universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel V. Theorie der Drehung der Erde

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

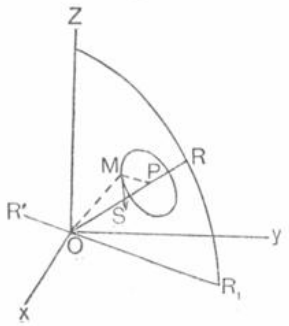
Kapitel V.

Theorie der Drehung der Erde.

I. Bewegung der Rotationsachse und der kleinen Achse der Erde.

22. Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes eines rotierenden Körpers. Um durch eine einfache Gerade nicht nur die Richtung der Rotationsachse, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation eines Körpers darzustellen, trage man auf der Drehungsachse, von einem ihrer Punkte O aus, eine der Winkelgeschwindigkeit ω proportionale Strecke OR ab, und zwar in einem solchen Sinne, daß für einen Beobachter, dessen Kopf in R und dessen Füße in O sich befinden, die Drehung von rechts nach links erfolgt; eine solche Drehung möge als positiv bezeichnet werden. Es seien x, y, z die Koordinaten und v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes M des rotierenden Körpers, bezogen auf ein durch O gelegtes festes rechtwinkliges Koordinatensystem; ferner gebe MS die Richtung der Geschwindigkeit v des Punktes M an, so daß also MS senkrecht zur Ebene MOR, folglich auch senkrecht zu OR und OM ist. Bezeichnet man dann mit α, β, γ die Richtungswinkel von OR, so hat man die Gleichungen

Fig. 1.



$$\begin{aligned} v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma &= 0 \\ x v_x + y v_y + z v_z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn nun f den Abstand MP des Punktes M von der Rotationsachse bedeutet, so ist

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = \omega^2 f^2 \tag{2}$$

Aus den vorigen Gleichungen ergibt sich, wenn noch $OM = \delta$ gesetzt wird, so daß also

$$f = \delta \sin MOR$$

ist,

$$\begin{aligned} (2^a) \qquad & \frac{v_x}{z\cos\beta - y\cos\gamma} = \frac{v_y}{x\cos\gamma - z\cos\alpha} = \frac{v_z}{y\cos\alpha - x\cos\beta} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{(z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2}} = \\ &= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}} = \\ &= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{\delta^2 - \delta^2\cos^2 MOR}} = \pm\omega \end{aligned}$$

Um zu bestimmen, welches der beiden Vorzeichen gewählt werden muß, betrachte man den Spezialfall, wo die Rotationsachse mit der x-Achse zusammenfällt, und demnach $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ ist. Die vorigen Gleichungen geben dann

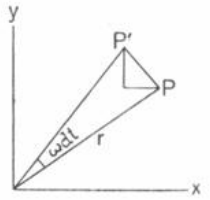
$$v_x = \mp\,\omega y, \qquad v_y = \pm\,\omega x$$

Mit Hilfe von Fig. 2 ergibt sich aber ohne weiteres, daß, wenn der in der xy-Ebene gelegene Punkt P in dem Zeitelement dt den kleinen Kreisbogen $PP' = r\,\omega\,dt$ beschreibt, die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes gleich

$$v_x = -\,\omega y, \qquad v_y = +\,\omega x$$

sind. Somit muß in (2ª) das obere Vorzeichen gewählt werden, und man erhält

Fig. 2.



$$\begin{aligned} v_x &= \omega(x\cos\beta - y\cos\gamma) \\ v_y &= \omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha) \\ v_z &= \omega(y\cos\alpha - x\cos\beta) \end{aligned} \tag{3}$$

Die Komponenten $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ der Achse $OR = \omega$ in bezug auf die Koordinatenachsen mögen der Reihe nach mit p, q, r bezeichnet werden; man hat dann

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 \tag{4}$$

und die Gleichungen (3) nehmen die Form an

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx \end{aligned} \tag{5}$$

Da p, q, r die Projektionen der Strecke OR auf die Koordinatenachsen darstellen, und OR die Richtung der Rotationsachse des Körpers, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angibt, so kann man auch sagen: Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Gerade OR dreht, welche mit drei zueinander senkrechten Achsen Ox, Oy, Oz die Winkel α, β, γ bildet, so läßt sich diese Drehung durch drei andere um die genannten Achsen ersetzen, und zwar sind die Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen bezüglich gleich $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$. Hat eine dieser Drehungen, zum Beispiel $\omega\cos\alpha$ einen negativen Wert, so bedeutet das, daß die Drehung um die x-Achse, von deren positivem Ende aus betrachtet, von links nach rechts stattfindet; vom negativen Ende der x-Achse aus gesehen, würde eine solche Drehung von rechts nach links erfolgen. Einer Drehung $\omega\cos\alpha$ um die positive x-Achse ist also die Drehung $-\,\omega\cos\alpha$ um die negative x-Achse äquivalent.

23. Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. Ist ein System von Massenpunkten gegeben, und bedeuten — mit bezug auf ein im Raume festes rechtwinkliges Koordinatensystem — x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes von der Masse m und X, Y, Z die auf diesen Punkt wirkenden Kraftkomponenten,

so lehrt das *d'Alembert*sche Prinzip, daß für alle mit den Verbindungen des Systems verträglichen Bewegungen (δx_ν, δy_ν, δz_ν) die Gleichung bestehen muß

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta x_\nu + \left(Y - m\frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right)\delta y_\nu + \left(Z - m\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right)\delta z_\nu\right\} = 0 \tag{6}$$

Unter dem System von Massenpunkten soll jetzt ein fester Körper verstanden werden. Die allgemeinste Bewegung des Systems setzt sich dann zusammen aus einer fortschreitenden und aus einer drehenden Bewegung. Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der fortschreitenden Bewegung mit u, v, w und die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit mit p, q, r, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (5)

$$\begin{aligned}\frac{dx_\nu}{dt} &= u + qz_\nu - ry_\nu\\ \frac{dy_\nu}{dt} &= v + rx_\nu - pz_\nu\\ \frac{dz_\nu}{dt} &= w + py_\nu - qx_\nu;\end{aligned} \tag{7}$$

ferner ist

$$\delta x_\nu = \frac{dx_\nu}{dt}\delta t, \qquad \delta y_\nu = \frac{dy_\nu}{dt}\delta t, \qquad \delta z_\nu = \frac{dz_\nu}{dt}\delta t \tag{8}$$

Die aus den Gleichungen (8) und (7) folgenden Werte von δx_ν, δy_ν, δz_ν sind nun in (6) zu substituieren. Damit die so gewonnene neue Gleichung für beliebige Werte von u, v, w, p, q, r erfüllt sei, müssen die Koeffizienten dieser sechs Variabelen jeder für sich verschwinden; man erhält demnach

$$\Sigma m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \Sigma X, \qquad \Sigma m\frac{d^2y_\nu}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad \Sigma m\frac{d^2z_\nu}{dt^2} = \Sigma Z \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma m\left(y_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2} - z_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(y_\nu Z - z_\nu Y)\\ \Sigma m\left(z_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - x_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(z_\nu X - x_\nu Z)\\ \Sigma m\left(x_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2} - y_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(x_\nu Y - y_\nu X)\end{aligned} \tag{10}$$

Wählt man den Schwerpunkt des Körpers zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems, dessen Achsen den vorhin benutzten festen Achsen stets parallel bleiben sollen, so hat man, wenn $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten des Schwerpunktes in bezug auf das alte Koordinatensystem, und x, y, z die Koordinaten des Massenelementes m in bezug auf das neue System bedeuten,

$$x_\nu = \bar{x} + x, \qquad y_\nu = \bar{y} + y, \qquad z_\nu = \bar{z} + z \tag{11}$$

Ferner ist

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0,$$

folglich auch

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Durch Substitution von (11) in (9) ergibt sich also, wenn $\Sigma m = M$ gesetzt wird,

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = \Sigma Z, \tag{12}$$

das heißt: Die Bewegung des Schwerpunktes eines irgend welchen Kräften unterworfenen festen Körpers ist dieselbe, als wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert wäre, und alle Kräfte direkt an letzterem wirkten. Substituiert man die Werte (11) von x_1, y_1, z_1 in die Gleichungen (10), so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (12)

$$\begin{aligned}
\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma(yZ - zY)\\
\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma(zX - xZ)\\
\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma(xY - yX)
\end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen (10); dem Inhalte nach besteht aber der Unterschied, daß die Gleichungen (10) für ein im Raume festes, die Gleichungen (13) dagegen für ein im Raume bewegliches Koordinatensystem gelten, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen eine konstante Richtung haben. Die Bewegung eines festen Körpers um den beweglichen Schwerpunkt, welche naturgemäß nur in einer Drehung bestehen kann, ist also dieselbe, als wenn der Schwerpunkt fest wäre.

Unter Einführung der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z kann man den Gleichungen (13) die Form geben

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Sigma m(yv_z - zv_y) &= \Sigma(yZ - zY)\\
\frac{d}{dt}\Sigma m(zv_x - xv_z) &= \Sigma(zX - xZ)\\
\frac{d}{dt}\Sigma m(xv_y - yv_x) &= \Sigma(xY - yX)
\end{aligned} \tag{14}$$

Es lassen sich nun $\Sigma m(yv_z - zv_y)$, ..., $\Sigma m(xv_y - yv_x)$ als die Koordinaten K_x, K_y, K_z eines Punktes K, oder, wenn O den zum Anfangspunkt der Koordinaten gewählten Schwerpunkt des Körpers bezeichnet, als die Projektionen der Strecke OK auf die Koordinatenachsen auffassen; man hat also

$$K_x = \Sigma m(yv_z - zv_y), \qquad K_y = \Sigma m(zv_x - xv_z), \qquad K_z = \Sigma m(xv_y - yv_x) \tag{15}$$

Die Strecke OK wird im folgenden die Impulsachse des Körpers genannt werden. Es lassen sich aber auch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (14) als Koordinaten eines Punktes G definieren; werden diese mit G_x, G_y, G_z bezeichnet, so ist

$$G_x = \Sigma(yZ - zY), \qquad G_y = \Sigma(zX - xZ), \qquad G_z = \Sigma(xY - yX) \tag{16}$$

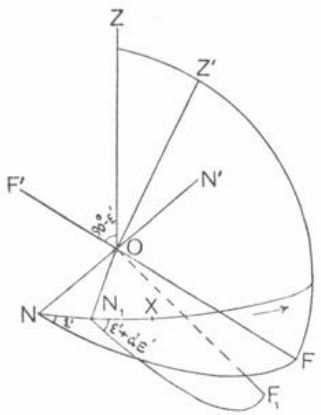
Die Strecke OG soll die Achse des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt O genannt werden. Die Gleichungen (14) nehmen jetzt die Gestalt an

$$\frac{dK_x}{dt} = G_x, \qquad \frac{dK_y}{dt} = G_y, \qquad \frac{dK_z}{dt} = G_z \tag{17}$$

Die drei letzten Gleichungen sagen aus: Wenn man für einen in Bewegung begriffenen festen Körper in jedem Augenblick die Impulsachse OK und die Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt O bestimmt, so ist OG gleich und parallel der Geschwindigkeit des Punktes K.

24. Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids. Bei der Anwendung der vorigen Formeln auf die Erde machen wir die Annahme, daß letztere ein aus unendlich dünnen ellipsoidalen und homogenen Schichten gebildetes abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Der Mittelpunkt dieses Ellipsoids, welcher also mit dem Schwerpunkt der Erde gleichbedeutend ist, werde zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems X', Y', Z' gewählt, und zwar soll die Z'-Achse mit der kleinen Achse der Erde zusammenfallen. Um die Achsen X' und Y' zu definieren, setze man zunächst fest, daß die in § 23 benutzte, durch den Schwerpunkt gelegte XY-Ebene die einer bestimmten, im übrigen aber beliebig zu wählenden Epoche $t = 0$ entsprechende Ebene der Ekliptik sei (NOX in Fig. 3), und daß die X-Achse durch das Frühlingsäquinox dieser Epoche hindurch gehe. Die zur Z'-Achse senkrechte Ebene NOF, das heißt die Ebene des terrestrischen Äquators zur Zeit t, schneide die feste Ekliptik NOX in der Linie NON' und werde selbst durch die Ebene ZOZ' in der Linie FOF' geschnitten; es stehen dann die Linien OZ', NON', FOF' senkrecht zueinander. Bedeutet nun N den niedersteigenden Knoten des terrestrischen Äquators auf der festen Ekliptik, und bezeichnet man mit F den im Sinne der Erdrotation um 90° von N entfernten Punkt des Äquators oder auch den Durchschnittspunkt des Äquators mit dem über Z' hinaus verlängerten Bogen ZZ', so soll zur Zeit t die Gerade ON als X'- und OF als Y'-Achse gewählt werden. Die Länge des Punktes N, gezählt von X aus, werde ψ genannt; in Fig. 3 ist somit der Bogen $NX = 360° - \psi$. Der Winkel FNX oder die Neigung des terrestrischen Äquators gegen die feste Ekliptik möge mit ε' bezeichnet werden. In dem Zeitelemente dt rücke der Äquator von NF nach N_1F_1, wobei $N_1F_1 = NF = 90°$ sein soll; zur Zeit $t + dt$ wähle man dann ON_1 als X'- und OF_1 als Y'-Achse. Bezeichnet man die Länge von N_1 gezählt von X aus mit $\psi + d\psi$, so ist der Bogen $NN_1 = d\psi$; der Winkel F_1N_1X werde gleich $\varepsilon' + d\varepsilon'$ gesetzt. Die der Zeit t entsprechenden Koordinatenachsen ON und OF lassen sich nun dadurch in ihre neuen Lagen ON_1 und OF_1 zur Zeit $t + dt$ überführen, daß man sie um die Achse OZ um den Winkel $d\psi$ und um die Achse ON' um den Winkel $d\varepsilon'$ dreht; sind $d\psi$ und $d\varepsilon'$ positiv, so erfolgt die Drehung um OZ und ON' in positivem Sinne, das heißt von Z beziehungsweise N' aus gesehen von rechts nach links. Man trage jetzt auf der Achse OZ eine der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ proportionale Strecke ab: die Projektionen derselben auf die Achsen OF' und OZ' sind bezüglich gleich $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ und

Fig. 3.



$\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$. Nach § 22 läßt sich somit die Drehung um OZ durch eine Drehung um OF' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, verbunden mit einer Drehung um OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ ersetzen. Da aber eine Drehung um OF', deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ ist, dieselbe Bedeutung hat wie eine Drehung um OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und da eine analoge Bemerkung für die Drehung $d\varepsilon'$ um ON' zutrifft, so folgt, daß sich die Achsen X' und Y' dadurch aus ihrer Lage zur Zeit t in diejenige zur Zeit $t+dt$ überführen lassen, daß man dieselben 1. um die Achse ON mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, 2. um die Achse OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und 3. um die Achse OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ dreht. Sind nun die Achsen X' und Y' in ihrer Lage zur Zeit $t+dt$ angelangt, so ist dasselbe mit der Z'-Achse der Fall; damit aber auch jeder Meridian der Erde aus der Lage, die er zur Zeit t hat, in diejenige gelange, welche er zur Zeit $t+dt$ einnimmt, lasse man die Erde außerdem noch um die Z'-Achse eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ausführen, wo φ den von $Z'N$ aus im Sinne der Erdrotation gezählten Winkel zwischen $Z'N$ und einem beliebigen Erdmeridian bedeutet. Es ist jedoch wesentlich, zu bemerken, daß die Achsen X' und Y' an dieser Drehung nicht teilnehmen sollen. Zeigt nun OR*), nach der in § 22 gegebenen Definition, nicht nur die Richtung der Rotationsachse der Erde, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation der Erde an, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß OR die Resultante aus folgenden drei auf die Richtungen ON, OF, OZ', das heißt also auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t bezogenen Komponenten ist:

$$(18)\qquad p=-\frac{d\varepsilon'}{dt},\qquad q=-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon',\qquad r=\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'+\frac{d\varphi}{dt}$$

Den Gleichungen (5) zufolge sind aber die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x', y', z' der Erde, bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t

$$(\mathrm{I})\qquad v_{x'}=qz'-ry',\qquad v_{y'}=rx'-pz',\qquad v_{z'}=py'-qx'$$

Führt man diese Werte in die den Gleichungen (15) entsprechenden Relationen

$$(\mathrm{II})\quad K_{x'}=\Sigma m(y'v_{z'}-z'v_{y'}),\qquad K_{y'}=\Sigma m(z'v_{x'}-x'v_{z'}),\qquad K_{z'}=\Sigma m(x'v_{y'}-y'v_{x'})$$

ein, so erhält man die Projektionen der Impulsachse OK der Erde, bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Da jedoch die Erde als ein aus homogenen Schichten gebildetes Rotationsellipsoid aufgefaßt wird, dessen Drehungsachse die Z'-Achse sein soll, so entspricht jedem positiven Gliede der Summen

*) In Fig. 3 nicht gezeichnet.

$\Sigma mx'y'$, $\Sigma my'z'$, $\Sigma mx'z'$ ein gleich großes negatives; diese Summen sind also gleich o. Ferner folgt $\Sigma my'^2 = \Sigma mx'^2$, und hieraus $\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \Sigma m(x'^2 + z'^2)$. Somit erhält man durch die Substitution von (I) in (II), wenn noch

$$\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \Sigma m(x'^2 + z'^2) = A, \qquad \Sigma m(x'^2 + y'^2) = 2\Sigma mx'^2 = C$$

gesetzt wird,

$$K_{x'} = Ap, \qquad K_{y'} = Aq, \qquad K_{z'} = Cr,$$

wo p, q, r durch die Gleichungen (18) bestimmt sind.

Da nun Ap, Aq, Cr die Koordinaten des Punktes K in bezug auf die beweglichen Achsen X', Y', Z' bedeuten, und A und C konstant sind, so werden die relativen Geschwindigkeitskomponenten von K bezogen auf die genannten Achsen

$$A\frac{dp}{dt}, \qquad A\frac{dq}{dt}, \qquad C\frac{dr}{dt}$$

In den Gleichungen (17) beziehen sich die Komponenten der Geschwindigkeit von K auf Achsen von konstanter Richtung; diese Geschwindigkeit ist aber bekanntlich die Resultierende aus der relativen Geschwindigkeit des Punktes K, bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z', und der Geschwindigkeit g, welche der Punkt K haben würde, wenn er fest mit den beweglichen Achsen verbunden wäre. Unserer Annahme nach besteht die Bewegung dieser Achsen in einer Drehung, deren Komponenten, bezogen auf die Lage der Achsen X', Y', Z' zur Zeit t, bezüglich gleich $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ sind. Wenn also in den Gleichungen (I) an Stelle von p, q, r der Reihe nach die eben angegebenen Komponenten, und an Stelle von x', y', z' die Koordinaten Ap, Aq, Cr des Punktes K gesetzt werden, so erhält man für die Komponenten der Geschwindigkeit g

$$g_{x'} = -Cr\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon' - Aq\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$$

$$g_{y'} = Ap\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + Cr\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

$$g_{z'} = -Aq\frac{d\varepsilon'}{dt} + Ap\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$$

Dem vorhin Gesagten zufolge stellen die Summen $g_{x'} + A\frac{dp}{dt}$, $g_{y'} + A\frac{dq}{dt}$, $g_{z'} + C\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dK_{x'}}{dt}$, $\frac{dK_{y'}}{dt}$, $\frac{dK_{z'}}{dt}$ des Punktes K dar, und zwar bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Werden nun in den Ausdrücken für $g_{x'}$, $g_{y'}$, $g_{z'}$ sowie in $A\frac{dp}{dt}$ und $A\frac{dq}{dt}$ an Stelle von p und q ihre Werte aus (18) substituiert, r und $\frac{dr}{dt}$ aber beibehalten, und bezeichnet man die nach den Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Projektionen der Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte mit L, M, N, so folgt aus (17)

$$
\begin{aligned}
&- Cr\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} - A\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + A\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = L\\
&Cr\frac{d\varepsilon'}{dt} - A\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - A\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} = M \qquad (19)\\
&C\frac{dr}{dt} = N
\end{aligned}
$$

25. Berechnung von L, M, N. Den Gleichungen (16) gemäß ist, wenn X', Y', Z' die nach den Achsen X', Y', Z' genommenen Kraftkomponenten bedeuten,

$$L = G_{x'} = \Sigma(y'Z' - z'Y')$$

Dieser Ausdruck und die entsprechenden für M und N sollen jetzt weiter entwickelt werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß unter den auf die Erde wirkenden Kräften die Anziehung der Sonne und des Mondes zu verstehen ist. Jeder dieser beiden Himmelskörper soll als aus homogenen konzentrischen Kugelschichten bestehend angesehen werden, so daß also die von Sonne und Mond auf ein Erdelement ausgeübte Anziehung dieselbe ist, als wenn ihre Massen in den bezüglichen Mittelpunkten vereinigt wären. Man betrachte zunächst nur einen anziehenden Körper mit der Masse M_1 und bezeichne mit x_1', y_1', z_1' die Koordinaten seines Mittelpunktes bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z'. Ist m die Masse eines Erdelementes mit den Koordinaten x', y', z', und setzt man

$$(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2 = u^2,$$

so hat man für die nach den Achsen X', Y' und Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Komponenten der seitens M_1 auf m ausgeübten Anziehung, wenn noch k^2 die *Gaußsche* Konstante bedeutet,

$$X' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(x_1' - x'), \qquad Y' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(y_1' - y'), \qquad Z' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(z_1' - z')$$

Durch Substitution der Werte von Y' und Z' in die Gleichung

$$
\begin{aligned}
L &= \Sigma(y'Z' - z'Y')\\
&= y_1'\Sigma Z' - z_1'\Sigma Y' + \Sigma Y'(z_1' - z') - \Sigma Z'(y_1' - y')
\end{aligned}
$$

ergibt sich

$$L = y_1' k^2 M_1 \sum\frac{m(z_1' - z')}{u^3} - z_1' k^2 M_1 \sum\frac{m(y_1' - y')}{u^3}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für M und N. Führt man jetzt die Funktion

$$V = k^2 M_1 \sum\frac{m}{u} \qquad (20)$$

ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
L &= z_1'\frac{\partial V}{\partial y_1'} - y_1'\frac{\partial V}{\partial z_1'},\\
M &= x_1'\frac{\partial V}{\partial z_1'} - z_1'\frac{\partial V}{\partial x_1'}, \qquad (21)\\
N &= y_1'\frac{\partial V}{\partial x_1'} - x_1'\frac{\partial V}{\partial y_1'}
\end{aligned}
$$

Um V zu berechnen, berücksichtige man, daß, wenn r_1' und r' die Entfernungen des Schwerpunktes der anziehenden Masse M_1 beziehungsweise eines Erdelementes vom Mittelpunkte der Erde bedeuten,

$$u^2 = r_1'^2 + r'^2 - 2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')$$

ist; man hat somit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r_1'}\left\{1 - \frac{2}{r_1'^2}(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{r'^2}{r_1'^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

und folglich

$$V = \frac{k^2 M_1}{r_1'}\Sigma m\left\{1 - \frac{2}{r_1'^2}(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{r'^2}{r_1'^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Mit Rücksicht darauf, daß r', also auch x', y', z' klein im Verhältnis zu r_1' sind, ist es vorteilhaft, den unter dem Summenzeichen stehenden Klammerausdruck in eine Reihe zu entwickeln. Vernachlässigt man dabei die Glieder von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf die Koordinaten eines Erdelementes, so ergibt sich

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{k^2 M_1}{r_1'}\Sigma m + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\frac{\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')}{r_1'^2} \\ & + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\left[-\frac{1}{2r_1'^2}\Sigma m r'^2 + \frac{3}{2r_1'^4}\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^2\right] \\ & + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\left[-\frac{3}{2r_1'^4}\Sigma m r'^2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{5}{2r_1'^6}\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^3\right] \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') &= x_1'\Sigma mx' + y_1'\Sigma my' + z_1'\Sigma mz', \\ \Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^2 &= x_1'^2\Sigma mx'^2 + y_1'^2\Sigma my'^2 + z_1'^2\Sigma mz'^2 + \\ &\quad + 2x_1'y_1'\Sigma mx'y' + 2x_1'z_1'\Sigma mx'z' + 2y_1'z_1'\Sigma my'z', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Im vorigen Paragraphen wurde aber bereits gezeigt, daß wegen unserer Annahme über die Beschaffenheit der Erde und mit Rücksicht auf die Wahl der Koordinatenachsen die Summen $\Sigma mx'y'$, $\Sigma mx'z'$, $\Sigma my'z'$ jede für sich verschwinden müssen. Dieselbe Schlußweise wie die damals angewandte führt zu dem Resultat, daß auch jede der Summen $\Sigma mx'$, $\Sigma my'$, $\Sigma mz'$, $\Sigma mr'^2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')$, $\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^3$, gleich o ist. Setzt man also die Masse der Erde $\Sigma m = E$ und berücksichtigt die Gleichung $\Sigma mx'^2 = \Sigma my'^2$, so erhält man

$$\begin{aligned} V &= k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma mr'^2}{2r_1'^3} + \frac{3}{2r_1'^5}[(x_1'^2 + y_1'^2)\Sigma mx'^2 + z_1'^2\Sigma mz'^2]\right\} \\ &= k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma mr'^2}{2r_1'^3} + \frac{3}{2r_1'^3}\left[\Sigma mx'^2 - \frac{z_1'^2}{r_1'^2}(\Sigma mx'^2 - \Sigma mz'^2)\right]\right\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma mr'^2 &= 2\Sigma mx'^2 + \Sigma mz'^2, \\ \Sigma m(x'^2 + z'^2) &= A, \qquad 2\Sigma mx'^2 = C \end{aligned}$$

Somit wird

$$V = k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} + \frac{(C - A)}{2r_1'^3}\left(1 - 3\frac{z_1'^2}{r_1'^2}\right)\right\} \tag{22}$$

Da aber die Drehung der Achsen X', Y', Z' ohne Einfluß auf die Entfernungen r' und r'_1 ist, so ergibt sich aus (21) und (22)

$$
\begin{aligned}
L &= 3k^2 M_1 \left(\frac{C-A}{r_1'^3}\right) \frac{y_1' z_1'}{r_1'^2} \\
M &= -3k^2 M_1 \left(\frac{C-A}{r_1'^3}\right) \frac{x_1' z_1'}{r_1'^2} \qquad (23) \\
N &= 0
\end{aligned}
$$

Da $N = 0$ ist, so folgt aus der dritten der Gleichungen (19), wenn mit n eine Konstante bezeichnet wird,

$$r = n; \qquad (24)$$

somit lauten die beiden ersten Gleichungen (19)

$$
\begin{aligned}
\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{L}{Cn} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{M}{Cn} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) + \frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}
\end{aligned} \qquad (25)
$$

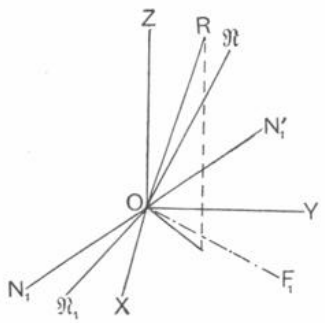
Die Gleichungen (23) geben die Werte von L und M für den Fall, daß die Erde nur von einem Körper angezogen wird. Indem nun die Bewegung der Erdachse mit Berücksichtigung der durch die Sonne und den Mond ausgeübten Anziehung abgeleitet werden soll, mögen die für diese Himmelskörper gültigen Werte von M_1, x'_1, ..., r'_1 durch $M_\odot$, $x_\odot$, ..., $r_\odot$, bzw. M_c, x_c, ..., r_c bezeichnet werden. Wenn ferner in Hinsicht auf die in den Sonnen- und Mondtafeln angewandten Einheiten von r_c, bzw. $r_\odot$ die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde H und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne Δ eingeführt werden, so erhält man für die in den Gleichungen (25) zu benutzenden Ausdrücke von L und M

$$
\begin{aligned}
L &= 3k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{y_c z_c}{r_c^2} + 3k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2} \\
M &= -3k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{x_c z_c}{r_c^2} - 3k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2}
\end{aligned}
$$

26. Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde. Aus den Beobachtungen hat sich ergeben, daß die Rotationsachse der Erde zwar sehr nahe, aber nicht völlig mit der kleinen Achse des Erdellipsoids zusammenfällt. Da die Gleichungen (25) die Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids darstellen, die Beobachtungen sich jedoch auf die Rotationsachse beziehen, so müssen nun die der letzteren entsprechenden Differentialgleichungen abgeleitet werden. Es möge in Fig. 4 der Vektor $OR = \omega$ die Richtung der Rotationsachse der Erde zur Zeit t, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angeben; $OXYZ$ sei das durch den Schwerpunkt der Erde gelegte, sich selbst stets parallel bleibende Koordinatensystem, und zwar soll wie früher als XY-Ebene die Ebene der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ gewählt werden und die X-Achse durch das der Epoche $t = 0$ entsprechende Frühlingsäquinox hindurchgehen.

