universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel I. Reihenentwicklungen, Interpolationsformeln und Formeln für numerische
Differentiation.

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Kapitel I.

Reihenentwicklungen, Interpolationsformeln und Formeln für numerische Differentiation.

1. Reihenentwicklungen. I. In der Differentialrechnung werden die Reihen abgeleitet

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots && x \mp \infty \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots && x \mp \infty \\
\operatorname{tang} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots && -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi \\
\operatorname{cotg} x &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \cdots && -\pi < x < +\pi \\
\sec x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots && -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi \\
\operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \cdots && -\pi < x < +\pi
\end{aligned} \tag{1}
$$

und ferner

$$
\begin{aligned}
x &= \sin x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{3}{40}\sin^5 x + \cdots && -1 \leqq \sin x \leqq +1 \\
x &= \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \cdots && -1 \leqq \operatorname{tang} x \leqq +1
\end{aligned} \tag{2}
$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen (1) hat man sich den Winkel x als in Teilen des Radius ausgedrückt zu denken, d. h.: Beschreibt man um den Scheitel des Winkels mit einem beliebigen Radius einen Kreis und wählt den Radius als Längeneinheit, so ist x gleich der Länge des Bogens, welchen die Schenkel des Winkels auf dem Kreise ausschneiden. Wenn nun x'' die Anzahl der Bogensekunden angibt, welche in einem Winkel, dem die Bogenlänge x entspricht, enthalten sind, so ist x gleich dem Produkt aus x'' und der Länge des einem Winkel von $1''$ entsprechenden Bogens; man hat also $x = x'' \operatorname{arc} 1''$. Mit Rücksicht darauf, daß $\operatorname{arc} 1''$ sich um weniger als eine Einheit der 14^{ten} Dezimale von $\sin 1''$ unterscheidet, darf auch

$$x = x'' \sin 1'' \qquad [\log \sin 1'' = 4.6855749] \tag{3}$$

gesetzt werden; diese letztere Form ist die gewöhnlich angewandte.

Mit Hilfe der Gleichung (3) kann man einen in Bogensekunden gegebenen Winkel in Teilen des Radius ausdrücken; ist umgekehrt der Winkel in Teilen des

Radius gegeben, und wünscht man, seinen Wert in Bogensekunden zu kennen, so hat man die Gleichung anzuwenden

$$x'' = \frac{x}{\sin 1''}, \qquad \log \sin 1'' = 4.685\,5749 \tag{3a}$$

Soll dagegen der Winkel in Bogenminuten (x'), bzw. in Graden (x°) ausgedrückt gefunden werden, so ist die letzte Gleichung durch

$$x' = \frac{x}{\operatorname{arc} 1'}, \qquad \log \operatorname{arc} 1' = 6.463\,7261 \tag{3b}$$

bzw.

$$x^\circ = \frac{x}{\operatorname{arc} 1^\circ}, \qquad \log \operatorname{arc} 1^\circ = 8.241\,8774 \tag{3c}$$

zu ersetzen.

Aus den drei ersten Gleichungen (1) in Verbindung mit der Gleichung (3) folgt noch, daß, wenn x so klein ist, daß das Quadrat und die höheren Potenzen von x vernachlässigt werden können,

$$\sin x = x = x'' \sin 1'', \qquad \cos x = 1, \qquad \operatorname{tang} x = x = x'' \sin 1''$$

ist. Gewöhnlich schreibt man die erste und letzte dieser Gleichungen in der Form $\sin x = x \sin 1''$, bzw. $\operatorname{tang} x = x \sin 1''$, indem man dabei stillschweigend voraussetzt, daß x in Bogensekunden ausgedrückt ist.

II. Es sei z eine komplexe Variabele, deren Modul kleiner als 1 ist, es sei also

$$z = \varrho e^{i\omega} = \varrho(\cos\omega + i \sin\omega), \qquad \varrho < 1,$$

ferner sei $l(1+z)$ der natürliche Logarithmus von $1+z$; man hat dann bekanntlich

$$l(1+z) = \varrho e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho^2 e^{2i\omega} + \tfrac{1}{3}\varrho^3 e^{3i\omega} - \cdots$$

