Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel III. Sphärische Trigonometrie.

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Zur Bestimmung von x kann man die Normalgleichungen in folgender Weise anordnen:

$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [bd]y + [ad]x &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [bc]y + [ac]x &= [cn]\\
[bd]t + [bc]z + [bb]y + [ab]x &= [bn]\\
[ad]t + [ac]z + [ab]y + [aa]x &= [an]
\end{aligned}$$

Hat man hieraus x gefunden, so setze man, um y zu bestimmen,

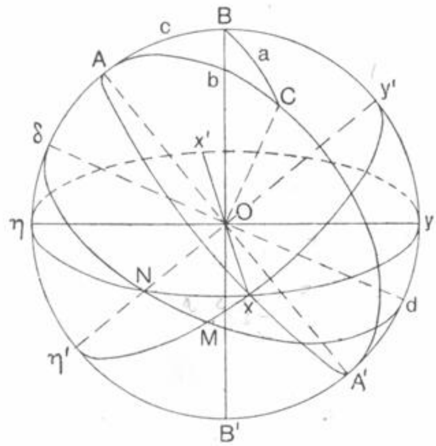
$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [ad]x + [bd]y &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [ac]x + [bc]y &= [cn]\\
[ad]t + [ac]z + [aa]x + [ab]y &= [an]\\
[bd]t + [bc]z + [ab]x + [bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

Kapitel III.

Sphärische Trigonometrie.

9. Einleitung. Man beschreibe um den Punkt O (Fig. 1) eine Kugel mit dem Radius 1 und lege durch O die Ebenen OAB, OAC, OBC; die Bögen AB, AC, BC der größten Kreise, in denen die Kugelfläche von den genannten Ebenen geschnitten wird, bilden dann ein sphärisches Dreieck und werden als Seiten dieses Dreiecks bezeichnet. Da der Radius der Kugel als Längeneinheit gewählt wurde, so ist AB gleich dem Winkel AOB, desgleichen ist AC gleich dem Winkel AOC und BC gleich dem Winkel BOC. Unter dem Winkel, den zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks z. B. AB und AC miteinander bilden, versteht man den Winkel zwischen den in A an AB und AC gezogenen Tangenten; derselbe ist also gleich dem Winkel, den die Ebenen AOB und AOC miteinander bilden.

Fig. 1.



Errichtet man in O senkrecht zu der Ebene AOB eine Gerade, und sind x und x' die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kugelfläche, so ist der von O aus gesehene Winkelabstand zwischen x, bzw. x' und einem beliebigen Punkte des größten Kreises $ABA'A$ gleich 90°. Die beiden Punkte der Sphäre nun, welche von allen Punkten eines dieser Sphäre angehörigen größten Kreises um 90° abstehen, werden die Pole des betreffenden Kreises genannt; x und x' sind also die Pole des Kreises $ABA'A$. Man lege jetzt durch Ox eine Ebene senkrecht zu OB und eine zweite senkrecht zu OA, diese Ebenen schneiden die Kugelfläche in den größten Kreisen

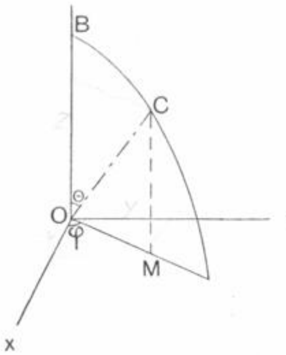
ηxy, bzw. $\eta' xy'$. Die Pole des Kreises ηxy sind B und B', diejenigen des Kreises $\eta' xy'$ sind A und A'; da aber die Durchschnittspunkte x und x' dieser größten Kreise die Pole des größten Kreises $ABA'A$ darstellen, so hat man den Satz: Bezeichnet man mit P und Q Pole zweier größten Kreise, so sind die Durchschnittspunkte dieser größten Kreise gleichzeitig die Pole des durch P und Q gelegten größten Kreises.

