universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel VIII. Jährliche Parallaxe.

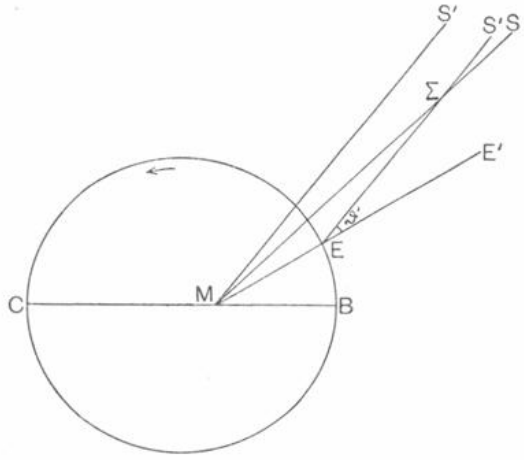
urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Kapitel VIII.

Jährliche Parallaxe.

52. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. In Fig. 1 sei M der Mittelpunkt der Sonne, BEC sei die Erdbahn, Σ der Ort eines Fixsterns. Befindet sich die Erde in E, so ist ES' die geozentrische und MS die heliozentrische Richtung zum Stern hin; den Winkel $M\Sigma E$ zwischen diesen beiden Richtungen nennt man die jährliche Parallaxe des Sterns. Wird der Winkel $M\Sigma E$ mit σ, der Winkel $S'EE'$ mit ϑ', der Radiusvektor ME der Erde mit R und die Entfernung $M\Sigma$ des Sterns von der Sonne mit r bezeichnet, so hat man

Fig. 1.



$$\sin\sigma = \frac{R}{r}\sin\vartheta'$$

Den in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Werten von R liegt als Längeneinheit die halbe große Achse der Erdbahn zugrunde; denkt man sich auch r durch diese Einheit gemessen und setzt

$$\sin\pi = \frac{1}{r},$$

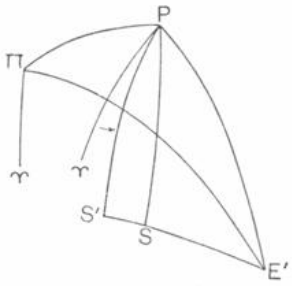
so folgt $\sin\sigma = R\sin\pi\sin\vartheta'$ oder hinreichend genau

$$\sigma = R\pi\sin\vartheta' \tag{1}$$

Der Winkel π wird die Parallaxe des Sterns genannt.

Es sei nun Π (Fig. 2) der Pol der Ekliptik, P der Pol des Äquators, $\Pi\Upsilon$ und $P\Upsilon$ seien Stücke der den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt mit Π, bzw. P verbindenden Bögen, ferner seien E', S, S' die auf einem größten Kreise liegenden Punkte, in denen die in Fig. 1 mit ME, $M\Sigma$ bezeichneten Richtungen und die von M aus parallel zu $E\Sigma$ gezogene Gerade MS' die Sphäre schneiden; S ist somit der heliozentrische und S' der geozentrische Ort des Sterns an der Sphäre. Die Äquatorealkoordinaten von S' und S mögen mit α', δ', bzw. α, δ bezeichnet werden. Da der Bogen $S'S = \sigma$ klein

Fig. 2.



ist, und da dasselbe von den Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ gilt, so folgt aus dem Dreieck $PS'S$, wenn noch der Winkel bei S' gleich q' gesetzt wird,

$$(2) \qquad \begin{aligned} (\alpha - \alpha') \cos\delta &= \sigma \sin q' = R\pi \sin\vartheta' \sin q' \\ \delta - \delta' &= \sigma \cos q' = R\pi \sin\vartheta' \cos q' \end{aligned}$$

Es sei jetzt φ die Rektaszension und d die Deklination des heliozentrischen Ortes der Erde E'; das Dreieck $PS'E'$, worin der Winkel bei P gleich $\varphi - \alpha'$, ferner $S'E' = \vartheta'$ und $PE' = 90^\circ - d$ ist, gibt dann

$$\begin{aligned} \sin\vartheta' \sin q' &= \cos d \sin(\varphi - \alpha') \\ \sin\vartheta' \cos q' &= \sin d \cos\delta' - \cos d \sin\delta' \cos(\varphi - \alpha') \end{aligned}$$