Die senkrecht zu OR gelegte Ebene, welche der instantane Äquator genannt werden soll, schneide die XY-Ebene nach der Linie $N_1 O N_1'$ und werde durch die Ebene ZOR in OF_1 geschnitten; die Linien ON_1', OF_1 und OR stellen somit drei zueinander senkrechte Achsen dar. Im folgenden wird die von OX aus in der Richtung nach OY gerechnete Länge des niedersteigenden Knotens N_1 des instantanen Äquators auf der festen Ekliptik mit ψ_1 und der Winkel ZOR mit ε_1' bezeichnet werden. Zur Zeit $t + dt$ sei $O\mathfrak{R} = \omega + d\omega$ die Rotationsachse der Erde und $O\mathfrak{R}_1$ die Schnittlinie der zu $O\mathfrak{R}$ senkrechten Ebene mit der XY-Ebene; die von X aus gerechnete Länge von $\mathfrak{R}_1$ möge mit $\psi_1 + d\psi_1$ und der Winkel $ZO\mathfrak{R}$ mit $\varepsilon_1' + d\varepsilon_1'$ bezeichnet werden. Der Punkt R rückt also in dem Zeitelement dt von R nach $\mathfrak{R}$. Diese Ortsveränderung läßt sich dadurch bewirken, daß man den Punkt R 1. um die Z-Achse um den Winkel $d\psi_1$, 2. um die Achse ON_1' um den Winkel $d\varepsilon_1'$ dreht und 3. in der Richtung OR um $d\omega$ verschiebt. Da die Projektion von OR auf die xy-Ebene gleich $\omega \sin \varepsilon_1'$ ist, so beschreibt R bei der Drehung um die Z-Achse den Bogen $\omega \sin \varepsilon_1' d\psi_1$, und zwar ist die Richtung der Bewegung parallel zu ON_1'; bezogen auf die ON_1' entgegengesetzte Richtung ON_1 ist also die Geschwindigkeitskomponente von R gleich $-\omega \sin \varepsilon_1' \frac{d\psi_1}{dt}$. Bei der Drehung um die Achse ON_1' bewegt sich R parallel zu der Richtung OF_1 um den Bogen $\omega d\varepsilon_1'$; die Geschwindigkeitskomponente von R bezogen auf OF_1 ist also gleich $\omega \frac{d\varepsilon_1'}{dt}$.

Fig. 4.



Die Gleichungen (18) geben die Koordinaten p, q, r von R, bezogen auf die in § 24 definierten beweglichen Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t, und der Gleichung (24) zufolge ist $r = n$. Ersetzt man die Buchstaben p, q, r durch ξ', η', ζ', so folgt aus (18) und (24)

$$\text{(a)} \qquad \xi' = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad \eta' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad \zeta' = n$$

Die relativen Geschwindigkeitskomponenten von R sind demnach

$$\text{(b)} \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0$$

Nach § 24 (S. 59) besteht die Bewegung der Achsen X', Y', Z' in einer Drehung, deren Komponenten, genommen nach eben diesen Achsen in ihrer Lage zur Zeit t, durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\text{(c)} \qquad p' = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad q' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad r' = \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$$

Denkt man sich den Punkt R fest mit den beweglichen Achsen verbunden, so ergeben sich seine bei der Drehung dieser Achsen erlangten Geschwindigkeitskomponenten $\gamma_{x'}$, $\gamma_{y'}$, $\gamma_{z'}$, indem man in den Formeln (I) (S. 59) statt x', y', z' die Werte

(a) von ξ', η', ζ' und statt p, q, r die Werte (c) von p', q', r' substituiert; man erhält so

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} \gamma_{x'} &= -n\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon' + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin\varepsilon'\cos\varepsilon' \\ \gamma_{y'} &= -\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + n\frac{d\varepsilon'}{dt} \\ \gamma_{z'} &= 0 \end{aligned}$$

Die Summe der einander entsprechenden Gleichungen (b) und (d), nämlich

$$\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad \gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0$$

geben nach einem in § 24 benutzten Satze die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes R bezogen auf die Lage der Achsen X', Y', Z' zur Zeit t an. Die Achsen X' und Y' fallen mit den in Fig. 3 mit ON und OF' bezeichneten Richtungen zusammen; den Beobachtungen zufolge bilden aber diese Richtungen einen so kleinen Winkel mit den in Fig. 4 mit ON_1 und OF_1' bezeichneten, daß man die Komponenten $\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$, $\gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right)$ auch als auf ON_1 und OF_1' bezogen annehmen kann. Da nun früher (S. 64) für die Geschwindigkeitskomponenten von R in bezug auf ON_1 und OF_1' die Werte $-\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt}$ und $\omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt}$ gefunden wurden, so erhält man durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} -\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt} &= -n\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} + \sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) \\ \omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt} &= n\frac{d\varepsilon'}{dt} - \cos\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) \end{aligned}$$

Den Gleichungen (18) und (24) zufolge ist

$$\omega = OR = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 + \left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + n^2};$$

da aber $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$ sehr klein gegenüber n sind, so kann man in den vorigen Gleichungen $\omega = n$ setzen. Substituiert man ferner noch an Stelle von $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ ihre Werte aus (25), so folgt

$$26) \qquad \begin{aligned} \sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{L}{Cn} + \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ \frac{d\varepsilon_1'}{dt} &= \frac{M}{Cn} - \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} \end{aligned}$$

Die für die Rotationsachse gültigen Gleichungen (26) unterscheiden sich wesentlich von den der kleinen Achse des Erdellipsoids entsprechenden Gleichungen (25); während nämlich in (25) die Glieder zweiter Ordnung $\frac{A}{Cn}$ als Faktor enthalten, ist dieser in (26) nur mehr $\frac{C-A}{Cn}$. Da aber $\frac{C-A}{C}$ sehr klein ist, so kann man in

den Gleichungen (26) die Glieder zweiter Ordnung zunächst vernachlässigen und erhält dann

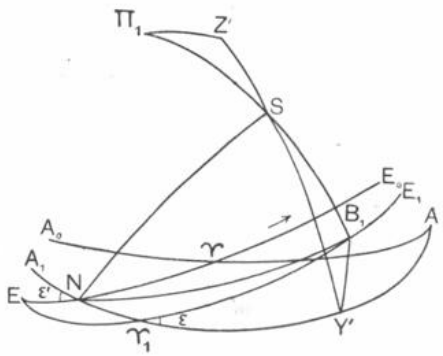
$$(26^a)\qquad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{L}{Cn\sin\varepsilon'_1}, \qquad \frac{d\varepsilon'_1}{dt} = \frac{M}{Cn}$$

Führt man in diese Gleichungen die in (25^a) gegebenen Ausdrücke für L und M ein und setzt zur Vereinfachung ψ und ε' an Stelle von ψ_1 und ε'_1, so ergibt sich

$$(27)\qquad \begin{aligned} -\frac{d\psi}{dt} &= \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\frac{y_c z_c}{r_c^2\sin\varepsilon'} + \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3\frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2\sin\varepsilon'} \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= -\frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\frac{x_c z_c}{r_c^2} - \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3\frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Koordinaten der Sonne und des Mondes müssen den Theorien dieser beiden Himmelskörper oder den bezüglichen Tafeln entlehnt werden; da aber die weiterhin zur Anwendung kommenden Theorien direkt nur die Polarkoordinaten von Sonne und Mond geben, so erscheint es angezeigt, die Gleichungen (27) dementsprechend umzuformen. In Fig. 5 sei EE_0 die feste, EE_1 die bewegliche Ekliptik, AA_0 der feste, AA_1 der bewegliche Äquator; der Pol der beweglichen Ekliptik werde mit Π_1, der Pol des beweglichen Äquators mit Z' bezeichnet; endlich möge S den Ort des Mondes und $\Pi_1 S B_1$ den Breitenkreis von S bezogen auf die bewegliche Ekliptik vorstellen. Setzt man die Länge des Mondes $\gamma_1 B_1 = l_c$ und seine Breite $B_1 S = b_c$, setzt man ferner die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t oder den Winkel $E_1\gamma_1 A = \varepsilon$, so ist in dem Dreieck $\Pi_1 Z' S$ der Winkel $S\Pi_1 Z' = 90^0 - l_c$, und der Bogen $\Pi_1 Z' = \varepsilon$, folglich

Fig. 5.



$$(28)\qquad \cos SZ' = \frac{z_c}{r_c} = \sin b_c\cos\varepsilon + \cos b_c\sin l_c\sin\varepsilon$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreiecke SNB_1, wenn man berücksichtigt, daß die X'-Achse durch N gehen soll,

$$\cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c\cos NB_1 + \sin b_c\sin NB_1\sin NB_1\gamma_1$$

Wenn der Bogen $N\gamma_1$ mit a bezeichnet wird, so läßt sich die letzte Gleichung ersetzen durch

$$(29)\qquad \cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c[\cos l_c\cos a - \sin l_c\sin a\cos\varepsilon] + \sin b_c\sin a\sin\varepsilon$$

Endlich folgt aus dem Dreieck SB_1Y'

$$\cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c\cos B_1Y' - \sin b_c\sin B_1Y'\sin\gamma_1B_1Y',$$

oder, wenn das Dreieck $B_1 \gamma_1 Y'$ zu Hilfe genommen wird, worin $\gamma_1 Y' = 90^\circ - a$ ist,

$$(30) \qquad \cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c [\cos l_c \sin a + \sin l_c \cos a \cos \varepsilon] - \sin b_c \cos a \sin \varepsilon$$

Aus den Gleichungen (28) und (30) ergibt sich

$$\frac{y_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos \varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \cos a \sin 2\varepsilon + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos 2\varepsilon$$

Da die Gleichung (29) aus (30) entsteht, wenn man in letzterer a durch $90^\circ + a$ ersetzt, so führt dieselbe Substitution, auf die vorige Gleichung angewandt, ohne weiteres zu dem Ausdruck für $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$. Man erhält demnach für die in den Gleichungen (27) vorkommenden Quotienten $\frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'}$ und $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$

$$(31) \qquad \frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ + \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'}$$

$$(32) \qquad \frac{x_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos \varepsilon - \\ - \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon - \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) leitet man durch Vertauschung des Index c mit $\odot$ die entsprechenden für die Sonne gültigen Gleichungen ab; da aber für die vorliegende Untersuchung die Breite der Sonne gleich o gesetzt werden darf, so ergibt sich

$$(31^a) \qquad \frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2 \sin \varepsilon'} = \tfrac{1}{2} \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \tfrac{1}{2} \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'}$$

$$(32^a) \qquad \frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2} = \tfrac{1}{2} \sin 2 l_\odot \cos a \sin \varepsilon - \tfrac{1}{2} \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon$$

Durch Substitution der Ausdrücke (31) bis (32a) in die Gleichungen (27) erhält man

$$(33^1) \qquad -\frac{d\psi}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} \left[\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \right. \\ + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ \left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} \right] + \\ + \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} \right]$$

$$(33^2)\quad \frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{3k^2M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big[\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin\varepsilon +$$
$$+\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos\varepsilon -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon -$$
$$-\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon\Big] -$$
$$-\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta}{r_\odot}\Big)^3 \sin 2l_\odot \cos a \sin\varepsilon - \frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta}{r_\odot}\Big)^3 \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon\Big]$$

27. Reihenentwicklungen. Um die Differentialgleichungen (33) integrieren zu können, muß man ihre rechten Seiten als Funktionen der Zeit darstellen; zu diesem Zweck sind zunächst a und ε nach Potenzen der Zeit zu entwickeln. Es bedeute Π die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik EE_1 (Fig. 5) auf der festen, vom festen Äquinox γ aus in der Richtung γE_0 gerechnet; der Winkel E_0EE_1 werde mit π bezeichnet. Unter ψ soll die von γ aus gerechnete und in der Richtung nach N hin negativ gezählte Länge des niedersteigenden Knotens des beweglichen Äquators auf der festen Ekliptik verstanden werden; in Fig. 5 ist also ψ negativ, und somit der Bogen $N\gamma$ absolut genommen gleich $-\psi$. Da der Bogen $E\gamma$ nach dem vorhin Gesagten gleich $180^\circ - \Pi$ ist, so ist der Bogen $EN = 180^\circ - \Pi + \psi$; ferner hat man $EN\gamma_1 = 180^\circ - \varepsilon'$, $N\gamma_1 E = \varepsilon$, $N\gamma_1 = a$. Setzt man noch $E\gamma_1 = b$, so gibt das Dreieck $NE\gamma_1$

$$(34)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+a) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \end{aligned}$$

Auf die erste dieser Gleichungen wende man die bekannte Reihenentwicklung [§ 1, (17) und (18)] an, wonach, wenn die Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{h}{\iota}\operatorname{tang}\varphi$$

gegeben ist und

$$\frac{h-\iota}{h+\iota} = p$$

gesetzt wird,

$$\varphi_1 = \varphi + p\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}p^2 \sin 4\varphi + \cdots$$

ist; man erhält dann

$$(35)\quad \tfrac{1}{2}(b+a) = \tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi-\psi) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) + \cdots$$

Wie die Vergleichung der beiden Gleichungen (34) miteinander lehrt, erhält man aus der Reihe für $\frac{1}{2}(b+a)$ diejenige für $\frac{1}{2}(b-a)$, wenn man in der ersteren ε' durch $180^\circ + \varepsilon'$ ersetzt; es wird also

$$(36)\quad \tfrac{1}{2}(b-a) = \tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi-\psi) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) - \cdots$$

Der in § 21 gegebenen Definition der Ekliptik zufolge ist die Lage der Ekliptik nur säkularen, von der Anziehung der Planeten auf den Schwerpunkt des Systems: Erde—Mond herrührenden Änderungen unterworfen. Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} \pi \sin \Pi &= p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots \\ \pi \cos \Pi &= q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{37}$$

so ist nach *Newcomb*, wenn die Zeit vom Beginn des Jahres 1850 an gezählt und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert = 36525 mittlere Sonnentage angenommen wird,

$$\begin{aligned} p_1 &= +\ 5''.341, & p_2 &= +\ 0''.1935, & p_3 &= -\ 0''.00019 \\ q_1 &= -\ 46.838, & q_2 &= +\ 0.0563, & q_3 &= +\ 0.00035 \end{aligned} \tag{37a}$$

Die Formeln, zu welchen die Theorie der Drehung der Erde führt, sollen im folgenden nur mit einer Genauigkeit gegeben werden, wie sie für den Zeitraum von 1750 bis 1950 ausreichend ist. Da vorhin 1850.0 als Ausgangspunkt der Zeitrechnung gewählt wurde, so wird t höchstens gleich $\pm$ 1, und demnach ergibt sich aus (37) und (37a), daß der Maximalwert von π gleich 47″ ist. Den Beobachtungen zufolge weicht ε' im Laufe von 200 Jahren stets um weniger wie 10″ von seinem mittleren Werte ab; setzt man

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon,$$

wo $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 31''.68$ (*Newcomb*) den für 1850.0 gültigen Wert von ε' bedeutet und nach der zweiten Gleichung (26a)

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{Cn}\int_0^t M dt$$

ist, so kann man in (35) und (36)

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\varepsilon}{2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{\Delta\varepsilon}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0}$$

annehmen. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{2}{\sin \varepsilon_0} - 2\,\frac{\Delta\varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = 2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - 2\,\frac{\Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0}$$

Für $\pi = 47''$ und $\varepsilon_0 = 23^\circ 27'$ wird der Koeffizient von $\sin 2(\Pi - \psi)$ in (35) gleich 0″.03 und in (36) verschwindend klein. Im dritten Gliede auf der rechten Seite von (35) kann demnach $\varepsilon' = \varepsilon_0$ gesetzt werden, und das entsprechende Glied in (36) ist ganz zu vernachlässigen. Endlich läßt sich tang $\frac{1}{2}\pi$ mit $\frac{1}{2}\pi$ vertauschen. Somit erhält man aus (35) und (36)

$$a = \frac{\pi \sin(\Pi - \psi)}{\sin \varepsilon_0} - \frac{\pi \Delta\varepsilon \sin(\Pi - \psi) \cos \varepsilon_0}{\sin^2 \varepsilon_0} - \tfrac{1}{8}\pi^2 \sin 2(\Pi - \psi) \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0,$$

$$b = 180^\circ - \Pi + \psi + \\ + \pi \sin(\Pi - \psi) \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{\pi \Delta\varepsilon \sin(\Pi - \psi)}{\sin^2 \varepsilon_0} - \tfrac{1}{8}\pi^2 \sin 2(\Pi - \psi) \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0$$

Die Beobachtungen ergeben, daß $-\psi$ für ein Jahrhundert nicht größer als $1^{\circ}24'$ wird. Man setze nun auf der rechten Seite der zwei letzten Gleichungen in den Gliedern erster Ordnung

$$\varkappa \sin(\Pi - \psi) = \varkappa \sin \Pi (1 - \tfrac{1}{2}\psi^2) - \psi \varkappa \cos \Pi,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (37)

$$\varkappa \sin(\Pi - \psi) = p_1 t + p_2 t^2 - \psi q_1 t - \tfrac{1}{2}\psi^2 p_1 t - \psi q_2 t^2,$$

ferner setze man in den mit $\varkappa \Delta\varepsilon$ und $\varkappa^2$ multiplizierten Gliedern

$$\begin{aligned} \varkappa \sin(\Pi - \psi) &= p_1 t \\ \varkappa^2 \sin 2(\Pi - \psi) &= 2 p_1 q_1 t^2 - 2 \psi q_1^2 t^2 \end{aligned}$$

Wenn man jetzt zur Abkürzung schreibt

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p_1}{\sin \varepsilon_0} t \\ a_2 &= \left(\frac{p_2}{\sin \varepsilon_0} - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \right) t^2 - \frac{\psi q_1}{\sin \varepsilon_0} t - \frac{p_1 \Delta\varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} t \\ a_3 &= \left(\tfrac{1}{4} q_1^2 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{q_2}{\sin \varepsilon_0} \right) \psi t^2 - \frac{p_1}{2 \sin \varepsilon_0} \psi^2 t \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 180 - \Pi + \psi \\ b_1 &= p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \\ b_2 &= (p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t \\ b_3 &= (\tfrac{1}{4} q_1^2 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - q_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0) \psi t^2 - \tfrac{1}{2} p_1 \psi^2 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0, \end{aligned} \tag{39}$$

wobei die Indizes die Ordnung der Glieder angeben sollen, so wird

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned} \tag{40}$$

Unter der vorhin gemachten Voraussetzung, daß $+1 \leqq t \leqq -1$ sein soll, wird a_1 höchstens gleich $13''.4$ und b_1 höchstens gleich $12''.3$, während a_2 und b_2 im Maximum nur Bruchteile einer Sekunde betragen. Die sehr kleinen Glieder a_3 und b_3 sind mit Rücksicht auf einige späterhin abzuleitende Formeln mitgeteilt worden; für die zunächst folgenden Rechnungen können sie vernachlässigt werden.

Man setze nun $b_1 + b_2 = \beta$, so daß nach (40) und (39) $b = 180^{\circ} - \Pi + \psi + \beta$ wird; es folgt dann aus dem Dreieck $EN\gamma_1$ (Fig. 5)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\cos(\Pi - \psi - \tfrac{1}{2}\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\beta} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varkappa$$

und hieraus mit hinreichender Genauigkeit

$$2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = \varkappa \cos(\Pi - \psi)$$

Setzt man jetzt

$$\cos \psi = 1 - \tfrac{1}{2}\psi^2, \qquad \sin \psi = \psi,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (37)

$$\varepsilon = \varepsilon' + q_1 t + q_2 t^2 + p_1 t \psi + p_2 t^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t \psi^2 \tag{41}$$

Diese Gleichung wird noch in einer anderen Form angewandt werden. Wenn man nämlich wie oben

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

setzt und die Abkürzungen einführt

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon + q_1 t &= E_1 \\ q_2 t^2 + p_1 \psi t &= E_2 \\ p_2 t^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t \psi^2 &= E_3, \end{aligned}$$

so verwandelt sich die Gleichung (41) in

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E_1 + E_2 + E_3 \tag{42}$$

Für $t = 1$ ist $E_1 < 57''$ und $E_2 < 0''.2$. Das sehr kleine Glied E_3 kann man vernachlässigen; wenn es trotzdem angeführt ist, so geschieht dies aus demselben Grunde, der für die Mitteilung der in (38) und (39) gegebenen Werte von a_3 und b_3 bestimmend war.

