universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel IV. Koordinaten

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

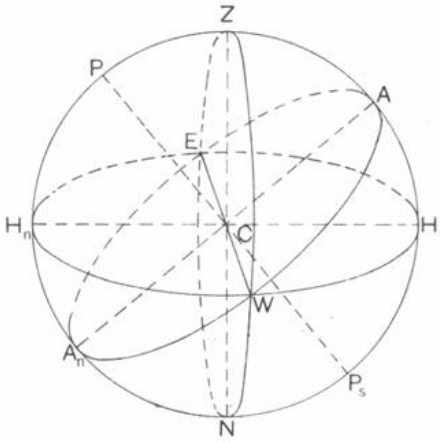
Kapitel IV.

Koordinaten.

14. Einleitung. Eine in dem Punkte C der freien Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit senkrecht zu dieser Oberfläche stehende Gerade schneidet die Himmelskugel in zwei Punkten, von denen der oberhalb der Flüssigkeit gelegene das Zenit und der diesem entgegengesetzte Punkt der Nadir von C genannt wird; die Gerade selbst bezeichnet man als Lotlinie oder auch als die Vertikale des Punktes C. Eine durch C senkrecht zur Lotlinie gelegte Ebene schneidet die Himmelskugel oder Sphäre, d. h. die um C mit einem unendlich großen Radius beschriebene Kugel in einem größten Kreise; diesen nennt man den Horizont von C.

In Fig. 1 sei nun C der Ort eines Beobachters, Z sei das Zenit, N der Nadir und HWH_nE der Horizont von C; ferner mögen P und P_s die Punkte bedeuten, in denen eine durch C parallel zur Rotationsachse der Erde gezogene Gerade (die sogenannte Weltachse) die Sphäre nach Norden, bzw. nach Süden hin schneidet. Legt man durch C senkrecht zur Weltachse eine Ebene, so schneidet diese die Himmelskugel längs eines größten Kreises AEA_nW, welcher der Himmelsäquator oder auch kurzweg der Äquator genannt wird; P nennt man den Nordpol des Himmelsäquators oder einfach den Pol. Von P aus gesehen, erfolgt die Drehung der Erde in der Richtung von rechts nach links, also von W über A nach E hin.

Fig. 1.



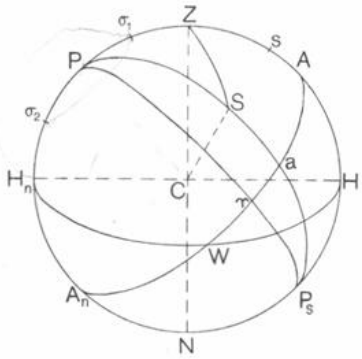
Unter der Polhöhe des Ortes C wird der spitze Winkel verstanden, welchen die von C zum sichtbaren Pole des Himmelsäquators gehende Richtung mit dem Horizont bildet; man rechnet die Polhöhe positiv, wenn der Nordpol des Himmelsäquators über dem Horizont liegt, negativ, wenn der Südpol über dem Horizont liegt. In Fig. 1 ist demnach die Polhöhe positiv und gleich dem Winkel PCH_n oder gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen H_nP; die Polhöhe ist auch noch gleich dem Winkel ZCA, bzw. gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen AZ. Wäre N das Zenit und Z der Nadir des Ortes C, so würde die Polhöhe von C negativ und gleich $-P_sCH$ sein. Aus der Definition der Polhöhe geht hervor, daß letztere denselben Wert hat wie die geographische Breite.

Die Ebene, in der die Lotlinie ZN und die Weltachse PP_s liegen, schneidet die Sphäre in dem größten Kreise PZP_sH_n; dieser wird der dem Punkte C entsprechende Himmelsmeridian oder kürzer der Meridian des Punktes C genannt.

Die Ebene des Meridians steht senkrecht zu den Ebenen des Horizonts und des Himmelsäquators, folglich auch senkrecht zu ihrer Durchschnittslinie EW; legt man also durch diese Durchschnittslinie und das Zenit Z eine Ebene, so schneidet diese die Himmelskugel in einem größten Kreise $ZENW$, welcher senkrecht zu dem Meridian PZP_sH_n steht. Dieser größte Kreis wird der erste Vertikal des Ortes C genannt. Da die Drehung der Erde in der Richtung WAE erfolgt, so findet die scheinbare oder die sogenannte tägliche Bewegung der Sterne in der umgekehrten Richtung statt. Der Punkt E, in dem ein im Äquator befindlicher Stern sich über den Horizont erhebt, heißt der Ostpunkt des Horizonts; den Punkt W nennt man den Westpunkt des Horizonts. Von den Durchschnittspunkten H_n und H des Horizonts mit dem Meridian wird der dem Nordpol zunächst gelegene (H_n) der Nordpunkt, der andere der Südpunkt des Horizonts genannt. Die vier zuletzt erwähnten Punkte zusammengenommen bezeichnet man als die Kardinalpunkte des Horizonts. Da der Meridian, der erste Vertikal und der Horizont senkrecht zueinander stehen, so sind je zwei benachbarte Kardinalpunkte, von C aus gesehen, um 90° voneinander entfernt; dasselbe gilt von den Punkten E, A_n, W, A.

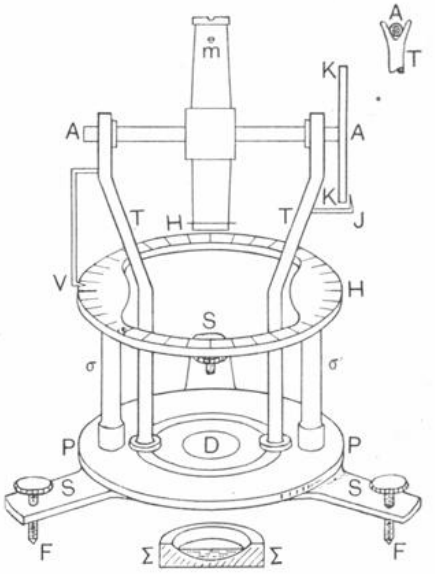
15. Koordinaten, bezogen auf den Horizont. In Fig. 2 mögen C, HH_n, AA_n, Z, N, P, P_s und W dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 1, ferner sei S der Punkt, in welchem die von C zu einem Stern hin gehende Richtung die Sphäre schneidet; man bezeichnet dann den Winkel ZCS oder den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen ZS als die Zenitdistanz und den sphärischen Winkel HZS, gerechnet von dem durch das Zenit und den Südpunkt des Horizonts gehenden Bogen ZH aus in der Richtung nach Westen hin, als das Azimut des Sterns. Die Zenitdistanz wird von 0° bis 180° und das Azimut von 0° bis 360° gezählt. Zur Bestimmung der Zenitdistanz und des Azimuts eines Sterns bedient man sich eines Universalinstruments. Die wesentlichsten Teile dieses Instruments sind die folgenden. Zwei Träger T, T (Fig. 3) endigen oben in zwei gabelförmige Lager (Fig 3[a]), welche zur Aufnahme der Achse AA dienen. Senkrecht zu dieser Achse ist das Fernrohr und ein in Grade und Minuten eingeteilter Kreis KK befestigt; zur Ablesung dieses Kreises dient ein ihm gegenüber befindlicher Index J, welcher mit dem einen der Träger T fest verbunden ist. Die unteren Enden der Träger tauchen in eine kreisförmige Nut der massiven Grundplatte PP ein und sind oberhalb der Nut scheibenförmig verbreitert. Infolge dieser Anordnung lassen sich die Träger samt den an ihnen befestigten Teilen um eine ideale, zur Grundplatte senkrechte Achse drehen. Parallel zur Grundplatte und durch die Stützen $\sigma\sigma$ fest mit ihr verbunden befindet sich der in Grade und Minuten eingeteilte Kreis HH; dieser wird mit Hilfe eines unmittelbar über ihm gelegenen, an einem der Träger T befestigten Index V abgelesen. An der Grundplatte PP sind drei an ihren äußeren Enden durchbohrte und mit Muttergewinden

