Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XIII. Refraktion

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Kapitel XIII.

Refraktion.

74. Gesetz der Abnahme des Luftdrucks bei zunehmender Entfernung von der Erde. Die Theorie der Refraktion beruht auf der Annahme, daß die Atmosphäre aus unendlich dünnen, zum Mittelpunkte der Erde konzentrischen Kugelschichten bestehe; die Dichtigkeit der Luft wird innerhalb einer Schicht als konstant, aber von Schicht zu Schicht als stetig veränderlich betrachtet. Bedeutet nun P den Druck, t die Temperatur, Δ die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde und γ den dieser Entfernung entsprechenden Wert der Beschleunigung durch die Schwere, so ist die Änderung des Luftdrucks, welche einem Übergange von dem Abstande r zu dem Abstande $r + dr$ entspricht, gleich

$$dP = -\gamma \Delta dr \tag{1}$$

Wenn ferner P_0, t_0, Δ_0, γ_0 der Reihe nach den Luftdruck, die Temperatur, die Dichtigkeit der Luft und die Schwere am Beobachtungsorte bedeuten, und wenn l_0 die Höhe einer Luftsäule angibt, welche ebenfalls den Druck P_0 ausübt, und für deren sämtliche Teile die Temperatur, die Dichtigkeit und die Schwere dieselben Werte haben wie am Beobachtungsorte, so gilt die Gleichung

$$P_0 = \gamma_0 l_0 \Delta_0 \tag{2}$$

Als Maß des Luftdrucks wählt man den Druck einer Quecksilbersäule von $0^{\text{m}}.760$ Höhe und der Temperatur $0°$ C unter der geographischen Breite $45°$ und im Meeresniveau oder, kurz ausgedrückt, den Druck einer Atmosphäre. Wenn also m die Dichtigkeit des Quecksilbers für die Temperatur $0°$ C bezeichnet, und Γ die durch die Schwere im Meeresniveau und unter der Breite $45°$ bewirkte Beschleunigung in Metern angibt, so ist der Druck einer Atmosphäre durch die Gleichung bestimmt

$$P' = 0^{\text{m}}.760\, \Gamma m \tag{2a}$$

Es läßt sich nun leicht die Höhe einer Säule trockener Luft von der Temperatur $0°$ C und der Dichtigkeit Δ', deren sämtliche Teile als unter dem Einflusse der Schwere Γ stehend angenommen werden, so bestimmen, daß der Druck dieser Luftsäule ebenfalls gleich P' ist. Wird nämlich die gesuchte Höhe mit l' bezeichnet, so hat man

$$P' = \Gamma l' \Delta' \tag{3}$$

also, wenn für P' sein in (2^{a}) gegebener Wert substituiert wird,

$$l' = 0^{\text{m}}.760 \frac{m}{\Delta'}$$

Nach *Regnault* wiegt aber ein Kubikmeter trockner Luft bei 0° C und 760^{mm} Barometerhöhe (unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau) $1292^{\mathrm{g}}.74$ und ein Kubikmeter Quecksilber bei 0° C $13\,595\,930^{\mathrm{g}}$; somit ist

$$l' = 0^{\mathrm{m}}.760 \, \frac{13\,595\,930}{1292.74} = 7993^{\mathrm{m}}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergibt sich, wenn berücksichtigt wird, daß P' eine Konstante ist,

$$d\left(\frac{P}{P'}\right) = -\frac{\gamma \Delta}{\Gamma l' \Delta'} \, dr \tag{4}$$

Ferner folgt aus (2) und (3)

$$\frac{P_0}{P'} = \frac{\gamma_0 l_0 \Delta_0}{\Gamma l' \Delta'} \tag{5}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{P}{P'} &= p, & \frac{\Delta}{\Delta'} &= \mathfrak{r}, & \frac{\gamma}{\Gamma} &= g \\ \frac{P_0}{P'} &= p_0, & \frac{\Delta_0}{\Delta'} &= \mathfrak{r}_0, & \frac{\gamma_0}{\Gamma} &= g_0 \end{aligned} \tag{5^a}$$

und nennt p den Luftdruck, $\mathfrak{r}$ die Dichtigkeit der Luft, g die Schwere in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, also p_0 den Luftdruck, $\mathfrak{r}_0$ die Dichtigkeit der Luft, g_0 die Schwere am Beobachtungsorte, d. i. in der Entfernung r_0 vom Erdzentrum, so ist damit als Einheit des Luftdrucks der Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Dichtigkeit die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur 0° C und unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Schwere die Schwere unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau gewählt, und die Gleichungen (4) und (5) nehmen die Form an

$$l' \, dp = - g \mathfrak{r} \, dr \tag{6}$$

$$l' p_0 = g_0 \mathfrak{r}_0 l_0 \tag{7}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{l_0}{p_0} \, dp = - \frac{g \mathfrak{r}}{g_0 \mathfrak{r}_0} \, dr = - \frac{r_0^2 \mathfrak{r}}{r^2 \mathfrak{r}_0} \, dr = r_0 \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0} \, d\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

oder, wenn

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0} = 1 - \omega, \qquad \frac{r_0}{r} = 1 - s \tag{7^a}$$

gesetzt wird,

$$dp = - p_0 \frac{r_0}{l_0} (1 - \omega) \, ds \tag{8}$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit einer im nächsten Paragraphen abzuleitenden Differentialgleichung zwischen p und ω wird sich eine Beziehung zwischen s und ω, also, nach der Bedeutung dieser Größen, das Gesetz ergeben, nach dem sich die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe ändert. Zunächst aber sollen die in (8) enthaltenen Unbekannten r_0 und l_0 bestimmt werden. Ist h die Seehöhe und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, bezeichnet man ferner mit R die Entfernung eines unter der geographischen Breite φ, aber im Meeresniveau gelegenen Punktes vom Mittelpunkte der Erde, so hat man

$$r_0 = R + h$$

Es möge nun a die halbe große Achse und e die Exzentrizität eines Erdmeridians bedeuten; aus der in § 67 gegebenen Formel (2) folgt dann näherungsweise

$$\frac{R}{a} = 1 - \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2\varphi + \cdots$$

Nimmt man jetzt

$$a(1 - \tfrac{1}{4}e^2) = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}, \qquad \frac{e^2}{4 - e^2} = 0.00168$$

an, so wird

$$R = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}(1 + 0.00168 \cos 2\varphi)$$

Folglich ergibt sich, wenn auch h in Metern ausgedrückt ist,

$$(9) \qquad r_0 = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}(1 + 0.00168 \cos 2\varphi + 0.000\,000\,157\,h)$$

Für l_0 folgt aus (7)

$$(10) \qquad l_0 = \frac{p_0}{\mathfrak{r}_0}\,\frac{l'}{g_0}$$

Die Konstante l' ist bereits oben bestimmt worden. Was g_0 betrifft, so hat man aus den an zahlreichen Orten der Erde ausgeführten Schwerebestimmungen die Formel abgeleitet

$$(11) \qquad g_0 = 1 - 0.00265 \cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h$$

Um den Wert von l_0 zu finden, ist also nur noch der Quotient $p_0 : \mathfrak{r}_0$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck bedient man sich des *Gay-Lussac—Mariotte*schen Gesetzes, welches, auf trockene Luft angewandt, lautet: Wenn der Ausdehnungskoeffizient der trockenen Luft mit α bezeichnet wird, so ist der Druck der trockenen Luft von der Temperatur t proportional dem Produkt aus der Dichtigkeit dieser Luft und dem Aggregat $1 + \alpha t$. Da jedoch die Dichtigkeit der trockenen Luft, welche unter dem Drucke 1 steht und die Temperatur 0° C hat, als Einheit der Dichtigkeit gewählt wurde, so muß die Proportionalitätskonstante gleich 1 sein; demnach erhält man für die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur t

$$(\mathrm{A}) \qquad \text{Dichtigkeit} = \frac{\text{Druck}}{1 + \alpha t}$$

Die atmosphärische Luft enthält nun stets eine gewisse Menge Wasserdampf. Nach den Versuchen *Daltons* ist aber der Druck eines Gemenges von trockener Luft und Dampf bei der Temperatur t gleich der Summe der Drucke, welche diese beiden Substanzen jede für sich ausüben. Ist also p der Druck, welchen die feuchte Luft ausübt, und $\mathfrak{p}$ der Druck des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, so ist $p - \mathfrak{p}$ der Druck, welchen die trockene Luft allein ausübt; der Gleichung (A) zufolge ergibt sich somit für die Dichtigkeit ($\mathfrak{r}_1$) dieser trockenen Luft

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{p - \mathfrak{p}}{1 + \alpha t}$$

Würde der Wasserdampf von der Temperatur t, dessen Druck mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet wurde, durch trockene Luft von der Temperatur t ersetzt, welche ebenfalls den Druck $\mathfrak{p}$ ausübte, so würde die Dichtigkeit dieser Luft gleich $\mathfrak{p} : (1 + at)$ sein. Der Versuch lehrt aber, daß das Gewicht eines Volumens Wasserdampfes nur 0.622 des Gewichtes des gleichen Volumens trockener Luft von gleicher Temperatur und unter gleichem Druck beträgt; für gleiche Temperatur und gleichen Druck ist also auch die Dichtigkeit des Wasserdampfes gleich 0.622 mal der Dichtigkeit der trockenen Luft. Somit ergibt sich für die Dichtigkeit des Wasserdampfes, dessen Temperatur gleich t, und dessen Druck gleich $\mathfrak{p}$ ist,

$$\mathfrak{r}_2 = 0.622 \frac{\mathfrak{p}}{1 + at}$$

Die oben mit $\mathfrak{r}$ bezeichnete Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist gleich $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$; durch Substitution der Werte von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ erhält man demnach

$$\mathfrak{r} = \frac{p - 0.378\mathfrak{p}}{1 + at}$$

oder, indem man 0.378 durch $\frac{3}{8}$ ersetzt,

$$p = \frac{\mathfrak{r}(1 + at)}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}}{p}} \tag{12}$$

Wenn also die für den Beobachtungsort gültigen Werte von p, $\mathfrak{p}$, ... durch den angehängten Index 0 gekennzeichnet werden, so hat man

$$\frac{p_0}{\mathfrak{r}_0} = \frac{1 + at_0}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}} \tag{13}$$

Substituiert man nun die für g_0 und $\frac{p_0}{\mathfrak{r}_0}$ gefundenen Werte in die Gleichung (10) und setzt nach *Regnault* $a = 0.003\,663$, so folgt

$$l_0 = l'\left(1 + 0.003\,663\, t_0 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} + 0.00265 \cos 2\varphi + 0.000\,000\,310 h\right) \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (9) und dem früher gefundenen Wert $l' = 7993^{\mathrm{m}}$ erhält man, wenn das von h abhängige Glied vernachlässigt wird,

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7993}{6\,366\,000}\left(1 + 0.003\,663\, t_0 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} + 0.0010 \cos 2\varphi\right) \tag{15}$$

75. Änderung der Dichtigkeit mit der Höhe einer Luftschicht. Um die im vorigen Paragraphen angekündigte Differentialgleichung zwischen p und ω ableiten zu können, ist man genötigt, auf Grund der bei Ballonfahrten ausgeführten Messungen des Luftdrucks, der Temperatur und des Dunstdrucks sowie der hieraus nach § 76 berechneten Werte der Dichtigkeit der Luft einige Hypothesen zu machen. Die erste Annahme ist, daß für alle Schichten der Atmosphäre

$$\frac{\mathfrak{p}}{p} = \frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} \tag{16}$$

vorausgesetzt wird. Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt dann

$$(16^a) \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\mathfrak{r}\,(1 + at)}{\mathfrak{r}_0\,(1 + at_0)}$$

oder, da $a = 0.003\,663 = 1 : 273$ ist,

$$(17) \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0}\left(1 - \frac{t_0 - t}{273^0 + t_0}\right)$$

Macht man die weitere Annahme, daß bei zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche die Änderung der Temperatur derjenigen der Dichtigkeit proportional ist, so hat man

$$(18) \qquad t_0 - t = C\,(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}),$$

wo C noch von der Tages- oder Jahreszeit abhängig gedacht werden kann. Hieraus erhält man für $\mathfrak{r} = 0$, d. h. für die Grenze der Atmosphäre, wenn die dort herrschende Temperatur $t = -273^0 + T$ gesetzt wird,

$$t_0 + 273^0 - T = C\mathfrak{r}_0$$

Durch Division der zwei letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{t_0 - t}{273^0 + t_0} = \frac{\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0}\left(1 - \frac{T}{273^0 + t_0}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (7^a) und wenn

$$(19) \qquad 1 - \frac{T}{273^0 + t_0} = f$$

gesetzt wird,

$$(20) \qquad \frac{t_0 - t}{273^0 + t_0} = f\omega$$

Somit nimmt die Gleichung (17) die Form an

$$(21) \qquad \frac{p}{p_0} = (1 - \omega)\,(1 - f\omega)$$

Wenn nun p_0 und f gegebene Werte haben, so erhält man durch Differentiation von (21)

$$dp = -p_0\,[(1 - f) + 2f\,(1 - \omega)]\,d\omega$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit (8) ergibt sich

$$\frac{r_0}{l_0}\,ds = (1 - f)\,\frac{d\omega}{1 - \omega} + 2f d\omega$$

Integriert man diese Gleichung und bestimmt die Integrationskonstante durch die Bedingung, daß für den Beobachtungsort $\omega = s = 0$ sein muß, so erhält man die für die Folge wichtige Beziehung

$$(22) \qquad \frac{r_0}{l_0}\,s = -(1 - f)\log(1 - \omega) + 2f\omega$$

76. Bestimmung des Drucks und der Dichtigkeit der Luft. Um die bisher abgeleiteten Gleichungen verwerten zu können, muß noch gezeigt werden, in welcher Weise sich der Druck und die Dichtigkeit der Luft bestimmen lassen. Ist $\mathfrak{B}$ die wahre Barometerhöhe, τ die Temperatur des Quecksilbers, m' seine Dichtigkeit bei der Temperatur τ und γ_0 die Schwere für den Beobachtungsort, so erhält man für den Druck der Luft am Beobachtungsort

$$P_0 = \gamma_0 m' \mathfrak{B}$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Gleichung (2^a), so ergibt sich mit Rücksicht auf (5^a)

$$p_0 = g_0 \frac{m' \mathfrak{B}}{m\, 760^{\mathrm{mm}}} \tag{23}$$

Um aus der abgelesenen Barometerhöhe die wahre zu erhalten, ist erstere zunächst wegen eventueller Teilungsfehler der Skala oder des Nonius und auch wegen einer etwaigen, durch die Kapillarität bewirkten Depression des Quecksilbers zu korrigieren; die so verbesserte Ablesung werde mit B bezeichnet. Ist nun die Skala bei der Temperatur 0° C geteilt worden, und sind die Teilstriche auf einer messingnen Röhre eingraviert, welche das eigentliche Barometerrohr in seiner ganzen Länge umgibt, so erhält man die wahre Barometerhöhe aus der Gleichung

$$\mathfrak{B} = B\,(1 + 0.000019\,\tau), \tag{24}$$

wo der Koeffizient von τ den Ausdehnungskoeffizienten des Messings angibt.

Die Dichtigkeit m' des Quecksilbers bei der Temperatur τ findet man aus der für 0° gültigen Dichtigkeit m mit Hilfe der Formel

$$m' = \frac{m}{1 + 0.000\,181\,\tau} \tag{24^a}$$

Substituiert man die Werte von $\mathfrak{B}$ und m', sowie den für g_0 gegebenen Ausdruck (11) in die Gleichung (23), so folgt

$$p_0 = (1 - 0.00265 \cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h)\,\frac{B\,(1 - 0.000\,162\,\tau)}{760} \tag{25}$$

Der Gleichung (13) zufolge hat man aber auch, wenn $a = 0.003\,663$ gesetzt wird,

$$p_0 = \mathfrak{r}_0 \frac{1 + 0.003\,663\,t_0}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}} \tag{26}$$

Mit Hilfe eines Psychrometers läßt sich nun die Höhe einer Quecksilbersäule bestimmen, deren Druck gleich ist demjenigen des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes; der Druck selbst ergibt sich aus der Gleichung (25), wenn man für B die Höhe jener Quecksilbersäule, ausgedrückt in Millimetern, substituiert. Bezeichnet man diese Höhe mit π_0, so wird

$$\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B};$$

die Gleichungen (25) und (26) geben dann

$$(27)\qquad \mathfrak{r}_0 = \frac{B}{760}\,\frac{1 - 0.000\,162\,t_0}{1 + 0.003\,663\,t_0}\left[1 + 0.000\,162\,(t_0 - \tau) - \right.$$
$$\left. - 0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h\right]\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{B}\right)$$

Wird der Wert, welchen $\mathfrak{r}_0$ für $B = 760^{\mathrm{mm}}$, $t_0 = \tau = 0^0$ C, $h = 0$, $\varphi = 45^0$, $\pi_0 = 6^{\mathrm{mm}}$ annimmt, mit $\mathfrak{r}'_0$ bezeichnet, so folgt aus (27)

$$(28)\qquad \mathfrak{r}'_0 = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich mit Vernachlässigung verschwindend kleiner Glieder

$$\frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}'_0}\,\frac{1 + 0.003\,663\,t_0}{1 - 0.000\,162\,t_0} = \frac{B}{760}\left[1 + 0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.002\,65\cos 2\varphi\right.$$
$$\left. - 0.000\,000\,310\,h\right] + \frac{1}{760}\,\frac{3}{8}\left(6\,\frac{B}{760} - \pi_0\right)$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen. Bezeichnet man nämlich mit B_m die mittlere für den Beobachtungsort gültige Barometerhöhe und setzt

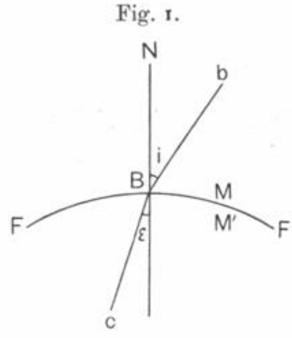
$$(29)\qquad \mathfrak{b} = B + B_m\left[0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - \right.$$
$$\left. - 0.000\,000\,310\,h\right] + \frac{3}{8}\left(6\,\frac{B_m}{760} - \pi_0\right)$$

so erhält man mit einer für alle Fälle ausreichenden Genauigkeit

$$(30)\qquad \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}'_0} = \frac{\mathfrak{b}}{760}\,\frac{1 - 0.000\,162\,t_0}{1 + 0.003\,663\,t_0}$$

77. Differentialausdruck der Refraktion. Ein Lichtstrahl bB (Fig. 1) treffe in B auf die Grenzfläche FF zweier Medien M und M' und werde nach Bc gebrochen. Aus physikalischen Versuchen ergeben sich dann folgende drei Sätze: 1. Bc liegt mit Bb und der Normalen BN in einer Ebene. 2. Bezeichnen i und ε die Winkel, welche der einfallende, bzw. der gebrochene Strahl mit der Normalen BN bilden, und bedeutet ν eine Konstante, so ist

Fig. 1.



$$(31)\qquad \frac{\sin i}{\sin \varepsilon} = \nu$$

Die Konstante ν wird der Brechungsexponent des Mediums M' in bezug auf das Medium M genannt. 3. Es seien μ' und μ die Brechungsexponenten von M', bzw. M in bezug auf ein Medium L; dann ist

$$(32)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \nu$$

Ist unter dem Medium L der luftleere Raum zu verstehen, so werden μ' und μ kurzweg die Brechungsexponenten der Medien M', bzw. M genannt.

Aus den zwei letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\sin i}{\sin \varepsilon} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{33}$$

Wenn nun μ' nur wenig von μ verschieden ist, so unterscheidet sich i wenig von ε; setzt man dann

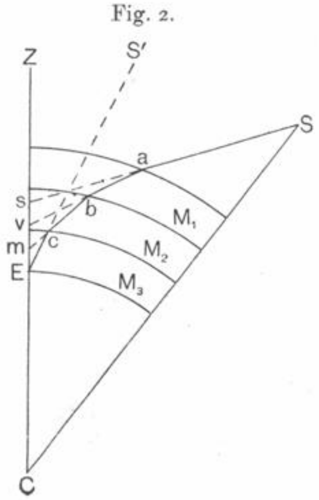
$$\mu' = \mu + d\mu, \qquad \varepsilon = i - d\Theta,$$

wo also $d\Theta$ den Winkel bezeichnet, den der über B hinaus verlängerte einfallende Strahl mit dem gebrochenen Strahl bildet, so folgt aus (33)

$$d\Theta = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tang} i \tag{34}$$

Es werde jetzt angenommen, daß die Atmosphäre aus einer Reihe sehr dünner Kugelschichten M_1, M_2, ... bestehe, deren Zentrum C der Mittelpunkt der Erde sei (Fig. 2). Wir setzen ferner voraus, daß der Brechungsexponent innerhalb jeder Schicht konstant ist und sich von Schicht zu Schicht nur wenig ändert. Ein Lichtstrahl Sa, der, aus dem luftleeren Raum kommend, die Grenze der Atmosphäre in a trifft, werde in der ersten Schicht nach ab gebrochen, in der zweiten nach bc, in der dritten nach cE, usw. Ist E ein Punkt der Erdoberfläche, so wird ein dort befindlicher Beobachter den Stern S, welchen wir als die Lichtquelle annehmen, in der Richtung EcS' wahrnehmen. Der Winkel ZES', wo Z das Zenit des Beobachters in E bezeichnet, wird die **scheinbare Zenitdistanz** des Sterns genannt.

