universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel IX. Eigenbewegung der Fixsterne

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Es erreicht somit m seinen Maximalwert, wenn p gleich $180^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $360^\circ - \varkappa$ ist, dagegen ist n ein Maximum, wenn p gleich $90^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $270^\circ - \varkappa$ ist. Haben also mehrere Sternpaare gleiche Distanz und Parallaxendifferenz, so wird der Einfluß der Parallaxe auf den Positionswinkel für dasjenige Paar am größten, dessen Komponenten auf demselben Breitenkreise liegen; dagegen wird der Einfluß einer gegebenen Parallaxendifferenz auf die Distanz zweier Sterne am größten, wenn der durch die Sterne gelegte Bogen größten Kreises senkrecht zu dem Breitenkreise des Mittelpunktes dieses Bogens steht. Im ersten Falle findet das Maximum der parallaktischen Verschiebung statt, wenn $\odot = \lambda + M$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + M$ ist, im zweiten wenn $\odot = \lambda + N$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + N$ ist.

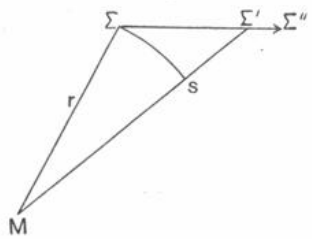
Kapitel IX.

Eigenbewegung der Fixsterne.

54. Einleitung. Werden die zu verschiedenen Zeiten beobachteten Örter eines Fixsterns auf ein und dasselbe Äquinox reduziert und gleichzeitig durch Anbringung einer etwaigen Korrektion wegen jährlicher Parallaxe in heliozentrische verwandelt, so zeigen die so erhaltenen Positionen nicht selten einen Gang. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist dieser der Zeit proportional; nur sehr wenige Sterne kennt man, deren Örter periodischen Änderungen unterworfen sind. Zur Erklärung eines fortschreitenden Ganges nimmt man an, daß der betreffende Stern eine Bewegung im Raume besitzt, die selbst innerhalb eines viele Jahre umfassenden Zeitraumes als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann. Periodische Ortsveränderungen kommen zustande, wenn beispielsweise der Stern einen Begleiter besitzt, und beide Sterne eine Ellipse um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben; auch in diesem Falle können die beobachteten Örter nebenbei noch einen der Zeit proportionalen Gang aufweisen, zu dessen Erklärung die Annahme einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Schwerpunktes im Raume hinreicht.

Es soll nun genauer untersucht werden, welche Folgerung sich für die von der Sonne aus gesehene Bewegung eines Sterns, bzw. des Schwerpunktes eines Sternsystems an der Sphäre ergibt, wenn die Bewegung des Sterns oder des Schwerpunktes im Raume als geradlinig und gleichförmig angenommen wird. In Fig. 1 sei Σ der Ort eines Sterns zur Zeit $t = 0$, $\Sigma\Sigma''$ sei die Richtung, in der sich der Stern relativ zur Sonne bewegt, und v die Geschwindigkeit dieser Bewegung; bedeutet dann $\Sigma\Sigma'$ die von dem Stern in dem Zeitelement dt relativ zur Sonne durchlaufene Strecke, so ist $\Sigma\Sigma' = v dt$. Von der Sonne (M) aus gesehen erscheint diese Strecke unter dem Winkel $\Sigma M \Sigma'$; wird dieser gleich $n dt$ gesetzt, so ist n die Winkel-

Fig. 1.



geschwindigkeit des Sterns in bezug auf die Sonne und wird als die Eigenbewegung des Sterns, gemessen im größten Kreise, bezeichnet. Setzt man noch $M\Sigma\Sigma'' = W$, $M\Sigma'\Sigma'' = W + dW$, so folgt $dW = \Sigma M\Sigma'$ oder $dW = ndt$.

Man beschreibe jetzt mit dem Radius $M\Sigma$ einen Kreis, welcher $M\Sigma'$ in s schneidet, und setze $M\Sigma = r$, $\Sigma's = dr$ und $dr = \varrho dt$, wo ϱ die radiale Geschwindigkeit des Sterns genannt wird; es ergibt sich dann $\Sigma s = rndt$ und $\Sigma's = \varrho dt$. Nun kann $\Sigma s\Sigma'$ als ein rechtwinkliges Dreieck angesehen werden, dessen Winkel bei Σ gleich $W - 90^0$ ist; mit Benutzung der für die Seiten dieses Dreiecks gefundenen Ausdrücke erhält man also

$$rn = v \sin W, \qquad \varrho = -v \cos W$$

Differenziert man die erste dieser Gleichungen, indem man der obigen Voraussetzung gemäß v als konstant betrachtet, so ergibt sich mit Berücksichtigung der für ϱ erhaltenen Gleichung

$$rdn = -\varrho dW - ndr$$

oder, wenn nach dem Obigen $dW = ndt$, $dr = \varrho dt$ gesetzt wird,

$$\frac{dn}{dt} = -2\frac{n\varrho}{r} \tag{1}$$

Zur numerischen Berechnung von $\frac{dn}{dt}$ bedarf man der Werte von n, ϱ und r, diese aber hängen von den für die Zeit, bzw. die Länge gewählten Einheiten ab. Als Zeiteinheit werde ein tropisches Jahr und als Längeneinheit die halbe große Achse der Erdbahn angenommen. Infolge der über die Längeneinheit gemachten Annahme kann man, wenn π die Parallaxe des Sterns bedeutet, $1 : r = \sin\pi$ setzen; hat man also nach einer der in Kapitel 16 und 17 gegebenen Methoden den Wert von π bestimmt, so ist r bekannt. In welcher Weise man n findet, wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden. Der Wert der radialen Geschwindigkeit (ϱ) ergibt sich mit Hilfe von spektroskopischen Beobachtungen. Die aus solchen Beobachtungen folgende Geschwindigkeit wird aber in Kilometern ausgedrückt angegeben und bezieht sich auf die mittlere Sekunde als Zeiteinheit; um nun aus diesem Werte der radialen Geschwindigkeit den auf die hier gewählten Einheiten der Länge und Zeit bezogenen Wert, der mit ϱ' bezeichnet werden möge, zu erhalten, hat man ϱ durch die in Kilometern ausgedrückte Länge der halben großen Achse der Erdbahn (= 149 Millionen Kilometer) zu dividieren und mit der in einem tropischen Jahre enthaltenen Anzahl von mittleren Sekunden (= 365.2422×86400) zu multiplizieren. Führt man die angegebenen Operationen durch, so erhält man $\varrho' = 0.212\varrho$, und die Gleichung (1) wird

$$\frac{dn}{dt} = -0.424 n\varrho \sin\pi \tag{2}$$

Bezeichnet man nun mit ds das von dem Stern in der Zeit dt an der Sphäre beschriebene Bogenelement, so ergibt sich

$$\frac{ds}{dt} = n, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dn}{dt},$$

demnach wird der von dem Stern in dem Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t$ beschriebene Bogen, wenn man Glieder von der Ordnung t^3 vernachlässigt, gleich

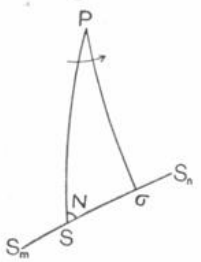
$$\left(\frac{ds}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}t\right)t = \left(n + \frac{1}{2}\frac{dn}{dt}t\right)t, \tag{2a}$$

wo für $\frac{dn}{dt}$ sein aus (2) folgender Wert zu substituieren ist.