Fig. 2.



versehene Ansätze S angebracht, in welche sich die unten zugespitzten Füße F einschrauben lassen. Mit diesen Füßen wird das Instrument auf einen isolierten Pfeiler aufgesetzt, und zwar so, daß die Achse AA eine horizontale Lage einnimmt; dies läßt sich, mit Benutzung einer auf AA aufgesetzten Libelle, durch Drehung der das obere Ende der Füße F bildenden Schraubenköpfe bewirken. Auf dem Pfeiler, und zwar unterhalb der in der Mitte der Grundplatte PP frei gelassenen Öffnung D, stellt man eine mit Quecksilber gefüllte Schale $\Sigma\Sigma$ auf. Richtet man das Fernrohr auf das Quecksilber, so sieht man außer einer im Brennpunkte des Objektivs angebrachten Marke m auch ihr Spiegelbild; werden diese beiden Bilder durch Drehung des Fernrohrs um die Achse AA zur Deckung gebracht, so steht die durch die Marke und den Mittelpunkt des Objektivs gehende Gerade senkrecht zur Oberfläche des Quecksilbers und stellt also die Lotlinie dar. Die dieser Stellung des Fernrohrs entsprechende Ablesung des Kreises KK gibt den Nadirpunkt dieses Kreises an; legt man zu der betreffenden Ablesung 180° hinzu, so erhält man den Zenitpunkt des Kreises. Nachdem man den Zenithpunkt bestimmt hat, richte man das Fernrohr auf einen Stern und lasse dessen Bild mit der Marke m zusammenfallen; wird dann die in dieser Lage des Fernrohrs erhaltene Ablesung des Kreises KK mit L bezeichnet, und bedeutet L_0 die dem Zenitpunkte des Kreises entsprechende Ablesung, so ist die Zenitdistanz des Sterns gleich $L - L_0$, vorausgesetzt, daß die Ablesung des Kreises zunimmt, wenn das Fernrohr vom Zenit zum Stern hin bewegt wird. Im entgegengesetzten Falle ist die Zenitdistanz gleich $L_0 - L$.

Fig. 3. Fig. 3a.



Um das Azimut eines Sterns zu erhalten, muß man zunächst die Richtung des Meridians bestimmen; diese läßt sich in folgender Weise finden. Man richtet das Fernrohr auf einen dem Äquator nahen Stern, der noch einige Stunden von seinem Durchgang durch den Meridian entfernt ist, läßt das Bild des Sterns mit der Marke m zusammenfallen und liest dann an dem Index V den Horizontalkreis HH ab. Indem nun die Neigung des Fernrohrs gegen den Horizont ungeändert gelassen wird, dreht man die Träger TT um die ideale zur Grundplatte PP senkrechte Achse, und zwar so lange, bis daß der Stern — nachdem er den Meridian passiert hat — wieder mit der Marke m zusammenfällt; in dieser Stellung liest man abermals den Horizontalkreis ab. Das Mittel aus den beiden Ablesungen des Horizontalkreises gibt dann die Ablesung, welche man machen wird, wenn sich das Fernrohr in der Ebene des Meridians befindet; diese Ablesung, die der Meridianpunkt des Kreises HH genannt wird, möge mit $\mathfrak{A}_m$ bezeichnet werden. Ist jetzt $\mathfrak{A}$ die Ablesung des Horizontalkreises, wenn das Fernrohr auf irgend einen Stern gerichtet ist, und nimmt die Ab-

lesung dieses Kreises zu, wenn man das Fernrohr von Süden nach Westen hin dreht, so gibt $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_m$ das Azimut des Sterns an.

Mit Hilfe eines Universalinstruments kann man ferner die Polhöhe des Beobachtungsorts finden. Zu diesem Zweck dreht man den Träger TT so weit, daß der Index V des Horizontalkreises auf den Meridianpunkt dieses Kreises zeigt, und klemmt den Träger fest; das Fernrohr kann sich dann also nur in der Ebene des Meridians bewegen. Man wählt nun einen Stern aus, der stets oberhalb des Horizonts bleibt, dessen Abstand vom Pol also kleiner als der Bogen PH_n in Fig. 2 d. h. kleiner als die Polhöhe des Beobachtungsorts ist; einen solchen Stern nennt man einen Zirkumpolarstern. Es seien σ_1 und σ_2 (Fig. 2) die beiden Punkte, in denen ein bestimmter Zirkumpolarstern den Meridian passiert. Ist der Stern in σ_1 angekommen, liegt er also in der das Zenit enthaltenden Hälfte (PZP_s) des Meridians, so sagt man, der Stern befinde sich in oberer Kulmination; der Durchgang des Sterns durch die andere Hälfte des Meridians wird als untere Kulmination bezeichnet. Beobachtet man nun die der oberen und unteren Kulmination eines Sterns entsprechenden Zenitdistanzen $Z\sigma_1$ und $Z\sigma_2$ und nimmt das Mittel aus ihnen, so erhält man den Bogen ZP. Das Komplement von ZP ist die Polhöhe.

