Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XIV. Bestimmung der Ekliptik und der Rektaszesionen der Sonne und der Fixsterne

Kapitel XIV.

Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne.

90. Näherungswerte. Die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne erfolgt in der Weise, daß man sich zunächst Näherungswerte der gesuchten Größen verschafft und diese sukzessive verbessert. Solche Näherungswerte kann man gegenwärtig den Jahrbüchern entnehmen, indessen soll vorläufig von den Jahrbüchern abgesehen und gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Beobachtungen zu Näherungswerten gelangen kann. Um das dabei zur Anwendung kommende Prinzip in möglichst einfacher Weise erläutern zu können, denke man sich, daß es gelungen sei, ein ganzes Jahr hindurch täglich die Sonne im Meridian zu beobachten und ihre Zenitdistanz zu messen; leitet man dann aus diesen Zenitdistanzen in Verbindung mit der Polhöhe die Deklination der Sonne von Tag zu Tag ab, so gibt das Mittel aus dem nördlichsten und südlichsten Wert der Deklination (letzteren absolut genommen) einen Näherungswert für die Schiefe der Ekliptik an.

Die Schiefe der Ekliptik werde mit ε bezeichnet, ferner sei D die an irgend einem Tage beobachtete Deklination und A die zu bestimmende Rektaszension der Sonne. Vernachlässigt man nun die Sonnenbreite, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, welches von dem Frühlingspunkte, dem Orte der Sonne in der Ekliptik und dem Durchschnittspunkte des Deklinationskreises der Sonne mit dem Äquator gebildet wird,

$$\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{1}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich A berechnen. Um die Genauigkeit einer Bestimmung von A beurteilen zu können, differenziere man die vorige Gleichung. Wird die Differentiation logarithmisch ausgeführt, so erhält man

$$dA = \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2D}\, dD - \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2\varepsilon}\, d\varepsilon \tag{2}$$

Um die Zeit des Äquinoktiums herum ist nun D sehr klein, und A nahe gleich 0° oder 180°; $\operatorname{tang} A$ unterscheidet sich also nur wenig von 0, und ein Fehler in dem angenommenen Werte von ε hat somit einen äußerst geringen Einfluß auf A. Bei sehr kleinen Werten von $\operatorname{tang} A$ darf man ferner $\operatorname{tang} A = \sin A$ setzen; da aber $\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon$ ist, so folgt, daß der Koeffizient von dD, für $D = 0$, gleich $\operatorname{cotg} \varepsilon = 2.3$ wird. Dies ist der kleinste Wert, den der genannte Koeffizient annehmen kann. Aus dem Gesagten folgt, daß die Rektaszension der Sonne sich am genauesten aus den in der Nähe des Frühjahrs- oder Herbstäquinoktiums bestimmten Deklinationen ableiten läßt.

Man nehme jetzt an, daß man im Frühjahr oder im Herbst außer der Zenitdistanz der Sonne auch die Zeiten beobachtet habe, zu denen die Sonne und ein vom Äquator nicht weit entfernter heller Fixstern den Meridian passieren. Wenn dann die Uhr so reguliert war, daß zwischen zwei oberen oder unteren Kulminationen eines Sterns 24 Stunden vergehen, so ist die Differenz der beobachteten Durchgangszeiten von Sonne und Stern gleich der Rektaszensionsdifferenz der Sonne und des Sterns; da nun die Rektaszension der Sonne bereits bekannt ist, so darf jetzt auch die Rektaszension des Sterns als bekannt betrachtet werden. Vorzuziehen ist es, gleich zwei um beiläufig 12^h voneinander entfernte Sterne, wie z. B. α Canis minoris ($\alpha = 7^h\,35^m$, $\delta = +\,5^\circ\,27'$) und α Aquilae ($\alpha = 19^h\,46^m$, $\delta = +\,8^\circ\,38'$) sowohl im Frühjahr als im Herbst an die Sonne anzuschließen; beobachtet man dann noch die Rektaszensionsdifferenzen zwischen diesen und einer Reihe eingeschalteter, dem Äquator naher Sterne, so werden auch deren Rektaszensionen bekannt. Nachdem man so die Rektaszensionen einer Anzahl von Sternen gefunden hat, kann man aus den Durchgangsbeobachtungen eines oder mehrerer von ihnen und der Sonne die Rektaszension dieser letzteren auch an den zwischen den Äquinoktialzeiten gelegenen Tagen finden. Die durch Beobachtung erhaltenen Rektaszensionen und Deklinationen der Sonne ermöglichen es aber, die Elemente der Erdbahn abzuleiten, und mit Hilfe dieser läßt sich eine Ephemeride berechnen, aus der man für jede Zeit den Ort der Sonne entnehmen kann.

91. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik. Mit Benutzung der jetzt als gegeben vorausgesetzten Sonnenephemeride soll zunächst die Schiefe der Ekliptik genauer bestimmt werden. Es sei*) γA der Äquator und γE die Ekliptik, P und Π seien die Pole des Äquators, bzw. der Ekliptik, ferner sei S' der Ort der Sonne und S der Punkt, in dem der Deklinationskreis der Sonne die Ekliptik schneidet. Legt man durch S' den Breitenkreis ΠM, wo M den Durchschnittspunkt des Breitenkreises mit der Ekliptik bedeutet, und bezeichnet man die Breite der Sonne mit β, ihre Deklination mit D' und die Deklination von S mit D, so gibt das rechtwinklige Dreieck $SS'M$, wenn der Winkel bei S gleich $90^\circ - \sigma$ gesetzt wird,

$$D' - D = \frac{\beta}{\cos\sigma}$$

Nun folgt aus dem Dreieck ΠSP, worin der Winkel bei S gleich σ, ferner $PS = 90^\circ - D$, $\Pi P = \varepsilon$ und $\Pi S = 90^\circ$ ist, $\cos\varepsilon = \cos D \cos\sigma$; substituiert man den hieraus sich ergebenden Wert von $\cos\sigma$ in die vorige Gleichung und vertauscht dabei $\cos D$ mit $\cos D'$, so erhält man

$$D = D' - \beta\,\frac{\cos D'}{\cos\varepsilon} \tag{3}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man aus der Deklination der Sonne diejenige des Punktes S berechnen. Die Rektaszension des Punktes S oder der Bogen γN, wo N den Durchschnittspunkt des Deklinationskreises der Sonne mit dem Äquator bedeutet, ist gleich der Rektaszension der Sonne; wird diese wieder mit A bezeichnet, so erhält man aus dem Dreieck γSN

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tang} D}{\sin A} \tag{4}$$

---

*) Die Zeichnung der Figur bleibe dem Leser überlassen.

Hat man also durch Beobachtung den Wert von D' gefunden und hieraus den Wert von D abgeleitet, so kann man mit Anwendung der aus der Ephemeride entnommenen Rektaszension der Sonne die Schiefe der Ekliptik bestimmen. Hierbei ist folgendes zu beachten. Da die Ephemeride die geozentrische Rektaszension der Sonne angibt, so ist auch für D sein geozentrischer Wert anzuwenden. Es möge nun die beobachtete Zenitdistanz der Sonne mit z, die zugehörige Refraktion mit R, die mittlere Polhöhe des Beobachtungsortes mit Φ und seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, ausgedrückt in Teilen des Äquatorealhalbmessers der Erde, mit $[\varrho]$ bezeichnet werden; ferner bedeute π die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne, r den Radiusvektor der Sonne, ausgedrückt in Teilen der halben großen Achse der Erdbahn, und $\varphi - \Phi$ die Differenz zwischen der instantanen (φ) und der mittleren Polhöhe. Wenn dann z und R für südliche Zenitdistanzen negativ gerechnet werden, und man auf die erste der Gleichungen (12^a) des § 68 Rücksicht nimmt, so erhält man für die geozentrische Deklination der Sonne den Ausdruck