Die Werte von φ und d lassen sich mit Hilfe des Dreieckes $\Pi PE'$ berechnen. Man hat nämlich, wenn die heliozentrische Länge der Erde mit l und die Schiefe der Ekliptik mit ε bezeichnet wird, $P\Pi E' = 90^\circ - l$, $\Pi P = \varepsilon$, ferner ist $\Pi PE' = 90^\circ + \varphi$, $PE' = 90^\circ - d$ und $\Pi E' = 90^\circ$; somit erhält man

$$\begin{aligned} \cos d \cos\varphi &= \cos l \\ \cos d \sin\varphi &= \cos\varepsilon \sin l \\ \sin d &= \sin\varepsilon \sin l \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} \sin\vartheta' \sin q' &= \cos\varepsilon \sin l \cos\alpha' - \cos l \sin\alpha' \\ \sin\vartheta' \cos q' &= \sin\varepsilon \sin l \cos\delta' - (\cos l \cos\alpha' + \cos\varepsilon \sin l \sin\alpha') \sin\delta' \end{aligned}$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (2) und setzt $l = 180^\circ + \odot$, wo $\odot$ die Länge der Sonne bedeutet, so folgt

$$(3) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + R\pi\,[\cos\varepsilon \cos\alpha' \sin\odot - \sin\alpha' \cos\odot] \sec\delta \\ \delta' &= \delta + R\pi\,[(\sin\varepsilon \cos\delta' - \cos\varepsilon \sin\alpha' \sin\delta') \sin\odot - \cos\alpha' \sin\delta' \cos\odot] \end{aligned}$$

In den mit π multiplizierten Gliedern dieser Gleichungen kann man α' und δ' mit α und δ vertauschen; setzt man dann noch

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{m} \sin\mathfrak{M} &= \sin\alpha & \qquad \mathfrak{n} \sin\mathfrak{N} &= \cos\alpha \sin\delta \\ \mathfrak{m} \cos\mathfrak{M} &= \cos\alpha \cos\varepsilon & \qquad \mathfrak{n} \cos\mathfrak{N} &= \sin\varepsilon \cos\delta - \cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta, \end{aligned}$$

so wird

$$(5) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + R\pi\mathfrak{m} \sin(\odot - \mathfrak{M}) \sec\delta \\ \delta' &= \delta + R\pi\mathfrak{n} \sin(\odot - \mathfrak{N}) \end{aligned}$$

An Stelle der Gleichungen (5) lassen sich auch die folgenden anwenden. Man setze

$$(6) \qquad C_1 = R \sin\odot \cos\varepsilon \qquad D_1 = -R \cos\odot$$

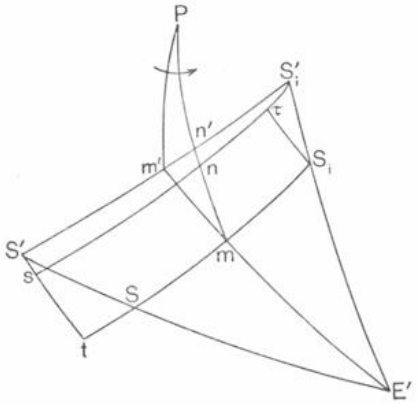
$$(7) \qquad \begin{aligned} c_1 &= \pi \cos\alpha \sec\delta & \qquad c_1' &= \pi\,(\operatorname{tang}\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) \\ d_1 &= \pi \sin\alpha \sec\delta & \qquad d_1' &= \pi \cos\alpha \sin\delta \end{aligned}$$

und erhält dann

$$(8) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + c_1 C_1 + d_1 D_1 \\ \delta' &= \delta + c_1' C_1 + d_1' D_1 \end{aligned}$$

53. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne. In Fig. 3 bedeute E' den heliozentrischen Ort der Erde, S und S_i seien die heliozentrischen Örter zweier Sterne, S' und S_i' ihre geozentrischen Örter; die Distanz der beiden Sterne soll kleiner als 2° vorausgesetzt werden. Bezeichnet m' den Mittelpunkt von $S'S_i'$ und m den Mittelpunkt von SS_i, bedeutet ferner P den Nordpol des Äquators, und nehmen die Rektaszensionen in der Richtung des Pfeils zu, so ist $Pm'S_i' = p'$ der geozentrische und $PmS_i = p$ der heliozentrische Positionswinkel des Sterns S_i, bezogen auf m', bzw. m. Die geozentrische Distanz der beiden Sterne werde mit $\varDelta'$ und ihre heliozentrische Distanz mit $\varDelta$ bezeichnet, man hat also $S'S_i' = \varDelta'$ und $SS_i = \varDelta$.

Fig. 3.



Die Bögen SS' und S_iS_i' sind stets kleiner als $1''$, SS_i und $S'S_i'$ sind demnach sehr nahe einander gleich und bilden auch nur einen kleinen Winkel miteinander. Man ziehe jetzt $S_i's$ parallel zu S_iS, ferner $S't$ und $S_i\tau$ senkrecht zu S_iS. Da der Winkel $Pn'S_i'$ nur unmerklich von $Pm'S_i' = p'$ verschieden und $PnS_i' = PmS_i = p$ ist, so ist $S'S_i's = p' - p$, also, wenn $S'S_i' = \varDelta'$ in Sekunden ausgedrückt wird, $S's = \varDelta' \sin 1''(p' - p)$. Die Strecke $S's$ läßt sich aber noch anders ausdrücken. Man hat nämlich $S's = S't - S_i\tau = SS' \cos E'S't - S_iS_i' \sin E'S_i's$ und mit Berücksichtigung der Gleichung (1), wenn π und π_i die Parallaxen der Sterne S und S_i bedeuten, $SS' = R\pi \sin E'S'$, $S_iS_i' = R\pi_i \sin E'S_i'$; hieraus folgt

$$S's = R\pi \sin E'S' \cos E'S't - R\pi_i \sin E'S_i' \sin E'S_i's$$

Da der Winkel $S'S_i's$ klein ist, so ist $S't$ auch nahe senkrecht zu $S'S_i'$ und demnach $E'S't$ nahe gleich $90^\circ - E'S'm'$; ferner ist $E'S_i's$ nahe gleich $E'S_i'm'$. Somit wird die vorige Gleichung

$$\begin{aligned} S's &= R\pi \sin E'S' \sin E'S'm' - R\pi_i \sin E'S_i' \sin E'S_i'm' \\ &= R(\pi - \pi_i) \sin E'm' \sin E'm'S_i' \end{aligned}$$

Wegen des kleinen Faktors $\pi - \pi_i$ kann man hier $\sin E'm' \sin E'm'S_i' = \sin E\,m \sin E'mS_i$ setzen; substituiert man ferner noch für $S's$ seinen oben gefundenen Wert $(p' - p)\varDelta' \sin 1'' = (p' - p)\varDelta \sin 1''$, so erhält man

$$(p' - p)\varDelta \sin 1'' = R(\pi - \pi_i) \sin E'm \sin E'mS_i \tag{9}$$

Um eine entsprechende Gleichung für $\varDelta' - \varDelta$ zu finden, projiziere man die gebrochene Strecke $S'SS_iS_i'$ auf $S'S_i'$; mit Rücksicht darauf, daß der Cosinus des Winkels zwischen SS_i und $S'S_i'$ gleich 1 gesetzt werden darf, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \varDelta' &= \varDelta + SS' \cos E'S'm' + S_iS_i' \cos E'S_i'm' \\ &= \varDelta + R\pi \sin E'S' \cos E'S'm' + R\pi_i \sin E'S_i' \cos E'S_i'm' \end{aligned}$$