16. Koordinaten, bezogen auf den Äquator und die Ekliptik. Nachdem man die Polhöhe gefunden hat, kann man aus der zur Zeit der oberen oder unteren Kulmination beobachteten Zenitdistanz eines beliebigen Sterns die Poldistanz desselben ableiten. Aus Fig. 2 folgt nämlich für einen Stern, der sich zur Zeit seiner oberen Kulmination in σ_1, also nördlich vom Zenit befindet, $P\sigma_1 = ZP - Z\sigma_1$ oder, wenn die Polhöhe des Beobachtungsortes mit φ, ferner die Poldistanz des Sterns mit p und seine Zenitdistanz in der oberen Kulmination mit ζ_o bezeichnet wird, $p = 90^\circ - \varphi - \zeta_o$. Das Komplement von p oder den Abstand des Sterns vom Äquator nennt man die Deklination des Sterns; dieselbe wird vom Äquator aus von 0° bis $\pm 90^\circ$ gerechnet, und zwar positiv, wenn der Stern auf derselben Seite des Äquators liegt wie der Nordpol. Bezeichnet man die Deklination mit δ, so folgt aus der vorhin für p erhaltenen Gleichung, daß für einen Stern, dessen obere Kulmination nördlich vom Zenit stattfindet, $\delta = \varphi + \zeta_o$ ist. Für einen Stern dagegen, der südlich vom Zenit, beispielsweise im Punkte s (Fig. 2) kulminiert, hat man $Ps = PZ + Zs$ oder, wenn auch hier $Ps = p$, $Zs = \zeta_o$ gesetzt wird, $p = 90^\circ - \varphi + \zeta_o$; mit Anwendung der vorigen Bezeichnung $90^\circ - p = \delta$ ergibt sich somit für die Deklination des Sterns $\delta = \varphi - \zeta_o$. Rechnet man aber die im Meridian gemessenen Zenitdistanzen negativ, wenn der Stern südlich vom Zenit kulminiert, so ist die letzte Gleichung durch

$$\delta = \varphi + \zeta_o \tag{1}$$

zu ersetzen; man erhält also dieselbe Gleichung, welche vorhin für den Fall gefunden wurde, daß die obere Kulmination eines Sterns nördlich vom Zenit stattfindet.

Um für die untere Kulmination eine der Gleichung (1) analoge Formel abzuleiten, berücksichtige man, daß, wenn σ_2 (Fig. 2) den Ort eines Sterns zur Zeit seiner unteren

Kulmination bedeutet, die Poldistanz $P\sigma_2 = Z\sigma_2 - ZP$ ist. Setzt man jetzt $P\sigma_2 = p$ und $Z\sigma_2 = \zeta_u$, so folgt $p = \zeta_u - (90^\circ - \varphi)$ und demnach

$$\delta = 180^\circ - (\varphi + \zeta_u) \tag{2}$$

Es werde jetzt angenommen, daß man die Deklination des Sterns S (Fig. 2), also den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen Sa des durch die Pole des Äquators und den Stern gehenden größten Kreises (des sogenannten Deklinationskreises des Sterns) bestimmt habe. Kann man nun auch noch den sphärischen Winkel bestimmen, welchen der durch den Stern gehende Halbmeridian PSP_s mit einem durch einen fixen Punkt des Äquators gehenden Halbmeridian $P\gamma P_s$ bildet, so hat man damit den Ort des Sterns am Himmel festgelegt. Die erste, hier zu lösende Aufgabe besteht darin, den Punkt des Äquators zu definieren, welcher als Fixpunkt dienen soll. Zu diesem Zwecke denke man sich zunächst durch den mit C bezeichneten Ort des Beobachters eine Ebene gelegt, welche parallel zu derjenigen der Erdbahn ist; diese schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise*), den man die Ekliptik nennt. Die Ekliptik stellt also auch die Bahn dar, welche die Sonne im Laufe eines Jahres an der Himmelskugel scheinbar durchläuft. Da die Ekliptik und der Äquator größte Kreise der Sphäre sind, so liegen ihre Durchschnittspunkte auf einem Durchmesser der Sphäre; diese Punkte bezeichnet man als Äquinoktial- und die um 90° von ihnen entfernten Punkte der Ekliptik als Solstitialpunkte. In ihrer scheinbaren Bewegung an der Himmelskugel passiert die Sonne den einen der Äquinoktialpunkte im Frühling, den anderen im Herbst; im ersten Falle geht die Deklination der Sonne von negativen Werten zu positiven über, im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Den Frühlingsäquinoktialpunkt, welcher in Fig. 2 mit γ bezeichnet ist, wählt man nun als Fixpunkt des Äquators. Der von dem Halbmeridian $P\gamma P_s$ aus in der Richtung der Drehung der Erde, also von Westen nach Osten gezählte Winkel γPS oder der diesem Winkel gleiche Bogen γa wird die Rektaszension des Sterns S genannt. Man zählt die Rektaszension von 0° bis 360° oder — indem man den Kreis, statt in 360 Grade, in 24 Stunden teilt — von 0^h bis 24^h.

Ehe das Verfahren, die Rektaszension eines Sterns zu bestimmen, auseinandergesetzt wird, mögen noch einige weitere Begriffe erläutert werden. Den Winkel ZPS, den der durch den Pol und den Stern gelegte Bogen größten Kreises mit dem das Zenit des Beobachtungsortes enthaltenden Halbmeridian PZP_s bildet, nennt man den Stundenwinkel des Sterns; derselbe wird von dem Halbmeridian PZP_s aus nach Westen hin von 0° bis 360° oder von 0^h bis 24^h gezählt. Da alle auf der Hälfte PSP_s eines Deklinationskreises gelegenen Sterne denselben Stundenwinkel haben, so bezeichnet man einen solchen Halbkreis auch als Stundenkreis. Wie aus Fig. 2 erhellt, entspricht der Stundenwinkel 0° oder 0^h der oberen, und der Stundenwinkel 180°, bzw. 12^h der unteren Kulmination des Sterns. Den Stundenwinkel des Frühlingsäquinoktialpunktes, also den Winkel $ZP\gamma$, bezeichnet man als Sternzeit; letztere kann man auch als die Rektaszension des Zenits definieren. Wird die Sternzeit

*) In Fig. 2 nicht gezeichnet.

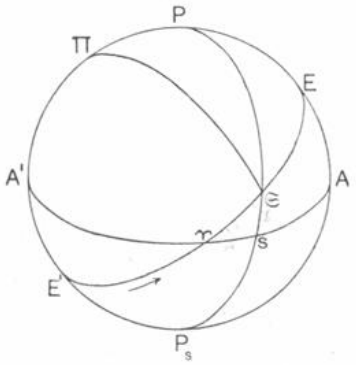
mit ϑ, der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit ϑ mit t und die Rektaszension des Sterns mit α bezeichnet, so folgt aus Fig. 2, daß

$$t = \vartheta - \alpha \tag{3}$$

ist. Diese Gleichung lehrt, daß, wenn $t = 0$ ist, d. h. wenn sich der Stern in oberer Kulmination befindet, $\vartheta = \alpha$ wird; die Sternzeit der oberen Kulmination eines Sterns ist also gleich der Rektaszension des Sterns. Ferner ergibt sich, daß die Sternzeit der unteren Kulmination eines Sterns gleich $\alpha + 12^h$ ist, und daß die Differenz der Sternzeiten, zu denen zwei verschiedene Sterne den Meridian in oberer oder unterer Kulmination passieren, zugleich die Rektaszensionsdifferenz dieser Sterne darstellt.