$$D' = z + R + \Phi + (\varphi - \Phi) - \frac{[\varrho]\pi}{r}\sin z \tag{5}$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung (3) ergibt sich die gesuchte geozentrische Deklination D des Punktes S. Nun bezieht sich z, also auch der aus (5), bzw. (3) folgende Wert von D', bzw. D, auf den durch die Aberration beeinflußten, oder scheinbaren Ort der Sonne; demnach hat man in der Gleichung (4) auch die scheinbare Rektaszension der Sonne anzuwenden. Der dann aus (4) sich ergebende Wert von ε stellt die wahre Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung dar*). Um die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung, die mit $[\varepsilon]$ bezeichnet werden möge, zu erhalten, hat man an ε die in der Gleichung (93) des § 29 gegebenen Nutationsglieder, mit umgekehrtem Vorzeichen genommen, anzubringen; es wird also, wenn jetzt die seit 1850.0 bis zur Epoche der Beobachtung verflossene und in Jahrhunderten ausgedrückte Zeit mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird,

$$[\varepsilon] = \varepsilon - (9''210 + 0''001\,\mathfrak{T})\cos\Omega - 0''552\cos 2L + \cdots \tag{A}$$

Ist ferner t die Epoche der Beobachtung, und bedeutet ε_0 die für eine fest gewählte Epoche t_0 gültige mittlere Schiefe der Ekliptik, so hat man nach den auf S. 100 gegebenen Formeln

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 = [\varepsilon] &+ \left[46''837 + 0''018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - \cdots\right]\frac{t - t_0}{100} + \\ &+ \left[\,0''009 - 0''003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - \cdots\end{aligned} \tag{B}$$

Es muß jetzt untersucht werden, welchen Einfluß etwaige Fehler der für die Gleichung (4) benutzten Werte von D und A auf ε haben. Aus der durch logarithmische Differentiation der mit (4) identischen Gleichung (1) gefundenen Beziehung (2) ergibt sich

$$d\varepsilon = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}\,dD - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\varepsilon}{\operatorname{tang} A}\,dA \tag{6}$$

*) Die wahre Schiefe der Ekliptik wird häufig als scheinbare bezeichnet.

Da man die aus der Ephemeride entnommene Breite der Sonne als hinlänglich sicher bestimmt ansehen darf, so folgt aus (3), daß man $dD = dD'$ setzen kann. Nun wurde D' mittels der Gleichung (5) erhalten. Die hierin vorkommende Differenz $\varphi - \Phi$ läßt sich mit großer Genauigkeit aus den Beobachtungen der internationalen Breitestationen ableiten und kann als fehlerfrei betrachtet werden; letzteres gilt auch von dem gegenwärtig für π angenommenen Werte. Da die kleine Unsicherheit in $[\varrho]$ und r ebenfalls ohne Einfluß ist, so kann ein Fehler in D nur von einem Fehler in der beobachteten Zenitdistanz, bzw. in den für die Refraktion oder die mittlere Polhöhe benutzten Werten herrühren. Man kann also $dD = dz + dR + d\Phi$ setzen und erhält dann an Stelle der Gleichung (6)

$$d\varepsilon = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}(dz + dR + d\Phi) - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varepsilon}{\operatorname{tang} A}\,dA \tag{7}$$

Der Koeffizient von $dz + dR + d\Phi$ ist seinem absoluten Betrage nach am kleinsten zur Zeit der Solstitien, und zwar ist er zur Zeit des Sommersolstitiums gleich $+1$ und zur Zeit des Wintersolstitiums gleich -1; das Mittel aus zwei einem Winter- und Sommersolstitium entsprechenden und auf dieselbe Epoche bezogenen Werten der mittleren Schiefe der Ekliptik ist demnach frei von einem konstanten Fehler der beobachteten Zenitdistanzen, sowie auch von einem Fehler der angenommenen mittleren Polhöhe. Etwas anders verhält es sich mit dem Einfluß eines Fehlers in der Refraktion. Ist nämlich der für die Refraktionskonstante oder der für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft angenommene Wert fehlerhaft, so hat dR bei hohen Temperaturen einen anderen Wert als bei niederen; nimmt man also das Mittel aus zwei zu den Zeiten des Winter- und Sommersolstitiums erhaltenen Werten von ε_0, so wird der Fehler in der Refraktion nicht vollständig, sondern nur teilweise eliminiert.

Ein Fehler in der angenommenen Rektaszension der Sonne hat an und für sich schon wenig Einfluß auf die in der Nähe der Solstitien bestimmten Werte von ε; verbindet man speziell noch solche Beobachtungen, für welche $\operatorname{tang} A$ entgegengesetzt gleiche Werte hat, so ist das Mittel der aus ihnen abgeleiteten Werte der Schiefe der Ekliptik von einem konstanten Fehler in A ganz befreit.

92. Bestimmung der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne. Hat man im Mittel aus einer großen Zahl von Einzelwerten einen genauen Wert der für eine fest gewählte Epoche gültigen mittleren Schiefe der Ekliptik gefunden, so lassen sich auch die Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne genauer bestimmen. Um die Rektaszension der Sonne zu erhalten, leite man aus der beobachteten Zenitdistanz der Sonne, mittels der Gleichungen (5) und (3), den Wert von D ab und wende dann die Gleichung an

$$\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{8}$$

Hierbei ist für ε sein aus den Gleichungen (A) und (B) des vorigen Paragraphen folgender Wert zu substituieren

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon_0 &- \left[46''837 + 0''018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - \cdots\right]\frac{t - t_0}{100} - \\ &- \left[\,0''009 - 0''003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 + \\ &+ (\,9''210 + 0''001\,\mathfrak{T})\cos\Omega + 0''552\cos 2L - \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

Es sei jetzt gleichzeitig mit der Zenitdistanz der Sonne ihre Durchgangszeit Θ durch den Meridian, und ferner vor- oder nachher die Durchgangszeit ϑ eines Sterns beobachtet worden; wenn dann α' die Rektaszension des Sterns bedeutet, so ergibt sich

$$\alpha' = A + (\vartheta - \Theta) \tag{10}$$

Nun enthält der in (8) benutzte Winkel D die Aberration der Sonne in Deklination, folglich gibt der mit Hilfe der Gleichung (8) berechnete Winkel A die scheinbare Rektaszension der Sonne an; da aber die beobachtete Durchgangszeit Θ ebenfalls die Aberration enthält, so ist $A - \Theta$ von der Aberration befreit. Berücksichtigt man jetzt noch, daß ϑ die scheinbare Durchgangszeit des Sterns angibt, so sieht man, daß der aus (10) folgende Wert von α' die scheinbare Rektaszension des Sterns darstellt. In welcher Weise man aus α' die auf das mittlere Äquinox und die Epoche des Jahresanfangs bezogene Rektaszension erhält, geht aus den in Kapitel XI gemachten Ausführungen hervor.

Bei der Anwendung der Gleichung (10) sind noch einige Punkte zu berücksichtigen. Zunächst ist es notwendig, die Differenz $\vartheta - \Theta$ wegen des Ganges der Uhr zu korrigieren. Zur Bestimmung des Ganges beobachtet man die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Kulminationen eines dem Äquator nahen Sterns vergeht. Bezeichnet man mit Δe die Änderung der scheinbaren Rektaszension des Sterns zwischen den beiden Kulminationen, und ist $24^h - \Delta u$ die beobachtete Differenz der Durchgangszeiten, so ist $\Delta u + \Delta e$ die an diese Differenz anzubringende Korrektion. Nun ist Δe eine kleine Größe, und dasselbe darf von Δu vorausgesetzt werden; demnach kann man $\Delta u + \Delta e$ auch als die Korrektion eines Intervalls auffassen, welches nach der Uhr gemessen 24 Stunden beträgt. Setzt man $\Delta u + \Delta e = G$, so wird G als der tägliche Gang der Uhr bezeichnet. Die an verschiedenen Tagen erhaltenen Werte von G weichen im allgemeinen voneinander ab; bei Anwendung einer guten und gut aufgestellten Uhr lassen sich aber die Uhrgänge durch die folgende Formel darstellen: Es sei T die mittlere Temperatur im Uhrkasten und β der mittlere Barometerstand für das 24stündige Intervall, dem eine beobachtete Korrektion G entspricht, ϑ_m sei die der Mitte dieses Intervalls entsprechende Epoche, ferner sei G_0 der den fest gewählten Werten T_0, β_0 und $\vartheta_m^{(0)}$ entsprechende tägliche Gang; bedeuten dann a, b und c Konstanten, so hat man

$$G = G_0 + a(T - T_0) + b(\beta - \beta_0) + c(\vartheta_m - \vartheta_m^{(0)}) \tag{11}$$

Um die Unbekannten G_0, a, b und c zu bestimmen, nehme man für G_0 einen Näherungswert $\mathfrak{G}_0$ an und bilde die Differenzen $G - \mathfrak{G}_0 = n$ zwischen den an den einzelnen Tagen erhaltenen Werten des täglichen Ganges und $\mathfrak{G}_0$; bedeutet dann $\Delta\mathfrak{G}_0$ die Korrektion von $\mathfrak{G}_0$, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$n = \Delta\mathfrak{G}_0 + a(T - T_0) + b(\beta - \beta_0) + c(\vartheta_m - \vartheta_m^{(0)}) \tag{12}$$

Nachdem man mit Hilfe dieser Gleichungen $\Delta\mathfrak{G}_0$, a, b und c gefunden hat, läßt sich jede beobachtete Durchgangsdifferenz wegen des Ganges der Uhr korrigieren. Ist nämlich $\vartheta' - \vartheta''$ die beobachtete Durchgangsdifferenz, so setze man in der Formel (11) $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')$ und wende für T und β die für das Intervall zwischen den beiden Durchgängen gültigen mittleren Werte der Temperatur im Uhrkasten und des Barometerstandes an; wird dann die wegen des Ganges der Uhr korrigierte Differenz der Durchgangszeiten mit $\vartheta_1 - \vartheta_2$ bezeichnet, so erhält man

$$(13) \qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = \vartheta' - \vartheta'' + \frac{G}{24}(\vartheta' - \vartheta''),$$

wo in dem von G abhängigen Gliede die Differenz $\vartheta' - \vartheta''$ in Stunden und Bruchteilen einer Stunde auszudrücken ist.

Die an verschiedenen Tagen beobachteten Durchgangsdifferenzen zweier Sterne sollten, nachdem man sie wegen des Ganges der Uhr korrigiert und auf ein gemeinsames mittleres Äquinox reduziert hat, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler miteinander übereinstimmen; wie aber die Erfahrung lehrt, können die Differenzen auch noch eine Abhängigkeit von der Tageszeit der Beobachtung zeigen. Um eine gegebene Beobachtungsreihe auf diesen Punkt hin zu untersuchen, nehme man an, daß ein zu der Sternzeit ϑ beobachteter Durchgang die Korrektion $f \sin M + g \cos M$ erfordere, wo M die der Sternzeit ϑ entsprechende mittlere Zeit bedeutet, und f und g Konstanten bezeichnen. Ist dann $\vartheta_1 - \vartheta_2$ die beobachtete und wegen des Uhrganges verbesserte Durchgangsdifferenz zweier Sterne, sind ferner M_1 und M_2 die den Sternzeiten ϑ_1 und ϑ_2 entsprechenden mittleren Zeiten, so ist die Korrektion der Differenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$ gleich

$$f(\sin M_1 - \sin M_2) + g(\cos M_1 - \cos M_2) = 2f \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) \cos \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) - \\ - 2g \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) \sin \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Sterne in der oberen Kulmination beobachtet worden sind, ist für $\frac{1}{2}(M_1 + M_2)$ diejenige mittlere Zeit zu setzen, welche der der halben Summe der Rektaszensionen beider Sterne gleichen Sternzeit entspricht; der Wert von $\frac{1}{2}(M_1 - M_2)$ ergibt sich, indem man die halbe Differenz der Rektaszensionen der zwei Sterne in ein Intervall mittlerer Zeit verwandelt. Man denke sich nun, daß die an verschiedenen Tagen erhaltenen Werte von $\vartheta_1 - \vartheta_2$ bereits auf dasselbe Äquinox reduziert worden seien, und bezeichne den wahren Wert von $\vartheta_1 - \vartheta_2$ mit $[\vartheta_1 - \vartheta_2]$. Setzt man dann

$$(14) \qquad -2f \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) = F, \qquad 2g \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) = K, \qquad \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) = M_m,$$

so erhält man

$$(15) \qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = [\vartheta_1 - \vartheta_2] + F \cos M_m + K \sin M_m$$

oder, wenn $[\vartheta_1 - \vartheta_2]_0$ einen Näherungswert von $[\vartheta_1 - \vartheta_2]$ und x die Korrektion desselben bedeutet, ferner noch $\vartheta_1 - \vartheta_2 - [\vartheta_1 - \vartheta_2]_0 = n$ gesetzt wird,

$$(15^a) \qquad n = x + F \cos M_m + K \sin M_m$$

Mit Hilfe derartiger Bedingungsgleichungen lassen sich die Unbekannten x, F und K bestimmen. Hierauf erhält man aus (14) die Koeffizienten f und g und kann dann für jeden beobachteten Durchgang die Korrektion $f \sin M + g \cos M$ berechnen. Zur Bestimmung von F und K wird man Sterne benutzen, welche nahe gleiche Deklination und Helligkeit haben, und die in Rektaszension etwa 3 bis 4 Stunden voneinander verschieden sind. Mit Rücksicht auf einen gleich zu erwähnenden systematischen Unterschied zwischen Tag- und Nachtbeobachtungen darf man übrigens zur Bildung einer Differenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$ nur solche Beobachtungen verwenden, welche beide entweder bei Tage oder bei Nacht angestellt worden sind.

Es kommt vor, daß die für die Durchgangsdifferenz zweier Sterne erhaltenen Werte eine sprungweise Änderung zeigen, wenn man von der Zeit, wo beide Sterne am Tage oder in der Nacht kulminieren, zu derjenigen übergeht, wo die Kulmination des einen Sterns auf den Tag und die des anderen auf die Nacht fällt. Die genannte Erscheinung weist darauf hin, daß man den Durchgang eines Sterns durch die Fäden bei Tageslicht anders auffaßt, als bei künstlicher Beleuchtung; in einem solchen Falle wird man also entweder an die am Tage oder aber an die in der Nacht beobachteten Durchgänge eine gewisse Korrektion anbringen müssen, wenn die Beobachtungen homogen werden sollen. Um diese Korrektion zu bestimmen, füge man zunächst zu allen zwischen zwei Sternen erhaltenen und auf ein gemeinsames Äquinox reduzierten Differenzen $\vartheta_1 - \vartheta_2$ die aus (15) folgende Korrektion $-F\cos M_m - K\sin M_m$ hinzu. Hierauf vereinige man die Differenzen in drei Gruppen: die erste möge den Zeiten entsprechen, wo beide Sterne bei Tag oder bei Nacht beobachtet wurden, die zweite beziehe sich auf die Fälle, wo der voraufgehende Stern (ϑ_1) bei Tage und der folgende (ϑ_2) in der Nacht kulminierte, die dritte gelte für den umgekehrten Fall. Bezeichnet man mit $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}}$, $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{II}}$, $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{III}}$ die Mittelwerte der den drei Gruppen entsprechenden Differenzen, und bedeutet $\varkappa$ die Reduktion eines bei Tageslicht beobachteten Durchganges auf den in der Dunkelheit erhaltenen, so gelten die Gleichungen