Fig. 2.



Aus dem Dreiecke Ccb folgt, wenn $Cb = r_1$, $Cc = r_2$, $Ccb = 180^\circ - i_2$ und $Cbc = \varepsilon_1$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin i_2}{\sin \varepsilon_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (33), wenn der Winkel Cba mit $180^\circ - i_1$ und die Brechungsexponenten der Medien M_1 und M_2 mit μ_1, bzw. μ_2 bezeichnet werden,

$$\frac{\sin i_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$r_2 \mu_2 \sin i_2 = r_1 \mu_1 \sin i_1$$

Da diese Gleichung für je zwei aufeinander folgende Schichten gilt, so ergibt sich der Satz: Es seien M_m und M_n zwei beliebige **nicht** aufeinander folgende Schichten der Atmosphäre mit den Brechungsexponenten μ_m, bzw. μ_n, P und Q seien die Punkte, in denen ein Lichtstrahl die Grenzflächen der Schichten M_m und M_{m+1}, bzw. M_n und M_{n+1} schneidet; die Abstände der Punkte P und Q vom Mittelpunkte der Erde mögen mit r_m und r_n bezeichnet werden. Wenn dann der in

P einfallende Strahl mit der durch P normal zu der Grenzfläche der Schichten M_m und M_{m+1} gezogenen Geraden den Winkel i_m bildet, wenn ferner der in Q einfallende Strahl mit der durch Q normal zu der Grenzfläche der Schichten M_n und M_{n+1} gezogenen Geraden den Winkel i_n bildet, so ist

$$r_m \mu_m \sin i_m = r_n \mu_n \sin i_n$$

Nimmt man die Schichten als unendlich dünn an, so wird der Weg des Lichtes eine Kurve und die letzte Gleichung drückt jetzt folgendes aus: Bedeutet r die Entfernung eines Punktes U der Kurve vom Mittelpunkte der Erde, bedeutet ferner μ den dem Punkte U entsprechenden Wert des Brechungsexponenten der Luft, und bezeichnet i den Winkel zwischen der in U an die Kurve gezogenen Tangente und der Verbindungslinie von U mit dem Mittelpunkte der Erde, so hat das Produkt $r\mu \sin i$ für alle Punkte der Kurve denselben Wert. In dem Punkte E, in dem das Licht den Beobachter trifft, ist aber $r = EC = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$, wo z die scheinbare Zenitdistanz des Sterns bedeutet; somit ist

$$r\mu \sin i = r_0 \mu_0 \sin z \tag{35}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man aus (34)

$$d\Theta = \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu} \tag{36}$$

Man verlängere jetzt irgend einen einfallenden Strahl, beispielsweise ab in Fig. 2 und den entsprechenden gebrochenen Strahl bc bis zu ihren Durchschnittspunkten v, bzw. m mit CZ; der Definition von $d\Theta$ gemäß ist dann der Winkel vbm gleich dem Werte von $d\Theta$ im Punkte b. Nun ist aber $vbm = Zvb - Zmb$. Integriert man also die Gleichung (36), indem man auf der rechten Seite als Grenzen des Integrals die für die Grenze der Atmosphäre, bzw. für den Beobachtungsort gültigen Werte $\mu = 1$ und $\mu = \mu_0$ wählt, so erhält man, wenn der Winkel ZsS zwischen dem die Grenzschicht der Atmosphäre in a treffenden Lichtstrahl aS und CZ mit ζ bezeichnet wird,

$$\zeta = z + \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu} \tag{37}$$

Wäre keine Atmosphäre vorhanden, so würde der Beobachter in E die wahre Zenitdistanz ZES beobachten; bezeichnet man diesen Winkel mit $\mathfrak{z}$ und den Winkel sSE mit σ, so ist

$$\mathfrak{z} = \zeta - \sigma$$

Wegen der im Verhältnis zu den Entfernungen der Himmelskörper kleinen Erddimensionen ist σ ein sehr kleiner Winkel; setzt man demgemäß $\sin\sigma = \sigma \sin 1''$, so folgt aus dem Dreieck sSE, wenn Es mit x und ES mit Δ bezeichnet wird,

$$\sigma \sin 1'' = \frac{x}{\Delta} \sin\zeta = \frac{x}{r_0} \frac{r_0}{\Delta} \sin\zeta$$

An Stelle des Quotienten $x : r_0$ läßt sich ein anderer Ausdruck einführen. Zunächst ergibt sich aus dem Dreieck saC, wenn $aC = H$ und $saC = \varphi$ gesetzt wird,

$$r_0 + x = \frac{H \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

Oben wurde aber gefunden, daß das Produkt $r\mu \sin i$ in allen Punkten eines Lichtstrahls denselben Wert besitze. Im Punkte a des Strahls $SabcE$ ist nun $r = H$, $\mu = 1$, $i = \varphi$, und im Punkte E ist $r = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$; somit ist

$$H \sin\varphi = r_0 \mu_0 \sin z$$

Demnach wird die vorige Gleichung

$$(37^a) \qquad 1 + \frac{x}{r_0} = \frac{\mu_0 \sin z}{\sin\zeta}$$

und die Gleichung für σ verwandelt sich in

$$\sigma = \frac{r_0}{\varDelta \sin 1''} (\mu_0 \sin z - \sin\zeta)$$

Hier kann man $\varDelta$ als die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkte der Erde auffassen; setzt man dann

$$\frac{r_0}{\varDelta \sin 1''} = \Pi,$$

wo Π die Horizontalparallaxe des Gestirns genannt wird, so folgt

$$\sigma = \Pi(\mu_0 \sin z - \sin\zeta)$$

Der physikalisch bestimmte Brechungsexponent der Luft mittlerer Dichtigkeit ist für die dem hellsten Teil des Spektrums angehörigen Lichtstrahlen gleich 1.000 292. Die Differenz zwischen ζ und z erreicht ihren Maximalwert, wenn sich das Gestirn im Horizont befindet ($z = 90^\circ$), und zwar folgt aus den in § 40 erwähnten Beobachtungen des Auf- und Unterganges der Gestirne, daß für $z = 90^\circ$ die wahre Zenitdistanz $\zeta = 90^\circ\!.6$ angenommen werden kann. Für den Mond, dessen mittlere Parallaxe $57'$ beträgt, wird somit σ selbst im Horizont nicht größer als $1''$; für alle übrigen Himmelskörper ist σ verschwindend klein. Mit Rücksicht hierauf bezeichnet man den durch die Gleichung (37) bestimmten Winkel ζ als die wahre Zenitdistanz.

78. Einfluß des Wasserdampfes auf die brechende Kraft der Luft. Es bedeute K den Brechungsexponenten und δ die Dichtigkeit eines Gases für die Temperatur t und den Druck v, ferner seien K' und δ' die für die Temperatur 0° C und den Druck einer Atmosphäre gültigen Werte von K und δ; den physikalischen Versuchen zufolge hat man dann

$$\frac{K^2 - 1}{K'^2 - 1} = \frac{\delta}{\delta'},$$

wo $K^2 - 1$ die **brechende Kraft** des Gases für die Temperatur t und den Druck v genannt wird. Ferner ergibt sich aus dem *Gay-Lussac—Mariotte*schen Gesetze, wenn der Ausdehnungskoeffizient des Gases mit e bezeichnet und der Druck einer Atmosphäre als Einheit des Drucks gewählt wird,

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{v}{1 + et}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$K^2 - 1 = (K'^2 - 1)\frac{v}{1 + et} \tag{B}$$

Es sei nun p der in einem beliebigen Punkte der Atmosphäre herrschende Druck, $\mathfrak{p}$ sei der Druck des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, also $p - \mathfrak{p}$ der Druck der trockenen Luft; ferner mögen μ, ν und n die Brechungsindices der atmosphärischen Luft, des Wasserdampfes und der trockenen Luft für die Temperatur t und den Druck p, bzw. $\mathfrak{p}$, bzw. $p - \mathfrak{p}$ bezeichnen. Macht man dann von dem von *Biot* und *Arago* aufgestellten Gesetze Gebrauch, wonach die brechende Kraft eines Gemisches von Gasen, zwischen denen keine chemische Verwandtschaft besteht, der Summe der brechenden Kräfte der Bestandteile gleich ist, so erhält man

$$\mu^2 - 1 = (\nu^2 - 1) + (n^2 - 1)$$

Wenn aber ν' und n' die für die Temperatur 0° C. und den Druck einer Atmosphäre gültigen Werte von ν und n bedeuten, wenn ferner die Ausdehnungskoeffizienten des Wasserdampfes und der trockenen Luft mit e und a bezeichnet werden, so folgt aus der Gleichung (B)

$$\nu^2 - 1 = (\nu'^2 - 1)\frac{\mathfrak{p}}{1 + et}, \qquad n^2 - 1 = (n'^2 - 1)\frac{p - \mathfrak{p}}{1 + at}$$

Demnach wird

$$(\mu^2 - 1) = \frac{n'^2 - 1}{1 + at}\left[p - \mathfrak{p} + \frac{\nu'^2 - 1}{n'^2 - 1}\,\frac{1 + at}{1 + et}\,\mathfrak{p}\right]$$

Nach den Versuchen von *Lorenz* (Wiedemanns Annalen, Band 11) hat man

$$(n'^2 - 1) - (\nu'^2 - 1) = 0.000082$$

und für Strahlen von der Wellenlänge der Linie D des Spektrums

$$n'^2 - 1 = 0.000582$$

Damit erhält man

$$\mu^2 - 1 = \frac{n'^2 - 1}{1 + at}\left[p - \mathfrak{p} + 0.86\,\frac{1 + at}{1 + et}\,\mathfrak{p}\right]$$

Da $a = 0.0037$ und für den gesättigten Wasserdampf $e = 0.0042$ ist, so darf man in dem kleinen von $\mathfrak{p}$ abhängigen Gliede unbedenklich $(1 + at) : (1 + et) = 1$ annehmen; die vorige Gleichung wird dann

$$\mu^2 - 1 = (n'^2 - 1)\frac{p - 0.14\mathfrak{p}}{1 + at}$$

Für den in dieser Gleichung vorkommenden Koeffizienten von $\mathfrak{p}$ erhielt *Radau* aus den Versuchen von *Fizeau* und *Jamin* die Werte 0.13 und 0.115: gibt man dem Koeffizienten den Mittelwert $\frac{1}{8}$, so folgt

$$\mu^2 - 1 = (n'^2 - 1)\,\frac{p\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at}$$

oder, wenn

(38) $$\frac{p\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at} = \varrho$$

und

(38ᵃ) $$n'^2 - 1 = 2c$$

gesetzt wird,

(39) $$\mu^2 - 1 = 2c\varrho$$ (10)

Aus der Gleichung (12) erhält man für die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft

$$\mathfrak{r} = \frac{p\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at};$$

die vorhin mit ϱ bezeichnete Größe unterscheidet sich also von der Dichtigkeit der Luft dadurch, daß an Stelle des Faktors $\frac{3}{8}$ von $\frac{\mathfrak{p}}{p}$ der Faktor $\frac{1}{8}$ tritt. Nach *Radaus* Vorgange soll nun ϱ die optische Dichtigkeit der atmosphärischen Luft genannt werden; man hat dann den Satz, daß die brechende Kraft der Luft ihrer optischen Dichtigkeit proportional ist.

Den Gleichungen (38) und (39) zufolge hat man, wenn p_0 den Luftdruck, $\mathfrak{p}_0$ den Druck des atmosphärischen Wasserdampfes, t_0 die Temperatur, μ_0 den Brechungsexponenten und ϱ_0 die optische Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsort bedeutet,

(40) $$\varrho_0 = \frac{p_0\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}\right)}{1 + at_0}$$

und

(40ᵃ) $$\mu_0^2 - 1 = 2c\varrho_0$$ (10)

Substituiert man für p_0 seinen Ausdruck (25) und setzt, wie früher $a = 0.003\,663$ und $\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$, so ergibt sich aus (40)

$$\varrho_0 = \frac{B\,(1 - 0.000\,162\,t_0)}{760\,(1 + 0.003\,663\,t_0)}\left[1 + 0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h\right]\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\pi_0}{B}\right)$$

Demnach wird, wenn ϱ_0' die optische Dichtigkeit der Luft für $B = 760^{mm}$, $t_0 = \tau = 0^\circ$ C, $h = 0$, $\varphi = 45^\circ$, $\pi_0 = 6^{mm}$ bedeutet,

(41) $$\varrho_0' = 1 - \frac{1}{8}\,\frac{6}{760}$$

Bezeichnet man jetzt wieder mit B_m die mittlere Barometerhöhe des Beobachtungsortes und setzt

$$(41^a)\quad \beta = B + B_m[0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h] + \frac{1}{8}\left(6\,\frac{B_m}{760} - \pi_0\right),$$

so erhält man

$$(41^b)\qquad \frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \frac{\beta}{760}\,\frac{1 - 0.000\,162\,t_0}{1 + 0.003\,663\,t_0}$$

Für einen gegebenen Beobachtungsort wird die Berechnung von β sehr einfach, wenn man zwei kleine Tabellen konstruiert, von denen die eine mit dem Argument $t_0 - \tau$ das Glied

$$B_m[0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h]$$

gibt, während die zweite das von dem Dampfdruck π_0 abhängige Glied liefert. Nachdem man β gefunden hat, kann man aus meinen Refraktionstafeln*) $\log\frac{\beta}{760}$ entnehmen; diese Tafeln geben auch den log des von t_0 abhängigen Quotienten in (41^b).

79. Transformation des Refraktionsintegrals. Da der in § 75 gemachten Annahme gemäß

$$\frac{\mathfrak{p}}{p} = \frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}$$

sein soll, so folgt aus den Gleichungen (38) und (40)

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p\,(1 + a t_0)}{p_0\,(1 + a t)}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (16^a) ergibt sich demnach

$$\varrho : \varrho_0 = \mathfrak{r} : \mathfrak{r}_0$$

Man kann also unter Benutzung der durch die Gleichung (7^a) eingeführten Variabelen ω

$$(42)\qquad 1 - \frac{\varrho}{\varrho_0} = \omega \qquad (11)$$

setzen; setzt man ferner noch

$$(43)\qquad \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0} = \mathfrak{a},$$

so erhält man aus (39) und (40^a)

$$(44)\qquad \frac{\mu^2}{\mu_0^2} = 1 - 2\,\mathfrak{a}\,\omega \qquad (12)$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung gibt

$$(44^a)\qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\,\frac{\mathfrak{a}\,d\omega}{1 - 2\,\mathfrak{a}\,\omega}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (44) und (44^a) läßt sich nun in dem Integral (37) die Variabele μ durch ω ersetzen. Um die neuen Integrationsgrenzen zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach (39) dem Werte $\mu = 1$ der Wert $\varrho = 0$ entspricht;

*) *Wilhelm Engelmann*, Leipzig 1906.

für $\varrho = 0$ ist aber nach (42) $\omega = 1$. Der Wert $\mu = \mu_0$ gilt für den Beobachtungsort, und für diesen ist $\varrho = \varrho_0$, folglich $\omega = 0$. Bringt man also das Integral (37) in die Form

$$\Re = \zeta - z = \int_1^{\mu_0} \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 z} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} \frac{d\mu}{\mu}, \tag{45}$$

setzt dann, wie in (7^a),

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s$$

und berücksichtigt, daß

$$\frac{1}{\sin^2 z} = 1 + \operatorname{cotg}^2 z$$

ist, so ergibt sich

$$\Re = \int_0^1 \frac{\mathfrak{a}(1-s)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-\frac{3}{2}} d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + (2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1}}}$$

Dieses Integral läßt sich vereinfachen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Zuvor aber erscheint es wünschenswert, sich eine Vorstellung über die Größe von $\mathfrak{a}$ und s zu verschaffen. Wie oben erwähnt wurde, ist der Brechungsexponent der Luft mittlerer Dichtigkeit für gelbe Strahlen gleich $1 \cdot 000\,292$; den Gleichungen (40^a) und (43) zufolge ist somit der zugehörige Wert von $\mathfrak{a} = 0 \cdot 0003$. Die durch die zweite Gleichung (7^a) definierte Größe s ist an der Oberfläche der Erde gleich 0 und würde für $r = \infty$ gleich 1 werden. Die Höhe der Atmosphäre aber, insoweit letztere noch einen merklichen Beitrag zur Refraktion geben kann, darf zu 50 km veranschlagt werden*); nimmt man also für r_0 den mittleren Radius der Erde (6366 km) an, so ist r höchstens gleich 6416 km, und dem entspricht als Maximalwert von s der Betrag $0 \cdot 0078$. Vernachlässigt man nun in dem Zähler des oben unter dem Integralzeichen vorkommenden Bruches die Glieder von der Ordnung $\mathfrak{a}^2 s$ und von höherer Ordnung, so wird

$$\mathfrak{a}(1-s)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{a}(1 - s + 3\mathfrak{a}\omega)$$

Ferner erhält man, wenn in dem Nenner des genannten Bruches das Glied von der Ordnung $s^2\mathfrak{a}$ und die Glieder höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben,

$$(2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1} = 2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2 + 4s\mathfrak{a}\omega - 4\mathfrak{a}^2\omega^2$$

oder, wenn

$$\underline{s - \mathfrak{a}\omega = u} \tag{46}$$

gesetzt wird,

$$(2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1} = 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2$$

Dividiert man noch den Wert des Integrals $\Re$ durch $\sin 1''$ und setzt

$$\frac{\mathfrak{a}}{\sin 1''} = \mathfrak{a}'',$$

*) Nach *J. Hann* (Lehrbuch der Meteorologie, II. Aufl., S. 9) beträgt die Luftdichte in dieser Höhe nur mehr $0 \cdot 0004$ von jener an der Erdoberfläche.

so ergibt sich für $\Re$, ausgedrückt in Bogensekunden,

$$\Re = \mathfrak{a}'' \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2}} \tag{47}$$

Von den Entwicklungen, welche dieser Ausdruck zuläßt, sollen hier nur zwei, von *Radau* herrührende, mitgeteilt werden. Wie sich ergeben wird, eignet sich die erste dieser Entwicklungen für $z \leqq 80^\circ$, die zweite für $z > 80^\circ$.

80. Refraktion für $z \leqq 80^\circ$. Das Integral (47) läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}
\Re &= \mathfrak{a}'' \operatorname{tang} z \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega}{\left\{1 + 2\left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] \operatorname{tang}^2 z\right\}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \mathfrak{a}'' \operatorname{tang} z \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega) \left\{1 - \left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] \operatorname{tang}^2 z + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^2 \operatorname{tang}^4 z - \cdots \right\} d\omega
\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega &= A_0 \\
\mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega) \left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] d\omega &= A_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\, \mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega) \left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n d\omega &= A_n,
\end{aligned} \tag{48}$$

so lautet die vorige Reihe

$$\Re = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + A_2 \operatorname{tang}^5 z - \cdots + (-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z + \cdots \tag{49}$$

Um die Koeffizienten A_n berechnen zu können, bedarf man der Kenntnis der Integrale $\int_0^1 u^n d\omega$ und $\int_0^1 u^n \omega\, d\omega$. Man setze

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 u^n d\omega = U_n \tag{50}$$

Soll die Integration sich ausführen lassen, so muß u als Funktion von ω dargestellt werden. Nun ergibt sich, wenn man von beiden Seiten der Gleichung (22), nämlich

$$\frac{r_0}{l_0} s = -(1 - f) \log(1 - \omega) + 2f\omega,$$

$\frac{r_0}{l_0} \mathfrak{a}\omega$ subtrahiert und zur Abkürzung

$$\frac{r_0}{l_0} \mathfrak{a} = \varepsilon \tag{51}$$

setzt,

$$\frac{r_0}{l_0} u = -(1 - f) \log(1 - \omega) + (2f - \varepsilon)\omega$$

Wird jetzt noch

(52) 20
$$\frac{l_0(1-f)}{r_0} = a_0, \qquad \frac{2f-\varepsilon}{1-f} = k_0$$

gesetzt, so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen u und ω

(53) 21
$$\frac{u}{a_0} = -\log(1-\omega) + k_0\omega$$

Es empfiehlt sich aber, statt ω eine andere Variable x einzuführen, wo x durch die Gleichung

(54) 22
$$1-\omega = e^{-x}$$

definiert werden soll; es wird dann

(55) 23
$$\frac{u}{a_0} = x + k_0(1-e^{-x})$$

und

(56) 24
$$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{-x}dx$$

Durch Substitution des aus (55) folgenden Wertes von u in (56) erhält man

$$\frac{1}{a_0^n}U_n = \int_0^\infty \Big[\frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(1-e^{-x})k_0 + \frac{1}{2!}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}(1-e^{-x})^2k_0^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{h!}\frac{1}{(n-h)!}x^{n-h}(1-e^{-x})^hk_0^h + \cdots + \frac{1}{n!}(1-e^{-x})^nk_0^n\Big]e^{-x}dx$$

Schreibt man diese Reihe in der Form

(57) 25
$$\frac{1}{a_0^n}U_n = \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)}k_0 + \frac{1}{2!}\beta_n^{(2)}k_0^2 + \cdots + \frac{1}{h!}\beta_n^{(h)}k_0^h + \cdots + \frac{1}{n!}\beta_n^{(n)}k_0^n,$$

so sind die Koeffizienten β durch die Gleichungen definiert

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

. . . .