Nachdem im vorhergehenden die Ausdrücke für a und ε abgeleitet worden sind, lassen sich die in den Gleichungen (33) auftretenden Faktoren $\frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'}, \ldots, \sin a \cos 2\varepsilon$ leicht entwickeln. Mit Rücksicht auf die angegebenen Maximalwerte von a_1, a_2, E_1, E_2 setze man

$$\sin a = a_1 + a_2, \quad \cos a = 1, \quad \sin(E_1 + E_2) = E_1 + E_2, \quad \cos(E_1 + E_2) = 1 - \tfrac{1}{2} E_1^2$$

Sieht man auch weiterhin von allen Gliedern dritter und höherer Ordnung ab, so ergibt sich zunächst unter Benutzung der Gleichung (41)

$$\begin{aligned} \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= a_1 + a_2 + a_1 q_1 t \operatorname{cotg}\varepsilon' \\ \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= (a_1 + a_2)\operatorname{cotg}\varepsilon' - a_1 q_1 t \end{aligned}$$

Da aber

$$\operatorname{cotg}\varepsilon' = \operatorname{cotg}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\varepsilon}{\sin^2\varepsilon_0}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= a_1 + a_2 + a_1 q_1 t \operatorname{cotg}\varepsilon_0 \\ \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= (a_1 + a_2)\operatorname{cotg}\varepsilon_0 - \frac{a_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2\varepsilon_0} - a_1 q_1 t \end{aligned} \tag{43}$$

Ferner hat man unter Anwendung der Gleichung (42)

$$\begin{aligned} \cos a \sin 2\varepsilon &= \sin 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2)\sin 2\varepsilon_0 + 2(E_1 + E_2)\cos 2\varepsilon_0 \\ \cos a \cos 2\varepsilon &= \cos 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2)\cos 2\varepsilon_0 - 2(E_1 + E_2)\sin 2\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Wird nun

$$\frac{1}{\sin\varepsilon'} = \frac{1}{\sin\varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1 + \cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2\right)$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2 - 2E_1^2\right) +$$
$$+ \frac{2\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}(E_1 + E_2 - E_1\Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0)$$

(44)

$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2 - 2E_1^2\right) -$$
$$- \frac{2\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}(E_1 + E_2 - E_1\Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0)$$

Endlich erhält man mit Hilfe der Gleichung (42)

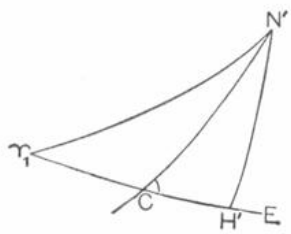
$$\cos a \sin\varepsilon = (1 - \tfrac{1}{2}E_1^2)\sin\varepsilon_0 + (E_1 + E_2)\cos\varepsilon_0$$
$$\cos a \cos\varepsilon = (1 - \tfrac{1}{2}E_1^2)\cos\varepsilon_0 - (E_1 + E_2)\sin\varepsilon_0 \quad (45)$$

und

$$\sin a \sin 2\varepsilon = (a_1 + a_2)\sin 2\varepsilon_0 + 2a_1E_1\cos 2\varepsilon_0$$
$$\sin a \cos 2\varepsilon = (a_1 + a_2)\cos 2\varepsilon_0 - 2a_1E_1\sin 2\varepsilon_0 \quad (46)$$

28. Es sind nun auch die in den Gleichungen (33) enthaltenen, von den Polarkoordinaten des Mondes und der Sonne abhängigen Faktoren $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$, ... als Funktionen der Zeit darzustellen. Zuvor aber soll an Stelle der Länge und Breite des Mondes seine Länge in der Bahn und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik eingeführt werden. Zur Zeit t sei $\gamma_1 E$ (Fig. 6) die Ebene der Ekliptik, γ_1 das Frühlingsäquinox und CN' die Mondbahn; die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, also der Bogen $\gamma_1 C$, möge mit Ω und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, oder der Winkel $N'CH'$, mit i bezeichnet werden; ferner stelle $N'H'$ den Breitenkreis des Mondes dar. Es ist somit $b_c = N'H'$ und $l_c = \Omega + CH'$. Legt man durch γ_1 und N' einen Bogen größten Kreises und bestimmt $\cos \gamma_1 N'$ und $\sin \gamma_1 N' \cos N'\gamma_1 H'$ sowohl aus dem Dreieck $\gamma_1 H'N'$ als aus dem Dreieck $\gamma_1 CN'$, so ergibt sich durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke, wenn noch der Bogen $CN' = w$ gesetzt wird,

Fig. 6.



$$\cos l_c \cos b_c = \cos w \cos\Omega - \sin w \sin\Omega \cos i$$
$$\sin l_c \cos b_c = \cos w \sin\Omega + \sin w \cos\Omega \cos i$$

Durch eine kleine Umformung erhält man hieraus die zwei ersten der folgenden Gleichungen; die dritte Gleichung ergibt sich aus dem Dreiecke $CN'H'$

$$\cos l_c \cos b_c = \cos(w+\Omega)\cos^2\tfrac{1}{2}i + \cos(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\sin l_c \cos b_c = \sin(w+\Omega)\cos^2\tfrac{1}{2}i - \sin(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i \quad (47)$$
$$\sin b_c = \sin w \sin i$$

Die Neigung i schwankt zwischen $5^\circ 0'$ und $5^\circ 18'$; vernachlässigt man $\sin^4\frac{1}{2}i$, so erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$\sin l_c \cos l_c \cos^2 b = \sin(w+\Omega)\cos(w+\Omega)\cos^4\tfrac{1}{2}i + \sin 2\Omega \sin^2\tfrac{1}{2}i \cos^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\cos l_c \sin b_c \cos b_c = \cos(w+\Omega)\sin w \cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i + \cos(w-\Omega)\sin w \sin^2\tfrac{1}{2}i \sin i$$
$$\sin^2 l_c \cos^2 b_c = \sin^2(w+\Omega)\cos^4\tfrac{1}{2}i - 2\sin(w+\Omega)\sin(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i \cos^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\sin^2 b_c = \sin^2 w \sin^2 i$$
$$\sin l_c \sin b_c \cos b_c = \sin(w+\Omega)\sin w \cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i - \sin(w-\Omega)\sin w \sin^2\tfrac{1}{2}i \sin i$$

Jetzt lassen sich die Formeln anwenden

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\sin(x+y) + \tfrac{1}{2}\sin(x-y)$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)$$

und es ergibt sich, wenn man hierbei die Glieder $\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}i \sin i \sin(2w-\Omega)$ und $\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}i \sin i \cos(2w-\Omega)$ vernachlässigt und auf beiden Seiten mit $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$, bzw. $\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ multipliziert,

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = \tfrac{1}{2}\cos^4\tfrac{1}{2}i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega$$
$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = \tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+\Omega) - \tfrac{1}{4}\sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin\Omega$$

(48)

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = \tfrac{1}{4}(\cos^4\tfrac{1}{2}i - \sin^2 i)\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\cos^4\tfrac{1}{2}i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+2\Omega) +$$
$$+ \tfrac{3}{8}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2w - \tfrac{1}{8}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega$$
$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = -\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos\Omega$$

Die Lösung der Aufgabe, die rechten Seiten dieser Gleichungen mit Hilfe der durch die Mondtheorie gegebenen Formeln als Funktionen der Zeit darzustellen, erfordert dem ersten Anscheine nach sehr umständliche Rechnungen; in Wirklichkeit aber ist die aufzuwendende Mühe nicht groß, und läßt sich die ganze Arbeit auf die Entwicklung der zwei Ausdrücke $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2i \sin\Omega$ zurückführen. Die Berechnung des Ausdruckes $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$ soll im folgenden auf Grund der *Delaunay*schen Theorie der Mondbewegung vorgenommen werden; es genügt aber vollkommen, nur die Hauptglieder dieser Theorie zu berücksichtigen.

Es sei

e, e' = Exzentrizität der Mond-, bzw. der Erdbahn
n, n' = mittlere Bewegung des Mondes, bzw. der Sonne
$m = \dfrac{n'}{n}$
g, g' = mittlere Anomalie des Mondes, bzw. der Sonne
ω, ω' = Abstand des Mond-, bzw. des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik
$D = g + \omega - g' - \omega'$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}e'^2)m^2 = \frac{1}{K_0}$$
$$[e - \tfrac{7}{12}em^2 - \tfrac{285}{64}em^3 - \tfrac{45091}{2304}em^4]K_0 = e_1$$
$$[e^2 - \tfrac{1}{3}e^4 - \tfrac{5}{6}e^2m^2 - \tfrac{735}{64}e^2m^3]K_0 = e_2$$
$$[m^2 + \tfrac{19}{6}m^3 + \tfrac{15}{4}e^2m + \tfrac{131}{18}m^4 + \tfrac{189}{16}e^2m^2 + \tfrac{10483}{256}e^2m^3 + \tfrac{383}{27}m^5 - \tfrac{5}{2}e'^2m^2]K_0 = \sigma_2$$
$$[\tfrac{15}{8}em + \tfrac{187}{32}em^2 + \tfrac{29513}{1536}em^3 + \tfrac{1161961}{18432}em^4 - \tfrac{75}{16}ee'^2m]K_0 = \tau_2$$
$$[\tfrac{33}{16}em^2 + \tfrac{101}{16}em^3 + \tfrac{405}{64}e^3m + \tfrac{5037}{256}e^3m^2 + \tfrac{53303}{384}em^4]K_0 = \omega_3$$

so ist nach *Delaunay*

$$(49)\quad \frac{H}{r_c} = 1 + e_1\cos g + e_2\cos 2g + \sigma_2\cos 2D + \tau_2\cos(2D - g) + \omega_3\cos(2D + g)$$

Mit Benutzung der von *Delaunay* angewandten Werte

$$e = 0.05490, \qquad e' = 0.01677, \qquad m = 0.07480$$

ergibt sich

$$\log e_1 = 8.7368 \qquad \log\sigma_2 = 7.917 \qquad \log\omega_3 = 6.95$$
$$\log e_2 = 7.474 \qquad \log\tau_2 = 8.001$$

Wird die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (49) auf $e_1\cos g$ folgenden Glieder mit f bezeichnet, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\frac{H}{r_c} = 1 + e_1\cos g + f$$

Hieraus erhält man mit hinreichender Genauigkeit

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = 1 + 3(e_1\cos g + f) + 3(e_1^2\cos^2 g + 2fe_1\cos g + f^2)$$

In dem letzten Gliede darf man, indem für f sein Wert substituiert wird,

$$f^2 = \sigma_2^2\cos^2 2D + \tau_2^2\cos^2(2D - g) + 2\sigma_2\tau_2\cos 2D\cos(2D - g)$$

setzen oder, unter Anwendung der Formel

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a + b) + \tfrac{1}{2}\cos(a - b)$$

und mit Vernachlässigung einiger für die Folge einflußloser Glieder,

$$f^2 = \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 + \tfrac{1}{2}\tau_2^2 + \sigma_2\tau_2\cos g$$

Substituiert man diesen Ausdruck und den von f in die Gleichung für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$, so ergibt sich, wenn zur Abkürzung

$$1 + \tfrac{3}{2}(e_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_2^2) = \alpha_0 \qquad \log\alpha_0 = 0.00204$$
$$3e_1 + 3e_1e_2 + 3\sigma_2\tau_2 = \beta_1 \qquad \beta_1 = 9.2159$$
$$3e_2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 = \beta_2 \qquad \beta_2 = 8.127$$
$$3\sigma_2 + 3e_1\tau_2 + 3e_1\omega_3 = \delta_2 \qquad \delta_2 = 8.424$$
$$3\tau_2 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 = 8.497$$
$$3\omega_3 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_3 = 7.60$$
$$3e_1\tau_2 = \eta_3 \qquad \eta_3 = 7.21$$

gesetzt, und die Summe $3e_1e_2\cos 3g + 3e_1\omega_3\cos(2D+2g)$ vernachlässigt wird,

$$(50)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = \alpha_0 + \beta_1\cos g + \beta_2\cos 2g + \delta_2\cos 2D + \varepsilon_2\cos(2D-g) + \varepsilon_3\cos(2D+g) + \\ + \eta_3\cos(2D-2g)$$

Den Ausdruck für $w+\Omega$, d. h. für die Länge des Mondes in seiner Bahn, kann man ebenfalls der *Delaunay*schen Theorie entnehmen. Wird nämlich

$$4e - \tfrac{1}{2}e^3 = k_1$$
$$\tfrac{5}{2}e^2 - \tfrac{11}{12}e^4 - \tfrac{7}{8}e^2m^2 - \tfrac{2595}{128}e^2m^3 = k_2$$
$$\tfrac{11}{4}m^2 + \tfrac{59}{6}m^3 + \tfrac{75}{8}e^2m + \tfrac{893}{36}m^4 + \tfrac{1101}{32}e^2m^2 + \tfrac{2855}{54}m^5 + \tfrac{64271}{512}e^2m^3 = \lambda_2$$
$$\tfrac{15}{2}em + \tfrac{263}{8}em^2 + \tfrac{48217}{384}em^3 + \tfrac{1880537}{4608}em^4 = \mu_2$$
$$\tfrac{17}{4}em^2 + \tfrac{169}{12}em^3 + \tfrac{195}{16}e^3m + \tfrac{9577}{288}em^4 + \tfrac{2655}{64}e^3m^2 = \mu_3$$
$$\tfrac{45}{8}e^2m + \tfrac{53}{2}e^2m^2 + \tfrac{263089}{1536}e^2m^3 + \tfrac{77001107}{9216}e^2m^4 + \tfrac{193216363643}{442368}e^2m^5 = \nu_3$$

gesetzt, und bedeutet c die mittlere Länge des Mondes in seiner Bahn, so hat man

$$(51)\quad 2w + 2\Omega = 2c + k_1\sin g + k_2\sin 2g + \lambda_2\sin 2D + \mu_2\sin(2D-g) + \mu_3\sin(2D+g) + \\ + \nu_3\sin(2D-2g)$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Werte von e und m ergibt sich

$\log k_1 = 9.3415$	$\log \lambda_2 = 8.3664$	$\log \mu_3 = 7.273$
$\quad k_2 = 7.874$	$\quad \mu_2 = 8.6482$	$\quad \nu_3 = 7.310$

Wenn man die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (51) auf $2c$ folgenden periodischen Glieder mit p bezeichnet, so erhält man unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung

$$(52)\quad \begin{aligned} \sin(2w+2\Omega) &= \sin[2c+p] = (1-\tfrac{1}{2}p^2)\sin 2c + (p-\tfrac{1}{6}p^3)\cos 2c \\ \cos(2w+2\Omega) &= \cos[2c+p] = (1-\tfrac{1}{2}p^2)\cos 2c - (p-\tfrac{1}{6}p^3)\sin 2c \end{aligned}$$

Es reicht nun völlig aus, wenn man setzt

$$\tfrac{1}{6}p^3 = \tfrac{1}{6}[k_1^3\sin^3 g + 3k_1^2k_2\sin^2 g\sin 2g + 3k_1^2\lambda_2\sin^2 g\sin 2D + 3k_1^2\mu_2\sin^2 g\sin(2D-g)]$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Formel

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

an und vernachlässigt alle Glieder, welche von anderen Argumenten als den in (50) und (51) enthaltenen abhängen, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{6}p^3 = \tfrac{1}{8}k_1^3\sin g + \tfrac{1}{4}k_1^2k_2\sin 2g + \tfrac{1}{4}k_1^2\lambda_2\sin 2D + \tfrac{1}{4}k_1^2\mu_2\sin(2D-g) - \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2\sin(2D+g) - \\ - \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2\sin(2D-2g)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und unter Einführung des Wertes von p erhält man

$$(53)\quad p - \tfrac{1}{6}p^3 = k_1(1-\tfrac{1}{8}k_1^2)\sin g + k_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin 2g + \lambda_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin 2D + \\ + \mu_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin(2D-g) + (\mu_3+\tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2)\sin(2D+g) + (\nu_3+\tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2)\sin(2D-2g)$$

Ferner genügt es, zu setzen

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}k_1^2\sin^2 g + k_1k_2\sin 2g\sin g + k_1\lambda_2\sin 2D\sin g + k_1\mu_2\sin(2D-g)\sin g + \\ + k_1\mu_3\sin(2D+g)\sin g + k_1\nu_3\sin(2D-2g)\sin g + \\ + \tfrac{1}{2}\lambda_2^2\sin^2 2D + \lambda_2\mu_2\sin 2D\sin(2D-g) + \tfrac{1}{2}\mu_2^2\sin^2(2D-g)$$

Macht man jetzt wieder von der obigen Formel für $\sin a \sin b$ Gebrauch und beschränkt sich auf solche Glieder, welche die in (50) und (51) auftretenden Argumente enthalten, so ergibt sich

$$(54)\quad 1 - \tfrac{1}{2}p^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) - \tfrac{1}{2}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2)\cos g + \tfrac{1}{4}k_1^2 \cos 2g + \\ + \tfrac{1}{2}k_1(\mu_2 - \mu_3)\cos 2D - \tfrac{1}{2}k_1(\lambda_2 - \nu_3)\cos(2D - g) + \tfrac{1}{2}k_1\lambda_2\cos(2D + g) - \\ - \tfrac{1}{2}k_1\mu_2\cos(2D - 2g)$$

Aus den Gleichungen (52), (53) und (54) folgt, wenn zur Abkürzung

$1 - \tfrac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) = s_0$	$\log s_0 = 9.99446$
$\tfrac{1}{2}k_1(1 - \tfrac{1}{8}k_1^2) - \tfrac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = s_1$	» $s_1 = 9.0352$
$\tfrac{1}{2}k_1(1 - \tfrac{1}{8}k_1^2) + \tfrac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = t_1$	» $t_1 = 9.0406$
$\tfrac{1}{8}k_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) = s_2$	» $s_2 = 7.9877$
$\tfrac{1}{8}k_1^2 - \tfrac{1}{2}k_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) = t_2$	» $t_2 = 7.367$
$\tfrac{1}{2}\lambda_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) + \tfrac{1}{4}k_1(\mu_2 - \mu_3) = u_2$	» $u_2 = 8.1406$
$\tfrac{1}{2}\lambda_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) - \tfrac{1}{4}k_1(\mu_2 - \mu_3) = v_2$	» $v_2 = 7.9612$
$\tfrac{1}{2}\mu_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) - \tfrac{1}{4}k_1(\lambda_2 - \nu_3) = x_2$	» $x_2 = 8.3182$
$\tfrac{1}{2}\mu_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) + \tfrac{1}{4}k_1(\lambda_2 - \nu_3) = y_2$	» $y_2 = 8.3642$
$\tfrac{1}{4}k_1\lambda_2 + \tfrac{1}{2}(\mu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2) = s_3$	» $s_3 = 7.371$
$\tfrac{1}{4}k_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\mu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2) = t_3$	» $t_3 = 6.31$
$\tfrac{1}{4}k_1\mu_2 - \tfrac{1}{2}(\nu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2) = u_3$	» $u_3 = 7.131$
$\tfrac{1}{4}k_1\mu_2 + \tfrac{1}{2}(\nu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2) = v_3$	» $v_3 = 7.548$

gesetzt wird,

$$(55)\quad \sin(2w + 2\Omega) = \underset{9919.8}{s_0}\sin 2c + \underset{1089}{s_1}\sin[2c + g] - \underset{1103}{t_1}\sin[2c - g] + \\ + \underset{98}{s_2}\sin[2c + 2g] + \underset{23}{t_2}\sin[2c - 2g] + \underset{139}{u_2}\sin[2c + 2D] - \underset{92}{v_2}\sin[2c - 2D] + \\ + \underset{209}{x_2}\sin[2c + 2D - g] - \underset{232}{y_2}\sin[2c - 2D + g] + \underset{24}{s_3}\sin[2c + 2D + g] + \\ + \underset{2}{t_3}\sin[2c - 2D - g] - \underset{14}{u_3}\sin[2c + 2D - 2g] - \underset{35}{v_3}\sin[2c - 2D + 2g]$$

Um nun das Produkt $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + 2\Omega)$ zu entwickeln, setze man für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ seinen durch die Gleichung (50) bestimmten Ausdruck ein. Als erstes Glied des Produktes erhält man dann $\alpha_0 \sin(2w + 2\Omega)$. Die Zahlenwerte der mit α_0 multiplizierten Koeffizienten der Gleichung (55), ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, findet man unterhalb der Koeffizienten angegeben; bei dem Koeffizienten von $\sin 2c$ ist auch die fünfte Dezimale mitgeteilt. Das zweite Glied des Produktes ist $\beta_1 \cos g \sin(2w + 2\Omega)$. Unter Anwendung der Gleichung (55) und mit Benutzung der Formel

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a + b) + \tfrac{1}{2}\sin(a - b)$$

wird, wenn alle die kleinen Glieder unberücksichtigt bleiben, welche nicht von den in (55) vorkommenden Argumenten abhängen,

$$(56^1)\quad \beta_1 \cos g \sin(2w+2\Omega) = -\underset{1.1}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(t_1 - s_1)\sin 2c + \underset{820}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(s_0 + s_2)\sin[2c+g] +$$

$$+\underset{814}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(s_0+t_2)\sin[2c-g] + \underset{89}{\tfrac{1}{2}\beta_1 s_1}\sin[2c+2g] - \underset{90}{\tfrac{1}{2}\beta_1 t_1}\sin[2c-2g] +$$

$$+\underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(x_2+s_3)\sin[2c+2D] - \underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(y_2-t_3)\sin[2c-2D] +$$

$$+\underset{10}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(u_2-u_3)\sin[2c+2D-g] - \underset{10}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(v_2+v_3)\sin[2c-2D+g] +$$

$$+\underset{11}{\tfrac{1}{2}\beta_1 u_2}\sin[2c+2D+g] - \underset{8}{\tfrac{1}{2}\beta_1 v_2}\sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\beta_1 x_2}\sin[2c+2D-2g] - \underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1 y_2}\sin[2c-2D+2g]$$

In dieser Formel sind unterhalb der Koeffizienten deren Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben; dieselbe Bemerkung gilt für die folgenden Gleichungen, in denen wiederum alle Glieder vernachlässigt wurden, welche von anderen Argumenten abhängen als den in der Formel (55) auftretenden, außerdem aber auch diejenigen, deren Koeffizienten weniger als eine halbe Einheit der vierten Dezimale betragen. Man erhält so

$$56^2)\quad \beta_2 \cos 2g \sin(2w+2\Omega) = \underset{0.8}{\tfrac{1}{2}\beta_2}(s_2+t_2)\sin 2c - \underset{7}{\tfrac{1}{2}\beta_2 t_1}\sin[2c+g] + \underset{7}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_1}\sin[2c-g] +$$

$$+\underset{66}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_0}\sin[2c+2g] + \underset{66}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_0}\sin[2c-2g] +$$

$$+\underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 x_2}\sin[2c+2D+g] - \underset{2}{\tfrac{1}{2}\beta_2 y_2}\sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 u_2}\sin[2c+2D-2g] - \underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 v_2}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^3)\quad \delta_2 \cos 2D \sin(2w+2\Omega) = \underset{0.6}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(u_2 - v_2)\sin 2c - \underset{3}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(y_2 - s_3)\sin[2c+g] +$$

$$+\underset{3}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(x_2+t_3)\sin[2c-g] + \underset{131}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_0}\sin[2c+2D] +$$

$$+\underset{131}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_0}\sin[2c-2D] - \underset{15}{\tfrac{1}{2}\delta_2 t_1}\sin[2c+2D-g] +$$

$$+\underset{14}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_1}\sin[2c-2D+g] + \underset{14}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_1}\sin[2c+2D+g] -$$

$$-\underset{15}{\tfrac{1}{2}\delta_2 t_1}\sin[2c-2D-g] + \underset{1}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_2}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^4)\quad \varepsilon_2\cos(2D-g)\sin(2w+2\Omega)=\tfrac{1}{2}\varepsilon_2(u_2-v_3)\sin[2c+g]-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2(v_2+u_3)\sin[2c-g]+$$
$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_1}\sin[2c+2D]-\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 t_1}\sin[2c-2D]+$$
$$+\underset{155}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_0}\sin[2c+2D-g]+\underset{155}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_0}\sin[2c-2D+g]+$$
$$+\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_2}\sin[2c+2D+g]-\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 t_1}\sin[2c+2D-2g]+$$
$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_1}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^5)\quad \varepsilon_3\cos(2D+g)\sin(2w+2\Omega)=-\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 t_1}\sin[2c+2D]+\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_1}\sin[2c-2D]+$$
$$+\underset{20}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_0}\sin[2c+2D+g]+\underset{20}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_0}\sin[2c-2D-g]$$

$$(56^6)\quad \eta_3\cos(2D-2g)\sin(2w+2\Omega)=\underset{8}{\tfrac{1}{2}\eta_3 s_0}\sin[2c+2D-2g]+\underset{8}{\tfrac{1}{2}\eta_3 s_0}\sin[2c-2D+2g]$$

Die Summe der mit α_0 multiplizierten Gleichung (55)*) und der Gleichungen (56^1) bis (56^6) ist gleich $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)$, und zwar folgt mit Benutzung der unterhalb der Koeffizienten der genannten Gleichungen mitgeteilten Zahlen

$$(57)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)=\underset{[9.9965]}{0.9920}\sin 2c+\underset{[9.2790]}{0.1901}\sin[2c+g]-\underset{[8.4487]}{0.0281}\sin[2c-g]+$$
$$+\underset{[8.4031]}{0.0253}\sin[2c+2g]-\underset{[6.00]}{0.0001}\sin[2c-2g]+\underset{[8.4829]}{0.0304}\sin[2c+2D]+$$
$$+\underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c-2D]+\underset{[8.5551]}{0.0359}\sin[2c+2D-g]-$$
$$-\underset{[7.863]}{0.0073}\sin[2c-2D+g]+\underset{[7.857]}{0.0072}\sin[2c+2D+g]-$$
$$-\underset{[6.48]}{0.0003}\sin[2c-2D-g]-\underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c+2D-2g]-$$
$$-\underset{[7.462]}{0.0029}\sin[2c-2D+2g]$$

In dieser Gleichung sind unterhalb der Koeffizienten ihre Logarithmen angegeben.

Aus den Gleichungen (52) und (50) folgt, daß, wenn man auf der rechten Seite von (57) $2c$ durch $90^\circ+2c$ oder auch sin durch cos ersetzt, der Ausdruck für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+2\Omega)$ erhalten wird. Ferner lehrt die Gleichung (51), daß man, um $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$

*) Man achte auf die S. 76, Zeile 9 v. u. gemachte Bemerkung.

$\sin(2w+\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+\Omega)$ zu erhalten, in den Formeln für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)$, beziehungsweise $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+2\Omega)$ an Stelle von $2c$ zu setzen hat $2c-\Omega$; ersetzt man dagegen $2c$ durch $2c-2\Omega$, so ergeben sich die Gleichungen für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin 2w$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos 2w$.

Es soll jetzt noch der Ausdruck $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin\Omega$ entwickelt werden; dabei ist aber auf die periodischen Störungen der Elemente i und Ω Rücksicht zu nehmen. Bedeuten i_0 und Ω_0 die mittleren Werte von i und Ω, bedeuten ferner γ, γ', δ, δ' vier Konstanten, und bezeichnet man mit L die mittlere Länge der Sonne, so ist*)

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0+\gamma\sin(2L-2\Omega_0)+\delta\sin 2\omega\\ i &= i_0+\gamma'\cos(2L-2\Omega_0)+\delta'\cos 2\omega\end{aligned}\tag{58}$$

$$\begin{aligned}\log\gamma &= 8.440, & \log\delta &= 7.152\\ \gamma' &= 7.393, & \delta' &= 6.106\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (58) ergibt sich, wenn die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sin 2i_0 &= i_1 & \log i_1 &= 8.64992\\ \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\gamma\sin 2i_0+\gamma'\cos 2i_0) &= i_2 & i_2 &= 7.088\\ \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\delta\sin 2i_0+\delta'\cos 2i_0) &= i_3 & i_3 &= 5.800\end{aligned}$$

eingeführt werden, wo $i_0 = 5^\circ 8' 43''$ anzunehmen ist,

$$\tfrac{1}{4}\sin 2i\sin\Omega = i_1\sin\Omega_0+i_2\sin(2L-\Omega_0)+i_3\sin(2\omega+\Omega_0)$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (50) zu multiplizieren. Unter Vernachlässigung sehr kleiner und für die Folge bedeutungsloser Glieder erhält man, wenn nach Ausführung der Multiplikation an Stelle von Ω_0 wieder Ω gesetzt wird,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin\Omega = {}& \underset{8.65196}{\alpha_0 i_1}\sin\Omega+\underset{7.565}{\tfrac{1}{2}\beta_1 i_1}\sin(\Omega+g)+\underset{7.565}{\tfrac{1}{2}\beta_1 i_1}\sin(\Omega-g)+\\ &+\underset{6.77}{\tfrac{1}{2}\delta_2 i_1}\sin(\Omega+2D)+\underset{6.77}{\tfrac{1}{2}\delta_2 i_1}\sin(\Omega-2D)+\underset{6.85}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 i_1}\sin(\Omega+2D-g)+\\ &+\underset{6.85}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 i_1}\sin(\Omega-2D+g)+\underset{7.090}{\alpha_0 i_2}\sin(2L-\Omega)+\underset{5.802}{\alpha_0 i_3}\sin(2\omega+\Omega)\end{aligned}\tag{59}$$

Unterhalb der Koeffizienten sind ihre Logarithmen angegeben. Ersetzt man auf der rechten Seite von (59) sin durch cos, so erhält man die Entwicklung für $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos\Omega$.