Nun folgt aus dem Ausdruck für z, wenn

$$\begin{aligned} r \sin\Theta &= \varrho \sin\omega \\ r \cos\Theta &= 1 + \varrho \cos\omega \end{aligned} \tag{4}$$

oder auch

$$r = +\sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2} \tag{5}$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\varrho \sin\omega}{1 + \varrho\cos\omega} \tag{6}$$

gesetzt wird,

$$1 + z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta) = re^{i\Theta}$$

Somit ist

$$l(1+z) = lr + i\Theta$$

Ersetzt man hier $l(1+z)$ durch die oben angegebene Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} lr + i\Theta &= \varrho e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho^2 e^{2i\omega} + \tfrac{1}{3}\varrho^3 e^{3i\omega} - \cdots \\ &= \varrho(\cos\omega + i\sin\omega) - \tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos 2\omega + i \sin 2\omega) + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Teile dieser Entwicklung erhält man

$$lr = \varrho\cos\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3\cos 3\omega - \cdots \tag{8}$$

$$\Theta = \varrho\sin\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3\sin 3\omega - \cdots \tag{9}$$

Da $\varrho < 1$ und $r > 0$ vorausgesetzt wird, so geht aus der zweiten Gleichung (4) hervor, daß $\cos\Theta > 0$ und somit, wenn die Werte von $\Theta > 2\pi$ ausgeschlossen

werden, $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist. Wenn also zwei Gleichungen von der Form (4) oder von der Form (5) und (6) gegeben sind, und $\varrho < 1$ sowie $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist, so gelten für lr und Θ die Reihenentwicklungen (8) und (9). Um die Reihe für den *Briggs*schen Logarithmus von r zu erhalten, hat man die rechte Seite der Gleichung (8) mit dem Modul $M = 0.434\,29448$ zu multiplizieren; es wird demnach

$$\log r = M[\varrho \cos\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3 \cos 3\omega - \cdots], \quad \log M = 9.637\,7843$$

III. Ersetzt man in den Gleichungen (4), (5) und (6) ω durch $\pi - x$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} r \sin\Theta &= \varrho \sin x \\ r \cos\Theta &= 1 - \varrho \cos x \end{aligned} \tag{10}$$

bzw.

$$r = +\sqrt{1 - 2\varrho\cos x + \varrho^2} \tag{11}$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\varrho \sin x}{1 - \varrho \cos x} \tag{12}$$

Nun wurden aus (4), (5) und (6) die Reihenentwicklungen (8) und (9) abgeleitet; setzt man auch in diesen $\omega = \pi - x$, so erhält man die folgenden, den Gleichungen (10), (11) und (12) entsprechenden Entwicklungen, welche wie die Reihen (8) und (9) für $\varrho < 1$ und $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ gelten:

$$lr = -\varrho\cos x - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cos 2x - \tfrac{1}{3}\varrho^3 \cos 3x - \cdots \tag{13}$$

$$\Theta = +\varrho \sin x + \tfrac{1}{2}\varrho^2 \sin 2x + \tfrac{1}{3}\varrho^3 \sin 3x + \cdots \tag{14}$$

Multipliziert man die rechte Seite der Gleichung (13) mit dem Modul $M = 0.43429\ldots$, so erhält man die Reihe für den *Briggs*schen Logarithmus von r.

IV. Es sei eine Gleichung gegeben von der Form

$$\operatorname{tang} y = \frac{1+m}{1-m} \operatorname{tang}\alpha, \tag{15}$$

wobei m ein positiver oder negativer echter Bruch sein soll. Substituiert man diesen Wert von $\operatorname{tang} y$ in die Formel

$$\operatorname{tang}(y-\alpha) = \frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang} y \operatorname{tang}\alpha},$$

so erhält man

$$\operatorname{tang}(y-\alpha) = \frac{m \sin 2\alpha}{1 - m\cos 2\alpha}, \tag{15a}$$

also eine Gleichung von der Form (12); gleichzeitig folgt aus (15a) in Verbindung mit der für m angegebenen Bedingung, daß $-\frac{\pi}{2} \leqq y - \alpha \leqq +\frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann. Der Gleichung (15a) und somit auch der Gleichung (15) entspricht also die aus (14) für $\Theta = y - \alpha$, $\varrho = m$ und $x = 2\alpha$ sich ergebende Reihenentwicklung

$$y = \alpha + m \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}m^2 \sin 4\alpha + \tfrac{1}{3}m^3 \sin 6\alpha + \cdots \tag{16}$$

V. Setzt man

$$\frac{1+m}{1-m} = n$$

oder

$$m = \frac{n-1}{n+1},$$

so wird die Gleichung (15)

$$\text{tang}\, y = n \,\text{tang}\, \alpha \tag{17}$$

und die aus (15) abgeleitete Reihe (16)

$$y = \alpha + \frac{n-1}{n+1}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4\alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6\alpha + \cdots \tag{18}$$

Einer Gleichung von der Form (17) entspricht demnach die für $n > 0$ gültige Reihenentwicklung (18).