(58) 26
$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}dx$$

. . . .

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x}dx$$

Nun erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$$

Setzt man zur Abkürzung

(59) 27
$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n),$$

so sagt die vorige Gleichung, daß

(60) 28
$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n),$$

ist. Der Definition nach ist

(61) 20
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

Substituiert man also in der Gleichung (60) für n der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so erhält man

(62) 30
$$\Gamma(n+1) = n!$$

Da nun

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\,\Gamma(n+1)$$

ist, so wird

(63) 31
$$\beta_n^{(0)} = 1$$

Ferner ist

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n\,d(1-e^{-x})$$

oder

(64) 32
$$\beta_n^{(n)} = \frac{1}{n+1}$$

Um den Wert von

$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}\,dx$$

zu erhalten, entwickle man $(1-e^{-x})^h$ und berücksichtige, daß, wenn $px = v$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty x^{n-h}e^{-px}\,dx = \frac{1}{p^{n-h+1}}\int_0^\infty v^{n-h}e^{-v}\,dv = \frac{1}{p^{n-h+1}}\,\Gamma(n-h+1)$$

ist, folglich nach (62)

(65) 33
$$\int_0^\infty x^{n-h}\,e^{-px}\,dx = \frac{(n-h)!}{p^{n-h+1}}$$

Man erhält so für $0 < h < n$

(66) 30
$$\beta_n^{(h)} = 1 - \frac{h}{2^{n-h+1}} + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{3^{n-h+1}} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{h-1}h\,\frac{1}{h^{n-h+1}} + (-1)^h\,\frac{1}{(h+1)^{n-h+1}}$$

Durch die Gleichungen (63), (64) und (66) sind die Koeffizienten β bestimmt; für die Logarithmen von $\beta_1^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, …, bzw. $\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}$, $\frac{1}{2}\beta_3^{(2)}$, …, usw. ergeben sich die folgenden Werte:

log		log		log		log		log		log		log	
$\beta_1^{(1)}$	9.6989700												
$\beta_2^{(1)}$	9.8750613	$\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}$	9.221849										
$\beta_3^{(1)}$	9.9420081	$\frac{1}{2}\beta_3^{(2)}$	9.485090	$\frac{1}{6}\beta_3^{(3)}$	8.61979								
$\beta_4^{(1)}$	9.9719713	$\frac{1}{2}\beta_4^{(2)}$	9.594965	$\frac{1}{6}\beta_4^{(3)}$	8.93855	$\frac{1}{24}\beta_4^{(4)}$	7.9208						
$\beta_5^{(1)}$	9.9862117	$\frac{1}{2}\beta_5^{(2)}$	9.647063	$\frac{1}{6}\beta_5^{(3)}$	9.07947	$\frac{1}{24}\beta_5^{(4)}$	8.2794	$\frac{1}{120}\beta_5^{(5)}$	7.143				
$\beta_6^{(1)}$	9.9931606	$\frac{1}{2}\beta_6^{(2)}$	9.672843	$\frac{1}{6}\beta_6^{(3)}$	9.14903	$\frac{1}{24}\beta_6^{(4)}$	8.4444	$\frac{1}{120}\beta_6^{(5)}$	7.532	$\frac{1}{720}\beta_6^{(6)}$	6.30		
$\beta_7^{(1)}$	9.9965937	$\frac{1}{2}\beta_7^{(2)}$	9.685796	$\frac{1}{6}\beta_7^{(3)}$	9.18451	$\frac{1}{24}\beta_7^{(4)}$	8.5283	$\frac{1}{120}\beta_7^{(5)}$	7.716	$\frac{1}{720}\beta_7^{(6)}$	6.71	$\frac{1}{5040}\beta_7^{(7)}$	5.39

Zur numerischen Berechnung der U_n sind noch die Werte von a_0 und k_0 erforderlich. Diese ergeben sich aus den Gleichungen (52) in Verbindung mit (51) und (15), vorausgesetzt, daß die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen $\mathfrak{a}$ und f anderweitig bekannt sind. Der Gleichung (43) zufolge ist $\mathfrak{a}$ definiert durch

$$\mathfrak{a} = \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0},$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsorte bedeutet. Bezeichnet nun $\mathfrak{a}'$ den Wert von $\mathfrak{a}$, welcher einer fest gewählten Dichtigkeit ϱ_0' entspricht, und ist demnach

$$\mathfrak{a}' = \frac{c\varrho_0'}{1 + 2c\varrho_0'},$$

so folgt durch Division der zwei letzten Gleichungen

(67) 35 $$\mathfrak{a} = \frac{\varrho_0}{\varrho_0'} \frac{\mathfrak{a}'}{1 - 2\mathfrak{a}'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\right)}$$

Unter ϱ_0' soll jetzt die durch die Gleichung (41) definierte Dichtigkeit

$$\varrho_0' = 1 - \tfrac{1}{8}\,\tfrac{6}{760}$$

verstanden werden; für den zugehörigen Wert von $\mathfrak{a}'$ kann man dann nach *Bauschinger*

$$\mathfrak{a}' = 60''.15 \sin 1'' = 0.000\,291\,6\ldots$$

annehmen, wobei

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''} = 60''.15$$

als die der Dichtigkeit ϱ_0' entsprechende Refraktionskonstante bezeichnet wird. Der hier für $\mathfrak{a}'$ gegebene Wert beruht ganz auf astronomischen Beobachtungen; in welcher Weise sich letztere zur Bestimmung von $\mathfrak{a}'$ verwenden lassen, wird in § 89 gezeigt werden. Berechnet man jetzt noch mit Hilfe der Gleichungen (41^a) und (41^b) den für die jeweiligen Ablesungen der meteorologischen Instrumente gültigen Wert von $\varrho_0 : \varrho_0'$, so erhält man durch Substitution dieses und des für $\mathfrak{a}'$ angenommenen Wertes in die Gleichung (67) den der Dichtigkeit ϱ_0 entsprechenden Wert von $\mathfrak{a}$.

Um f zu bestimmen, kann man sich der gelegentlich einer Ballonfahrt gewonnenen Messungen des Luftdruckes, der Temperatur und des Dunstdruckes in den durchstrichenen Schichten bedienen. Mit Hilfe dieser Angaben berechne man nämlich zunächst nach § 76 die Dichtigkeit der Luft; verbindet man hiermit und mit den im Ballon beobachteten Temperaturen die für die Luft an der Erdoberfläche geltenden Werte der Dichtigkeit und Temperatur, so ergibt sich aus der ersten Gleichung (7^a) und der Gleichung (20) der gesuchte Wert von f. Auf Grund der Ergebnisse der in früheren Jahren unternommenen Ballonfahrten ist man dazu gekommen, $f = 0.2$ anzunehmen.

Der in (52) vorkommende Quotient $\frac{l_0}{r_0}$ läßt sich mittels der Gleichung (15) berechnen. Für die Praxis empfiehlt es sich, die zwei letzten von $\mathfrak{p}_0$ und $\cos 2\varphi$ abhängigen Glieder der Gleichung (15) zunächst zu vernachlässigen und den Einfluß derselben nachträglich zu bestimmen. Man setze also

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}(1 + 0.003\,663\,t_0)$$

Unter Benutzung dieses Ausdrucks und der vorhin angeführten Werte von f und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ erhält man aus (51) und (52) die für

$$\varrho_0' = 1 - \tfrac{1}{8}\tfrac{6}{760}, \qquad t_0 = 0^0\ \mathrm{C}$$

gültigen Werte

$$\log \varepsilon = 9.365\,967, \qquad \log a_0 = 7.001\,933, \qquad \log k_0 = 9.321\,556$$

Die Gleichung (57) in Verbindung mit (63) und (64) sowie den oben angegebenen Werten von $\frac{1}{h!}\beta_n^{(h)}$ liefert sodann die nachstehenden für $\varrho_0' = 1 - \frac{1}{8}\frac{6}{760}$ und $t_0 = 0^0\mathrm{C}$ gültigen Werte von $\log U_n$

$\log U_1 = 7.045\,233 - 10$	$\log U_5 = 5.097\,368 - 20$
» $U_2 = 4.070\,038 - 10$	» $U_6 = 2.10096 \quad - 20$
» $U_3 = 1.083\,999 - 10$	» $U_7 = 9.1037 \quad - 30$
» $U_4 = 8.092\,199 - 20$	

Nachdem im vorigen die Mittel angegeben worden sind, die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültigen Werte von U_n zu bestimmen, ist jetzt noch die Berechnung des Integrals $\int_0^1 u^n \omega\, d\omega$ erforderlich. Da aber dieses Integral im folgenden mit dem kleinen Faktor $\mathfrak{a}''\mathfrak{a}$ versehen auftritt, so genügt es, einen genäherten Wert desselben zu kennen. Nun ist nach (53) und (54)

$$u = a_0(x + k_0\omega)$$

Somit hat man

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega = a_0^n\left[\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \omega\, d\omega + \frac{1}{(n-1)!}k_0\int_0^1 x^{n-1}\omega^2 d\omega + \cdots\right]$$

Den Gleichungen (58) zufolge und unter Berücksichtigung von (54) ist aber

$$\frac{1}{(n-h)!}\int_0^1 x^{n-h}\omega^h d\omega = \beta_n^{(h)}$$

Folglich wird die vorige Gleichung

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega = a_0^n(\beta_{n+1}^{(1)} + \beta_{n+1}^{(2)} k_0 + \cdots),$$

Ferner ist nach (57) und (63)

$$a_0^n = U_n(1 - \beta_n^{(1)} k_0 - \cdots)$$

Vernachlässigt man jetzt die von k_0 abhängigen Glieder, so wird

(68) 36 $$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega = U_n \beta_{n+1}^{(1)}$$

In gleicher Weise ergibt sich

(68*) $$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 u^{n-1}\omega^2 d\omega = U_{n-1}\beta^{(2)}_{n+1}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann an die Berechnung der A_n geschritten werden. Die erste der Gleichungen (48) liefert ohne weiteres

(69) 37 $$A_0 = \mathfrak{a}''(1 + \mathfrak{a} - U_1)$$

Für A_1 erhält man aus der zweiten der Gleichungen (48)

$$A_1 = \mathfrak{a}''\int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\left[u - \frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]d\omega =$$
$$= \mathfrak{a}''\int_0^1 (u - \tfrac{3}{2}u^2 + 3u\mathfrak{a}\omega + \tfrac{1}{2}u^3 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}^2\omega^2 - 2u^2\mathfrak{a}\omega + \tfrac{5}{2}u\mathfrak{a}^2\omega^2 - \mathfrak{a}^3\omega^3)\,d\omega$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (50), (68) und (68*) wird der Beitrag, den die letzten fünf Glieder in der Klammer unter dem vorigen Integral zu $\mathfrak{R}$ liefern, gleich

$$-\mathfrak{a}''\,\mathrm{tang}^3 z\,(3U_3 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\beta_3^{(1)}U_2 + \tfrac{5}{2}\mathfrak{a}^2\beta_3^{(2)}U_1 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{a}^3)$$

Substituiert man hierin die oben gegebenen Werte von $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, U_1, U_2, U_3, $\beta_3^{(1)}$, $\beta_3^{(2)}$, so erhält man selbst für $z = 80^\circ$ eine verschwindend kleine Größe*). Somit wird

$$A_1 = \mathfrak{a}''\int_0^1 (u - \tfrac{3}{2}u^2 + 3u\mathfrak{a}\omega)\,d\omega$$

oder, wenn man von den Gleichungen (50) und (68) Gebrauch macht,

(69^a) 37 a $$A_1 = \mathfrak{a}''[(1 + 3\mathfrak{a}\beta_2^{(1)})U_1 - 3U_2]$$

Um allgemein A_n berechnen zu können, ist es nötig, das Produkt

$$(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\left[u - \frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n$$

zu entwickeln. Da vorhin gezeigt wurde, daß für $n = 1$ nur diejenigen Glieder des Produktes beizubehalten sind, deren Ordnung nicht höher als die von u^2 und $u\mathfrak{a}$ ist, so genügt es, für ein beliebiges n nur die Glieder zu berücksichtigen, deren Ordnung diejenige von u^{n+1} und $u^n\mathfrak{a}$ nicht übertrifft. Man erhält dann zunächst

$$\left[u - \frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n = u^n - nu^{n-1}\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2} + \cdots = u^n - \frac{n}{2}(u^{n+1} - 2u^n\mathfrak{a}\omega) + \cdots$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $1 - u + 2\mathfrak{a}\omega$ und vernachlässigt die Glieder, deren Ordnung höher als die von u^{n+1} und $u^n\mathfrak{a}$ ist, so ergibt sich

$$(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\left[u - \frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n = u^n - \frac{n+2}{2}u^{n+1} + (n+2)\mathfrak{a}u^n\omega$$

---

*) *Radau* behält in seinen Formeln das Produkt

$$-\mathfrak{a}''\,\mathrm{tang}^3 z\,(3U_3 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{a}^2)$$

bei, das aber für $z = 80^\circ$ nur $0''.0001$ ausmacht, also zu vernachlässigen ist. Hiermit ist zugleich der Grund angegeben, warum die im folgenden für A_1, bzw. für A_n abgeleiteten Ausdrücke von den *Radau*schen abweichen.

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die unter (48) gegebene Gleichung für A_n und unter Berücksichtigung der Gleichungen (50) und (68) erhält man schließlich

$$(70)\quad A_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\mathfrak{a}^n\left\{[1+(n+2)\mathfrak{a}\beta^{(1)}_{n+1}]U_n - \frac{(n+1)(n+2)}{2}U_{n+1}\right\}$$

Da der Gleichung (64) zufolge $\beta^{(1)}_1 = \frac{1}{2}$ ist, so ist die Gleichung (69) für A_0 schon in (70) einbegriffen, wenn man nur festsetzt, daß für $n = 0$ das Produkt $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\equiv 1$ sein soll, und wenn außerdem $U_0 \equiv 1$ angenommen wird. Setzt man noch

$$(71)\quad A_n 10^{2n+1} = (A_n),$$

so wird die Reihe (49)

$$(72)\quad \Re = (A_0)\frac{\operatorname{tang} z}{10} - (A_1)\left(\frac{\operatorname{tang} z}{10}\right)^3 + (A_2)\left(\frac{\operatorname{tang} z}{10}\right)^5 - \cdots$$

Für

$$\varrho_0' = 1 - \tfrac{1}{8}\tfrac{6}{760}, \qquad t = 0^\circ\ \mathrm{C}$$

ist

$\log(A_0) = 2.778\,880$	$\log(A_4) = 0.887$
» $(A_1) = 1.823\,368$	» $(A_5) = 0.844$
» $(A_2) = 1.32414$	» $(A_6) = 0.886$
» $(A_3) = 1.0355$	

Substituiert man diese Werte in die Reihe (72), so erhält man die für die eben angegebenen Werte von ϱ_0' und t gültige Refraktion in Bogensekunden.

Berücksichtigt man nur das Hauptglied von A_n, so folgt aus den Gleichungen (70), (57) und (63)

$$A_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\mathfrak{a}^n a_0^n$$

Unter Benutzung dieses Näherungswertes erhält man für das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe (72)

$$\frac{(A_{n+1})}{(A_n)}\left(\frac{\operatorname{tang} z}{10}\right)^2 = \frac{A_{n+1}}{A_n}\operatorname{tang}^2 z = (2n+1)a_0\operatorname{tang}^2 z$$

Da nach dem Früheren $\log a = 7.0019$ ist, wenn $t = 0^\circ$, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung für $n = 5$ und $z = 84^\circ$ gleich 1; für $z \gtreqless 84^\circ$ ist also die Reihe (72) nicht mehr brauchbar. Um nicht allzu viele Glieder berücksichtigen zu müssen, benutzt *Radau* die Reihe (72) nur bis zu $z = 80^\circ$.

Die oben mitgeteilten, der Dichtigkeit $\varrho_0' = 1 - \frac{1}{8}\frac{6}{760}$ und der Temperatur 0° C entsprechenden numerischen Werte von $\log U_n$ und $\log(A_n)$ sind mit Vernachlässigung der in der Gleichung (15), nämlich

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}\left(1 + 0.003\,663\,t_0 + 0.0010\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}\right),$$

von $\cos 2\varphi$ und $\mathfrak{p}_0$ abhängigen Glieder berechnet worden. Um den Beitrag zu bestimmen, den diese Glieder zur Refraktion liefern, gehe man von der Gleichung (49)

$$\Re = A_0\operatorname{tang} z - A_1\operatorname{tang}^3 z + \cdots$$

aus, wo nach (69) und (69^a)

$$A_0 = \mathfrak{a}''(1 + \mathfrak{a} - U_1)$$
$$A_1 = \mathfrak{a}''[(1 + 3\mathfrak{a}\beta_2^{(1)})U_1 - 3U_2]$$

ist. Nun folgt aus den Gleichungen (57), (63) und (64)

$$U_1 = a_0(1 + \tfrac{1}{2}k_0)$$

oder, wenn für a_0 und k_0 ihre in (52) gegebenen Werte substituiert werden,

$$U_1 = \frac{l_0}{r_0}(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

Wird hier an Stelle von ε sein Wert (51) eingeführt, so ergibt sich

$$U_1 = \frac{l_0}{r_0} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$$

Zieht man jetzt in dem Ausdrucke für A_1 nur das Hauptglied $\mathfrak{a}''U_1$ in Betracht und setzt wieder $\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$ (S. 204), so erhält man für die Korrektion des ohne Rücksicht auf die von $\cos 2\varphi$ und π_0 abhängigen Glieder berechneten Wertes der Refraktion

$$\Delta\Re = -\mathfrak{a}''\,\frac{7.993}{6366}\left[0.0010\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{B}\right]\operatorname{tang} z \sec^2 z$$

Das von $\cos 2\varphi$ abhängige Glied macht selbst für $\varphi = 0°$ und $z = 80°$ nur 0."01 aus. Das von π_0 abhängige Glied beträgt für $\pi_0 = 10^{\mathrm{mm}}$, $B = 760^{\mathrm{mm}}$, $\alpha'' = 60.''15$, bei

$z = 75°$	$-0.''02$,	$z = 79°$	$-0.''05$
$= 77$	-0.03	$= 80$	-0.07

Bei der Berechnung von U_2, U_3, ..., also auch von A_2, A_3, ... sind die von 2φ und π_0 abhängenden Glieder völlig zu vernachlässigen.

81. Berechnung der Refraktion für verschiedene Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft. Mit Hilfe der im vorigen Artikel gegebenen Formeln würde man für eine Reihe äquidistanter Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft die Refraktion berechnen können; durch Interpolation ergäbe sich dann die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültige Refraktion. Einfacher aber ist es, die betreffenden Formeln nur zur Berechnung der sogenannten mittleren, d. h. der einer fest gewählten Dichtigkeit und Temperatur der Luft entsprechenden Refraktion anzuwenden und durch Differentiation die Korrektionen zu ermitteln, welche an die mittlere Refraktion anzubringen sind, um die dem jeweiligen Luftzustand entsprechende Strahlenbrechung zu erhalten. Die für die Berechnung dieser Korrektionen erforderlichen Formeln sollen jetzt abgeleitet werden.