Der Einfluß der periodischen Störungen von i und Ω auf die Glieder $\frac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\Omega$ und $\frac{1}{8}\sin^2 i\cos 2\Omega$ ist zu vernachlässigen; es wird dann hinreichend genau

*) *Perchot*, Sur les mouvements des nœuds et du périgée de la Lune, p. 40, Thèse, Paris 1892.

(60)
$$\tfrac{1}{4}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega = \tfrac{1}{4}\alpha_0 \sin^2 i_0 \sin 2\Omega \qquad \log \tfrac{1}{4}\alpha_0 \sin^2 i_0 = 7.3054$$
$$\tfrac{1}{8}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega = \tfrac{1}{8}\alpha_0 \sin^2 i_0 \cos 2\Omega \qquad \log \tfrac{1}{8}\alpha_0 \sin^2 i_0 = 7.0044$$

wo rechts Ω statt Ω_0 gesetzt wurde. Der Einfluß der periodischen Störungen der Elemente i und Ω auf die übrigen Glieder der Gleichungen (48) ist ohne Bedeutung für das Endresultat der Untersuchung und kann demnach unberücksichtigt bleiben.

Im vorigen sind alle Formeln abgeleitet worden, deren man bedarf, um die gesuchten Entwicklungen der auf der rechten Seite der Gleichungen (48) stehenden Ausdrücke zu erhalten. Zur Anwendung gelangen die Formeln (57), (59), (60) und, wegen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der dritten der Gleichungen (48), noch die Formel (50); für die in den Gleichungen (48) vorkommenden Koeffizienten, insoweit deren Werte nicht schon mitgeteilt wurden, hat man

$\log \tfrac{1}{2}\cos^4 \tfrac{1}{2} i = 9.6972$ $\quad \log \tfrac{1}{4}(\cos^4 \tfrac{1}{2} i - \sin^2 i) = 9.39267$ $\quad \log \tfrac{3}{8}\sin^2 i = 7.4794$
$\log \tfrac{1}{2}\cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin i = 8.6508$ $\quad \log \tfrac{1}{4}\cos^4 \tfrac{1}{2} i = 9.3962$

Wenn nun einige belanglose Glieder fortgelassen und die Koeffizienten logarithmisch angesetzt werden, so erhält man

(61¹) $$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = 9.6937 \sin 2c + 8.9762 \sin[2c+g] + 8_n1459 \sin[2c-g] +$$
$$+ 8.1003 \sin[2c+2g] + 8.1801 \sin[2c+2D] +$$
$$+ 6.40 \sin[2c-2D] + 8.2523 \sin[2c+2D-g] +$$
$$+ 7_n560 \sin[2c-2D+g] + 7.554 \sin[2c+2D+g] +$$
$$+ 7_n159 \sin[2c-2D+2g] + 7.3054 \sin 2\Omega$$

(61²) $$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = 8.6473 \sin[2c-\Omega] + 7.9298 \sin[2c+g-\Omega] +$$
$$+ 7_n099 \sin[2c-g-\Omega] + 7.054 \sin[2c+2g-\Omega] +$$
$$+ 7.134 \sin[2c+2D-\Omega] + 7.206 \sin[2c+2D-g-\Omega] +$$
$$+ 8_n65196 \sin\Omega + 7_n565 \sin(\Omega+g) + 7_n565 \sin(\Omega-g) +$$
$$+ 6_n77 \sin(\Omega+2D) + 6_n77 \sin(\Omega-2D) +$$
$$+ 6_n85 \sin(\Omega+2D-g) + 6_n85 \sin(\Omega-2D+g) +$$
$$+ 7_n090 \sin(2L-\Omega) + 5_n802 \sin(2\omega+\Omega)$$

(61³) $$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = 9.39471 + 8.6086 \cos g + 7.520 \cos 2g +$$
$$+ 7.817 \cos 2D + 7.890 \cos(2D-g) +$$
$$+ 6.99 \cos(2D+g) + 6.60 \cos(2D-2g) +$$
$$+ 9_n3927 \cos 2c + 8_n6752 \cos[2c+g] +$$
$$+ 7.845 \cos[2c-g] + 7_n799 \cos[2c+2g] +$$
$$+ 7_n879 \cos[2c+2D] + 6_n10 \cos[2c-2D] +$$
$$+ 7_n951 \cos[2c+2D-g] + 7.259 \cos[2c-2D+g] +$$
$$+ 7_n253 \cos[2c+2D+g] +$$
$$+ 6.858 \cos[2c-2D+2g] +$$
$$+ 7.476 \cos[2c-2\Omega] + 7_n004 \cos 2\Omega$$

$$(61^4)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = {}_n6473\cos[2c-\Omega] + {}_n9298\cos[2c+g-\Omega] +$$
$$+ 7.0995\cos[2c-g-\Omega] + {}_n054\cos[2c+2g-\Omega] +$$
$$+ {}_n134\cos[2c+2D-\Omega] + {}_n206\cos[2c+2D-g-\Omega] +$$
$$+ 8.65196\cos\Omega + 7.565\cos(\Omega+g) + 7.565\cos(\Omega-g) +$$
$$+ 6.77\cos(\Omega+2D) + 6.77\cos(\Omega-2D) +$$
$$+ 6.85\cos(\Omega+2D-g) + 6.85\cos(\Omega-2D+g) +$$
$$+ 7.090\cos(2L-\Omega) + 5.802\cos(2\omega+\Omega)$$

Die in diesem Artikel gegebenen Entwicklungen können noch dazu benutzt werden, die in den Gleichungen (33^1) und (33^2) vorkommenden Ausdrücke $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ als Funktionen der Zeit darzustellen; dabei kann man von allen periodischen Störungen der Erdbahn absehen und letztere als elliptisch betrachten. Wenn unter dieser Voraussetzung Δ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, e' die Exzentrizität der Erdbahn und g' die mittlere Anomalie der Sonne bedeutet, so hat man

$$\frac{\Delta}{r_\odot} = 1 + e'\cos g' + e'^2\cos 2g'$$

Aus der Vergleichung dieser Relation mit (49) folgt, daß, wenn man in der Gleichung (50), bzw. in den Ausdrücken für die Koeffizienten dieser Gleichung, e_1, e_2, g der Reihe nach mit e', e'^2, g' vertauscht und außerdem $\sigma_2 = \tau_2 = \omega_3 = 0$ setzt, man die Entwicklung für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3$ erhält. Es ergibt sich also bis auf Glieder von der Ordnung e'^2 genau

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 = 1 + \tfrac{3}{2}e'^2 + 3e'\cos g' + \tfrac{9}{2}e'^2\cos 2g'$$

Wird t von 1850.0 an gezählt, und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert gewählt, so ist nach *Newcomb*

$$e' = 0.01677 - 0.000042\,t,$$

oder, wie zur Abkürzung gesetzt werden soll,

$$e' = e'_0 + e'_1 t$$

Es genügt nun, das säkulare Glied von e' nur bei der Berechnung von $\frac{3}{2}e'^2$ in Rechnung zu ziehen; setzt man dementsprechend

$\alpha'_0 = 1 + \frac{3}{2}e'^2_0$	$\log \alpha'_0 = 0.00018$
$\alpha'_1 = 3e'_1e'_0$	» $\alpha'_1 = 4_n325$
$\beta'_1 = 3e'_0$	» $\beta'_1 = 8.7016$
$\beta'_2 = \frac{9}{2}e'^2_0$	» $\beta'_2 = 7.102$,

so wird

$$(62)\quad \left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 = \alpha'_0 + \alpha'_1 t + \beta'_1\cos g' + \beta'_2\cos 2g'$$

Wenn ferner wieder L die mittlere Länge der Sonne bedeutet, und die Bezeichnungen eingeführt werden

$k'_1 = 4e'_0$	$\log k'_1 = 8.8266$
$k'_2 = \frac{5}{2}e'^2_0$	» $k'_2 = 6.847$

so ist der Theorie der elliptischen Bewegung zufolge

$$2l_\odot = 2L + k_1' \sin g' + k_2' \sin 2g'$$

Ebendieselbe Gleichung erhält man, wenn man in der Gleichung (51) $2w + 2\Omega$, c, k_1, k_2, g der Reihe nach mit $2l_\odot$, L, k_1', k_2', g' vertauscht und außerdem $\lambda_2 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_3 = 0$ setzt. Mit Hilfe dieser Substitutionen kann man also auch aus der Gleichung (55) unmittelbar die entsprechende für $\sin 2l_\odot$ erhalten. Geht man auf die Bedeutung der in (55) auftretenden Koeffizienten zurück und setzt

$$\begin{aligned} s_0' &= 1 - \tfrac{1}{4}k_1'^2 & \log s_0' &= 9.99951 \\ s_1' &= \tfrac{1}{2}k_1' & \text{» } s_1' &= 8.5256 \\ t_1' &= \tfrac{1}{2}k_1' = s_1' & \text{» } t_1' &= 8.5256, \end{aligned}$$

so erhält man mit Vernachlässigung der von $2L \pm 2g'$ abhängigen Glieder

$$\sin 2l_\odot = \underset{9992.8}{s_0' \sin 2L} + \underset{336}{s_1' \sin(2L + g')} - \underset{336}{t_1' \sin(2L - g')} \tag{63}$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (62) zu multiplizieren. In (63) sind bereits unterhalb der Koeffizienten ihre mit α_0' multiplizierten Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben. Die durch die Multiplikation des Gliedes $\alpha_1' t$ mit der Gleichung (63) entstehenden Produkte können vernachlässigt werden. Weiterhin erhält man

$$\beta_1' \cos g' \sin 2l_\odot = \underset{251}{\tfrac{1}{2}\beta_1' s_0' \sin(2L + g')} + \underset{251}{\tfrac{1}{2}\beta_1' s_0' \sin(2L - g')}$$

$$\beta_2' \cos 2g' \sin 2l_\odot = \underset{0}{-\tfrac{1}{2}\beta_2' t_1' \sin(2L + g')} + \underset{0}{\tfrac{1}{2}\beta_2' s_1' \sin(2L - g')}$$

Die Summe aus den beiden letzten Gleichungen und der mit α_0' multiplizierten Gleichung (63) stellt den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$ dar, und zwar ergibt sich mit Hilfe der unterhalb der Koeffizienten der drei letzten Gleichungen stehenden Zahlen

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot = 0.99928 \sin 2L + 0.0587 \sin(2L + g') - 0.0085 \sin(2L - g') \tag{64}$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung sin durch cos, so erhält man den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot$. Endlich ist

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot \tag{64'}$$

Mit Berücksichtigung von (62) und der der Formel (64) entsprechenden Formel für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot$ ergeben sich aus (64) und (64') die folgenden Gleichungen, in denen die Koeffizienten logarithmisch angesetzt sind

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot = 9.69866 \sin 2L + 8.4676 \sin(2L + g') + 7_n628 \sin(2L - g') \tag{65^1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = 9.39812 + 3_n723\, t + 8.0995 \cos g' + 6.50 \cos 2g' + \\ + 9_n39763 \cos 2L + 8_n1666 \cos(2L + g') + 7.327 \cos(2L - g') \tag{65^2}$$

29. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde. Unter Benutzung der in den zwei letzten Paragraphen gewonnenen Reihenentwicklungen sollen zunächst die Differentialgleichungen (33) in eine zur Integration geeignete Form gebracht werden. Den Differentialgleichungen (33) gemäß ist die Gleichung (61^1) mit der ersten der Gleichungen (43) zu multiplizieren, ferner ist die Gleichung (61^2) mit der zweiten der Gleichungen (43) zu multiplizieren, usw. Diese Rechnung wird übersichtlicher, wenn man sie in zwei Teilen ausführt, und zwar folgendermaßen. Die Glieder, welche aus der Multiplikation mit den Gleichungen (43) und mit der zweiten der Gleichungen (46) hervorgehen, sollen einstweilen ganz vernachlässigt werden, oder es soll, was auf dasselbe herauskommt,

m) $$\frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 0, \qquad \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 0, \qquad \sin a \cos 2\varepsilon = 0$$

angenommen werden.

In den Gleichungen (44) und (45) berücksichtige man vorläufig nur die Glieder nullter Ordnung und setze demnach

n)
$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} \qquad \log\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 0.26356$$
$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} \qquad \log\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 0.23447$$
$$\cos a \sin\varepsilon = \sin\varepsilon_0 \qquad \log\sin\varepsilon_0 = 9.59998$$
$$\cos a \cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 \qquad \log\cos\varepsilon_0 = 9.96253$$

Ferner berücksichtige man in der ersten der Gleichungen (46) nur das Hauptglied und setze also

o) $$\sin a \sin 2\varepsilon = a_1 \sin 2\varepsilon_0 ,$$

wo nach (38) $a_1 = p_1 t : \sin\varepsilon_0$ ist; hierbei hat man, wenn $p_1 = 5''.341$ in Teilen des Radius ausgedrückt wird,

$$\log\frac{a_1 \sin 2\varepsilon_0}{t} = 5.6767$$

Substituiert man die Werte m), n), o) in die Gleichungen (33) und setzt zur Abkürzung

(66) $$-\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c\cos^2 b_c - \sin^2 b_c)\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\right\}$$

(67) $$-\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$$

(68) $$\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin\varepsilon_0 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c\cos^2 b_c - \sin^2 b_c)a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\}$$

(69) $$\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} = -\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot \sin\varepsilon_0 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot\right] a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi_c}{dt} + \frac{d\psi_\odot}{dt} + \delta\frac{d\psi_c}{dt} + \delta\frac{d\psi_\odot}{dt}\\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt},\end{aligned} \tag{70}$$

wo die später zu bestimmenden Zusatzglieder $\delta\frac{d\psi_c}{dt}, \ldots, \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt}$ aus der Multiplikation der vorhin vernachlässigten Glieder der Gleichungen (43) bis (46) in die Gleichungen (61[1]) bis (61[4]), bzw. (65[1]) und (65[2]) hervorgehen.

Man führe jetzt in die Gleichungen (66) bis (69) die in (61[1]) bis (61[4]) sowie in (65[1]) und (65[2]) gegebenen Ausdrücke von $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c$, usw. ein und substituiere gleichzeitig für $\log\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$, $\log\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$, usw. ihre oben angeführten numerischen Werte. In dem letzten Gliede des Klammerausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (68), bzw. der Gleichung (69) genügt es, nur den konstanten Teil von $\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c)$, bzw. von $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ zu berücksichtigen; ferner soll in der Gleichung (65[2]) das Glied $3_n723\,t$ vorläufig vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$\begin{aligned}-\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&9.65827 + 8.8722\cos g + 7.784\cos 2g + 8.081\cos 2D + \\ &+8.154\cos(2D-g)+7.25\cos(2D+g)+6.86\cos(2D-2g)+\\ &+9_n6563\cos 2c+8_n9388\cos[2c+g]+8.109\cos[2c-g]+\\ &+8_n063\cos[2c+2g]+8_n143\cos[2c+2D]+6_n36\cos[2c-2D]+\\ &+8_n215\cos[2c+2D-g]+7.523\cos[2c-2D+g]+\\ &+7_n517\cos[2c+2D+g]+7.122\cos[2c-2D+2g]+\\ &+7.740\cos[2c-2\Omega]+7_n268\cos 2\Omega+8_n8818\cos[2c-\Omega]+\\ &+8_n1643\cos[2c+g-\Omega]+7.334\cos[2c-g-\Omega]+\\ &+7_n288\cos[2c+2g-\Omega]+7_n368\cos[2c+2D-\Omega]+\\ &+7_n440\cos[2c+2D-g-\Omega]+8.88643\cos\Omega+\\ &+7.799\cos(\Omega+g)+7.799\cos(\Omega-g)+7.00\cos(\Omega+2D)+\\ &+7.00\cos(\Omega-2D)+7.08\cos(\Omega+2D-g)+\\ &+7.08\cos(\Omega-2D+g)+7.324\cos(2L-\Omega)+\\ &+6.036\cos(2\omega+\Omega)\Big\}\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}-\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&9.66168+8.3631\cos g'+6.76\cos 2g'+9_n66119\cos 2L+\\ &+8_n4302\cos(2L+g')+7.591\cos(2L-g')\Big\}\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&5_n0714\,t+9.2937\sin 2c+8.5762\sin[2c+g]+\\ &+7_n746\sin[2c-g]+7.700\sin[2c+2g]+\\ &+7.780\sin[2c+2D]+6.00\sin[2c-2D]+\\ &+7.852\sin[2c+2D-g]+7_n160\sin[2c-2D+g]+\\ &+7.154\sin[2c+2D+g]+6_n759\sin[2c-2D+2g]+\end{aligned} \tag{73}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6.9054 \sin 2\Omega + 8.6098 \sin[2c - \Omega] + \\
&+ 7.892 \sin[2c + g - \Omega] + 7_{n}062 \sin[2c - g - \Omega] + \\
&+ 7.017 \sin[2c + 2g - \Omega] + 7.097 \sin[2c + 2D - \Omega] + \\
&+ 7.169 \sin[2c + 2D - g - \Omega] + 8_{n}61449 \sin \Omega + \\
&+ 7_{n}528 \sin(\Omega + g) + 7_{n}528 \sin(\Omega - g) + \\
&+ 6_{n}73 \sin(\Omega + 2D) + 6_{n}73 \sin(\Omega - 2D) + \\
&+ 6_{n}81 \sin(\Omega + 2D - g) + 6_{n}81 \sin(\Omega - 2D + g) + \\
&+ 7_{n}053 \sin(2L - \Omega) + 5_{n}765 \sin(2\omega + \Omega)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
(74) \qquad \frac{d\varepsilon'_{\odot}}{dt} = -\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}\Big\{5_{n}0749\,t + 9.29864 \sin 2L + 8.0676 \sin(2L + g') + 7_{n}228 \sin(2L - g')\Big\}
$$

Nimmt man an, daß die Faktoren $\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_{c}}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ bekannt wären, so würde die Integration der vier vorhergehenden Differentialgleichungen keine Schwierigkeiten bereiten. Denn wenn man sich in diesen Gleichungen die Logarithmen durch ihre Numeri ersetzt denkt, so haben die Glieder auf der rechten Seite sämtlich eine der vier Formen

$$
(D) \qquad \alpha, \qquad \beta t, \qquad \gamma \sin(F_{\circ} + f_{\circ} t), \qquad \delta \cos(G_{\circ} + g_{\circ} t),
$$

wo α, β, γ, δ in Teilen des Radius ausgedrückte Zahlengrößen, und $f_{\circ}$ und $g_{\circ}$ die Änderungen von $F_{\circ}$ und $G_{\circ}$ im Laufe der Zeiteinheit bedeuten; die entsprechenden Integrale lauten also

$$
(J) \qquad \alpha t, \qquad \tfrac{1}{2}\beta t^2, \qquad -\frac{\gamma}{f_{\circ}} \cos(F_{\circ} + f_{\circ} t), \qquad \frac{\delta}{g_{\circ}} \sin(G_{\circ} + g_{\circ} t)
$$

Sind auch $f_{\circ}$ und $g_{\circ}$ in Teilen des Radius gegeben, und soll das Resultat der Integration in Bogensekunden ausgedrückt erhalten werden, so muß man die vorigen Integrale noch durch arc 1″ dividieren. Nach den Tafeln von *Hansen* und *Leverrier* hat man aber für die Produkte aus arc 1″ und den in Teilen des Radius ausgedrückten, auf das als Zeiteinheit gewählte julianische Jahrhundert bezogenen Werten der mittleren Bewegung von g, g', …, 2ω

Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″	Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″
g . . .	+ 0.040 3786	$2L$ . . .	+ 0.006 092 5
g' . . .	+ 0.003 0461	$2D$ . . .	+ 0.075 353 34
$2c$ . . .	+ 0.081 4458	Ω . . .	− 0.000 163 66
		2ω . . .	+ 0.001 015 94

Es ist jetzt zu zeigen, in welcher Weise sich die Faktoren $\frac{3k^2 M_{c}}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ bestimmen lassen. Wie man mit Hilfe der für die Produkte aus arc 1″ und der mittleren Bewegung der Argumente g, g', …, 2ω gegebenen Werte sieht, ist das Integral aus dem den Faktor $\sin\Omega$ enthaltenden Gliede der Gleichung (73)

weit größer als alle aus den übrigen Gliedern dieser Gleichung hervorgehenden Integrale, und zwar ergibt sich, wenn N den Wert des genannten Integrals bedeutet,

$$N = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} 251''.506 \cos \Omega$$

Der Wert des Koeffizienten von $\cos \Omega$ läßt sich nun direkt aus den Beobachtungen ableiten (Kap. 16). Als wahrscheinlichsten Wert dieses Koeffizienten oder der sog. Nutationskonstante nimmt man gegenwärtig 9".21 an; somit wird

$$\frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} 251''.506 = 9''.21,$$

also

$$\log \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} = 8.56371$$

Dieser Logarithmus ist zu sämtlichen in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichungen (71) und (73) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren und dann die Integration nach dem oben angegebenen Schema vorzunehmen. Bezeichnet man das Integral $\int_0^t \frac{d\varepsilon_c'}{dt} dt$ mit $\Delta\varepsilon_c$, so erhält man, wenn noch die Argumente $2c - 2D + g$ und $2c - 2D$ mit den gleichbedeutenden $2L + g$, bzw. $2L$ vertauscht werden,

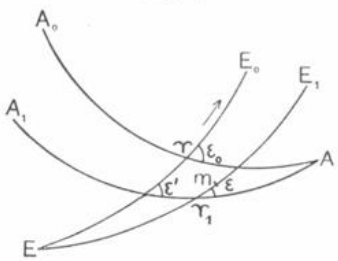
(75)
$$\begin{aligned} -\psi_c = {} & 3438''.8\, t \\ & + 0.068 \sin g \\ & + 0.003 \sin 2g \\ & + 0.006 \sin 2D \\ & + 0.015 \sin (2D - g) \\ & + 0.001 \sin (2D + g) \\ & - 0.005 \sin (2D - 2g) \\ & - 0.204 \sin 2c \\ & - 0.026 \sin (2c + g) \\ & + 0.011 \sin (2c - g) \\ & - 0.003 \sin (2c + 2g) \\ & - 0.003 \sin (2c + 2D) \\ & - 0.001 \sin 2L \\ & - 0.005 \sin [2c + 2D - g] \\ & + 0.003 \sin [2L + g] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D + g] \\ & + 0.001 \sin [2c - 2D + 2g] \\ & + 0.002 \sin [2c - 2\Omega] \\ & + 0.207 \sin 2\Omega \\ & - 0.034 \sin [2c - \Omega] \\ & - 0.004 \sin [2c + g - \Omega] \\ & + 0.002 \sin [2c - g - \Omega] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D - \Omega] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D - g - \Omega] - \end{aligned}$$

(76)
$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_c = {} & + 0''.0445\, t^2 \\ & + 0.088 \cos 2c \\ & + 0.011 \cos [2c + g] \\ & - 0.005 \cos [2c - g] \\ & + 0.001 \cos [2c + 2g] \\ & + 0.001 \cos [2c + 2D] \\ & + 0.001 \cos 2L \\ & + 0.002 \cos [2c + 2D - g] \\ & - 0.001 \cos [2c - 2D + g] \\ & - 0.090 \cos 2\Omega \\ & + 0.018 \cos [2c - \Omega] \\ & + 0.002 \cos [2c + g - \Omega] \\ & - 0.001 \cos [2c - g - \Omega] \\ & + 9.210 \cos \Omega \\ & - 0.003 \cos [\Omega + g] \\ & + 0.003 \cos [\Omega - g] \\ & - 0.001 \cos [\Omega + 2D - g] \\ & + 0.001 \cos [\Omega - 2D + g] \\ & - 0.007 \cos [2L - \Omega] \\ & - 0.003 \cos [2\omega + \Omega] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 17''.227 \sin \Omega \\
&+ 0.006 \sin (\Omega + g) \\
&- 0.006 \sin (\Omega - g) \\
&+ 0.001 \sin (\Omega + 2D - g) \\
&+ 0.001 \sin (\Omega - 2D + g) \\
&+ 0.012 \sin (2L - \Omega) \\
&+ 0.005 \sin (2\omega + \Omega)
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung des Faktors $\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn}$ ist ebenfalls nur mit Hilfe der Beobachtungen möglich. Zum Verständnis sei Folgendes bemerkt. Die vorhin abgeleiteten Formeln für $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ zeigen, daß die Lage des Äquators in bezug auf die feste Ekliptik Veränderungen unterworfen ist, welche teils säkular, teils periodisch sind. Da die Gleichungen (72) und (74) ganz ähnlich gebaut sind wie die zur Bestimmung von $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ dienenden Gleichungen (71) und (73), so müssen auch die Ausdrücke für $-\psi_\odot$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ aus säkularen und periodischen Gliedern zusammengesetzt sein. Ebendasselbe gilt demnach für $-\psi$ und $\Delta\varepsilon$. In Fig. 7 bedeute jetzt AA_1 die Lage, welche der Äquator zur Zeit t haben würde, wenn die periodischen Glieder in ψ und $\Delta\varepsilon$ nicht vorhanden wären, oder, wie man sich ausdrückt, es bezeichne AA_1 den mittleren Äquator zur Zeit t; ferner stelle AA_0 den mittleren Äquator zur Zeit $t = 0$ dar. Ist dann EE_0, bzw. EE_1 die Lage der Ekliptik zur Zeit $t = 0$, bzw. $t = t$, und wird die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn durch den Pfeil angezeigt, so nennt man Υ, bzw. Υ_1 das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$, bzw. $t = t$.

