

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XII. Parallaxe

[urn:nbn:at:at-ubi:2-6337](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:at:at-ubi:2-6337)

ist, so fällt die obere Kulmination auf 2^h mittlerer Zeit Paris; für diese Zeit ist der *Connaissance des Temps* zufolge, wenn f , g , h , i und g' in Bogensekunden ausgedrückt werden,

$$f = 26''96, \quad \log g = 1.0699, \quad G = 359^{\circ}9', \quad \log h = 1.3094, \quad H = 11^{\circ}50' \\ \log i = 0.2589, \quad \log g' = 8.958, \quad G' = 73^{\circ}, \quad t = 0.94$$

Mit Hilfe dieser und der obigen Werte von μ und μ' erhält man aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\Delta\alpha = -108''.70, \quad \Delta\delta = +13''.9$$

Wendet man nun die Gleichungen (3) an, so ergibt sich zunächst

$$\Delta\alpha \cdot \Delta\delta \sin 1'' \tan \delta = -0''.42, \quad \frac{1}{2}(\Delta\alpha)^2 \sin 1'' \sin \delta \cos \delta = +0''.1$$

und somit

$$\alpha' - \alpha = -109''.12, \quad \delta' - \delta = +13''.8$$

Folglich ist der gesuchte scheinbare Ort

$$\alpha' = 19^h 11^m 29''.46, \quad \delta' = +89^{\circ}0' 23''.2$$

Kapitel XII.

Parallaxe.

67. Einleitung. Die Richtungen, in denen ein dem Sonnensystem angehöriger Himmelskörper in einem und demselben Augenblick von verschiedenen Beobachtungsstationen aus gesehen wird, sind nicht zueinander parallel. Um nun die an verschiedenen Punkten der Erde angestellten Beobachtungen eines solchen Körpers miteinander vergleichbar zu machen, leitet man aus jeder beobachteten Richtung durch Rechnung diejenige ab, welche beobachtet worden wäre, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befunden hätte; den Winkel zwischen der vom Beobachtungsorte und der vom Erdmittelpunkte aus gesehenen Richtung bezeichnet man als Parallaxe. Zur Berechnung der Parallaxe bedarf man einiger Angaben über die Figur und Größe der Erde.

Die Erde hat die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids; bezeichnet man die halbe große Achse der Erde mit a , und ihre halbe kleine Achse mit b , so ist nach *Helmert*

$$a = 6\,378\,000^m, \quad b = 6\,356\,612^m$$

Hieraus ergibt sich, wenn

$$\frac{a-b}{a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e$$

gesetzt wird, und somit a die Abplattung und e die Exzentrizität einer Meridianellipse der Erde bedeutet,

$$a = \frac{1}{298.20}, \quad e = 0.081826$$

Es sei jetzt E (Fig. 1) der Mittelpunkt der Erde und O ein Beobachtungsort, $EA = a$ sei die halbe große und $EB = b$ die halbe kleine Achse der Erde, bzw. der durch O gelegten Meridianellipse BAO'' . Ist Ot die diese Ellipse in O berührende Tangente, und zieht man TET'' parallel zu Ot , so sind OO'' und TT'' zwei zueinander konjugierte Durchmesser; nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie hat man also, wenn $OEA = \varphi'$ und $TEA = \chi'$ gesetzt wird,

$$\tan \varphi' \tan \chi' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Wenn nun die Gerade nOZ senkrecht zu Ot gezogen und der Winkel OnA mit φ bezeichnet wird, so folgt $\chi' = 90^\circ + \varphi$; demnach gibt die vorige Gleichung

$$(1) \quad \tan \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi$$

Der Punkt Z' , in dem die Gerade EO verlängert die Sphäre trifft, wird das geozentrische Zenit, der Punkt Z , in dem die Richtung der Normale nO verlängert die Sphäre trifft, wird kurzweg das Zenit genannt. Den Winkel φ' nennt man die geozentrische, den Winkel φ die geographische Breite von O .

Man ziehe jetzt Ep senkrecht zu Ot . Da der Winkel, den die Tangente Ot mit der kleinen Achse der Ellipse bildet, gleich $pEA = OnA = \varphi$ ist, so ergibt sich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, $Ep = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$. Es ist aber auch $Ep = EO \cos OEp$. Da nun der Winkel OEp gleich $\varphi - \varphi'$ ist, so folgt, wenn $EO = q$ gesetzt wird,

$$(2) \quad q = \frac{a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')}$$

Setzt man hier

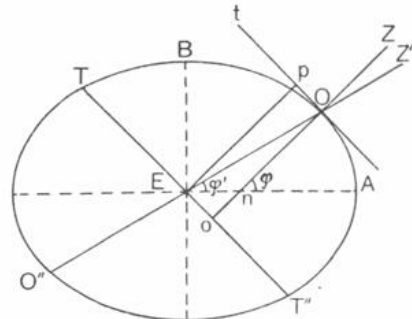
$$\frac{q}{a} = [q],$$

wo demnach $[q]$ den Abstand des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde, ausgedrückt in Teilen des Äquatorealradius der Erde, bedeutet, so ergibt sich

$$(2^a) \quad [q] = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')}$$

Den Wert von φ kann man durch Beobachtungen finden; ist φ bekannt, so lassen sich aus (1) und (2^a) die Werte von φ' und $[q]$ berechnen. Die für die einzelnen Sternwarten gültigen Werte von φ' und $\log [q]$ findet man in den astronomischen Jahrbüchern angegeben.

Fig. 1.



68. Parallaxe in Rektaszension und Deklination. Ist E (Fig. 2) der Mittelpunkt der Erde, O ein Beobachtungsort und S der Ort eines Himmelskörpers im Raum, so ist OS die beobachtete Richtung und ES die Richtung, in welcher ein im Mittelpunkte der Erde befindlicher Beobachter den Himmelskörper sehen würde. Man ziehe jetzt ES' parallel zu OS , so daß also ES' ebenfalls die beobachtete Richtung darstellt, ferner ziehe man SS' parallel zu OE ; setzt man dann $OS = ES' = r'$ und $EO = \varrho$, wo ϱ durch die Gleichung (2) bestimmt ist, so folgt

$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin SEO}{\sin OSE} = \frac{\sin SEO}{\sin SES'}$$

Wenn nun die in einer Ebene liegenden Richtungen EO , ES und ES' verlängert werden, bis sie die um E beschriebene Sphäre schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte Z' , S und S' (Fig. 3) auf einem größten Kreise, und die Bögen $Z'S$ und SS' sind den in Fig. 2 mit SEO und SES' bezeichneten Winkeln beziehungsweise gleich; die vorige Gleichung wird demnach

