen lassen. Bei einer Bahn des sichtbaren Körpers m um den Schwerpunkt von m und m' hat man nach Seite 643

$$\frac{2\pi}{U}\, a_1^{\frac{3}{2}} = k\,\frac{m'^{\frac{3}{2}}}{m+m'};$$

also wenn nach Seite 645

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{\sqrt{1-e^2}\;U}{2\pi}\,\frac{1}{\sin i}$$

eingetragen wird:

$$\sin i^3\,\frac{m'^3}{(m+m')^2} = \frac{U}{2\pi k^2}\left(\tfrac{1}{2}(A+B)\right)^3\left(\sqrt{1-e^2}\right)^3.$$

Bei einer Bahn der einen Komponente um die andere wird nach Seite 643

$$\frac{2\pi}{U}\, a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{m+m'},$$

also ebenso:

$$\sin i^3\,(m+m') = \frac{U}{2\pi k^2}\left(\tfrac{1}{2}(A+B)\right)^3\left(\sqrt{1-e^2}\right)^3.$$

Bei einer Anwendung dieser Formeln, die allerdings wegen der Unkenntnis von i immer problematisch bleibt, ist zu beachten, daß falls für k die ungeänderte Gaußsche Konstante benutzt wird, U in Tagen und die Geschwindigkeiten A und B in astronomischen Einheiten und für einen Tag als Zeiteinheit auszudrücken sind.

Formel für die Bahnverbesserung. Hat man sehr viele Beobachtungen zur Verfügung und diese in eine beschränkte Zahl von Normalwerten zusammengefaßt, so kann es sich empfehlen, das graphische Verfahren zu verlassen und eine Verbesserung der vorhandenen Bahn durch Rechnung anzustreben. Die hierzu nötige Beziehung zwischen dem Differenzial von $\frac{dz}{dt}$ und den Differenzialen der Elemente erhält man leicht durch Differenziation der Gleichung 3) Seite 643, welche, wenn

$$\frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = K$$

gesetzt wird, sofort ergibt:

$$d\,\frac{dz}{dt} = (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\,dK + K\cos\omega\cdot de - K(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\,d\omega - K\sin(\omega+v)\,dv.$$

Wird hier der bekannte Wert von dv eingetragen, so folgt nach leichter Reduktion:

$$d\frac{dz}{dt} = (\cos(\omega+v)+e\cos\omega)\,dK + K\left(\cos\omega - \frac{\sin(\omega+v)\sin v}{1-e^2}(2+e\cos v)\right)de$$
$$- K(\sin(\omega+v)+e\sin\omega)\,d\omega + K\frac{\sin(\omega+v)(1+e\cos v)}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\mu\,dT-(t-T)\,d\mu).$$

Nachdem mittels der hiernach aufgestellten Bedingungsgleichungen dK, de, $d\omega$, $d\mu$, dT erhalten und dann die verbesserten Werte K, e, ... aufgestellt sind, folgt der verbesserte Wert von $a\sin i$ aus

$$a\sin i = \frac{\sqrt{1-e^2}\,K}{\mu}.$$

Kann eine Doppelsternbahn sowohl aus visuellen als aus spektroskopischen Beobachtungen abgeleitet werden, so ergeben sich hieraus wichtige Folgerungen. Zunächst kann durch das Zeichen von $\frac{dz}{dt}$ im Knoten die Zweideutigkeit in der Bestimmung des Knotens oder der Neigung (Seite 621) gehoben werden. Sodann erhält man zwei Werte für die große Halbachse, den einen in Sekunden a'' aus der visuellen Bahn, den andern in astronomischen Einheiten oder Kilometern a aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius. Daraus ergibt sich erstens die Parallaxe p'' durch

$$p'' = \frac{a''}{a},$$

wenn a in astronomischen Einheiten ausgedrückt ist, und zweitens die Summe der beiden Massen, ausgedrückt in Einheiten der Sonnenmasse durch (Seite 618)

$$m+m' = \frac{a^3}{U^2}\,\frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{\mu^2 a^3}{k^2}$$

(U und μ bezogen auf den Tag als Zeiteinheit).

200. Bahnbestimmung aus photometrischen Beobachtungen. Photometrische Beobachtungen veränderlicher Sterne, insbesondere solcher vom Algoltypus, haben zu der Hypothese geführt, daß die Veränderlichkeit durch die Bewegung zweier verschieden heller und verschieden großer Körper umeinander hervorgerufen wird, die zeitweise nebeneinander stehen (Maxima), zeitweise sich zum Teil verfinstern (Minima). Die hieraus sich ergebende Aufgabe, *aus der Lichtkurve die Bahn zu ermitteln*, kann unter Hinzunahme einiger weiterer Hypothesen wenigstens durch sukzessive Versuche gelöst werden. Der Zusammenhang zwischen den Größen-, Formen- und Helligkeitsverhältnissen der Körper und den Elementen der elliptischen Bahn einerseits und der Lichtkurve andererseits ist aber ein so komplizierter, daß man eine allgemeine

Theorie wohl kaum aufstellen kann, sondern die Lösung von Fall zu Fall den vorliegenden Verhältnissen anpassen muß. Es kann daher hier nur auf die Spezialarbeiten verwiesen werden:

Harting, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Persei, 1889.
Myers, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Lyrae, 1896.
Hartwig, Der veränderliche Stern vom Algoltypus Z Herculis, 1900.
Dunér, Calcul des éléments elliptiques de l'orbite du système stellaire de l'étoile variable Y Cygni, 1900.

SACHREGISTER.

(Die Zahlen verweisen auf die Seiten.)

Aberration 84, 94, — der Fixsterne 86, — der Planeten 91, Aberrationszeit 85, 92, Meth. der Berücksichtigung der A. 92, — jährliche 89, — tägliche 90, — des Radiationspunktes 583.
Abplattung der Erde 101.
Abstand des Perihels vom Knoten 223.
Additionslogarithmen 20.
Äquator 20. System des Ä. 18, Umwandlung von Äqu.Koord. in ekliptikale 19, Umwandlung von Äquatorelementen in Ekliptikalelemente 23, Rechtwinklige Äquatorkoord. 26, 229.
Äquinoktium 18, 76.
Akzeleration der Fixsterne 37.
Ära, christliche 40, — julianische 42.
Annus fictus 39.
Anomalie, exzentrische 118, 136, — wahre 118, 135, — mittlere 134.
Apex 580.
Aphel 127.
Apsiden 127.
Argument der Breite 223.
Ausgleichungsrechnung 394, direkter Beob. 396, 399, vermittelnder Beob. 402.
Ausnahmefälle der Bahnbest. 320.
Ausnahmefall bei parabolischen Bahnen 371, — bei Kreisbahnen 387.

Bahnbestimmung, aus Ort und Geschwindigkeit 131, 343, —, Grundgleichungen 253, — aus 3 Beob. nach Gauß-Encke 262, Zusammenstellung der Formeln hierzu 278, — aus 3 Beob. nach Hansen 285, Zusammenstellung der Formeln hiezu 291, — aus 3 Beob. nach Weiß 305, —, wenn Näherungen vorliegen 310, — aus 4 Beob. 326, Übersicht der Formeln hiezu 329, —, direkte Methoden 336, von Glauser 336, von Laplace 337, von Bruns 340, Übersicht der Formeln hiezu 347, — der Parabel 349, Übersicht der Formeln hiezu 356, — parabelnaher Bahnen 375, — von Kreisbahnen 379, Übersicht der Formeln hiezu 384, — der Meteore 586, — der Feuerkugeln 593, — der Satelliten 598, — der Doppelsterne 615, — aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius 641, — aus photometrischen Beob. 649, —, Geschichte 388.
Bahnebene, Gleichung derselben 226, — Bestimmungsstücke 223.
Bahnelemente 227.
Bahnlage 23, — Umwandlung 25, — rasche Bestimmg. aus zwei geoz. Örtern 235.
Bahnverbesserung, erste parabolischer Bahnen 365, — durch Variation der Elemente 432, — Grundformeln 434, — erste Methode 438, — zweite Methode 447, — parabolischer und parabelnaher Elemente 452, — durch Variation der geozentrischen Distanzen 462, — bei Satellitenbahnen 609, — bei Doppelsternen 638, bei Bahnbest. aus den Geschwindigkeiten im Visionsradius 648.
Barkersche Tafel 187.
Baryzentrische Örter 347.
Beschleunigung 43, — Ausdrücke nach bewegten Achsen 45.
Bewegung eines Punktes 42, — eines starren Körpers 47.
Breite 18, — geographische 102, geozentrische 102.

Carlini's Kunstgriff 367.

Definitive Bahn 576.
Deklination 18.
Dies reductus 41.
Differenzialquotienten der Polarkoord. nach der Zeit in der ell. und parab. Bew. 147.
Doppelpunkt 246, 248.
Doppelsterne, Allg. Sätze über die Bew. 615, — Beziehungen zwischen scheinbarer und wahrer Bahn 623, — Bahnbestimmungsmethoden, graphische 626, analytische 632, — Bahnverbesserung 638, — spektroskopische 642.
Drehungssinn bei Winkeln 2.
Dreiecksflächen als Funktionen der Zeit 171, — Differenziale der Verhältnisse 466.
Drittes Glied bei der Präzession 73, 99.
Durchschnittlicher Fehler 395.

Eigenbewegung, veränderliche 639.
Einheiten der Masse, Zeit, Länge 149.

Ekliptik 18, — Schiefe 19, Umwandlung der Ekliptikalkoord. in äquatoreale 19, Umwandlung von Ekl.-Elementen in Äquator-El. 23, Differenzialformeln zwischen Ekliptikal- und Äquatorealkoordinaten 20.
Elemente, Bestimmung bei der Ellipse 165, bei der Parabel 198, bei der Hyperbel 207, bei parabelnahen Bahnen 219, 221, aus den rechtw. Koord. eines Ortes und ihren Geschwindigkeiten 131, 343, mit Differenzialformeln 568.
Eliminationsgleichungen 412.
Ellipse 113, 115, Bewegung in der E. 133, Sektor durch Dreieck 154, Best. der Elemente 165, Lambertscher Satz 168.
Ephemeridenrechnung 26, 229, — bei parabelnahen Bahnen 216.
Enckesche Form der Eulerschen Gl. 194.
Eulersche Gl. der Rotationsbewegung 50, — Gl. für die Rotation der Erde 53, — Periode 62, — Gl. für die parabolische Bewegung 191, — Winkel 11.
Exzentrizitätswinkel 137.
Exzentrizität, Ausdruck von Fabritius 302.

Fehlergleichungen 402.
Feuerkugeln, Bahnbest. 593.
Frühlingsäquinoktium 18.

Gaußsche Formeln der Trigonometrie 9, — Konstanten 28, 230, — Konstante k 149, — Gleichung der Bahnbestimmung 241, 243, 266, Auflösung derselben 271.
Geodätischer Kontingenzwinkel 16, — Krümmung 16, — Tangente 16.
Geozentrischer Ort 30, 229.
Geozentrische Distanzen 262.
Geschwindigkeit 42, — im Visionsradius 641.
Gewicht 395, Gaußscher Satz über das Gewicht der Unbekannten 415.
Gibbssche Formeln 179, Bahnbest. mit Benutzung derselben 303.
Gravitationskonstante 149.
Grundgleichungen der Bahnbestimmung 258, — der Bahnverbesserung 434, — der Variation der elliptischen Elemente 486, — für Berechnung der Störungen in den Polarkoordinaten 519, — für die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten 539.

Heliozentrische Bewegung 124, — rechtwinklige Äquatorkoordinaten 26, 229, — rechtwinklige Ekliptikalkoordinaten 27.
Hilfswinkel, Einführung von H. 20.
Hyperbel 113, 118, Bewegung in der H. 201, Sektor durch Dreieck in der H. 204, Bestimmung der Elemente in der H. 207, Lambertsche Gl. für die H. 209, Variation hyperbolischer Elemente 515.
Hypothesenrechnung (in der Bahnbestimmung) 273, 291, 297, 310, 355, 361.

Jahr, tropisches 39, — julianisches 39, — gregorianisches 40.
Instantane Drehungsachse 60.

Kalender 39.
Kegelschnitte 112.
Keplersche Gesetze 124, drittes Gesetz 133.
Keplersche Gleichung 141.
Klinkerfues, Satz von 249.
Knoten 1, 23, 223.
Konjunktion 245.
Kreisbahn 379, — Gaußsche Methode 382, — Übersicht der Formeln 384, Unmöglichkeit einer K. 387.
Kriterium für die Art der Bahn 129, — für die Zugehörigkeit eines Ortes zu einer Bahn 233, für die Zusammengehörigkeit zweier Kometenbahnen 561.
Kugel, Kurven auf der K. 16.

Lambertsche Gl. für die elliptische Bewegung 168, — für die parabolische Bewegung 170, 191, — für die hyperbolische Bewegung 209, — für parabelnahe Bahnen 217.
Lambertscher Satz über die Krümmung der scheinbaren Bahn 237, Formulierung von Bruns 241.
Länge 18, — in der Bahn 223, — des Perihels 223.
Lehmann-Filhés, Satz von 241, Tafeln von L. 588.
Lichtzeit 85, 92.
Locus fictus 106.
Lunisolarnutation 67, 80.
Lunisolarpräzession 67, 79.

Masse 46.
Maßgebender Winkel 322.
Mechanik 42.
Mechanische Integration 474, — Zusammenstellung der Formeln 483.
Mehrfache Lösungen bei der Bahnbest. 322.
Meridian, als Index der Zeitmessung 34.
Meteore, Bahnbestimmung 579, 586.
Methode der kleinsten Quadrate 394.
Mittlerer Fehler 395.
Mittlere Zeit 37.
Mittleres Koordinatensystem 51.
Mittelpunktsgleichung 136, 140.
Mondmasse 82.

Napiersche Analogien 9.
Neigung 2, 23, 223.
Newtons Bewegungsgesetze 45.
Nicolais Tafel zur Bestimmung der Zwischenzeit in der parabolischen Bewegung 196.
Normalgleichungen 403, — Auflösung 409, 410, 424, — Bildung 418, — Kontrollen 420.
Normalmeridian 41.
Normalort 311, 433.

Nutation 51, 76.
Nutationskonstante 77, 78.

Olberssche Gleichung 241.
Opposition 245.
Oppositionszeit, Berechnung der 247.
Oskulierende Elemente 497.

Parabel 113, 121, — Bewegung in der P. 186, — Eulerscher Satz 191, — Sektor durch Dreieck 197, — Bestimmung der Elemente 198.
Parabelnahe Bahnen, Bewegung in ihnen 210, — Ephemeriden bei ihnen 216, — Lambertsche Gl. 217, — Bestimmung der Elemente 219, 221, — Bahnbestimmung 349.
Parallaxe 101. — in AR. und Dekl. 103, — in Länge und Breite 105.
Parallaktischer Faktor 105.
Perihel 127.
Perihelslänge 223.
Pfeil, Ausdruck für den 179.
Planetenaberration 91.
Pole auf der Kugel 1.
Präzession 51, 67, — allgemeine 69, 79, — durch die Planeten 68, 79, — in Länge und Breite 70, — bei den Bahnelementen 71, 74, — in Rektaszension u. Dekl. 72, 79, — -konstante 77, — -tafeln 99, — im Positionswinkel 622.

Quadrantendreieck 3, — Beziehungen zwischen zwei Quadrantendreiecken 11.

Radiationspunkt 580.
Rechtläufig 246.
Rektaszension 18.
Reduktion auf den Jahresanfang 80, — auf den wahren Ort 80, — auf den scheinbaren Ort 94, — Reduktionsrechnungen, Beispiele 96.
Rotation der Erde, Theorie 51.
Rückläufig 246.

Satelliten 598, — Bahnbestimmung 598, — Kreisbahn 599, — Darstellung der Bewegung durch die Elemente 602, Bahnverbesserung 609.
Schaltjahr 39.
Schalttag 40.
Scheinbare Bahn 244.
Schiefe der Ekliptik 68.
Schleife 246, 248.
Schröder van der Kolk, Satz von 131.
Seehöhe 103.
Sektor, elliptischer 154.
Sektor durch Dreieck in der Ellipse nach Gauß 161, Hansen 162, Tietjen 163, Encke 164, weitere Ausdrücke 171, 172, 175, — in der Parabel 197, — in der Hyperbel 204.
Sicherheit der Bahnbestimmung 322.
Sonnenbreite, Berücks. der S. 106.
Sonnentag, mittlerer 37.
Sonnenzeit, mittlere 37.
Sphärische Trigonometrie 5, Hauptformeln 5, zusammengestellt 7. — Abgeleitete Formeln 8, Differenzialformeln 10.
Stationär 246.
Sterntag 35.
Sternzeit 34, — im mittleren Mittag 38, — Korr. der Sternzeit 38.
Störungen, spezielle 484, — in den Elementen 486, — in den E. bei Kometen 508, — in Polarkoordinaten 519, — Verw. in Elementenst. 532, — in rechtw. Koord. 539, — Verw. rechtw. St. in El.-St. 568, — bei Kometenbahnen 555, — in unmittelb. Nähe der großen Pl. 556, — bei weiter Entf. des stör. Körpers 563, — bei B. v. ger. Exz. 511, — bei Bahnen von geringer Neigung 514, — in den El. bei Hyperbeln 515.
Stunde 33.
Stundenwinkel 34.
Schwerpunkt eines Systems 47, — Übertragung der Elemente auf den Schw. 568.
Synodische Umlaufszeit 247.

Tisserands Kriterium für die Identität von Kometenbahnen 561.
Trägheitsmoment 48.
Trägheitsmomente der Erde 55, 83.

Variation der geozentrischen Distanzen 316.
Variation des Verhältnisses der geoz. Distanzen bei Kometenbahnen 367.
Variation der Elemente 486.
Veränderliche Eigenbewegung 639.
Verrückungen auf der Kugel 12.

Wahres Koordinatensystem 51.
Wirkungssphäre 558.

Zeitmessung 33.
Zeitteilung 33, — Verwandlung in Gradteilung 33.
Zenithattraktion 580.
Zodiakus der Bahnen 249.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.