Fig. 7.



Nach den früheren Bezeichnungen (S. 68)*) ist nun $E\Upsilon = 180^\circ - \Pi$, $E\Upsilon_1 = b$, somit $E\Upsilon - E\Upsilon_1 = 180^\circ - \Pi - b$, oder nach Einsetzung des durch die Gleichungen (40) und (39) bestimmten Wertes von b, wobei aber b_3 wieder vernachlässigt werden kann,

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = -\psi - p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - b_2,$$

$$b_2 = (p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t$$

Der vorhin gemachten Voraussetzung gemäß sollen hier bei ψ und $\Delta\varepsilon$ nur diejenigen Glieder berücksichtigt werden, welche die Zeit oder deren Quadrat mit konstanten Koeffizienten multipliziert enthalten. Da die niedrigste Potenz von t in ψ die erste und in $\Delta\varepsilon$ die zweite ist, so ist b_2 in bezug auf t mindestens vom zweiten Grade. Differenziert man also die Gleichung für $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ nach t und setzt dann $t = 0$, so ergibt sich, wenn noch die Bezeichnung

$$\left[\frac{d(E\Upsilon - E\Upsilon_1)}{dt}\right]_{t=0} = l$$

*) Dort ist noch nicht angegeben, daß Υ (Fig. 5, S. 66) das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$ bedeuten soll; diese Definition wird erst jetzt verständlich.

eingeführt wird,

$$l = -\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} - p_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \tag{77}$$

Hierin ist

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} \tag{77^1}$$

Da von allen periodischen Gliedern abgesehen werden soll, so hat man nach (75)

$$\left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} = -\,3438''.8 \tag{77^2}$$

Der Wert, welchen $-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0}$ bei Vernachlässigung der periodischen Glieder annimmt, oder die sog. Konstante der Lunisolarpräzession kann durch Beobachtungen ermittelt werden (Kap. 15); wählt man das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit, so hat man nach *Newcomb*

$$-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = 5036''.95 \tag{77^3}$$

Aus (77^1), (77^2) und (77^3) folgt somit

$$-\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} = 1598''.15$$

Die Gleichung (72) gibt aber, wenn die periodischen Glieder vernachlässigt werden, und das konstante Glied durch arc 1″ dividiert wird,

$$-\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\,94\,648''$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\log \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn} = 8.22751$$

Dieser Logarithmus ist nun zu allen in den Klammerausdrücken auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (72) und (74) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren. Darauf erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} -\psi_\odot = {} & 1598''.15\, t \\ & + 0.128 \sin g' \\ & + 0.002 \sin 2g' \\ & - 1.270 \sin 2L \\ & - 0.050 \sin (2L + g') \\ & + 0.021 \sin (2L - g') \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_\odot = {} & + 0''.0207\, t^2 \\ & + 0.551 \cos 2L \\ & + 0.022 \cos (2L + g') \\ & - 0.009 \cos (2L - g') \end{aligned} \tag{79}$$

Jetzt erübrigt nur mehr die Berechnung der in (70) mit $\delta\frac{d\psi_c}{dt}$, ... bezeichneten Zusatzglieder, bzw. der ihnen entsprechenden Korrektionsglieder der Integrale (75), (76), (78) und (79); dazu aber bedarf man der Kenntnis genäherter Werte von ψ und $\Delta\varepsilon$. Die Summe aus den Gleichungen (75) und (78) stellt einen Näherungs-

wert von ψ dar, die Summe aus (76) und (79) einen Näherungswert von $\Delta\varepsilon$. Berücksichtigt man nur die Hauptglieder, so folgt

$$\psi = -5036''.95\,t + 17''.23\,\sin\Omega + 1''.27\,\sin 2L$$
$$\Delta\varepsilon = 0''.065\,t^2 + 9''.21\,\cos\Omega$$

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich aus den Gleichungen (43) bis (46), wenn statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen gesetzt werden,

$$\frac{\sin a\,\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 1.12764\,t + 0_n37786\,t^2 + 7.992\,t\,\sin\Omega + 7_n140\,t\,\cos\Omega + 6.86\,t\,\sin 2L$$

$$\frac{\sin a\,\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 1.49019\,t + 0_n73889\,t^2 + 8.3547\,t\,\sin\Omega + 7_n843\,t\,\cos\Omega + 7.224\,t\,\sin 2L$$

(80[1])

$$\frac{\cos a\,\sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{{}^*\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + 2_n20610\,t + 9_n539\,t^2 + 0_n8653\,\cos\Omega + 7.185\,t\,\sin\Omega + 8.5037\,t\,\cos\Omega$$

$$\frac{\cos a\,\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{{}^*\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + 7.489 + 2.23519\,t + 9_n415\,t^2 + 1_n84660\,\cos\Omega + 7.489\,\cos 2\Omega + 7_n214\,t\,\sin\Omega + 7_n523\,t\,\cos\Omega$$

(80[2])

$$\cos a\,\sin\varepsilon = {}^*\sin\varepsilon_0 + 1_n63313\,t + 8_n021\,t^2 + 0.9270\,\cos\Omega + 6.61\,t\,\sin\Omega + 6.92\,t\,\cos\Omega$$
$$\cos a\,\cos\varepsilon = {}^*\cos\varepsilon_0 + 1.27058\,t + 7_n095\,t^2 + 0_n5644\,\cos\Omega + 6_n25\,t\,\sin\Omega + 7.283\,t\,\cos\Omega$$
$$\sin a\,\sin 2\varepsilon = {}^* a_1\,\sin 2\varepsilon_0 + 0_n24116\,t^2 + 7.856\,t\,\sin\Omega + 6_n28\,t\,\cos\Omega + 6.72\,t\,\sin 2L$$
$$\sin a\,\cos 2\varepsilon = 0.96211\,t + 0_n20986\,t^2 + 7.827\,t\,\sin\Omega + 7_n260\,t\,\cos\Omega + 6.70\,t\,\sin 2L$$

Die vorigen acht Gleichungen sind mit den nach Maßgabe von (33[1]) und (33[2]) ihnen entsprechenden Gleichungen (61[1]) bis (61[4]), bzw. (65[1]) und (65[2]) zu multiplizieren. Wie aber die Gleichungen (66) bis (69) zeigen, ist die Multiplikation mit den in den Gleichungen (80) mit einem Sternchen versehenen Gliedern bereits ausgeführt worden; es sind also nur noch diejenigen Produkte in Rechnung zu ziehen, welche bei Berücksichtigung der übrigen Glieder der Gleichungen (80) entstehen. Außerdem soll auch die Multiplikation des Gliedes $3_n723\,t$ der Gleichung (65[2]) mit der 3ten und 7ten der Gleichungen (80) nachgeholt werden*). Der größte Teil der bisher vernachlässigten Produkte ist ohne Einfluß auf das Endresultat; die allein zu berücksichtigenden liefern für die in den Gleichungen (70) mit $\delta\frac{d\psi_c}{dt}$, ... bezeichneten Zusatzglieder die folgenden Ausdrücke, in denen statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen mitgeteilt sind.

$$(81)\quad -\delta\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[1_n60082\,t + 8_n934\,t^2 + 0_n2591\,\cos\Omega + 0_n198\,\cos 2\Omega + 0.8876\,t\,\cos\Omega + 0_n1420\,t\,\sin\Omega\right]$$

$$(82)\quad -\delta\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[1_n60638\,t + 8_n937\,t^2 + 0_n2634\,\cos\Omega\right]$$

*) Siehe S. 84, Z. 13. Bei der Multiplikation dieses Gliedes mit $\sin 2\varepsilon_0$: $\sin\varepsilon_0$ ist letzterer Quotient in Bogensekunden auszudrücken.

$$(83)\qquad \delta\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[9_n6359\,t^2 + 9.6140\,t\cos\Omega + 9.9235\,t\sin\Omega\right]$$

$$(84)\qquad \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} = \frac{3k^2M_\odot}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}\,9_n6393\,t^2$$

Setzt man jetzt $\Omega = \Omega_0 + \sigma t$, wo σ die mittlere Bewegung des Mondknotens in der Zeiteinheit bezeichnet, und bedeutet m einen konstanten Koeffizienten, so ist

$$m\int t\cos\Omega = \frac{mt}{\sigma}\sin\Omega + \frac{m}{\sigma^2}\cos\Omega$$

$$m\int t\sin\Omega = -\frac{mt}{\sigma}\cos\Omega + \frac{m}{\sigma^2}\sin\Omega$$

Bei der Anwendung dieser Formeln auf die vorigen Differentialgleichungen ist zu beachten, daß die den logarithmischen Koeffizienten entsprechenden Numeri Bogensekunden angeben; will man also die in den Integralen auftretenden Koeffizienten ebenfalls in Bogensekunden ausgedrückt erhalten, so ist für σ sein in Teilen des Radius ausgedrückter Wert zu substituieren. Dieselbe Bemerkung gilt für die Integration der nur von $\cos\Omega$, bzw. $\cos 2\Omega$ abhängigen Glieder. Nach S. 85 hat man aber für den in Teilen des Radius ausgedrückten Wert von σ

$$\sigma = -\frac{0.000\,163\,66}{\text{arc}\,1''}, \qquad \log\sigma = 1_n5284$$

Wird jetzt noch von den früher für $\log\frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\log\frac{3k^2M_\odot}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ gefundenen Werten Gebrauch gemacht, so erhält man als Integrale der Differentialgleichungen (81) bis (84)

$$(85)\qquad -\delta\psi_c = -0''.7303\,t^2 - 0''.0011\,t^3 + 0''.002\sin\Omega + 0''.001\sin 2\Omega - \\ - 0''.008\,t\sin\Omega - 0''.002\,t\cos\Omega$$

$$(86)\qquad -\delta\psi_\odot = -0''.3411\,t^2 - 0''.0005\,t^3 + 0''.001\sin\Omega$$

$$(87)\qquad \delta\mathcal{A}\varepsilon_c = -0''.0053\,t^3 + 0''.001\,t\cos\Omega$$

$$(88)\qquad \delta\mathcal{A}\varepsilon_\odot = -0''.0025\,t^3$$

Die Summen aus den Gleichungen (75), (78), (85), (86) einerseits und den Gleichungen (76), (79), (87), (88) andrerseits stellen die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (33) dar. Läßt man alle Glieder unberücksichtigt, deren Koeffizienten kleiner als $0''.002$ sind, mit Ausnahme des von $t\cos\Omega$ abhängigen, so erhält man

$$(89)\qquad -\psi = 5036''.95\,t - 1''.071\,t^2 - 0''.002\,t^3 - \\ - 17.224\sin\Omega \\ - 0.008\,t\sin\Omega \\ - 0.002\,t\cos\Omega \\ - 1.271\sin 2L \\ + 0.208\sin 2\Omega \\ - 0.204\sin 2c \\ + 0.128\sin g' \\ + 0.068\sin g \\ - 0.050\sin[2L + g'] -$$

$$(90)\qquad \varepsilon' = \varepsilon_0 + 0''.065\,t^2 - 0''.008\,t^3 + \\ + 9.210\cos\Omega \\ + 0.001\,t\cos\Omega \\ + 0.552\cos 2L \\ - 0.090\cos 2\Omega \\ + 0.088\cos 2c \\ + 0.022\cos[2L + g'] \\ + 0.018\cos[2c - \Omega] \\ + 0.011\cos[2c + g] \\ - 0.009\cos[2L - g'] -$$

$$
\begin{aligned}
&- 0''.034 \sin[2c - \Omega] \\
&- 0.026 \sin[2c + g] \\
&+ 0.021 \sin[2L - g'] \\
&+ 0.015 \sin[2D - g] \\
&+ 0.012 \sin[2L - \Omega] \\
&+ 0.011 \sin[2c - g] \\
&+ 0.006 \sin 2D \\
&+ 0.006 \sin[\Omega + g] \\
&- 0.006 \sin[\Omega - g] \\
&+ 0.005 \sin[2\omega + \Omega] \\
&- 0.005 \sin[2c + 2D - g] \\
&- 0.005 \sin[2D - 2g] \\
&- 0.004 \sin[2c + g - \Omega] \\
&- 0.003 \sin[2c + 2D] \\
&+ 0.003 \sin 2g \\
&- 0.003 \sin[2c + 2g] \\
&+ 0.003 \sin[2L + g] \\
&+ 0.002 \sin[2c - 2\Omega] \\
&+ 0.002 \sin[2c - g - \Omega] \\
&+ 0.002 \sin 2g'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&- 0''.007 \cos[2L - \Omega] \\
&- 0.005 \cos[2c - g] \\
&- 0.003 \cos[\Omega + g] \\
&+ 0.003 \cos[\Omega - g] \\
&- 0.003 \cos[2\omega + \Omega] \\
&+ 0.002 \cos[2c + 2D - g] \\
&+ 0.002 \cos[2c + g - \Omega]
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (89) und (90) bestimmen direkt nur die Lage des Äquators mit bezug auf die Ekliptik der Epoche 1850.0; sie ermöglichen es aber, auch diejenigen Formeln abzuleiten, welche für irgend eine Zeit die Lage des Äquators gegen die jeweilige Ebene der Ekliptik festlegen. Trägt man nämlich auf der beweglichen Ekliptik EE_1 (Fig. 7, S. 87) von E aus in der Richtung nach E_1 hin den Bogen $Em = E\Upsilon$ ab, so gibt der Abstand des beweglichen Äquinox Υ_1 von m an, um wie viel sich der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt innerhalb der Zeit t auf der beweglichen Ekliptik verschoben hat; der Abstand $\Upsilon_1 m$ in Verbindung mit dem Winkel $E_1\Upsilon_1 A = \varepsilon$ bestimmt die Lage des Äquators gegen die bewegliche Ekliptik. Es ist aber $\Upsilon_1 m = E\Upsilon - E\Upsilon_1$, und die Differenz $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ ist, wie schon oben (S. 87) bemerkt, gleich $180^\circ - \Pi - b$. Ferner hat man den Gleichungen (40) und (39) zufolge, wenn b_3 mitgenommen wird, und für p_1, p_2, q_1, q_2, ε_0 ihre Zahlenwerte eingesetzt werden,

$$
\begin{aligned}
(91) \qquad b = {} & 180^\circ - \Pi + \psi + 12''.31t + 0''.453t^2 + [6.71873 - 10]t\psi + \\
& + [6_n2132 - 10]t\Delta\varepsilon + [3_n5185 - 10]t^2\psi + [5_n4747 - 10]t\psi^2,
\end{aligned}
$$

wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Wenn man jetzt noch in den vier letzten Gliedern der vorigen Gleichung an Stelle von ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) setzt, so ergibt sich für den Abstand $\Upsilon_1 m$, der mit A bezeichnet werden möge,

$$
\begin{aligned}
(91^a) \qquad A = {} & - \psi - 12''.31t + 2''.183t^2 + 0''.001t^3 - 0''.009t \sin\Omega + \\
& + 0''.002t \cos\Omega
\end{aligned}
$$

Der Winkel ε ist durch die Gleichung (41) gegeben, und zwar hat man, wenn für p_1, p_2, q_1, q_2, ψ ihre Werte eingeführt werden,

$$(91^b) \qquad \varepsilon = \varepsilon' - 46''.838\,t - 0''.074\,t^2 + 0''.009\,t^3,$$

wo für ε' sein Wert aus (90) zu substituieren ist. Führt man diese Substitution aus und setzt auch in der vorigen Gleichung für Δ an Stelle von $-\psi$ seinen durch (89) bestimmten Wert ein, so ergibt sich

(92)
$$\begin{aligned}\Delta = {} & 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0.001\,t^3 \\ & - 17.224 \sin\Omega \\ & - 0.017\,t \sin\Omega \\ & - 1.271 \sin 2L \\ & + 0.208 \sin 2\Omega \\ & - 0.204 \sin 2c \\ & + 0.128 \sin g' \\ & + 0.068 \sin g \\ & - 0.050 \sin[2L + g'] \\ & - 0.034 \sin[2c - \Omega] \\ & - 0.026 \sin[2c + g] \\ & + 0.021 \sin[2L - g'] \\ & + 0.015 \sin[2D - g] \\ & + 0.012 \sin[2L - \Omega] \\ & + 0.011 \sin[2c - g] \\ & + 0.006 \sin 2D \\ & + 0.006 \sin[\Omega + g] \\ & - 0.006 \sin[\Omega - g] \\ & + 0.005 \sin[2\omega + \Omega] \\ & - 0.005 \sin[2c + 2D - g] \\ & - 0.005 \sin[2D - 2g] \\ & - 0.004 \sin[2c + g - \Omega] \\ & - 0.003 \sin[2c + 2D] \\ & + 0.003 \sin 2g \\ & - 0.003 \sin[2c + 2g] \\ & + 0.003 \sin[2L + g] \\ & + 0.002 \sin[2c - 2\Omega] \\ & + 0.002 \sin[2c - g - \Omega] \\ & + 0.002 \sin 2g'\end{aligned}$$

(93)
$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3 + \\ & + 9.210 \cos\Omega \\ & + 0.001\,t \cos\Omega \\ & + 0.552 \cos 2L \\ & - 0.090 \cos 2\Omega \\ & + 0.088 \cos 2c \\ & + 0.022 \cos[2L + g'] \\ & + 0.018 \cos[2c - \Omega] \\ & + 0.011 \cos[2c + g] \\ & - 0.009 \cos[2L - g'] \\ & - 0.007 \cos[2L - \Omega] \\ & - 0.005 \cos[2c - g] \\ & - 0.003 \cos[\Omega + g] \\ & + 0.003 \cos[\Omega - g] \\ & - 0.003 \cos[2\omega + \Omega] \\ & + 0.002 \cos[2c + 2D - g] \\ & + 0.002 \cos[2c + g - \Omega]\end{aligned}$$

Für die Reduktion der Beobachtungen ist auch die Kenntnis des in Fig. 5 (S. 66) mit $N\Upsilon_1 = a$ bezeichneten Bogens von Wichtigkeit. Der Wert von a ist durch die Gleichungen (38) und (40) bestimmt; unter Berücksichtigung von a_3 und mit Benutzung der Zahlenwerte von p_1, p_2, q_1, q_2 und ε_0 erhält man

$$\begin{aligned}(94) \quad a = {} & 13''.417\,t + 0''.493\,t^2 + [6.75619 - 10]\,t\psi + \\ & + [6_n1758 - 10]\,t\Delta\varepsilon + [3_n5873 - 10]\,t^2\psi + [5_n5122 - 10]\,t\psi^2,\end{aligned}$$

wo die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Werden in (94) für ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) substituiert, so ergibt sich

$$(95) \qquad a = 13''.417\,t - 2''.380\,t^2 - 0''.001\,t^3 + 0''.010\,t\sin\Omega - 0''.001\,t\cos\Omega$$

Die Gleichungen (89), (90), (92), (93) und (95) bestehen aus Gliedern, welche teils periodisch, teils säkular sind. Werden die Aggregate der säkularen Glieder in (89), (90), (92), (93), (95) mit $(-\psi)$, (ε'), (Δ), (ε), (a) bezeichnet, so hat man

$$(96) \qquad \begin{aligned} (-\psi) &= 5036''.95\,t - 1''.071\,t^2 - 0''.002\,t^3 \\ (\varepsilon') &= \varepsilon_0 + 0''.065\,t^2 - 0''.008\,t^3 \\ (\Delta) &= 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0''.001\,t^3 \\ (\varepsilon) &= \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3 \\ (a) &= 13''.417\,t - 2''.380\,t^2 - 0''.001\,t^3 \end{aligned}$$

Man nennt $(-\psi)$ die Lunisolarpräzession in Länge, $(\varepsilon') - \varepsilon_0$ die Lunisolarpräzession in Schiefe, (Δ) die allgemeine Präzession in Länge, (ε) die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$, (a) die Präzession durch die Planeten. Die periodischen Glieder der Gleichungen (89), (90), ..., (95) bezeichnet man als Nutationsglieder.

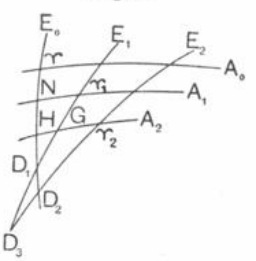
An dieser Stelle mögen auch die aus (37) und (37a) für π und Π folgenden Formeln angegeben werden. Berechnet man nämlich mit Hilfe der genannten Gleichungen für drei verschiedene Werte von t, z. B. für $t = -1$, $+1$, $+2$ die zugehörigen Werte von π und Π, so lassen sich diese durch die Formeln darstellen

$$(97) \qquad \begin{aligned} \pi &= 47''.142\,t - 0''.034\,t^2 \\ \Pi &= 173^\circ 29'\,40''.7 - 869''.0\,t - 0''.07\,t^2 \end{aligned}$$

Hier wird also π negativ gerechnet, wenn t negativ ist.

30. Änderung der Fundamentalebene. Bisher ist die Ekliptik der Epoche 1850.0 zur Fundamentalebene gewählt und t von 1850.0 an gezählt worden. Es sollen nun die Formeln abgeleitet werden, welche an Stelle von (96) und (97) anzuwenden sind, wenn die für eine andere Epoche gültige Ekliptik als Fundamentalebene angenommen, und die Zeit von dieser neuen Epoche aus gezählt wird. Um zunächst die Formel für die allgemeine Präzession zu erhalten, gehe man von Fig. 8 aus, worin die größten Kreise ΥA_0, NA_1, HA_2 die Lage des mittleren Äquators zu den Zeiten 1850.0, $1850 + t_1$, $1850 + t_2$ darstellen sollen, während D_2E_0, D_3E_1, D_3E_2 die für die eben angegebenen Epochen gültige Ekliptik bezeichnen. Es ist dann $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ die aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_1$ folgende allgemeine Präzession, bezogen auf die Ekliptik von 1850, und $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2$ die zu suchende allgemeine Präzession für das Zeitintervall $t_2 - t_1$, bezogen auf die Ekliptik zur Zeit $1850 + t_1$. Man hat aber

Fig. 8.