Es soll nun das zur Bestimmung der Rektaszension eines Sterns dienende Verfahren erläutert werden. Man beginnt damit, die Rektaszension der Sonne zu bestimmen. In Fig. 4 sei AA' der Äquator, EE' die Ekliptik, γ der Frühlingsäquinoktialpunkt, P und P_s seien die Pole des Äquators, Π sei der Nordpol der Ekliptik. Ist $\mathfrak{S}$ der für irgend eine Zeit T gültige Ort der Sonne, und bedeutet s den Punkt, in dem der Stundenkreis der Sonne den Äquator schneidet, so ist der Winkel γPs oder der in Teilen des Radius ausgedrückte Bogen γs gleich der Rektaszension, und der Bogen $s\mathfrak{S}$ gleich der Deklination der Sonne zur Zeit T. Wird jetzt $\gamma s = \mathfrak{A}$, $s\mathfrak{S} = \mathfrak{D}$ und $A\gamma E = \varepsilon$ gesetzt, so folgt aus dem bei s rechtwinkligen Dreieck $\gamma\mathfrak{S}s$

Fig. 4.



$$\sin \mathfrak{A} = \operatorname{tang} \mathfrak{D} \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{4}$$

Den Winkel ε, der die Neigung der Ekliptik gegen den Äquator angibt, bezeichnet man als die Schiefe der Ekliptik; ist diese Schiefe bekannt, so kann man, mit Hilfe der vorigen Gleichung, aus einer beobachteten Deklination der Sonne ihre Rektaszension berechnen. Um aber ε zu finden, mache man die folgende Überlegung. Da P und Π Pole des Äquators, bzw. der Ekliptik sind, so ist der mit γ bezeichnete Durchschnittspunkt des Äquators und der Ekliptik ein Pol des größten Kreises ΠPA; daraus folgt, daß ε auch gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen AE ist. Nun gibt AE die größte nördliche Deklination der Sonne an; diese aber läßt sich ermitteln, wenn man auf einer nördlich gelegenen Sternwarte den Sommer hindurch Tag für Tag die Zenitdistanz der Sonne im Meridian bestimmt und aus der Zenitdistanz in Verbindung mit der Polhöhe des Beobachtungsortes die zugehörige Deklination ableitet. Für 1908 Juni 19 bis Juni 23 beispielsweise war die Deklination der Sonne zur Zeit ihrer Kulmination im Meridian von Paris:

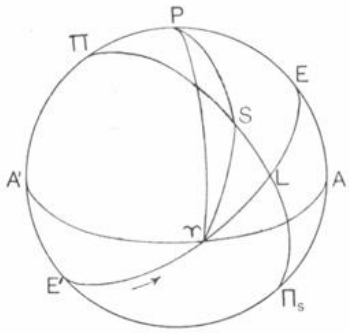
Juni 19	+ 23° 25′ 54″	Juni 22	+ 23° 26′ 57″
20	26 40	23	23 26 29
21	27 1		

Wählt man nun die Beobachtungstage als Abszissen und die zugehörigen Deklinationen der Sonne als Ordinaten und legt dann durch die Endpunkte der Ordinaten eine Kurve hindurch, so gibt diese für das Maximum der Deklination den Wert $+ 23^\circ 27' 2''$. Dies ist also der gesuchte Wert von ε.

Es werde jetzt angenommen, daß man am 4. April 1908 in Paris die Sonne im Meridian beobachtet und für ihre Deklination den Wert $\mathfrak{D} = + 5^\circ 38' 45''$ gefunden habe; substituiert man diesen und den vorhin für ε erhaltenen Wert in die Gleichung (4), so ergibt sich für die Rektaszension der Sonne $\mathfrak{A} = 13^\circ 10' 24'' = 0^h 52^m 41^s.6$. Dem oben Gesagten zufolge ist aber die Sternzeit der oberen Kulmination eines Gestirns gleich der Rektaszension des betreffenden Gestirns. Wenn demnach am 4. April 1908 außer der Deklination der Sonne auch die Zeit ihres Durchganges durch den Pariser Meridian beobachtet worden ist, und die Uhr hierfür etwa $0^h 52^m 30^s.0$ angegeben hat, so ist die Reduktion der Uhrzeit auf Sternzeit gleich $+ 11^s.6$. Diese Reduktion oder Uhrkorrektion gilt zwar zunächst nur für $0^h 52^m.5$ Uhrzeit; hat man aber die Uhr so reguliert, daß sie bei zwei aufeinanderfolgenden oberen oder unteren Kulminationen eines Fixsterns dieselbe Zeit zeigt, und daß demnach 24 Uhrstunden gleich 24 Stunden Sternzeit sind, so ist die vorhin gefundene Uhrkorrektion für einen ganzen Tag gültig. Man nehme nun an, daß man am 4. April 1908 auch noch die Zeit der oberen Kulmination von α Tauri beobachtet habe, und daß die Uhr in diesem Momente $4^h 30^m 25^s.6$ zeigte; mit Berücksichtigung der Uhrkorrektion $+ 11^s.6$ ergibt sich dann für die Sternzeit der Kulmination also auch für die Rektaszension von α Tauri $4^h 30^m 25^s.6 + 11^s.6 = 4^h 30^m 37^s.2$. Nachdem man so die Rektaszension von α Tauri gefunden hat, läßt sich auch die Rektaszension eines beliebigen anderen Sterns bestimmen. Zu diesem Zweck beobachtet man an einer nach Sternzeit regulierten Uhr die Zeiten, zu denen α Tauri und der zu bestimmende Stern den Meridian passieren. Die Differenz zwischen diesen Durchgangszeiten ist, wie oben gezeigt wurde, gleich der Rektaszensionsdifferenz der beiden Sterne; da die Rektaszension von α Tauri bekannt ist, so ergibt sich ohne weiteres die Rektaszension des zweiten Sterns.

Der Ort eines Sterns läßt sich auch in bezug auf die Ekliptik festlegen. Wenn nämlich in Fig. 5 EE' die Ekliptik, AA' den Äquator, Π den Nordpol der Ekliptik, Π_s ihren Südpol, P den Nordpol des Äquators, Υ den Frühlingsäquinoktialpunkt, S den Ort eines Sterns und L den Punkt bedeutet, in dem der durch die Pole der Ekliptik und den Stern gehende Halbkreis die Ekliptik schneidet, so ist die Lage von S bestimmt, wenn man 1. den von $\Pi\Upsilon$ aus in der Richtung der Drehung der Erde gerechneten Winkel $\Upsilon\Pi L$ oder die sogenannte Länge des Sterns und 2. den Abstand SL des Sterns von der Ekliptik oder die sogenannte Breite des Sterns kennt. Die Länge zählt man von 0° bis 360° und die Breite von 0° bis $\pm 90^\circ$; die Breite wird positiv gerechnet, wenn sich der Stern auf derselben Seite der Ekliptik befindet wie der Nordpol der Ekliptik. Die Länge und Breite eines Sterns leitet man durch Rechnung aus der

Fig. 5.



Rektaszension und Deklination ab; die hierzu dienenden Formeln werden in § 18 mitgeteilt werden. Den durch die Pole der Ekliptik und einen Stern gehenden größten Kreis nennt man den Breitenkreis des Sterns; der Breitenkreis der Äquinoktialpunkte wird der Kolur der Nachtgleichen, der Breitenkreis der Solstitialpunkte wird der Kolur der Sonnenwenden genannt.