Der sphärische Winkel yxy' ist der Definition nach gleich dem Winkel zwischen den Ebenen Oxy und Oxy'; da nun Oy und Oy' senkrecht zu der Durchschnittslinie Ox der eben genannten Ebenen sind, so ist der Winkel zwischen diesen Ebenen gleich dem Winkel $y'Oy$ oder, da $Oy = Oy' = 1$ angenommen wurde, gleich dem Bogen $y'y$. Berücksichtigt man jetzt noch, daß $y'y$ einen Bogen des größten Kreises darstellt, welcher den Scheitel des Winkels yxy' zum Pol hat, so erhält man den Satz: Ein sphärischer Winkel oder der Winkel zwischen zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem Bogen, welchen die Schenkel des Winkels auf dem größten Kreise abschneiden, dessen Pol der Scheitel des Winkels ist. Dieser Satz läßt sich durch einen anderen ersetzen. Da OB senkrecht zu Oy, und OA senkrecht zu Oy' ist, so folgt zunächst $yy' = AB$. Wenn man sich nun zwei bewegliche Punkte denkt, die beide von dem Scheitel des Winkels yxy' ausgehen, und von denen der eine den Schenkel xy und der andere den Schenkel xy' durchläuft, so ist die Bewegungsrichtung des ersteren Punktes, gesehen von dem Pol A aus, gleich derjenigen des zweiten Punktes, gesehen von dem Pol B aus. Bezeichnet man in einem solchen Falle A und B als gleichnamige Pole, so hat man den Satz: Ein sphärischer Winkel ist gleich dem Abstand der gleichnamigen Pole seiner Schenkel.

Mit Hilfe des zuletzt bewiesenen Satzes lassen sich aus den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks ABC diejenigen des Dreiecks NMx bestimmen, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der zu den Polen A, B, C gehörigen größten Kreise $\eta' xy'$, ηxy und δNd bilden. Man setze $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Da B und C gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels xNM sind, so ist dieser Winkel gleich dem Bogen $BC = a$; in derselben Weise findet man, daß der Winkel MxN gleich dem Bogen $AB = c$ ist. Gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels NMx sind C und der dem A gegenüberliegende Pol A'; da nun $CA' = 180^\circ - AC = 180^\circ - b$ ist, so folgt $NMx = 180^\circ - b$. Um die Beziehungen zwischen den Seiten des Dreiecks NMx und den Winkeln des Dreiecks ABC zu finden, gehe man von dem oben bewiesenen Satze aus, wonach N als Durchschnittspunkt der größten Kreise ηNy und δNd, einen Pol des durch die Pole B und C gehenden größten Kreises darstellt, ferner M einen Pol des durch die Pole A und C, und x einen Pol des durch die Pole A und B gehenden größten Kreises bedeutet. Nun sind x und M gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels BAC; bezeichnet man diesen Winkel mit A, so ist also der Bogen xM gleich A. Ebenso findet man, daß, wenn der Winkel BCA gleich C gesetzt wird, der Bogen $NM = C$ ist. Ferner ist der Winkel $ABC = 180^\circ - y'BC$ oder, wenn man den Winkel ABC mit B bezeichnet, $y'BC = 180^\circ - B$; da nun x und N gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels $y'BC$ sind, so folgt $Nx = y'BC$, also $Nx = 180^\circ - B$.

10. Fundamentalformeln. Die drei zueinander senkrechten Geraden Ox, Oy und OB in Fig. 1 sollen nun zu Koordinatenachsen gewählt werden. Es sei φ der Winkel, den die Projektion OM (Fig. 2) des Radiusvektors OC auf die xy-Ebene mit Ox bildet, und zwar werde φ von Ox aus in der Richtung nach Oy von 0° bis 360° gezählt; ferner möge Θ den von OB aus von 0° bis 180° gezählten Winkel BOC bezeichnen. Da der Voraussetzung nach $OC = 1$ ist, so erhält man, wenn x, y, z die auf die Achsen Ox, Oy, OB bezogenen Koordinaten von C bedeuten,

Fig. 2.