$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_3D_1 + D_1\Upsilon_1 - D_3D_2 - D_2\Upsilon_2$$

Nun ergibt sich aus den Formeln (97), daß selbst, wenn die Ekliptik D_2E_2 dem Jahre 1950 entspricht, also $t = 1$ ist, der Winkel π zwischen D_2E_2 und D_2E_0 nur $47''$ beträgt, und der Bogen $D_1D_2 = 869''.0$ ist; unter diesen Umständen kann man $D_3D_2 + D_2D_1 = D_3D_1$, also

$$D_3D_1 - D_3D_2 = D_2D_1 = D_2\Upsilon - D_1\Upsilon$$

setzen. Somit wird

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2 - (D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1)$$

Die Differenzen $D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2$ und $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ sind aber mit den aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_2 = t_1 + (t_2 - t_1)$, bzw. $t = t_1$ folgenden Werten von $(\mathcal{A})$ identisch. Bezeichnet man den für $(\mathcal{A})$ gegebenen Ausdruck mit $f(t)$, so daß also

$$f(t) = 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0''.001\,t^3$$

wird, und setzt

$$t_2 - t_1 = \tau,$$

so erhält man

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = f(t_1 + \tau) - f(t_1)$$

Zur Abkürzung werde nun $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = (\mathcal{A})_\tau$ gesetzt; der *Taylor*sche Satz gibt dann

$$\begin{aligned}(\mathcal{A})_\tau = {} & (5024''.64 + 2''.224\,t_1 - 0''.003\,t_1^2)\,\tau \\ & + (1''.112 - 0''.003\,t_1)\,\tau^2 - 0''.001\,\tau^3\end{aligned} \tag{98}$$

Für den Winkel (ε), den die irgend einer Epoche $1850 + t$ entsprechende Ekliptik mit dem für dieselbe Epoche gültigen mittleren Äquator bildet, wurde in (96) die Formel erhalten

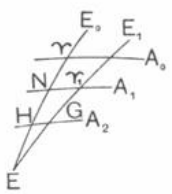
$$(\varepsilon) = \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3$$

Wird der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck mit $F(t)$ und der für die Epoche $1850 + t_2 = 1850 + t_1 + \tau$ gültige Wert von (ε) mit $(\varepsilon)_\tau$ bezeichnet, so hat man $(\varepsilon)_\tau = F(t_1 + \tau)$, also nach dem *Taylor*schen Satz

$$\begin{aligned}(\varepsilon)_\tau = {} & \varepsilon_0 - 46''.838\,t_1 - 0''.009\,t_1^2 + 0''.001\,t_1^3 \\ & - (46''.838 + 0''.018\,t_1 - 0''.003\,t_1^2)\,\tau \\ & - (0''.009 - 0''.003\,t_1)\,\tau^2 + 0''.001\,\tau^3\end{aligned} \tag{99}$$

In Fig. 9 mögen ΥA_0, NA_1, HA_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 8, ferner stelle EE_0, bzw. EE_1 die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850.0 und $1850 + t_1$ dar. Um nun den Bogen $\Upsilon_1 G$, also die Lunisolarpräzession in Länge für das Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf die Ekliptik zur Zeit $1850 + t_1$ zu erhalten, gehe man von der Gleichung $\Upsilon_1 G = E\Upsilon_1 - EG$ aus. Der Bogen $E\Upsilon_1$, der früher mit b bezeichnet wurde, ergibt sich aus der Formel (91), indem man $t = t_1$ setzt und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte substituiert. Setzt man ferner $HG = a^{(2)}$, $EG = b^{(2)}$, so erhält man aus den Gleichungen (34) die entsprechenden für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b^{(2)} + a^{(2)})$ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b^{(2)} - a^{(2)})$, indem man in ersteren den Größen ε' und ψ ihre für $t = t_2$ gültigen Werte E_0HA_2 und ΥH beilegt, dagegen die zur Bestimmung der Lage von EE_1 zu EE_0 dienenden Winkel π und Π ungeändert läßt. Der Wert von $b^{(2)}$, d. h. die Länge des Bogens EG folgt demnach

Fig. 9.



unmittelbar aus (91), indem man das in dieser Gleichung explicite vorkommende, von der Entwicklung der Größen $\pi \sin \Pi$ und $\pi \cos \Pi$ herrührende $t = t_1$ setzt, aber für ψ und $\Delta\varepsilon$ ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) folgenden, für $t = t_2$ gültigen Werte substituiert. Wenn also der aus (91) durch die Substitution $t = t_1$ erhaltene Wert von b mit $\varphi(t)$ bezeichnet wird und demnach

$$\varphi(t) = 180^\circ - \Pi + \psi + 12''.31 t_1 + 0''.453 t_1^2 + [6.71873 - 10] t_1 \psi + \\ + [6_n2132 - 10] t_1 \Delta\varepsilon + [3_n5185 - 10] t_1^2 \psi + [5_n4747 - 10] t_1 \psi^2$$

ist, wo ψ und $\Delta\varepsilon$ Funktionen von t sind, so hat man $EG = \varphi(t_2) = \varphi(t_1 + \tau)$ und $E\gamma_1 = \varphi(t_1)$; folglich ergibt sich $\gamma_1 G = \varphi(t_1) - \varphi(t_1 + \tau)$. Bezeichnet man nun $\gamma_1 G$ mit $(-\psi)_\tau$, und bedeuten $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1$, ... die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von $\varphi(t)$, so wird

$$(-\psi)_\tau = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 \tau - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 \tau^3$$

Aus der Gleichung für $\varphi(t)$ folgt aber mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 = \{1 + [6.71873] t_1 + [3_n5185] t_1^2\} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 + [5_n7757] t_1 \psi_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$
$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 = (1 + [6.719] t_1) \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 + [5_n776] t_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$
$$\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1,$$

wo die für $t = t_1$ gültigen Werte von ψ und seiner Differentialquotienten mittels der ersten der Gleichungen (96) zu berechnen sind. Durch Substitution der Werte der Differentialquotienten von φ in die Gleichung für $(-\psi)_\tau$ erhält man schließlich

$$(100) \qquad (-\psi)_\tau = (5036''.95 + 0''.494 t_1 - 0''.001 t_1^2)\tau \\ - (1''.071 + 0''.003 t_1)\tau^2 - 0''.002 \tau^3$$

Die Differenz $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1$ (Fig. 9) stellt die lunisolare Präzession der Schiefe der Ekliptik in der Zeit $t_2 - t_1$ bezogen auf die der Epoche $1850 + t_1$ entsprechende Ekliptik dar. Um den Winkel $E_1 \gamma_1 A_1$ zu erhalten, hat man in der Gleichung (41) $t = t_1$ zu setzen und auch für ψ und ε' ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte zu substituieren. Mit Hilfe einer ganz ähnlichen Schlußweise, wie sie vorhin bei der Berechnung des Bogens EG aus der Gleichung (91) angewandt wurde, ergibt sich ferner, daß man den Winkel $E_1 G A_2$ erhält, indem man in der Gleichung (41) das explicite vorkommende $t = t_1$ setzt, dagegen für ψ und ε' ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ sich ergebenden Werte einführt. Setzt man also

$$\varepsilon' + q_1 t_1 + q_2 t_1^2 + p_1 t_1 \psi + p_2 t_1^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t_1 \psi^2 = \chi(t),$$

wo ε' und ψ Funktionen von t sind, so ist $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1 = \chi(t_1 + \tau) - \chi(t_1)$. Man setze nun

$$E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1 = (\Delta\varepsilon)_\tau$$

und kennzeichne die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von χ durch den angehängten Index 1; es wird dann

$$(\Delta\varepsilon)_\tau = \left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1 \tau^3$$

Aus der Gleichung für $\chi(t)$ folgt aber mit Übergehung unbedeutender Glieder

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)_1 + (p_1 t_1 + p_2 t_1^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 - q_1 t_1 \psi_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$
$$\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1 = \left(\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2}\right)_1 - q_1 t_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$
$$\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\varepsilon'}{dt^3}\right)_1$$

Die Differentialquotienten von ψ und ε' sind durch die zwei ersten Gleichungen (96) bestimmt; mit Rücksicht auf eine später abzuleitende Formel soll aber an Stelle der zweiten der Gleichungen (96) die aus (76), (79), (87) und (88) mit Berücksichtigung der vierten Dezimale folgende

$$(\varepsilon') = \varepsilon_0 + 0''.0652\, t^2 - 0''.0078\, t^3$$

angewandt werden. Man erhält dann

$$(\Delta\varepsilon)_\tau = (0''.0652 - 0''.0094\, t_1)\tau^2 - 0''.0078\, \tau^3 \tag{101}$$

Da $(\Delta\varepsilon)_\tau$ der Definition nach gleich $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1$ ist, und $E_1 \gamma_1 A_1$ den aus der vierten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (ε) bedeutet, so ergibt sich, wenn der Winkel $E_1 G A_2$ mit $(\varepsilon')_\tau$ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}(\varepsilon')_\tau = \varepsilon_0 &- 46''.838\, t_1 - 0''.009\, t_1^2 + 0''.001\, t_1^3 \\ &+ (0''.065 - 0''.009\, t_1)\tau^2 - 0''.008\, \tau^3\end{aligned} \tag{102}$$

Der in Fig. 8 mit $G\gamma_2 = H\gamma_2 - HG$ bezeichnete Bogen stellt die Präzession durch die Planeten in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf den Äquator zur Zeit $1850 + t_2$ dar. $H\gamma_2$ folgt aus (94), wenn das in dieser Gleichung explicite auftretende $t = t_2$ gesetzt wird, und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ folgenden Werte ψ_2 und $\Delta\varepsilon_2$ substituiert werden. Um HG zu erhalten, hat man in (94) wiederum $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$, dagegen das explicite vorkommende $t = t_1$ zu setzen. Wenn also der aus (94) für $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$ folgende Wert von a mit $F(t)$ bezeichnet wird, und demnach

$$\begin{aligned}F(t) = 13''.417\, t + 0''.493\, t^2 + [6.75619 - 10]\, t\psi_2 + [6_n1758 - 10]\, t\Delta\varepsilon_2 + \\ + [3_n5873 - 10]\, t^2\psi_2 + [5_n5122 - 10]\, t\psi^2\end{aligned}$$

ist, so folgt

$$G\gamma_2 = F(t_1 + \tau) - F(t_1) = \left(\frac{dF}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 \tau^2$$

Hierbei genügt es

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = 13''.417 + 0''.986\, t_1 + [6.75619]\psi_2 + [3_n8883]\, t_1\psi_2 + [5_n5122]\psi_2^2$$
$$\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 = 0''.986 + [3_n8883]\psi_2$$

zu setzen. Ferner hat man

$$\psi_2 = \psi_1 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1 \tau^3,$$

also mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (96) und mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

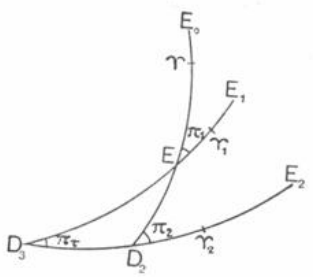
$$\psi_2 = -5036''.95\, t_1 + 1''.071\, t_1^2 - 5036''.95\, \tau + 2''.142\, t_1 \tau + 1''.071\, \tau^2$$
$$\psi_2^2 = +123''.0\, t_1^2 + 246''.0\, t_1 \tau + 123''.0\, \tau^2$$

Wird der Bogen $G\Upsilon_2$ (Fig. 8) mit $(a)_\tau$ bezeichnet, so erhält man schließlich

$$(a)_\tau = (13''.417 - 1''.887\, t_1)\tau - (2''.380 + 0''.001\, t_1)\tau^2 - 0''.001\, \tau^3 \tag{103}$$

In Fig. 10 werde die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850, $1850 + t_1$, $1850 + t_2$ durch die größten Kreise EE_0, EE_1, D_3E_2 dargestellt; Υ, Υ_1, Υ_2 mögen die bezüglichen mittleren Äquinoktien bedeuten. Mit Hilfe der Gleichungen (97) läßt sich die Länge des aufsteigenden Knotens der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$ auf der Ekliptik EE_0, von dem mittleren Äquinox Υ aus gerechnet, und der Winkel zwischen EE_0 und der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$ bestimmen. Es soll nun der Bogen $180^\circ - D_3\Upsilon_1 = \Pi_\tau$, d. h. die Länge des aufsteigenden Knotens der Ekliptik zur Zeit $1850 + t_2$ auf der Ekliptik EE_1, gerechnet von Υ_1 aus, und der Winkel $E_1 D_3 E_2 = \pi_\tau$ bestimmt werden. Es ist $D_3\Upsilon_1 = D_3E + E\Upsilon_1$. Bezeichnet man die aus den Gleichungen (97) für $t = t_1$, bzw. $t = t_2$ folgenden Werte von Π und π mit Π_1, π_1, bzw. Π_2, π_2, so ist in dem Dreieck D_3ED_2 die Seite $ED_2 = \Pi_1 - \Pi_2$, ferner ist der Winkel bei D_2 gleich $180^\circ - \pi_2$, und der Winkel bei E gleich π_1. Somit hat man, wenn der sin mit dem Bogen vertauscht wird,

Fig. 10.



$$D_3E = \frac{\pi_2}{\pi_\tau}(\Pi_1 - \Pi_2)$$

Ferner folgt aus einer der *Napier*schen Analogien

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi_\tau = \frac{\cos\frac{1}{2}(D_3E - D_3D_2)}{\cos\frac{1}{2}(D_3E + D_3D_2)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi_2 - \pi_1)$$

oder hinreichend genau

$$\pi_\tau = \pi_2 - \pi_1$$

Demnach wird

$$D_3E = \frac{\pi_2}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2) = \Pi_1 - \Pi_2 + \frac{\pi_1}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2)$$

Den Gleichungen (97) zufolge ist aber, wenn $t_2 - t_1 = \tau$ gesetzt wird,

$$\Pi_1 - \Pi_2 = (869''.0 + 0''.14\, t_1)\tau + 0''.07\, \tau^2$$
$$\pi_1 = (47''.142 - 0''.034\, t_1)\, t_1$$
$$\pi_2 - \pi_1 = (47''.142 - 0''.068\, t_1)\tau - 0''.034\, \tau^2$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$\frac{\pi_1}{\pi_2 - \pi_1} = \left(1 + \frac{0.034}{47.142}\, t_1 + \frac{0.034}{47.142}\, \tau\right) \frac{t_1}{\tau}$$

Somit wird

$$D_3 E = 869''.0\, t_1 + 0''.77\, t_1^2 + (869''.0 + 0''.84\, t_1)\, \tau + 0''.07\, \tau^2$$

Bedeutet ferner $(\Delta)_1$ den aus der dritten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (Δ), so ist

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = (\Delta)_1;$$

da aber $E\Upsilon = 180^\circ - \Pi_1$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung

$$E\Upsilon_1 = 180^\circ - \Pi_1 - (\Delta)_1$$

Es ergibt sich also

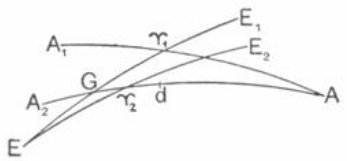
$$\Pi_\tau = 180^\circ - D_3 E - E\Upsilon_1 = \Pi_1 + (\Delta)_1 - D_3 E,$$

oder nach Substitution der Werte von Π_1, $(\Delta)_1$ und $D_3 E$

$$\begin{aligned} \Pi_\tau &= 173^\circ\, 29'\, 40''.7 + 3286''.6\, t_1 + 0''.27\, t_1^2 - (869''.0 + 0''.84\, t_1)\, \tau - 0''.07\, \tau^2 \\ \pi_\tau &= (47''.142 - 0''.068\, t_1)\, \tau - 0''.034\, \tau^2 \end{aligned} \tag{104}$$

31. Die Änderung der Lage des mittleren Äquators und Aquinoktiums in bezug auf die einer beliebigen Zeit entsprechende Lage des mittleren Äquators und Äquinoktiums. In Fig. 11 mögen EE_1 und EE_2 die Ekliptik für $1850 + t_1$, bzw. für $1850 + t_2$, und AA_1 und AA_2 die entsprechende Lage des mittleren Äquators darstellen. Da sich späterhin ergeben wird, daß $\Upsilon_1 A$ und GA nur wenig von 90° abweichen, so setze man $\Upsilon_1 A = 90^\circ - p$, $GA = 90^\circ - q$. Ferner setze man $\Upsilon_1 G = l'$, $A_1 AA_2 = \pi$, $E_1 \Upsilon_1 A = \varepsilon$, $E_1 GA = \varepsilon + \Delta\varepsilon$, wo l' und $\Delta\varepsilon$ mit den durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Größen $(-\psi)_\tau$ und $(\Delta\varepsilon)_\tau$ identisch sind, während unter ε der aus der vierten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgende Wert von (ε) zu verstehen ist. Aus dem Dreiecke $AG\Upsilon_1$ folgt dann

Fig. 11.



$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{\cos(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\Delta\varepsilon} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \cos\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' - \sin\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l'$$

Da

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l' + \tfrac{1}{24} l'^3, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{4}\Delta\varepsilon l'$$

gesetzt werden kann, so wird

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) = \tfrac{1}{2} l' \cos\varepsilon + \tfrac{1}{24} l'^3 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{4}\Delta\varepsilon l' \sin\varepsilon$$

Man hat aber hinreichend genau

$$\tfrac{1}{2}(p - q) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(p - q) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) - \tfrac{1}{24} l'^3 \cos^3\varepsilon$$

Mit Rücksicht auf die vorige Gleichung erhält man demnach

$$p - q = l' \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{12} l'^3 \cos\varepsilon \sin^2\varepsilon \tag{105}$$

Trägt man jetzt auf AA_2 von A aus den Bogen $Ad = A\Upsilon_1$ ab, so ist $\Upsilon_2 d$ gleich dem Bogen, um den sich das Frühlingsäquinox Υ_1 innerhalb der Zeit $t_2 - t_1 = \tau$

auf dem der Epoche $1850 + t_2$ entsprechenden Äquator bewegt hat. Da $G\gamma_2$ gleich dem durch die Gleichung (103) bestimmten Bogen $(a)_t$ ist, so hat man, wenn $\gamma_2 d$ mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet wird,

$$\mathfrak{m} = p - q - (a)_t \tag{106}$$

Ferner erhält man aus dem Dreiecke $A G \gamma_1$

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} \cos \tfrac{1}{2}(p+q) = \sin \tfrac{1}{2} l' \sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon)$$

Da aber $p+q$, wie sich gleich zeigen wird, sehr klein ist, so kann

$$\cos \tfrac{1}{2}(p+q) = 1$$

gesetzt werden. Setzt man außerdem noch

$$\sin \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l' - \tfrac{1}{48} l'^3$$
$$\sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon) = \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \cos\varepsilon,$$

so folgt

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \tfrac{1}{2} l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{4} l' \Delta\varepsilon \cos\varepsilon - \tfrac{1}{48} l'^3 \sin\varepsilon$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} + \tfrac{1}{6}\sin^3 \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} + \tfrac{1}{48} l'^3 \sin^3\varepsilon,$$

somit ergibt sich

$$\mathfrak{n} = l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2} l' \Delta\varepsilon \cos\varepsilon - \tfrac{1}{24} l'^3 \sin\varepsilon \cos^2\varepsilon \tag{107}$$

Endlich folgt aus dem Dreiecke $A G \gamma_1$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p+q) = -\frac{\sin \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon}{\sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} l' = -\frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon}{(\sin\varepsilon + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \cos\varepsilon) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l'}$$

Es ist aber $\Delta\varepsilon$ sehr klein im Verhältnis zu l' und folglich auch $(p+q)$ ein kleiner Winkel; demnach erhält man aus der vorigen Gleichung, wenn noch $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l'$ gesetzt wird,

$$p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{l' \sin\varepsilon}$$

oder, mit Berücksichtigung von (107),

$$p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{\mathfrak{n}} \tag{108}$$

In den Gleichungen (105) und (107) ist der vierten der Gleichungen (96) zufolge

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46''.838\, t_1 - 0''.009\, t_1^2 + 0''.001\, t_1^3$$

und demnach

$$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon_0 + [6_n 35617]\, t_1 \cos\varepsilon_0 = [9.599981] + [6_n 31870]\, t_1$$
$$\cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 + [6.35617]\, t_1 \sin\varepsilon_0 = [9.962533] + [5.95615]\, t_1$$

zu setzen, wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Führt man ferner an Stelle von l' und $\Delta\varepsilon$ die durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Werte von $(-\psi)_t$, bzw. $(\Delta\varepsilon)_t$ ein und substituiert für $(a)_t$ seinen Wert (103), so erhält man aus den Gleichungen (105) bis (108)

$$\begin{aligned}
p - q &= (4620''.63 + 0''.908\, t_1 - 0''.001\, t_1^2)\, \tau - (0''.982 + 0''.003\, t_1)\, \tau^2 + 0''.035\, \tau^3 \\
\mathfrak{m} &= (4607''.21 + 2''.795\, t_1 - 0''.001\, t_1^2)\, \tau + (1''.398 - 0''.002\, t_1)\, \tau^2 + 0''.036\, \tau^3 \\
\mathfrak{n} &= (2005''.16 - 0''.852\, t_1)\, \tau - (0''.426 + 0''.001\, t_1)\, \tau^2 - 0''.042\, \tau^3 \\
p + q &= -(13''.41 - 1''.93\, t_1)\, \tau + 1''.60\, \tau^2
\end{aligned} \tag{109}$$

Hieraus folgt noch

$$(110)\qquad \begin{aligned} p &= +(2303''.61 + 1''.42\,t_1)\,\tau + 0''.31\,\tau^2 \\ q &= -(2317''.02 - 0''.51\,t_1)\,\tau + 1''.29\,\tau^2 \end{aligned}$$

32. Präzessionsformeln, gültig für das tropische Jahr als Zeiteinheit. In den Formeln (98) bis (110) bedeutet t_1 die von 1850.0 bis zur neuen Anfangsepoche $1850 + t_1$, und τ die von $1850 + t_1$ bis $1850 + t_2$ verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten. Will man aber das tropische Jahr als Zeiteinheit wählen, so ist zu berücksichtigen, daß die Länge desselben veränderlich ist, aber nur in so geringem Grade, daß man für die Zeit von 1750 bis 1950 unbedenklich ein julianisches Jahr $= 0.9999786$ tropisches Jahr annehmen kann; man hat also die Koeffizienten von t_1 und von τ mit $\frac{0.9999786}{100}$ zu multiplizieren, die Koeffizienten von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $\left(\frac{0.9999786}{100}\right)^2$, usw. Bedeutet ferner t_0 die vorhin mit $1850 + t_1$ bezeichnete neue Anfangsepoche und t die Epoche, für welche man die Werte der auf der linken Seite der Formeln (98) bis (110) stehenden Unbekannten sucht, so ist in den genannten Formeln t_1 durch $t_0 - 1850$ und τ durch $t - t_0$ zu ersetzen, wo nun $t_0 - 1850$ und $t - t_0$ als in tropischen Jahren ausgedrückt zu denken sind. Für das Resultat der Rechnung ist es aber gleichgültig, ob die Gleichungen (98) bis (110) in der eben angegebenen oder in folgender Weise geändert werden: Man multipliziere die Koeffizienten von t_1 und τ mit 0.9999786, diejenigen von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $(0.9999786)^2$, ..., und ersetze t_1 durch $\frac{t_0 - 1850}{100}$ und τ durch $\frac{t - t_0}{100}$.

Auf diese Art ergeben sich die folgenden für das tropische Jahr als Zeiteinheit gültigen Formeln:

$$\begin{aligned}
(-\psi)_\tau = &\left[5036''.84 + 0''.494\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&- \left[1''.071 + 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.002\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon')_\tau = &\ 23^\circ 27'\,31''.68 - 46''.837\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.009\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^3 \\
&+ \left[0''.065 - 0''.009\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.008\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathit{\Delta})_\tau = &\left[5024''.53 + 2''.224\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.003\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&+ \left[1''.112 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.001\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon)_\tau = &\ 23^\circ 27'\,31''.68 - 46''.837\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.009\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^3 \\
&- \left[46''.837 + 0''.018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.003\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&- \left[0''.009 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$(a)_t = \left[13''.417 - 1''.887\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[2''.380 + 0''.001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''.001\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\pi_t = \left[47''.141 - 0''.068\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''.034\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$\Pi_t = 173^\circ\,29'\,40''.7 + 3286''.5\,\frac{t_0-1850}{100} + 0''.27\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2 - \left[869''.0 + 0''.84\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''.07\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p-q = \left[4620''.53 + 0''.908\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[0''.982 + 0''.003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''.035\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\mathfrak{m} = \left[4607''.11 + 2''.795\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100} + \left[1''.398 - 0''.002\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''.036\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\mathfrak{n} = \left[2005''.12 - 0''.852\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[0''.426 + 0''.001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''.042\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$p+q = -\left[13''.41 - 1''.93\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 1''.60\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p = +\left[2303''.56 + 1''.42\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 0''.31\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$q = -\left[2316''.97 - 0''.51\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 1''.29\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

33. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse der Erde. Durch die Gleichungen (89) und (90) ist die Bewegung der Rotationsachse der Erde in bezug auf die der Epoche 1850.0 entsprechende Ebene der Ekliptik bestimmt; es sollen nun die analogen für die kleine Achse der Erde gültigen Gleichungen abgeleitet werden. Dieselben ergeben sich durch Integration der Differentialgleichungen (25), doch ist zuvor der in letzteren vorkommende Quotient $\frac{A}{C}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke läßt sich die auf S. 88 gefundene Gleichung

$$(\alpha) \qquad \log\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn} = 8.22751 - 10$$

benutzen. Wenn T die Umlaufszeit der Erde in ihrer Bahn und E die Masse der Erde in Teilen der Sonnenmasse $M_\odot$ darstellt, so ist bekanntlich*)

$$k^2 = \frac{4\pi^2\Delta^3}{T^2(1+E)M_\odot}$$

*) *Bauschinger*, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, S. 133.