17. Berechnung der Zenitdistanz und des Azimuts eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Parallaktischer Winkel. Es sei φ die Polhöhe und ϑ die Sternzeit des Ortes, für welchen die Zenitdistanz und das Azimut eines Sterns gesucht werden; ferner sei α die Rektaszension, t der Stundenwinkel, δ die Deklination, ζ die Zenitdistanz und A das Azimut des Sterns. In dem sphärischen Dreieck PZS (Fig. 2), wo P den Pol des Äquators, Z das Zenit und S den Ort des Sterns an der Himmelskugel bedeutet, ist dann $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$, $ZS = \zeta$, $ZPS = t = \vartheta - \alpha$ und $PZS = 180^\circ - A$. Mit Hilfe der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie erhält man also

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin A &= \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \\ \cos\zeta &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \end{aligned}$$

Für die numerische Auflösung dieser Gleichungen bedient man sich mit Vorteil der Additions- und Subtraktionslogarithmen; will man diese aber nicht benutzen, so setze man

$$\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin\delta \\ \sin m \cos M &= \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha), \end{aligned} \tag{5}$$

es wird dann

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin A &= \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos A &= \sin m \sin(\varphi - M) \\ \cos\zeta &= \sin m \cos(\varphi - M) \end{aligned} \tag{6}$$

Den Winkel PSZ zwischen dem Deklinations- und dem Vertikalkreise des Sterns nennt man den parallaktischen Winkel; wird dieser mit q bezeichnet, so folgt aus dem Dreieck PSZ

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin q &= \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos q &= \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos(\vartheta - \alpha) \\ \cos\zeta &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \end{aligned}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} \sin n \sin N &= \cos\varphi \cos(\vartheta - \alpha) \\ \sin n \cos N &= \sin\varphi \\ \cos n &= \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \end{aligned} \tag{7}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin q &= \cos n \\ \sin\zeta \cos q &= \sin n \cos(N + \delta) \\ \cos\zeta &= \sin n \sin(N + \delta) \end{aligned} \tag{8}$$

Dividiert man die beiden ersten der Gleichungen (8) durch die dritte, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\zeta \sin q &= \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + \delta)} \\ \operatorname{tang}\zeta \cos q &= \operatorname{cotg}(N + \delta) \end{aligned} \tag{9}$$

18. Berechnung der Länge und Breite eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Winkel zwischen Breiten- und Deklinationskreis eines Sterns. Es sei α die Rektaszension und λ die Länge des Sterns S in Fig. 5, man hat dann $\gamma PS = \alpha$ und $\gamma \Pi S = \lambda$. Da nun der mit γ bezeichnete Frühlingsäquinoktialpunkt ein Pol des durch Π und P gehenden größten Kreises ist, so stehen die Bögen $\gamma \Pi$ und γP senkrecht zu ΠP. In dem sphärischen Dreieck ΠPS ist demnach der Winkel bei P gleich $90^\circ + \alpha$ und der Winkel bei Π gleich $90^\circ - \lambda$. Bedeutet ferner δ die Deklination des Sterns, β seine Breite und ε die Schiefe der Ekliptik, so ist $PS = 90^\circ - \delta$, $\Pi S = 90^\circ - \beta$ und $\Pi P = \varepsilon$. Die Anwendung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf das Dreieck ΠPS gibt also

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\lambda &= \sin\varepsilon \sin\delta + \cos\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha \\ \sin\beta &= \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} f \sin F &= \sin\delta \\ f \cos F &= \cos\delta \sin\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

so werden die vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\lambda &= f \cos(F - \varepsilon) \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha \\ \sin\beta &= f \sin(F - \varepsilon) \end{aligned} \tag{11}$$

In der zweiten dieser Gleichungen kann man $\cos\delta \cos\alpha = \cos\delta \sin\alpha \operatorname{cotg}\alpha = f \cos F \operatorname{cotg}\alpha$ setzen; dividiert man dann die beiden ersten Gleichungen durch die dritte, so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\beta \sin\lambda &= \operatorname{cotg}(F - \varepsilon) \\ \operatorname{cotg}\beta \cos\lambda &= \frac{\cos F}{\sin(F - \varepsilon) \operatorname{tang}\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

Es läßt sich nun auch leicht der Winkel ΠSP zwischen dem Breiten- und Deklinationskreise des Sterns S berechnen; bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit $\varkappa$ und den Winkel $\gamma S \Pi$ mit y, setzt man ferner $\gamma S = h$ und berücksichtigt, daß $\gamma \Pi = \gamma P = 90^\circ$ ist, so erhält man aus den Dreiecken $\gamma S \Pi$ und γSP

$$\begin{aligned} \sin h \sin y &= \sin\lambda & \sin h \sin(y + \varkappa) &= \sin\alpha \\ \sin h \cos y &= -\cos\lambda \sin\beta & \sin h \cos(y + \varkappa) &= -\cos\alpha \sin\delta \end{aligned} \tag{13}$$

Die Werte von λ, β und $\varkappa$ kann man auch noch auf andere Weise finden. Wendet man nämlich die *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck ΠPS (Fig. 5) an und setzt $90^\circ - \beta = B$, $90^\circ - \varkappa = K$, $90^\circ + \alpha = A$, $90^\circ - \varepsilon = E$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(K - \lambda) &= \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(E - \delta) \\ \sin\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(K - \lambda) &= \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}(E + \delta) \\ \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(K + \lambda) &= \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(E + \delta) \\ \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(K + \lambda) &= \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}(E - \delta) \end{aligned} \tag{14}$$

Von diesen Gleichungen kann man Gebrauch machen, um die mit Hilfe von (10), (11) und (13), bzw. von (10), (12) und (13) berechneten Werte von λ, β und $\varkappa$ zu kontrollieren.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die Änderungen berechnen zu können, welche λ und β erfahren, wenn α, δ, ε durch $\alpha + d\alpha$, $\delta + d\delta$, $\varepsilon + d\varepsilon$ ersetzt werden. Diese Änderungen ergeben sich durch Anwendung der Differentialformeln § 13, (20) und (17^2):

$$\begin{aligned} \sin a dB &= -\sin b \cos C dA + \sin C db - \sin B \cos a dc \\ da &= \sin b \sin C dA + \cos C db + \cos B dc \end{aligned}$$

auf das Dreieck ΠPS, und zwar erhält man

$$(15) \qquad \begin{aligned} \cos\beta d\lambda &= -\cos\delta \cos\varkappa d\alpha + \sin\varkappa d\delta + \cos\lambda \sin\beta d\varepsilon \\ d\beta &= -\cos\delta \sin\varkappa d\alpha + \cos\varkappa d\delta - \sin\lambda d\varepsilon \end{aligned}$$

19. Verwandlung der Länge und Breite in Rektaszension und Deklination. Unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen angewandten Bezeichnungen gibt das Dreieck ΠPS (Fig. 5)

$$(15^a) \qquad \begin{aligned} \cos\delta \sin\alpha &= -\sin\varepsilon \sin\beta + \cos\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \sin\delta &= \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \end{aligned}$$