In dem Spezialfalle $n = \cos\varepsilon$, also

$$\text{tang}\, y = \cos\varepsilon \,\text{tang}\, \alpha$$

folgt aus (18)

$$y = \alpha - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\alpha - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}^6 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 6\alpha + \cdots \tag{18a}$$

2. Interpolationsformeln. Es seien die Werte einer Funktion $f(x)$ für die äquidistanten Werte $a - 2w$, $a - w$, a, $a + w$, ... des Arguments x gegeben, und man stelle sich zur Aufgabe, den Wert zu bestimmen, welchen $f(x)$ für einen zwischen a und $a + w$ liegenden Wert X des Arguments annimmt. Zur Lösung dieser Aufgabe bedarf man der Differenzen zwischen den gegebenen Funktionswerten. Bedeuten $f(a-2)$, $f(a-1)$, $f(a)$, ... die den Werten $a - 2w$, $a - w$, a, ... des Arguments entsprechenden Funktionswerte, so bilde man zunächst die ersten Differenzen, d. h. die Differenzen zwischen je zwei aufeinander folgenden Funktionswerten, und setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} f(a-1) - f(a-2) &= f'(a - \tfrac{3}{2}) \\ f(a) - f(a-1) &= f'(a - \tfrac{1}{2}) \\ f(a+1) - f(a) &= f'(a + \tfrac{1}{2}) \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo also $a - \frac{3}{2}$ das Mittel aus $a - 1$ und $a - 2$ darstellt, ferner $a - \frac{1}{2}$ gleich dem Mittel aus a und $a - 1$ ist, usw.

Sodann bilde man die zweiten Differenzen, d. h. die Differenzen aus den f', und setze

$$\begin{aligned} f'(a - \tfrac{1}{2}) - f'(a - \tfrac{3}{2}) &= f''(a-1) \\ f'(a + \tfrac{1}{2}) - f'(a - \tfrac{1}{2}) &= f''(a) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ferner bilde man die dritten Differenzen, nämlich

$$f''(a) - f''(a-1) = f'''(a - \tfrac{1}{2})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Fährt man in dieser Weise bis zur vierten Differenz fort und stellt die gegebenen Funktionswerte und ihre Differenzen zusammen, so erhält man das folgende Schema:

Argument					
$a-2w$	$f(a-2)$				
		$f'(a-\frac{3}{2})$			
$a-w$	$f(a-1)$		$f''(a-1)$		
		$f'(a-\frac{1}{2})$		$f'''(a-\frac{1}{2})$	
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$
		$f'(a+\frac{1}{2})$		$f'''(a+\frac{1}{2})$	
$a+w$	$f(a+1)$		$f''(a+1)$		$f^{IV}(a+1)$
		$f'(a+\frac{3}{2})$		$f'''(a+\frac{3}{2})$	
$a+2w$	$f(a+2)$		$f''(a+2)$		
		$f'(a+\frac{5}{2})$			
$a+3w$	$f(a+3)$				

Da der Wert X zwischen a und $a+w$ liegen soll, so kann man $X = a + nw$ setzen, wo n einen positiven echten Bruch bedeutet. Jenachdem nun n gleich oder kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$ ist, und demnach X entweder in der Mitte von a und $a+w$, oder näher bei a, oder näher bei $a+w$ liegt, hat man zur Berechnung des zu X gehörigen Funktionswertes $f(a+n)$ eine andere Formel anzuwenden. Die betreffenden Formeln sollen hier nur angeführt und durch Beispiele erläutert werden, ihre Ableitung findet man unter anderem in *Oppolzer*s Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 13ff.

I. Es sei $n < \frac{1}{2}$. Die Formel lautet dann

$$(19) \qquad f(a+n) = f(a) + n\Big[f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n-1}{2}\Big[f''(a) + \frac{n+1}{3}\Big[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \cdots$$

Beispiel. Dem Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1910 wurden die folgenden Deklinationen der Sonne, d. h. die Abstände des Sonnenmittelpunktes vom Äquator entnommen; dieselben gelten jedesmal für den Berliner mittleren Mittag. Neben den Deklinationen findet man unter f', f'', f''' die ersten, zweiten und dritten Differenzen mitgeteilt; die vierten Differenzen sind so klein, daß sie ohne Nachteil vernachlässigt werden können.

1910	Deklination	f'	f''	f'''
Mai 1	$14^{\circ}52'\,49.''5$			
		$+\,53'\,49.''1$		
4	15 46 38.6		$-\,2'\,20.''0$	
		$+\,51\;\;29.1$		$-\,8.''7$
7	16 38 7.7		$-\,2\;\;28.7$	
		$+\,49\;\;0.4$		$-\,9.1$
10	17 27 8.1		$-\,2\;\;37.8$	
		$+\,46\;\;22.6$		$-\,8.2$
13	18 13 30.7		$-\,2\;\;46.0$	
		$+\,43\;\;36.6$		$-\,7.5$
16	18 57 7.3		$-\,2\;\;53.5$	
		$+\,40\;\;43.1$		
19	19 37 50.4			

Will man jetzt die Deklination der Sonne für den mittleren Berliner Mittag des 8. Mai berechnen, so hat man für den im Vorigen mit a bezeichneten Argumentwert

den mittleren Berliner Mittag des 7. Mai zu wählen, und es wird, da hier $w = 3$ Tage ist,

$$n = \frac{\text{Mai } 8 - \text{Mai } 7}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{n+1}{3} = \frac{4}{9}$$

Ferner gibt die obige Tabelle

$$f(a) = 16^\circ 38' 7''.7, \quad f'(a+\tfrac{1}{2}) = +49' 0''.4, \quad f''(a) = -2' 28''.7, \quad f'''(a+\tfrac{1}{2}) = -9''.1$$

Damit sind die Werte aller in (19) vorkommenden Größen gefunden, und somit könnte man die Aufgabe als gelöst betrachten. Es soll aber noch ein Verfahren erläutert werden, mittels dessen sich die Berechnung des Ausdruckes (19) ausführen läßt, ohne daß man nötig hat, auf die Vorzeichen der Differenzen und deren Koeffizienten zu achten. Man ziehe zuerst durch den Ort, wo in der obigen Tabelle das Argument Mai 8 liegen würde (also unterhalb Mai 7), eine Horizontale; die dieser am nächsten liegenden Differenzen $+49' 0''.4$, $-2' 28''.7$, $-9''.1$ sind dann die für die Formel (19) zu benutzenden Werte von $f'(a+\frac{1}{2})$, $f''(a)$ und $f'''(a+\frac{1}{2})$. Indem nun allgemein mit $|v|$ der absolute Wert einer beliebigen Größe v bezeichnet wird, bilde man das Produkt aus $|f'''(a+\frac{1}{2})| = 9''.1$ und $\left|\frac{n+1}{3}\right| = \frac{4}{9}$, also $9''.1 \times \frac{4}{9} = 4''.0$. Dieses Produkt füge man mit einem solchen Vorzeichen versehen zu $|f''(a)| = 2' 28''.7$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $2' 28''.7$ und dem absoluten Wert $2' 37''.8$ der auf der anderen Seite der Horizontalen gelegenen Differenz f'' zu liegen kommt; man hat also zu bilden $2' 28''.7 + 4''.0 = 2' 32''.7$. Sodann multipliziere man $2' 32''.7$ mit $\left|\frac{n-1}{2}\right| = \frac{1}{3}$ und füge das Produkt $(2' 32''.7)\frac{1}{3} = 50''.9$ mit einem solchen Vorzeichen zu $|f'(a+\frac{1}{2})| = 49' 0''.4$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $49' 0''.4$ und dem absoluten Wert $51' 29''.1$ der jenseits der Horizontalen gelegenen Differenz f' zu liegen kommt; es ist also zu bilden $49' 0''.4 + 50''.9 = 49' 51''.3$. Multipliziert man nun $49' 51''.3$ mit $n = \frac{1}{3}$ und legt das Produkt $(= 16' 37''.1)$ zu der für Mai 7 gültigen Deklination $16^\circ 38' 7''.7$ hinzu, so erhält man für die gesuchte Deklination der Sonne am 8. Mai, mittlerer Mittag Berlin, $16^\circ 54' 44''.8$.

II. Falls $n > \frac{1}{2}$ ist, setze man $1 - n = \nu$ und hat dann

$$(20) \quad f(a+n) = f(a+1) - \nu\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{\nu-1}{2}\left[f''(a+1) - \frac{\nu+1}{3}\left[f'''(a+\tfrac{1}{2}) - \cdots\right.\right.\right.$$

Beispiel. Mit Hilfe der vorigen Tabelle (S. 5) soll die Deklination der Sonne für 1910 Mai 12, 6^h mittlerer Zeit Berlin oder, wenn man 6^h in Dezimalteilen des Tages ausdrückt, für Mai $12 \cdot 25$ berechnet werden. In dem gegenwärtigen Falle hat man unter dem Argumentwert a den mittleren Berliner Mittag (= 0^h mittlerer Zeit Berlin) des 10. Mai zu verstehen, es wird also

$$n = \frac{\text{Mai } 12 \cdot 25 - \text{Mai } 10 \cdot 00}{3} = 0.75 = \frac{3}{4}$$

und somit

$$\nu = \frac{1}{4}, \qquad \frac{\nu-1}{2} = -\frac{3}{8}, \qquad \frac{\nu+1}{3} = \frac{5}{12}$$

Ferner gibt die Tabelle unter der jetzt für a gemachten Annahme

$$f(a+1) = 18^\circ\,13'\,30''.7, \qquad f'(a+\tfrac{1}{2}) = +\,46'\,22''.6, \qquad f''(a+1) = -\,2'\,46''.0,$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2}) = -\,8''.2$$

Bei der Substitution dieser Werte in die Formel (20) kann man in derselben Weise verfahren wie beim vorigen Beispiel. Zieht man zunächst durch den Ort, wo in der Tabelle das Argument Mai $12\cdot25$ liegen würde (also oberhalb Mai 13) eine Horizontale, so stellen die dieser Horizontalen unmittelbar benachbarten Differenzen $+\,46'\,22''.6$, $-\,2'\,46''.0$ und $-\,8''.2$ die für die Gleichung (20) zu benutzenden Werte von $f'(a+\frac{1}{2})$, $f''(a+1)$ und $f'''(a+\frac{1}{2})$ dar. Man bilde nun das Produkt aus $|f'''(a+\frac{1}{2})| = 8''.2$ und $\left|\frac{\nu+1}{3}\right| = \frac{5}{12}$ und erhält so $8''.2 \times \frac{5}{12} = 3''.4$. Dieser Wert ist mit einem solchen Vorzeichen zu $|f''(a+1)| = 2'\,46''.0$ hinzuzufügen, daß das entstehende Resultat zwischen $2'\,46''.0$ und dem absoluten Wert $2'\,37''.8$ der auf der entgegengesetzten Seite der Horizontalen befindlichen Differenz f'' zu liegen kommt, man hat also zu bilden $2'\,46''.0 - 3''.4 = 2'\,42''.6$. Hierauf multipliziere man $2'\,42''.6$ mit $\left|\frac{\nu-1}{2}\right| = \frac{3}{8}$ und füge das Produkt $(2'\,42''.6)\,\frac{3}{8} = 1'\,1''.0$ mit einem solchen Vorzeichen versehen zu $|f'(a+\frac{1}{2})| = 46'\,22''.6$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $46'\,22''.6$ und dem absoluten Wert $43'\,36''.6$ der jenseits der Horizontalen befindlichen Differenz f' zu liegen kommt; man hat also zu bilden $46'\,22''.6 - 1'\,1''.0 = 45'\,21''.6$. Zum Schluß hat man noch $45'\,21''.6$ mit $\nu = \frac{1}{4}$ zu multiplizieren und das Produkt $(= 10'\,20''.4)$ von der für Mai 13 gültigen Deklination $18^\circ\,13'\,30''.7$ zu subtrahieren; für die Deklination der Sonne am 12. Mai, 6^h m. Zt. Berlin, ergibt sich damit $18^\circ\,3'\,10''.3$.

