universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel II. Die Methode der kleinsten Quadrate.

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Kapitel II.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

5. Mittelwerte. Wird eine unveränderliche Größe, z. B. die Länge einer festen Strecke, die Größe eines konstanten Winkels usw., wiederholt gemessen, so stimmen die erhaltenen Einzelwerte durchweg nicht genau miteinander überein. Hat man nun keinen Grund, die eine Beobachtung für weniger sicher als die andere zu halten, so betrachtet man das arithmetische Mittel aus den Einzelwerten als den wahrscheinlichsten Wert der gemessenen Größe. Anstatt die Beobachtungen als gleich genau zu bezeichnen, bedient man sich gewöhnlich des Ausdrucks, daß dieselben gleiches Gewicht haben; setzt man dieses gleich 1, so hat man das Gewicht des arithmetischen Mittels gleich der Zahl der Einzelwerte anzunehmen.

Das arithmetische Mittel hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Es sei x die zu bestimmende Größe, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ seien die für x gefundenen, als gleich genau vorausgesetzten Einzelwerte; nimmt man dann für x irgend einen Wert an und bildet die Differenzen

$$\begin{aligned} x - a_1 &= v_1 \\ x - a_2 &= v_2 \\ &\cdots \\ x - a_m &= v_m , \end{aligned} \tag{1}$$

so sind die v Funktionen von x. Man kann sich jetzt die Frage vorlegen: Welches ist der Wert von x, für den die Summe der Quadrate der v am kleinsten ist? Bekanntlich ergibt sich dieser aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{n=m} (x - a_n)^2 = 0$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so folgt

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \cdots + (x - a_m) = 0$$

oder

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$$

Der gesuchte Wert von x ist also gleich dem arithmetischen Mittel aus den beobachteten Einzelwerten.

Das Mittel aus m gleich genauen Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ läßt sich auch in der Form

$$x = \frac{\nu \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{\nu} + (m - \nu) \dfrac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_m}{m - \nu}}{\nu + (m - \nu)}$$

darstellen. Setzt man hierin

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_\nu}{\nu}, \qquad x_2 = \frac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_m}{m - \nu}$$

$$p_1 = \nu, \qquad p_2 = m - \nu,$$

so wird

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} \tag{1a}$$

Wenn man nun das Gewicht einer Beobachtung gleich 1 annimmt, so sind ν und $m - \nu$ und demnach auch p_1 und p_2 die Gewichte der Partialmittel x_1 und x_2. Aus dem Vorigen ergibt sich also der Satz: Teilt man eine Anzahl gleich genauer Einzelwerte in zwei Gruppen und bildet für jede Gruppe ein Partialmittel, so ist der Quotient aus der Summe der Produkte der Partialmittel in die zugehörigen Gewichte und der Summe dieser Gewichte gleich dem Gesamtmittel.

Auf den zuletzt für x gefundenen Quotienten stößt man auch bei der Lösung der folgenden Aufgabe. Es seien V_1 und V_2 die Differenzen zwischen irgend einem Werte von x und den vorhin mit x_1 und x_2 bezeichneten Partialmitteln, es sei also

$$x - x_1 = V_1$$
$$x - x_2 = V_2$$

Multipliziert man jede dieser Gleichungen mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht des in ihr enthaltenen Partialmittels, so folgt

$$x\sqrt{p_1} - x_1\sqrt{p_1} = V_1\sqrt{p_1}$$
$$x\sqrt{p_2} - x_2\sqrt{p_2} = V_2\sqrt{p_2}$$

Will man jetzt denjenigen Wert von x finden, für den die Summe der Quadrate der auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke, also die Summe $p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2$ ein Minimum wird, so ergibt sich dieser aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\{p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2\} = 0$$

oder

$$p_1(x - x_1) + p_2(x - x_2) = 0$$

Der gesuchte Wert von x ist somit

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

Ist die Zahl der aus den gleich genauen Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gebildeten Partialmittel größer wie zwei, hat man z. B. die Mittel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ und bezeichnet man mit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Anzahl der den $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zugrunde liegenden Einzelwerte also auch die Gewichte der Partialmittel, so erhält man für das arithmetische Mittel aus $a_1, a_2, \ldots, a_m$ den Ausdruck

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} \tag{2}$$

Hierbei ist der Voraussetzung nach $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = m$; der Divisor des Quotienten (2) ist also gleich dem Gewicht von x.

Für den unter (2) gegebenen Ausdruck von x gilt ein dem vorhin für (1a) bewiesenen ganz analoger Satz. Wenn man nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - x_1 &= v_1 \\ x - x_2 &= v_2 \\ x - x_3 &= v_3 \\ &\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

mit $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$, ... multipliziert und in die so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x\sqrt{p_1} - x_1\sqrt{p_1} &= v_1\sqrt{p_1} \\ x\sqrt{p_2} - x_2\sqrt{p_2} &= v_2\sqrt{p_2} \\ x\sqrt{p_3} - x_3\sqrt{p_3} &= v_3\sqrt{p_3} \\ &\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

den Wert (2) von x substituiert, so erhält die Summe $p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + \cdots$ ihren kleinsten Wert.

Bisher sind die Beobachtungen als gleich genau vorausgesetzt worden. Haben aber die beobachteten Werte verschiedene Genauigkeit, so kann man sich denken, daß dieselben Partialmittel einer Reihe gleich genauer Beobachtungen vorstellen, wobei jedoch jedes Partialmittel aus einer verschieden großen Anzahl von Einzelwerten gebildet ist; wie man diese Anzahl, also die Gewichte der beobachteten Werte bestimmt, ergibt sich aus den im nächsten Paragraphen enthaltenen Ausführungen. Damit ist aber der Fall verschieden genauer Beobachtungen auf denjenigen gleich genauer zurückgeführt. Man hat jetzt nur unter den vorhin mit x_1, x_2, x_3, ... bezeichneten Partialmitteln die beobachteten Werte und unter p_1, p_2, p_3, ... die Gewichte der letzteren zu verstehen; der Ausdruck (2), für welchen gleichzeitig die Summe der Quadrate der auf der rechten Seite der Gleichungen (4) stehenden Größen ein Minimum wird, ist dann der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Größe, und das Gewicht dieses Wertes ist gleich der Summe der p.

6. Mittlerer Fehler und wahrscheinlicher Fehler. Denkt man sich in den Gleichungen (1) an Stelle von x seinen wahren Wert eingesetzt, und bezeichnet man die Werte, welche in diesem Falle die Differenzen v_1, v_2, ..., v_m annehmen, mit Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m, so stellen diese Δ die wahren Beobachtungsfehler dar. Haben dann alle Beobachtungen dasselbe Gewicht, und bezeichnet man mit $[\Delta\Delta]$ die Summe der Quadrate $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_m^2$, so nennt man $\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}}$ den mittleren Fehler einer Beobachtung. Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist also ein Fehler, dessen Quadrat gleich dem Mittel aus der Summe der Quadrate der wirklich begangenen Fehler ist. Außer von dem mittleren spricht man auch noch von dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung; man versteht darunter einen Fehler, der so beschaffen ist, daß von allen in einer Reihe von Messungen begangenen und ihrem absoluten Werte nach genommenen Fehlern die eine Hälfte der Wahrscheinlichkeit nach unter-, die andere oberhalb jenes Fehlers liegt. Da die Wahrscheinlichkeit eines positiven Fehlers dieselbe ist wie die eines gleich großen negativen, so versieht man die für den wahrscheinlichen Fehler erhaltenen Werte mit dem

doppelten Vorzeichen. Wenn man also beispielsweise für einen Winkel x durch Beobachtung den Wert a gefunden hat, und der wahrscheinliche Fehler von a seinem absoluten Betrage nach gleich 0″.5 ist, so schreibt man: $x = a$, w. F. $\pm$ 0″.5. In Worten kann man dies folgendermaßen ausdrücken: Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert von x zwischen den Grenzen $a - 0''.5$ und $a + 0''.5$ eingeschlossen ist, ist ebenso groß wie diejenige, daß der wahre Wert außerhalb der angeführten Grenzen liegt. Zwischen dem wahrscheinlichen Fehler (r) und dem mittleren Fehler (ε) gilt der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge die Beziehung

$$r = 0.6745\,\varepsilon \tag{5}$$

Man hat somit auch

$$\varepsilon = 1.4826\,r \tag{5a}$$

Nimmt man vorläufig den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung als bekannt an, so läßt sich auch der mittlere, bzw. wahrscheinliche Fehler des Mittels aus mehreren Beobachtungen berechnen. Hierzu dient der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesene Satz: Hat man einen Ausdruck von der Form

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m,$$

wo $y_1, y_2, \ldots$ voneinander unabhängige Quantitäten und $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Konstanten bedeuten, sind ferner $r_1, r_2, \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler von $y_1, y_2, \ldots$, und bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler von $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$ mit $R(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m)$, so ist

$$R(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m) = \sqrt{\beta_1^2 r_1^2 + \beta_2^2 r_2^2 + \cdots + \beta_m^2 r_m^2} \tag{6}$$

Der Gleichung (5a) zufolge hat man aber, wenn ε_n den mittleren Fehler von y_n bedeutet, $\varepsilon_n = 1.4826\,r_n$; multipliziert man also die Gleichung (6) mit 1.4826 und setzt $1.4826\,R(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots) = E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots)$, wo nun $E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots)$ als der mittlere Fehler von $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots$ zu bezeichnen ist, so erhält man

$$E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m) = \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon_1^2 + \beta_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + \beta_m^2 \varepsilon_m^2} \tag{6a}$$

Für den Fall, daß $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \frac{1}{m}$ und $r_1 = r_2 = \cdots = r$, also, wenn $1.4826\,r = \varepsilon$ gesetzt wird, auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon$ ist, folgt aus (6) und (6a)

$$R\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}\right) = \frac{r}{\sqrt{m}}, \tag{7}$$

$$E\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \tag{7a}$$

Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus m gleich genauen Beobachtungen ist demnach gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler einer Beobachtung, dividiert durch die Quadratwurzel aus m. Da eine Beobachtung vom Gewichte m als das arithmetische Mittel aus m Beobachtungen vom Gewichte 1 aufgefaßt werden kann, so gilt auch der Satz: Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte m ist gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus m.

Setzt man

$$\beta_1 = \frac{p_1}{\Sigma p}, \quad \beta_2 = \frac{p_2}{\Sigma p}, \quad \cdots, \quad \beta_m = \frac{p_m}{\Sigma p},$$

wo

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$$

sein soll, so folgt aus (6)

$$R\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{1}{\Sigma p}\sqrt{p_1^2 r_1^2 + p_2^2 r_2^2 + \cdots + p_m^2 r_m^2}$$

Der auf der linken Seite in Klammern stehende Ausdruck gibt nach obigem das Mittel aus den y an, wenn diese die Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_m$ haben; in diesem Falle stellt Σp das Gewicht des Mittels dar. Bezeichnet man jetzt den wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit mit r, so ist dem vorhin bewiesenen Satze gemäß $r_1 = r : \sqrt{p_1}$, $r_2 = r : \sqrt{p_2}$, usw. Substituiert man diese Werte in die vorige Gleichung, so erhält man

$$R\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{r}{\sqrt{\Sigma p}} \tag{8}$$

In analoger Weise folgt aus (6ª), wenn ε den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet,

$$E\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Sigma p}} \tag{8ª}$$

Es ergibt sich also der Satz: Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler des mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Mittels aus ungleich genauen Werten ist gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Gewichte des Mittels.

Man denke sich jetzt wieder eine größere Anzahl gleich guter Beobachtungen in zwei Gruppen mit p_1, bzw. p_2 Gliedern zerlegt und für jede Gruppe den Mittelwert gebildet. Bezeichnet man dann die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte mit R_1, bzw. R_2 und ihre mittleren Fehler mit E_1, bzw. E_2, so folgt aus (7) und (7ª), wenn r den wahrscheinlichen und ε den mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet,

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{p_1}}, \quad R_2 = \frac{r}{\sqrt{p_2}}; \quad E_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$$

Hieraus erhält man

$$p_1 : p_2 = R_2^2 : R_1^2 = E_2^2 : E_1^2 \tag{9}$$

Da man nun zwei beobachtete Werte mit den Gewichten p_1 und p_2 als Mittelwerte von p_1, bzw. p_2 gleich genauen Beobachtungen betrachten kann, so folgt aus der letzten Gleichung: Die Gewichte zweier ungleich genauen Beobachtungen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler.