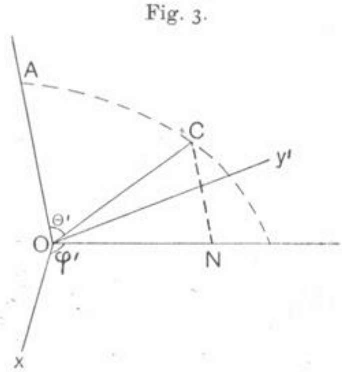
$$x = \sin\Theta \cos\varphi, \quad y = \sin\Theta \sin\varphi, \quad z = \cos\Theta$$

Nun lehrt die Fig. 1, daß der nach § 9 mit B bezeichnete sphärische Winkel ABC gleich der Summe der Winkel ABx und xBC ist; da der Winkel $ABx = 90^\circ$, und der Winkel $xBC = \varphi$ ist, so ergibt sich also $\varphi = -(90^\circ - B)$. Ferner ist Θ gleich der in Fig. 1 mit a bezeichneten Seite BC des sphärischen Dreiecks ABC. Die vorigen Gleichungen werden demnach

$$(1) \qquad x = \sin a \sin B, \qquad y = -\sin a \cos B, \qquad z = \cos a$$

Wählt man jetzt die drei zueinander senkrecht stehenden Geraden Ox, Oy', OA in Fig. 1 zu Koordinatenachsen, und sind x', y' und z' die auf diese Achsen bezogenen Koordinaten von C, so erhält man, wenn ON (Fig. 3) die Projektion von OC auf die Ebene Oxy' bedeutet, und die Winkel $xON = \varphi'$, $AOC = \Theta'$ gesetzt werden,

Fig. 3.



$$x' = \sin\Theta' \cos\varphi', \quad y' = \sin\Theta' \sin\varphi', \quad z' = \cos\Theta'$$

In dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 1) ist nun der in § 9 mit A bezeichnete Winkel BAC gleich der Differenz der Winkel xAB und xAC. Der Winkel xAB ist aber gleich 90°, und der Winkel xAC ist identisch mit dem vorhin mit φ' bezeichneten Winkel. Man hat also $A = 90^\circ - \varphi'$. Berücksichtigt man noch, daß Θ' gleich der oben mit b bezeichneten Seite AC des sphärischen Dreiecks ABC ist, so werden die drei letzten Gleichungen

$$(2) \qquad x' = \sin b \sin A, \qquad y' = \sin b \cos A, \qquad z' = \cos b$$

Nun ist das Koordinatensystem x', y', z' aus x, y, z entstanden, indem man letzteres um die x-Axe usw. um den Winkel yOy' gedreht hat; dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel BOA in Fig. 1, also auch gleich dem Bogen $AB = c$. Die bekannten Formeln zur Verwandlung rechtwinkeliger Koordinaten geben demnach

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos c - z' \sin c \\ z &= y' \sin c + z' \cos c \end{aligned}$$

Substituiert man hierin die für die Koordinaten gefundenen Werte (1) und (2), so erhält man die folgenden Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned} \tag{3}$$

Man wende jetzt diese Formeln auf das in Fig. 1 gezeichnete Dreieck xMN an und betrachte xM als Seite a, Nx als Seite b und NM als Seite c. Die erste Gleichung (3) gibt dann

$$\sin xM \sin NMx = \sin Nx \sin xNM$$

Wie aber oben gezeigt wurde, ist $xM = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $NM = C$, ferner $xNM = a$, $NMx = 180^\circ - b$ und $MxN = c$. Die vorige Gleichung wird demnach

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

d. h. sie wird mit der ersten Gleichung (3) identisch. Dagegen erhält man aus den zwei letzten der Gleichungen (3)

$$\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \end{aligned} \tag{4}$$

In den Gleichungen (3) und (4) lassen sich noch die Buchstaben a, b, c und die ihnen entsprechenden A, B, C miteinander vertauschen; beispielsweise erhält man aus (3)

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C \end{aligned} \tag{I}$$

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned} \tag{II}$$

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \tag{III}$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \tag{IV}$$

und aus der ersten Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \end{aligned} \tag{V}$$

Die beiden ersten Gleichungen (I) geben

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Ersetzt man demgemäß in der letzten der Gleichungen (II) $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ durch $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, so erhält man wieder die erste der Gleichungen (4), bzw. V.