Gauß nimmt $E = 1 : 354710$ und die Umlaufszeit der Erde gleich $365 \cdot 2563835$ mittlere Sonnentage an. Da wir als Zeiteinheit das julianische Jahrhundert gewählt haben, so ist

$$T = \frac{365 \cdot 2563835}{36525}$$

zu setzen; es ergibt sich dann

$$\log \frac{k^2 M_\odot}{\mathcal{A}^3} = \log \frac{4\pi^2}{T^2(1+E)} = 5 \cdot 59634$$

n bedeutet die auf die kleine Achse der Erde bezogene Komponente der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Würde man den Sterntag als Zeiteinheit festsetzen, so wäre $n = 2\pi$; da aber das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt wurde, so erhält man, wenn f das Verhältnis eines mittleren Sonnentages zum Sterntag angibt, $n = 2\pi f \cdot 36525$. Nun ist $\log f = 0 \cdot 0011874$, somit wird

$$\log n = 5 \cdot 36196$$

Mit Hilfe der im vorigen bestimmten Werte von $\log \frac{k^2 M_\odot}{\mathcal{A}^3}$ und $\log n$ ergibt sich aus der Gleichung (α)

$$\frac{C-A}{C} = 0 \cdot 00328, \qquad (\log = 7 \cdot 51601 - 10),$$

also

$$\frac{A}{C} = 0 \cdot 99672, \qquad (\log = 9 \cdot 99857 - 10)$$

Was nun die Differentialgleichungen (25) betrifft, so kann man bei jeder von ihnen das letzte Glied auf der rechten Seite vernachlässigen; denn das größte derselben, nämlich $\frac{A}{Cn} \cos\varepsilon' \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ in der Gleichung für $\frac{d\psi}{dt}$, gibt, wenn $\varepsilon' = \varepsilon_0$, $\frac{d\psi}{dt} = -5037''$ gesetzt und dann integriert wird, nur $0''.0004\, t$. Die Gleichungen werden demnach

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} = -\frac{L}{Cn} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{M}{Cn} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\right),$$

oder, wenn man auf die Gleichungen (26^a) Rücksicht nimmt und $\sin\varepsilon'_1 = \sin\varepsilon'$ setzt,

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} = \sin\varepsilon' \frac{d\psi_1}{dt} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon'_1}{dt} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\right) \qquad (111)$$

Hierin sind ψ_1 und ε'_1 mit den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Integralen ψ und ε' der Gleichungen (26^a) identisch*). Setzt man jetzt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\delta\psi_1}{dt}$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon'_1}{dt} + \frac{d\delta\varepsilon'_1}{dt}, \qquad (112)$$

*) Vgl. S. 66, Z. 6

so erhält man aus (111) die folgenden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}\right)+\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}&=-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon_1'}{dt}\right)\\ \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}\right)-\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}&=-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}\right)\end{aligned}\tag{113}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich nach der Methode der Variation der Konstanten integrieren. Wenn nämlich die rechten Seiten gleich o wären, so würde man als Integrale erhalten

$$\begin{aligned}\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}&=m\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\\ \frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}&=m\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right),\end{aligned}\tag{114}$$

wo m und σ zwei Konstanten bedeuten. Betrachtet man aber m und σ als veränderlich, so lassen sich $m\sin\sigma$, $m\cos\sigma$ so bestimmen, daß die Gleichungen (114) auch den Differentialgleichungen (113) Genüge leisten. Nach Substitution dieser Werte in die Gleichungen (114) erhält man durch Integration die Werte von $\delta\psi_1$ und $\delta\varepsilon_1'$, welche zu ψ_1, bzw. ε_1' addiert die Integrale der Differentialgleichungen (25) darstellen. Einfacher ist der folgende Weg: Aus den Gleichungen (111) erhält man, wenn

$$\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

gesetzt und von den Integrationskonstanten abgesehen wird,

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_1-\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\\ \varepsilon&=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right),\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (112) und (114),

$$\begin{aligned}-\psi&=-\psi_1+\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon_1'}{dt}+\frac{Am}{Cn\sin\varepsilon'}\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\\ \varepsilon'&=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}+\frac{Am}{Cn}\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (89) und (90) folgt aber mit Vernachlässigung aller für das Folgende bedeutungslosen Glieder

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1'}{dt}=&-0''.552\sin 2L\frac{d2L}{dt}-0''.088\sin 2c\frac{d2c}{dt}-0''.011\sin[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}-\\&-9''.210\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt}-0''.018\sin[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}\\ \frac{d\psi_1}{dt}=&-5036''.95+1''.271\cos 2L\frac{d2L}{dt}+0''.204\cos 2c\frac{d2c}{dt}+\\&+0''.026\cos[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}+17''.224\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt}+0''.034\cos[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}\end{aligned}$$

In den Gleichungen (89) und (90) ist das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt worden; es bedeuten also in den vorigen Differentialgleichungen $\frac{d_2 L}{dt}$, $\frac{d_2 c}{dt}$, ... die in Teilen des Radius ausgedrückten Werte der mittleren Bewegung von $_2L$, $_2c$, ... in einem julianischen Jahrhundert. Auf S. 85 sind die Produkte aus diesen Werten und arc 1″ mitgeteilt; dividiert man dieselben durch arc 1″, so ergeben sich die folgenden hier anzuwendenden Werte der Differentialquotienten, bzw. ihrer Logarithmen

$$\log \frac{d_2 L}{dt} = 3.0992 \qquad \log \frac{d\Omega}{dt} = 1_n 5284$$

$$\log \frac{d_2 c}{dt} = 4.2253 \qquad \log \frac{d[2c - \Omega]}{dt} = 4.2262$$

$$\log \frac{d[2c + g]}{dt} = 4.4002$$

Ferner folgt unter Anwendung der auf S. 102 gegebenen Werte von $A : C$ und n, wenn $\sin \varepsilon' = \sin \varepsilon_0$ gesetzt wird,

$$\log \frac{A}{Cn \sin \varepsilon'} = 5.0366 - 10, \qquad \log \frac{A}{Cn} \sin \varepsilon' = 4.2366 - 10$$

Somit erhält man als vollständige Integrale der Differentialgleichungen (111), bzw. (25)

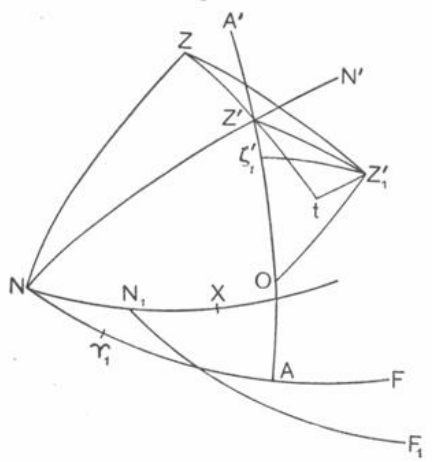
$$-\psi = -\psi_1 - 0''.008 \sin 2L - 0''.016 \sin 2c - 0''.003 \sin[2c + g] + 0''.003 \sin \Omega - \\ - 0''.003 \sin[2c - \Omega] + \frac{Am}{Cn \sin \varepsilon'} \cos\left(\frac{Cn}{A} t - \sigma\right)$$

(115)

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' - 0''.009 + 0''.003 \cos 2L + 0''.006 \cos 2c + 0''.001 \cos[2c + g] - \\ - 0''.001 \cos \Omega + 0''.001 \cos[2c - \Omega] + \frac{Am}{Cn} \sin\left(\frac{Cn}{A} t - \sigma\right),$$

wo m und σ die Integrationskonstanten bezeichnen. Die Periode der beiden von $\frac{Cn}{A} t - \sigma$ abhängigen Glieder ist gleich $2\pi \frac{A}{Cn}$. Nimmt man den Sterntag als Einheit, so ist $n = 2\pi$; die Periode ist also gleich $0.99672 = \frac{305}{306}$ Sterntage.

Fig. 12.



Die Werte von m und σ sind durch die Beobachtungen zu bestimmen; in welcher Weise dies geschehen kann, soll jetzt gezeigt werden. Es sei (Fig. 12) Z der Pol der festen Ekliptik NX, und X der zugehörige Frühlings Tag- und Nachtgleichepunkt. Z' sei der Punkt, in dem die verlängerte kleine Achse der Erde die Sphäre trifft, und NF der größte Kreis, in dem die zur kleinen Achse der Erde senkrechte Ebene die Himmelskugel schneidet. Ferner sei Z_1' der instantane Drehungspol der Erde und $N_1 F_1$ der zur Rotationsachse senkrechte instantane Äquator. Es ist

dann $ZZ' = \varepsilon'$, $ZZ_1' = \varepsilon_1'$, $NX = -\psi$, $N_1X = -\psi_1$, also NN_1 und somit auch der Winkel $Z'ZZ_1' = \psi_1 - \psi$. Wenn endlich O das Zenit, also $Z'OA$ den Meridian eines Beobachtungsortes bedeutet, so stellt $NZ'A = A'Z'N'$ den auf S. 59 mit φ bezeichneten Winkel dar. Da N der Pol von ZZ' ist, so stehen NN' und ZZ' senkrecht zueinander. Man ziehe jetzt den Bogen $Z_1't$ senkrecht zu ZZ'; aus dem Dreieck $Z_1'Zt$ folgt dann $\sin Z_1't = \sin\varepsilon_1' \sin(\psi_1 - \psi)$ oder, wenn $\sin\varepsilon_1' = \sin\varepsilon'$ gesetzt wird,

$$Z_1't = (\psi_1 - \psi)\sin\varepsilon'$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $Z_1'Zt$

$$\sin\varepsilon_1' \cos(\psi_1 - \psi) = \cos Z_1't \sin(\varepsilon' + Z't)$$

Setzt man hier $\cos(\psi_1 - \psi)$ und $\cos Z_1't$ gleich 1, so ergibt sich

$$Z't = \varepsilon_1' - \varepsilon'$$

Es werde jetzt auf OZ' der Bogen $O\zeta_1' = OZ_1'$ abgetragen und $OZ' = 90^\circ - \Phi$, $O\zeta_1' = OZ_1' = 90^\circ - \Phi'$ gesetzt, ferner werde der Winkel $N'Z'Z_1'$ mit $\varkappa$ bezeichnet. Da $Z'Z_1'$ äußerst klein ist und, für die in der Praxis in Frage kommenden Beobachtungsorte, als verschwindend gegenüber OZ' und OZ_1' betrachtet werden darf, so kann man den Winkel $Z_1'\zeta_1'Z' = 90^\circ$ setzen; aus dem Dreieck $Z_1'Z'\zeta_1'$, worin der Winkel bei Z' gleich $180^\circ - (\varkappa + \varphi)$ und die Seite $Z'\zeta_1' = \Phi' - \Phi$ ist, folgt demnach

$$\Phi' - \Phi = -Z'Z_1' \cos(\varkappa + \varphi)$$

oder, da $Z'Z_1' \cos\varkappa = Z_1't$ und $Z'Z_1' \sin\varkappa = Z't$ ist,

$$\Phi' - \Phi = -Z_1't \cos\varphi + Z't \sin\varphi$$

Nach Substitution der vorhin für $Z_1't$ und $Z't$ gefundenen Werte ergibt sich also

$$\Phi' - \Phi = -(\psi_1 - \psi)\sin\varepsilon' \cos\varphi + (\varepsilon_1' - \varepsilon')\sin\varphi$$

oder mit Einsetzung der durch die Gleichungen (115) bestimmten Werte von $\psi_1 - \psi$ und $\varepsilon_1' - \varepsilon'$

$$\begin{aligned}(116)\quad \Phi' - \Phi = &-\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{Cn}{A}t - \varphi - \sigma\right) + 0''.009\sin\varphi - 0''.006\sin(\varphi - 2c) - \\ &- 0''.003\sin(\varphi - 2L) - 0''.001\sin(\varphi - 2c - g) + 0''.001\sin(\varphi - \Omega) - \\ &- 0''.001\sin(\varphi - 2c + \Omega)\end{aligned}$$

In dieser Gleichung kommt noch die Unbekannte φ vor. Es sei Υ_1 (Fig. 12) der aufsteigende Knoten der beweglichen, der Epoche $1850 + t$ entsprechenden Ekliptik auf dem derselben Epoche angehörigen beweglichen Äquator NF; es ist dann $N\Upsilon_1$ oder der Winkel $NZ'\Upsilon_1$ gleich dem durch die Gleichung (95) bekannten Bogen a. Ferner gibt der Winkel $\Upsilon_1Z'A$ die Sternzeit des Ortes an; wird diese mit Θ bezeichnet, so ist $\varphi = \Theta + a$. Aus der dritten der Gleichungen (18) in Verbindung mit (24) folgt jetzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\Theta + a)}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon',$$

also, wenn φ_0 eine Konstante bezeichnet,

$$\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt - \int\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'\,dt$$

Das auf der rechten Seite vorkommende Integral ist verschwindend klein gegenüber nt. Setzt man nämlich $\cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0$ und berücksichtigt von ψ nur das größte Glied $-5036''.9\,t$, so wird das Integral gleich $-5036''.9\,t\cos\varepsilon_0 = -4620''.6\,t$, wo die Einheit von t das julianische Jahrhundert ist. Würde man also den Sterntag als Zeiteinheit wählen, so wäre $\int \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'\,dt = -0''.13\,t$, während dann $n = 1296000''$ anzunehmen ist. Für den hier in Betracht kommenden Fall kann man demnach $\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt$ setzen. Zählt man ferner t von dem Augenblicke an, wo der Meridian $Z'A$ des Ortes O mit $Z'N$ zusammenfällt, so ist $\varphi_0 = 0$, also $\varphi = \Theta + a = nt$. Da a der Gleichung (95) zufolge selbst nach Ablauf eines Jahrhunderts nur rund eine Zeitsekunde beträgt, so hat man ausreichend genau

$$\varphi = \Theta = nt$$

Setzt man jetzt in dem ersten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung (116) $\varphi = nt$ und in den übrigen $\varphi = \Theta$, so wird

$$(117)\quad \Phi' - \Phi = -\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt - \sigma\right) + 0''.009\sin\Theta - 0''.006\sin[\Theta - 2c] - \\ - 0''.003\sin[\Theta - 2L] - 0''.001\sin[\Theta - 2c - g] + 0''.001\sin[\Theta - \Omega] - \\ - 0''.001\sin[\Theta - 2c + \Omega]$$

Aus den auf S. 102 angegebenen Werten von $(C-A):C$ und $A:C$ folgt aber

$$\frac{C-A}{A} = 0.00329 \qquad (\log = 7.51744 - 10)$$

Berücksichtigt man noch, daß, wenn der Sterntag als Zeiteinheit gewählt wird, $n = 2\pi$ zu setzen ist, so ergibt sich für die Periode des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (117) 303.8 Sterntage = 303.0 mittlere Tage. Nun bedeutet Φ' die beobachtete Polhöhe und Φ das Komplement des Winkels zwischen der kleinen Achse der Erde und der Vertikalen. Da Φ für die als starr vorausgesetzte Erde konstant ist, so müßten die Werte von

$$(118)\quad \Phi' - 0''.009\sin\Theta + 0''.006\sin[\Theta - 2c] + \cdots + 0''.001\sin[\Theta - 2c + \Omega] = \Phi''$$

eine zehnmonatliche Periode zeigen, und man könnte also aus Beobachtungsreihen, die sich über diesen Zeitraum ausdehnen, mittels der Gleichung

$$(119)\qquad \Phi'' = \Phi - \frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt - \sigma\right)$$

die Werte von $m\sin\sigma$ und $m\cos\sigma$ ableiten.

Die Gleichungen (89) und (90) stellen die Integrale der Gleichungen (26^a) dar, und letztere unterscheiden sich von den strengen Differentialgleichungen (26) nur dadurch, daß die Glieder

$$\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

bezüglich

$$-\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

vernachlässigt worden sind. Betrachtet man zunächst das erste Glied jedes dieser beiden Aggregate, so würde man als Zusatzglieder zu den Integralen (89) und (90) erhalten

$$\frac{C-A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad -\frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$$

Substituiert man hierin die aus den Gleichungen (112) und (114) folgenden Werte von $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$, so ergibt sich, daß selbst wenn der aus den beobachteten Polhöhen mit Hilfe von (119) berechnete Koeffizient $\frac{Am}{Cn} = 0''.1$ wäre, das durch (89) gegebene ψ nur die Korrektion $0''.0008\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$ und das durch (90) bestimmte ε' die Korrektion $0''.0003\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$ erfordern würde. Der Beitrag, den die von $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ und $\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}$ abhängigen Glieder geben, ist noch viel geringer. Es beschreibt also freilich auch die Rotationsachse im Laufe eines (genauer 0.9967) Sterntages einen kleinen Kreis um ihre mittlere Lage, aber der Radius dieses Kreises ist so minimal, daß man die Drehungsachse, wenn man von den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Änderungen ihrer Lage absieht, als unbeweglich betrachten kann.

34. Bestimmung der Mondmasse. Aus den auf S. 86 und 88 erhaltenen Gleichungen

$$\log\frac{3k^2M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.56371$$

$$\log\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.22751$$

folgt

$$\frac{M_c}{M_\odot}\frac{\Delta^3}{H^3} = \text{Num } 0.33620,$$

wo Num 0.33620 die zu dem Logarithmus 0.33620 gehörige Zahl bedeutet.

Bezeichnet man die in Einheiten der Erdmasse ausgedrückten Massen von Mond und Sonne mit M, bzw. M' und ihre mittleren Bewegungen mit μ, bzw. μ', so ist

$$\mu^2H^3 = k^2(1+M)$$
$$\mu'^2\Delta^3 = k^2(1+M')$$

und

$$\frac{M_c}{M_\odot} = \frac{M}{M'}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{M(1+M')}{M'(1+M)}\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \frac{M}{1+M}\left(1+\frac{1}{M'}\right)\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \text{Num } 0.33620$$

Da $\frac{\mu}{\mu'} = \text{Num } 1.12610$ und $M' > 300000$ ist, so folgt

$$M = \frac{1}{81.4}$$

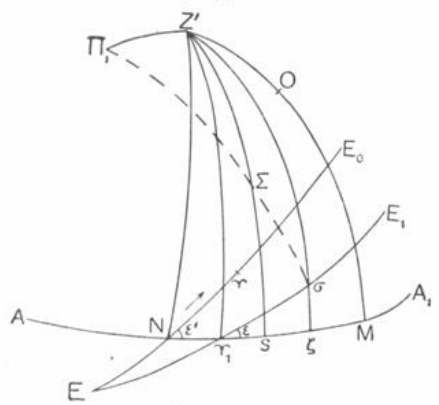
II. Zeitmessung.

35. Grundlagen der Zeitmessung. Mittlere und wahre Zeit. Aus der dritten der Gleichungen (18) des § 24 folgt, wenn der Gleichung (24) gemäß $r = n$ gesetzt wird,

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' \tag{A}$$

In Fig. 13 sei nun EE_0 die der Zeit $t = 0$ entsprechende Ekliptik und γ das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$, ferner mögen EE_1 und AA_1 die Ekliptik, bzw. den wahren Äquator zur Zeit $t = t$ bedeuten; man hat dann $N\gamma = \psi$, $E_0NA_1 = \varepsilon'$, und es gibt das γ_1 wahre Äquinox zur Zeit $t = t$ an. Der Pol des Äquators AA_1 werde mit Z' bezeichnet, ferner sei O das Zenit eines Beobachtungsortes und demnach $Z'OM$ der Meridian und $MZ'\gamma_1$ die Sternzeit des Beobachtungsortes. Wird diese Sternzeit mit Θ und der Bogen $N\gamma_1$, bzw. der ihm gleiche Winkel $NZ'\gamma_1$, wie früher (S. 66), mit a bezeichnet, so folgt, da $NZ'M = \varphi$ ist, $\varphi = \Theta + a$.

Fig. 13.



Man setze setzt $\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, wo ε_0 die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ bedeutet; mit Vernachlässigung des Quadrates und der höheren Potenzen von $\Delta\varepsilon$ ergibt sich dann

$$\cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon \sin\varepsilon_0$$

Substituiert man diesen Ausdruck und den vorhin gefundenen Wert von φ in die Gleichung (A), so folgt

$$\frac{d(\Theta + a)}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon_0$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man, wenn die Integrationskonstante mit C bezeichnet wird,

$$\Theta = C + nt - a - \psi\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 \int \Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt \tag{120}$$

Es möge nun 1900 Januar 0, 0^h mittlerer Zeit Berlin als Anfangspunkt der Zeitrechnung gewählt werden und demnach t die seit 1900 Jan. 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit und EE_1 (Fig. 13) die der Epoche $1900 + t$ entsprechende Lage der Ekliptik darstellen, ferner werde als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert angenommen. Um dann den für die Gleichung (120) zu benutzenden Wert von $-\psi$ zu finden, hat man in der Gleichung (100) $t_1 = 0.50$ und $\tau = t$ zu setzen und zu dem damit erhaltenen Resultat die periodischen Glieder der Gleichung (89), deren Komplex mit Ψ bezeichnet werden möge, hinzuzufügen. In analoger Weise erhält man aus der Verbindung von (103) mit den periodischen Gliedern der Gleichung (95)

den Wert von a; die periodischen Glieder sind jedoch zu klein, um einen merklichen Einfluß ausüben zu können, und sollen deshalb übergangen werden. Mit Anwendung des für 1900.0 gültigen Wertes $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.3$ ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} -\psi &= 5037''.20\,t - 1''.072\,t^2 + {}^1\Psi \\ -\psi\cos\varepsilon_0 &= 4621.08\,t - 0.983\,t^2 + {}^1\Psi\cos\varepsilon_0 \\ a &= \quad 12.47\,t - 2.380\,t^2 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des in der Gleichung (120) vorkommenden Integrals ist noch die Kenntnis des Wertes von $\Delta\varepsilon$ erforderlich. Man erhält diesen Wert, indem man in der Gleichung (101) $t_1 = 0.50$, $\tau = t$ setzt und zu dem so für $(\Delta\varepsilon)_t$ sich ergebenden Wert die periodischen Glieder der Gleichung (90) addiert. Es ist indessen nicht nötig, den strengen Wert von $\Delta\varepsilon$ anzuwenden, sondern es genügt, $\Delta\varepsilon = 9''.2\cos\Omega$ zu setzen; benutzt man außerdem noch den Näherungswert $\frac{d\psi}{dt} = -5037''$, so wird

$$\sin\varepsilon_0\int\Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt = -\sin\varepsilon_0\int 9''.2 \times 5037''\sin 1''\cos\Omega\,dt$$

oder, wenn man $\Omega = \Omega_0 + \sigma t$ und, wie auf S. 90, $\log\sigma = 1.5284$ setzt, wo σ in Teilen des Radius ausgedrückt ist,

$$\sin\varepsilon_0\int\Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt = 0''.003\,\sin\Omega$$

Hierbei ist für Ω sein der Zeit $1900 + t$ entsprechender Wert zu substituieren; das Glied ist aber so klein, daß es ohne weiteres vernachlässigt werden darf.

Unter Benutzung der im vorigen gefundenen Werte und mit Einführung der Bezeichnung

$$(121) \qquad {}^1\Psi\cos\varepsilon_0 = P'$$

erhält man aus (120)

$$(122) \qquad \Theta = C + (n + 4608''.61)\,t + 1''.397\,t^2 + P'$$

Ehe die Bestimmung der Konstanten C und n ausgeführt werden kann, ist zu zeigen, wie man mit Hilfe der Sonnentafeln die Rektaszension der Sonne findet. In Fig. 13 sei Σ der Ort der Sonne, Π_1 sei der Pol der Ekliptik EE_1, $\Pi_1\sigma$ der Breitenkreis der Sonne, $Z'\zeta$ der Deklinationskreis des Punktes σ und $Z's$ der Deklinationskreis der Sonne. Setzt man $\Upsilon_1\sigma = \odot$, $\sigma\Sigma = B$, $\Upsilon_1 s = A$, $s\Sigma = D$, so daß $\odot$ die Länge, B die Breite, A die Rektaszension, D die Deklination der Sonne, bezogen auf die Ekliptik, bzw. den Äquator zur Zeit $1900 + t$, bedeuten, setzt man ferner $\Upsilon_1\zeta = A_0$, $\zeta\sigma = D_0$, $s\zeta = sZ'\zeta = \Delta A_0$, $E_1\Upsilon_1 A_1 = \varepsilon$, so folgt aus dem Dreieck $\Upsilon_1\sigma\zeta$

$$(123) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} A_0 &= \cos\varepsilon\,\operatorname{tang}\odot \\ \sin D_0 &= \sin\varepsilon\,\sin\odot \end{aligned}$$

Um den Wert von ε zu finden, hat man in der Gleichung (99) den für 1850.0 gültigen Wert $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 31''.68$ zu substituieren, ferner $t_1 = 0.50$, $\tau = t$ zu setzen und zu dem damit erhaltenen $(\varepsilon)_t$ die periodischen Glieder der Gleichung (93) zu addieren.

Durch Anwendung der in § 1 abgeleiteten Reihenentwicklung (18ª) auf die erste der Gleichungen (123) ergibt sich

$$A_0 = \odot - \frac{1}{\sin 1''} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\odot + \frac{1}{2\sin 1''} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\odot - \cdots, \tag{124}$$

wo die von ε abhängigen Glieder in Bogensekunden ausgedrückt erhalten werden.

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck $Z'\Sigma\sigma$

$$\sin \measuredangle A_0 : \sin B = \sin \Pi_1 \Sigma Z' : \cos D_0$$

und aus dem Dreieck $\Pi_1 Z'\Sigma$, worin der Winkel bei Z' gleich $90^0 + A_0$ ist,

$$\sin \Pi_1 \Sigma Z' : \sin \varepsilon = \cos A_0 : \cos B$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen erhält man, wenn $\sin \measuredangle A_0 = \measuredangle A_0 \sin 1''$, $\sin B = B \sin 1''$, $\cos B = 1$ gesetzt wird,

$$\measuredangle A_0 = \frac{\sin \varepsilon \cos A_0}{\cos D_0} B \tag{125}$$

Nun ist $A = A_0 - \measuredangle A_0$. Substituiert man hier für A_0 und $\measuredangle A_0$ die Ausdrücke (124) und (125) und setzt

$$-\frac{\sin \varepsilon \cos A_0}{\cos D_0} B - \frac{1}{\sin 1''} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\odot + \frac{1}{2\sin 1''} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\odot - \cdots = \varrho, \tag{126}$$

so folgt

$$A = \odot + \varrho \tag{127}$$

Es sei jetzt L die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Äquinox der Epoche 1900.0, ferner bedeute $(\measuredangle)$ die allgemeine Präzession in Länge für das Zeitintervall von 1900.0 bis $1900 + t$ (so daß, wenn γ_1 in Fig. 13 das der Epoche $1900 + t$ entsprechende mittlere Äquinox darstellen würde, $(\measuredangle) = E\gamma - E\gamma_1$ wäre); es ist dann $L + (\measuredangle)$ die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Äquinox der Epoche $1900 + t$. Hierbei hat man für $(\measuredangle)$ den aus der Gleichung (98) für $t_1 = 0.50$ und $\tau = t$ folgenden Wert von $(\measuredangle)_\tau$ zu substituieren. Um nun die wahre Sonnenlänge $\odot$ zu erhalten, sind, der Theorie der Bewegung der Erde gemäß, zu $L + (\measuredangle)$ folgende Glieder zu addieren: 1. die sogenannte Mittelpunktsgleichung (M), 2. der Betrag der durch die Planeten und den Mond bewirkten Störungen in Länge (S) und 3. die Nutation in Länge (ν), d. h. die Summe der periodischen Glieder des für die Bewegung des Äquinoktiums auf der beweglichen Ekliptik gültigen Ausdrucks (92); es ergibt sich demnach

$$\odot = L + (\measuredangle) + M + S + \nu \tag{128}$$

Die Werte von L, M und S kann man den Sonnentafeln entnehmen; da $(\measuredangle)$ und ν bekannt sind, so läßt sich also für jede Zeit der Wert von $\odot$ berechnen. Ist dieser Wert gefunden, und hat man mit Hilfe der Sonnentafeln auch den Wert von B berechnet, so können die Gleichungen (123) bis (127) zur Berechnung von A benutzt werden.