Bei den vorigen zwei Beispielen sind die vierten Differenzen vernachlässigt worden. Sind letztere klein, so lassen sich dieselben dadurch berücksichtigen, daß man als Wert von $f'''(a+\frac{1}{2})$ das Mittel aus den zu beiden Seiten der Horizontalen befindlichen Werten von f''' nimmt; man hätte also bei dem ersten Beispiele $f'''(a+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(8''.7 + 9''.1) = -8''.9$ und bei dem zweiten $f'''(a+\frac{1}{2}) = -7''.8$ zu setzen. Bei einigermaßen großen Werten der vierten Differenz reicht dieses Verfahren aber nicht aus, sondern es muß dann in (19) $f'''(a+\frac{1}{2})$ durch $f'''(a+\frac{1}{2}) + \frac{n-2}{4} f^{IV}(a)$, bzw. in (20) durch $f'''(a+\frac{1}{2}) - \frac{\nu-2}{4} f^{IV}(a+1)$ ersetzt werden.

III. Ist $n = \frac{1}{2}$, so gilt die Formel

$$(21) \qquad f(a+\tfrac{1}{2}) = \frac{f(a)+f(a+1)}{2} - \frac{1}{8}\frac{f''(a)+f''(a+1)}{2} + \frac{3}{128}\frac{f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)}{2} - \cdots$$

Beispiel. Die zweite Kolumne der folgenden Tabelle gibt zwischen den Grenzen $x = 0^\circ\,3'\,30''$ und $x = 0^\circ\,6'\,0''$ von $30''$ zu $30''$ die Werte des $\log\sin x$; verlangt wird die Berechnung des $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,4'\,45''$.

x	$\log\sin x$	f'	f''	f'''	f^{IV}
$0^\circ\ 3'\ 30''$	7.007 79				
		$+\ 5800$			
$4\ \ 0$	7.065 79		$-\ 685$		
		$+\ 5115$		$+\ 146$	
$4\ 30$	7.116 94		$-\ 539$		$-\ 44$
	[7.139 82]	$+\ 4576$	[$-\ 488$]	$+\ 102$	[$-\ 34$]
$5\ \ 0$	7.162 70		$-\ 437$		-25
		$+\ 4139$		$+\ 77$	
$5\ 30$	7.204 09		$-\ 360$		
		$+\ 3779$			
$6\ \ 0$	7.241 88				

Setzt man $\log\sin 0^\circ 4'\ 30'' = f(a)$, so erhält man für $\frac{1}{2}[f(a)+f(a+1)]$, $\frac{1}{2}[f''(a)+f''(a+1)]$, $\frac{1}{2}[f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)]$ die in der vorigen Tabelle in eckigen Klammern stehenden Zahlen. Hiermit findet man

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[f(a)+f(a+1)] &= 7.139\,82 \\ -\tfrac{1}{8}\{\tfrac{1}{2}[f''(a)+f''(a+1)]\} &= +\ 61.0 \\ \tfrac{3}{128}\{\tfrac{1}{2}[f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)]\} &= -\ 0.8 \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Zahlen gibt nach (21) den gesuchten Logarithmus; es wird also $\log\sin 0^\circ 4'\ 45'' = 7.140\,42$.

3. Ein Trugschluß. Fügt man in (19) zu $f'''(a+\frac{1}{2})$ das auf S. 7 erwähnte Glied $\frac{n-2}{4} f^{IV}(a)$ hinzu, so lautet die Formel

$$(22)\quad f(a+n) = f(a)+n\left[f'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-1}{2}\left[f''(a)+\frac{n+1}{3}\left[f'''(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-2}{4}f^{IV}(a)\right.\right.\right.$$

Man stelle sich jetzt zur Aufgabe, mit Hilfe der vorhin gegebenen Tabelle den $\log\sin 0^\circ 3'\ 40''$ zu berechnen. Da $0^\circ 3'\ 30''$ dem Wert a des Arguments entspricht, und das Intervall $w = 30''$ ist, so folgt:

$$n = \frac{0^\circ 3'\,40'' - 0^\circ 3'\,30''}{30''} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{n+1}{3} = \frac{4}{9}, \qquad \frac{n-2}{4} = -\frac{5}{12}$$

Damit sind die Koeffizienten der in (22) enthaltenen Differenzen gefunden, aber von diesen Differenzen kommt nur die erste, nämlich $f'(a+\frac{1}{2}) = +\ 5800$, in der Tabelle vor. Nun gilt aber auch folgende Interpolationsformel

$$(23)\quad f(a+n) = f(a)+n\left[f'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-1}{2}\left[f''(a+1)+\frac{n-2}{3}\left[f'''(a+\tfrac{3}{2})+\frac{n-3}{4}f^{IV}(a+2)\right.\right.\right.$$

Die Werte der hierin enthaltenen Differenzen können sämtlich der obigen Tabelle entnommen werden, und zwar hat man

$$f'(a+\tfrac{1}{2}) = +\ 5800, \quad f''(a+1) = -\ 685, \quad f'''(a+\tfrac{3}{2}) = +\ 146, \quad f^{IV}(a+2) = -\ 44$$

Es könnte also scheinen, als ob für das vorliegende Beispiel die Anwendung der Formel (23) geboten wäre; dem ist aber nicht so. Berechnet man zunächst mit Hilfe von (23) den Wert von $\log\sin 0^\circ 3'\ 40''$, so ergibt sich dieser zu 7.027 99. Ebendenselben Wert erhält man aber auch, wenn man die letzte für die Formel (23) benutzte Differenz als konstant betrachtet, d. h. wenn man in der für $\log\sin x$ gege-

benen Tabelle $f^{IV}(a) = f^{IV}(a+1) = f^{IV}(a+2) = -44$ annimmt, hierauf die fehlenden Differenzen ergänzt und nun die Formel (22) benutzt. Die ergänzten Differenzen sind in der folgenden Tabelle in Klammern gesetzt.

x	$\log\sin x$	f'	f''	f'''	f^{IV}
$0^\circ\,3'\,30''$	7.007 79		$(-\,875)$		$(-\,44)$
		$+\,5800$		$(+\,190)$	
4 0	7.065 79		$-\,685$		$(-\,44)$
		$+\,5115$		$+\,146$	
4 30	7.116 94		$-\,539$		$-\,44$

4. Numerische Bestimmung der Differentialquotienten. Es seien für die Werte $a-2w$, $a-w$, a, ... eines Arguments die Funktionswerte $f(a-2)$, $f(a-1)$, $f(a)$, ... gegeben und von letzteren auf die in § 2 beschriebene Weise die ersten, zweiten, ... Differenzen gebildet. Um dann den ersten und zweiten Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = a$ zu finden, hat man die Formeln anzuwenden (*Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 16 ff).:

$$(24)\qquad \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = \frac{1}{w}\left[\frac{f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a-\tfrac{1}{2})}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})}{2} + \cdots\right]$$

$$(25)\qquad \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=a} = \frac{1}{w^2}\left[f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{IV}(a) + \cdots\right]$$

Als Beispiel möge die Berechnung der Differentialquotienten von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ gewählt werden. Mit Hilfe der in § 2, S. 8 angegebenen Tabelle erhält man, wenn jetzt $\log\sin 0^\circ\,5'\,0'' = f(a)$ gesetzt wird,

$$\tfrac{1}{2}[f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a-\tfrac{1}{2})] = +\,4357.5$$

$$\tfrac{1}{2}[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})] = +\,89.5, \quad -\tfrac{1}{6}\{\tfrac{1}{2}[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})]\} = -\,14.9$$

Die Summe der rechts untereinander stehenden Zahlen ist $+\,4342.6$. Da das Intervall w zwischen je zwei aufeinander folgenden Argumenten der Tabelle $30''$ beträgt, so wird der erste Differentialquotient von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ gleich $+\,4342.6 : 30 = +\,144.8$ Einheiten der fünften Dezimale.

Aus der Tabelle erhält man ferner $f''(a) = -\,437$, $f^{IV}(a) = -\,25$. Demnach ist $f''(a) - \frac{1}{12}f^{IV}(a) = -\,435$. Der zweite Differentialquotient von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ wird somit $-\,435 : 900 = -\,0.48$ Einheiten der fünften Dezimale.

Wollte man nun beispielsweise $\log\sin 0^\circ\,5'\,9''$ berechnen, so hätte man nach dem *Taylor*schen Satze, wenn die vorhin abgeleiteten Differentialquotienten mit Δ' und Δ'' bezeichnet werden,

$$\log\sin 0^\circ\,5'\,9'' = \log\sin 0^\circ\,5'\,0'' + 9\Delta' + 81\,\frac{\Delta''}{2}$$

Nach Substitution der Werte $\log\sin 0^\circ\,5'\,0'' = 7.16270$, $\Delta' = +\,144.8$ und $\frac{1}{2}\Delta'' = -\,0.24$ Einheiten der fünften Dezimale erhält man hieraus $\log\sin 0^\circ\,5'\,9'' = 7.17554$.