Als Beispiel wähle man den Stern Nr. 1830 des Katalogs von *Groombridge*, für welchen $n = 7''$, $\varrho = -95$ km, $\pi = 0''.1$ und somit $\frac{dn}{dt} = +0''.00014$ ist; substituiert man die Werte von n und $\frac{dn}{dt}$ in die Gleichung (2a), so erhält man für den von dem genannten Stern in t tropischen Jahren durchlaufenen Bogen den Ausdruck $(7'' + 0''.00007\,t)t$. Das hier von t^2 abhängige Glied würde in 50 Jahren bereits $0''.2$ ausmachen, in 100 Jahren $0''.7$ und in 150 Jahren $1''.6$; der von *Groombridge* 1830 innerhalb der Zeit t durchlaufene Bogen darf also bei größeren Werten von t nicht einfach der Zeit proportional angenommen werden. Gegenwärtig sind nur ganz vereinzelte Sterne bekannt, bei denen auf das von t^2 abhängige Glied Rücksicht genommen werden muß, und auch bei diesen nur, wenn es sich um lange Zeiträume handelt; es soll deshalb im folgenden nur der Fall betrachtet werden, wo der von einem Stern beschriebene Bogen als der Zeit proportional oder die mit n bezeichnete Eigenbewegung als konstant angesehen werden darf.

55. Einfluß der Eigenbewegung auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. Bestimmung der Größe und Richtung der Eigenbewegung. In Fig. 2 seien S und σ die Örter eines Sterns zu den Zeiten t, bzw. $t + dt$, P sei der Ort des Pols zu einer beliebigen Zeit T, der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Rektaszension gezählt wird. Wenn dann α und δ, bzw. $\alpha + d\alpha$ und $\delta + d\delta$ die Rektaszension und Deklination von S, bzw. σ, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T bedeuten, und $S\sigma = n\,dt$, $PSS_n = N$, $P\sigma S_n = N + dN$ gesetzt wird, so folgt aus dem Dreieck $PS\sigma$

Fig. 2.



$$\frac{d\alpha}{dt} = n \sin N \sec\delta, \qquad \frac{d\delta}{dt} = n \cos N \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet man $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ als die Eigenbewegung des Sterns in Rektaszension und Deklination, gültig für die Epoche t und bezogen auf das Äquinox zur Zeit T.

Aus dem Dreieck $PS\sigma$ folgt ferner nach einer der *Napier*schen Analogien

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}dN = \frac{\sin(\delta + \frac{1}{2}d\delta)}{\cos\frac{1}{2}d\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}d\alpha$$

oder hinreichend genau

$$\frac{dN}{dt} = \sin\delta\,\frac{d\alpha}{dt} \tag{4}$$

Man differenziere jetzt die Gleichungen (3) und berücksichtige dabei, daß n als konstant angenommen worden ist; substituiert man dann für $\frac{dN}{dt}$ seinen Wert (4) und denkt sich $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ in Bogensekunden ausgedrückt, so erhält man die ebenfalls in Bogensekunden ausgedrückten zweiten Differentialquotienten

$$(5)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\,\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{d\delta}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta, \qquad \frac{d^2\delta}{dt^2} = -\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sin 1''\,\sin\delta\,\cos\delta$$

Wenn nun S_m und S_n die Örter des Sterns zu den Zeiten t_m, bzw. t_n darstellen und wenn die Äquatorealkoordinaten von S_m und S_n, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T, mit α_m, δ_m, bzw. α_n, δ_n bezeichnet werden, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$(6)\qquad \alpha_n - \alpha_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m (t_n - t_m)^2,$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m$ die für die Zeit t_m gültigen Werte von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ bedeuten. Substituiert man in die Gleichung (6) und in die ihr entsprechende, für $\delta_n - \delta_m$ gültige Gleichung die in (5) gegebenen Werte der zweiten Differentialquotienten von α und δ, so erhält man

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha_n - \alpha_m &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1''\,\operatorname{tang}\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \\ \delta_n - \delta_m &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1''\,\sin\delta_m\,\cos\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, wie man mit Hilfe dieser Gleichungen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$, und hieraus die Eigenbewegung im größten Kreise nach Größe und Richtung bestimmen kann, werde angenommen, daß ein Stern zu den Zeiten t_0, t_1, t_2, ... beobachtet worden sei; die aus diesen Beobachtungen sich ergebenden, auf das Äquinox zur Zeit T reduzierten Werte der Rektaszension und Deklination des Sterns mögen mit α_0, α_1, α_2, ..., bzw. δ_0, δ_1, δ_2, ... bezeichnet werden. Versteht man dann unter t_m das Mittel aus t_0, t_1, t_2, ... und bedeutet t_n irgend eine der Zeiten t_0, t_1, t_2, ..., bezeichnet man ferner mit α_m und δ_m die der Zeit t_m und mit α_n und δ_n die der Zeit t_n entsprechende, auf das Äquinox zur Zeit T bezogene Rektaszension und Deklination, so müssen die Differenzen $\alpha_n - \alpha_m$ und $\delta_n - \delta_m$ den Gleichungen (7) genügen. Die Werte von α_m und δ_m sind zunächst unbekannt; man setze daher $\alpha_m = \alpha_m^{(0)} + \Delta\alpha$, $\delta_m = \delta_m^{(0)} + \Delta\delta$, wo $\alpha_m^{(0)}$ und $\delta_m^{(0)}$ irgendwelche für α_m und δ_m angenommene Werte (etwa die Mittel aus α_0, α_1, α_2, ..., bzw. δ_0, δ_1, δ_2, ...) bedeuten, und wo $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die zu bestimmenden Korrektionen von $\alpha_m^{(0)}$ und $\delta_m^{(0)}$ angeben. Damit werden die Gleichungen (7)

$$(8)\qquad \begin{aligned} \Delta\alpha + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) &= \alpha_n - \alpha_m^{(0)} - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1''\,\operatorname{tang}\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \\ \Delta\delta + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) &= \delta_n - \delta_m^{(0)} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1''\,\sin\delta_m\,\cos\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \end{aligned}$$

Als Maximalwerte der auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Glieder zweiter Ordnung erhält man, wenn für die Differentialquotienten von α und δ ihre aus (3) folgenden Werte substituiert werden, $\frac{1}{2}n^2 \sin 1'' \sec\delta_m \operatorname{tang}\delta_m (t_n - t_m)^2$, bzw. $\frac{1}{2}n^2 \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_m (t_n - t_m)^2$. Die genannten Glieder können also in der Nähe des Pols und bei großen Eigenbewegungen merklich werden, indessen bleiben sie selbst für die (gegenwärtig bekannten) Sterne größter Eigenbewegung so klein, daß es genügt, dieselben mit Hilfe genäherter Werte von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ zu berechnen; diese ergeben sich, indem man die Differenzen zwischen den zu zwei weit voneinander entfernten Epochen beobachteten Werten der Rektaszension und Deklination durch die Differenz der Epochen dividiert. Die Glieder zweiter Ordnung dürfen somit als bekannt angesehen werden; da dasselbe auch von α_n, δ_n, $\alpha_m^{(o)}$ und $\delta_m^{(c)}$ gilt, so treten auf der rechten Seite der Gleichungen (8) lauter bekannte Glieder auf. Substituiert man nun in (8) für α_n der Reihe nach die gegebenen Rektaszensionen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und tut das Entsprechende für δ_n, so kann man mit Hilfe dieser Gleichungen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ bestimmen. Nachdem dies geschehen ist, ersetze man in den Gleichungen (3) $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ durch die für $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ gefundenen Werte und erhält dann die mit n bezeichnete Eigenbewegung im größten Kreise und den Positionswinkel N dieser Bewegung.

Ist die Eigenbewegung groß und aus früheren Untersuchungen bereits annähernd bekannt, so wendet man an Stelle der Gleichungen (8) andere an, welche die Korrektionen der genäherten Werte der Eigenbewegung geben. Setzt man nämlich in den Gleichungen (8)

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)} + \Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m, \qquad \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)} + \Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m,$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)}$ Näherungswerte und $\Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ die gesuchten Korrektionen der Näherungswerte bedeuten, so erhält man, wenn die Abkürzungen

$$A = \alpha_m^{(o)} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}(t_n - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)} \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_m^{(o)} (t_n - t_m)^2$$

$$D = \delta_m^{(o)} + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)}(t_n - t_m) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}\right]^2 \sin 1'' \sin\delta_m^{(o)} \cos\delta_m^{(o)} (t_n - t_m)^2$$

eingeführt werden,

$$\Delta\alpha + \Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \alpha_n - A$$

$$\Delta\delta + \Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \delta_n - D$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ bestimmen.

Hat man nach einer der beiden vorhin erläuterten Methoden die Eigenbewegung eines Sterns gefunden, so lassen sich die Gleichungen (7) dazu benutzen, um die in

einem gegebenen Zeitintervall durch die Eigenbewegung bewirkte Änderung der Rektaszension und Deklination des Sterns zu berechnen. Zu demselben Ziele kann man aber auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Bedeutet nämlich α_s die der Zeit t_s entsprechende Rektaszension, so hat man der ersten Gleichung (7) zufolge

$$\alpha_s - \alpha_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_s - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \tang \delta_m (t_s - t_m)^2$$

Ist nun $t_m = \frac{t_n + t_s}{2}$, so wird

$$t_s - t_m = \tfrac{1}{2}(t_s - t_n), \qquad t_n - t_m = -\tfrac{1}{2}(t_s - t_n)$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung für $\alpha_s - \alpha_m$ und in die erste der Gleichungen (7) und subtrahiert dann die beiden Gleichungen, so folgt

$$\alpha_s - \alpha_n = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_s - t_n),$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ den der Zeit $\frac{1}{2}(t_n + t_s)$ entsprechenden Wert des Differentialquotienten von α bezeichnet; eine analoge Gleichung ergibt sich für $\delta_s - \delta_n$. Man erhält also den einem beliebigen Zeitintervall $t_s - t_n$ entsprechenden Betrag der Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination bis auf Glieder zweiter Ordnung genau, indem man die für die Mitte des Intervalls gültigen Werte der ersten Differentialquotienten von α und δ mit $t_s - t_n$ multipliziert.

56. Reduktion der Eigenbewegung auf verschiedene Epochen und auf verschiedene Äquinoktien. Dem *Taylor*schen Satze zufolge hat man, wenn $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ für die Zeit t gelten,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m (t - t_m), \qquad \frac{d\delta}{dt} = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m + \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_m (t - t_m)$$

Substituiert man für die zweiten Differentialquotienten von α und δ ihre aus (5) sich ergebenden Werte, so folgt

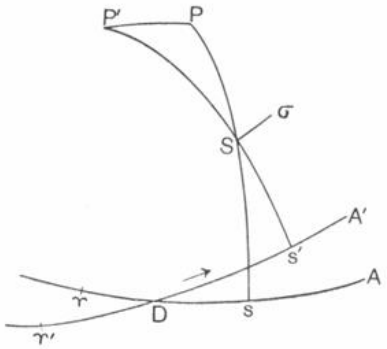
$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \tang \delta_m (t - t_m) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m) \end{aligned} \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus der für die Epoche t_m gültigen und auf das Äquinox einer beliebigen Zeit T bezogenen Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination die ebenfalls auf das Äquinox zur Zeit T bezogene, aber der Epoche t entsprechende Eigenbewegung berechnen.

Jetzt sind noch die Formeln abzuleiten, mit Hilfe derer man aus der für die Epoche t gültigen und auf das Äquinox zur Zeit T bezogenen Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination die ebenfalls der Epoche t entsprechende, aber auf

das Äquinox zur Zeit T' bezogene Eigenbewegung finden kann. In Fig. 3 sei γA der Äquator zur Zeit T, P sei der zugehörige Ort des Pols und γ das der Zeit T entsprechende Frühlingsäquinox; eine analoge Bedeutung sollen $\gamma' A'$, P' und γ' für die Epoche T' haben. Mit S werde der Ort eines Sterns zur Zeit t und mit σ der Ort des Sterns zur Zeit $t + dt$ bezeichnet. Es sei nun $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die Eigenbewegung des Sterns in Rektaszension und Deklination, gültig für die Epoche t und bezogen auf das Äquinox zur Zeit T; $\frac{d\alpha'}{dt}$ und $\frac{d\delta'}{dt}$ seien die ebenfalls für die Epoche t gültigen, aber auf das Äquinox zur Zeit T' bezogenen Komponenten der Eigenbewegung; setzt man dann $PS = 90^\circ - \delta$, $P'S = 90^\circ - \delta'$, $S\sigma = n dt$, $P'SP = S$, $PS\sigma = N$, so ist den Gleichungen (3) zufolge

Fig. 3.



$$\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta = n\sin N \qquad \frac{d\delta}{dt} = n\cos N$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' = n\sin(N+S) \qquad \frac{d\delta'}{dt} = n\cos(N+S)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\cos S + \frac{d\delta}{dt}\sin S \\ \frac{d\delta'}{dt} &= -\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\sin S + \frac{d\delta}{dt}\cos S \end{aligned} \tag{10}$$

Um den Winkel S zu bestimmen, betrachte man das sphärische Dreieck $P'PS$. Wird der Winkel γPs oder die für die Epoche t gültige Rektaszension des Sterns, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T, mit α bezeichnet, so ergibt sich, daß der Winkel $P'PS = 90^\circ + DPs = 90^\circ + \alpha - \gamma D$ ist, wobei der Bogen γD den ihm gleichen Winkel γPD vertritt. Mit Benutzung einer in § 31 eingeführten Bezeichnung wird $\gamma D = 90^\circ - p$, und demnach $P'PS = \alpha + p$. Berücksichtigt man noch, daß PP' oder der Winkel $A'DA$ gleich dem in § 31 mit π bezeichneten Winkel ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos\delta'\sin S &= \sin(\alpha+p)\sin\pi \\ \cos\delta'\cos S &= \cos\pi\cos\delta - \sin\pi\sin\delta\cos(\alpha+p), \end{aligned} \tag{11}$$

worin nach § 32

$$p = \left(2303''.6 + 1''.4\,\frac{T-1850}{100}\right)\frac{T'-T}{100} + 0''.3\left(\frac{T'-T}{100}\right)^2$$

$$\pi = \left(2005''.1 - 0''.85\,\frac{T-1850}{100}\right)\frac{T'-T}{100} - 0''.4\left(\frac{T'-T}{100}\right)^2$$

zu setzen ist. Zur Berechnung von S genügt übrigens in den meisten Fällen die erste der Gleichungen (11).

56a. Reduktion der für ein beliebiges mittleres Äquinox und die zugehörige Epoche gültigen Koordinaten und Eigenbewegung eines Sterns auf ein anderes mittleres Äquinox und die zugehörige Epoche. Gegeben seien die für die Epoche t_m gültigen und auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogenen Koordinaten und Komponenten der jährlichen Eigenbewegung eines Sterns α_m, δ_m, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$; gesucht werden die für die Epoche t gültigen und auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten und Komponenten der Eigenbewegung α, δ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$. — Zur Lösung dieser Aufgabe kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Die hierbei zu benutzenden Formeln sind bereits in den vorhergehenden Paragraphen enthalten, doch sollen dieselben jetzt übersichtlich zusammengestellt werden, und zwar unter Anwendung einer dem Zweck entsprechenden, teilweise neuen Bezeichnung.

A. Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die für die Epoche t gültigen, jedoch noch auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogene Rektaszension und Deklination, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (7)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} - \alpha_m &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \operatorname{tang} \delta_m (t - t_m)^2 \\ \mathfrak{d} - \delta_m &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m)^2\end{aligned} \tag{12}$$

Wenn aber die für die Epoche t gültige, jedoch noch auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogene Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination mit $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$, bzw. $\frac{d\mathfrak{d}}{dt}$ bezeichnet wird, so folgt aus (9)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \operatorname{tang} \delta_m (t - t_m) \\ \frac{d\mathfrak{d}}{dt} &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m)\end{aligned} \tag{I}$$

Somit werden die Gleichungen (12)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \alpha_m + \frac{1}{2}\left[\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\right](t - t_m) \\ \mathfrak{d} &= \delta_m + \frac{1}{2}\left[\frac{d\mathfrak{d}}{dt} + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\right](t - t_m)\end{aligned} \tag{II}$$

Addiert man nun zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die Präzession von t_m bis t, so ergeben sich die gesuchten Koordinaten α, δ.

Um $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ zu erhalten, hat man zunächst den im vorigen Paragraphen mit S bezeichneten Winkel zu berechnen. Die hierzu dienenden Gleichungen (11), von denen aber in den meisten Fällen die erste ausreichend ist, werden mit Benutzung der im obigen angewandten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\cos\delta \sin S &= \sin(\mathfrak{a} + p) \sin \mathfrak{u} \\ \cos\delta \cos S &= \cos \mathfrak{u} \cos \mathfrak{d} - \sin \mathfrak{u} \sin \mathfrak{d} \cos(\mathfrak{a} + p),\end{aligned} \tag{III}$$

wo

$$p = \left(2303''.6 + 1''.4\,\frac{t_m - 1850}{100}\right)\frac{t - t_m}{100} + 0''.3\left(\frac{t - t_m}{100}\right)^2$$
$$\pi = \left(2005''.1 - 0''.85\,\frac{t_m - 1850}{100}\right)\frac{t - t_m}{100} - 0''.4\left(\frac{t - t_m}{100}\right)^2$$

ist. Indem man jetzt auch in (10) die neuen Bezeichnungen einführt, erhält man die zur Berechnung von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ dienenden Gleichungen

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta &= \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\cos\mathfrak{d}\cos S + \frac{d\mathfrak{d}}{dt}\sin S \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\cos\mathfrak{d}\sin S + \frac{d\mathfrak{d}}{dt}\cos S \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (I) bis (IV) ist die gestellte Aufgabe gelöst.

B. Man füge zu α_m und δ_m die Präzession für das Zeitintervall $t - t_m$ hinzu und erhält damit die für die Epoche t_m gültigen, aber auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten des Sterns; diese mögen mit α' und δ' bezeichnet werden. Man berechne sodann den Winkel S. Die hierbei zu benutzenden Gleichungen (11) werden mit Rücksicht auf die gegenwärtig angenommenen Bezeichnungen

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned} \cos\delta'\sin S &= \sin(\alpha_m + p)\sin\pi \\ \cos\delta'\cos S &= \cos\pi\cos\delta_m - \sin\pi\sin\delta_m\cos(\alpha_m + p), \end{aligned}$$

wo für p und π dieselben Ausdrücke gelten wie vorhin.

Unter Anwendung des aus (V) folgenden Wertes von S berechne man weiter die für die Epoche t_m gültigen, aber auf das Äquinox zur Zeit t bezogenen Komponenten der Eigenbewegung $\frac{d\alpha'}{dt}$ und $\frac{d\delta'}{dt}$; die zu diesem Zwecke dienenden Gleichungen (10) lauten mit Einführung der neuen Bezeichnungen

$$\text{(VI)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\cos\delta_m\cos S + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\sin S \\ \frac{d\delta'}{dt} &= -\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\cos\delta_m\sin S + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\cos S \end{aligned}$$

Nun folgt aus (7), wenn α und δ die oben angegebene Bedeutung haben,

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \frac{d\alpha'}{dt}(t - t_m) + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{d\delta'}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta'(t - t_m)^2 \\ \delta - \delta' &= \frac{d\delta'}{dt}(t - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin 1''\sin\delta'\cos\delta'(t - t_m)^2 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man jetzt die aus (9) sich ergebenden Gleichungen

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\alpha'}{dt} + 2\,\frac{d\alpha'}{dt}\frac{d\delta'}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta'(t - t_m) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{d\delta'}{dt} - \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin 1''\sin\delta'\cos\delta'(t - t_m), \end{aligned}$$

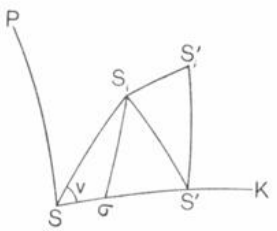
so werden die Gleichungen (13)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \frac{1}{2}\left[\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\right](t - t_m) \\ \delta &= \delta' + \frac{1}{2}\left[\frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta'}{dt}\right](t - t_m) \end{aligned}$$

Die in (V), (VI), (VII) und (VIII) gegebenen Formeln bilden die zweite Lösung der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe.