Aus den Dreiecken $E'S'm'$ und $E'S_i'm'$ folgt aber

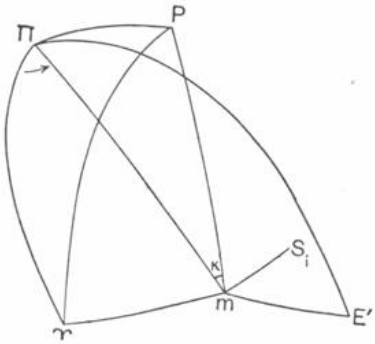
$$\sin E'S' \cos E'S'm' = \cos E'm' \sin \tfrac{1}{2}\varDelta' + \sin E'm' \cos \tfrac{1}{2}\varDelta' \cos E'm'S_i'$$
$$\sin E'S_i' \cos E'S_i'm' = \cos E'm' \sin \tfrac{1}{2}\varDelta' - \sin E'm' \cos \tfrac{1}{2}\varDelta' \cos E'm'S_i'$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung, setzt dann $\cos \frac{1}{2}\varDelta' = 1$, $\sin E'm' \cos E'm'S_i' = \sin E'm \cos E'mS_i$ und vernachlässigt die Produkte aus $\sin \frac{1}{2}\varDelta'$ und π, bzw. π_i, so erhält man

$$\varDelta' - \varDelta = R(\pi - \pi_i) \sin E'm \cos E'mS_i \tag{10}$$

In Fig. 4 mögen nun P, S_i, m und E' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 3, Π bezeichne den Pol der Ekliptik und Υ den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt, der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Längen gezählt werden. Setzt man $\Pi mP = \varkappa$, $\Pi mE' = \gamma$ und berücksichtigt, daß $PmS_i = p$ ist, so folgt $E'mS_i = = \gamma - (\varkappa + p)$; wird jetzt noch $E'm = \omega$ gesetzt, so lauten die Gleichungen (9) und (10)

Fig. 4.



$$(p' - p)\varDelta \sin 1'' = R(\pi - \pi_i) \sin\omega \sin[\gamma - (\varkappa + p)]$$
$$\varDelta' - \varDelta = R(\pi - \pi_i) \sin\omega \cos[\gamma - (\varkappa + p)]$$

Wenn aber λ die Länge und β die Breite des Punktes m bedeutet, wenn ferner die Länge der Sonne mit $\odot$, also die Länge von E' mit $180^\circ + \odot$ bezeichnet, und die Sonnenbreite vernachlässigt wird, so gibt das Dreieck $\Pi mE'$

$$\sin\omega \sin\gamma = -\sin(\odot - \lambda)$$
$$\sin\omega \cos\gamma = \sin\beta \cos(\odot - \lambda)$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen erhält man

$$(p' - p)\varDelta \sin 1'' = -R(\pi - \pi_i)[\cos(\odot - \lambda) \sin(\varkappa + p) \sin\beta + \sin(\odot - \lambda) \cos(\varkappa + p)]$$
$$\varDelta' - \varDelta = R(\pi - \pi_i)[\cos(\odot - \lambda) \cos(\varkappa + p) \sin\beta - \sin(\odot - \lambda) \sin(\varkappa + p)]$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} m \sin M &= -\cos(\varkappa + p) & n \sin N &= -\sin(\varkappa + p) \\ m \cos M &= -\sin(\varkappa + p) \sin\beta & n \cos N &= \cos(\varkappa + p) \sin\beta \end{aligned} \tag{11}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} (p' - p)\varDelta \sin 1'' &= Rm(\pi - \pi_i) \cos[\odot - (\lambda + M)] \\ \varDelta' - \varDelta &= Rn(\pi - \pi_i) \cos[\odot - (\lambda + N)] \end{aligned} \tag{12}$$