Den Gleichungen (49), (70) und (67) zufolge hat man, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} : \sin 1''$ ist,

$$\Re = \Sigma(-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z$$
$$= \frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\,\frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''\left[1 - 2\mathfrak{a}'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\right)\right]}\,\Sigma(-1)^n\, 1\cdot 3\cdots(2n-1)\,\cdot$$
$$\cdot\left\{[1 + (n+2)\mathfrak{a}\beta_{n+1}^{(1)}]\,U_n - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,U_{n+1}\right\}\operatorname{tang}^{2n+1} z$$

Hierin ist nach S. 219

$$[1 \cdot 3 \cdots (2n-1)]_{n=0} \equiv 1\,, \qquad U_0 \equiv 1$$

und nach (57) und (63)

$$U_n = a_0^n \left(1 + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{h!} \beta_n^{(h)} k_0^h\right), \qquad n > 0$$

Aus der letzten Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (52) und (51) ergibt sich — wenn wiederum

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}(1 + 0.003\,663\, t_0)$$

gesetzt wird — daß U_n von $\mathfrak{a}$ und t_0 abhängt. Da aber $\mathfrak{a}$ der Gleichung (67) zufolge eine Funktion von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ ist, so kann man auch sagen, daß U_n von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ und t_0 abhängt. Für ein gegebenes z und ein als konstant betrachtetes f ist demnach $\log \frac{\mathfrak{R}}{\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\right)}$ eine Funktion von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ und t_0. Zur Abkürzung soll jetzt

(73) $$\frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \varrho\,, \qquad t_0 = t$$

gesetzt werden; wenn dann der für $\varrho = 1$ und $t = 0^0$ C gültige Wert von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_0$ bezeichnet wird, so gibt der *Taylor*sche Satz

(74) $$\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho} = \log \mathfrak{R}_0 + t\left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} + (\varrho - 1)\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} + \cdots$$

Aus der oben für $\mathfrak{R}$ gegebenen Gleichung folgt nun

(75) $$\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho} = \log\frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''[1 - 2\mathfrak{a}'(1-\varrho)]} + \\ + \log \Sigma(-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\left\{[1 + (n+2)\mathfrak{a}\beta_{n+1}^{(1)}]\, U_n - \right. \\ \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{2} U_{n+1}\right\} \operatorname{tang}^{2n+1} z$$

Um die Differentialquotienten von $\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}$ berechnen zu können, bedarf man zunächst der aus (67) und (73) sich ergebenden Formeln

(76) $$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1} = \mathfrak{a}'(1 - 2\mathfrak{a}')$$

Ferner hat man die aus (51) und (52) unter Berücksichtigung des vorhin angegebenen Wertes von $\frac{l_0}{r_0}$ folgenden Gleichungen zu benutzen:

(77) $$\left(\frac{\partial a_0}{\partial t}\right)_{t=0} = (1-f)\,\frac{7.993}{6366}\, 0.003\,663\,, \qquad \frac{\partial a_0}{\partial \varrho} = 0 \\ \left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)_{\varrho=1,\,t=0} = \frac{\mathfrak{a}'}{1-f}\,\frac{6366}{7.993}\, 0.003\,663\,, \\ \left(\frac{\partial k_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1,\,t=0} = -\frac{\mathfrak{a}'(1-2\mathfrak{a}')}{1-f}\,\frac{6366}{7.993}$$

Da $\frac{\partial a_0}{\partial \varrho} = 0$ ist, und da der oben getroffenen Bestimmung gemäß $U_0 \equiv 1$ sein soll, so wird, wenn man noch festsetzt, daß auch

$$[(h-1)!]_{h=1} \equiv 1$$

sein soll,

$$(78)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial U_n}{\partial t}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= n\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial t}U_n\right]_{\varrho=1,\,t=0} + \left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}k_0^{h-1}\right]_{\varrho=1,\,t=0} \\ \left[\frac{\partial U_n}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial \varrho}\right)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}k_0^{h-1}\right]_{\varrho=1,\,t=0} \end{aligned}$$

$$(78^*)\quad \frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{\partial U_0}{\partial \varrho} = 0$$

Schreibt man nun zur Abkürzung

$$(79)\quad \begin{aligned} &\left\{[1+(n+2)\alpha'\beta_{n+1}^{(1)}]\frac{\partial U_n}{\partial t} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{\partial U_{n+1}}{\partial t}\right\}_{\varrho=1,\,t=0} = K_n \\ &\left\{(n+2)\beta_{n+1}^{(1)}U_n\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} + [1+(n+2)\alpha'\beta_{n+1}^{(1)}]\frac{\partial U_n}{\partial \varrho} - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{\partial U_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{\varrho=1,\,t=0} = L_n\,, \end{aligned}$$

so erhält man, wenn $\mathfrak{M}$ den Modul der *Briggs*schen Logarithmen bedeutet,

$$(80)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \mathfrak{M}\,\frac{\alpha'}{\Re_0\sin 1''}\,\Sigma(-1)^n\,1\cdot 3\cdots(2n-1)K_n\,\mathrm{tang}^{2n+1}z \\ \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\log\frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \mathfrak{M}\left\{-2\alpha' + \frac{\alpha'}{\Re_0\sin 1''}\,\Sigma(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)L_n\,\mathrm{tang}^{2n+1}z\right\}, \end{aligned}$$

wo n der Reihe nach gleich 0, 1, 2, … zu wählen und $1\cdot 3\cdots(2n-1)$ für $n=0$ gleich 1 zu setzen ist. Es werde jetzt wieder $\alpha' = 60''15\sin 1''$ angenommen; gibt man dann den Gleichungen (80) die Form

$$(80^*)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \frac{60''15}{\Re_0}(k^{(0)}\,\mathrm{tang}\,z + k^{(1)}\,\mathrm{tang}^3 z + k^{(2)}\,\mathrm{tang}^5 z + \cdots \\ \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\log\frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= m + \frac{60''15}{\Re_0}(l^{(0)}\,\mathrm{tang}\,z + l^{(1)}\,\mathrm{tang}^3 z + l^{(2)}\,\mathrm{tang}^5 z + \cdots \end{aligned}$$

und drückt m sowie die Koeffizienten k und l in Teilen einer Bogensekunde aus, so wird

	$\log m = 6.40363_n - 10$
$\log k^{(0)} = 4.30046_n - 10$	» $l^{(0)} = 6.27843 - 10$
» $k^{(1)} = 4.29804_n - 10$	» $l^{(1)} = 5.79733 - 10$
» $k^{(2)} = 2.08852 - 10$	» $l^{(2)} = 3.49028_n - 10$
» $k^{(3)} = 9.96762_n - 20$	» $l^{(3)} = 1.2794 - 10$
» $k^{(4)} = 7.93763 - 20$	» $l^{(4)} = 9.1674_n - 20$
» $k^{(5)} = 5.9865_n - 20$	» $l^{(5)} = 7.143 - 20$
» $k^{(6)} = 4.1044 - 20$	» $l^{(6)} = 5.194_n - 20$

Bei den für die astronomischen Beobachtungen in Frage kommenden Werten von ϱ und t stimmen die Werte der Refraktion, welche man mit Hilfe der Formeln (74) und (80*) erhält, auch bei $z = 80^\circ$ mit den direkt berechneten überein; bis zu dieser Zenitdistanz reicht man also mit den ersten Differentialquotienten von $\log \frac{\Re}{\varrho}$ aus.

82. Berechnung einiger bestimmter Integrale. Wie oben erwähnt wurde, wendet *Radau* die in § 80 gegebene Entwicklung des Integrals (47) nur für $z \leqq 80^\circ$ an. Ehe nun die für $z > 80^\circ$ geeignete Reihe abgeleitet wird, soll die Berechnung der dabei auftretenden Funktion

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2}\,dx$$

vorgenommen werden.

a) Wenn $Z = 0$ ist, so wird bekanntlich*)

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{81}$$

b) Wenn Z von 0 verschieden ist, so benutze man die Gleichung

$$\int_Z^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_0^Z e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^Z e^{-x^2}\,dx$$

Wird auf der rechten Seite an Stelle von e^{-x^2} die bekannte Exponentialreihe substituiert und dann integriert, so ergibt sich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \left(Z - \frac{Z^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{Z^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{Z^7}{7} + \cdots\right)\right], \tag{82}$$

wo

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0.886\,226\,925\,45$$

ist. Die Reihe (82) ist aber nur für kleine Werte von Z brauchbar; schon für $Z = 1$ ist noch das von Z^{21} abhängige Glied zu berücksichtigen, wenn man $\log \psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig erhalten will.

Ein zweites Verfahren, $\psi(Z)$ zu berechnen, besteht darin, daß man wie vorhin

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^Z e^{-x^2}\,dx\right)$$

setzt und das Integral $\int_0^Z e^{-x^2}\,dx$ nach *Th. v. Oppolzers* Vorschlag durch mechanische Quadratur bestimmt**).

Die Werte von $\int_0^Z e^{-x^2}\,dx$ sind in der *Oppolzer*schen Tafel X (l. c., S. 587) auf 10 Dezimalen mitgeteilt. Da e^{Z^2} für $Z = 2.5$ gleich 518 ist, so erhält man $\psi(2.5)$ noch auf 7 Dezimalen richtig, wenn $\int_0^{2.5} e^{-x^2}\,dx$ auf 10 Dezimalen strenge berechnet

*) Eine elegante Ableitung dieser Formel gibt *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis, I. Bd., 5. Aufl., p. 459—460.

**) *Th. v. Oppolzer*, Lehrbuch zur Bahnbestimmung, Bd. 2, S. 36 ff.

ist. Ist aber $Z > 2.5$, so nimmt die Anzahl der Dezimalen, auf die $\int_0^Z e^{-x^2}dx$ bekannt sein muß, um $\psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig zu erhalten, schnell zu; so z. B. würde $\psi(3.035)$ [da $e^{(3.035)^2} = 10009$ ist] um eine Einheit der 7. Dezimale unrichtig werden, wenn das Integral $\int_0^{3.035} e^{-x^2}dx$ um eine Einheit der 11. Dezimale fehlerhaft wäre.

Für $Z \geqq 2.5$ empfiehlt es sich, eine von *Schlömilch* herrührende Reihenentwicklung zu benutzen, welche bedeutend schneller konvergiert als die von anderen angewandte halbkonvergente Reihe

$$\psi(Z) = \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{1}{2Z^2} + \frac{1\cdot 3}{(2Z^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2Z^2)^3} + \cdots\right\}$$

Die Ableitung der Reihe soll hier, unter Einführung einiger Vereinfachungen, nach *Schlömilch**) gegeben werden; mit Rücksicht auf die spätere Anwendung ist aber die Entwicklung der Reihe weiter getrieben worden, als es von ihrem Erfinder geschehen ist. *Schlömilch* stützt sich auf eine für positive Werte von x und t gültige Reihenentwicklung von $\frac{1}{x+t}$, welche man in folgender Weise erhält. Wenn man von den identischen Gleichungen

$$\begin{array}{l|l}
\frac{x+t}{x} = 1 + \frac{t}{x} & \text{Faktor: } 1 \\[1ex]
\frac{x+t}{x+1} = 1 + \frac{t-1}{x+1} & \quad\text{"} \quad -\frac{t}{x} \\[1ex]
\frac{x+t}{x+2} = 1 + \frac{t-2}{x+2} & \quad\text{"} \quad \frac{t(t-1)}{x(x+1)} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{x+t}{x+n-1} = 1 + \frac{t-(n-1)}{x+n-1} & \quad\text{"} \quad (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-2])}
\end{array}$$

jede mit dem rechts von ihr stehenden Faktor multipliziert und sodann die Gleichungen addiert, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+t} - (-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\,\frac{1}{x+t} = \\
= \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} - \cdots \\
+ (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-1])}
\end{aligned}$$

Von t soll jetzt vorausgesetzt werden, daß es zwischen zwei ganzen positiven Zahlen $k-1$ und k eingeschlossen sei. Ist $n > k$ und wird zur Abkürzung

$$(t-1)(t-2)\ldots(t-[k-2])(t-[k-1]) = P$$
$$(t-k)(t-[k+1])\ldots(t-[n-2])(t-[n-1]) = Q$$

---

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 4. Jahrgang. S. 390, und *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis, 2. Band: Die Gammafunktionen.

gesetzt, so hat man

$$(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-2])(t-[n-1]) = PQ$$

Da $k-1 < t < k$ sein soll, so sind alle Faktoren von P positiv; ferner erhält man einen zu großen Wert für das Produkt P, wenn in jedem Faktor $t = k$ gesetzt wird. Bedeutet also Δ_1 einen positiven echten Bruch, so ist

$$P = \Delta_1(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1$$

Aus der Gleichung für Q folgt

$$\frac{Q}{(-1)^{n-k}} = (k-t)([k+1]-t)\ldots([n-2]-t)([n-1]-t)$$

Alle Faktoren des auf der rechten Seite stehenden Produktes sind wieder positiv. Da auch $t > 0$ sein soll, so sieht man, daß man für das Produkt einen zu großen Wert erhält, wenn in jedem Faktor $t = 0$ angenommen wird. Somit ergibt sich, wenn mit Δ_2 ein positiver echter Bruch bezeichnet wird,

$$Q = (-1)^{n-k}\Delta_2 k(k+1)\ldots(n-2)(n-1)$$

Demnach erhält man

$$(-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\,\frac{1}{x+t} =$$
$$= (-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2 \frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\,\frac{t}{x(x+t)}$$

Da x und t als positiv vorausgesetzt sind, so ist $\frac{t}{x(x+t)}$ ein positiver echter Bruch. Schreibt man noch zur Abkürzung

$$(-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2 \frac{t}{x(x+t)} = \eta_n ,$$

wo also η_n einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet, so erhält man die gesuchte Reihe für $\frac{1}{x+t}$

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} + \cdots \tag{83}$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-1])} + \eta_n \frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])},$$
$$x > 0,\quad t > 0$$

Um nun die *Schlömilch*sche Reihe für $\psi(Z)$ abzuleiten, setze man in dem Integral

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-\lambda} dv ,$$

wo x und λ positiv sein sollen,

$$v = (1+u)x$$

und betrachte u als neue Variable. Damit wird

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda}e^{-x}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^\lambda} e^{-xu} du \tag{B}$$

Früher war gesetzt worden

$$\int_0^\infty z^{\lambda-1} e^{-z}\, dz = \Gamma(\lambda)$$

Führt man an Stelle von z eine neue Variable t ein, indem man setzt

$$z = (1+u)t,$$

wo $u > 0$ vorausgesetzt wird, so erhält man

$$(1+u)^\lambda \int_0^\infty t^{\lambda-1}\, e^{-(1+u)t}\, dt = \Gamma(\lambda)\,,$$

also

$$\frac{1}{(1+u)^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t}\, dt$$

Somit wird die Gleichung (B)

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v}\, dv = \frac{x^{1-\lambda} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{-xu}\, du \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t}\, dt$$

Hier läßt sich die Reihenfolge der Integrationen umkehren, und es ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-xu}\, du \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t}\, dt = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt \int_0^\infty e^{-(x+t)u}\, du = \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t}\, e^{-t}\, dt$$

Demnach erhält man

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v}\, dv = \frac{x^{1-\lambda} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t}\, e^{-t}\, dt$$

Substituiert man jetzt für $\frac{1}{x+t}$ die in (83) angegebene Reihe und setzt zur Abkürzung

$$(83^a) \qquad \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-1])\, t^{\lambda-1} e^{-t}\, dt = a_m\,,$$

so wird

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda}\, e^{-v}\, dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \Big\{ &\frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+1)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} - \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{x\,(x+1)\ldots(x+n-1)} + \\ &+ \eta_n \frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \Big\}\end{aligned}$$

Aus der Annahme $x > 0$ folgt aber

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} &= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} < \\ &< \frac{1}{1+x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}\end{aligned}$$

Da nun bei unendlich wachsendem n

$$\lim \left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right\} = \infty$$

ist, so hat man

$$\lim \left\{\frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\right\} = 0$$

Folglich ist auch das Produkt aus dem echten Bruche η_n und dem zuletzt angeführten Grenzwert gleich 0. Es wird also

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v}\,dv = \frac{1}{x^\lambda} e^{-x} \left\{1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \right. \tag{84}$$

$$\left. - \frac{a_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots \right\}$$

$$x > 0, \quad \lambda > 0$$

Um die Koeffizienten a_m zu berechnen, kann man sich einer Rekursionsformel bedienen, welche von Dr. *A. Wilkens* gefunden worden ist. Zerlegt man nämlich das Integral (83^a) in zwei Integrale, indem man den Integranden mittels des Faktors $t - (m-1)$ in eine Summe auflöst, und schreibt $a_m^{(\lambda)}$ statt a_m, so folgt

$$a_m^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-2])\, t^{(\lambda+1)-1} e^{-t}\,dt -$$

$$- (m-1)\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-2])\, t^{\lambda-1} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} a_{m-1}^{(\lambda+1)} - (m-1) a_{m-1}^{(\lambda)}$$

Wird jetzt m durch $m+1$ ersetzt und von der Gleichung (60) Gebrauch gemacht, so ergibt sich die *Wilkens*sche Formel

$$a_{m+1}^{(\lambda)} = \lambda a_m^{(\lambda+1)} - m a_m^{(\lambda)} \tag{83^b}$$

Nach (83^a) hat man aber

$$a_1^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda,$$

somit

$$a_1^{(\lambda+1)} = \lambda + 1$$

Da also $a_1^{(\lambda)}$ und $a_1^{(\lambda+1)}$ bekannt sind, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung (83^b) zunächst $a_2^{(\lambda)}$ bestimmen, sodann $a_3^{(\lambda)}$, usw. Die sich auf diese Weise ergebenden Werte von $a_m^{(\lambda)}$ oder, wie jetzt wieder gesetzt werden soll, von a_m sind:

$a_1 = \lambda$

$a_2 = \lambda^2$

$a_3 = \lambda^3 + \lambda$

$a_4 = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda$

$a_5 = \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda$

$a_6 = \lambda^6 + 20\lambda^4 - 15\lambda^3 + 58\lambda^2 - 26\lambda$

$a_7 = \lambda^7 + 35\lambda^5 - 35\lambda^4 + 238\lambda^3 - 217\lambda^2 + 194\lambda$

$a_8 = \lambda^8 + 56\lambda^6 - 70\lambda^5 + 728\lambda^4 - 1008\lambda^3 + 2035\lambda^2 - 1142\lambda$

$a_9 = \lambda^9 + 84\lambda^7 - 126\lambda^6 + 1848\lambda^5 - 3444\lambda^4 + 11611\lambda^3 - 13470\lambda^2 + 9736\lambda$

$a_{10} = \lambda^{10} + 120\lambda^8 - 210\lambda^7 + 4116\lambda^6 - 9660\lambda^5 + 47815\lambda^4 - 85410\lambda^3 +$
$+ 134164\lambda^2 - 81384\lambda$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ wird die Reihe (84)

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{v}}\, e^{-v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\left\{1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} + \cdots\right\}$$

oder, wenn x^2 für x und darauf $v = t^2$ gesetzt wird,

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2x}\, e^{-x^2}\left\{1 - \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{(x^2+1)(x^2+2)} - \cdots\right\}$$

Wählt man Z als untere Grenze des Integrals und ersetzt unter dem Integralzeichen den Buchstaben t durch x, so erhält man schließlich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{a_1}{Z^2+1} + \frac{a_2}{(Z^2+1)(Z^2+2)} - \cdots\right\} \tag{85}$$

Hierin ist

$a_1 = +\ 0.5$	$a_8 = -\ 144.05859$
$a_2 = +\ 0.25$	$a_9 = +\ 2793.0645$
$a_3 = +\ 0.625$	$a_{10} = -\ 15077.546$
$a_4 = +\ 0.5625$	$a_{11} = +\ 204110.94$
$a_5 = +\ 4.03125$	$a_{12} = -\ 1807850.9$
$a_6 = +\ 0.890625$	$a_{13} = +\ 24035187.7$
$a_7 = +\ 71.4140625$	

Für $Z = 2.5$ macht das von a_{12} abhängige Glied in $\psi(Z)$ nur 3 Einheiten und das von a_{13} abhängige Glied nur 2 Einheiten der 8. Dezimale aus. — Es sei zum Schlusse noch erwähnt, daß *Radau* im 18. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte eine Tafel veröffentlicht hat, aus der man für die zwischen -0.120 und $+1.010$ liegenden Werte von Z, sowie für die zwischen 0.000 und 1.000 liegenden Werte des $\log Z$ den $\log \psi(Z)$ auf 7 Dezimalen entnehmen kann.

Mit Hilfe der Funktion $\psi(Z)$ läßt sich das im folgenden vorkommende Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}}{\sqrt{Z^2+x}}\, dx$$

leicht berechnen. Setzt man, wenn $m = 0$ ist,

$$Z^2 + x = \frac{1}{n}\, t^2,$$

wo t eine neue, an die Stelle von x tretende Variable bedeuten soll, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx}\, dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \frac{2}{\sqrt{n}}\, e^{nZ^2}\int_{Z\sqrt{n}}^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{n}}\, \psi(Z\sqrt{n}) \tag{86}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\psi_n = \sqrt{n}\, \psi(Z\sqrt{n}) \tag{87}$$

gesetzt wird,

$$n\int_0^\infty \frac{e^{-nx}\, dx}{\sqrt{Z^2+x}} = 2\,\psi_n \tag{88}$$

Damit ist der Fall $m = 0$ erledigt.