Die so erhaltene Rektaszension der Sonne würde aber noch nicht mit der aus der Beobachtung folgenden übereinstimmen. Der Umstand, daß die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn ein angebbares Verhältnis zu der Geschwindigkeit des Lichtes hat, bewirkt nämlich, daß, wenn in Fig. 13 Σ den Punkt angibt, in dem die von einem Orte der Erde zum wahren Orte des Mittelpunktes der Sonne gezogene Gerade die Sphäre trifft, der Mittelpunkt der Sonne — von der Erde aus gesehen — nicht mit Σ, sondern mit einem Punkte Σ'*) zusammenzufallen scheint, welcher dieselbe Breite, aber eine kleinere Länge wie Σ hat; dies wird im 10. Kapitel noch genauer auseinandergesetzt werden. Man bezeichnet nun Σ' als den scheinbaren und Σ als den wahren Ort der Sonne; dem entsprechend wird die Länge von Σ' die scheinbare Länge und die Rektaszension von Σ' die scheinbare Rektaszension der Sonne genannt. Bezeichnet man die scheinbare Länge der Sonne mit $\odot'$, ist ferner k die sogenannte Aberrationskonstante (für welche man aus Beobachtungen den Wert $20''.47$ gefunden hat), und bedeutet e' ein kleines von der Exzentrizität der Erdbahn abhängiges periodisches Glied, dessen Betrag stets kleiner als $0''.4$ ist, so hat man, wie in § 59 gezeigt werden wird, $\odot' = \odot - k + e'$ oder, mit Benutzung der Gleichung (128),

$$\odot' = L - k + (\mathcal{A}) + M + S + \nu + e' \tag{129}$$

Hierbei gibt $L - k + (\mathcal{A})$ die scheinbare mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das mittlere Äquinox der Epoche $1900 + t$ an. Wird jetzt die scheinbare Rektaszension der Sonne mit A' bezeichnet, und bedeutet ϱ' den Wert, den der in (126) gegebene Ausdruck von ϱ annimmt, wenn $\odot = \odot'$ gesetzt wird, aber in dem kleinen von B abhängigen Gliede die aus (123) für A_0 und D_0 folgenden Werte beibehalten werden, so hat man für A' die der Gleichung (127) entsprechende Gleichung

$$A' = \odot' + \varrho' = L - k + (\mathcal{A}) + M + S + \nu + e' + \varrho'$$

oder, wenn die Summe der periodischen Glieder

$$M + S + \nu + e' + \varrho' = P \tag{130}$$

gesetzt wird,

$$A' = L - k + (\mathcal{A}) + P \tag{131}$$

Unter Annahme des Wertes $k = 20''.47$ ist nach den *Newcomb*schen Sonnentafeln, wenn t wie oben die seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten, bedeutet

$$L - k + (\mathcal{A}) = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.089\,t^2 \tag{132}$$

Denkt man sich diesen und den Wert von P in die Gleichung (131) substituiert, so erhält man die scheinbare Rektaszension der Sonne. Der dieser Rektaszension entsprechende Stundenwinkel der Sonne ist $\Theta - A'$; führt man nun die Bezeichnung ein

$$\Theta - A' = H,$$

so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (122), (131) und (132)

$$H = C - 279^\circ 39' 15''.54 + (n - 129\,598\,159''.52)t + 0''.308\,t^2 + P' - P \tag{133}$$

*) In Fig. 13 nicht gezeichnet.

oder, wenn

$$H_0 = C - 279^\circ 39' 15''.54 + (n - 129\,598\,159''.52)t \tag{134}$$

gesetzt wird,

$$H = H_0 + 0''.308\,t^2 + P' - P \tag{135}$$

Der durch die Gleichung (134) bestimmte Winkel H_0 läßt sich ebenfalls als Stundenwinkel definieren. Nimmt man nämlich eine Sonne an, deren Rektaszension durch den Ausdruck

$$\mathfrak{A} = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.397\,t^2 + P' \tag{136}$$

dargestellt wird, so ist der Stundenwinkel dieser fingierten, sogenannten mittleren Sonne gleich $\Theta - \mathfrak{A}$; substituiert man hier für Θ und $\mathfrak{A}$ ihre in (122) und (136) gegebenen Werte, so folgt

$$\Theta - \mathfrak{A} = H_0 \tag{137}$$

Den Stundenwinkel H nennt man die wahre und H_0 die mittlere Zeit. Den Moment, wo an einem Beobachtungsorte $H_0 = 0$ ist, und sich demnach die mittlere Sonne im Meridian dieses Ortes befindet, bezeichnet man als 0^h mittlere Zeit oder als mittleren Mittag des betreffenden Meridians. Berücksichtigt man nun, daß t von dem mittleren Berliner Mittage Jan. 0, 1900 aus gezählt wird, daß also, wenn $t = 0$ ist, für den Berliner Meridian auch $H_0 = 0$ ist, so folgt aus (134)

$$C = 279^\circ 39' 15''.54 = 18^h 38^m 37^s.036 \tag{138}$$

Die Zeit, innerhalb deren H_0 um $360^\circ = 1296000''$ zunimmt, nennt man einen mittleren Tag; für das als Zeiteinheit gewählte julianische Jahrhundert ändert sich also H_0 um $36525 \times 1\,296\,000'' = 47\,336\,400\,000''$. Da nun diese Änderung, nach (134), auch durch $n - 129\,598\,159''.52$ ausgedrückt wird, so folgt

$$n = 47\,465\,998\,159''.52 \tag{139}$$

Dieser Wert von n gilt für ein julianisches Jahrhundert als Zeiteinheit; wird derselbe durch 36525 dividiert, so erhält man den einem mittleren Tage als Zeiteinheit entsprechenden Wert $n = 1\,299\,548''.2042$.

36. Sternzeit im mittleren Mittage. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt. Durch Substitution der in (138) und (139) mitgeteilten Werte von C und n in (122) erhält man als Ausdruck für die Sternzeit

$$\Theta = 18^h 38^m 37^s.036 + 47\,466\,002\,768''.13\,t + 1''.397\,t^2 + P' \tag{140}$$

Wählt man nun einen mittleren Tag als Zeiteinheit und dividiert demnach die Koeffizienten von t und t^2 durch 36525, bzw. $(36525)^2$, dividiert man ferner noch die in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten durch 15, so wird, wenn d die seit 1900, Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in mittleren Tagen, bedeutet

$$\Theta = 18^h 38^m 37^s.036 + (24^h + 3^m 56^s.5554)d + \frac{0^s.093}{(36525)^2}d^2 + \tfrac{1}{15}P' \tag{141}$$

Setzt man in dieser Gleichung $d = 0, 1, 2, \ldots$, so erhält man die für 1900 Jan. 0, 1, 2, ... gültige Sternzeit im mittleren Berliner Mittage. Um die Sternzeit im mittleren Mittage eines anderen Meridians zu finden, berücksichtige man zunächst, daß, wenn l den Längenunterschied eines Ortes gegen Berlin bedeutet, und l positiv oder negativ gerechnet wird, jenachdem der Ort westlich oder östlich von Berlin liegt, die dem mittleren Mittage des Ortes entsprechende mittlere Berliner Zeit gleich l ist. Übergeht man nun die kleinen, von d^2 und P' abhängigen Glieder der Gleichung (141), so ergibt sich, daß im Laufe eines mittleren Tages die Sternzeit der mittleren Zeit um $3^m 56^s.555$ vorauseilt. Wenn also l in Teilen eines Tages ausgedrückt wird, so hat man, um die für den in Frage kommenden Ort gültige Sternzeit im mittleren Mittage zu erhalten, zu der für den Berliner mittleren Mittag gültigen Sternzeit $l \times 3^m 56^s.555$ hinzuzulegen. Die für die verschiedenen Sternwarten anzuwendenden Werte dieser Korrektion findet man im Berliner astronomischen Jahrbuche angegeben.

Durch Differentiation der Gleichung (141) erhält man, wenn die Änderung von P' vernachlässigt wird,

$$\delta\Theta = \left[24^h + 236^s.5554 + \frac{0^s.186}{(36525)^2}\, d\right]\delta d$$

Setzt man jetzt $\delta d = 1$, versteht man also, mit Rücksicht auf die für d gewählte Einheit, unter δd einen mittleren Tag, so gibt der Koeffizient von δd die im Verlaufe eines mittleren Tages stattfindende Änderung der Sternzeit an. Folglich hat man, wenn noch ein Intervall von 24^h Sternzeit als ein Sterntag bezeichnet wird,

$$1 \text{ mittlerer Tag} = 1 \text{ Sterntag} + \left[236.5554 + \frac{0.186}{(36525)^2}\, d\right] \text{ Sternzeitsekunden}$$

Unter Vernachlässigung des von d abhängigen Gliedes ergibt sich hieraus

$$1 \text{ mittlerer Tag} = 1.0027379 \text{ Sterntag} \tag{142}$$

und somit

$$1 \text{ Sterntag} = 0.9972696 \text{ mittlerer Tag} \tag{143}$$

Der Sterntag unterscheidet sich nur wenig von der Zeit, welche die Erde nötig hat, um sich einmal um ihre Achse zu drehen. Diese Zeit, die mit τ' bezeichnet werden möge, ergibt sich aus der Gleichung $\omega\tau' = 360^0$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet. Wie schon früher bemerkt wurde, kann ω mit der auf die kleine Achse der Erde bezogenen Komponente n der Winkelgeschwindigkeit der Erde vertauscht werden; wird für n der oben gefundene, für den mittleren Tag als Zeiteinheit gültige Wert $1\,299\,548''.2042$ eingesetzt, so ergibt sich (in mittleren Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt) $\tau' = 23^h 56^m 4^s.099 = 0.9972697$ mittlerer Tag.

Es läßt sich jetzt leicht zeigen, in welcher Weise aus der Sternzeit eines Ortes die mittlere Ortszeit und aus der mittleren Ortszeit die Sternzeit des Ortes abgeleitet werden kann. Ist Θ' die einem gegebenen Augenblicke eines Tages entsprechende Ortssternzeit, ist ferner Θ_0 die für den betreffenden Tag gültige Sternzeit im mittleren Mittage Berlin, und bedeutet R die Reduktion von Θ_0 auf die Sternzeit im mittleren

Mittage des Beobachtungsortes, so gibt die Differenz $\Theta' - (\Theta_0 + R)$ die seit dem mittleren Mittage dieses Ortes verflossene Sternzeit an. Multipliziert man dann $\Theta' - (\Theta_0 + R)$ mit der für das Verhältnis eines Sterntages zu einem mittleren Tage gefundenen Zahl 0.9972696, so erhält man die der Zeit Θ' entsprechende mittlere Ortszeit. Die Multiplikation läßt sich umgehen, wenn man eine Tafel konstruiert, welche für jedes in Sternzeit ausgedrückte Intervall die zugehörige Reduktion auf mittlere Zeit angibt; eine solche Tafel findet man in allen astronomischen Jahrbüchern mitgeteilt.

Um die mittlere Ortszeit T' in Sternzeit zu verwandeln, multipliziert man T' mit der für das Verhältnis eines mittleren Tages zu einem Sterntage gefundenen Zahl 1.002 7379 und erhält damit zunächst die seit dem mittleren Mittage verflossene Sternzeit; wird diese zu der vorhin mit $\Theta_0 + R$ bezeichneten Sternzeit im mittleren Mittage des Ortes addiert, so stellt das Resultat die gesuchte Ortssternzeit dar. Zur Erleichterung der Rechnung gibt jedes astronomische Jahrbuch eine Tafel, aus der man mit dem Argument T' den Wert von $0.002\,7379\,T'$ entnehmen kann.

37. Zeitgleichung. Verwandlung der wahren Zeit in mittlere Zeit. Nach Gleichung (135) hat man, wenn $H_0 - H$ in Zeitsekunden ausgedrückt wird,

$$H_0 - H = -0^s.0205\,t^2 + \tfrac{1}{15}(P - P') \tag{144}$$

Die Differenz $H_0 - H$, welche man zu der wahren Zeit H hinzufügen muß, um die mittlere zu erhalten, nennt man die Zeitgleichung; wie man sieht, enthält diese, außer einem kleinen säkularen Gliede, noch die Differenz der durch die Gleichungen (130) und (121) definierten periodischen Glieder P und P'. Aus (130) und (121) folgt

$$P - P' = M + S + \nu + e' + \varrho' - \Psi \cos\varepsilon_0 \tag{144a}$$

Geht man nun auf die auf S. 110 und 108 gegebene Bedeutung von ν und Ψ zurück und berücksichtigt, daß $\cos\varepsilon_0 = 0.92$ ist, so findet man daß $\nu - \Psi\cos\varepsilon_0$ absolut genommen kleiner als $2''$ ist. Was die übrigen in (144a) vorhandenen Glieder betrifft, so wurde schon oben bemerkt, daß $e' < 0''.4$ ist; hinzuzufügen ist jetzt nur noch, daß S sehr klein gegenüber M und ϱ' ist. Um also einen Überblick über den Verlauf der Zeitgleichung zu erhalten, kann man in (144) $P - P' = M + \varrho'$ setzen und außerdem das säkulare Glied vernachlässigen; damit ergibt sich als Näherungswert der Zeitgleichung $\frac{1}{15}(M + \varrho')$ oder, da ϱ' nur sehr wenig von dem durch die Gleichung (126) bestimmten ϱ verschieden ist, $\frac{1}{15}(M + \varrho)$. Dieser Ausdruck soll nun für das Jahr 1900 berechnet werden. Nach den *Newcomb*schen Sonnentafeln hat man für 1900, wenn g die mittlere Anomalie der Sonne bedeutet,

$$M = 6910'' \sin g + 72'' \sin 2g \tag{145}$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (126), wenn $B = 0$ gesetzt, und der für 1900.0 gültige Wert $\varepsilon = 23^\circ\,27'\,8''$ substituiert wird,

$$\varrho = -8886'' \sin 2\odot + 191'' \sin 4\odot \tag{145a}$$

Hier soll jetzt an Stelle der wahren Sonnenlänge $\odot$ die mittlere Anomalie der Sonne eingeführt werden. Zunächst folgt aus (128), wenn nach *Newcomb* die Länge des Sonnenperigäums für 1900.0, bezogen auf das mittlere Äquinox der Epoche 1900.0,

gleich $281^\circ 13'$ angenommen und demnach für die mittlere Länge der Sonne der Wert $L = 281^\circ 13' + g$ substituiert wird,

$$\odot = 281^\circ 13' + g + (\mathit{A}) + M + S + \nu$$

Aus der auf S. 110 gegebenen Bedeutung von (A) ergibt sich nun, daß (A) für das Jahr 1900 und auch für die diesem benachbarten Jahre sehr klein ist; vernachlässigt man deshalb (A) und auch noch S und ν, so erhält man $\odot = 281^\circ 13' + g + M$, oder wenn für M das Hauptglied des Ausdrucks (145) substituiert wird,

$$\odot = 281^\circ 13' + g + 6910'' \sin g$$

Setzt man jetzt $\cos(13820'' \sin g) = 1$, $\sin(13820'' \sin g) = 13820'' \sin 1'' \sin g$ und wendet die Formel

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) - \tfrac{1}{2}\sin(b-a)$$

an, so ergibt sich

$$\sin 2\odot = \sin(2g + 202^\circ 26') + 6910'' \sin 1'' \sin(3g + 202^\circ 26') - \\ - 6910'' \sin 1'' \sin(g + 202^\circ 26')$$

In derselben Weise folgt

$$\sin 4\odot = \sin(4g + 44^\circ 52') + 13820'' \sin 1'' \sin(5g + 44^\circ 52') - \\ - 13820'' \sin 1'' \sin(3g + 44^\circ 52')$$

Diese Ausdrücke sind in die Gleichung (145a) einzuführen. Mit Hilfe des damit erhaltenen Wertes von ϱ und unter Benutzung des in (145) für M angegebenen Ausdrucks ergibt sich für $\frac{1}{15}(M + \varrho)$ d. h. für den dem Jahre 1900 entsprechenden genäherten Wert (E) der Zeitgleichung

$$(146)\quad E = 442^s.4 \sin(g - 0^\circ 59') + 596^s.9 \sin(2g + 22^\circ 15') + 19^s.1 \sin(3g + 21^\circ 17') + \\ + 12^s.8 \sin(4g + 44^\circ 52') + 0^s.9 \sin(5g + 44^\circ 52')$$

Hierin ist nach *Newcomb*

$$g = 358^\circ 30'.8 + (1^\circ - 0'.86)\,d$$

zu setzen, wo d die seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in mittleren Tagen bedeutet.

Berechnet man mit Hilfe der Gleichung (146) die für die einzelnen Tage des Jahres 1900 und den mittleren Berliner Mittag gültigen Werte von E, so findet man, daß die Momente, in denen die Zeitgleichung gleich 0 ist, auf die Tage April 15, Juni 14, September 1 und Dezember 24 fallen; ferner ergibt sich, daß die Zeitgleichung vom Beginn des Jahres bis zu ihrem ersten Verschwinden positiv ist und bei jedem Durchgang durch den Nullpunkt das Vorzeichen wechselt. Daß die Formel (146) der Wahrheit schon ziemlich nahe kommt, ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung, in der die Zeitgleichung für je vier, den Epochen ihres Verschwindens, bzw. ihres Maximums naheliegende Zeiten mitgeteilt ist, und zwar 1. nach den im Berliner astronomischen Jahrbuch auf Grund der strengen Berechnung gemachten Angaben, 2. nach der mit Hilfe von (146) ausgeführten genäherten Rechnung.

Zeitgleichung im mittleren Mittage Berlin:

	April 15	Juni 14	Sept. 1	Dez. 25	Febr. 11	Mai 15	Juli 27	Nov. 3
Berl. Jahrb.	$+7^s.2$	$-5^s.1$	$+0^s.4$	$+7^s.6$	$+14^m27^s.2$	$-3^m49^s.5$	$+6^m17^s.2$	$-16^m20^s.4$
Formel (146)	$+6.8$	-3.9	$+0.1$	$+8.1$	$+14\ 27.5$	$-3\ 50.5$	$+6\ 17.8$	$-16\ 21.5$

38. Tropisches, siderisches, anomalistisches Jahr. Normalmeridian. Der Gleichung (132) zufolge hat man

$$L - k + (\Delta) = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.089\,t^2$$

Hierin bedeutet t die seit Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten; k bezeichnet die Aberrationskonstante und $L + (\Delta)$ die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das dieser Zeit entsprechende mittlere Äquinox. Das Zeitintervall, innerhalb dessen $L + (\Delta)$, also auch $L - k + (\Delta)$ um $360^\circ = 1\,296\,000''$ zunimmt, nennt man ein tropisches Jahr. Nun findet man durch Differentiation der vorigen Gleichung, daß die Änderung der mittleren Länge der Sonne in der Zeiteinheit, d. h. in einem julianischen Jahrhundert, gleich $129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t$ ist; somit ergibt sich für die Dauer des tropischen Jahres, ausgedrückt in Teilen eines julianischen Jahrhunderts, $1\,296\,000'' : 129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t$. Will man aber die Dauer des tropischen Jahres in mittleren Tagen ausgedrückt erhalten, so ist der letzte Bruch noch mit 36 525 zu multiplizieren; man erhält damit

(147) 1 tropisches Jahr $= [365.242\,198\,78 - 0.000\,006\,14\,t]$ mittlere Tage

Als Beginn des tropischen Jahres wählt man nach *Bessel* den Augenblick, in dem die vorhin mit $L - k + (\Delta)$ bezeichnete scheinbare mittlere Länge der Sonne gleich $280^\circ = 18^h 40^m$ ist; dieser Moment läßt sich in folgender Weise berechnen. Für 1900, Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin hat man, wenn $L - k + (\Delta) = L'$ gesetzt wird, $L' = 279^\circ 39' 15''.54 = 18^h 38^m 37^s.036$; wenn also $\Delta\tau$ die Zeit bedeutet, innerhalb deren L' um $1^m 22^s.964$ zunimmt, so bezeichnet Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin $+ \Delta\tau$ den Beginn des tropischen Jahres 1900. Da sich L' in einem mittleren Tage um

$$\frac{129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t}{36525} = 3^m 56^s.5554 + 0^s.000\,000\,397\,t$$

ändert, so wird, mit Vernachlässigung des minimalen, von t abhängigen Gliedes

$$\Delta\tau = \frac{1^m 22^s.964}{3\ 56.555} = 0.3507 \text{ mittlerer Tag}$$

Das tropische Jahr 1900 beginnt demnach um 1900, Januar 0.3507 m. Zt. Berlin.

Da die Dauer eines tropischen Jahres, der Gleichung (147) zufolge, gleich $365.242\,198\,78 - 0.000\,006\,14\,t$ mittlere Tage ist, so sind zu Beginn des tropischen Jahres 1901 seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin, im ganzen $0.3507 + 365.2422 =$ $= 365.5929$ mittlere Tage verflossen; das Jahr 1900 hat aber 365 Tage, somit fällt der Beginn des tropischen Jahres 1901 auf 1901, Januar 0.5929 m. Zt. Berlin. In derselben Weise läßt sich die mittlere Berliner Zeit zu Beginn der übrigen auf das Jahr 1900 folgenden, bzw. der ihm vorausgehenden tropischen Jahre berechnen; man

erhält so als mittlere Berliner Zeit des Anfangs der vier auf 1901 folgenden tropischen Jahre: 1902 Januar 0.8351, 1903 Jan. 1.0773, 1904 Jan. 1.3195, 1905 Jan. 0.5617.

Der Beginn eines tropischen Jahres ist seiner Definition nach ein absoluter Moment, d. h. der gleiche für die ganze Erde; wird also die diesem Moment entsprechende Berliner Zeit mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, und bedeutet l, wie oben, die westlich von Berlin positiv gerechnete Längendifferenz eines Ortes der Erde gegen den Meridian von Berlin, so fällt der Anfang des tropischen Jahres auf die Zeit $\mathfrak{T} - l$ des betreffenden Ortes. Beispielsweise würde der Beginn des tropischen Jahres 1905 — der, wie vorhin angegeben, auf 1905 Januar 0.5617 m. Zt. Berlin fällt — für einen $0^d.5617$ westlich von Berlin gelegenen Ort auf 1905 Januar 0, 0^h mittlere Ortszeit fallen.

Es soll jetzt der Begriff des Normalmeridians eingeführt werden. In einem Gemeinjahre versteht man darunter den Meridian der Erde, auf welchem man zu Beginn des tropischen Jahres Januar 0, 0^h mittlere Zeit zählt; in einem Schaltjahre dagegen wird derjenige Meridian der Normalmeridian genannt, für welchen der Anfang des tropischen Jahres mit dem mittleren Mittage Januar 1 zusammenfällt. Unter Benutzung der oben über die mittlere Berliner Zeit des Anfangs der tropischen Jahre 1900 bis 1905 gemachten Angaben findet man, daß der Normalmeridian im Jahre 1900 um $0^d.3507$, im Jahre 1901 um $0^d.5929$, in dem Schaltjahre 1904 um $0^d.3195$ und im Jahre 1905 um $0^d.5617$ westlich von Berlin liegt; der Normalmeridian nimmt also in jedem Jahre eine andere Lage auf der Erdoberfläche ein. Bezeichnet man nun die Länge von Berlin, bezogen auf den Normalmeridian, mit k', und wird k' positiv oder negativ gezählt, je nachdem Berlin westlich oder östlich vom Normalmeridian liegt, so entspricht der Berliner Zeit $\mathfrak{T}$ die Zeit $\mathfrak{T} + k'$ des Normalmeridians; für 1900 ist hier dem Vorhergehenden zufolge $k' = -0^d.3507$ zu setzen, für 1901 hat man $k' = -0^d.5929$ anzunehmen, usw. Wenn ferner die Längendifferenz irgend eines Ortes der Erde gegen Berlin wieder mit l bezeichnet und positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem der Ort westlich oder östlich von Berlin liegt, so ist die der Ortszeit Θ entsprechende Zeit des Normalmeridians gleich $\Theta + l + k'$. Umgekehrt ist die der Zeit T des Normalmeridians entsprechende Ortszeit gleich $T - l - k'$; verbindet man hiermit die oben gegebene Definition des Normalmeridians, so erhält man den Satz: Für einen Ort, dessen Längendifferenz gegen Berlin (l) in der vorhin festgesetzten Weise gezählt wird, ist die mittlere Ortszeit des Beginns eines tropischen Jahres gleich Januar $0.0 - l - k'$ in einem Gemein- und gleich Januar $1.0 - l - k'$ in einem Schaltjahre. Die Werte von k' findet man in den Tafeln zur theoretischen Astronomie von *J. Bauschinger* für die Jahre 1600 bis 2000 angegeben.

Außer von dem vorhin behandelten tropischen Jahre macht man noch von dem siderischen und dem anomalistischen Jahre Gebrauch. Unter einem siderischen Jahre versteht man das Zeitintervall, innerhalb dessen die auf ein festes Äquinox bezogene mittlere Länge der Sonne um 360° zunimmt. Um die Dauer eines siderischen Jahres zu finden, bilde man zunächst den Ausdruck für die scheinbare mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das mittlere Äquinox 1900.0; dieser ergibt

sich, indem man von dem in (132) für $L - k + (\mathcal{A})$ gegebenen Ausdruck den von *Newcomb* für $(\mathcal{A})$ angenommenen Wert subtrahiert. Man erhält so

$$L - k = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,597\,743''.20\,t - 0''.020\,t^2$$

Hieraus folgt, daß die Änderung, welche $L - k$, also auch L in einem julianischen Jahrhundert erfährt, gleich $129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$ ist. Die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in Teilen eines julianischen Jahrhunderts, ist demnach gleich $1\,296\,000'' : 129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$. Multipliziert man diesen Quotienten mit 36 525, so erhält man die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in mittleren Tagen, und zwar wird

(148) 1 siderisches Jahr $= (365.256\,360\,42 + 0.000\,000\,11\,t)$ mittlere Tage

Als anomalistisches Jahr bezeichnet man die Zeit, innerhalb deren die mittlere Anomalie der Sonne um 360° zunimmt. Nach *Newcomb* hat man

(149) 1 anomalistisches Jahr $= (365.259\,641\,34 + 0.000\,003\,04\,t)$ mittlere Tage.

Kapitel VI.

Berechnung der Kulminationszeit und der Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns.

39. Kulminationszeit. Für verschiedene Zwecke ist es notwendig, im voraus die mittlere Zeit der Kulmination eines Gestirns und auch die für diese Zeit gültige Rektaszension und Deklination des Gestirns zu kennen. Um an einem Beispiel zu zeigen, wie man zu dieser Kenntnis gelangt, soll zunächst für den Pariser Meridian die mittlere Zeit der auf den 5. April 1910 fallenden oberen Kulmination des Mondes berechnet werden; hierbei wird der in § 16 gefundene Satz benutzt, daß die Sternzeit der oberen Kulmination eines Gestirns gleich der Rektaszension des Gestirns zur Zeit der oberen Kulmination ist. Geht man nun in erster Näherung von der Annahme aus, daß die obere Kulmination des Mondes auf April 5, 12^h mittlerer Zeit Paris falle, so findet man mit Hilfe der in der Connaissance des Temps gegebenen Mondephemeride, daß die der oberen Kulmination entsprechende Rektaszension des Mondes also auch die Sternzeit seiner oberen Kulmination gleich $21^h 43^m$ ist. Da die Sternzeit im mittleren Mittage Paris für 1910 April 5 gleich $0^h 51^m 36^s.35$ ist, so kann man für die mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes in zweiter Näherung $21^h.7 - 0^h.9$ oder einfach 21^h annehmen. In der Connaissance des Temps findet man nun die folgenden Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes mitgeteilt: