Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel VI. Berechnung der Kulminationszeit und der Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

sich, indem man von dem in (132) für $L - k + (A)$ gegebenen Ausdruck den von *Newcomb* für (A) angenommenen Wert subtrahiert. Man erhält so

$$L - k = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,597\,743''.20\,t - 0''.020\,t^2$$

Hieraus folgt, daß die Änderung, welche $L - k$, also auch L in einem julianischen Jahrhundert erfährt, gleich $129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$ ist. Die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in Teilen eines julianischen Jahrhunderts, ist demnach gleich $1\,296\,000'' : 129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$. Multipliziert man diesen Quotienten mit 36 525, so erhält man die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in mittleren Tagen, und zwar wird

(148) 1 siderisches Jahr $= (365.256\,360\,42 + 0.000\,000\,11\,t)$ mittlere Tage

Als anomalistisches Jahr bezeichnet man die Zeit, innerhalb deren die mittlere Anomalie der Sonne um 360° zunimmt. Nach *Newcomb* hat man

(149) 1 anomalistisches Jahr $= (365.259\,641\,34 + 0.000\,003\,04\,t)$ mittlere Tage.

Kapitel VI.

Berechnung der Kulminationszeit und der Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns.

39. Kulminationszeit. Für verschiedene Zwecke ist es notwendig, im voraus die mittlere Zeit der Kulmination eines Gestirns und auch die für diese Zeit gültige Rektaszension und Deklination des Gestirns zu kennen. Um an einem Beispiel zu zeigen, wie man zu dieser Kenntnis gelangt, soll zunächst für den Pariser Meridian die mittlere Zeit der auf den 5. April 1910 fallenden oberen Kulmination des Mondes berechnet werden; hierbei wird der in § 16 gefundene Satz benutzt, daß die Sternzeit der oberen Kulmination eines Gestirns gleich der Rektaszension des Gestirns zur Zeit der oberen Kulmination ist. Geht man nun in erster Näherung von der Annahme aus, daß die obere Kulmination des Mondes auf April 5, 12^h mittlerer Zeit Paris falle, so findet man mit Hilfe der in der Connaissance des Temps gegebenen Mondephemeride, daß die der oberen Kulmination entsprechende Rektaszension des Mondes also auch die Sternzeit seiner oberen Kulmination gleich $21^h 43^m$ ist. Da die Sternzeit im mittleren Mittage Paris für 1910 April 5 gleich $0^h 51^m 36^s.35$ ist, so kann man für die mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes in zweiter Näherung $21^h.7 - 0^h.9$ oder einfach 21^h annehmen. In der Connaissance des Temps findet man nun die folgenden Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes mitgeteilt:

1910 April 5

m. Zt. Paris	Rektaszension	1. Diff.	2. Diff.	Deklination	1. Diff.	2. Diff.
20^h	$22^h\,1^m\,43^s.81$			$-17°\,34'\,28''.8$		
		$+2^m\,18^s.55$			$+12'\,8''.4$	
21	4 2.36		$-0^s.12$	$-17\ 22\ 20.4$		$+7''.0$
		$+2\ 18.43$			$+12\ 15.4$	
22	6 20.79		-0.11	$-17\ 10\ 5.0$		$+7.0$
		$+2\ 18.32$			$+12\ 22.4$	
23	8 39.11			$-16\ 57\ 42.6$		

Die Rektaszension des Mondes ist also um 21^h m. Zt. Paris gleich $22^h\,4^m$. Subtrahiert man hiervon die vorhin für den 5. April 1910 angegebene Sternzeit im mittleren Pariser Mittage und verwandelt die Differenz $22^h\,4^m - 0^h\,52^m = 21^h\,12^m$ in ein Intervall mittlerer Zeit, so erhält man für die Kulminationszeit in dritter Näherung den Wert $21^h\,9^m$ m. Zt. Paris. Es sei jetzt n das in Bruchteilen einer mittleren Stunde ausgedrückte Zeitintervall, das man zu 21^h hinzuzufügen hat, um die genaue mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes zu erhalten, und es bedeute $f(21^h+n)$ die dieser Zeit entsprechende Rektaszension des Mondes; die in § 2 erläuterte Interpolationsformel (19) in Verbindung mit der vorigen Tabelle gibt dann

$$\text{a)}\qquad f(21^h+n) = 22^h\,4^m\,2^s.36 + n\left[2^m\,18^s.43 - \frac{n-1}{2}\,0^s.12\right]$$