Ist m von Null verschieden, so berücksichtige man, daß durch Differentiation erhalten wird

$$(89)\qquad d\{\sqrt{Z^2+x}\,x^{m-1}e^{-nx}\} = \frac{e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}}\{\tfrac{1}{2}x^{m-1} + [(m-1)x^{m-2} - nx^{m-1}](Z^2+x)\}$$

Wird hierin $m = 1$ gesetzt und dann integriert, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (88)

$$(90)\qquad n\int_0^\infty \frac{xe^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}} = Z + \left(\frac{1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}} = Z + \left(\frac{1}{n} - 2Z^2\right)\psi_n$$

Es werde jetzt auf der rechten Seite der Gleichung (89) die Multiplikation ausgeführt und darauf die Gleichung integriert; man erhält dann

$$(91)\qquad n\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \left(\frac{2m-1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}} + \\ + (m-1)Z^2\int_0^\infty \frac{x^{m-2}e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}}$$

Den Gleichungen (88) und (90) zufolge ist der Wert des auf der linken Seite der Gleichung (91) stehenden Integrals für $m = 0$ und $m = 1$ bekannt; mit Hilfe von (91) läßt er sich also auch für $m = 2$ und weiterhin für $m = 3, 4, \ldots$ bestimmen. Für $m = 2$ hat man

$$(91^*)\qquad n\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-nx}\,dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \frac{3}{2n}Z - Z^3 + \left(\frac{3}{2n^2} - \frac{2}{n}Z^2 + 2Z^4\right)\psi_n$$

83. Refraktion für $z > 80°$. Nachdem die im vorigen Artikel behandelten Integrale als bekannt vorauszusetzen sind, soll jetzt die für $z > 80°$ gültige Entwicklung des Integrals (47)

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\,d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2}}$$

vorgenommen werden. Mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der numerischen Rechnung empfiehlt sich dabei der folgende Weg. Man hat zunächst

$$(92)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{1 - u + 2\mathfrak{a}\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\,d\omega + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{(\operatorname{cotg}^2 z + 2u)^{\frac{3}{2}}}\,d\omega + \cdots$$

Um das erste auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Integral

$$(93)\qquad (\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{1 - u + 2\mathfrak{a}\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\,d\omega$$

zu berechnen, erinnere man sich des Satzes: Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ stetig sind, und $\psi(x)$ außerdem positiv bleibt, so ist, wenn ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$(94)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi[a + \vartheta(b-a)]\int_a^b \psi(x)\,dx$$

Für $\psi(x) = 1$ folgt hieraus

$$\varphi[a + \vartheta(b-a)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{95}$$

In dem Integral (93), worin nach (53) u von ω abhängt, werde nun $1 - u + 2\mathfrak{a}\omega$ mit $\varphi(\omega)$ und die positive Quadratwurzel aus $\operatorname{cotg}^2 z + 2u$ mit $\psi(\omega)$ identifiziert. Die Gleichungen (94) und (95) lehren dann, daß man einen Näherungswert $\mathfrak{R}_0$ des Integrals (93) erhält, wenn man setzt

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{a}''\left[\int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\,d\omega\right]\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}$$

oder, unter Anwendung der durch die erste der Gleichungen (48) eingeführten Bezeichnung,

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}, \tag{96}$$

wo der Wert von A_0 durch die Gleichung (69) bestimmt erscheint. Es läßt sich jetzt zeigen, daß die im folgenden zur Berechnung des Integrals (96) angewandte Methode auch auf die in der Gleichung (92) vorkommenden Integrale anwendbar ist, und ferner, daß der für irgend eine Zenitdistanz aus (96) folgende Wert von $\mathfrak{R}_0$ sich nur wenig von dem mittels der Gleichung (92) berechneten $\mathfrak{R}$ unterscheidet. Nun ist die Berechnung von $\mathfrak{R}$ weit mühevoller als diejenige von $\mathfrak{R}_0$. Wenn es sich also um die Konstruktion einer Tafel handelt, so wird man die Refraktion zunächst mit Hilfe der sehr bequemen Formeln, zu denen die Entwicklung des Integrals (96) führt, etwa von Minute zu Minute der Zenitdistanz berechnen; nachdem dies geschehen ist, benutzt man die in passender Weise entwickelte Formel (92), um die strengen Werte der Refraktion von Grad zu Grad zu ermitteln, und bildet dann die Differenzen $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$. Aus letzteren findet man durch eine leichte Interpolation die für die einzelnen Minuten jedes Grades gültigen Differenzen $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$, welche also nur zu den nach der Gleichung (96) berechneten Werten $\mathfrak{R}_0$ zu addieren sind, um die strengen Werte der Refraktion zu erhalten.

Die zunächst zu lösende Aufgabe bildet nach dem Vorstehenden die Berechnung des Integrals (96). Wird in (96) an Stelle der Variablen ω die durch die Gleichung (54) definierte Variable x eingeführt, so erhält man

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}, \tag{97}$$

wobei nach der Gleichung (55) in Verbindung mit (52)

$$\frac{r_0}{l_0}\,u = (1-f)\,x + (2f - \varepsilon)(1 - e^{-x})$$

ist. Die letzte Gleichung läßt sich in der Form

$$\frac{r_0}{l_0}\,u = [1 - f + \lambda(2f-\varepsilon)]\,x - (2f-\varepsilon)(\lambda x - 1 + e^{-x})$$

schreiben, wobei λ eine zunächst unbestimmt gelassene Zahl bedeuten soll. Wird hierauf

$$
\begin{aligned}
&\frac{r_0}{l_0}\,\frac{1}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = 2\gamma^2 \\
(98)\qquad &\frac{2f-\varepsilon}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = k \\
&k(\lambda x - 1 + e^{-x}) = \varphi(x)
\end{aligned}
$$

gesetzt, so lautet die Gleichung

$$2u\gamma^2 = x - \varphi(x) \tag{99}$$

Somit hat man

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\gamma\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{\gamma^2 \operatorname{cotg}^2 z + x - \varphi(x)}}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$A_0\gamma = C, \qquad \gamma \operatorname{cotg} z = Z \tag{100}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}} \tag{101}$$

Es werde jetzt mittels der Gleichung

$$x - \varphi(x) = w \tag{102}$$

an Stelle von x eine neue Variable w eingeführt. Der Nenner des Bruches unter dem vorigen Integral wird dann sofort zu einer Funktion von w, anders aber verhält es sich mit dem Zähler; um auch diesen als Funktion von w darstellen zu können, erinnere man sich des Satzes von *Lagrange**): Wenn zwischen zwei Variablen x und w eine Gleichung von der Form (102) besteht und mit $F(x)$ eine Funktion von x bezeichnet wird, so ist

$$F(x) = F(w) + \varphi(w)\frac{dF(w)}{dw} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d}{dw}\left\{[\varphi(w)]^2\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$\frac{dF(x)}{dw} = \frac{dF(w)}{dw} + \frac{d}{dw}\left\{\varphi(w)\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dw^2}\left\{[\varphi(w)]^2\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \cdots,$$

also, wenn $F(x) = e^{-x}$ gesetzt wird,

$$\frac{de^{-x}}{dw} = -\frac{e^{-x}dx}{dw} = -e^{-w} - \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} - \cdots \tag{103}$$

Aus der durch die Gleichung (102) gegebenen Definition von w in Verbindung mit der letzten der Gleichungen (98) folgt

$$w = x - \varphi(x) = x - k(\lambda x - 1 + e^{-x})$$

---

*) *Duhamel*, Cours de Mécanique, t. II, chap. 13.

Somit ist für $x = 0$ auch $w = 0$ und für $x = \infty$ auch $w = \infty$. Substituiert man also die in (103) gegebene Reihe für $e^{-x}dx$ in (101), so wird

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{Z^2+w}}\left[e^{-w} + \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} + \cdots\right]$$

oder, wenn die unter dem Integralzeichen angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden, und darauf der Buchstabe w durch x ersetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+x}}\{1 + k(1+\lambda - \lambda x - 2e^{-x}) + k^2[\tfrac{1}{2} + 2\lambda + \lambda^2 - (1+2\lambda)\lambda x + \\ + \tfrac{1}{2}\lambda^2 x^2 - 4(1+\lambda)e^{-x} + 4\lambda x e^{-x} + \tfrac{9}{2}e^{-2x}] + \cdots\}$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (88), (90) und (91*) erhält man hieraus, wenn noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L_0 &= 2\psi_1 \\ (104)\qquad L_1 &= (2+\lambda)\psi_1 - 2\psi_2 - \lambda Z(1 - 2Z\psi_1) \\ L_2 &= (1 + 3\lambda + \tfrac{3}{4}\lambda^2)\psi_1 - (4+3\lambda)\psi_2 + 3\psi_3 + \lambda Z(1 + 2Z\psi_1 - 4Z\psi_2) - \\ &\quad - \lambda^2 Z[\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}Z^2 - (3Z + Z^3)\psi_1] \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(105)\qquad \mathfrak{R}_0 = C(L_0 + kL_1 + k^2L_2 + \cdots)$$

Wählt man für die bisher unbestimmt gelassene Zahl λ den Wert $\frac{1}{2}$, so ergeben die zwei ersten der Gleichungen (98)

$$(106)\qquad k = \frac{4f - 2\varepsilon}{2-\varepsilon}, \qquad \gamma^2 = \frac{r_0}{l_0}\,\frac{1}{2-\varepsilon}$$

γ wird also unabhängig von f, und, wie die Gleichungen (100) lehren, hängen darum auch C und Z nicht von f ab; dieser Umstand ist von Wichtigkeit, wenn man die Refraktion unter verschiedenen Annahmen für f berechnen will, wie es von *Radau* geschehen ist.

Im vorigen sind alle zur Bestimmung von $\mathfrak{R}_0$ nötigen Formeln abgeleitet worden, es soll jetzt nur noch der bei der numerischen Rechnung zu befolgende Gang angegeben werden. Mit Hilfe der nach § 80 bekannten Werte von $\frac{r_0}{l_0}$ und ε berechne man die durch die Gleichungen (106) definierten Größen k und γ, wobei wieder $f = 0.2$ angenommen werden möge; ferner führt die Gleichung (69) in Verbindung mit dem in § 80 bestimmten U_1 zur Kenntnis von A_0. Nachdem γ und A_0 gefunden sind, erhält man mittels der ersten der Gleichungen (100) den Koeffizienten C und mittels der zweiten der Gleichungen (100) das einer gegebenen Zenitdistanz entsprechende Z. Mit den Argumenten Z, $Z\sqrt{2}$, $Z\sqrt{3}$ geht man in die im § 82 erwähnte Tafel für $\psi(Z)$ ein und berechnet darauf nach (87)

$$\psi_1 = \psi(Z), \qquad \psi_2 = \sqrt{2}\,\psi(Z\sqrt{2}), \qquad \psi_3 = \sqrt{3}\,\psi(Z\sqrt{3})$$

Wird jetzt auch in den Gleichungen (104) $\lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt, so lassen sich L_0, L_1, L_2, ... ohne Mühe bestimmen und die Substitution dieser Werte sowie derjenigen von C und k in die Gleichung (105) ergibt schließlich den Wert von $\mathfrak{R}_0$.

Es wurde bereits oben bemerkt, daß das erste Glied der Reihe (92) kaum von $\Re_0$ verschieden ist; das zweite und die folgenden Glieder der Reihe (92) sind aber stets außerordentlich klein. Mit Rücksicht hierauf soll die strenge Berechnung des Ausdrucks (92) von $\Re$ unterbleiben; in welcher Weise sich dieselbe ausführen läßt, habe ich in meiner Arbeit über die *Radau*sche Theorie der Refraktion gezeigt (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Band 115, Abt. II, a). Dagegen sollen noch die Differenzen $\Re - \Re_0$ zwischen den aus (92) folgenden strengen Werten und den aus (96) folgenden genäherten Werten der Refraktion mitgeteilt werden, welche *Radau* unter Zugrundelegung der *Bessel*schen Refraktionskonstante und unter der Annahme $\varrho = 1$, $t = 0^\circ$ C, $f = 0.2$ gefunden hat; dieselben sind für

z	$\Re - \Re_0$	z	$\Re - \Re_0$	z	$\Re - \Re_0$
80°	$+0''.02$	84°	$+0''.07$	$88^\circ.0$	$+0''.36$
81	$+0.03$	85	$+0.10$	89.0	$+0.63$
82	$+0.04$	86	$+0.14$	89.5	$+0.85$
83	$+0.05$	87	$+0.21$	90.0	$+1.14$

Gegenüber der Unsicherheit der Beobachtungen und noch mehr mit Rücksicht darauf, daß die für so große Zenitdistanzen berechnete Refraktion infolge der Abweichung des wirklichen Zustandes der Atmosphäre von dem in der Theorie vorausgesetzten ganz erheblich falsch sein kann, können die obigen Differenzen $\Re - \Re_0$ unbedenklich vernachlässigt werden.

84. Darstellung der Refraktion als Funktion der wahren Zenitdistanz. Der Ausdruck für die Refraktion läßt sich in die Form bringen

$$\Re = \alpha \operatorname{tang} z,$$

wo z die scheinbare Zenitdistanz und α einen von z abhängigen Koeffizienten bedeutet. Vergleicht man nämlich den hier für $\Re$ gegebenen Ausdruck mit der in § 80, unter der Annahme $z \leqq 80^\circ$, gefundenen Reihe (72), so folgt, daß für $z \leqq 80^\circ$

$$\alpha = \frac{(A_0)}{10} - \frac{(A_1)}{10}\left(\frac{\operatorname{tang} z}{10}\right)^2 + \cdots$$

ist. Wollte man die für größere Zenitdistanzen anzuwendenden Werte von α erhalten, so hätte man zunächst nach den in § 83 gegebenen Formeln $\Re$ zu berechnen und dann die Gleichung

$$\alpha = \frac{\Re}{\operatorname{tang} z}$$

zu benutzen.

In manchen Fällen ist es nun wünschenswert,

$$\Re = \alpha' \operatorname{tang} \zeta$$

setzen zu können, wo ζ die wahre Zenitdistanz bedeutet. Die praktische Anwendung dieser Formel erfordert eine Tafel, aus der man für jeden Wert von ζ den einer gegebenen Dichtigkeit und Temperatur der Luft entsprechenden $\log \alpha'$ entnehmen kann. In welcher Weise sich eine solche Tafel konstruieren läßt, wenn die Refraktion als Funktion der scheinbaren Zenitdistanz bekannt ist, soll an einem Beispiel gezeigt werden: Für $z = 74^\circ$ findet man, wenn die Temperatur $+30^\circ$ C beträgt, und der durch die Gleichungen (73), (41[b]) und (41[a]) definierte $\log\varrho = 9.920\,000$ ist, $\Re = 171''.732$. Da also der scheinbaren Zenitdistanz $z = 74^\circ$ der Wert $\zeta = 74^\circ 2' 51''.732$ entspricht, so ergibt sich das diesem ζ zugehörige α' aus der Gleichung

$$\alpha' \operatorname{tang} 74^\circ 2' 51''.73 = 171''.732$$

und zwar wird $\log\alpha' = 1.690\,981$. Berechnet man $\log\alpha'$ auch noch für die Werte von ζ, welche den scheinbaren Zenitdistanzen $z = 73^\circ 30'$, $74^\circ 30'$ und $75^\circ 0'$ (für $t = +30^\circ$ C und $\log\varrho = 9.920\,000$) entsprechen, so erhält man:

ζ	$\log\alpha'$	I. Diff.	II. Diff.
$73^\circ 32' 46''$	1.691 455		
		— 474	
74 2 52	1.690 981		— 45
		— 519	
74 32 57	1.690 462		— 50
		— 569	
75 3 3	1.689 893		

Um mit Hilfe dieser Tabelle den zu $\zeta = 74^\circ 0'$ gehörigen $\log\alpha'$ zu finden, benutze man die in § 2 angegebene Interpolationsformel (20)

$$f(a+n) = f(a+1) - \nu\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{\nu-1}{2} f''(a+1)\right]$$

Versteht man hier unter $f(a+n)$ den gesuchten Logarithmus, also unter $f(a)$ den zu $\zeta = 73^\circ 32' 46''$ gehörigen und unter $f(a+1)$ den zu $\zeta = 74^\circ 2' 52''$ gehörigen $\log\alpha'$, so wird mit Rücksicht darauf, daß das Intervall zwischen zwei in der Tabelle aufeinander folgenden Werten von ζ in runder Zahl $30' 6''$ oder $1806''$ beträgt,

$$n = \frac{74^\circ 0' 0'' - 73^\circ 32' 46''}{1806''} = 0.905, \qquad \nu = 1 - n = 0.095, \qquad \frac{\nu - 1}{2} = -0.45$$

Unter Benutzung der in der Tabelle gegebenen Werte

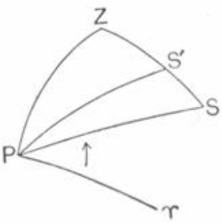
$$f(a+1) = 1.690\,981, \qquad f'(a+\tfrac{1}{2}) = -0.000\,474,$$
$$f''(a+1) = -0.000\,045$$

erhält man somit den der wahren Zenitdistanz $\zeta = 74^\circ 0'$ (für $t = +30^\circ$ C und $\log\varrho = 9.920\,000$) entsprechenden Wert $\log\alpha' = 1.691\,028$.

In der eben erläuterten Weise kann man für jeden vollen Grad der wahren Zenitdistanz den zugehörigen $\log\alpha'$ berechnen. Führt man diese Rechnung für eine Reihe äquidistanter Werte von t und $\log\varrho$ aus, so lassen sich durch Interpolation die für beliebige Werte von ζ, t und $\log\varrho$ gültigen Werte von $\log\alpha'$ finden.

85. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. In Fig. 3 sei P der Pol des Äquators, Z das Zenit eines Beobachtungsortes, ♈ das Frühlingsäquinox, S der wahre und S' der scheinbare Ort eines Sterns. Bezeichnet man mit A, D die wahre Rektaszension und Deklination, und mit A', D' die scheinbare Rektaszension und Deklination des Sterns, so ist $SPS' = A' - A$, $PS = 90^\circ - D$, $PS' = 90^\circ - D'$. Ferner hat man dem vorigen Paragraphen zufolge $SS' = \alpha' \operatorname{tang} \zeta$, wo ζ die wahre Zenitdistanz des Sterns bedeutet. Wird jetzt der parallaktische Winkel $ZSP = q$ gesetzt, so folgt aus dem Dreieck PSS'

Fig. 3.



(107)
$$\begin{aligned}(A' - A) \cos D' &= \alpha' \operatorname{tang} \zeta \sin q \\ D' - D &= \alpha' \operatorname{tang} \zeta \cos q\end{aligned}$$

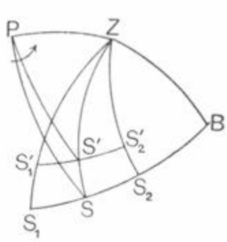
Zur Berechnung von ζ und q dienen die in § 17 abgeleiteten Formeln (7) und (9):

$$\operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \varphi \cos(\vartheta - A), \qquad \operatorname{cotg} n = \sin N \operatorname{tang}(\vartheta - A)$$
$$\operatorname{tang} \zeta \sin q = \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + D)}$$
$$\operatorname{tang} \zeta \cos q = \operatorname{cotg}(N + D)$$

Hier bedeutet ϑ die Sternzeit der Beobachtung und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes. Bei nördlichen Breiten liegt N entweder im ersten oder im vierten Quadranten; der erste Fall tritt ein, wenn $\vartheta - A$ zwischen 0^h und 6^h, bzw. zwischen 18^h und 24^h liegt. Bei südlichen Breiten liegt N entweder im zweiten oder im dritten Quadranten, und zwar im zweiten, wenn $\vartheta - A$ zwischen 0^h und 6^h, bzw. zwischen 18^h und 24^h fällt.

86. Einfluß der Refraktion auf den Positionswinkel und die Distanz. Man bezeichne mit Z (Fig. 4) das Zenit, mit S_1 und S_2 die wahren und mit S_1' und S_2' die scheinbaren Örter zweier Sterne. Mit Rücksicht auf die größten direkt meßbaren Distanzen soll der Abstand der beiden Sterne kleiner als 2° vorausgesetzt werden; ferner nehme man an, daß die Zenitdistanzen ZS_1' und ZS_2' höchstens gleich 75° sind. Letztere Einschränkung darf man machen, weil man, wenn es sich um genaue Messungen handelt, nie in größeren Zenitdistanzen beobachten wird. Setzt man die Azimutdifferenz von S_1 und S_2 oder den Winkel $S_1 Z S_2 = A$, ferner $ZS_1 = \zeta_1$, $ZS_2 = \zeta_2$, $S_1 S_2 = \varDelta$, $ZS_1 S_2 = \lambda_1$, $ZS_2 S_1 = 180^\circ - \lambda_2$, so erhält man durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck $ZS_1 S_2$

Fig. 4.