Wird jetzt

$$(16) \qquad \begin{aligned} g \sin G &= \sin\beta \\ g \cos G &= \cos\beta \sin\lambda \end{aligned}$$

gesetzt, so folgt

$$(17) \qquad \begin{aligned} \cos\delta \sin\alpha &= g \cos(G + \varepsilon) \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \sin\delta &= g \sin(G + \varepsilon) \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung (17) kann man $\cos\beta \cos\lambda = \cos\beta \sin\lambda \operatorname{cotg}\lambda = g \cos G \operatorname{cotg}\lambda$ setzen; dividiert man dann die beiden ersten Gleichungen durch die dritte, so erhält man

$$(18) \qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg}\delta \sin\alpha &= \operatorname{cotg}(G + \varepsilon) \\ \operatorname{cotg}\delta \cos\alpha &= \frac{\cos G}{\sin(G + \varepsilon) \operatorname{tang}\lambda} \end{aligned}$$

Um noch andere Formeln zur Berechnung von α und δ zu erhalten, wende man die *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck ΠPS an. Wird der Winkel ΠSP wieder mit $\varkappa$ bezeichnet und $90^\circ - \delta = D$, $90^\circ - \varkappa = K$, $90^\circ + \lambda = L$, $90^\circ - \varepsilon = E$ gesetzt, so folgt

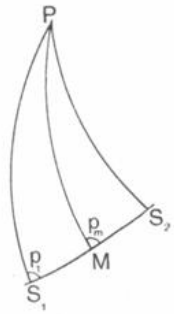
$$(19) \qquad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(K + \alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}L \sin\tfrac{1}{2}(E - \beta) \\ \sin\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(K + \alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}L \cos\tfrac{1}{2}(E + \beta) \\ \cos\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(K - \alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}L \sin\tfrac{1}{2}(E + \beta) \\ \cos\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(K - \alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}L \cos\tfrac{1}{2}(E - \beta) \end{aligned}$$

Mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angegebenen Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie findet man für die Änderungen, welche α und δ erfahren, wenn die angenommenen Werte von λ, β und ε um $d\lambda$, $d\beta$ und $d\varepsilon$ korrigiert werden,

$$(20) \qquad \begin{aligned} \cos\delta d\alpha &= \cos\beta \cos\varkappa d\lambda - \sin\varkappa d\beta - \cos\alpha \sin\delta d\varepsilon \\ d\delta &= \cos\beta \sin\varkappa d\lambda + \cos\varkappa d\beta + \sin\alpha d\varepsilon \end{aligned}$$

20. Positionswinkel und Distanz. Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes eines zwei Sterne verbindenden Bogens größten Kreises. In Fig. 6 sei P der Nordpol des Äquators, S_1 und S_2 seien zwei Sterne, deren Deklination mit δ_1, bzw. δ_2 und deren Rektaszensionen mit α_1, bzw. α_2 bezeichnet werden mögen. Den Winkel nun, um den man S_1P in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen drehen muß, damit S_1P mit S_1S_2 zusammenfalle, nennt man den Positionswinkel des Sterns S_2 in bezug auf S_1; ist also $\alpha_2 > \alpha_1$, so ist der Positionswinkel von S_2 in bezug auf S_1 gleich PS_1S_2 und der Positionswinkel von S_1 in bezug auf S_2 gleich $360^\circ - PS_2S_1$. Man setze jetzt $PS_1S_2 = p_1$ und den Bogen S_1S_2 oder die Distanz der beiden Sterne gleich $\varDelta$; aus dem Dreiecke PS_1S_2 folgt dann

Fig. 6.



$$(21)\quad \begin{aligned} \sin\varDelta \sin p_1 &= \cos\delta_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \sin\varDelta \cos p_1 &= \sin\delta_2 \cos\delta_1 - \cos\delta_2 \sin\delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich $\varDelta$ und p_1 berechnen. Es möge nun M den Mittelpunkt des Bogens S_1S_2 bedeuten, und demnach $S_1M = \frac{1}{2}\varDelta$ sein, ferner sei α_m die Rektaszension, δ_m die Deklination von M und p_m der Positionswinkel von S_2 in bezug auf M; setzt man dann $\alpha_m = \alpha_1 + d\alpha$, $90^\circ - \delta_m = D_m$ und $90^\circ - \delta_1 = D_1$, so ist der Winkel $S_1PM = d\alpha$ und der Winkel $PMS_1 = 180^\circ - p_m$, ferner $PM = D_m$, $PS_1 = D_1$. Durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck PS_1M erhält man also

$$(22)\quad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_1 \sin\tfrac{1}{2}[D_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta] \\ \sin\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_1 \sin\tfrac{1}{2}[D_1 - \tfrac{1}{2}\varDelta] \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_1 \cos\tfrac{1}{2}[D_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta] \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_1 \cos\tfrac{1}{2}[D_1 - \tfrac{1}{2}\varDelta] \end{aligned}$$

Nachdem man hieraus p_m, $d\alpha$ und D_m gefunden hat, bilde man $\alpha_m = \alpha_1 + d\alpha$, $\delta_m = 90^\circ - D_m$.

Sucht man nur die Werte von $\varDelta$ und p_m, so kann man die Rechnung in folgender Weise führen. Durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck PS_1S_2 ergibt sich, wenn der Winkel $PS_2S_1 = 180^\circ - p_2$ gesetzt wird

$$(23)\quad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\varDelta \sin\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos\tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\varDelta \cos\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \sin\tfrac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) = p, \qquad \tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) = \delta,$$

so erhält man für p_m die Gleichung*)

$$(24)\quad p_m = p - \tfrac{1}{16}(1 + 2\,\mathrm{tang}^2\delta)\,\varDelta^2 \sin 1'' \sin 2p,$$

wo $\varDelta$ in Sekunden ausgedrückt zu denken ist, und dann auch das von $\varDelta^2$ abhängige Glied in Sekunden ausgedrückt erhalten wird; dieses Glied wird aber nur bei großen Distanzen oder bei Sternen in der Nähe des Pols merklich.

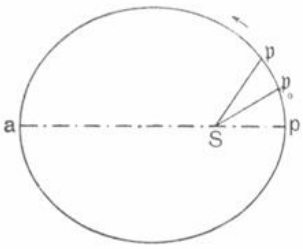
*) Eine Ableitung dieser selten gebrauchten Gleichung findet man in *Chauvenet*, Spherical Astronomy, Vol. II, Art. 263.

Sind die Distanzen nur mäßig groß, so lassen sich die Gleichungen (23) durch die folgenden ersetzen:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \Delta \sin p &= (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) \\ \Delta \cos p &= \delta_2 - \delta_1 \end{aligned}$$

21. Erläuterung einiger in der Theorie der Bahnbestimmung vorkommenden Ausdrücke. Die Bahn, welche ein Planet beschreiben würde, wenn er nur der Anziehung der Sonne unterworfen wäre, ist eine Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt. In Fig. 7 sei S der Mittelpunkt der Sonne, $p\mathfrak{p}a$ die von einem Planeten beschriebene Ellipse, ap die große Achse dieser Ellipse und $\mathfrak{p}$ der Ort des Planeten zur Zeit t. Den der Sonne am nächsten liegenden Punkt p der Ellipse nennt man das Perihel und den diesem gegenüberliegenden Punkt das Aphel; der von Sp aus in der Richtung der Bewegung des Planeten gezählte Winkel $pS\mathfrak{p}$ wird die wahre Anomalie des Planeten zur Zeit t genannt.