57. Einfluß der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Fixsterne. In Fig. 4 sei P der Ort des Pols zur Zeit T. Mit S und σ mögen die Örter eines Sterns zu den Zeiten t und $t + dt$ bezeichnet werden; wenn also n die Eigenbewegung des Sterns, gemessen im größten Kreise, bedeutet, so ist $S\sigma = n dt$. Ein zweiter Stern, dessen Eigenbewegung zunächst gleich o angenommen werden soll, befinde sich in S_i; mit Rücksicht auf die größten, direkt meßbaren Distanzen werde der Abstand der Sterne S und S_i kleiner als 2° vorausgesetzt. Setzt man jetzt $SS_i = \Delta$, $\sigma S_i = \Delta + d\Delta$, $S_i SK = v$, $S_i \sigma K = v + dv$, so erhält man aus dem Dreieck $SS_i\sigma$

Fig. 4.



$$\text{(14)} \qquad \frac{d\Delta}{dt} = -\, n \cos v$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = n \sin v \frac{dv}{dt}$$

Aus dem Dreieck $SS_i\sigma$ ergibt sich aber, wenn berücksichtigt wird, daß der Winkel bei S_i sehr nahe gleich dv ist,

$$\text{(15)} \qquad dv = \frac{n dt}{\Delta} \sin v$$

Somit wird die vorige Gleichung

$$\text{(16)} \qquad \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{n^2 \sin^2 v}{\Delta}$$

Bezeichnet man noch den Winkel PSK mit N und den Winkel PSS_i mit p, so daß N den mit Hilfe der Gleichungen (3) zu berechnenden Positionswinkel der Eigenbewegung des Sterns S, und p den durch Beobachtung zu ermittelnden Positionswinkel von S_i, bezogen auf S, bedeutet, so folgt

$$\text{(17)} \qquad v = N - p$$

Wenn nun der Stern S zur Zeit t' in S' angekommen ist, und $S_i S' = \Delta'$ gesetzt wird, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\Delta' = \Delta + \frac{d\Delta}{dt}(t' - t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\Delta}{dt^2}(t' - t)^2$$

Hier sind für $\frac{d\Delta}{dt}$ und $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$ ihre aus (14), (16) und (17) folgenden Werte zu substituieren; denkt man sich dabei n und Δ in Bogensekunden ausgedrückt, so erhält man für den auf dieselbe Einheit bezogenen Wert von $\Delta' - \Delta$

$$\Delta' - \Delta = -n(t' - t)\cos(N - p) + \frac{n^2(t' - t)^2}{2\Delta}\sin^2(N - p) \tag{18}$$

Um die entsprechende Formel für den Positionswinkel abzuleiten, differenziere man die Gleichung (17); wird hierbei der aus (4) folgende, durchwegs kleine Wert von dN vernachlässigt, so ergibt sich $dp = -dv$. Mit Berücksichtigung der Gleichung (15) erhält man also für den in Bogensekunden ausgedrückten Differentialquotienten von p

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{n \sin v}{\Delta \sin 1''} \tag{19}$$

Differenziert man diese Gleichung und substituiert für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\Delta}{dt}$ ihre in (15) und (14) gegebenen Werte, so folgt

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{n^2 \sin 2v}{\Delta^2 \sin 1''} \tag{20}$$

Nun ist, wenn p' den Positionswinkel von S_i, bezogen auf S', bedeutet,

$$p' = p + \frac{dp}{dt}(t' - t) + \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dt^2}(t' - t)^2$$

Substituiert man hierin die aus (19), (20) und (17) folgenden Werte von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{d^2p}{dt^2}$, so ergibt sich

$$p' - p = -\frac{n(t' - t)}{\Delta \sin 1''}\sin(N - p) - \frac{n^2(t' - t)^2}{2\Delta^2 \sin 1''}\sin 2(N - p) \tag{21}$$

Im vorigen ist der Stern S_i als unbeweglich vorausgesetzt worden. Läßt man diese Voraussetzung fallen und nimmt an, daß sich S_i innerhalb des Zeitintervalls $t' - t$ von S_i nach S_i' bewegt, so ist die Distanz der Sterne S und S_i zur Zeit t' gleich $S'S_i' = \Delta''$. Es sei nun n_i die jährliche Eigenbewegung des Sterns S_i, gemessen im größten Kreise, und N_i der Positionswinkel dieser Eigenbewegung. Man erhält dann die Gleichung für $\Delta'' - \Delta'$, indem man in (18) n und N durch n_i und N_i ersetzt, ferner Δ' mit Δ'', Δ mit Δ' vertauscht und an Stelle von p den Positionswinkel von S' in bezug auf S_i substituiert; dieser Positionswinkel kann aber (vorausgesetzt, daß sich die Sterne nicht in der Nähe des Pols befinden) gleich $180^\circ + p'$ angenommen werden, wo p' durch die Gleichung (21) bestimmt ist. Es wird somit

$$\Delta'' - \Delta' = n_i(t' - t)\cos(N_i - p') + \frac{n_i^2(t' - t)^2}{2\Delta'}\sin^2(N_i - p')$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (18) folgt

$$\begin{aligned}\Delta'' = \Delta &- [n\cos(N - p) - n_i\cos(N_i - p')](t' - t) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{\Delta}\sin^2(N - p) + \frac{n_i^2}{\Delta'}\sin^2(N_i - p')\right](t' - t)^2\end{aligned} \tag{22}$$

In ähnlicher Weise läßt sich die Formel für den Positionswinkel ableiten. Man setze $PS'S_i' = p''$, so daß p'' den Positionswinkel von S_i', bezogen auf S', bedeutet. Um zunächst $p'' - p'$ zu erhalten, hat man in der Gleichung (21) n und N durch n_i, bzw. N_i, Δ durch Δ' und p durch $180^\circ + p'$ zu ersetzen. Es ergibt sich so

$$p'' - p' = \frac{n_i(t'-t)}{\Delta' \sin 1''} \sin(N_i - p') - \frac{n_i^2 (t'-t)^2}{2\Delta'^2 \sin 1''} \sin 2(N_i - p')$$

Addiert man diese Gleichung zu (21), so erhält man

$$(23) \qquad p'' = p - \frac{1}{\sin 1''}\left[\frac{n}{\Delta} \sin(N-p) - \frac{n_i}{\Delta'} \sin(N_i - p')\right](t'-t)$$
$$- \frac{1}{2 \sin 1''}\left[\frac{n^2}{\Delta^2} \sin 2(N-p) + \frac{n_i^2}{\Delta'^2} \sin 2(N_i - p')\right](t'-t)^2$$

Ist eine der Eigenbewegungen, beispielsweise n_i, sehr klein, und beträgt die Differenz $t' - t$ nur wenige Jahre, so kann man die in (22) und (23) von n_i^2 abhängigen Glieder vernachlässigen und $\Delta' = \Delta$, $p' = p$ annehmen; damit wird

$$(22^a) \qquad \Delta'' = \Delta - [n \cos(N-p) - n_i \cos(N_i - p)](t'-t) + \frac{n^2 \sin^2(N-p)}{2\Delta}(t'-t)^2$$

$$(23^a) \qquad p'' = p - \frac{1}{\Delta \sin 1''}[n \sin(N-p) - n_i \sin(N_i - p)](t'-t) - \frac{n^2 \sin 2(N-p)}{2\Delta^2 \sin 1''}(t'-t)^2$$

57a. Sternströme. Wenn man auf einem Himmelsglobus die Richtungen der Eigenbewegungen der Sterne aufzeichnet, so findet man wiederholt, daß mehrere dieser Richtungen gegen einen Punkt hin konvergieren; diese Erscheinung weist auf die Existenz von Sterngruppen hin, deren Glieder sich im Raum in parallelen, von Gruppe zu Gruppe verschiedenen Richtungen bewegen. Stellen nämlich die zueinander parallelen Geraden Ss, $S's'$, $S''s''$ (Fig. 5) die Richtungen dar, in denen sich drei Sterne relativ zur Sonne (M) bewegen, und zieht man durch M die Gerade $K'K$ parallel zu Ss, $S's'$, $S''s''$, so schneiden die Ebenen $MSsK$, $MS's'K$, $MS''s''K$ die um M beschriebene Sphäre in drei größten Kreisen, welche den gemeinsamen Durchmesser $K'K$ haben und somit durch die beiden Punkte hindurchgehen, in denen dieser Durchmesser die Sphäre trifft. Um die Durchschnittspunkte der Geraden $K'K$ mit der Sphäre zu finden, betrachte man zunächst nur zwei zueinander parallele Sternbahnen, beispielsweise Ss und $S's'$, und nehme an, daß S und S' die Örter der beiden Sterne zur Zeit t seien. Die Punkte, in denen die Richtungen MS, MS' und MK verlängert die Sphäre treffen, sind in Fig. 6 mit S, S' und K bezeichnet; SK und $S'K$ geben somit die Richtungen der Eigenbewegungen der beiden Sterne an der Sphäre an. Ist dann P der Nordpol des Äquators, und werden die Rektaszensionen in der Richtung des Pfeils gezählt, so sind $PSK = N$ und $PS'K = N'$ die Positionswinkel der Eigenbewegungen; die Werte von N und N' ergeben sich

Fig. 5.

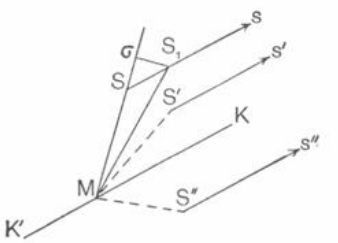
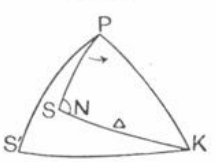


Fig. 6.



mit Hilfe der Gleichungen (3) des § 55, wenn für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die für die Sterne S und S' gültigen Komponenten der Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination substituiert werden. Es seien nun α, δ, bzw. α', δ', bzw. A, D die Rektaszension und Deklination von S, S' und K, ferner werde $SK = \Delta$ und $S'K = \Delta'$ gesetzt; aus dem Dreieck PSK folgt dann

$$\begin{aligned} \sin\Delta \sin N &= \cos D \sin(A-\alpha) \\ \sin\Delta \cos N &= \cos\delta \sin D - \sin\delta \cos D \cos(A-\alpha) \\ \cos\Delta &= \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(A-\alpha) \end{aligned} \tag{24}$$

Durch Division der beiden ersten Gleichungen erhält man

$$\sin N \left[\cos\delta \operatorname{tang} D - \sin\delta \cos(A-\alpha)\right] = \sin(A-\alpha)\cos N$$

Setzt man hier

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin N \sin\delta \\ m \cos M &= \cos N, \end{aligned} \tag{25}$$

so ergibt sich

$$\sin N \cos\delta \operatorname{tang} D = m \sin(A - \alpha + M) \tag{26}$$

oder

$$\sin N \cos\delta \operatorname{tang} D = m \cos(M-\alpha)\sin A + m \sin(M-\alpha)\cos A \tag{26a}$$

Ebenso erhält man für den zweiten Stern, wenn

$$\begin{aligned} m' \sin M' &= \sin N' \sin\delta' \\ m' \cos M' &= \cos N' \end{aligned} \tag{27}$$

gesetzt wird,

$$\sin N' \cos\delta' \operatorname{tang} D = m' \cos(M'-\alpha')\sin A + m' \sin(M'-\alpha')\cos A \tag{28}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} &\sin N \cos\delta = c, && m\cos(M-\alpha) = a, && m\sin(M-\alpha) = b, \\ &\sin N' \cos\delta' = c', && m'\cos(M'-\alpha') = a', && m'\sin(M'-\alpha') = b', \end{aligned} \tag{29}$$

so werden die Gleichungen (26a) und (28)

$$\begin{aligned} a\sin A + b\cos A &= c \operatorname{tang} D \\ a'\sin A + b'\cos A &= c' \operatorname{tang} D \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn $\operatorname{tang} D$ eliminiert wird,

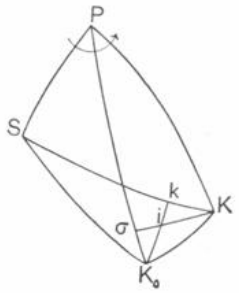
$$\operatorname{tang} A = -\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c} \tag{30}$$

Diese Gleichung liefert zwei um 180° voneinander verschiedene Werte von A; der eine derselben gilt für den Punkt K, der andere für den dem K diametral gegenüberliegenden Punkt der Sphäre. Die den beiden Werten von A entsprechenden Werte von D ergeben sich mit Hilfe der Gleichung (26).

Ist für mehrere Sterne der gemeinsame Konvergenzpunkt ihrer Eigenbewegungen zu bestimmen, so benutzt man die vorigen Formeln dazu, um zunächst aus den

Eigenbewegungen zweier der Sterne genäherte Werte der Rektaszension und Deklination des gesuchten Punktes zu finden; diese mögen mit A_0, bzw. D_0 bezeichnet werden. In Fig. 7 sei nun K_0 der durch die Koordinaten A_0 und D_0 bestimmte Punkt der Sphäre, K sei der wahre Ort des Konvergenzpunktes, P und S sollen dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 6. Zieht man K_0k senkrecht zu SK und $K\sigma$ senkrecht zu PK_0, bezeichnet man ferner den Winkel PK_0S mit ω, so ist der Winkel σK_0k sehr nahe gleich $90^0 - \omega$ und $\sigma i K_0 = \omega$; indem man dann die kleinen rechtwinkligen Dreiecke $K\sigma K_0$ und KkK_0 als eben betrachtet, findet man

Fig. 7.



$$K_0k = \sigma K_0 \sin\omega + \sigma K \cos\omega \tag{31}$$

Es seien jetzt A und D die Äquatorealkoordinaten von K, ferner setze man $A - A_0 = dA$, $D - D_0 = dD$, $PSK = N$, $PSK_0 = N_0$, $SK_0 = \Delta_0$; man erhält dann $\sigma K_0 = dD$ und, mit Zuhilfenahme der sphärischen Dreiecke SK_0k, bzw. $P\sigma K$, $K_0k = (N_0 - N)\sin\Delta_0$, $\sigma K = \cos D dA$. Werden die hier gefundenen Werte in die Gleichung (31) substituiert, so folgt, wenn $\cos D dA = \cos D_0 dA$ gesetzt wird,

$$(N_0 - N)\sin\Delta_0 = \sin\omega\, dD + \cos\omega\, \cos D_0\, dA \tag{32}$$

Die zur Berechnung von ω dienenden Formeln ergeben sich aus dem Dreieck PSK_0, und zwar erhält man, wenn man die Rektaszension und Deklination des Sterns mit α, bzw. δ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \sin\Delta_0 \sin\omega &= \sin(A_0 - \alpha)\cos\delta \\ \sin\Delta_0 \cos\omega &= \sin\delta \cos D_0 - \cos\delta \sin D_0 \cos(A_0 - \alpha) \end{aligned} \tag{33}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} h \sin H &= \sin\delta \\ h \cos H &= \cos\delta \cos(A_0 - \alpha) \end{aligned} \tag{33ª}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin\Delta_0 \sin\omega &= \sin(A_0 - \alpha)\cos\delta \\ \sin\Delta_0 \cos\omega &= h \sin(H - D_0) \\ \cos\Delta_0 &= h \cos(H - D_0) \end{aligned} \tag{33ᵇ}$$

Um die wahrscheinlichsten Werte von $\cos D_0 dA$ und dD zu finden, hat man in (32) an Stelle von N die mit Hilfe der Gleichungen (3) des § 55 erhaltenen Positionswinkel der Eigenbewegungen und an Stelle von N_0 und Δ_0 die aus (24) für $A = A_0$, $D = D_0$ folgenden Werte von N und Δ einzusetzen; werden die so entstehenden Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, so erhält man als Koordinaten des Konvergenzpunktes $A = A_0 + dA$, $D = D_0 + dD$.

Sind nun A und D gefunden, und kennt man außerdem die radialen Geschwindigkeiten der Sterne, so lassen sich auch die totalen Geschwindigkeiten und die Parallaxen der Sterne bestimmen. In Fig. 5 sei $SS_1 = v$ die Geschwindigkeit des Sterns S im Raum; zieht man dann $S_1\sigma$ senkrecht zu MS und setzt $S\sigma = \varrho$, so gibt ϱ die radiale Geschwindigkeit des Sterns an. Nun ist der Winkel $\sigma SS_1 = SMK$,

und SMK ist gleich dem mit Δ bezeichneten Bogen SK in Fig. 6; es folgt also aus dem Dreieck $S_1 S\sigma$ in Fig. 5

$$v = \varrho \sec \Delta \tag{34}$$

Wie schon in § 54 bemerkt wurde, sind die von den Beobachtern angegebenen Werte von ϱ in Kilometern ausgedrückt und beziehen sich auf die mittlere Sekunde als Zeiteinheit; multipliziert man diese Werte mit 0.212, so erhält man dem § 54 zufolge die auf die halbe große Achse der Erdbahn als Längeneinheit und auf ein tropisches Jahr als Zeiteinheit bezogenen radialen Geschwindigkeiten. Wird die auf die zuletzt genannten Einheiten bezogene totale Geschwindigkeit mit v' bezeichnet, so ergibt sich

$$v' = 0.212\ \varrho \sec \Delta \tag{34a}$$

Hier, wie auch in der Gleichung (34), hat man für Δ seinen aus den Gleichungen (24) für $A = A_0 + dA$ und $D = D_0 + dD$ folgenden Wert zu substituieren.

Der Winkel $\sigma M S_1$ (Fig. 5) ist die Eigenbewegung des Sterns, im größten Kreise gemessen; wird diese wie oben mit n bezeichnet, und setzt man $MS_1 = r$, so folgt, wenn n in Bogensekunden ausgedrückt wird, $\sigma S_1 = rn \sin 1''$. Nun ist σS_1 auch gleich $v \sin \Delta$; somit wird

$$r = \frac{v \sin \Delta}{n \sin 1''}$$

Substituiert man hier für v seinen in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückten Wert v', so wird auch r in dieser Einheit ausgedrückt erhalten; da aber dann $\frac{1}{r} = \sin \pi$ ist, wo π die Parallaxe des Sterns bedeutet, so ergibt sich, wenn noch $\sin \pi = \pi \sin 1''$ gesetzt wird,

$$\pi = \frac{n}{v' \sin \Delta} \tag{35}$$

Mit Rücksicht darauf, daß v' auf das tropische Jahr als Zeiteinheit bezogen ist, hat man unter n die jährliche Eigenbewegung im größten Kreise gemessen zu verstehen.

Beispiel. Die vorhin abgeleiteten Formeln sollen jetzt auf die in der ersten Kolumne der folgenden Tabelle erwähnten Sterne angewandt werden. Die auf das mittlere Äquinox 1900.0 bezogenen Koordinaten dieser Sterne sind in der zweiten und dritten Kolumne mitgeteilt, die vierte und fünfte Kolumne enthalten die jährlichen Eigenbewegungen in Rektaszension und Deklination nach den Angaben von *L. Boss* (Preliminary General Catalogue of 6188 stars for the epoch 1900); unter Benutzung dieser Werte findet man mittels der Gleichungen (3) des § 55 die in der 6. und 7. Kolumne angegebene Eigenbewegung im größten Kreise, bzw. den Positionswinkel der Eigenbewegung. Die Bedeutung der in der 8. Kolumne enthaltenen Zahlen wird unten erläutert werden.

Tafel I.

	α	δ	$\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{d\delta}{dt}$	n	N	$\mathfrak{N}$
β Aurigae	$5^h 52^m$	$+44^\circ 56'$	$-0''.066$	$-0''.005$	$0''.047$	$263^\circ 53'$	$261^\circ 44'$
Sirius	6 41	-16 35	-0.549	-1.206	1.315	203 34	204 14
β Ursae maj.	10 56	$+56$ 55	$+0.153$	$+0.028$	0.088	71 28	69 28
δ Leonis	11 9	$+21$ 4	$+0.159$	-0.145	0.207	134 21	131 28
γ Ursae maj.	11 49	$+54$ 15	$+0.160$	$+0.003$	0.094	88 10	87 26
δ » »	12 10	$+57$ 35	$+0.205$	$+0.003$	0.110	88 26	87 26
ε » »	12 50	$+56$ 30	$+0.208$	-0.011	0.115	95 28	96 43
ζ^1 » »	13 20	$+55$ 27	$+0.222$	-0.030	0.129	103 24	103 19
α Coronae b.	15 30	$+27$ 3	$+0.135$	-0.102	0.158	130 19	132 20

Auf Grund einer von *Hertzsprung* ausgeführten Untersuchung kann man für die Rektaszension und Deklination des Konvergenzpunktes der Eigenbewegungen der obigen Sterne die Näherungswerte $A_0 = 309^\circ$, $D_0 = -42^\circ$ annehmen. Unter Benutzung dieser Koordinaten und der in der zweiten und dritten Kolumne der vorigen Tafel enthaltenen Rektaszensionen und Deklinationen wurden mittels der Gleichungen (24) Δ_0 und N_0 berechnet; hierauf wurde für jeden Stern das Produkt $(N_0 - N)\sin\Delta_0$ gebildet, wo N den in der 7. Kolumne angegebenen Positionswinkel bedeutet. Nachdem dann noch mit Hilfe der Gleichungen (33) die Werte von $\sin\omega$ und $\cos\omega$ berechnet waren, ergaben sich die hierunter mitgeteilten Bedingungsgleichungen. Die rechts neben dem ersten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen stellen die Werte von $(N_0 - N)\sin\Delta_0$, ausgedrückt in Bogenminuten, dar; dividiert man diese Zahlen (der in § 7 gegebenen Vorschrift gemäß) durch die größte unter ihnen (163′), so erhält man die rechts neben dem zweiten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen.

β Aurigae	$+0.339\cos D_0\, dA$	$-0.941\, dD$	$=-$	86′	$=-$	0.528
Sirius	-0.859 »	-0.512 »	$=-$	8	$=-$	0.050
β Ursae maj.	$+0.719$ »	$+0.695$ »	$=-$	8	$=-$	0.050
δ Leonis	-0.361 »	$+0.933$ »	$=-$	86	$=-$	0.528
γ Ursae maj.	$+0.618$ »	$+0.786$ »	$=+$	22	$=+$	0.132
δ » »	$+0.693$ »	$+0.721$ »	$=+$	10	$=+$	0.059
ε » »	$+0.677$ »	$+0.735$ »	$=+$	97	$=+$	0.596
ζ^1 » »	$+0.673$ »	$+0.740$ »	$=+$	42	$=+$	0.258
α Coronae b.	$+0.484$ »	$+0.875$ »	$=+$	163	$=+$	1.000

Allen diesen Gleichungen möge dasselbe Gewicht beigelegt werden; mit Anwendung der rechts neben dem zweiten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen erhält man dann die folgenden Normalgleichungen und die mit $[nn]$ bezeichnete Summe der Fehlerquadrate.

$$3.508\cos D_0\, dA + 2.688\, dD = 1.202$$
$$2.688 \quad » \quad + 5.492 \quad » \quad = 1.647$$
$$[nn] = 2.005$$

Löst man diese Normalgleichungen nach dem in § 8, II erläuterten Verfahren auf, so ergeben sich die folgenden Werte von $\cos D_0 dA$ und dD nebst ihren mittleren Fehlern

$$\cos D_0 dA = +0.1807 \pm 0.3063, \qquad dD = +0.2115 \pm 0.2448$$

Um diese Werte in Bogenminuten ausgedrückt zu erhalten, sind dieselben mit der Fehlereinheit (= 163′) zu multiplizieren; es wird also

$$\cos D_0 dA = +29'.5 \pm 50', \qquad dD = +35' \pm 40',$$

folglich

$$dA = +40' \pm 67', \qquad dD = +35' \pm 40'$$

Somit ergibt sich

$$A = 309^\circ 40', \qquad D = -41^\circ 25'$$

Mit Hilfe dieser Koordinaten wurden die Gleichungen (24) nochmals aufgelöst; die dadurch erhaltenen Werte von N sind in der 8. Kolumne der obigen Tafel unter der Bezeichnung $\mathfrak{N}$ eingetragen, die Werte von $\log \sin \Delta$ und $\log \cos \Delta$ findet man in Tafel II angegeben. Der Unterschied zwischen N und $\mathfrak{N}$ ist am größten für δ Leonis; nimmt man den in Tafel I für δ Leonis gegebenen Wert $n = 0''.207$ als richtig an, so erhält man für die dem Positionswinkel $\mathfrak{N} = 131^\circ 28'$ entsprechende jährliche Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination $+0''.166$, bzw. $-0''.137$.

Tafel II.

	$\log \sin \Delta$	$\log \cos \Delta$	ϱ km	r km	$\log v' \sin \Delta$	π
β Aurigae	9.7018	9_n9366	− 17.9	− 16.7	0.3137	0″.023
Sirius	9.9539	9_n6404	− 8.1	− 8.4	0.5658	0.357
β Ursae maj.	9.6542	9_n9506	− 16.8	− 17.2	0.2661	0.048
δ Leonis	9.7851	9_n8991			0.3970	0.083
γ Ursae maj.	9.7429	9_n9206			0.3548	0.041
δ » »	9.7775	9_n9035			0.3894	0.045
ε » »	9.8268	9_n8700			0.4387	0.042
ζ^1 » »	9.8607	9_n8377	− 12.6	− 13.3	0.4726	0.044
α Coronae b.	9.9949	9_n1796	+ 0.4	− 2.9	0.6068	0.039

Die vierte Kolumne der vorstehenden Tafel enthält für 5 Sterne die beobachteten radialen Geschwindigkeiten ϱ; infolge des Mangels an hinreichend scharf begrenzten Linien in den Spektren der vier anderen Sterne lassen sich für letztere die Werte von ϱ nicht bestimmen. Mit Hilfe von ϱ und Δ kann man nach (34) die totale Geschwindigkeit (v) berechnen, indessen soll zuerst das Gewicht einer solchen Geschwindigkeitsbestimmung ermittelt werden. Bezeichnet man mit ε den mittleren Fehler von ϱ, so ergibt sich aus (34) für den mittleren Fehler von v der Wert $\varepsilon \sec \Delta$. Es werde nun angenommen, daß die mittleren Fehler der beobachteten ϱ einander gleich seien; wenn sich dann zwei Sterne im Abstande Δ_1, bzw. Δ_2 vom Konvergenzpunkt befinden, und v_1 und v_2 die totalen Geschwindigkeiten der beiden

Sterne im Raum bedeuten, so erhält man, wenn die Gewichte von v_1 und v_2 mit p_1, bzw. p_2 bezeichnet werden, und $p_1 = 1$ gesetzt wird,

$$p_2 = \frac{\sec^2 \Delta_1}{\sec^2 \Delta_2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man, daß, wenn das Gewicht des für β Ursae maj. folgenden Wertes von v als Einheit angenommen wird, das Gewicht des für α Coronae sich ergebenden Wertes von v nur mehr 0.03 ist. Läßt man den zuletzt genannten Stern vorläufig unberücksichtigt, so erhält man die hierunter angeführten Werte der totalen Geschwindigkeit nebst ihren Gewichten.

	v	Gewicht		v	Gewicht
	km			km	
β Aurigae	+ 20.7	0.94	β Ursae maj.	+ 18.8	1.00
Sirius	+ 18.5	0.24	ξ^1 » »	+ 18.3	0.59

Die Differenzen zwischen diesen 4 Werten von v lassen sich vollständig durch Beobachtungsfehler erklären; nimmt man demnach an, daß sich die vier Sterne in Wirklichkeit mit gleicher Geschwindigkeit im Raum bewegen, so erhält man als wahrscheinlichsten Wert dieser Geschwindigkeit 19.3^{km}. Für $v = 19.3^{km}$ gibt die Gleichung (34) die in der 5. Kolumne der Tafel II mit r bezeichneten Werte von ϱ. Der größte Unterschied zwischen der beobachteten und berechneten radialen Geschwindigkeit findet für α Coronae statt und beträgt 3.3^{km}. Auch diese Differenz kann gegenwärtig noch teils auf Rechnung der Beobachtungsfehler, teils auf Rechnung des für v angenommenen Wertes gesetzt werden. Macht man nun die Hypothese, daß sich alle in der Tafel I aufgeführten Sterne mit der Geschwindigkeit 19.3^{km} in der Sekunde, also mit der in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückten und auf das tropische Jahr als Zeiteinheit bezogenen Geschwindigkeit $v' = 4.092$ im Raum bewegen, so erhält man die in der 6. Kolumne der Tafel II angegebenen Werte von $\log v' \sin \Delta$; werden diese und die in Tafel I mitgeteilten Werte von n in die Gleichung (35) substituiert, so ergeben sich die in der 7. Kolumne der Tafel II enthaltenen Parallaxen.