(108)
$$\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2}\varDelta \sin \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \\ \sin \tfrac{1}{2}\varDelta \cos \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)\end{aligned}$$

In derselben Weise erhält man aus dem Dreieck $ZS_1'S_2'$, wenn $ZS_1' = z_1$, $ZS_2' = z_2$, $S_1'S_2' = \varDelta'$, $ZS_1'S_2' = l_1$, $ZS_2'S_1' = 180^\circ - l_2$ gesetzt wird,

(109)
$$\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2}\varDelta' \sin \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) &= \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \\ \sin \tfrac{1}{2}\varDelta' \cos \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) &= \cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

Es werde jetzt der Bogen $S_1 S_1'$ mit r_1 und der Bogen $S_2 S_2'$ mit r_2 bezeichnet, es ist dann $z_1 = \zeta_1 - r_1$, $z_2 = \zeta_2 - r_2$. Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (109), dividiert sodann die erste der Gleichungen (108) durch die erste der Gleichungen (109), ferner die zweite der Gleichungen (108) durch die zweite der Gleichungen (109) und setzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda, \qquad \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) = l,$$
$$\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) = \zeta, \qquad \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = r,$$

so ergibt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta \sin\lambda = \sin\tfrac{1}{2}\varDelta' \sin l \,\frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta \cos\lambda = \sin\tfrac{1}{2}\varDelta' \cos l \,\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)}{\sin\frac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}$$

Hieraus folgt

$$\text{(110)} \qquad \operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang} l \,\frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)} \,\frac{\sin\frac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}{\sin\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)}$$

In Anbetracht dessen, daß r für $\zeta \leqq 75^\circ$ ein kleiner Winkel ist, kann man

$$\sin(\zeta - r) = \sin\zeta - r \sin 1'' \cos\zeta$$

setzen. Berücksichtigt man also noch, daß r sich nur äußerst wenig von der für die Zenitdistanz ζ gültigen Refraktion unterscheidet und demgemäß $r = \alpha' \operatorname{tang}\zeta$ angenommen werden kann, so wird

$$\text{(111)} \qquad \frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)} = \frac{1}{1 - \alpha' \sin 1''}$$

Ferner ist sehr nahe

$$\text{(112)} \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}{\sin\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)} = 1 - \frac{r_1 - r_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

Wenn nun $\frac{dr}{d\zeta}$ den für $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$ gültigen Differentialquotienten der Refraktion bedeutet, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$r_1 - r_2 = \frac{dr}{d\zeta}(\zeta_1 - \zeta_2)$$

oder mit Rücksicht darauf, daß der im folgenden angegebene Wert von $\frac{dr}{d\zeta}$ in Bogensekunden ausgedrückt ist,

$$\text{(113)} \qquad \frac{r_1 - r_2}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{dr}{d\zeta} \sin 1''$$

Unter Benutzung von (111), (112) und (113) erhält man aus (110)

$$\operatorname{tang} l = \frac{1 - \alpha' \sin 1''}{1 - \frac{dr}{d\zeta} \sin 1''} \operatorname{tang}\lambda$$

Hieraus folgt nach einer bekannten Reihenentwicklung [§ 1, (17) und (18)]

$$l = \lambda + \frac{\frac{dr}{d\zeta} - \alpha'}{2 - \left(\alpha' + \frac{dr}{d\zeta}\right)\sin 1''} \sin 2\lambda + \cdots,$$

wo das zweite Glied auf der rechten Seite bereits durch $\sin 1''$ dividiert ist und demnach in Bogensekunden ausgedrückt erscheint. Nun erhält man durch Differentiation der Gleichung $r = \alpha' \operatorname{tang} \zeta$

$$\frac{dr}{d\zeta} = \alpha' \sec^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta = \alpha' + \alpha' \operatorname{tang}^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta$$

Unter Vernachlässigung sehr kleiner Glieder wird demnach

$$\frac{\frac{dr}{d\zeta} - \alpha'}{2 - \left(\alpha' + \frac{dr}{d\zeta}\right)\sin 1''} = \tfrac{1}{2}\left(\alpha' \operatorname{tang}^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta\right)$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die für l erhaltene Reihe, so ergibt sich

(114) $$\lambda - l = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin 2\lambda$$

In Fig. 4 seien nun S und S' die Mittelpunkte der Bögen S_1S_2, bzw. $S_1'S_2'$, P sei der Pol des Äquators, und der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Rektaszensionen gezählt werden; es ist dann PSS_2 der wahre und $PS'S_2'$ der scheinbare Positionswinkel des Sterns S_2, bezogen auf den Mittelpunkt des die Sterne S_1 und S_2 verbindenden Bogens. Setzt man $PSS_2 = p$, $PS'S_2' = p'$, ferner $PSZ = q$, $PS'Z = q'$, so wird, da ZSS_2 sehr nahe gleich λ und $ZS'S_2'$ sehr nahe gleich l ist,

(115) $$p = \lambda + q, \qquad p' = l + q',$$

also

(116) $$p - p' = \lambda - l - (q' - q)$$

Aus dem Dreieck $PS'S$ folgt aber, wenn $PS = 90^\circ - \delta$, $PS' = 90^\circ - \delta'$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $SS' = r$ angenommen werden kann,

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = \frac{\sin\frac{1}{2}(q' + q)}{\sin\frac{1}{2}(q' - q)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r$$

oder hinreichend genau

$$q' - q = r \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Setzt man hier wieder $r = \alpha' \operatorname{tang}\zeta$, so erhält man

(117) $$q' - q = \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Werden jetzt die in (114) und (117) gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (116) eingeführt, und wird dabei in (114) für $\sin 2\lambda$ der aus der ersten der Gleichungen (115) folgende Wert $\sin 2(p - q)$ substituiert, so ergibt sich

(118) $$p - p' = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin 2(p - q) - \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung läßt sich der wahre Positionswinkel berechnen, wenn p' durch Beobachtung bekannt ist. Vielfach ist aber der beobachtete Positionswinkel verschieden von dem hier mit p' bezeichneten Winkel. Um dies deutlich zu machen, soll kurz angegeben werden, in welcher Weise die Beobachtung eines Positionswinkels ausgeführt zu werden pflegt, wenn man ein sog. Positionsmikrometer benutzt. Die Einrichtung eines solchen Mikrometers ist die folgende. In der Brennebene des Fernrohrobjektivs sind zwei zueinander senkrechte Fäden ausgespannt, deren Kreuzungspunkt auf der optischen Achse des Fernrohrs liegt. Der Rahmen, an dem die Fäden befestigt sind, ist um die optische Achse des Fernrohrs drehbar. Zur Messung der Drehung dient ein zur Fadenebene paralleler, in Grade und Minuten eingeteilter Kreis, dessen Mittelpunkt ebenfalls auf der optischen Achse liegt; diesen Kreis bezeichnet man als Positionskreis. Um mit Hilfe eines solchen Mikrometers den Positionswinkel des in Fig. 4 mit S_2' bezeichneten scheinbaren Sternortes in bezug auf den Mittelpunkt S' des die scheinbaren Sternörter S_1' und S_2' verbindenden Bogens zu messen, stellt man den Kreuzungspunkt der Fäden auf S' ein und dreht dann den die Fäden enthaltenden Rahmen, bis daß einer der Fäden (der kurz der Faden F genannt werden möge) der Verbindungslinie $S_1'S_2'$ parallel ist; die dieser Lage entsprechende Ablesung des Positionskreises sei w'. Ist w' gefunden, so bringt man den Faden F in eine solche Lage, daß er der Richtung der täglichen Bewegung parallel ist. Falls die beiden Sterne dem Äquator benachbart sind, geschieht dies dadurch, daß man den Fädenrahmen so lange dreht, bis daß beispielsweise der Stern S_1, wenn man ihn bei seinem Eintritt in das Gesichtsfeld auf den Faden F eingestellt hat, mit diesem während des ganzen Durchgangs in Koinzidenz bleibt. Sind die Sterne weit vom Äquator entfernt und sind demnach die von ihnen beschriebenen Bahnen gekrümmt, so bestimmt man die Richtung der täglichen Bewegung in der Art, daß man den die Fäden enthaltenden Rahmen so lange dreht, bis daß z. B. der Stern S_1 in gleichen Abständen von dem der Voraussetzung nach durch die optische Achse des Fernrohrs gehenden zweiten Faden den Faden F passiert. Die Ablesung des Positionskreises, welche man erhält, wenn der Faden F der Richtung der täglichen Bewegung parallel ist, möge mit w_0' bezeichnet werden. Wäre nun keine Refraktion vorhanden, so würde die von einem Stern beschriebene Bahn parallel zum Himmelsäquator sein; in diesem Falle und unter der Voraussetzung, daß die Ablesung des Positionskreises in demselben Sinne wächst wie der Positionswinkel, wäre $w_0' - 90^\circ$ die Ablesung, welche man erhielte, wenn der Faden F zum Pol hin gerichtet ist. Somit würde dann $w' - (w_0' - 90^\circ)$ gleich dem oben mit p' bezeichneten Winkel $PS'S_2'$ in Fig. 4 sein. Infolge der Refraktion ist aber die Bahn, welche ein Stern bei seinem Durchgang durch das Gesichtsfeld beschreibt, gegen den wahren Parallelkreis geneigt; somit fällt auch der Faden F in seiner der Ablesung $w_0' - 90^\circ$ entsprechenden Lage nicht mit dem wahren Deklinationskreise PS' des Punktes S' (Fig. 4), sondern, wie man sich ausdrücken kann, mit dem scheinbaren Deklinationskreise von S' zusammen. Um nun mit Hilfe des von dem scheinbaren Deklinationskreise an gezählten Positionswinkels $w' - (w_0' - 90^\circ) = p_1'$ den wahren Positionswinkel ableiten zu können, berücksichtige man zunächst, daß, wenn w_0 die der Angabe w_0' des Positionskreises entsprechende, wegen Refraktion korrigierte Ablesung bedeutet, der Wert von $w_0 - w'_0$ erhalten wird, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (118) den zu $p' = 90^\circ$ gehörigen Wert von p substituiert; statt dessen kann man aber auch einfach $p = 90^\circ$ setzen. Damit ergibt sich

$$(118^a)\quad w_0 - w'_0 = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta\,\sin 2q - \alpha'\operatorname{tang}\zeta\,\sin q\,\operatorname{tang}\delta$$

Der Bedeutung von p' gemäß ist nun $p' = w' - (w_0 - 90^\circ)$; hieraus, in Verbindung mit der obigen Definitionsgleichung $p'_1 = w' - (w'_0 - 90^\circ)$, folgt $p'_1 = p' + (w_0 - w'_0)$ und demnach

$$p - p'_1 = p - p' - (w_0 - w'_0),$$

wo unter p wieder der wahre Positionswinkel verstanden werden soll. Substituiert man in die letzte Gleichung die in (118) und (118^a) gefundenen Ausdrücke, so erhält man die gesuchte Beziehung

$$(119)\qquad p - p'_1 = -\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta\,\sin(p - 2q)\cos p$$

Wie man sieht, ist diese Gleichung einfacher als die Gleichung (118), welche sich auf den Fall bezieht, daß der vom wahren Deklinationskreise PS' (Fig. 4) aus gezählte Positionswinkel p' beobachtet ist.

Die Gleichungen (118) und (119) lassen sich noch etwas umformen. In (118) setze man

$$(120)\qquad \tfrac{1}{2}\sin 2(p - q) = \cos^2(p - q)\operatorname{tang}(p - q)$$

und führe einen Hilfswinkel (x) ein, der durch die Gleichung

$$(121)\qquad \operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\zeta\cos(p - q)$$

definiert werden soll; es wird dann

$$(121^a)\quad p - p' = -\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2 x\,\operatorname{tang}(p - q) - \alpha'\operatorname{tang}\zeta\,\sin q\,\operatorname{tang}\delta$$

Wenn nun M den Modul der *Briggs*schen Logarithmen bedeutet, so ist

$$(122)\qquad \frac{d\alpha'}{d\zeta} = \alpha'\,\frac{d\log\alpha'}{M d\zeta}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichungen (121^a) und (119), und setzt zur Abkürzung

$$(123)\qquad f = \alpha'\left(1 + \operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{M d\zeta}\right),$$

so erhält man

$$(124)\qquad p = p' - f\operatorname{tang}^2 x\,\operatorname{tang}(p - q) - \alpha'\operatorname{tang}\zeta\,\sin q\,\operatorname{tang}\delta,$$

beziehungsweise

$$(125)\qquad p = p'_1 - f\operatorname{tang}^2\zeta\,\sin(p - 2q)\cos p$$

Der durch die Gleichung (121) definierte Hilfswinkel x hat eine besondere Bedeutung; zieht man nämlich in Fig. 4 den Bogen ZB senkrecht zu S_1S_2, so findet man, daß x gleich dem Bogen BS ist.

Um einen Ausdruck für die Refraktion in Distanz zu erhalten, gehe man von dem Trapez $S_1 S'_1 S'_2 S_2$ in Fig. 4 aus, worin der Annahme nach $S_1 S_2$ kleiner als 2° ist. Da die Zenitdistanzen der beiden Sterne nicht größer als 75° sein sollen, so betragen die Bögen $S_1 S'_1$ und $S_2 S'_2$ höchstens einige wenige Minuten; unter diesen Umständen kann man die wahre Distanz $S_1 S_2$ gleich der Summe der Projektionen von $S_1 S'_1 = r_1$, $S'_1 S'_2 = \varDelta'$, $S'_2 S_2 = r_2$ auf den durch S_1 und S_2 gehenden Bogen größten Kreises setzen und erhält also, wenn $S_1 S_2$ wieder mit $\varDelta$ bezeichnet wird,

(126)
$$\varDelta = \varDelta' \cos(\lambda - l) + r_1 \cos\lambda_1 - r_2 \cos\lambda_2$$

Nun ist bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\varDelta' \cos(\lambda - l) = \varDelta' - \tfrac{1}{2}\varDelta' [(\lambda - l) \sin 1'']^2$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (114)

(126a)
$$\varDelta' \cos(\lambda - l) = \varDelta' - \tfrac{1}{8}\varDelta' \alpha'^2 \sin^2 1'' \operatorname{tang}^4\zeta \sin^2 2\lambda$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann für eine Distanz von 7000″ und $\zeta = 75^\circ$ den Werte 0″.01 erreichen. Da aber in Anbetracht der bei so großen Zenitdistanzen vorhandenen Unsicherheit der berechneten Refraktion ein Fehler von 0″.01 ohne Bedeutung ist, so darf man das genannte Glied vernachlässigen; damit geben die Gleichungen (126) und (126a)

$$\varDelta = \varDelta' + r_1 \cos\lambda_1 - r_2 \cos\lambda_2$$

oder, wenn $r_1 = \alpha'_1 \operatorname{tang}\zeta_1$ und $r_2 = \alpha'_2 \operatorname{tang}\zeta_2$ gesetzt wird,

$$\varDelta = \varDelta' + \alpha'_1 \operatorname{tang}\zeta_1 \cos\lambda_1 - \alpha'_2 \operatorname{tang}\zeta_2 \cos\lambda_2$$

Bezeichnet man den Bogen BS_1 (Fig. 4) mit x_1 und den Bogen BS_2 mit x_2, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\varDelta = \varDelta' + \alpha'_1 \operatorname{tang} x_1 - \alpha'_2 \operatorname{tang} x_2$$

Nun hat man aber dem *Taylor*schen Satze zufolge, sowie mit Rücksicht darauf, daß $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) = \zeta$ gesetzt wurde, und demnach $\zeta_1 - \zeta = -\frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ und $\zeta_2 - \zeta = \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ ist,

$$\alpha'_1 = \alpha' - \frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 - \cdots$$
$$\alpha'_2 = \alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 + \cdots$$

Somit wird

$$\varDelta = \varDelta' + \left[\alpha' + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2\right](\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x_2)$$
$$- \frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}(\operatorname{tang} x_1 + \operatorname{tang} x_2)$$

oder, da $x_1 - x_2 = \varDelta$ und $x_1 + x_2 = 2x$ ist,

(127)
$$\varDelta = \varDelta' + \left[\alpha' + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2\right]\frac{\sin\varDelta}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\,\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2}$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen. Man hat zunächst

$$\frac{1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{2}{\cos 2x + \cos \varDelta} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 \frac{1}{2}\varDelta} = \sec^2 x(1 + \sin^2 \tfrac{1}{2}\varDelta \sec^2 x + \cdots)$$

Nun folgt aus der Gleichung (121), daß x höchstens gleich ζ ist; werden also die Messungen nicht über die Zenitdistanz $\zeta = 75^\circ$ hinaus ausgedehnt, so wird auch x nicht größer als 75°. Mit Rücksicht hierauf und da $\varDelta < 2^\circ$ angenommen wird, kann man anstatt des vorigen Ausdrucks den folgenden anwenden

$$\frac{1}{\cos x_1 \cos x_2} = \sec^2 x(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 \varDelta \sec^2 x) \tag{128}$$

Ferner ergibt sich durch Anwendung einer der *Napier*schen Analogien auf das Dreieck ZS_1S_2 (Fig. 4)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \frac{\cos \lambda}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varDelta$$

oder hinreichend genau

$$\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \tfrac{1}{2}\varDelta \cos \lambda$$

Da aber die in der Gleichung (127) vorkommenden Differentialquotienten $\frac{d\alpha'}{d\zeta}$ und $\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}$ in Bogensekunden ausgedrückt zu werden pflegen, so muß man $\frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ in Teilen des Radius ausdrücken; demgemäß ist das in der letzten Gleichung enthaltene $\varDelta$ durch $\varDelta \sin 1'' = \sin \varDelta$ zu ersetzen. Damit wird

$$\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \tfrac{1}{2}\sin \varDelta \cos \lambda \tag{129}$$

Werden jetzt die in (127) angedeuteten Multiplikationen ausgeführt und dabei die Gleichungen (128) und (129) berücksichtigt, so erhält man zunächst für das von α' abhängige Glied

$$\frac{\alpha' \sin \varDelta}{\cos x_1 \cos x_2} = \alpha' \sin \varDelta \sec^2 x + \tfrac{1}{4}\alpha' \sin^3 \varDelta \sec^4 x \tag{130}$$

Ferner wird mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\sin \varDelta$ wie der dritten

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 \frac{\sin \varDelta}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{1}{8}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2} \sin^3 \varDelta \cos^2 \lambda \sec^2 x$$

Wie nun vorhin bemerkt wurde, kann x höchstens gleich ζ werden; in diesem Falle ist der Gleichung (121) zufolge $p - q = 0$, also, wie die erste der Gleichungen (115) zeigt, auch $\lambda = 0$. Für $\lambda = 0$, $x = \zeta = 75^\circ$ und $\varDelta = 7000''$ ist aber das auf der rechten Seite der vorigen Gleichung stehende Glied kleiner als 0,''01 und darf darum vernachlässigt werden; somit wird

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 \frac{\sin \varDelta}{\cos x_1 \cos x_2} = 0 \tag{131}$$

Weiterhin ergibt sich

$$-\frac{d\alpha'}{d\zeta}\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{d\alpha'}{d\zeta}\sin \varDelta \cos \lambda \operatorname{tang} x + \frac{1}{4}\frac{d\alpha'}{d\zeta}\sin^3 \varDelta \cos \lambda \operatorname{tang} x \sec^2 x$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite erreicht seinen Maximalwert, wenn $\lambda = 0$, also $x = \zeta$ ist; da dieser Maximalwert aber für $\Delta = 7000''$ und $x = \zeta = 75^\circ$ kleiner als $0''.01$ ist, so genügt es,

$$-\frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\,\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{d\alpha'}{d\zeta}\sin\Delta\cos\lambda\,\operatorname{tang} x$$

anzunehmen. Substituiert man hier für $\frac{d\alpha'}{d\zeta}$ seinen in (122) gegebenen Wert und für $\cos\lambda = \cos(p - q)$ den aus (121) folgenden Ausdruck

$$\cos\lambda = \operatorname{cotg}\zeta\,\operatorname{tang} x$$

so erhält man

$$(132)\qquad -\frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\,\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \alpha'\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta\,\operatorname{cotg}\zeta\,\operatorname{tang}^2 x$$

$$= \alpha'\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta\,\operatorname{cotg}\zeta\,(\sec^2 x - 1)$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (130), (131) und (132) ergibt sich aus (127

$$\Delta = \Delta' + \alpha'\left(1 + \operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\right)\sin\Delta\,\sec^2 x$$

$$- \alpha'\operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta + \tfrac{1}{4}\alpha'\sin^3\Delta\,\sec^4 x$$

oder, wenn die durch die Gleichung (123) definierte Größe f eingeführt und außerdem

$$(133)\qquad g = -\alpha'\operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}, \qquad h = \tfrac{1}{4}\alpha'$$

gesetzt wird,

$$(134)\qquad \Delta = \Delta' + f\sin\Delta\,\sec^2 x + g\sin\Delta + h\sin^3\Delta\,\sec^4 x$$

Der Wert von α' ändert sich mit der Zenitdistanz, mit der Dichtigkeit der Luft und mit der Temperatur; eben dasselbe findet also auch für die Koeffizienten f, g und h statt. Berechnet man nun für eine und dieselbe Zenitdistanz, aber für verschiedene Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft die numerischen Werte von α', f, g und h, so ergibt sich folgendes: Es sei ϱ die durch die Gleichungen (73), (41^b) und (41^a) definierte Dichtigkeit und t die Temperatur der Luft, ferner seien α'_0, f_0, g_0 und h_0 die Werte von α', f, g und h für $\varrho = 1$ und $t = 0$; wenn dann $\varphi(\varrho, \zeta)$ einen von ϱ und ζ, und $\psi(t, \zeta)$ einen von t und ζ abhängigen Faktor bezeichnet, so hat man für beliebige Werte von ϱ und t

$$(134^a)\qquad f = \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\cdot f_0$$

oder

$$\log f = \log f_0 + \log\varrho + \log\varphi(\varrho, \zeta) + \log\psi(t, \zeta)$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $\log\alpha'$, $\log g$ und $\log h$, nur mit dem Unterschiede, daß die Funktionen φ und ψ — strenge genommen — durch andere zu ersetzen sind; in Wirklichkeit aber begeht man nur einen verschwindend kleinen Fehler, wenn man in den Gleichungen für $\log\alpha'$, $\log g$ und $\log h$ dieselben Werte von φ und ψ anwendet wie in der Gleichung für $\log f$, selbst wenn $\Delta = 7000''$ und $\zeta = 75^\circ$ ist.