$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin SZ'}{\sin SS'}$$

In Fig. 3 bedeutet Z' das geozentrische Zenit des Beobachtungsortes, S' ist der vom Beobachtungsorte aus und S der vom Mittelpunkte der Erde aus gesehene Ort des Himmelskörpers an der Sphäre, P ist der Nordpol des Äquators und γ das Frühlings-

äquinok, der Pfeil gibt die Richtung an, in der die Rektaszensionen gezählt werden. Bezeichnet man jetzt den Winkel $\gamma PZ'$ oder die Sternzeit des Beobachtungsortes mit Θ , bezeichnet man ferner mit α' und δ' die Rektaszension und Deklination von S' , und mit α und δ die Rektaszension und Deklination von S , so geben die Dreiecke $Z'SP$ und SPS' , worin der Winkel $Z'PS = \Theta - \alpha$, der Winkel

$SPS' = \alpha - \alpha'$, ferner $PS' = 90^\circ - \delta'$, $PZ' = 90^\circ - \varphi'$ ist,

$$\sin SZ' = \frac{\sin(\Theta - \alpha) \cos \varphi'}{\sin Z'SP} = \frac{\sin(\Theta - \alpha) \cos \varphi'}{\sin PSS'}, \quad \sin SS' = \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cos \delta'}{\sin PSS'}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorhin für $r':\varrho$ gefundene Gleichung ergibt sich

$$(3) \quad r' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -\varrho \cos \varphi' \sin(\Theta - \alpha)$$

Es sei nun (Fig. 2) $Eoss'$ ein Stück der Äquatorebene, Oo , Ss , $S's'$ seien senkrecht zu dieser Ebene, EP bezeichne die zu Oo parallele Erdachse; man hat

dann $Eo = q \cos \varphi'$, $Es' = r' \cos \delta'$ und — wenn $ES = r$ gesetzt wird — $Es = r \cos \delta$. Die Strecke Es stellt die Resultante von Es' und $s's = Eo$ dar; mit Rücksicht darauf, daß der Winkel $sEs' = \alpha - \alpha'$ und der Winkel $Ess' = oEs = \Theta - \alpha$ ist, erhält man also

$$(4) \quad r' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) = r \cos \delta - q \cos \varphi' \cos(\Theta - \alpha)$$

Zieht man $o\sigma$ parallel zu OS , bzw. zu ES' , so ergibt sich $\sigma s = S's' = r' \sin \delta'$ und $S\sigma = Oo = q \sin \varphi'$. Es ist aber $\sigma s + S\sigma = Ss = r \sin \delta$; demnach wird

$$(5) \quad r' \sin \delta' = r \sin \delta - q \sin \varphi'$$

Man multipliziere jetzt die Gleichung (3) mit $\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ und die Gleichung (4) mit $\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$; addiert man dann die beiden Produkte, so folgt

$$(6) \quad r' \cos \delta' = r \cos \delta - q \cos \varphi' \cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')] \sec \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$

Durch die Einführung zweier Hilfsgrößen läßt sich den beiden letzten Gleichungen dieselbe Form geben; setzt man nämlich

$$(7) \quad \begin{aligned} \beta \sin \gamma &= \sin \varphi' \\ \beta \cos \gamma &= \cos \varphi' \cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')] \sec \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha), \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen (5) und (6)

$$(8) \quad \begin{aligned} r' \sin \delta' &= r \sin \delta - q \beta \sin \gamma \\ r' \cos \delta' &= r \cos \delta - q \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$(9) \quad \begin{aligned} r' \sin(\delta' - \delta) &= -q \beta \sin(\gamma - \delta) \\ r' \cos(\delta' - \delta) &= r - q \beta \cos(\gamma - \delta) \end{aligned}$$

und auch

$$(9^a) \quad r \sin(\delta' - \delta) = -q \beta \sin(\gamma - \delta')$$

Dividiert man jetzt die Gleichungen (3) und (4), ferner die Gleichungen (7), sowie auch die Gleichungen (9) durcheinander, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{tang}(\alpha' - \alpha) &= - \frac{\frac{q \cos \varphi'}{r \cos \delta} \sin(\Theta - \alpha)}{1 - \frac{q \cos \varphi'}{r \cos \delta} \cos(\Theta - \alpha)} \\ (9^b) \quad \text{tang} \gamma &= \frac{\text{tang} \varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \\ \text{tang}(\delta' - \delta) &= \frac{- \frac{q \beta}{r} \sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{q \beta}{r} \cos(\gamma - \delta)} \end{aligned}$$

Die für die vorigen Gleichungen zu verwendenden Werte von r und q müssen in derselben Längeneinheit ausgedrückt sein. Als Längeneinheit soll jetzt die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne gewählt werden, da diese Einheit den in den astronomischen Ephemeriden mitgeteilten Werten von r zugrunde liegt. Für

ϱ folgt dann, wenn a die halbe große Achse der Erde, $\mathcal{A}_0$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bedeutet und

$$(10) \quad \frac{a}{\mathcal{A}_0} = \sin \pi$$

gesetzt wird,

$$(10^a) \quad \varrho = \frac{\varrho}{a} \frac{a}{\mathcal{A}_0} = [\varrho] \sin \pi,$$

wo $[\varrho]$ durch die Gleichung (2^a) bestimmt erscheint. Den Winkel π bezeichnet man als die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne; in welcher Weise sich der Wert dieses Winkels finden läßt, wird später gezeigt werden. Substituiert man nun in (9^b) für ϱ und β ihre aus (10^a), bzw. der ersten der Gleichungen (7) folgenden Werte, so ergibt sich

$$(11) \quad \begin{aligned} \tan(\alpha' - \alpha) &= - \frac{\frac{[\varrho] \sin \pi \cos \varphi'}{r \cos \delta} \sin(\Theta - \alpha)}{1 - \frac{[\varrho] \sin \pi \cos \varphi'}{r \cos \delta} \cos(\Theta - \alpha)} \\ \tan \gamma &= \frac{\tan \varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \\ \tan(\delta' - \delta) &= - \frac{\frac{[\varrho] \sin \pi \sin \varphi'}{r \sin \gamma} \sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{[\varrho] \sin \pi \sin \varphi'}{r \sin \gamma} \cos(\gamma - \delta)} \end{aligned}$$

Für die Sonne und die Planeten ist r stets groß im Verhältnis zu $[\varrho]$; da außerdem der Winkel π nur 8''8 beträgt, so sind nun $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ kleine Größen. Wenn also für die Sonne oder einen Planeten, bzw. Kometen die Parallaxe in Rektaszension und Deklination gerechnet werden soll, so genügt es, an Stelle der Gleichungen (11) die folgenden anzuwenden

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= - \frac{[\varrho] \pi \cos \varphi'}{r \cos \delta} \sin(\Theta - \alpha) \\ \tan \gamma &= \frac{\tan \varphi'}{\cos(\Theta - \alpha)} \\ \delta' - \delta &= - \frac{[\varrho] \pi \sin \varphi'}{r \sin \gamma} \sin(\gamma - \delta) \end{aligned}$$

Im Meridian ist $\Theta - \alpha$ gleich 0° oder gleich 180° und somit $\alpha' - \alpha = 0$; zur Zeit der oberen Kulmination ($\Theta - \alpha = 0^\circ$) ist demnach den Gleichungen (7) zufolge $\gamma = \varphi'$, zur Zeit der unteren Kulmination ($\Theta - \alpha = 180^\circ$) ist $\gamma = 180^\circ - \varphi'$. Bedeutet also δ'_s die aus einer Beobachtung in der oberen Kulmination und δ'_i die aus einer Beobachtung in der unteren Kulmination erhaltene Deklination der Sonne oder eines Planeten, so hat man

$$(12^a) \quad \delta'_s - \delta = - \frac{[\varrho] \pi}{r} \sin(\varphi' - \delta), \quad \delta'_i - \delta = - \frac{[\varrho] \pi}{r} \sin(\varphi' + \delta)$$

Für den Mond geben die astronomischen Jahrbücher nicht die Werte von r an, sondern diejenigen eines Winkels p , der durch die Gleichung definiert ist

$$(13) \quad \sin p = \frac{a}{r},$$

wo r die in derselben Einheit wie a gemessene Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde bedeutet. Den Winkel p nennt man die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes. Gibt man der Gleichung (13) die Form

$$\frac{\frac{a}{\mathcal{A}_0}}{\frac{r}{\mathcal{A}_0}} = \sin p,$$

wobei nun $\frac{r}{\mathcal{A}_0}$ den in Teilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückten Radiusvektor (r) des Mondes darstellt, so folgt mit Rücksicht auf (10)

$$(13^a) \quad \frac{\sin \pi}{r} = \sin p$$

Unter Anwendung dieser Gleichung und mit Einführung der Abkürzungen

$$(14) \quad f = \frac{[e] \sin p \cos \varphi'}{\cos \delta}, \quad g = \frac{[e] \sin p \sin \varphi'}{\sin \gamma}$$

ergeben sich aus (11) die folgenden zur Berechnung der Parallaxe des Mondes in Rektaszension und Deklination dienenden Formeln

$$(15) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) &= - \frac{f \sin(\Theta - \alpha)}{1 - f \cos(\Theta - \alpha)} \\ \operatorname{tang} \gamma &= \frac{\operatorname{tang} \varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos [\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \\ \operatorname{tang}(\delta' - \delta) &= - \frac{g \sin(\gamma - \delta)}{1 - g \cos(\gamma - \delta)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck für $a:r$, dessen man bedarf, um aus (13) den Winkel p finden zu können, wird durch die Mondtheorie gegeben. Derselbe besteht aus einem konstanten Gliede und aus periodischen Gliedern; bezeichnet man ersteres mit $a:r_0$ und setzt

$$\frac{a}{r_0} = \sin \Pi,$$

so wird der Winkel Π die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes genannt. *Newcomb* nimmt den aus der Mondtheorie folgenden Wert $\Pi = 3422''.63$ an; wie in § 71 gezeigt werden wird, läßt sich der Wert von Π auch aus gleichzeitigen Beobachtungen des Mondes auf der nördlichen und südlichen Erdhalbkugel finden.

69. Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz. In Fig. 4 mögen E , O , S und S' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 2, $Eoss'$ sei die durch den Mittelpunkt der Erde parallel zur Ebene des Horizonts des Beobachtungsortes O gelegte Ebene, Oo , Ss und $S's'$ seien die von O , S und S' auf die Ebene $Eoss'$ gefällten Senkrechten. Da Oo senkrecht zu der Ebene des Horizonts von O ist, so ist oO , also auch die parallel zu oO gezogene Gerade EZ zum Zenit des Beobachtungsortes gerichtet; da ferner EO zum geozentrischen Zenit (Z') von O hin gerichtet ist, so folgt, daß die von E zum Pol des Äquators gezogene Gerade EP in der Ebene $Z'EZ$ liegt. Man verlängere nun die Richtungen EO , ES , ES' , EZ und EP , bis

Fig. 4.

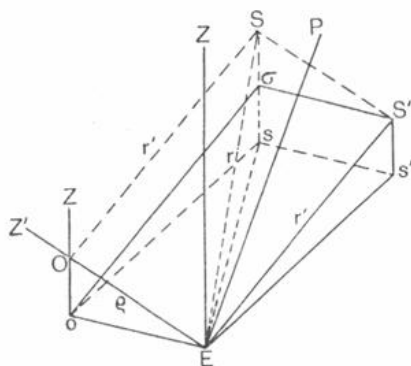
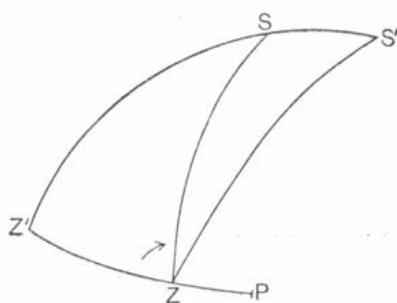


Fig. 5.



sie die um E beschriebene Sphäre in den Punkten Z' , S , S' , Z , P (Fig. 5) schneiden; es liegen dann Z' , S , S' auf einem größten Kreise und ebenfalls Z' , Z und P . Die Bögen $Z'S$ und SS' sind den in Fig. 4 mit SEO und SES' bezeichneten Winkeln beziehungsweise gleich; die aus Fig. 4 folgende Proportion $r' : q = \sin SEO : \sin SES'$ wird somit

$$\frac{r'}{q} = \frac{\sin Z'S}{\sin SS'}$$

Man bezeichne jetzt den Winkel $Z'ZS$ oder das geozentrische Azimut des Himmelskörpers mit A und den Winkel $Z'ZS'$ oder das vom Beobachtungsort aus gesehene Azimut mit A' , ferner setze man die geozentrische Zenitdistanz oder den Bogen ZS gleich $\varkappa$ und die vom Beobachtungsort aus gesehene Zenitdistanz ZS' gleich $\varkappa'$; berücksichtigt man dann, daß der Bogen ZZ' gleich $\varphi - \varphi'$ ist, so folgt aus den Dreiecken $Z'ZS$ und ZSS'

$$\sin Z'S = \frac{\sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin ZSZ'}, \quad \sin SS' = \frac{\sin \varkappa' \sin(A' - A)}{\sin ZSS'}$$

Damit wird die vorige Gleichung

$$\frac{r'}{q} = \frac{\sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin \varkappa' \sin(A' - A)}$$

oder

$$(16) \quad 0 = r' \sin \varkappa' \sin(A' - A) - q \sin(\varphi - \varphi') \sin A$$

In Fig. 4 ist der Winkel $OEO = 90^\circ - ZEZ' = 90^\circ - (\varphi - \varphi')$, $SEs = 90^\circ - \varkappa$, $S'Es' = 90^\circ - \varkappa'$ und demnach $s's = Eo = \varrho \sin(\varphi - \varphi')$, $Es = r \sin \varkappa$, $Es' = r \sin \varkappa'$; ferner ist der Winkel $oEs = Ess' = A$ und der Winkel $sEs' = A' - A$. Da nun Es die Resultante von Es' und $s's$ ist, so folgt

$$(17) \quad r \sin \varkappa = r' \sin \varkappa' \cos(A' - A) + \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A$$

Ferner ergibt sich aus Fig. 4, wenn $o\sigma$ parallel zu OS also auch parallel zu ES' gezogen und berücksichtigt wird, daß $\sigma S'$ parallel zu oE und zu ss' ist, $Ss = S's' + Oo$; demnach hat man

$$(18) \quad r \cos \varkappa = r' \cos \varkappa' + \varrho \cos(\varphi - \varphi')$$

Multipliziert man (16) mit $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$, (17) mit $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$ und addiert die beiden Produkte, so erhält man

$$r \sin \varkappa = r' \sin \varkappa' + \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos \frac{1}{2}(A' + A) \sec \frac{1}{2}(A' - A)$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$(19) \quad \tan \Gamma = \tan(\varphi - \varphi') \cos \frac{1}{2}(A' + A) \sec \frac{1}{2}(A' - A)$$

gesetzt wird,

$$(20) \quad r \sin \varkappa = r' \sin \varkappa' + \varrho \cos(\varphi - \varphi') \tan \Gamma$$

Aus (18) und (20) folgt

$$(21) \quad \sin(\varkappa' - \varkappa) = \frac{\varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin(\varkappa' - \Gamma)}{r \cos \Gamma}$$

Multipliziert man ferner (17) mit $\sin(A' - A)$ und (16) mit $\cos(A' - A)$, so ergibt sich durch Subtraktion der Produkte

$$(22) \quad \sin(A' - A) = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{r \sin \varkappa}$$

Bei der Anwendung der Formeln (22) und (21) auf die Sonne und die Planeten entnimmt man die Werte von r den astronomischen Jahrbüchern; da letztere aber als Einheit von r die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wählen, so hat man wie in § 68 für ϱ den durch die Gleichungen (10^a) und (2^a) bestimmten Wert $[\varrho] \sin \pi$ zu benutzen. Für den Mond ergibt sich aus (10^a) und (13^a)

$$(22^a) \quad \frac{\varrho}{r} = \frac{[\varrho] \sin \pi}{r} = [\varrho] \sin p$$

Die der Sonne und den Planeten entsprechenden Werte von $\frac{\varrho}{r}$ sind sehr klein, ferner ist $\varphi - \varphi' < 12'$; wenn man also Beobachtungen in großer Nähe des Zenits vermeidet, so ist auch $A' - A$ klein. Dasselbe gilt für Γ und $\varkappa' - \varkappa$. Mit Rücksicht hierauf ist es nicht notwendig, die Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz — insoweit es sich um die Sonne oder einen Planeten handelt — mit Hilfe der

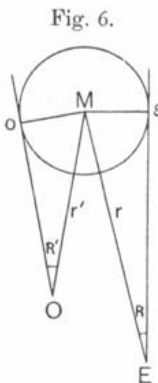
strengen Gleichungen (22), (19) und (21) zu berechnen; sondern es genügt vollständig, die folgenden Formeln anzuwenden

$$(23) \quad \begin{aligned} A' - A &= \frac{[q] \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{r \sin \varkappa'} \\ \Gamma &= (\varphi - \varphi') \cos A' \\ \varkappa' - \varkappa &= \frac{[q] \pi \sin(\varkappa' - \Gamma)}{r} \end{aligned}$$

Für den Mond erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (22^a) und mit Vernachlässigung kleiner Glieder

$$(24) \quad \begin{aligned} \sin(A' - A) &= \frac{[q] \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{\sin \varkappa} \\ \Gamma &= (\varphi - \varphi') \cos A' \\ \sin(\varkappa' - \varkappa) &= [q] \sin p \sin(\varkappa' - \Gamma) \end{aligned}$$

70. Einfluß der Parallaxe auf den Winkelhalbmesser eines Himmelskörpers. In Fig. 6 sei E der Mittelpunkt der Erde, O ein Beobachtungsort, M der



Mittelpunkt und Mo der Radius eines kugelförmigen Himmelskörpers; $E\varepsilon$ und $O\varepsilon$ seien die von E und O aus an den Himmelskörper gezogenen Tangenten. Bezeichnet man mit d den linearen Radius $M\varepsilon = Mo$ des Himmelskörpers, und bedeuten R und R' die Winkel, unter denen dieser Radius von E , bzw. von O aus gesehen wird, so ergibt sich, wenn wieder $EM = r$ und $OM = r'$ gesetzt wird,

$$\sin R' = \frac{d}{r'}, \quad \sin R = \frac{d}{r}$$

Demnach ist

$$(25) \quad \sin R' = \frac{r}{r'} \sin R$$

Aus den Gleichungen (8) folgt aber

$$(25^a) \quad r \sin(\delta - \gamma) = r' \sin(\delta' - \gamma')$$

Somit wird

$$(26) \quad \sin R' = \frac{\sin(\delta' - \gamma')}{\sin(\delta - \gamma)} \sin R$$

Die für die Anwendung dieser Gleichung erforderlichen Werte von δ' und γ' ergeben sich aus (12), bzw. aus (14) und (15).

Zur Zeit der oberen Kulmination ist $\gamma = \varphi'$ (S. 186); bedeutet also R'_m den dieser Kulmination entsprechenden Wert von R' , so folgt aus (26)

$$(26^a) \quad \sin R'_m = \frac{\sin(\delta' - \varphi')}{\sin(\delta - \varphi')} \sin R$$

Der Wert von R' läßt sich noch auf andere Weise berechnen. Multipliziert man die Gleichung (20) mit $\cos \Gamma$ und die Gleichung (18) mit $\sin \Gamma$, so ergibt sich durch Subtraktion der beiden Produkte

$$r \sin(\varkappa - \Gamma) = r' \sin(\varkappa' - \Gamma)$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung (25), so erhält man

$$(27) \quad \sin R' = \frac{\sin(\alpha' - \Gamma)}{\sin(\alpha - \Gamma)} \sin R$$

Der Wert von Γ folgt aus (24).

71. Bestimmung der Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes. Die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes (S. 187) läßt sich bestimmen, wenn man an zwei Sternwarten mit kleiner Längen- und großer Breitendifferenz die Deklination des nördlichen oder südlichen Mondrandes im Meridian beobachtet. Um möglichst genaue Resultate zu erhalten, mißt man an beiden Sternwarten die Deklinationsdifferenzen zwischen dem Mondrand und einigen symmetrisch zum Monde gelegenen Fixsternen; aus der Verbindung dieser Differenzen mit den Deklinationen der Sterne ergibt sich die Deklination des Mondrandes. Es sei nun D' die an einer der beiden Sternwarten beobachtete und D die dieser entsprechende geozentrische Deklination des Mondrandes, ferner sei r_n die Distanz des beobachteten Punktes des Mondrandes vom Mittelpunkte der Erde; berücksichtigt man dann, daß zur Zeit der oberen Kulmination des Mondes der S. 186 und den Gleichungen (7) zufolge $\gamma = \varphi'$ und $\beta = 1$ ist, so gibt die Gleichung (9^a)

$$(28) \quad \sin(D - D') = \frac{\varrho}{r_n} \sin(\varphi' - D')$$

In erster Näherung soll jetzt $r_n = r$ gesetzt werden, wo r die Entfernung des Mondzentrums vom Mittelpunkte der Erde bedeutet; die vorige Gleichung wird dann

$$(29) \quad \sin(D - D') = \frac{\varrho}{r} \sin(\varphi' - D')$$

Verbindet man hiermit die Gleichung (22^a), so folgt

$$(30) \quad \sin(D - D') = [\varrho] \sin(\varphi' - D') \sin p$$

Nach einer bekannten Reihenentwicklung ist aber

$$D - D' = \sin(D - D') + \frac{1}{6} \sin^3(D - D') + \dots;$$

substituiert man hierin den für $\sin(D - D')$ gefundenen Wert und dividiert — um $D - D'$ in Sekunden ausgedrückt zu erhalten — die auf der rechten Seite vorkommenden Glieder durch $\sin 1''$, so erhält man

$$(31) \quad D - D' = \frac{[\varrho]}{\sin 1''} \sin(\varphi' - D') \sin p + \frac{1}{6} \frac{[\varrho]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi' - D') \sin^3 p$$

Ebenso ergibt sich, wenn die für die zweite Sternwarte gültigen Werte von D , D' , $[\varrho]$, φ' und p durch den Index 1 gekennzeichnet werden,

$$(31^a) \quad D_1 - D'_1 = \frac{[\varrho_1]}{\sin 1''} \sin(\varphi'_1 - D'_1) \sin p_1 + \frac{1}{6} \frac{[\varrho_1]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi'_1 - D'_1) \sin^3 p_1$$

Es seien nun t und t_1 die den Beobachtungszeiten der beiden Sternwarten entsprechenden mittleren Zeiten eines Hauptmeridians der Erde, δ bezeichne die geozentrische Deklination des Mondzentrums und R den geozentrischen Winkel-

halbmesser des Mondes zur Zeit t , ferner seien δ_i und R_i die Werte der geozentrischen Deklination des Mondzentrums, bzw. des geozentrischen Winkelhalbmessers des Mondes zur Zeit t_i ; je nachdem dann der nördliche oder südliche Mondrand beobachtet wurde, hat man

$$(32) \quad D = \delta \pm R, \quad D_i = \delta_i \pm R_i \quad \begin{array}{l} \text{nördl.} \\ \text{südl.} \end{array} \text{ Rand}$$

also

$$(32^a) \quad D_i - D = \delta_i - \delta \pm (R_i - R) \quad \begin{array}{l} \text{nördl.} \\ \text{südl.} \end{array} \text{ Rand}$$

Wenn aber d den linearen Halbmesser des Mondes, a den Radius des Erdäquators und r die in derselben Einheit wie d und a gemessene Entfernung des Mondes von der Erde bedeutet, so folgt, wenn noch

$$(33) \quad \frac{d}{a} = k \quad [\log k = 9.43544]$$

gesetzt, und die Gleichung (13) berücksichtigt wird,

$$\sin R = \frac{d}{r} = \frac{d}{a} \frac{a}{r} = k \sin p$$

Dementsprechend ist

$$\sin R_i = k \sin p_i$$

Durch Subtraktion der Gleichungen für $\sin R_i$ und $\sin R$ erhält man

$$\sin \frac{1}{2}(R_i - R) \cos \frac{1}{2}(R_i + R) = k \sin \frac{1}{2}(p_i - p) \cos \frac{1}{2}(p_i + p)$$

oder hinreichend genau

$$R_i - R = k(p_i - p)$$

Demnach wird die Gleichung (32^a)

$$(34) \quad D_i - D = \delta_i - \delta \pm k(p_i - p) \quad \begin{array}{l} \text{nördl.} \\ \text{südl.} \end{array} \text{ Rand}$$

Bezeichnet man die nach der Zeit genommenen ersten Differentialquotienten von δ und p , gültig für die Epoche $\frac{1}{2}(t + t_i) = \tau$, mit $\frac{d\delta}{d\tau}$ und $\frac{dp}{d\tau}$, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$(35) \quad \delta_i - \delta = \frac{d\delta}{d\tau} (t_i - t), \quad p_i - p = \frac{dp}{d\tau} (t_i - t)$$

Ferner ergibt sich, wenn p_i den der Zeit τ entsprechenden Wert von p bedeutet,

$$(36) \quad \begin{aligned} \sin p &= \sin p_i + (t - \tau) \frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \cos p_i \\ \sin p_i &= \sin p_i + (t_i - \tau) \frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \cos p_i \end{aligned}$$

An Stelle von p_i soll nun die in § 68 mit II bezeichnete Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes eingeführt werden. Es sei r_τ die der Zeit τ entsprechende, und r_0 die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde; sind dann

r_t und r_o in derselben Einheit ausgedrückt wie a , so hat man der Definition von p_t und Π gemäß

$$\sin p_t = \frac{a}{r_t} = \frac{a}{r_o} \frac{r_o}{r_t}, \quad \sin \Pi = \frac{a}{r_o},$$

und folglich

$$\sin p_t = \frac{r_o}{r_t} \sin \Pi$$

Die in der Ephemeride gegebenen Werte der Mondparallaxe (p_t°) sind aber mit Hilfe der Gleichung

$$\sin p_t^\circ = \frac{r_o}{r_t} \sin \Pi_o$$

berechnet worden, wo Π_o einen für Π angenommenen Wert bedeutet; somit wird

$$\sin p_t = \frac{\sin p_t^\circ}{\sin \Pi_o} \sin \Pi$$

Substituiert man diesen Wert in die Gleichungen (36), setzt dann $\cos p_t = 1$ und führt an Stelle von τ seinen Wert $\frac{1}{2}(t + t_i)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \sin p &= \frac{\sin p_t^\circ}{\sin \Pi_o} \sin \Pi - \frac{t_i - t}{2} \frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \\ \sin p_i &= \frac{\sin p_t^\circ}{\sin \Pi_o} \sin \Pi + \frac{t_i - t}{2} \frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind nun in die Gleichungen (31) und (31^a) zu substituieren; nimmt man dabei $\sin^3 p = \sin^3 p_t = \sin^3 p_t^\circ$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D - D' &= \frac{\sin p_t^\circ}{\sin \Pi_o} \frac{[q]}{\sin 1''} \sin(\varphi' - D') \sin \Pi + \frac{1}{6} \frac{[q]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi' - D') \sin^3 p_t^\circ - \\ &\quad - \frac{t_i - t}{2} \frac{dp}{d\tau} [q] \sin(\varphi' - D') \\ D_i - D'_i &= \frac{\sin p_t^\circ}{\sin \Pi_o} \frac{[q_i]}{\sin 1''} \sin(\varphi'_i - D'_i) \sin \Pi + \frac{1}{6} \frac{[q_i]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi'_i - D'_i) \sin^3 p_t^\circ + \\ &\quad + \frac{t_i - t}{2} \frac{dp}{d\tau} [q_i] \sin(\varphi'_i - D'_i) \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (37) \quad &\frac{\sin p_t^\circ}{\sin 1'' \sin \Pi_o} \{[q] \sin(\varphi' - D') - [q_i] \sin(\varphi'_i - D'_i)\} = f \\ &\frac{\sin^3 p_t^\circ}{6 \sin 1''} \{[q]^3 \sin^3(\varphi' - D') - [q_i]^3 \sin^3(\varphi'_i - D'_i)\} = g \\ &\frac{1}{2} \{[q] \sin(\varphi' - D') + [q_i] \sin(\varphi'_i - D'_i)\} = h \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$f \sin \Pi = -(D_i - D) + (D'_i - D') - g + h(t_i - t) \frac{dp}{d\tau}$$

Nun folgt aber aus (34) und (35)

$$D_i - D = \frac{d\delta}{d\tau} (t_i - t) \pm h \frac{dp}{d\tau} (t_i - t) \quad \begin{array}{l} \text{nörtl. Rand} \\ \text{südl.} \end{array}$$

Somit ergibt sich

$$(38) \quad f \sin \Pi = D'_i - D' - (t_i - t) \frac{d\delta}{d\tau} - g - (\pm k - h)(t_i - t) \frac{dp}{d\tau}$$

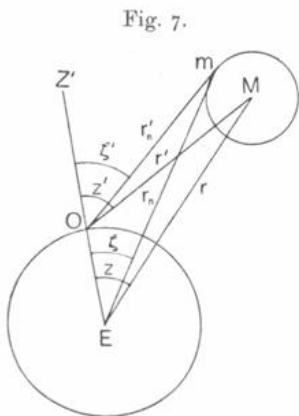
Hier sind f und alle auf der rechten Seite vorkommenden Größen entweder durch Beobachtung bekannt oder lassen sich, wie $\frac{d\delta}{d\tau}$ und $\frac{dp}{d\tau}$, mit Hilfe der Mond-ephemeride, bzw. der Mondtafeln durch Rechnung finden; man kann demnach die Gleichung (38) zur Bestimmung von Π benutzen. Da aber der gegenwärtig für Π angenommene Wert schon nahe richtig ist, so ist es vorteilhafter, nur die Korrektion dieses Wertes zu ermitteln. Wird nun der angenommene Wert von Π wieder mit Π_0 und die in Sekunden ausgedrückte Korrektion von Π_0 mit $\Delta\Pi$ bezeichnet, so hat man

$$f \sin \Pi = f \sin (\Pi_0 + \Delta\Pi) = f \sin \Pi_0 + (f \cos \Pi_0) \Delta\Pi \sin 1''$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung (38) erhält man

$$(39) \quad f \cos \Pi_0 \sin 1'' \Delta\Pi = D'_i - D' - \left\{ f \sin \Pi_0 + (t_i - t) \frac{d\delta}{d\tau} + g + (\pm k - h)(t_i - t) \frac{dp}{d\tau} \right\} \begin{matrix} \text{nörtl.} \\ \text{südl.} \end{matrix} \text{Rand}$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, welche Änderungen die im vorigen abgeleiteten Gleichungen erfahren, wenn in der Gleichung (29) an Stelle von r sein strenger Wert r_n angewandt wird. In Fig. 7 sei E der Mittelpunkt der Erde, O der Beobachtungsort, Z' das geozentrische Zenit des Beobachtungsortes, M der Mittelpunkt des Mondes, m der beobachtete Randpunkt und demnach Om eine Tangente an die Mondoberfläche. Den gewählten Bezeichnungen gemäß ist $EM = r$, $OM = r'$, $Em = r_n$ und $Mom = R'$, wo also R' den vom Beobachtungsorte aus gesehenen Winkelhalbmesser des Mondes bedeutet; setzt man jetzt $Om = r'_n$, so folgt



$$(40) \quad \frac{r}{r_n} = \frac{r}{r'_n} \frac{r'_n}{r_n} = \frac{r'_n}{r_n} \frac{r}{r' \cos R'}$$

Aus (25^a) erhält man aber für den beobachteten Punkt des Mondrandes und mit Rücksicht darauf, daß gegenwärtig $\gamma = \varphi'$ ist,

$$r_n \sin(D - \varphi') = r'_n \sin(D' - \varphi')$$

und ferner, wenn δ' die Deklination des Mondzentrums, gesehen vom Beobachtungsort bedeutet,

$$r \sin(\delta - \varphi') = r' \sin(\delta' - \varphi')$$

Mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen ergibt sich aus (40)

$$(41) \quad \frac{r}{r_n} = \frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')} \sec R'$$

Nun hat man die Identität

$$\frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')} = 1 + \frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi') - \sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')}$$

In dem Zähler des auf der rechten Seite stehenden Bruches setze man $\sin(D - \varphi') = \sin[(D - D') + (D' - \varphi')]$ und $\sin(\delta - \varphi') = \sin[(\delta - \delta') + (\delta' - \varphi')]$. Entwickelt man diese beiden Sinus und setzt $\cos(D - D') = 1$, $\sin(\delta - \delta') = \sin(D - D')$, $\cos(\delta - \delta') = 1$, so folgt

$$\frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')} = 1 + \frac{\sin(D - D') \sin(\delta' - D')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (28),

$$(42) \quad \frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')} = 1 - \frac{\varrho \sin(\delta' - D')}{r_n \sin(\delta - \varphi')}$$

Hierin ist $\delta' - D' = \mp R'$, wo man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden hat, jenachdem der nördliche oder südliche Rand beobachtet worden ist. Da also $\sin(\delta' - D')$ klein ist und da dasselbe von $\varrho : r_n$ gilt, so kann man r_n mit r vertauschen. Indem dann noch für $\varrho : r$ sein in (22^a) gegebener Wert substituiert wird, ergibt sich

$$(43) \quad \frac{\sin(D - \varphi') \sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi') \sin(\delta - \varphi')} = 1 \pm \frac{[\varrho] \sin p \sin R'}{\sin(\delta - \varphi')} \quad \begin{array}{l} \text{nörtl. Rand} \\ \text{südl. Rand} \end{array}$$

Aus (41) und (43) folgt, wenn an Stelle von R' der geozentrische Halbmesser R angewandt wird,

$$(44) \quad \frac{1}{r_n} = \frac{1}{r} \left\{ \sec R \pm \frac{R[\varrho] \sin 1'' \sin p}{\sin(\delta - \varphi')} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{nörtl. Rand} \\ \text{südl. Rand} \end{array}$$

Führt man nun die Abkürzung ein

$$(45) \quad i = \sec R \pm \frac{R[\varrho] \sin 1'' \sin p}{\sin(\delta - \varphi')}, \quad \begin{array}{l} \text{nörtl. Rand} \\ \text{südl. Rand} \end{array}$$

wo i nahe gleich 1 ist, so wird

$$(46) \quad \frac{1}{r_n} = \frac{i}{r}$$

Dieser Ausdruck ist in die Gleichung (28) zu substituieren, oder, was gleichbedeutend ist, es ist die rechte Seite der Gleichung (29) mit i zu multiplizieren. An Stelle der Gleichungen (30) und (31) erhält man dann neue, in denen $\sin p$ durch $i \sin p$ ersetzt ist; in dem kleinen von $\sin^3 p$ abhängigen Gliede darf man jedoch $i = 1$ annehmen. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Gleichung (31^a). In letzterer muß nämlich $\sin p_i$ durch $i_i \sin p_i$ ersetzt werden, wo

$$(47) \quad i_i = \sec R_i \pm \frac{R_i[\varrho_i] \sin 1'' \sin p}{\sin(\delta_i - \varphi'_i)}$$

ist; in dem von $\sin^3 p_i$ abhängigen Gliede dagegen kann $i_i = 1$ angenommen werden.

Geht man nun auf die Bildung der Gleichungen (38) und (39) zurück, so sieht man, daß man die strengen zur Bestimmung von Π , bzw. $\mathcal{A}\Pi$ dienenden Gleichungen erhält, wenn man in (38) und (39) den Koeffizienten f durch

$$(48) \quad F = \frac{\sin p_i^{\circ}}{\sin 1'' \sin H_0} \{ [q] i \sin(\varphi' - D') - [q_i] i_i \sin(\varphi'_i - D'_i) \}$$

ersetzt.

Ein zweites Mittel, die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes zu finden, wird durch die Beobachtungen von Sternbedeckungen an weit voneinander entfernten Orten der Erde geboten; die hierzu erforderlichen Gleichungen findet man im 18. Kapitel angegeben.

72. Bestimmung der Sonnenparallaxe. Das beste Mittel, die Sonnenparallaxe zu bestimmen, besteht darin, daß man mit Hilfe eines Heliometers auf der nördlichen und südlichen Erdhälfte die Abstände eines der Erde nahe kommenden kleinen Planeten von einigen ihm benachbarten Fixsternen mißt, sowie auch den Positionswinkel jedes den Planeten mit einem der Sterne verbindenden Bogens, bezogen auf den Mittelpunkt des Bogens, beobachtet. Um die gemessenen Abstände und Positionswinkel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwenden zu können, muß man zunächst mittelst der als näherungsweise bekannt vorausgesetzten Örter des Planeten und seiner Vergleichsterne die Abstände und Positionswinkel berechnen.

Es seien α und δ die Rektaszension und Deklination eines Vergleichsterns, A und D seien die aus der Ephemeride genommene geozentrische Rektaszension und Deklination des Planeten, A' und D' seien die Werte der nach den Formeln (12)

und unter Annahme eines Näherungswertes von π berechneten Parallaxe des Planeten in Rektaszension und Deklination, ferner werde $A + A' = A'$ und $D + D' = D'$ gesetzt; in dem sphärischen Dreieck (Fig. 8), welches gebildet wird von dem Nordpol des Äquators (N), dem vom Beobachter aus gesehenen Ort des Planeten (L) und dem Ort des Sterns (S), ist dann der Winkel bei N gleich $A' - \alpha$, die Seite $NL = 90^\circ - D'$ und $NS = 90^\circ - \delta$.

Bezeichnet man jetzt den Winkelabstand SL des Planeten vom Stern mit $\mathcal{A}$ und setzt den Positionswinkel $NSL = p$, $NLH = p''$, so folgt aus dem Dreieck NSL

$$(49) \quad \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \mathcal{A} \sin \frac{1}{2} (p'' + p) &= \sin \frac{1}{2} (A' - \alpha) \cos \frac{1}{2} (D' - \delta) & - \\ \sin \frac{1}{2} \mathcal{A} \cos \frac{1}{2} (p'' + p) &= \cos \frac{1}{2} (A' - \alpha) \sin \frac{1}{2} (D' - \delta) & + \end{aligned}$$

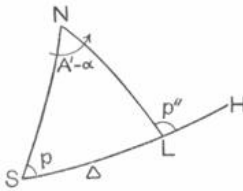
Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich $\mathcal{A}$ und $\frac{1}{2}(p'' + p)$ berechnen; wird dann noch der auf den Mittelpunkt des Bogens SL bezogene Positionswinkel von L mit p' bezeichnet, so hat man nach § 20, wenn $\mathcal{A}$ in Sekunden ausgedrückt ist,

$$(50) \quad p' = \frac{1}{2}(p'' + p) - \frac{1}{16} [1 + 2 \tan^2 \frac{1}{2} (D' + \delta)] \mathcal{A}^2 \sin 1'' \sin 2p$$

Mit Rücksicht darauf, daß bei Planeten nur mäßig große Deklinationen in Frage kommen, ist das von $\mathcal{A}^2$ abhängige Glied im allgemeinen zu vernachlässigen.