Zur Vervollständigung des Vorigen ist noch anzugeben, wie man den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung, bzw., bei ungleich genauen Beobachtungen, den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit bestimmt. Es soll zunächst angenommen werden, daß die Beobachtungen gleich genau sind. Der für diesen Fall zur Definition des mittleren Fehlers einer Beobachtung auf S. 12

gegebene Ausdruck $\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}}$ ist allein nicht hinreichend, weil derselbe die Kenntnis des wahren Wertes der zu bestimmenden Größe verlangt; man kennt eben nur den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten, also das arithmetische Mittel aus den beobachteten Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Versteht man aber unter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ die Abweichungen der beobachteten Werte von ihrem arithmetischen Mittel, und bezeichnet man die Abweichung des arithmetischen Mittels von dem wahren Wert der Unbekannten mit δ, so gelten die Gleichungen

$$\Delta_1 = v_1 + \delta, \quad \Delta_2 = v_2 + \delta, \quad \ldots, \quad \Delta_m = v_m + \delta$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen gibt, wenn zur Abkürzung

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = [v]$$
$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_m^2 = [vv]$$

gesetzt wird,

$$[\Delta\Delta] = [vv] + 2[v]\delta + m\delta^2$$

Infolge der Bedeutung der v ist aber $[v] = 0$, und somit erhält man

(A) $$[\Delta\Delta] = [vv] + m\delta^2$$

Unter der Voraussetzung nun, daß die Beobachtungen nicht alle nach derselben Seite hin von der Wahrheit abweichen, also nicht mit einem konstanten Fehler behaftet sind, kann man als Näherungswert von δ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels aus den m Beobachtungen annehmen; man hat also nach (7a), wenn ε wieder den mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung (A) und berücksichtigt, daß, der Definition von ε gemäß, $[\Delta\Delta] = m\varepsilon^2$ ist, so folgt

$$m\varepsilon^2 = [vv] + \varepsilon^2$$

Damit ergibt sich für den mittleren, bzw., unter Benutzung der Gleichung (5a), für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung

(10) $$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}, \qquad r = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (7a) folgt hieraus für den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus den m Beobachtungen

(10a) $$E = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m(m-1)}}, \qquad R = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{m(m-1)}}$$

Sind die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit, haben also beispielsweise die für eine Unbekannte x erhaltenen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_m$, so leite man mit Hilfe der Gleichung (2) den wahrscheinlichsten Wert von x ab und bilde die Differenzen $x - x_1 = v_1$, $x - x_2 = v_2$, usw.; wird dann die Summe $v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \cdots + v_m^2 p_m = [pvv]$ gesetzt, so erhält man in ganz ähnlicher Weise

wie vorhin*), wenn ε und r den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit bedeuten,

$$(11) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{m-1}}, \qquad r = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{m-1}},$$

$$(11^a) \qquad E = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{m(m-1)}}, \qquad R = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{m(m-1)}}$$

Beispiel. An der *v. Kuffner*schen Sternwarte wurden für 10 Sterne die in der mit δ bezeichneten Kolumne der folgenden Tabelle mitgeteilten Winkelabstände vom Äquator beobachtet; alle diese Werte sollen als gleich genau angesehen werden. In der zweiten Kolumne ist für jeden Stern das Mittel aus den in der ersten Kolumne stehenden Sekunden angeführt. Die mit $+v$ bezeichnete Kolumne enthält die absolut genommenen Differenzen zwischen den beobachteten δ und ihren Mittelwerten; die vierte Kolumne gibt die Quadrate der v.

δ	M	$+v$	v^2	δ	M	$+v$	v^2
7° 52′ 24″.0	23″.8	0″.2	0.04	7° 14′ 21″.1	21″.2	0″.1	0.01
23.6		0.2	0.04	21.7		0.5	0.25
				21.2		0.0	0.00
7 59 45.6	47.0	1.4	1.96	21.0		0.2	0.04
47.7		0.7	0.49				
47.1		0.1	0.01	7 56 15.7	16.6	0.9	0.81
47.6		0.6	0.36	17.5		0.9	0.81
7 17 41.4	41.0	0.4	0.16	7 19 40.0	39.8	0.2	0.04
40.5		0.5	0.25	39.7		0.1	0.01
7 12 47.1	47.1	0.0	0.00	7 6 20.4	20.7	0.3	0.09
47.0		0.1	0.01	21.0		0.3	0.09
7 10 4.5	3.7	0.8	0.64	7 28 45.7	46.3	0.6	0.36
3.9		0.2	0.04	46.8		0.5	0.25
2.7		1.0	1.00				

Um nun den mittleren Fehler einer Beobachtung zu erhalten, nehme man zunächst allgemein an, daß die Zahl der beobachteten Sterne gleich n sei, und daß man für den ersten Stern m_1 Beobachtungen erhalten habe, für den zweiten m_2 Beobachtungen, usw. Bezeichnet man jetzt die dem ersten Sterne entsprechende Summe der v^2 mit $[vv]_1$, die dem zweiten Stern entsprechende mit $[vv]_2$ usw., so erhält man der ersten Gleichung (10) zufolge

$$\varepsilon^2 = \frac{[vv]_1}{m_1 - 1}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{[vv]_2}{m_2 - 1}, \qquad \cdots, \qquad \varepsilon^2 = \frac{[vv]_n}{m_n - 1}$$

*) *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 306f.

Da das Gewicht des ersten dieser n Werte von ε^2 gleich $m_1 - 1$, das des zweiten gleich $m_2 - 1$ usw. ist, so ist der wahrscheinlichste Wert von ε^2, nach Gleichung (2), gleich

$$\frac{\varepsilon^2(m_1 - 1) + \varepsilon^2(m_2 - 1) + \cdots + \varepsilon^2(m_n - 1)}{(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1)} = \frac{[vv]_1 + [vv]_2 + \cdots + [vv]_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n}$$

In dem vorliegenden Falle ist nun die Summe aller v^2, d. h. die Summe $[vv]_1 + [vv]_2 + \cdots + [vv]_n = 7{\cdot}76$, ferner ist $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 25$ und $n = 10$; somit ergibt sich für den wahrscheinlichsten Wert des Quadrates des mittleren Fehlers einer Beobachtung $\varepsilon^2 = 7{\cdot}76 : 15$. Hieraus folgt

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{7{\cdot}76}{15}} = \pm 0''.72$$

Da für den ersten Stern zwei Beobachtungen vorliegen, so ist der mittlere Fehler des Mittels $7^\circ 52' 23''.8$ gleich $\varepsilon : \sqrt{2} = \pm 0''.51$. Für denselben Stern sei nun durch eine andere Beobachtungsreihe $\delta = 7^\circ 52' 23''.0$ und als mittlerer Fehler dieses δ der Wert $\pm 0''.33$ gefunden worden. Will man jetzt den wahrscheinlichsten Wert von δ ableiten und den mittleren Fehler desselben bestimmen, so hat man zunächst die Gewichte der zwei für δ erhaltenen Resultate zu berechnen. Mit Hilfe der Gleichung (9) erhält man aber, wenn p_1 das Gewicht des ersten und p_2 das Gewicht des zweiten Wertes von δ bedeutet,

$$p_2 = \left(\frac{0{\cdot}51}{0{\cdot}33}\right)^2 p_1$$

oder, wenn $p_1 = 1$ gesetzt wird,

$$p_1 = 1{\cdot}0, \qquad p_2 = 2{\cdot}4$$

Somit ist der wahrscheinlichste Wert von δ

$$\delta = 7^\circ 52' \frac{23''.8 + 2{\cdot}4 \times 23''.0}{3{\cdot}4} = 7^\circ 52' 23''.24$$

Dieser Wert hat das Gewicht $3{\cdot}4$. Da nun der mittlere Fehler desjenigen Wertes von δ, dessen Gewicht als Einheit gewählt wurde, gleich $0''.51$ ist, so ist der mittlere Fehler von $7^\circ 52' 23''.24$ gleich $0''.51 : \sqrt{3 \cdot 4} = 0''.28$.

7. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Zwischen den Unbekannten x, y, z, ..., den als gegeben betrachteten Koeffizienten a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... und den durch Beobachtung zu ermittelnden Größen n_1, n_2, ... mögen die linearen Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - n_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - n_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \tag{12}$$

deren Zahl größer als diejenige der Unbekannten sein soll. Substituiert man für n_1, n_2, ... ihre beobachteten und demnach mehr oder weniger fehlerhaften Werte, so ist es im allgemeinen nicht möglich, Werte von x, y, z, ... zu finden, welche die vorigen Gleichungen völlig befriedigen; vielmehr unterscheiden sich die

auf der linken Seite der Gleichungen (12) stehenden Ausdrücke durchweg mehr oder weniger von 0, welche Werte man auch für die Unbekannten annimmt. Um dies durch Gleichungen auszudrücken, setze man

$$(12^a)\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \cdots - n_1 &= v_1\\ a_2x + b_2y + c_2z + \cdots - n_2 &= v_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo v_1, v_2, ... die Werte bezeichnen, welche man für die linken Seiten erhält, wenn für x, y, z, ... irgend ein Wertsystem angenommen wird. Es werde jetzt vorausgesetzt, daß die beobachteten Werte n_1, n_2, ... gleich genau sind oder, anders ausgedrückt, daß die Gleichungen (12^a) dasselbe Gewicht haben; in Übereinstimmung mit dem bei den Gleichungen (1) angewandten Prinzip sollen dann als wahrscheinlichste Werte von x, y, z, ... diejenigen betrachtet werden, für welche die Summe der Fehlerquadrate, d. h. die Summe $v_1^2 + v_2^2 + \cdots = [vv]$ ein Minimum ist. Aus (12^a) erhält man als Summe der Fehlerquadrate

$$(a_1x + b_1y + c_1z + \cdots - n_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z + \cdots - n_2)^2 + \cdots$$

Damit dieser Ausdruck seinen kleinsten Wert erhalte, müssen die ersten partiellen Differentialquotienten desselben, genommen nach x, y, z, ... verschwinden. Führt man die Differentiation aus und setzt zur Abkürzung

$$(13)\qquad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots &= [aa]\\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots &= [ab] = [ba]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + \cdots &= [an] = [na]\\ b_1^2 + b_2^2 + b_2^2 + \cdots &= [bb]\\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \cdots &= [bc] = [cb]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man die zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von x, y, z, ... dienenden Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [an]\\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bn]\\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \cdots &= [cn]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, deren Zahl gleich derjenigen der Unbekannten ist, nennt man die Normalgleichungen, während die Gleichungen (12^a) als Bedingungsgleichungen bezeichnet werden.

Sind die Gewichte der Bedingungsgleichungen voneinander verschieden, hat z. B. n_1 das Gewicht p_1, n_2 das Gewicht p_2 usw., so multipliziere man jede Gleichung mit der Quadratwurzel aus dem zugehörigen Gewicht, wie das bereits früher bei der Bildung der Gleichungen (4) aus den Gleichungen (3) geschehen ist. Setzt man dann

$$\begin{aligned} a_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{a}_1, \quad b_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{b}_1, \quad \ldots, \quad n_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{n}_1,\\ a_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{a}_2, \quad b_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad n_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{n}_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man Gleichungen von der Form (12ª), denen allen dasselbe Gewicht zukommt*). Der Fall, wo die Bedingungsgleichungen verschiedene Gewichte haben, ist damit auf denjenigen zurückgeführt, wo die Gewichte für alle Gleichungen dieselben sind. In der Folge wird nun vorausgesetzt, daß die Gleichungen (12ª) bereits die mit den Quadratwurzeln aus den zugehörigen Gewichten multiplizierten Bedingungsgleichungen darstellen.

Bevor gezeigt wird, in welcher Weise man die Normalgleichungen auflöst und die mittleren Fehler der Unbekannten bestimmt, sind noch einige Bemerkungen bezüglich der numerischen Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen zu machen. Sind die in (12), bzw. (12ª) enthaltenen Koeffizienten an Größe wesentlich voneinander verschieden, so empfiehlt es sich, zunächst den größten Koeffizienten jeder Unbekannten aufzusuchen; für x sei dies a_m, für y sei es b_n, für z sei es c_s, usw., endlich sei n_z der größte der Werte n. Man dividiere nun sämtliche a durch a_m, sämtliche b durch b_n usw. und setze

$$\frac{a_m x}{n_z} = \xi, \qquad \frac{b_n y}{n_z} = \eta, \qquad \frac{c_s z}{n_z} = \zeta, \qquad \ldots;$$

die Gleichungen (12ª) nehmen dann die Form an

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{a_m}\xi + \frac{b_1}{b_n}\eta + \frac{c_1}{c_s}\zeta + \cdots - \frac{n_1}{n_z} = v_1' \\ &\frac{a_2}{a_m}\xi + \frac{b_2}{b_n}\eta + \frac{c_2}{c_s}\zeta + \cdots - \frac{n_2}{n_z} = v_2' \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{15}$$

Es entstehen also wieder Gleichungen von der Form (12ª), deren Koeffizienten aber sämtlich zwischen den Grenzen ± 1 liegen.