11. Transformation der Fundamentalformeln, Gleichungen von Gauß und Napier. Mit Hilfe der bis jetzt gefundenen Formeln lassen sich andere ableiten, in denen die halben Seiten, bzw. Winkel auftreten. Aus der ersten Gleichung III ergibt sich zunächst

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{b-c-a}{2}$

Hieraus folgt

$$\text{(5)} \quad \begin{aligned} \sin^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c} \\ \cos^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

oder, wenn

$$a + b + c = 2s$$

gesetzt wird,

$$\text{(6)} \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}$$

In derselben Weise erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung III oder einfach durch zyklische Vertauschung der Buchstaben A, B, C, a, b, c in den Gleichungen (6)

$$\text{(7)} \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}$$

$$\text{(8)} \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}$$

Durch Division der Gleichungen (6) ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}$$

Dividiert man auch die Gleichungen (7), bzw. (8) durcheinander und setzt

$$\text{(9)} \qquad k = +\sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}},$$

so wird

$$\text{(10)} \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \pm \frac{k}{\sin(s-a)}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \pm \frac{k}{\sin(s-b)}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \pm \frac{k}{\sin(s-c)}$$

Was die doppelten Vorzeichen betrifft, so folgt zunächst aus der Identität

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} A}{\sin a},$$

wenn man für $\cos^2 \frac{1}{2}A$ seinen Wert aus (6) und für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A$ die beiden in (10) gegebenen Werte substituiert,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \pm \frac{2k \sin s}{\sin a \sin b \sin c}$$

Denselben Ausdruck erhält man für $\frac{\sin B}{\sin b}$ und $\frac{\sin C}{\sin c}$. Nach (I) ist aber

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Wenn also in einer der Formeln (10) das obere Vorzeichen gewählt wird, so ist auch in den beiden anderen das obere Vorzeichen anzuwenden; dieselbe Bemerkung gilt für das untere Vorzeichen. Ist nun u ein Wert von $\frac{1}{2}A$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = + \frac{k}{\sin(s-a)}$$

genügt, so genügt ihr auch der Wert $\frac{1}{2}A = u + \pi$; die diesen beiden Werten von $\frac{1}{2}A$ entsprechenden Werte von A sind $2u$ und $2\pi + 2u$, sind also als identisch zu betrachten. Läßt man dem u seine eben angegebene Bedeutung, so erhält man für die Werte von $\frac{1}{2}A$, welche der Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = - \frac{k}{\sin(s-a)}$$

genügen, $-u$ und $\pi - u$; die entsprechenden Werte von A sind $-2u$ und $2\pi - 2u$, fallen also praktisch in einen zusammen.

Man wende jetzt die aus (5) folgende Formel

$$(10^a) \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}$$

auf das Dreieck xMN in Fig. 1 an, und zwar bezeichne man mit a die Seite xM, mit b die Seite Nx, mit c die Seite NM, also mit A den Winkel xNM. Da, wie oben gezeigt, $xM = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $NM = C$ und $xNM = a$ ist, so folgt

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B - C) \sin \frac{1}{2}(A - 180^\circ + B + C)}{\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C) \sin \frac{1}{2}(180^\circ - B + C - A)}$$

oder, wenn man $\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C) = \sin[180^\circ - \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C)]$ und

$$A + B + C - 180^\circ = E$$

setzt, wo E der sphärische Exzeß des Dreiecks ABC genannt wird,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin \frac{1}{2}E}{\sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)} = \frac{\sin^2(A - \frac{1}{2}E) \sin \frac{1}{2}E}{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)}$$

Ganz ähnliche Gleichungen ergeben sich für $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}b$ und $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}c$. Wird nun

$$K = + \sqrt{\frac{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)}{\sin \frac{1}{2}E}}$$

gesetzt, so erhält man

$$(11)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \pm\frac{\sin(A-\tfrac{1}{2}E)}{K},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \pm\frac{\sin(B-\tfrac{1}{2}E)}{K},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \pm\frac{\sin(C-\tfrac{1}{2}E)}{K}$$

Bezüglich des Vorzeichens gilt dieselbe Regel wie bei den Gleichungen (10).

Aus den Gleichungen (7), (8) und (6) folgt

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin^2 s\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin b\sin c} = \frac{\sin^2 s\sin^2\tfrac{1}{2}A}{\sin^2 a}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin s\sin(s-a)\sin^2(s-b)}{\sin^2 a\sin b\sin c} = \frac{\sin^2(s-b)\cos^2\tfrac{1}{2}A}{\sin^2 a}$$

usw. Es wird also

$$\alpha)\ \frac{\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin s}{\sin a}\qquad \beta)\ \frac{\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-c)}{\sin a}$$

$$\gamma)\ \frac{\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-a)}{\sin a}\qquad \delta)\ \frac{\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-b)}{\sin a}$$

Das Produkt aus den Gleichungen α) und β) gibt

$$\frac{\sin B\cos^2\tfrac{1}{2}C}{\sin A} = \pm\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin^2 a}$$

oder, mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung (8),

$$\frac{\sin B\cos^2\tfrac{1}{2}C}{\sin A} = \pm\frac{\sin b\cos^2\tfrac{1}{2}C}{\sin a}$$

Da aber $\sin B : \sin A = \sin b : \sin a$ ist, so gilt nur das positive Vorzeichen. Demnach ist in α) und β) gleichzeitig entweder das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden; dieselbe Regel gilt auch für γ) und δ).

Der Quotient aus γ) und α) ist

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \pm\frac{\sin(s-a)}{\sin s}$$

oder, unter Benutzung der Gleichung (9),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \pm\frac{k^2}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Aus den Gleichungen (10) folgt aber mit Berücksichtigung der für sie gefundenen Vorzeichenregel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{k^2}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Somit darf man in den Gleichungen α) und γ) gleichzeitig entweder nur das obere oder nur das untere Vorzeichen anwenden; dieselbe Regel gilt auch für β) und δ). Wählt man nun in den Gleichungen α) bis δ) das obere Vorzeichen, so wird

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)}{\sin a},\qquad \frac{\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-b)}{\sin a}$$

$$\frac{\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}A} = \frac{\sin s}{\sin a},\qquad \frac{\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-a)}{\sin a}$$

Durch Addition und Subtraktion der nebeneinander stehenden Gleichungen ergibt sich, wenn noch auf die Bedeutung von s Rücksicht genommen wird,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)+\sin(s-b)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin s - \sin(s-a)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)-\sin(s-b)}{\sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin s + \sin(s-a)}{\sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A\\
\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A\\
\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A\\
\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A
\end{aligned} \tag{12}$$

Diese Gleichungen werden gewöhnlich als die *Gauß*schen Gleichungen bezeichnet; die französischen Autoren nennen sie die *Delambre*schen Gleichungen und verstehen unter den *Gauß*schen Gleichungen die unter (3) angegebenen.

Durch Division der Gleichungen (12) entstehen die sogenannten *Napier*schen Analogien, nämlich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B+C) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-C) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+c) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a
\end{aligned} \tag{13}$$

12. Rechtwinkelige sphärische Dreiecke. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie werden besonders einfach, wenn einer der Winkel ein Rechter ist. Man nehme an, daß $A = 90^\circ$ sei, und bezeichne a, also die Hypotenuse, mit h; ferner setze man $b = c'$, $B = C'$. Aus den Gleichungen (3) folgt dann

$$\begin{aligned}
\sin h \sin C' &= \sin c'\\
\sin h \cos C' &= \cos c' \sin c\\
\cos h &= \cos c' \cos c
\end{aligned}$$

Dividiert man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die zweite durch die dritte, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sin c &= \operatorname{tang} c' \operatorname{cotg} C'\\
\cos C' &= \operatorname{tang} c \operatorname{cotg} h
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung (V) ergibt sich

$$\sin C' \cos c = \cos C$$

Ferner erhält man aus der ersten Gleichung (IV)

$$\cos h = \operatorname{cotg} C' \operatorname{cotg} C$$

Stellt man die gewonnenen Formeln zusammen, so folgt

$$\begin{aligned}
&\sin c' = \sin h \sin C', &&\cos C = \sin C' \cos c, &&\cos h = \cos c' \cos c\\
&\sin c = \operatorname{tang} c' \operatorname{cotg} C', &&\cos C' = \operatorname{tang} c \operatorname{cotg} h, &&\cos h = \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} C'
\end{aligned} \tag{14}$$

13. Differentialformeln. In der Praxis tritt häufig die folgende Aufgabe auf: Mit Hilfe der gegebenen Stücke eines sphärischen Dreiecks sind die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnet worden; es sollen nun die Korrektionen bestimmt werden, welche an die berechneten Werte anzubringen sind, wenn die für die gegebenen Stücke des Dreiecks gemachten Annahmen um ein weniges geändert werden. Zur Lösung dieser Aufgabe geht man von dem Satze aus: Bedeutet $F(a, b, c, A, B, C)$ eine Funktion von $a, b, \ldots, C$, und sind die Inkremente da, $db, \ldots, dC$ so klein, daß man ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen kann, so ist

$$F(a+da,\ b+db,\ \ldots,\ C+dC) = F(a,\ b,\ \ldots,\ C) + \frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \cdots + \frac{\partial F}{\partial C}dC$$

Wenn also mit $a, b, \ldots. C$ Werte bezeichnet werden, welche der Gleichung

$$F(a,\ b,\ \ldots,\ C) = 0 \tag{15}$$

genügen, so ist die Bedingung dafür, daß auch

$$F(a+da,\ b+db,\ \ldots,\ C+dC) = 0$$

sei,

$$\frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \frac{\partial F}{\partial c}dc + \frac{\partial F}{\partial A}dA + \frac{\partial F}{\partial B}dB + \frac{\partial F}{\partial C}dC = 0 \tag{16}$$

Beispielsweise werde unter der Gleichung (15) die letzte der Gleichungen (3) verstanden:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = 0$$

Soll diese Gleichung auch noch gelten, wenn a, b, c, A durch $a+da$, $b+db$, $c+dc$, $A+dA$ ersetzt werden, so muß der Gleichung (16) zufolge

$$\begin{aligned} -\sin a\,da &+ (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A)\,db \\ &+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\,dc \\ &+ \sin b \sin c \sin A\,dA = 0 \end{aligned}$$

sein. Unter Benutzung der Gleichungen (II) und (I), S. 32, wird hieraus

$$-da + \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin c \sin B\,dA = 0 \tag{17^1}$$

oder auch

$$-da + \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin b \sin C\,dA = 0 \tag{17^2}$$

Um die Anwendung dieser Gleichungen zu zeigen, werde angenommen, daß man mit Hilfe der gegebenen Werte $b = 40^\circ$, $c = 60^\circ$, $A = 60^\circ$ die Seite a sowie die Winkel B und C berechnet habe, und daß nun die Korrektion ermittelt werden soll, welche an den für a erhaltenen Wert anzubringen ist, wenn die für b, c und A angenommenen Werte die Korrektionen $db = +10'$, $dc = +30'$ und $dA = +40'$ erfordern. Substituiert man zunächst die vorhin für b, c und A angeführten Werte in die Gleichungen (3) und in die unter (I) und (II) für $\sin a \sin C$ und $\sin a \cos C$ angegebenen Gleichungen, so erhält man, bei Anwendung fünfstelliger Logarithmentafeln, $a = 48^\circ 35'.8$, $B = 47^\circ 55'.0$, $C = 90^\circ 47'.2$; darauf ergibt sich aus (17^1) oder (17^2) $da = +45'.7$. Der für $b = 40^\circ 10'$, $c = 60^\circ 30'$, $A = 60^\circ 40'$ gültige Wert von a ist somit $48^\circ 35'.8 + 45'.7 = 49^\circ 21'.5$. Ebendenselben Wert findet man, wenn in den Gleichungen (3) $b = 40^\circ 10'$, $c = 60^\circ 30'$, $A = 60^\circ 40'$ angenommen wird. Falls also eine Genauigkeit von $0'.1$ ausreichend ist, so darf die Gleichung (17^1), bzw. (17^2) zur Berechnung der den Korrektionen $db \lesseqgtr +10'$, $dc \lesseqgtr +30'$, $dA \lesseqgtr +40'$ entsprechenden Werte von da verwandt werden.