Fig. 7.



Die Umlaufszeit des Planeten sei gleich T; setzt man dann $2\pi : T = n$, so wird n als die mittlere Bewegung des Planeten bezeichnet. Ist ferner τ die Zeit, zu der sich der Planet im Perihel befindet, so nennt man das Produkt $n(t - \tau)$ die mittlere Anomalie des Planeten zur Zeit t; die mittlere Anomalie soll im folgenden mit g bezeichnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit eines Planeten ist am größten im Perihel und am kleinsten im Aphel. Man kann sich aber einen Punkt denken, der ebenfalls die Ellipse $p\mathfrak{p}a$, und zwar in derselben Richtung wie der Planet durchläuft, jedoch mit einer der mittleren Bewegung n gleichen konstanten Winkelgeschwindigkeit; geht nun dieser Punkt zur selben Zeit mit dem Planeten durch das Perihel, so trifft er auch im Aphel wieder mit dem Planeten zusammen. Um den Ort zu finden, welchen der fingierte Punkt zu der Zeit t, wo der Planet in $\mathfrak{p}$ angekommen ist, einnimmt, hat man nur an Sp in der Richtung der Bewegung des Planeten den Winkel $pS\mathfrak{p}_0 = g$ anzulegen; der Punkt $\mathfrak{p}_0$, in dem der Schenkel $S\mathfrak{p}_0$ die Ellipse schneidet, ist dann der gesuchte Ort.

Bezeichnet man die Exzentrizität der von dem Planeten beschriebenen Ellipse mit e, bedeutet ferner W die wahre Anomalie des Planeten, so hat man, wie in der Theorie der Bahnbestimmung gezeigt wird,

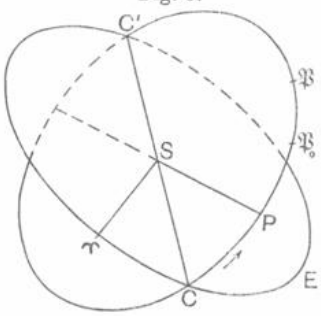
$$(26)\qquad W = g + 2e \sin g + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2g + \cdots$$

Die Summe der Glieder, welche man zu g hinzuzulegen hat, um die wahre Anomalie zu erhalten, wird die Mittelpunktsgleichung genannt.

Man denke sich jetzt die Bahnebene des Planeten verlängert, bis daß sie die um den Mittelpunkt der Sonne (S) beschriebene Sphäre in dem größten Kreise $C\mathfrak{P}C'$ (Fig. 8) schneidet; ferner sei CEC' die Ekliptik, also CC' die Durchschnittslinie der Ebene der Planetenbahn mit der Ebene der Ekliptik oder die sogenannte Knotenlinie. Es werde nun angenommen, daß der Halbkreis $C\mathfrak{P}C'$

auf der nördlichen Seite der Ekliptik gelegen sei, und daß die Bewegung des Planeten in der Richtung des Pfeils erfolge; wenn dann der Planet, von der Sonne aus gesehen, den Punkt C passiert, so geht die heliozentrische Breite des Planeten von negativen zu positiven Werten über. Man nennt nun C den aufsteigenden und den ihm entgegengesetzten Punkt C' den niedersteigenden Knoten der Planetenbahn in bezug auf die Ekliptik. Bedeutet γ den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt, so bezeichnet man den von $S\gamma$ aus in der Richtung der Bewegung des Planeten gerechneten Winkel γSC, bzw. den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen γC als die Länge des aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik; der Bogen $\gamma EC' = 180^\circ + \gamma C$ wird die Länge des niedersteigenden Knotens genannt. Der sphärische Winkel $EC\mathfrak{P}$ gibt die Neigung der Bahn des Planeten in bezug auf die Ekliptik an.

Fig. 8.



Die Punkte, in denen die in Fig. 7 mit Sp, $S\mathfrak{p}_0$, $S\mathfrak{p}$ bezeichneten Richtungen verlängert die Sphäre treffen, sind in Fig. 8 mit P, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}$ bezeichnet worden. Die Summe der Bögen $\gamma C + CP$ nennt man die Länge des Perihels, die Summe der Bögen $\gamma C + C\mathfrak{P}_0$ ist die sogenannte mittlere Länge des Planeten und die Summe der Bögen $\gamma C + C\mathfrak{P}$ die Länge des Planeten in seiner Bahn. Da $C\mathfrak{P}_0 = CP + P\mathfrak{P}_0$, $C\mathfrak{P} = CP + P\mathfrak{P}$ gesetzt werden kann, und $P\mathfrak{P}_0$ gleich der mittleren Anomalie, ferner $P\mathfrak{P}$ gleich der wahren Anomalie ist, so kann man die mittlere Länge auch als die Summe der Länge des Perihels und der mittleren Anomalie, und die Länge in der Bahn als die Summe aus der Länge des Perihels und der wahren Anomalie definieren. Addiert man also zu beiden Seiten der Gleichung (26) die Länge des Perihels, und bezeichnet man mit l die Länge in der Bahn und mit L die mittlere Länge des Planeten, so folgt

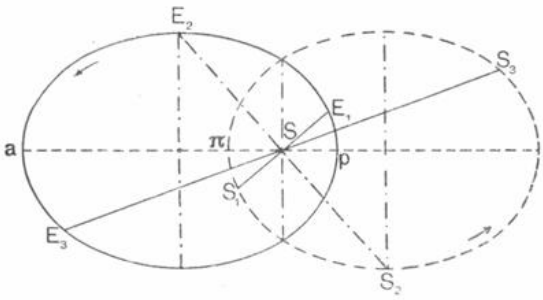
$$l = L + 2e \sin g + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2g + \cdots \tag{27}$$

Würde der Mond allein von der Erde angezogen, so wäre seine Bahn eine Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfiele. Unter der Annahme, daß in Fig. 7 S den Mittelpunkt der Erde und $p\mathfrak{p}a$ die Mondbahn darstellt, wird p das Perigäum und a das Apogäum des Mondes genannt. In Fig. 8 möge nun $C\mathfrak{P}C'$ den größten Kreis bedeuten, in dem die Ebene der Mondbahn die Himmelskugel schneidet, ferner gebe der Pfeil die Richtung der Bewegung des Mondes in seiner Bahn an; S sei der Mittelpunkt der Erde, CEC' bedeute wieder die Ekliptik. Ist dann P der Punkt, in dem die Richtung: Erde—Mondperigäum die Sphäre trifft, so bezeichnet man die Summe der Bögen $\gamma C + CP$ als die Länge des Mondperigäums.