Man nehme jetzt an, daß die Gleichungen (12ª) bereits die in der eben erläuterten Weise transformierten oder homogen gemachten Bedingungsgleichungen darstellen. Um dann die Koeffizienten der Normalgleichungen (14) zu erhalten, kann man sich einer Produktentafel bedienen; indessen ist es notwendig, die Richtigkeit der Endresultate zu prüfen. Zu diesem Zwecke bildet man die Summen

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 + c_1 + \cdots + n_1 = s_1 \\ &a_2 + b_2 + c_2 + \cdots + n_2 = s_2 \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{16}$$

und ferner

$$\begin{aligned} &a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots = [as] \\ &b_1 s_1 + b_2 s_2 + \cdots = [bs] \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots = [ns] \\ &n_1^2 + n_2^2 + \cdots = [nn] \end{aligned} \tag{17}$$

Wenn man jetzt die erste der Gleichungen (16) mit a_1, die zweite mit a_2, ... multipliziert und dann alle Gleichungen addiert, wenn man ferner die erste der Glei-

*) Ist nämlich ε_1 der mittlere Fehler von n_1 und ε der m. F. der Gewichtseinheit, so ist $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$; folglich ist der m. F. von $n_1\sqrt{p_1}$ gleich $\varepsilon_1\sqrt{p_1} = \varepsilon$. Ebenso ist der m. F. von $n_2\sqrt{p_2}$ gleich ε, usw.

chungen (16) mit b_1, die zweite mit b_2, ... multipliziert und wieder alle Gleichungen addiert usw., so erhält man

$$(18)\qquad \begin{aligned} [aa] + [ab] + [ac] + \cdots + [an] &= [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] + \cdots + [bn] &= [bs] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [an] + [bn] + [cn] + \cdots + [nn] &= [ns] \end{aligned}$$

Sind also die berechneten Werte $[aa]$, $[ab]$, ..., $[nn]$ fehlerfrei, so müssen sie die Gleichungen (18) befriedigen.

Zur Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen kann man auch eine Quadrattafel benutzen. Für die Anwendung der letzteren ist zu berücksichtigen, daß beispielsweise

$$2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$$

gesetzt werden kann und demnach, wenn in Übereinstimmung mit der vorhin angewandten Bezeichnung

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots = [(a + b)^2]$$

gesetzt wird,

$$(18^a)\qquad [ab] = \tfrac{1}{2}\{[(a + b)^2] - [aa] - [bb]\}$$

ist. Man bilde nun die folgenden Quadratsummen:

$$\begin{matrix} [aa], & [(a+b)^2], & [(a+c)^2], & \ldots, & [(a+n)^2] \\ & [bb], & [(b+c)^2], & \ldots, & [(b+n)^2] \\ & & [cc], & \ldots, & [(c+n)^2] \\ & & & & \cdots\cdots \\ & & & & [nn] \end{matrix}$$

Außerdem berechne man

$$s_1^2 + s_2^2 + \cdots = [ss]$$

Um eine Kontrollformel für die Quadratsummen zu erhalten, erhebe man die Gleichungen (16) ins Quadrat, addiere sie dann und mache hierauf von der Gleichung (18^a) und den dieser analogen Gleichungen Gebrauch. Bedeutet m die Anzahl der Unbekannten, so ergibt sich

$$(19)\qquad \begin{aligned} [ss] + (m-1)\{[aa] + [bb] + [cc] + \cdots + [nn]\} \\ = [(a+b)^2] + [(a+c)^2] + \cdots + [(a+n)^2] \\ + [(b+c)^2] + \cdots + [(b+n)^2] \\ + \cdots \end{aligned}$$

Genügen die für die Quadratsummen gefundenen Werte dieser Gleichung, so wendet man die Formel (18^a) und die ihr analogen an und erhält damit die gesuchten Koeffizienten $[ab]$, $[ac]$, ..., $[an]$, $[bc]$, ... $[bn]$, ... Zum Schluß bilde man noch die Summe

$$(20)\qquad \begin{aligned} S = [ab] + [ac] + \cdots + [an] \\ + [bc] + \cdots + [bn] \\ + \cdots \end{aligned}$$

und hat dann zur Kontrolle der Berechnung die durch Summierung der ins Quadrat erhobenen Gleichungen (16) entstehende Formel

$$(21)\qquad 2S = [ss] - \{[aa] + [bb] + \cdots + [nn]\}$$

8. Auflösung der Normalgleichungen. Mittlere Fehler der Unbekannten. Bei den in der sphärischen Astronomie vorkommenden Aufgaben handelt es sich gewöhnlich um Normalgleichungen mit 2, 3 oder 4 Unbekannten. Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt nach demselben Prinzip; aus didaktischen Gründen soll aber die Auflösung der Normalgleichungen mit 3 Unbekannten voraufgestellt werden.

I. Normalgleichungen mit 3 Unbekannten. Die Normalgleichungen seien

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [an] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bn] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cn] \end{aligned} \tag{22}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{[ab]}{[aa]}$ und subtrahiert das Produkt von der zweiten Gleichung, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = [bb]_1, \qquad [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} = [bc]_1, \qquad [bn] - \frac{[ab][an]}{[aa]} = [bn]_1 \tag{22^1}$$

gesetzt wird,

$$[bb]_1 y + [bc]_1 z = [bn]_1 \tag{22^2}$$

Multipliziert man die erste Gleichung (22) mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ und subtrahiert das Produkt von der dritten Gleichung (22), so folgt, wenn

$$[cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} = [cc]_1, \qquad [cn] - \frac{[ac][an]}{[aa]} = [cn]_1 \tag{22^3}$$

gesetzt und die zweite Gleichung (22^1) berücksichtigt wird,

$$[bc]_1 y + [cc]_1 z = [cn]_1 \tag{22^4}$$

Wenn man jetzt das Produkt aus (22^2) und $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$ von (22^4) subtrahiert und

$$[cc]_1 - \frac{[bc]_1[bc]_1}{[bb]_1} = [cc]_2, \qquad [cn]_1 - \frac{[bc]_1[bn]_1}{[bb]_1} = [cn]_2 \tag{22^5}$$

setzt, so erhält man die zur Bestimmung von z dienende Gleichung

$$[cc]_2 z = [cn]_2 \tag{22^6}$$

Es läßt sich nun zeigen (vergl. *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 353 ff.), daß der Koeffizient $[cc]_2$ gleichzeitig das Gewicht von z angibt; wenn also ε den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet, so ergibt sich für den mittleren Fehler von z

$$E(z) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[cc]_2}} \tag{22^7}$$

Die zur Berechnung von ε dienende Gleichung soll hier ohne Beweis mitgeteilt werden; ihre Ableitung findet man bei *Oppolzer*, a. a. O., S. 336 ff. Man bilde zunächst

$$[nn]_1 = [nn] - \frac{[an][an]}{[aa]}, \qquad [nn]_2 = [nn]_1 - \frac{[bn]_1[bn]_1}{[bb]_1}, \qquad [nn]_3 = [nn]_2 - \frac{[cn]_2[cn]_2}{[cc]_2} \tag{22^8}$$

Bedeutet dann m die Anzahl der Bedingungsgleichungen, so hat man

$$(22^9) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_3}{m-3}}$$

Zur Kontrolle der vorigen Rechnungen bilde man die Summen

$$(23) \qquad \begin{aligned} [as] &= [aa]+[ab]+[ac]+[an] \\ [bs] &= [ab]+[bb]+[bc]+[bn] \\ [cs] &= [ac]+[bc]+[cc]+[cn] \\ [ns] &= [an]+[bn]+[cn]+[nn] \end{aligned}$$

und ferner

$$(23^1) \quad [bs]_1 = [bs] - \frac{[ab][as]}{[aa]}, \quad [cs]_1 = [cs] - \frac{[ac][as]}{[aa]}, \quad [cs]_2 = [cs]_1 - \frac{[bc]_1[bs]_1}{[bb]_1},$$

$$(23^2) \quad [ns]_1 = [ns] - \frac{[an][as]}{[aa]}, \quad [ns]_2 = [ns]_1 - \frac{[bn]_1[bs]_1}{[bb]_1}, \quad [ns]_3 = [ns]_2 - \frac{[cn]_2[cs]_2}{[cc]_2};$$

ist nun alles richtig gerechnet, so müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein

$$(23^3) \qquad \begin{aligned} [bs]_1 &= [bb]_1 + [bc]_1 + [bn]_1 \\ [cs]_2 &= [cc]_2 + [cn]_2 \\ [nn]_3 &= [ns]_3 \end{aligned}$$

Die Anwendung der vorhin angegebenen Formeln gestaltet sich sehr einfach, wenn man sich des folgenden aus den Abteilungen A und B bestehenden Schemas bedient; um die nachstehende Erläuterung desselben zu vereinfachen, sind die Kolumnen in A mit X, Y, Z, N, S, in B mit I, II, III und die Zeilen mit arabischen Ziffern bezeichnet worden.

A.

	X	Y	Z	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log[aa]$	$\log[ab]$	$\log[ac]$	$\log[an]$	$\log[as]$
3		$[bb]$	$[bc]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bc]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log[bb]_1$	$\log[bc]_1$	$\log[bn]_1$	$\log[bs]_1$
7			$[cc]$	$[cn]$	$[cs]$
8	$\log\frac{[ac]}{[aa]}$		$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
9			$[cc]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
10	$\log\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
11			$[cc]_2$	$[cn]_2$	$[cs]_2$
12			$\log[cc]_2$	$\log[cn]_2$	$\log[cs]_2$

B.

	I	*II*	*III*
1		$[nn]$	$[ns]$
2	$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$\frac{[an]}{[aa]}[an]$	$\frac{[an]}{[aa]}[as]$
3		$[nn]_1$	$[ns]_1$
4	$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
5		$[nn]_2$	$[ns]_2$
6	$\log \frac{[cn]_2}{[cc]_2}$	$\frac{[cn]_2}{[cc]_2}[cn]_2$	$\frac{[cn]_2}{[cc]_2}[cs]_2$
7		$[nn]_3$	$[ns]_3$
8		$\log [nn]_3$	

Zeile 1 der Abteilung A enthält die Zahlenwerte von $[aa]$, ..., $[as]$, Zeile 2 ihre Logarithmen; Zeile 3 enthält die Zahlenwerte von $[bb]$, ..., $[bs]$. In X 4 setzt man den $\log \frac{[ab]}{[aa]}$ und daneben die Zahlenwerte von $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$, ..., $\frac{[ab]}{[aa]}[as]$. Durch Subtraktion der in den Zeilen 3 und 4 übereinander stehenden Zahlen ergeben sich, den Gleichungen (22^1) und (23^1) zufolge, die Werte von $[bb]_1$, ..., $[bs]_1$; diese setzt man in die fünfte Zeile und ihre Logarithmen in die darauf folgende. In die siebente Zeile setze man $[cc]$, $[cn]$, $[cs]$ und in X, 8 den $\log \frac{[ac]}{[aa]}$; sodann bilde man die Produkte $\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$, ..., $\frac{[as]}{[aa]}[as]$. Zeile 9 enthält die durch die Gleichungen (22^3) und (23^1) definierten Differenzen $[cc]_1$, ..., $[cs]_1$. In X, 10 wird der $\log \frac{[bc]_1}{[bb]_1}$ angegeben; auf gleicher Höhe stehen die Produkte $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$, ..., $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$. Zeile 11 enthält die durch die Gleichungen (22^5) und (23^1) definierten Differenzen $[cc]_2$, ..., $[cs]_2$. Mit Hilfe von $[cc]_2$ und $[cn]_2$ läßt sich dann der Gleichung (22^6) zufolge x bestimmen.

Die Abteilung B dient zur Berechnung von $[nn]_3$ und $[ns]_3$, unter Zuhilfenahme der Gleichungen (22^8) und (23^2). Hat man $[nn]_3$ gefunden, so läßt sich aus (22^9) der mittlere Fehler der Gewichtseinheit (ε) bestimmen und endlich aus (22^7) $E(x)$, d. h. der mittlere Fehler von x. Das Produkt aus $E(x)$ und 0.6745 gibt, der Gleichung (5) zufolge, den wahrscheinlichen Fehler von x.

Um den Wert von y und seinen mittleren Fehler zu finden, gibt man den Normalgleichungen die Anordnung

$$\begin{aligned} [aa]x + [ac]z + [ab]y &= [an] \\ [ac]x + [cc]z + [bc]y &= [cn] \\ [ab]x + [bc]z + [bb]y &= [bn], \end{aligned}$$

wo also wieder die symmetrisch zu einer Diagonale gelegenen Koeffizienten der Unbekannten einander gleich sind. Die Gleichungen werden sodann nach demselben Verfahren aufgelöst, welches für die ursprüngliche Anordnung der Gleichungen angewandt wurde. Man hat also an Stelle der Abteilung A des obigen Schemas die folgende zu benutzen, in der lauter aus der vorhergehenden Rechnung bereits bekannte Größen vorkommen, mit Ausnahme der in Zeile 10 stehenden Produkte und der in Zeile 11 enthaltenen Differenzen

$$[bb]_2 = [bb]_1 - \frac{[bc]_1}{[cc]_1}[bc]_1, \quad \ldots, \quad [bs]_2 = [bs]_1 - \frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cs]_1$$

	X	Z	Y	N	S
1	$[aa]$	$[ac]$	$[ab]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ac]$	$\log [ab]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[cc]$	$[bc]$	$[cn]$	$[cs]$
4	$\log \frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
5		$[cc]_1$	$[bc]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
6		$\log [cc]_1$	$\log [bc]_1$	$\log [cn]_1$	$\log [cs]_1$
7			$[bb]$	$[bn]$	$[bs]$
8	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$		$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
9			$[bb]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
10	$\log \frac{[bc]_1}{[cc]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cs]_1$
11			$[bb]_2$	$[bn]_2$	$[bs]_2$
12			$\log [bb]_2$	$\log [bn]_2$	