Mit Benutzung der genäherten Kulminationszeit $21^h\,9^m = 21^h.15$ erhält man $n = 0.15$, also $\frac{n-1}{2}\,0^s.12 = -0^s.05$; folglich wird die vorige Gleichung

$$f(21^h+n) = 22^h\,4^m\,2^s.36 + 138^s.48\,n$$

Nun ist $f(21^h+n)$ auch gleich der im Moment der oberen Kulmination gezählten Sternzeit; für diese läßt sich aber ein zweiter Ausdruck gewinnen, indem man die mittlere Zeit der Kulmination oder 21^h+n in Sternzeit verwandelt. Zunächst sind 21 Stunden mittlerer Zeit gleich einem Intervall von $21^h\,3^m\,26^s.986$ Sternzeit; da ferner 1 Stunde mittlerer Zeit, in Sternzeit ausgedrückt, gleich $3609^s.856$ ist, so enthält der mit n bezeichnete Bruchteil einer mittleren Stunde $3609.856\,n$ Sternzeitsekunden. Unter Anwendung der für 1910, April 5 gültigen Sternzeit im mittleren Pariser Mittage ergibt sich also für die der mittleren Zeit 21^h+n entsprechende Sternzeit $0^h\,51^m\,36^s.35 + 21^h\,3^m\,26^s.986 + 3609^s.856\,n = 21^h\,55^m\,3^s.336 + 3609^s.856\,n$. Setzt man diesen Ausdruck dem zuletzt für $f(21^h+n)$ gefundenen gleich, so erhält man

$$21^h\,55^m\,3^s.336 + 3609^s.856\,n = 22^h\,4^m\,2^s.36 + 138^s.48\,n$$

oder

$$3471^s.376\,n = 539^s.024$$

Hieraus folgt in Bruchteilen einer mittleren Stunde $n = 0.155\,277$ oder, in Minuten und Sekunden ausgedrückt, $n = 9^m\,19^s.00$. Somit ergibt sich für 1910 April 5 als mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes im Pariser Meridian $21^h\,155\,277 = 21^h\,9^m\,19^s.00$. Substituiert man den Wert $n = 0.155\,277$ in die Gleichung (a), so erhält man die Rektaszension (α) des Mondes zur Zeit der oberen Kulmination, und zwar wird $\alpha = 22^h 4^m 23^s.86$. Für die zugehörige Deklination (δ) ergibt sich die der Gleichung (a) analoge Formel

$$\delta = -17^\circ 22' 20''.4 + n\left[12' 15''.4 + \frac{n-1}{2} 7''.0\right];$$

für $n = 0.155\,277$ wird also $\delta = -17^\circ 20' 26''.7$.

Um ein zweites Beispiel zu geben, soll für einen 5^h östlich von Paris gelegenen Ort die mittlere Ortszeit der auf den 5. April 1910 fallenden oberen Kulmination des Mondes berechnet werden. Man geht hierbei von der für Paris gültigen Kulminationszeit aus, die in der Connaissance des Temps von Tag zu Tag angegeben ist und am 5. April 1910 — in Übereinstimmung mit dem vorhin gefundenen Resultate — auf $21^h 9^m$ m. Zt. Paris fällt. Sieht man nun von der Bewegung des Mondes in Rektaszension ab, so würde der Mond an dem Orte O um 5 Stunden früher wie in Paris, also um $16^h 9^m$ m. Zt. Paris kulminieren. Nach der in der Connaissance des Temps enthaltenen Mondephemeride ist aber die für 16^h mittlere Pariser Zeit gültige Rektaszension des Mondes um 12^m kleiner wie die für 21^h gültige; demnach ergibt sich als Näherungswert der Kulminationszeit an dem Orte O $15^h 57^m$ m. Zt. Paris. Für die beiden dieser Zeit vorausgehenden Stunden und für die zwei folgenden findet man in der Connaissance des Temps die nachstehenden Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes angegeben:

1910 April 5

m. Zt. Paris	Rektaszension	1. Diff.	2. Diff.	Deklination	1. Diff.	2. Diff.
14^h	$21^h 47^m 50^s.14$			$-18^\circ 44' 48''.8$		
		$+2^m 19^s.23$			$+11' 25''.1$	
15	50 9.37		$-0^s.11$	-18 33 23.7		$+7''.4$
		$+2$ 19.12			$+11$ 32.5	
16	52 28.49		-0.12	-18 21 51.2		$+7.3$
		$+2$ 19.00			$+11$ 39.8	
17	54 47.49			-18 10 11.4		

Bezeichnet man jetzt mit $15^h + n$ die genaue mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes am Orte O und mit $f(15^h + n)$ die dieser Zeit entsprechende Rektaszension des Mondes, denkt man sich ferner n in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückt und macht, da hier $n > \frac{1}{2}$ ist, von der Interpolationsformel § 2, (20) Gebrauch, so folgt

b) $$f(15^h + n) = 21^h 52^m 28^s.49 - \nu\left[2^m 19^s.12 + \frac{\nu - 1}{2} 0^s.12\right],$$

wo $\nu = 1 - n$ ist. Unter Anwendung des für die Kulminationszeit gefundenen Näherungswertes $15^h 57^m = 15^h.95$ wird $n = 0.95$, also $\nu = 0.05$ und demnach $\frac{\nu - 1}{2} 0^s.12 = -0^s.06$; somit wird die Rektaszension des Mondes zur Zeit seiner oberen Kulmination am Orte O

$$f(15^h + n) = 21^h 52^m 28^s.49 - 139^s.06\nu$$

Man verwandle nun die für die obere Kulmination des Mondes in O gültige mittlere Pariser Zeit $15^h + n = 16^h - \nu$ in Sternzeit. Da ein Intervall von $(16 - \nu)$ mittleren Stunden dem Sternzeitintervall $16^h 2^m 37^s.704 - 3609^s.856\nu$ gleich ist, und da die am 5. April 1910 im mittleren Pariser Mittage gezählte Sternzeit $0^h 51^m 36^s.35$ beträgt, so entspricht der mittleren Pariser Zeit $15^h + n = 16^h - \nu$ die Pariser Sternzeit $16^h 54^m 14^s.054 - 3609^s.856\nu$, also die am Orte O gezählte Sternzeit $21^h 54^m 14^s.054 - 3609^s.856\nu$. Setzt man diese Sternzeit, welche gleichzeitig die Rektaszension des Mondes zur Zeit seiner oberen Kulmination am Orte O angibt, dem für $f(15^h + n)$ gefundenen Ausdruck gleich, so erhält man

$$21^h 54^m 14^s.054 - 3609^s.856\nu = 21^h 52^m 28^s.49 - 139^s.06\nu$$

Hieraus ergibt sich der in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückte Wert von ν

$$\nu = \frac{105^s.564}{3470^s.796} = 0.030415;$$

in Minuten und Sekunden ausgedrückt, wird also $\nu = 1^m 49^s.49$ und demnach $n = 58^m 10^s.51$. Somit ist die genaue mittlere Pariser Zeit der Kulmination des Mondes am Orte O gleich $15^h 58^m 10^s.51$ und die entsprechende mittlere Ortszeit in O gleich $20^h 58^m 10^s.51$. Um die für diese Zeit gültige Rektaszension (α) des Mondes zu finden, hat man in der Gleichung (b) $\nu = 0.030415$ zu setzen; es wird dann $\alpha = 21^h 52^m 24^s.26$. Die zugehörige Deklination (δ) ergibt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\delta = -18^\circ 21' 51''.2 - \nu\left[11' 32''.5 + \frac{\nu - 1}{2} 7''.3\right];$$

für $\nu = 0.030415$ folgt $\delta = -18^\circ 22' 12''.4$.

40. Auf- und Untergangszeit eines Sterns. Aus dem Dreieck PZS (Fig. 1), worin P den Nordpol des Äquators, Z das Zenit eines Beobachtungsortes O und S den Ort eines Sterns bedeutet, folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination, z die Zenitdistanz und t den Stundenwinkel des Sterns angibt,

Fig. 1.

(1) $$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Im Moment des Auf- oder Unterganges ist $z = 90^\circ$; durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung (1) erhält man, wenn der für $z = 90^\circ$ gültige Wert von t mit t_0 bezeichnet wird,

(2) $$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$$

Diese Gleichung läßt sich durch keinen Wert von t_0 befriedigen, wenn δ algebraisch größer als $90^\circ - \varphi$ oder kleiner als $\varphi - 90^\circ$ ist; sie gibt einen Wert von t_0, wenn $\delta = 90^\circ - \varphi$ oder $\delta = \varphi - 90^\circ$ ist, und zwei Werte, wenn $\delta < 90^\circ - \varphi$ oder $\delta > \varphi - 90^\circ$ ist. Im ersten Falle bleibt der Stern entweder stets über oder stets unter dem Horizont, im zweiten Falle berührt er in der unteren oder in der oberen Kulmination den Horizont; im dritten Falle endlich geht der Stern auf und unter, und zwar entspricht der zwischen 180° und 360° liegende Wert von t_0 dem Aufgange, der andere dem Untergange des Sterns. Zwischen der Sternzeit (Θ_0), dem

Stundenwinkel (t_0) eines Sterns zur Zeit Θ_0 und der Rektaszension (α) des Sterns besteht aber die Gleichung $\Theta_0 = t_0 + \alpha$; wird also der Gleichung (2) durch zwei Werte von t_0 Genüge geleistet, so erhält man auch zwei Werte von Θ_0, die nun die Sternzeiten des Auf- und Untergangs des Sternes angeben. Aus diesen läßt sich dann noch die mittlere Zeit des Auf-, bzw. Unterganges ableiten.

Die vorhin gemachte Annahme, daß zur Zeit des Auf- und Unterganges eines Sterns $z = 90^\circ$ sei, ist in Wirklichkeit nicht richtig; die durch die Atmosphäre verursachte Strahlenbrechung hat nämlich zur Folge, daß der Stern schon sichtbar wird, wenn er sich noch unter dem Horizont befindet, und noch gesehen werden kann, wenn seine Zenitdistanz bereits 90° überschritten hat. Um nun den wahren Wert der Zenitdistanz zur Zeit des Auf- und Unterganges zu erhalten, beobachte man die Sternzeit des Auf-, bzw. Unterganges eines hellen Sterns; wird diese mit Θ und die Rektaszension des Sterns mit α bezeichnet, so ist $\Theta - \alpha = t$ der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit des Auf-, bzw. Unterganges. Substituiert man den für t gefundenen Wert und die als bekannt vorausgesetzten Werte von φ und δ in die Gleichung (1), so läßt sich z berechnen. Im Mittel aus einer größeren Zahl solcher Bestimmungen hat sich ergeben, daß für den Auf- und Untergang $z = 90^\circ 34'$ ist. Dementsprechend sind die aus der Gleichung (1) unter der Annahme $z = 90^\circ$ folgenden Werte von $t = t_0$ zu verbessern. Differenziert man zu diesem Zwecke die Gleichung (1), indem man nur z und t als variabel betrachtet, und setzt nach vollzogener Differentiation $\sin z = 1$, $dz = 34' = 136^s$, $t = t_0$, so erhält man für die Korrektion (dt) der mit Hilfe der Gleichung (2) berechneten Werte von t_0

$$dt = \frac{34'}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} = \frac{136^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} \tag{3}$$

Die Korrektion ist somit negativ für den Aufgang eines Sterns ($180^\circ < t_0 < 360^\circ$) und positiv für den Untergang ($0^\circ < t_0 < 180^\circ$). Den zwischen 0° und 180° gelegenen Wert von $t = t_0 + dt$ bezeichnet man als den halben Tagbogen des Sterns; wird dieser mit 2 multipliziert und das Produkt in Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt, so erhält man die Zeit, während derer sich der Stern über dem Horizont befindet.

Die Formeln (2) und (3) werden unbrauchbar, wenn t_0 in der Nähe von 0° oder 180° liegt. Um die in einem solchen Falle zu benutzende Formel zu erhalten, gehe man von der aus (1) folgenden Gleichung aus

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Bildet man nun die Ausdrücke für $1 - \cos t$ und $1 + \cos t$ und dividiert diese durch einander, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin\frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)\, \sin\frac{1}{2}(z + \varphi - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(z + \varphi + \delta)\, \cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

oder, wenn $z = 90^\circ 34'$ und sodann

$$S = \tfrac{1}{2}(90^\circ 34' + \varphi + \delta) \tag{4}$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(S - \varphi)\, \sin(S - \delta)}{\cos S \cos(S - 90^\circ 34')}} \tag{5}$$

41. Auf- und Untergangszeit der Sonne. Unter der Zeit des Auf-, bzw. Unterganges der Sonne wird in den astronomischen Jahrbüchern der Moment verstanden, in dem der Mittelpunkt der Sonne auf-, bzw. untergeht, in dem also — dem § 40 zufolge — die Zenitdistanz dieses Mittelpunktes gleich $90^\circ 34'$ ist. Die Berechnung der Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne wird am besten an einem Beispiel erläutert, und so sollen im folgenden die Zeiten bestimmt werden, zu denen die Sonne am 1. Sept. 1910 (bürgerliches Datum) in Paris auf- und untergeht. Der Connaissance des Temps zufolge ist im wahren Pariser Mittage des 1. Sept. 1910 die Deklination des Mittelpunktes der Sonne gleich $+8^\circ 31'$ und die stündliche Änderung der Deklination gleich $-0'.9$; die Polhöhe von Paris (Sternwarte) ist $\varphi = +48^\circ 50'.2$. Aus einer Tafel, welche die halben Tagbogen angibt, findet man, daß der für $\varphi = +49^\circ$ und $\delta = +8^\circ.5$ gültige halbe Tagbogen gleich $6^h.7$ ist; als Näherungswert des Stundenwinkels der Sonne oder der wahren Zeit im Moment des Sonnenaufganges ergibt sich also $24^h - 6^h.7 = 17^h.3$, der entsprechende Wert für den Sonnenuntergang ist gleich $6^h.7$. Mit Hilfe der vorhin angeführten, für den wahren Pariser Mittag gültigen Deklination der Sonne und ihrer stündlichen Änderung erhält man demnach als Werte der Deklination der Sonne bei Sonnenauf-, bzw. -untergang: $+8^\circ 37'$, bzw. $+8^\circ 25'$. Wäre nun die Zenitdistanz des Mittelpunktes der Sonne zur Zeit des Auf- und Unterganges gleich 90°, so würde man, durch Substitution von $\delta = +8^\circ 37'$ und $\delta = +8^\circ 25'$ in die Gleichung (2), für den Aufgang $t_\circ = 17^h 20^m.1$ und für den Untergang $t_\circ = 6^h 39^m.0$ erhalten. Da aber die Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes zur Zeit des Auf- und Unterganges $90^\circ 34'$ beträgt, so muß zu den vorigen Werten von $t_\circ$ noch die in (3) angegebene Korrektion

$$dt = \frac{136^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_\circ}$$

hinzugefügt werden. Für den Aufgang erhält man $dt = -3^m.5$, für den Untergang $dt = +3^m.5$; die wahre Zeit des Sonnenaufganges ist also $17^h 16^m.6$ und die des Unterganges $6^h 42^m.5$. Addiert man zu diesen Zeiten die in der Connaissance des Temps gegebenen Werte der Zeitgleichung $+0^m.2$, bzw. $+0^m.1$, so findet man, daß der Aufgang der Sonne, astronomisch gerechnet, am 31. August, $17^h 16^m.8$ mittlerer Zeit, oder, nach der im gewöhnlichen Leben üblichen Bezeichnung, am 1. September, $5^h 16^m.8$ vormittags und der Untergang der Sonne am 1. September, $6^h 42^m.6$ nachmittags erfolgt.

Will man wissen, wann der obere Sonnenrand auf-, bzw. untergeht, wann also der erste Sonnenstrahl erscheint, bzw. der letzte verschwindet, so hat man Folgendes zu berücksichtigen. Zur Zeit des Auf- und Unterganges des Sonnenrandes ist seine wahre Zenitdistanz gleich $90^\circ 34'$; nimmt man den Halbmesser der Sonne zu $16'$ an, so ist also die Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes gleich $90^\circ 50'$. Man erhält demnach die wahre Zeit des Auf- und Unterganges des oberen Sonnenrandes, wenn man zu den mit Hilfe der Gleichung (2) für den Mittelpunkt der Sonne gefundenen Werten von $t_\circ$ die aus der Gleichung

(6) $$dt_\odot = \frac{50'}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_\circ} = \frac{200^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_\circ}$$

folgenden Werte von $dt_\odot$ addiert.

42. Auf- und Untergangszeit des Mondes. Die in den Jahrbüchern gegebenen Zeiten des Auf- und Unterganges des Mondes sind für den Mittelpunkt des Mondes berechnet. Wenn nun der Mittelpunkt des Mondes auf- oder untergeht, so ist seine wahre Zenitdistanz, dem § 40 zufolge, gleich $90^\circ 34'$. Dies ist aber die für den Beobachtungsort gültige Zenitdistanz, während man in der Gleichung (1), — wenn für δ die aus der Ephemeride entnommene, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehene oder geozentrische Deklination des Mondes angewandt wird — auch für z seinen geozentrischen Wert zu substituieren hat. In welcher Weise man aus der beobachteten Zenitdistanz die geozentrische ableitet, wird in § 69 gezeigt werden; für den gegenwärtigen Zweck möge die Angabe genügen, daß, wenn sich der Mond im Horizont befindet, der geozentrische Wert von z im Mittel um $57'$ kleiner als der für den Beobachtungsort gültige ist. Die geozentrische Zenitdistanz des Mondes zur Zeit seines Auf- oder Unterganges ist demnach gleich $89^\circ 37'$. Anstatt diesen Wert in die Gleichung (1) zu substituieren, berechnet man zunächst wieder mittels der Gleichung (2) den für $z = 90^\circ$ gültigen Wert t_0 und fügt zu diesem die Korrektion

$$dt_{☾} = -\frac{23'}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0} = -\frac{92^s}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0} \tag{7}$$

hinzu. Bei kleinen Werten von $\sin t_0$ hat man die Gleichungen (4) und (5) zu benutzen, in denen aber zuvor $90^\circ 34'$ durch $89^\circ 37'$ ersetzt werden muß.

Um den Gang der Rechnung zu erläutern, soll jetzt für San Francisco die Zeit desjenigen Mondaufganges berechnet werden, welcher der am 1. Juni 1892 stattgefundenen oberen Kulmination des Mondes vorausging, sowie auch die Zeit des auf diese Kulmination folgenden Mondunterganges; hierbei wird die Polhöhe von San Francisco zu $+37^\circ 48'$ und seine Länge zu $8^h 19^m\!.0$ westlich von Paris angenommen. — In der Connaissance des Temps findet man für jeden Tag die nach § 39 berechnete mittlere Ortszeit der Kulmination des Mondes sowohl für Paris als für die von Paris um 1, 2, ..., 12 Stunden in Länge entfernten Meridiane angegeben, desgleichen die für diese Zeiten gültigen Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes. So hat man für 1892 Juni 1, wenn λ die westliche Länge eines Meridians in bezug auf Paris, T die auf diesem Meridian im Moment der Kulmination des Mondes gezählte mittlere Zeit, α und δ die Rektaszension, bzw. Deklination des Mondes zur Zeit der Kulmination, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die einer Änderung der Länge des Meridians um 1^m entsprechenden Änderungen von α und δ bedeuten,

1892 Juni 1

λ	T	α	$\Delta\alpha$	δ	$\Delta\delta$
7^h	$6^h 1^m 7^s$	$10^h 44^m 57^s$	$+2^s\!.0$	$+13^\circ 14'\!.2$	$-0'\!.2$
8	6 2 55	10 46 56	+2.0	+13 1.3	−0.2
9	6 4 43	10 48 54	+2.0	+12 48.3	−0.2

Mit Hilfe dieser Angaben und der vorhin mitgeteilten Länge von San Francisco erhält man als Näherungswert für die mittlere Ortszeit der Kulmination des Mondes in San Francisco $6^h 3^m$ und als Näherungswert für die Deklination des Mondes zu dieser Zeit $\delta = +13^\circ$. Da nun der halbe Tagbogen für $\varphi = +38^\circ$ und $\delta = +13^\circ$

gleich $6^h 44^m$ ist, so ergibt sich als genäherte Zeit des Mondaufganges Juni 1, $6^h 3^m - 6^h 44^m =$ Juni 0, $23^h 19^m$ m. Zt. San Francisco und als genäherte Zeit des Mondunterganges Juni 1, $6^h 3^m + 6^h 44^m = 12^h 47^m$ m. Zt. San Francisco. Die entsprechenden mittleren Pariser Zeiten sind Juni 0, $23^h 19^m + 8^h 19^m =$ Juni 1, $7^h 38^m$ und Juni 1, $21^h 6^m$.

In der Connaissance des Temps findet man nun folgende Örter des Mondes angegeben:

1892 Juni 1

m. Zt. Paris	α	δ	m. Zt. Paris	α	δ
7^h	$10^h 33^m 19^s$	$+14^\circ 28.'8$	20^h	$10^h 58^m 13^s$	$+11^\circ 45.'8$
8	10 35 16	+14 16.6	21	11 0 6	+11 33.0
9	10 37 12	+14 4.2	22	11 1 59	+11 20.1

Aus dieser Tabelle folgt, daß um $7^h 38^m$ und $21^h 6^m$ m. Zt. Paris die Deklination des Mondes gleich $+14^\circ 23'$, bzw. gleich $+11^\circ 32'$ ist; die zugehörigen Werte der Rektaszension sind $10^h 34.^m5$ und $11^h 0.^m3$. Substituiert man die für die Deklination erhaltenen Werte in die Gleichung (2), so ergibt sich für den Aufgang des Mondes $t_0 = 17^h 14.^m1$ und für den Untergang $t_0 = 6^h 36.^m4$; ferner werden die zugehörigen, durch die Gleichung (7) bestimmten Korrektionen $dt_☾ = +2.^m0$, bzw. $dt_☾ = -2.^m0$. Die wahren Werte von t sind also $17^h 16.^m1$ und $6^h 34.^m4$; addiert man hierzu die vorhin angegebenen Werte der Rektaszension des Mondes, so erhält man die in San Francisco beim Auf-, bzw. Untergang des Mondes gezählten Sternzeiten $3^h 50.^m6$ und $17^h 34.^m7$. Diesen entsprechen die Pariser Sternzeiten $12^h 9.^m6$ und $1^h 53.^m7$. Um die mittleren Pariser Zeiten zu erhalten, berücksichtige man, daß, wie oben gefunden wurde, der Auf- und Untergang des Mondes in San Francisco auf das Pariser Datum 1892 Juni 1 fällt; man hat also zunächst die Sternzeit im mittleren Pariser Mittage des 1. Juni 1892 aufzusuchen und findet dafür $4^h 41.^m7$. Hieraus, in Verbindung mit den vorhin erhaltenen Pariser Sternzeiten und unter Benutzung der zur Verwandlung eines Sternzeitintervalls in ein Intervall mittlerer Zeit dienenden Tafeln, ergeben sich die mittleren Pariser Zeiten des Auf- und Unterganges des Mondes in San Francisco Juni 1, $7^h 26.^m7$, bzw. Juni 1, $21^h 8.^m5$. Mit Hilfe der für diese Zeiten gültigen Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes kann man nun die vorige Rechnung wiederholen; die damit erhaltenen genaueren Zeiten sind Juni 1, $7^h 26.^m4$, bzw. Juni 1, $21^h 8.^m6$ m. Zt. Paris. Verwandelt man die Pariser Zeit in Ortszeit, so findet man für die Aufgangszeit des Mondes in San Francisco Juni 1, $7^h 26.^m4 - 8^h 19.^m0 =$ Juni 0, $23^h 7.^m4$ m. Zt. San Francisco oder Juni 1 (bürgerliches Datum) $11^h 7.^m4$ vormittags; für die Untergangszeit erhält man Juni 1, $12^h 49.^m6$ m. Zt. San Francisco oder Juni 2 (bürgerliches Datum), $0^h 49.^m6$ vormittags.

43. Morgen- und Abendweite. Außer der Zeit des Auf- und Unterganges eines Sterns muß auch der Punkt des Horizonts bestimmt werden, in dem der Stern auf-, bzw. untergeht. In Fig. 1 (S. 121) bedeute nun S den Ort eines Sterns zur Zeit seines Auf- oder Unterganges. Setzt man den Winkel $PZS = 90^\circ - a$, so ist a positiv, wenn der Aufgangspunkt nördlich vom Ostpunkte, bzw. der Untergangspunkt nördlich vom Westpunkte des Horizonts liegt; im entgegengesetzten Falle ist a

negativ. Den dem Aufgangspunkt entsprechenden Wert von a, also den Abstand des Aufgangspunktes vom Ostpunkte des Horizonts, bezeichnet man als Morgenweite; der zum Untergangspunkte gehörige Wert von a oder der Abstand des Untergangspunktes vom Westpunkte des Horizonts wird die Abendweite genannt. Zur Berechnung von a dient die aus dem Dreieck PZS (Fig. 1) folgende Gleichung

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi \cos z}{\cos\varphi \sin z} \tag{8}$$

oder, da der Voraussetzung nach $z = 90^\circ 34'$ ist,

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi \cos 90^\circ 34'}{\cos\varphi \sin 90^\circ 34'} \tag{8^a}$$

Anstatt die Morgen- und Abendweite mit Hilfe der Gleichung (8), bzw. (8^a) zu bestimmen, kann man auch das in § 40 bei der Auflösung der Gleichung (1) benutzte Verfahren anwenden. Wird nämlich der für $z = 90^\circ$ gültige Wert von a mit a_0 bezeichnet, so folgt aus (8)

$$\sin a_0 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \tag{9}$$

Andererseits erhält man durch Differentiation der Gleichung (8), indem man nur z und a als veränderlich betrachtet,

$$\cos\varphi \sin z \cos a \, da = (\sin\varphi \sin z - \cos\varphi \cos z \sin a)\, dz$$

Für $z = 90^\circ$ und $a = a_0$ wird also

$$da = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos a_0}\, dz \tag{10}$$

Setzt man jetzt $dz = +34' = +0{,}^\circ57$, so ergibt sich für den wahren Wert von a

$$a = a_0 + 0{,}^\circ57 \, \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos a_0} \tag{11}$$

Falls $\cos a_0$ sehr klein ist, kann man die Gleichungen (9) bis (11) nicht benutzen; der Wert von a läßt sich dann in folgender Weise finden. Aus (8) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi \cos z}{\cos\varphi \sin z}$$

Bildet man jetzt die Ausdrücke für $1 - \sin a$ und $1 + \sin a$ und dividiert dieselben durch einander, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + z - \delta) \cos\frac{1}{2}(\varphi + z + \delta)}{\sin\frac{1}{2}(z + \delta - \varphi) \cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

Setzt man hierin $z = 90^\circ 34'$ und sodann

$$S = \tfrac{1}{2}(90^\circ 34' + \varphi + \delta),$$

so wird

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\frac{\sin(S - \delta) \cos S}{\sin(S - \varphi) \cos(S - 90^\circ 34')}} \tag{12}$$