Sieht man zunächst von den Beobachtungsfehlern ab, so rühren die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Werten von p' und $\mathcal{A}$ zum Teil von den Fehlern der für die Vergleichsterne, bzw. für den Planeten angenommenen Örter her, zum Teil aber auch von dem Fehler des in den Gleichungen (12) für die Berechnung

Fig. 8.



der Parallaxe in Rektaszension und Deklination benutzten Wertes der Sonnenparallaxe. Nun lassen sich die Örter der Vergleichsterne gegenwärtig mit sehr großer Genauigkeit bestimmen, und von den minimalen in diesen Örtern noch vorhandenen Fehlern darf man annehmen, daß sie sich im Mittel aus mehreren Sternen gegenseitig aufheben; im folgenden sollen deshalb die Sternpositionen als fehlerfrei angesehen werden. Was die Fehler der Planetenephemeride betrifft, so kann man diese mit Hilfe einer sorgfältigen Untersuchung über die Bahn des Planeten sehr klein halten; der Fehler des gegenwärtig für die Sonnenparallaxe angenommenen Wertes endlich kann an und für sich nur äußerst klein sein. Es genügt demnach, nur die ersten Potenzen der Korrekturen der Planetenephemeride, bzw. der Sonnenparallaxe zu berücksichtigen. Wenn man jetzt die Gleichungen (49) differenziert und mit Rücksicht darauf, daß ein Fehler in A ohne Einfluß auf das kleine von A^2 abhängige Glied in (50) ist, $\frac{1}{2}d(p'' + p) = dp'$ setzt, so erhält man mit einer für alle Fälle hinreichenden Genauigkeit

$$\begin{aligned}\sin p'dA + A \sin 1'' \cos p'dp' &= \cos D'dA' \\ \cos p'dA - A \sin 1'' \sin p'dp' &= dD'\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}(51) \quad dA &= \sin p' \cos D'dA' + \cos p'dD' \\ A \sin 1'' dp' &= \cos p' \cos D'dA' - \sin p'dD'\end{aligned}$$

Nun war oben $A' = A + AA$ und $D' = D + AD$ gesetzt, wo AA und AD die nach (12) berechneten Werte der Parallaxe des Planeten in Rektaszension und Deklination bedeuten; wenn jetzt mit dA und dD die Korrekturen der Planetenephemeride bezeichnet werden, und wenn $d\pi$ die Korrektur des Näherungswertes π_0 der Sonnenparallaxe bedeutet, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (12)

$$\begin{aligned}dA' &= dA - \frac{[q] \cos \varphi'}{r \cos D} \sin(\Theta - A)d\pi \\ &= dA + [\text{Parallaxe in Rektaszension}] \frac{d\pi}{\pi_0}\end{aligned}$$

und entsprechend

$$dD' = dD + [\text{Parallaxe in Deklination}] \frac{d\pi}{\pi_0}$$

Substituiert man die für dA' und dD' gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (51) und setzt zur Abkürzung

$$(52) \quad \begin{aligned}\sin p' [\text{Parallaxe in Rekt.} \times \cos D'] + \cos p' [\text{Parallaxe in Dekl.}] &= u \\ \cos p' [\text{Parallaxe in Rekt.} \times \cos D'] - \sin p' [\text{Parallaxe in Dekl.}] &= w\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}(53) \quad dA &= \sin p' \cos D'dA + \cos p'dD + u \frac{d\pi}{\pi_0} \\ A \sin 1'' dp' &= \cos p' \cos D'dA - \sin p'dD + w \frac{d\pi}{\pi_0}\end{aligned}$$

Um mit Hilfe dieser Gleichungen die gesuchten Korrekturen dA , dD und $d\pi$ zu finden, hat man für dA die Differenz: beobachtete—berechnete Distanz, und für dp' die Differenz: beobachteter—berechneter Positionswinkel zu substituieren. Die

Werte von dA und dD sind aber nur während einer kurzen Zeit als konstant zu betrachten. Falls sich also die Beobachtungen auf einen längeren Zeitraum erstrecken, muß man die Gleichungen so in Gruppen zusammenfassen, daß zu jeder Gruppe nur zeitlich nahe liegende Beobachtungen gehören; aus jeder dieser Gruppen lassen sich dann die wahrscheinlichsten Werte von dA , dD und $d\pi$ bestimmen. Will man die Teilung der Beobachtungen vermeiden, so sind dA und dD mit Hilfe der in der Theorie der Bahnverbesserung gegebenen Formeln als Funktionen der Korrekturen der Bahnelemente des Planeten darzustellen und diese Ausdrücke in die Gleichungen (53) zu substituieren.

73. Beziehung zwischen der Aberrationskonstante und der Sonnenparallaxe. Nach § 59^a, (7) ist die dort mit k bezeichnete Aberrationskonstante durch die Gleichung definiert

$$(54) \quad k = \frac{an \sec \varphi}{V \sin 1''}$$

Hierin bedeutet a die halbe große Achse der Erdbahn, n die in Teilen des Radius ausgedrückte mittlere Bewegung der Erde, V die Geschwindigkeit des Lichtes und φ den Exzentrizitätswinkel der Erdbahn. Nimmt man nun den Radius des Erdäquators zu 6378.2 km an, und bezeichnet man mit $\pi_{\odot}$ die mittlere Horizontal-Äquatorealparallaxe der Sonne, so ist

$$a = \frac{6378.2}{\pi_{\odot} \sin 1''}$$

Ferner hat man, wenn eine mittlere Sekunde als Zeiteinheit gewählt wird,

$$V = 299\,860 \text{ km}$$

Da die Dauer eines siderischen Jahres 31 558 149 mittlere Zeitsekunden beträgt, so ist n durch die Gleichung bestimmt

$$n = \frac{1\,296\,000'' \sin 1''}{31\,558\,149}$$

Berücksichtigt man noch, daß $\varphi = 3455''$ ist, so folgt aus der Gleichung (54).

$$k\pi_{\odot} = 180.20$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich also $\pi_{\odot}$ finden, wenn k bekannt ist, und umgekehrt.