Zur Kontrolle der Rechnung dienen die Formeln

$$[cs]_1 = [cc]_1 + [bc]_1 + [cn]_1$$
$$[bs]_2 = [bb]_2 + [bn]_2$$

Der Wert von y folgt aus der Gleichung

$$[bb]_2 y = [bn]_2,$$

wobei $[bb]_2$ auch das Gewicht von y angibt. Mit Benutzung des durch die vorhergehende Rechnung bereits gefundenen mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (ε) erhält man als mittleren Fehler von y

$$E(y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb]_2}}$$

Jetzt ist noch x, bzw. der mittlere Fehler von x zu bestimmen. Zu diesem Zwecke schreibe man die Normalgleichungen, wie folgt:

$$[cc]x + [bc]y + [ac]x = [cn]$$
$$[bc]x + [bb]y + [ab]x = [bn]$$
$$[ac]x + [ab]y + [aa]x = [an]$$

und behandle diese in analoger Weise, wie es in der Abteilung A mit den Gleichungen (22) geschehen ist. Die Kolumnen folgen sich also jetzt in der Ordnung Z, Y, X, N, S. Multipliziert man den Koeffizienten, welcher dann in X, 11 erhalten wird, mit x und setzt das Produkt der in N, 11 auftretenden Zahl gleich, so hat man die zur Bestimmung von x dienende Gleichung. Der mittlere Fehler des für x erhaltenen Wertes ist gleich dem obigen ε, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Koeffizienten von x.

Auf S. 19 wurde erwähnt, daß man ein gegebenes System von Bedingungsgleichungen unter gewissen Verhältnissen so transformiert, daß die Koeffizienten der neuen Gleichungen ihrem absoluten Betrage nach gleich oder kleiner als 1 sind. Die ursprünglichen, aber mit der Quadratwurzel aus dem zugehörigen Gewicht bereits multiplizierten Bedingungsgleichungen seien nun

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\mathfrak{x} + \beta_1\mathfrak{y} + \zeta_1\mathfrak{z} + \cdots - \nu_1 = v_1\\
&\alpha_2\mathfrak{x} + \beta_2\mathfrak{y} + \zeta_2\mathfrak{z} + \cdots - \nu_2 = v_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \nu_2, \ldots$ beliebige Werte haben mögen. Bedeuten $\alpha_m, \beta_n, \zeta_s, \ldots$ die größten unter den in diesen Gleichungen vorkommenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \zeta, \ldots$, und ist ν_z der größte Wert unter den ν, so lauten die nach S. 19 transformierten Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} + \frac{\beta_1}{\beta_n}\frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} + \frac{\zeta_1}{\zeta_s}\frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} + \cdots - \frac{\nu_1}{\nu_z} = v'_1\\
&\frac{\alpha_2}{\alpha_m}\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} + \frac{\beta_2}{\beta_n}\frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} + \frac{\zeta_2}{\zeta_s}\frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} + \cdots - \frac{\nu_2}{\nu_z} = v'_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

Führt man hierin die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{\alpha_m} = a_1, \quad \frac{\beta_1}{\beta_n} = b_1, \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_s} = c_1, \quad \ldots, \quad \frac{\nu_1}{\nu_z} = n_1\\
&\frac{\alpha_2}{\alpha_m} = a_2, \quad \frac{\beta_2}{\beta_n} = b_2, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_s} = c_2, \quad \ldots, \quad \frac{\nu_2}{\nu_z} = n_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\\
&\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} = x, \quad \frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} = y, \quad \frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} = z, \quad \ldots,
\end{aligned}$$

so erhält man Gleichungen von der Form (12a). Aus letzteren lassen sich in der vorhin angegebenen Weise die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ und ihre mittleren Fehler ableiten. Multipliziert man die für $x, y, z, \ldots$ und ihre mittleren Fehler gefundenen Werte mit ν_z und dividiert diese Produkte durch α_m, bzw. β_n, bzw. $\zeta_s, \ldots$, so erhält man die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ und ihre mittleren Fehler.

II. Normalgleichungen mit 2 Unbekannten. Nach der ausführlichen Darstellung des bei der Auflösung der Normalgleichungen mit 3 Unbekannten einzuschlagenden Verfahrens bedarf das folgende für zwei Normalgleichungen geltende Schema keiner Erläuterung mehr. Die Gleichungen mögen lauten:

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y &= [an]\\
[ab]x + [bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

Man bilde zunächst die Summen:

$$[aa] + [ab] + [an] = [as]$$
$$[ab] + [bb] + [bn] = [bs]$$

Sodann wende man das Schema an:

A′.

	X	Y	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ab]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[bb]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log [bb]_1$	$\log [bn]_1$	$\log [bs]_1$

B′.

I	II	III
$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$[nn]$ $\frac{[an]}{[aa]}[an]$	$[ns]$ $\frac{[an]}{[aa]}[as]$
$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$[nn]_1$ $\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$[ns]_1$ $\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
	$[nn]_2$ $\log [nn]_2$	$[ns]_2$

Kontrollformeln:

$$[bs]_1 = [bb]_1 + [bn]_1$$
$$[nn]_2 = [ns]_2$$

Für den wahrscheinlichsten Wert von y, den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit und den mittleren Fehler von y erhält man, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet,

$$y = \frac{[bn]_1}{[bb]_1}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_2}{m-2}}, \qquad E(y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb]_1}}$$

Um x zu finden, schreibe man die Normalgleichungen wie folgt:

$$[bb]y + [ab]x = [bn]$$
$$[ab]y + [aa]x = [an]$$

und wende an Stelle der Abteilung A′ des vorigen Schemas eine neue an, in der die Kolumnen in der Ordnung Y, X, N, S aufeinander folgen. Setzt man das Produkt aus dem dann in X, 5 erhaltenen Koeffizienten und x gleich der in N, 5 auftretenden Zahl, so hat man damit die zur Bestimmung von x dienende Gleichung.

Der Quotient aus dem vorhin gefundenen ε und der Quadratwurzel des Koeffizienten von x gibt den mittleren Fehler von x.

III. Normalgleichungen mit 4 Unbekannten.

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t = [an]$$
$$[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t = [bn]$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t = [cn]$$
$$[ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t = [dn]$$

Man bilde die Summen:

$$[aa] + [ab] + [ac] + ad] + [an] = [as]$$
$$[ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [bn] = [bs]$$
$$[ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [cn] = [cs]$$
$$[ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [dn] = [ds]$$

Hierauf wende man das Schema an:

A″.