Der Winkel $\varkappa$ läßt sich mit Hilfe der Dreiecke $\Pi\Upsilon m$ und $P\Upsilon m$ berechnen. Wird nämlich die Rektaszension und Deklination von m mit α und δ bezeichnet, und setzt man $\Upsilon m\Pi = y$, $\Upsilon m = h$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin h \sin y &= \sin\lambda & \sin h \sin(y + \varkappa) &= \sin\alpha \\ \sin h \cos y &= -\cos\lambda \sin\beta & \sin h \cos(y + \varkappa) &= -\cos\alpha \sin\delta \end{aligned} \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (11) folgt noch

$$\begin{aligned} m^2 &= 1 - \sin^2(\varkappa + p) \cos^2\beta \\ n^2 &= 1 - \cos^2(\varkappa + p) \cos^2\beta \end{aligned} \tag{14}$$

Es erreicht somit m seinen Maximalwert, wenn p gleich $180^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $360^\circ - \varkappa$ ist, dagegen ist n ein Maximum, wenn p gleich $90^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $270^\circ - \varkappa$ ist. Haben also mehrere Sternpaare gleiche Distanz und Parallaxendifferenz, so wird der Einfluß der Parallaxe auf den Positionswinkel für dasjenige Paar am größten, dessen Komponenten auf demselben Breitenkreise liegen; dagegen wird der Einfluß einer gegebenen Parallaxendifferenz auf die Distanz zweier Sterne am größten, wenn der durch die Sterne gelegte Bogen größten Kreises senkrecht zu dem Breitenkreise des Mittelpunktes dieses Bogens steht. Im ersten Falle findet das Maximum der parallaktischen Verschiebung statt, wenn $\odot = \lambda + M$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + M$ ist, im zweiten wenn $\odot = \lambda + N$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + N$ ist.

Kapitel IX.

Eigenbewegung der Fixsterne.

54. Einleitung. Werden die zu verschiedenen Zeiten beobachteten Örter eines Fixsterns auf ein und dasselbe Äquinox reduziert und gleichzeitig durch Anbringung einer etwaigen Korrektion wegen jährlicher Parallaxe in heliozentrische verwandelt, so zeigen die so erhaltenen Positionen nicht selten einen Gang. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist dieser der Zeit proportional; nur sehr wenige Sterne kennt man, deren Örter periodischen Änderungen unterworfen sind. Zur Erklärung eines fortschreitenden Ganges nimmt man an, daß der betreffende Stern eine Bewegung im Raume besitzt, die selbst innerhalb eines viele Jahre umfassenden Zeitraumes als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann. Periodische Ortsveränderungen kommen zustande, wenn beispielsweise der Stern einen Begleiter besitzt, und beide Sterne eine Ellipse um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben; auch in diesem Falle können die beobachteten Örter nebenbei noch einen der Zeit proportionalen Gang aufweisen, zu dessen Erklärung die Annahme einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Schwerpunktes im Raume hinreicht.

Es soll nun genauer untersucht werden, welche Folgerung sich für die von der Sonne aus gesehene Bewegung eines Sterns, bzw. des Schwerpunktes eines Sternsystems an der Sphäre ergibt, wenn die Bewegung des Sterns oder des Schwerpunktes im Raume als geradlinig und gleichförmig angenommen wird. In Fig. 1 sei Σ der Ort eines Sterns zur Zeit $t = 0$, $\Sigma\Sigma''$ sei die Richtung, in der sich der Stern relativ zur Sonne bewegt, und v die Geschwindigkeit dieser Bewegung; bedeutet dann $\Sigma\Sigma'$ die von dem Stern in dem Zeitelement dt relativ zur Sonne durchlaufene Strecke, so ist $\Sigma\Sigma' = v\,dt$. Von der Sonne (M) aus gesehen erscheint diese Strecke unter dem Winkel $\Sigma M \Sigma'$; wird dieser gleich $n\,dt$ gesetzt, so ist n die Winkel-

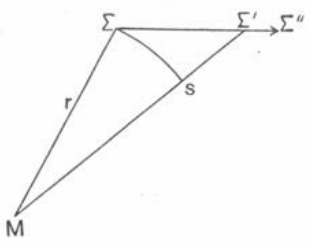



Fig. 1.