Was speziell noch das in (134) von $h = \frac{1}{4}\alpha'$ abhängige Glied betrifft, so ist dasselbe so klein, daß man auf die Veränderung von h mit der Zenitdistanz keine Rücksicht zu nehmen braucht und, mit Benutzung des für $\zeta = 75^\circ$, $\varrho = 1$, $t = 0$ gültigen Wertes $\log \frac{1}{4}\alpha'_0 = 1.17$,

$$\log h = 1.17 + \log\varrho + \log\varphi(\varrho, \zeta) + \log\psi(t, \zeta)$$

setzen kann. Die zur Berechnung des Einflusses der Refraktion auf den Positionswinkel und die Distanz dienenden Gleichungen (124), (125) und (134) werden somit

1. wenn der beobachtete Positionswinkel (p') von dem wahren Deklinationskreise aus gerechnet wird,

$$(135^a)\quad \begin{aligned} p &= p' - \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\{f_0 \operatorname{tang}^2 x \operatorname{tang}(p - q) + \alpha'_0 \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta\} \\ \varDelta &= \varDelta' + \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\{f_0 \sin\varDelta \sec^2 x + g_0 \sin\varDelta + [1.17] \sin^3\varDelta \sec^4 x\} \end{aligned}$$

2. wenn der beobachtete Positionswinkel (p'_1) von dem scheinbaren Deklinationskreise aus gerechnet wird,

$$(135^b)\quad \begin{aligned} p &= p'_1 - \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\cdot f_0 \operatorname{tang}^2\zeta \sin(p - 2q)\cos p \\ \varDelta &= \varDelta' + \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\cdot\{f_0 \sin\varDelta \sec^2 x + g_0 \sin\varDelta + [1.17] \sin^3\varDelta \sec^4 x\} \end{aligned}$$

Die Werte von $\log\varrho$ ergeben sich mit Hilfe von Tabelle 1 und 2 meiner Refraktionstafeln, diejenigen von $\log f_0$, $\log g_0$ und $\log\alpha'_0$ folgen aus der Tabelle 7. Die Werte von $\log\varphi(\varrho, \zeta)$ und $\log\psi(t, \zeta)$ sind in den Tabellen 8 und 9 als »Dichtigkeits«-, bzw. »Temperaturkorrektion des log der mittleren Refraktion in Positionswinkel und Distanz« bezeichnet. — Es sei noch bemerkt, daß die beiden letzten von g_0 und $\sin^3\varDelta$ abhängigen Glieder in der Formel für $\varDelta$ nur bei so großen Distanzen, wie sie bei Heliometermessungen vorkommen, merklich werden können.

Um die Werte von ζ und q zu berechnen, kann man sich nach § 17 der folgenden Formeln bedienen, in denen Θ den Stundenwinkel des Mittelpunktes (S) des Bogens $S_1 S_2$ in Fig. 4, und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet.

$$(136)\quad \begin{aligned} &\operatorname{tang} N = \operatorname{cotg}\varphi \cos\Theta, \qquad \operatorname{cotg} n = \sin N \operatorname{tang}\Theta \\ &\operatorname{tang}\zeta \sin q = \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + \delta)} \\ &\operatorname{tang}\zeta \cos q = \operatorname{cotg}(N + \delta) \end{aligned}$$

Für nördliche Breiten ist N im ersten oder vierten Quadranten zu wählen, und zwar im ersten, wenn Θ im ersten oder vierten Quadranten liegt, im vierten, wenn Θ im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Für südliche Breiten ist N im zweiten oder dritten Quadranten zu wählen, und zwar im zweiten, wenn Θ im ersten oder vierten Quadranten liegt, im dritten, wenn Θ im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Zur Berechnung von x dient die Gleichung (121)

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\zeta \cos(p - q)$$

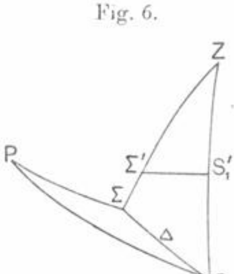
87. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz zweier Sterne. Von den beiden zueinander senkrechten Fäden eines Positionsmikrometers (§ 86) sei der eine fest, der andere durch eine Schraube beweglich. Stellt man den festen Faden so, daß seine Richtung mit derjenigen eines

Deklinationskreises zusammenfällt, und sind t_1 und t_2 die Sternzeiten, zu denen die Sterne S_1 und S_2 nacheinander den Faden passieren, so ist $t_2 - t_1$ die beobachtete oder scheinbare Rektaszensionsdifferenz von S_2 und S_1. Die scheinbare Deklinationsdifferenz der beiden Sterne erhält man, indem man den beweglichen Faden zur Zeit t_1 auf S_1 und zur Zeit t_2 auf S_2 einstellt und die sich hierbei ergebenden Schraubenablesungen voneinander subtrahiert. Es ist jetzt zu zeigen, in welcher Weise man aus der beobachteten die von der Refraktion befreite oder wahre Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz finden kann; dabei möge die wahre Rektaszension und Deklination von S_1, bzw. S_2 mit α_1, δ_1, bzw. α_2, δ_2 bezeichnet werden.

In Fig. 5 sei Z das Zenit des Beobachtungsortes, und $S_1'\Sigma'$ ein Bogen des Deklinationskreises, in dem die durch den festen Faden und den Mittelpunkt des Objektivs gelegte Ebene die Himmelskugel schneidet; S_1' sei der scheinbare Ort des Sterns S_1 zur Zeit t_1 und Σ' der scheinbare Ort des Sterns S_2 zur Zeit t_2. Man kann sich nun denken, daß zur Zeit t_1, wo der Stern S_1 durch S_1' geht, ein anderer Stern (Σ) mit Σ' zusammenfällt. Um die wahren Örter dieses gedachten Sterns und des Sterns S_1 zur Zeit t_1 zu erhalten, hat man auf $Z\Sigma'$ und ZS_1' die den scheinbaren Zenitdistanzen $Z\Sigma'$ und ZS_1' entsprechenden Refraktionen $\Sigma'\Sigma$ (Fig. 6), bzw. $S_1'S_1$ aufzutragen; Σ und S_1 sind dann die gesuchten Örter. Da der Stern Σ durch denselben Punkt (Σ') des Bogens $\Sigma'S_1'$ hindurchgehen soll, wie der Stern S_2, so muß die Deklination von Σ derjenigen des Sterns S_2 gleich sein. Da ferner die Zeit, zu der der Stern Σ den Punkt Σ' passiert, gleich t_1 sein soll, während der Stern S_2 erst zur Zeit t_2 durch Σ' hindurchgeht, so muß die Rektaszension des Sterns Σ gleich $\alpha_2 - (t_2 - t_1)$ sein. In dem Augenblicke nun, wo die Sterne Σ und S_1 durch die Punkte Σ', bzw. S_1' hindurchgehen, ist der beobachtete Positionswinkel des nördlicheren der beiden Sterne, bezogen auf den Mittelpunkt des die Sterne verbindenden Bogens gleich o. Um den dem beobachteten entsprechenden wahren Positionswinkel zu finden, hat man zu unterscheiden, ob die Richtung des festen Fadens mit der Richtung des wahren oder mit der des scheinbaren Deklinationskreises zusammenfällt (§ 86). Im ersten Falle hat man die Gleichung (124) anzuwenden und darin δ als identisch mit $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ zu betrachten, ferner $p' = 0$ und auf der rechten Seite $p = 0$ zu setzen; demnach ist auch an Stelle von tang x sein aus (121) für $p = 0$ folgender Wert tang ζ cos q einzuführen. Im zweiten Fall muß die Gleichung (125) benutzt und darin $p_1' = 0$ sowie auf der rechten Seite $p = 0$ gesetzt werden. Falls also der feste Faden in die Richtung des wahren Deklinationskreises fällt, wird

Fig. 5.

Fig. 6.



(137) $$p = [f \operatorname{tang} \zeta \cos q - \alpha' \operatorname{tang} \delta] \operatorname{tang} \zeta \sin q;$$

fällt dagegen der feste Faden in die Richtung des scheinbaren Deklinationskreises, so hat man

(138) $$p = f \operatorname{tang}^2 \zeta \sin 2q$$

Die wahre Distanz $\Sigma S_1 = \varDelta$ findet man, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (134) $\varDelta'$ gleich der gemessenen Deklinationsdifferenz $\delta'_2 - \delta'_1$ setzt, ferner $\sin\varDelta = (\delta'_2 - \delta'_1)\sin 1''$ annimmt und an Stelle von $\sec^2 x$ seinen aus der Gleichung (121) für $p = 0$ folgenden Wert $1 + \operatorname{tang}^2\zeta\cos^2 q$ substituiert; vernachlässigt man dabei noch die kleinen von g und h abhängigen Glieder der Gleichung (134), so erhält man

$$(139)\qquad \varDelta = \delta'_2 - \delta'_1 + f(\delta'_2 - \delta'_1)\sin 1''[1 + \operatorname{tang}^2\zeta\cos^2 q]$$

Bedeutet jetzt P in Fig. 6 den Ort des Pols, so hat man $PS_1 = 90^\circ - \delta_1$, $P\Sigma = 90^\circ - \delta_2$ und, da die Rektaszension des fingierten Sterns Σ gleich $\alpha_2 - (t_2 - t_1)$ ist, $S_1 P\Sigma = \alpha_2 - \alpha_1 - (t_2 - t_1)$. Setzt man dann $PS_1\Sigma = p_1$, $P\Sigma S_1 = 180^\circ - p_2$, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) = p$, $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = \delta$, so folgt

$$\begin{aligned}[\alpha_2 - \alpha_1 - (t_2 - t_1)]\cos\delta &= \varDelta\sin p\\ \delta_2 - \delta_1 &= \varDelta\cos p\end{aligned}$$

oder, wenn mit Rücksicht darauf, daß nach (137) und (138) p ein kleiner Winkel ist, $\sin p = p\sin 1''$ und $\cos p = 1$ gesetzt wird,

$$(140)\qquad \begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + p\,\varDelta\sin 1''\sec\delta\\ \delta_2 - \delta_1 &= \varDelta\end{aligned}$$

Jenachdem nun der feste Faden in die Richtung des wahren oder des scheinbaren Deklinationskreises fällt, sind für p und $\varDelta$ die in (137) und (139), oder die in (138) und (139) gegebenen Werte zu substituieren; in der Gleichung (137) darf dabei noch α' mit f vertauscht werden. Durch Substitution von (137) und (139) in die Gleichungen (140) erhält man

$$(140^1)\qquad \begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + (\delta'_2 - \delta'_1)f\sin 1''[\operatorname{tang}\zeta\cos q - \operatorname{tang}\delta]\operatorname{tang}\zeta\sin q\sec\delta\\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + (\delta'_2 - \delta'_1)f\sin 1''[1 + \operatorname{tang}^2\zeta\cos^2 q],\end{aligned}$$

und durch Substitution von (138) und (139)

$$(140^2)\qquad \begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + (\delta'_2 - \delta'_1)f\sin 1''\operatorname{tang}^2\zeta\sin 2q\sec\delta\\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + (\delta'_2 - \delta'_1)f\sin 1''[1 + \operatorname{tang}^2\zeta\cos^2 q]\end{aligned}$$

Bei den in der Praxis vorkommenden Fällen ist $\alpha_2 - \alpha_1$ wenig von $t_2 - t_1$, und $\delta_2 - \delta_1$ wenig von $\delta'_2 - \delta'_1$ verschieden. Mit Rücksicht hierauf kann man in den Gleichungen (140¹) und (140²) anstatt f den aus (134ª) folgenden Näherungswert $f_0\varrho$ setzen; bedient man sich dann noch der Abkürzung $f_0\sin 1'' = \alpha''$ und führt die Werte (136) von $\operatorname{tang}\zeta\sin q$ und $\operatorname{tang}\zeta\cos q$ ein, so erhält man für die gesuchte wahre Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz der beiden Sterne: 1. wenn die Richtung des Stundenfadens mit derjenigen des w a h r e n D e k l i n a t i o n s k r e i s e s zusammenfällt,

$$(141^1)\qquad \begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \alpha''\varrho(\delta'_2 - \delta'_1)\frac{\operatorname{cotg} n\cos(N + 2\delta)}{\cos^2\delta\sin^2(N + \delta)}\\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + \frac{\alpha''\varrho(\delta'_2 - \delta'_1)}{\sin^2(N + \delta)},\end{aligned}$$

2. wenn die Richtung des Stundenfadens mit derjenigen des scheinbaren Deklinationskreises übereinstimmt,

$$(141^2) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \alpha'' \varrho (\delta'_2 - \delta'_1) \frac{2 \operatorname{cotg} n \cos(N + \delta)}{\cos \delta \sin^2(N + \delta)} \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + \frac{\alpha'' \varrho (\delta'_2 - \delta'_1)}{\sin^2(N + \delta)} \end{aligned}$$

Um die vorigen Gleichungen in eine einfachere Form zu bringen, setze man

$$(142) \qquad \frac{\alpha'' \varrho (\delta'_2 - \delta'_1)}{\sin^2(N + \delta)} = D$$

Es wird dann **1.** wenn der Stundenfaden nach dem wahren Deklinationskreise orientiert ist,

$$(143^1) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \frac{D \operatorname{cotg} n}{\cos^2 \delta} \cos(N + 2\delta) \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + D \end{aligned}$$

2. wenn der Stundenfaden nach dem scheinbaren Deklinationskreise orientiert ist,

$$(143^2) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \frac{2 D \operatorname{cotg} n}{\cos \delta} \cos(N + \delta) \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta'_2 - \delta'_1 + D \end{aligned}$$

Die Werte von $\log \alpha''$ kann man der Tabelle 10 meiner Refraktionstafeln entnehmen; den Wert von ϱ erhält man mit Hilfe der Tabellen 1 und 2 der genannten Tafeln.

88. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der trockenen Luft. Bezeichnet man mit Z_0 die im Meridian beobachtete Zenitdistanz eines Sterns, ist ferner $\mathfrak{R}$ die Refraktion und $\varDelta Z_0$ die Reduktion von Z_0 auf ein fest gewähltes Äquinox, so ergibt sich für die auf dieses Äquinox bezogene wahre Zenitdistanz

$$(144) \qquad \zeta = Z_0 + \mathfrak{R} + \varDelta Z_0$$

Nun folgt aus der Gleichung (74), S. 221, wenn wieder $t = t_0$, und

$$(144^a) \qquad \log \mathfrak{R}_0 + t_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho = 1,\, t = 0} + (\varrho - 1) \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \log \frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho = 1,\, t = 0} = \log \mathfrak{R}'$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \varrho$$

Substituiert man hier für ϱ seinen aus (73) und (41^b) folgenden Wert, so erhält man

$$(144^b) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\, t_0}{1 + 0.003\,663\, t_0},$$

wo β durch die Gleichung (41^a) bestimmt ist, und t_0 die Temperatur am Beobachtungsorte bedeutet. Der im Nenner stehende Koeffizient von t_0 ist der angenommene Wert des Ausdehnungskoeffizienten der Luft; wenn aber der wahre Wert dieses Koeffizienten gleich $0.003\,663 \left(1 + \frac{i}{100}\right)$ ist, so ergibt sich für den genauen Betrag der Refraktion, abgesehen von einigen zu vernachlässigenden Gliedern,

$$(145) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\, t_0}{1 + 0.003\,663\, t_0} \left(1 - 0.003\,663 \frac{i}{100}\, t_0\right)$$

Der Faktor von $1 - 0.003\,663 \frac{i}{100} t_0$ gibt die dem Ausdehnungskoeffizienten 0.003 663 entsprechende Refraktion an; wird diese mit $R^{(0)}$ bezeichnet, so folgt

$$\mathfrak{R} = R^{(0)} \left(1 - 0.003\,663 \frac{i}{100} t_0\right)$$

Aus der letzten Gleichung in Verbindung mit (144) erhält man, wenn

$$Z_0 + R^{(0)} + \Delta Z_0 = \zeta_0 \tag{145a}$$

gesetzt wird,

$$\zeta = \zeta_0 - 0.003\,663 \frac{R^{(0)}}{100} i t_0$$

Ebenso ergibt sich für eine zweite Beobachtung des Sterns

$$\zeta = \zeta_1 - 0.003\,663 \frac{R^{(1)}}{100} i t_1,$$

wo t_1 die beobachtete Temperatur, $R^{(1)}$ die mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten 0.003 663 berechnete Refraktion, und ζ_1 die in derselben Weise wie ζ_0 abgeleitete, auf das feste Äquinox bezogene wahre Zenitdistanz bedeutet. Nun ist

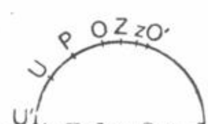
$$R^{(0)} = \tfrac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) + \tfrac{1}{2}(R^{(0)} - R^{(1)})$$
$$R^{(1)} = \tfrac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) - \tfrac{1}{2}(R^{(0)} - R^{(1)})$$

Setzt man jetzt $\frac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) = R$ und subtrahiert die beiden Gleichungen für ζ, so erhält man mit Vernachlässigung der von $R^{(0)} - R^{(1)}$ abhängigen Glieder

$$\zeta_1 - \zeta_0 = 0.003\,663 \frac{R}{100} (t_1 - t_0) i \tag{146}$$

Hierbei ist nun noch auf die Veränderlichkeit der Polhöhe Rücksicht zu nehmen. Es sei P (Fig. 7) der Punkt, in dem die Drehungsachse der Erde die Sphäre trifft. Sieht man von der Präzession und Nutation ab, denkt man sich also die beobachteten Zenitdistanzen auf dasselbe Äquinox reduziert, so kann die Richtung der Drehungsachse im Raum als unveränderlich bezeichnet werden; somit ändert auch P seine Lage nicht. Aber der Erdkörper selbst vollführt kleine Schwankungen um eine mittlere Lage, und infolge dessen ändert der Punkt, in dem die Richtung der Vertikalen die Sphäre trifft, seinen Ort.

Fig. 7.



Es sei Z der Ort des Zenits zur Zeit T, und z der Ort des Zenits zur Zeit t, ferner sei O der Ort eines nördlich vom Zenit kulminierenden Sterns an der Sphäre; die Meridianzenitdistanz des Sterns, bezogen auf die der Zeit T, bzw. der Zeit t entsprechende Lage des Zenits, ist dann $ZO = \mathfrak{Z}$, bzw. $zO = \mathfrak{z}$. Da nun, wenn φ und Φ die Werte der Polhöhe zu den Zeiten t und T bedeuten, $Zz = Pz - PZ = -(\varphi - \Phi)$ ist, so erhält man für die Reduktion der zur Zeit t beobachteten Zenitdistanz eines nördlich vom Zenit kulminierenden Sterns auf die Epoche T den Wert $+(\varphi - \Phi)$. Für einen südlich vom Zenit kulminierenden Stern O' ist diese Reduktion gleich $-(\varphi - \Phi)$; rechnet man aber südliche Zenitdistanzen negativ, so wird die Reduktion für nördliche und südliche Zenitdistanzen gleich $\varphi - \Phi$.

Die Werte von $\varphi - \Phi$ ergeben sich aus den Beobachtungen der internationalen Breitenstationen. Wie nämlich die Diskussion der an diesen Stationen ausgeführten Bestimmungen der geographischen Breite gezeigt hat, läßt sich

$$\varphi - \Phi = x \cos \lambda + y \sin \lambda + z$$

setzen, wo λ die auf einen fest gewählten Meridian der Erde bezogene Länge des Beobachtungsortes bedeutet, und x, y und z Funktionen der Zeit sind. Versteht man unter λ die auf den Meridian von Greenwich bezogene westliche Länge des Beobachtungsortes, so lassen sich die Werte von x, y und z unmittelbar den Publikationen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung entnehmen. Im folgenden wird angenommen, daß die beobachteten Zenitdistanzen bereits wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert seien.

Um nun den in (146) vorkommenden Koeffizienten i zu bestimmen, beobachte man eine größere Zahl von Sternen, welche in einem Zenitabstand von 0° bis höchstens 80° den Meridian passieren, bei möglichst hohen und tiefen Temperaturen. Wird dann aus den in den Temperaturextremen erhaltenen Meridianzenitdistanzen jedes Sterns je ein Mittelwert gebildet, und werden diese Mittelwerte sowie auch die entsprechenden Mittelwerte t_0, t_1 und R in (146) substituiert, so sind damit die Bedingungsgleichungen für i gefunden; selbstverständlich wird man bei Zirkumpolarsternen die in der oberen und unteren Kulmination angestellten Beobachtungen gesondert betrachten. Bezeichnet man mit m die Anzahl der bei hohen und mit n die Anzahl der bei tiefen Temperaturen beobachteten, in je einen Mittelwert zusammengefaßten Zenitdistanzen desselben Sterns, ist ferner ε der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung, so ist der mittlere Fehler einer Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ gleich $\varepsilon \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$. Dieser Fehler ist für jede Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ zu bestimmen; legt man dann einer Differenz mit dem willkürlich gewählten mittleren Fehler ε_0 das Gewicht 1 bei, so erhält man für die Gewichte p der Gleichungen (146) den Ausdruck $\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{mn}{m+n}\right)$.

Nachdem man das Gewicht jeder Bedingungsgleichung gefunden und die Gleichungen nach der Zenitdistanz geordnet hat, lassen sich die den Zenitdistanzen von 0° bis 10°, 10° bis 20°, usw. zugehörigen Bedingungsgleichungen in je ein Mittel zusammenfassen; diese Mittel kann man dann zur Bestimmung von i benutzen. Zur Erläuterung mögen die in der dritten, bzw. sechsten Kolumne der folgenden Tafel angeführten Werte von $\zeta_1 - \zeta_0$ dienen, welche sich aus den von Dr. *Großmann* an dem Meridiankreise der *von Kuffner*schen Sternwarte angestellten Beobachtungen ergeben haben; bei der für die Reduktion dieser Beobachtungen erforderlichen Refraktionsrechnung war für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft der Wert 0.003663 angenommen worden. Die zweite, bzw. fünfte Kolumne enthält die Mittelwerte $t_1 - t_0$; die vierte, bzw. siebente Kolumne gibt die Gewichte an, welche den $\zeta_1 - \zeta_0$ beizulegen sind, wenn man $\pm 0''.10$ als mittleren Fehler der Gewichtseinheit wählt. Die mit »Frühjahr« überschriebene Gruppe entspricht im wesentlichen denjenigen Beobachtungen, welche in die Zeit vom Februar bis Mai fallen; die Herbstgruppe bezieht sich vorwiegend auf die von August bis Dezember angestellten Beobachtungen. Die erste

Gruppe entspricht also der Periode, in der die Temperatur zunimmt, die zweite entspricht der Periode, in der die Temperatur abnimmt; mit t_1 ist stets die höhere Temperatur bezeichnet.

	Frühjahr			Herbst		
Zenitdistanz	$t_1 - t_0$	$\zeta_1 - \zeta_0$	Gewicht	$t_1 - t_0$	$\zeta_1 - \zeta_0$	Gewicht
10° bis 20°	10°.4	−0″.22	1.3	11°.5	−0″.01	2.8
20 » 30	11.3	−0.09	4.0	10.1	−0.01	1.0
30 » 40	10.8	−0.17	2.8	...	...	...
40 » 50	10.6	−0.17	2.0	11.1	−0.09	0.8
50 » 60	11.0	−0.26	0.7	11.5	+0.12	1.3
60 » 70	11.3	+0.05	0.7	11.9	+0.08	0.4
70 » 80	11.2	−0.15	0.5	10.7	−0.15	0.3

Wie man sieht, unterscheiden sich die Werte $t_1 - t_0$ jeder Gruppe nur wenig voneinander. Wenn also i einen von 0 merklich verschiedenen Wert hätte, so müßte, der Gleichung (146) zufolge, $\zeta_1 - \zeta_0$ mit der Zenitdistanz wachsen, weil ja R mit der Zenitdistanz wächst; dies ist aber nicht der Fall, vielmehr scheinen die Werte von $\zeta_1 - \zeta_0$ für die Frühjahrs- und Herbstgruppe konstant zu sein. Die *Großmann*schen Beobachtungen geben also keinen Anlaß, für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft einen von 0.003663 verschiedenen Wert anzunehmen.

Der genannte Koeffizient ist von den hierunter erwähnten Physikern nach drei verschiedenen Methoden bestimmt worden, und zwar hat sich ergeben

Regnault	0.003671	konstanter Druck	*Recknagel*	0.003668	konstantes Volumen
Magnus	0.003668	konstantes Volumen	*Jolly*	0.003669	konstantes Volumen
Regnault	0.003667	konstantes Volumen	*Regnault*	0.003663	Druck u. Vol. veränderlich

Für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft nimmt man hiernach an Stelle von 0.003663 wohl besser den Wert 0.003668 an und setzt demgemäß $0.003663 \frac{i}{100} = +0.000005$; tut man dieses, so findet man aus (146), daß selbst für $t_1 - t_0 = +20°$ und die Zenitdistanz 80° die Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ nicht größer als 0″.03 wird. Eine Verbesserung des auf physikalischem Wege gewonnenen und jedenfalls nur um wenige Einheiten der 6ten Dezimale unsicheren Wertes des Ausdehnungskoeffizienten der Luft mit Hilfe von astronomischen Beobachtungen ist also nicht zu erwarten; dennoch wird man bei einer gegebenen Beobachtungsreihe stets untersuchen müssen, ob dieselbe einen von 0.003668 wesentlich verschiedenen Wert des Ausdehnungskoeffizienten der Luft verlangt. Falls letzteres der Fall ist, so deutet dieses auf das Vorhandensein systematischer Fehler hin, sei es, daß diese in einer mangelhaften Aufstellung des Thermometers oder in einer ungenügenden Ventilation des Beobachtungsraumes oder in anderen Dingen ihren Grund haben.

89. Bestimmung der Refraktionskonstante, der mittleren Polhöhe und der Deklinationen. Zur Bestimmung der Refraktionskonstante und der mittleren Polhöhe beobachtet man eine Reihe von Sternen in oberer und unterer Kulmination.

In Fig. 7 (S. 247) seien O und U die wahren Örter eines Sterns zur Zeit seiner oberen, bzw. unteren Kulmination; es ist dann $ZO + ZU = 2ZP$ also, wenn $ZO = \zeta_o$, $ZU = \zeta_u$ gesetzt und für ZP sein Wert $90^\circ - \varphi$ substituiert wird (wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bedeutet), $\zeta_o + \zeta_u = 180^\circ - 2\varphi$. Bezeichnet man also die beobachteten Zenitdistanzen mit z_o, bzw. z_u und die berechneten zugehörigen Refraktionen mit r_o, bzw. r_u, ist ferner $\mathfrak{a}_o$ der angenommene und $\mathfrak{a}_o\left(1 + \frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_o}\right) = \mathfrak{a}_o(1 + n)$ der wahre Wert der Refraktionskonstante, so wird mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$180^\circ - 2\varphi = (z_u + r_u) + (z_o + r_o) + (r_u + r_o)n \tag{147}$$

Man betrachte jetzt einen Stern, dessen obere Kulmination südlich vom Zenit stattfindet, der also beispielsweise in den Punkten O' und U' den Meridian passiert. In diesem Falle ist $ZU' - ZO' = ZP + PU' - (PO' - ZP) = 2ZP$ oder, wenn die wahren Zenitdistanzen ZU' und ZO' mit ζ'_u, bzw. ζ'_o bezeichnet werden, $\zeta'_u - \zeta'_o = 180^\circ - 2\varphi$. Hieraus folgt, wenn z'_u und z'_o die beobachteten Zenitdistanzen, und r'_u und r'_o die berechneten Refraktionen bedeuten,

$$180^\circ - 2\varphi = (z'_u + r'_u) - (z'_o + r'_o) + (r'_u - r'_o)n$$

Aus der Vergleichung dieser Formel mit der für den ersten Stern erhaltenen Gleichung (147) ergibt sich, daß letztere allgemein gültig ist, wenn man südliche Zenitdistanzen und die ihnen entsprechenden Refraktionen negativ rechnet; das soll nun im folgenden geschehen. Dem vorigen Paragraphen zufolge ist dann für alle an einem Abende beobachteten Zenitdistanzen die von der Veränderlichkeit der Polhöhe abhängende Korrektion dieselbe und gleich der a. a. O. mit $\varphi - \Phi$ bezeichneten Größe. Ferner folgt noch aus der über das Vorzeichen südlicher Zenitdistanzen getroffenen Bestimmung, daß die Reduktion der in der oberen Kulmination beobachteten Zenitdistanzen auf ein festes Äquinox der Größe und dem Vorzeichen nach gleich der entsprechenden Reduktion der Deklinationen ist; für die in der unteren Kulmination erhaltenen Zenitdistanzen dagegen ist das Vorzeichen der Reduktion demjenigen der Reduktion der Deklinationen entgegengesetzt.

Es werde jetzt angenommen, daß man die aus den Beobachtungen abgeleiteten wahren Zenitdistanzen wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert und auf ein festes Äquinox bezogen habe; für jeden Stern bilde man dann das Mittel aus den der oberen und ebenfalls aus den der unteren Kulmination entsprechenden Zenitdistanzen und substituiere diese Mittelwerte an Stelle von $z_o + r_o$, bzw. $z_u + r_u$ in die Gleichung (147). Da vorausgesetzt wird, daß die Zenitdistanzen wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert sind, so bedeutet das in (147) enthaltene φ die mittlere Polhöhe; bezeichnet man nun mit φ_o einen angenommenen und mit $\varphi_o + \Delta\varphi$ den wahren Wert von φ, so folgt aus (147)

$$2\Delta\varphi + \frac{r_u + r_o}{100}\,100n = 180^\circ - 2\varphi_o - [(z_u + r_u) + (z_o + r_o)] \tag{148}$$

Zu dieser Gleichung ist noch eine Bemerkung zu machen. Der Gleichung (144^b) zufolge hat man, wenn die Temperatur am Beobachtungsort mit t bezeichnet wird, und $\mathfrak{R}$ die Refraktion bedeutet,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} \tag{149}$$

Zur Bestimmung der Temperatur verwendet man nun gewöhnlich Quecksilberthermometer, die teils außerhalb des Beobachtungssaales in der Nähe des Spaltes, teils im Saale selbst angebracht sind. Im allgemeinen ist die im Saale beobachtete Temperatur höher wie die am äußeren Thermometer abgelesene. So z. B. fand *Nyrén*, daß für den Meridiansaal der Pulkowaer Sternwarte die Differenz: Saalthermometer — äußeres Thermometer den mittleren Wert $+0\overset{\circ}{.}9$ habe; für München erhielt *Bauschinger* als mittleren Wert der Differenz: in der Nacht $+1\overset{\circ}{.}3$, am Nachmittage $+1\overset{\circ}{.}0$ (Winter), bzw. $+0\overset{\circ}{.}4$ (Sommer) und am Vormittage $+1\overset{\circ}{.}3$ (Winter), bzw. $-0\overset{\circ}{.}4$ (Sommer). Es tritt demnach die Frage auf, wie man die in dem Ausdruck (149) mit t bezeichnete Temperatur anzunehmen habe. Man wähle als Näherungswert von t die Angabe des äußeren Thermometers und bezeichne den wahren Wert von t mit $t + \Delta t$. Da Δt auf jeden Fall klein ist, und selbst eine Änderung von t um 1° einen nur unmerklichen Einfluß auf $\mathfrak{R}'$ hat, so ergibt sich für den wahren Wert der Refraktion

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,(t + \Delta t)}$$

oder hinreichend genau

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} (1 - 0.003\,663\,\Delta t)$$

Setzt man jetzt

$$\mathfrak{R}' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} = \mathfrak{R}^{(0)}, \tag{150}$$

wo $\mathfrak{R}^{(0)}$ die unter Benutzung der Ablesung des äußeren Thermometers berechnete Refraktion bedeutet, so wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(0)} - 0.3663 \frac{\mathfrak{R}^{(0)}}{100} \Delta t \tag{151}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann als Saalrefraktion bezeichnet werden.

Die an eine Ablesung des äußeren Thermometers anzubringende Korrektion Δt hängt von dem Werte ab, den die Differenz: inneres — äußeres Thermometer zur Zeit der Beobachtung hat; bezeichnet man diese Differenz mit U, und bedeutet c eine positive Konstante, so wird man nach dem Vorgange *Nyréns* $\Delta t = cU$ annehmen können. Dies ist aber noch nicht der vollständige Ausdruck für Δt. Die Quecksilberthermometer werden nämlich durch die dunkle Wärmestrahlung ihrer Umgebung beeinflußt und geben somit im allgemeinen nicht die wahre Lufttemperatur an. Demnach erfordern die Ablesungen dieser Thermometer gewisse Korrektionen, und zwar werden letztere für die im Saale befindlichen Thermometer meistens andere Werte annehmen wie für die äußeren. Um diese Korrektionen zu bestimmen, kann man die Angaben der Quecksilberthermometer mit denen eines Aspirationsthermometers vergleichen, welch letztere als unabhängig von dem Einfluß der Wärmestrahlung der Umgebung betrachtet werden dürfen. Ist aber eine derartige Vergleichung unterlassen worden, so müssen die an die Ablesungen der Quecksilberthermometer anzubringenden Korrektionen als Unbekannte eingeführt werden. Nimmt man diese Korrektionen als konstant an, und bezeichnet man die Korrektion des äußeren Thermometers mit k und die des inneren mit $\varkappa$, so ist für $\varDelta t$ der Ausdruck $k + c(U + \varkappa - k)$ anzuwenden; man erhält also, wenn $k + c(\varkappa - k) = C$ gesetzt wird,

$$\varDelta t = C + cU, \tag{152}$$

wo nun C und c zwei Konstanten darstellen.

Werden jetzt die der Zeit der oberen, bzw. der unteren Kulmination entsprechenden Werte von U durch die Indizes o und u voneinander unterschieden, so hat man in der Gleichung (148) r_u durch $r_u - 0.3663 \frac{r_u}{100}(C + cU_u)$, und r_o durch $r_o - 0.3663 \frac{r_o}{100}(C + cU_o)$ zu ersetzen; mit Vernachlässigung der Produkte aus C, bzw. c und n ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} 2\varDelta\varphi + \frac{r_u + r_o}{100}(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_uU_u + r_oU_o}{100}\,c = \\ = 180^\circ - 2\varphi_0 - [(z_u + r_u) + (z_o + r_o)] \end{aligned} \tag{153}$$

Jeder Zirkumpolarstern liefert eine solche Gleichung. Um die Gewichte der verschiedenen Gleichungen berechnen zu können, leitet man zunächst mit Hilfe der Abweichungen der für die Zenitdistanz jedes Sterns erhaltenen Einzelwerte von ihrem Mittel den mittleren Fehler einer Beobachtung ab. Ordnet man die für diesen Fehler sich ergebenden Werte nach der Zenitdistanz, so findet man stets, daß dieselben mit der Zenitdistanz zunehmen. Um das Gesetz der Zunahme durch eine Formel ausdrücken zu können, vereinigt man die den einzelnen Sternen entsprechenden Werte des mittleren Fehlers einer Beobachtung in eine Anzahl von Mittelwerten und berechnet auch die diesen Mittelwerten entsprechenden mittleren Zenitdistanzen. Bedeutet dann ε den der Zenitdistanz z entsprechenden mittleren Fehler einer Beobachtung, so lassen sich im allgemeinen zwei Konstanten a und b so bestimmen, daß

$$\varepsilon^2 = a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 z$$

ist. Der Wert von ε wird bedingt durch die Unsicherheit der Beobachtungen und durch die Unsicherheit der berechneten Refraktion. Um jetzt den mittleren Fehler einer Zenitdistanz zu erhalten, ist auch noch die Unsicherheit der von dem Beobachter angewandten Korrektionen der Teilstriche des Kreises in Rechnung zu ziehen; wird der mittlere Fehler einer Strichkorrektion mit ε' bezeichnet, so ergibt sich für den mittleren Fehler (e) einer Zenitdistanz

$$e = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 z + \varepsilon'^2}$$

Wenn nun die in die Gleichung (153) zu substituierenden Zenitdistanzen $z_u + r_u$, bzw. $z_o + r_o$ Mittelwerte aus p, bzw. q Einzelwerten darstellen, und wenn die mittleren

Fehler dieser Mittelwerte mit e_u, bzw. e_o bezeichnet werden, so ist $e_u = e : \sqrt{p}$, und $e_o = e : \sqrt{q}$; der mittlere Fehler der Gleichung (153) ist dann gleich $\pm \sqrt{e_u^2 + e_o^2}$. Legt man jetzt einer Gleichung, deren mittlerer Fehler gleich $\pm 1''$ ist, das Gewicht 1 bei, so wird das einer Gleichung mit dem mittleren Fehler $\pm \sqrt{e_u^2 + e_o^2}$ entsprechende Gewicht gleich $\frac{1}{e_u^2 + e_o^2}$. Jede Gleichung (153) ist also mit dem ihr zugehörigen Wert von $\frac{1}{\sqrt{e_u^2 + e_o^2}}$ zu multiplizieren; hierauf lassen sich die wahrscheinlichsten Werte von $\Delta\varphi$, $100n - 0.3663\,C$ und c bestimmen. Bezeichnet man den für $100n - 0.3663\,C$ gefundenen Wert mit γ, so wird $n = \frac{\gamma}{100} + 0.003\,663\,C$, und somit ergibt sich für den wahrscheinlichsten Wert der Refraktionskonstante $\alpha_0\left(1 + \frac{\gamma}{100} + 0.003\,663\,C\right)$. Die Refraktionskonstante erscheint also als Funktion von C ausgedrückt; der Wert von C läßt sich aus den beobachteten Zenitdistanzen nicht ableiten.

Nachdem man die Werte von $\Delta\varphi$, $100n - 0.3663\,C$ und c gefunden hat, kann man die Deklinationen der Sterne ableiten, und zwar auch derjenigen, welche nur in einer Kulmination beobachtet wurden. Zu diesem Zwecke berechne man mit Hilfe der angenommenen Refraktionskonstante und unter Benutzung der durch das äußere Thermometer angegebenen Temperatur die Refraktionen r_o, bzw. r_u und bringe diese an die beobachteten Zenitdistanzen an, dabei sind aber südliche Zenitdistanzen und die entsprechenden Refraktionswerte negativ zu nehmen. Zu den so erhaltenen wahren Zenitdistanzen füge man die Reduktion $\varphi - \Phi$ auf die mittlere Polhöhe und die Reduktion auf ein fest gewähltes mittleres Äquinox hinzu. Werden die sich dann ergebenden Zenitdistanzen mit ζ_o, bzw. ζ_u bezeichnet, so hat man noch zu bilden

$$(154)\qquad \begin{aligned} \zeta'_o &= \zeta_o + \frac{r_o}{100}\,(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_o}{100}\,cU_o \\ \zeta'_u &= \zeta_u + \frac{r_u}{100}\,(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_u}{100}\,cU_u \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $\varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi$, so ist den Gleichungen § 16, (1) und (2) zufolge, wenn δ die Deklination bedeutet,

$$\delta = \varphi + \zeta'_o, \qquad \delta = 180^0 - \varphi - \zeta'_u$$