In Fig. 9 sei S der Mittelpunkt der Sonne und $E_1 E_2 E_3$ die Erdbahn; der Pfeil gebe die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn an. Man denke sich jetzt SE_1 in der Richtung von E_1 nach S hin verschoben, und zwar so weit, daß E_1 den Ort von S einnimmt; ist dann $S_1 S = SE_1$, so gibt S_1 die neue Lage von S an. Die

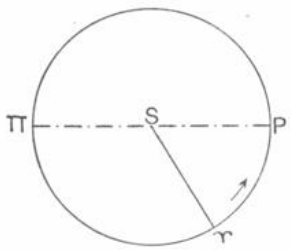
hier mit SE_1 vorgenommene Operation läßt sich nun für jeden Radiusvektor der Ellipse $E_1E_2E_3$ ausführen; man erhält damit eine neue Ellipse $S_1S_2S_3$, welche als die Bahn der Sonne relativ zur Erde bezeichnet werden kann. Die Achsen der Ellipsen $S_1S_2S_3$ und $E_1E_2E_3$ sind einander gleich und zueinander parallel; die Richtung der Bewegung der Sonne in ihrer relativen Bahn ist dieselbe wie die der Erde in ihrer Bahn um die Sonne. Was den scheinbaren Ort der Sonne am Firmament oder die Richtung, in der wir die Sonne sehen, betrifft, so ist es gleichgültig, ob man die Sonne die Ellipse $S_1S_2S_3$ um die ruhende Erde beschreiben läßt, oder ob man die Sonne als ruhend betrachtet und die Erde in der Ellipse $E_1E_2E_3$ beweglich annimmt. Den dem Brennpunkte S zunächst gelegenen Punkt π der Ellipse $S_1S_2S_3$ nennt man das Sonnenperigäum; der von $S\pi$ aus in der Richtung des Pfeils gezählte Winkel zwischen $S\pi$ und einem Radiusvektor der Ellipse $S_1S_2S_3$ wird die wahre Anomalie der Sonne genannt. Aus den Gleichungen $\pi SS_1 = pSE_1$, $\pi SS_2 = pSE_2$ usw. folgt, daß zu jeder Zeit die wahre Anomalie der Sonne gleich der wahren Anomalie der Erde ist; dasselbe gilt auch für die mittlere Anomalie.

Fig. 9.



Die Ebene der Ellipsen $E_1E_2E_3$ und $S_1S_2S_3$ schneide die um S beschriebene Sphäre in dem die Ekliptik darstellenden größten Kreise $\Pi\gamma P$ (Fig. 10), Π und P seien die Punkte, in denen die in Fig. 9 mit $S\pi$ und Sp bezeichneten Richtungen die Sphäre treffen, γ sei der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt; man nennt dann den von γ aus in der Richtung des Pfeils gezählten Bogen $\gamma P\Pi$ die Länge des Sonnenperigäums. Bezeichnet man diese Länge mit Π_s und die Länge des Erdperihels oder den Bogen γP mit P, so folgt $\Pi_s = 180^\circ + P$. Die Summe aus Π_s und der wahren Anomalie der Sonne gibt die wahre Länge der Sonne an, die Summe aus Π_s und der mittleren Anomalie ist die mittlere Länge der Sonne.

Fig. 10.



Die Anziehung der Planeten aufeinander hat zur Folge, daß die Bahn irgend eines dieser Himmelskörper in Wirklichkeit keine Ellipse ist, sondern daß nur das während eines unendlich kleinen Zeitraums von einem Planeten beschriebene Bahnstück als einer Ellipse angehörig betrachtet werden kann; eine solche Ellipse bezeichnet man als die der betreffenden Zeit entsprechende oskulierende Ellipse und ihre Elemente, d. h. ihre große Achse, ihre Exzentrizität, die Neigung ihrer Ebene gegen die Ekliptik usw. als oskulierende Elemente der Bahn des Planeten. Die oskulierenden Elemente ändern sich also mit der Zeit; die Änderungen selbst werden als Störungen bezeichnet. Die Störungen sind teils säkular, d. h. der Zeit oder deren höheren Potenzen proportional, teils periodisch.

Im Anschluß an das vorhin Gesagte läßt sich jetzt auch eine genauere Definition der Ekliptik geben, als dies in § 16 möglich war. Wäre nämlich die Erde und der Mond nur der Anziehung der Sonne unterworfen, so würde der Schwerpunkt des Systems: Erde—Mond eine Ellipse um die Sonne beschreiben. Die wahre, d. h. die durch die Anziehung der Planeten gestörte Bewegung erfolgt aber in der Weise, daß jedesmal nur ein unendlich kleines Stück der Bahn des Schwerpunktes als mit einem Ellipsenbogen zusammenfallend angesehen werden darf, und daß ferner, wenn man sich durch je zwei unendlich nahe Örter des Schwerpunktes und den Mittelpunkt der Sonne eine Ebene (G) gelegt denkt, diese an verschiedenen Stellen der Bahn eine verschiedene Lage einnimmt. In Fig. 8 (S. 51) sei nun wieder S der Mittelpunkt der Sonne, CEC' sei der größte Kreis, in dem die Ebene G in ihrer für den Ort des Schwerpunktes: Erde—Mond zur Zeit $t = 0$ gültigen Lage die Sphäre schneidet, CPC' sei die Durchschnittslinie der Sphäre und der Ebene G in ihrer Lage zur Zeit $t = t$. Bezeichnet man dann mit Π den von einer festen Richtung $S\gamma$ aus, in dem Sinne der Bewegung des Schwerpunktes des Systems: Erde—Mond gezählten Winkel γSC, wird ferner der sphärische Winkel PCE mit π bezeichnet, so hat man der Mechanik des Himmels zufolge, wenn a, b, c, b', c' Konstanten und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ periodische Glieder bedeuten,

$$\Pi = a + bt + ct^2 + \mathfrak{P}$$
$$\pi = b't + c't^2 + \mathfrak{P}'$$

Denkt man sich nun, daß die periodischen Glieder $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ nicht vorhanden wären, so wird der größte Kreis, in dem dann die Ebene G zur Zeit $t = t$ die Himmelskugel schneidet, als die der Epoche t entsprechende Ekliptik bezeichnet. Die Werte, welche die Konstanten a, b, c, b', c' annehmen, wenn unter CEC' die Ekliptik zu Anfang des Jahres 1850 und unter γ das dieser Epoche entsprechende Frühlingsäquinox verstanden wird, findet man am Schluß des § 29 angegeben; dabei ist als Zeiteinheit ein julianisches Jahrhundert gewählt.

Da die Sphäre als eine mit einem unendlich großen Radius beschriebene Kugelfläche definiert wurde, so fallen die Kreise, in denen die Himmelskugel von zwei zueinander parallelen und in endlicher Entfernung voneinander befindlichen Ebenen geschnitten wird, miteinander zusammen; legt man also beispielsweise durch den Mittelpunkt der Erde eine Ebene parallel zu der Ebene der Ekliptik, so stellt die Durchschnittslinie einer solchen Ebene mit der Sphäre ebenfalls die Ekliptik dar.