	X	Y	Z	T	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ab]$	$\log [ac]$	$\log [ad]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bc]_1$	$[bd]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log [bb]_1$	$\log [bc]_1$	$\log [bd]_1$	$\log [bn]_1$	$\log [bs]_1$
7			$[cc]$	$[cd]$	$[cn]$	$[cs]$
8	$\log \frac{[ac]}{[aa]}$		$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
9			$[cc]_1$	$[cd]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
10	$\log \frac{[bc]_1}{[bb]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bd]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
11			$[cc]_2$	$[cd]_2$	$[cn]_2$	$[cs]_2$
12			$\log [cc]_2$	$\log [cd]_2$	$\log [cn]_2$	$\log [cs]_2$
13				$[dd]$	$[dn]$	$[ds]$
14	$\log \frac{[ad]}{[aa]}$			$\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[as]$
15				$[dd]_1$	$[dn]_1$	$[ds]_1$
16	$\log \frac{[bd]_1}{[bb]_1}$			$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bd]_1$	$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
17				$[dd]_2$	$[dn]_2$	$[ds]_2$
18	$\log \frac{[cd]_2}{[cc]_2}$			$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cd]_2$	$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cn]_2$	$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cs]_2$
19				$[dd]_3$	$[dn]_3$	$[ds]_3$
20				$\log [dd]_3$	$\log [dn]_3$	$\log [ds]_3$

B″.

I	*II*	*III*
$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$\frac{[nn]}{[an]}[an]$	$\frac{[ns]}{[an]}[as]$
$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$\frac{[nn]_1}{[bn]_1}[bn]_1$	$\frac{[ns]_1}{[bn]_1}[bs]_1$
$\log \frac{[cn]_2}{[cc]_2}$	$\frac{[nn]_2}{[cn]_2}[cn]_2$	$\frac{[ns]_2}{[cn]_2}[cs]_2$
$\log \frac{[dn]_3}{[dd]_3}$	$\frac{[nn]_3}{[dn]_3}[dn]_3$	$\frac{[ns]_3}{[dn]_3}[ds]_3$
	$[nn]_4$ $\log [nn]_4$	$[ns]_4$

Kontrollformeln:

$$[bs]_1 = [bb]_1 + [bc]_1 + [bd]_1 + [bn]_1$$
$$[cs]_2 = [cc]_2 + [cd]_2 + [cn]_2$$
$$[ds]_3 = [dd]_3 + [dn]_3$$
$$[ns]_4 = [nn]_4$$

Für den wahrscheinlichsten Wert von t, den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit und den mittleren Fehler von t ergibt sich, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet,

$$t = \frac{[dn]_3}{[dd]_3}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_4}{m-4}}, \qquad E(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[dd]_3}}$$

Um den wahrscheinlichsten Wert von x zu finden, gebe man den Normalgleichungen die Anordnung

$$[aa]x + [ab]y + [ad]t + [ac]z = [an]$$
$$[ab]x + [bb]y + [bd]t + [bc]z = [bn]$$
$$[ad]x + [bd]y + [dd]t + [cd]z = [dn]$$
$$[ac]x + [bc]y + [cd]t + [cc]z = [cn]$$

Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt nach demselben Prinzip, welches bei der ursprünglichen Anordnung angewandt wurde und durch die Abteilung A″ des vorigen Schemas hinlänglich klar gestellt worden ist. Man hat also zunächst den Kolumnen die Reihenfolge *X*, *Y*, *T*, *Z*, *N*, *S* zu geben; setzt man dann das Produkt aus dem in *Z*, 19 erhaltenen Koeffizienten und x der in *N*, 19 gefundenen Zahl gleich, so ist damit die zur Bestimmung von x dienende Gleichung gewonnen. Der Quotient aus dem vorhin gefundenen ε und der Quadratwurzel des Koeffizienten von x gibt den mittleren Fehler von x.

Zur Bestimmung von x kann man die Normalgleichungen in folgender Weise anordnen:

$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [bd]y + [ad]x &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [bc]y + [ac]x &= [cn]\\
[bd]t + [bc]z + [bb]y + [ab]x &= [bn]\\
[ad]t + [ac]z + [ab]y + [aa]x &= [an]
\end{aligned}$$

Hat man hieraus x gefunden, so setze man, um y zu bestimmen,

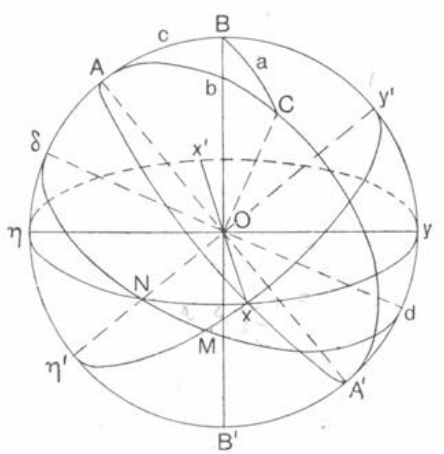
$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [ad]x + [bd]y &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [ac]x + [bc]y &= [cn]\\
[ad]t + [ac]z + [aa]x + [ab]y &= [an]\\
[bd]t + [bc]z + [ab]x + [bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

Kapitel III.

Sphärische Trigonometrie.

9. Einleitung. Man beschreibe um den Punkt O (Fig. 1) eine Kugel mit dem Radius 1 und lege durch O die Ebenen OAB, OAC, OBC; die Bögen AB, AC, BC der größten Kreise, in denen die Kugelfläche von den genannten Ebenen geschnitten wird, bilden dann ein sphärisches Dreieck und werden als Seiten dieses Dreiecks bezeichnet. Da der Radius der Kugel als Längeneinheit gewählt wurde, so ist AB gleich dem Winkel AOB, desgleichen ist AC gleich dem Winkel AOC und BC gleich dem Winkel BOC. Unter dem Winkel, den zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks z. B. AB und AC miteinander bilden, versteht man den Winkel zwischen den in A an AB und AC gezogenen Tangenten; derselbe ist also gleich dem Winkel, den die Ebenen AOB und AOC miteinander bilden.

Fig. 1.



Errichtet man in O senkrecht zu der Ebene AOB eine Gerade, und sind x und x' die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kugelfläche, so ist der von O aus gesehene Winkelabstand zwischen x, bzw. x' und einem beliebigen Punkte des größten Kreises $ABA'A$ gleich 90°. Die beiden Punkte der Sphäre nun, welche von allen Punkten eines dieser Sphäre angehörigen größten Kreises um 90° abstehen, werden die Pole des betreffenden Kreises genannt; x und x' sind also die Pole des Kreises $ABA'A$. Man lege jetzt durch Ox eine Ebene senkrecht zu OB und eine zweite senkrecht zu OA, diese Ebenen schneiden die Kugelfläche in den größten Kreisen