Soll der Wert von a bis auf wenige Zehntel einer Bogensekunde richtig erhalten werden, so sind sechsstellige Logarithmentafeln anzuwenden. Unter der Annahme $b = 40^\circ$, $c = 60^\circ$, $A = 60^\circ$ erhält man dann aus (3) $a = 48^\circ 35' 4''.7$, $B = 47^\circ 54' 55''.7$, $C = 90^\circ 47' 16''.3$ und weiterhin aus (17^1), bzw. (17^2), wenn $db = +10'$, $dc = +30'$, $dA = +40'$ angenommen wird, $da = +45' 40''.7$. Der für $b = 40^\circ 10'$, $c = 60^\circ 30'$, $A = 60^\circ 40'$ gültige Wert von a würde hiernach $49^\circ 21' 28''.4$ sein, dagegen gibt die mit Hilfe der Gleichungen (3) ausgeführte direkte Rechnung $a = 49^\circ 21' 32''.9$. Die den Gleichungen (17^1) und (17^2) zugrunde liegende Voraussetzung, daß die Quadrate und Produkte von db, dc, dA vernachlässigt werden können, ist also für die gegenwärtig verlangte Genauigkeit nicht erfüllt.

Man wende jetzt die Gleichung (17^1) auf das Dreieck MNx in Fig. 1 an und identifiziere dabei Mx mit a, Nx mit b und MN mit c, also den Winkel MNx mit A, NMx mit B und MxN mit C. Berücksichtigt man, daß nach § 9 $Mx = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $MN = C$, $MNx = a$, $NMx = 180^\circ - b$ und $MxN = c$ ist, so hat man bei der Anwendung der Gleichung (17^1) auf das Dreieck MNx den Buchstaben a mit A, ferner b mit $180^\circ - B$, c mit C, A mit a, B mit $180^\circ - b$ und C mit c zu vertauschen; es ergibt sich also

$$(18^1) \qquad -dA - \cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin C \sin b\, da = 0$$

oder auch

$$(18^2) \qquad -dA - \cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin B \sin c\, da = 0$$

Um eine weitere Differentialformel zu finden, differenziere man die erste der Gleichungen (3) logarithmisch; man erhält damit

$$(19) \qquad \operatorname{cotg} a\, da + \operatorname{cotg} B\, dB - \operatorname{cotg} b\, db - \operatorname{cotg} A\, dA = 0$$

Wird ferner die zweite der Gleichungen (3) durch die erste dividiert, so folgt

$$\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A = \sin A \operatorname{cotg} B$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$(\operatorname{cotg} b \cos c + \sin c \cos A)\, dc + (\cos c \sin A - \cos A \operatorname{cotg} B)\, dA$$
$$= \frac{\sin c}{\sin^2 b}\, db - \frac{\sin A}{\sin^2 B}\, dB$$

Wird diese Gleichung mit $\sin b \sin B$ multipliziert und auf die Gleichungen (III), (IV) und (I) Rücksicht genommen, so ergibt sich

$$(20) \qquad \cos a \sin B\, dc + \sin b \cos C\, dA - \sin C\, db + \sin a\, dB = 0$$