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{II}} + \varkappa$$
$$(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{III}} - \varkappa$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ergibt sich der gesuchte Wert von $\varkappa$.

Man denke sich jetzt, daß man die beobachtete Differenz der Durchgangszeiten eines Sterns und der Sonne wegen des Uhrganges und der von der mittleren Zeit der Beobachtung abhängigen Glieder korrigiert habe. Was die Korrektion $\varkappa$ betrifft, so wird man die Hypothese machen müssen, daß sie für die Sonne dieselbe ist, wie für die Sterne; in der Differenz der Durchgangszeiten zwischen Sonne und Stern fällt also die Korrektion $\varkappa$ fort, wenn man nur solche Fälle berücksichtigt, in denen der Stern bei Tage beobachtet ist. Falls nun die für die Gleichung (8) benutzten Werte von D und ε richtig wären, so hätte man die korrigierte Durchgangsdifferenz zwischen Stern und Sonne nur zu A zu addieren, um der Gleichung (10) zufolge die scheinbare Rektaszension α' des Sterns zu erhalten; aus dieser ließe sich dann die mittlere Rektaszension α_0 für den Jahresanfang berechnen. Erfordern aber die für D und ε angenommenen Werte die Korrektionen dD und $d\varepsilon$, so ist zu α', bzw. zu α_0 die in (2) angegebene Korrektion dA hinzuzufügen; wenn also in der Gleichung (2) wieder wie in § 91 $dD = dz + dR + d\Phi$ gesetzt wird, und α den genauen Wert der mittleren Rektaszension für den Jahresanfang bedeutet, so folgt

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2\,\mathrm{tang}\,A}{\sin 2D}(dz + dR + d\Phi) - \frac{2\,\mathrm{tang}\,A}{\sin 2\varepsilon}\,d\varepsilon \tag{16}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich zeigen, daß man den Einfluß eines konstanten Fehlers in den beobachteten Zenitdistanzen der Sonne, sowie eines Fehlers in Φ oder ε auf die Rektaszension des Sterns vollständig, und den Einfluß eines Fehlers in R nahezu vollständig eliminieren kann, wenn man nur die Beobachtungen in geeigneter Weise kombiniert. Um das Ganze an der Hand eines Beispiels leichter verständlich zu machen, nehme man an, daß man im Frühjahr und Herbst die in dem folgenden Schema angegebenen Sterne durch Durchgangsbeobachtungen an die Sonne (☉) angeschlossen, sowie auch die Deklination der Sonne bestimmt habe.

	Größe	α	δ		Größe	α	δ
α Ophiuchi	2.2	$17^h 31^m$	$+12.^\circ 6$	γ Orionis	1.7	$5^h 20^m$	$+6.^\circ 3$
ν »	3.6	17 54	-9.8	ε »	1.8	5 32	-1.3
☉ Febr. 28		22 43	-8.2	☉ Sept. 2		10 43	$+8.2$
☉ April 11		1 17	$+8.5$	☉ Okt. 15		13 18	-8.3
γ Orionis	1.7	5 20	$+6.3$	α Ophiuchi	2.2	17 31	$+12.6$
ε »	1.8	5 32	-1.3	ν »	3.6	17 54	-9.8

Wie schon früher erwähnt wurde, ist die aus der Deklination berechnete Rektaszension der Sonne um so genauer, je näher sich die Sonne einem der Äquinoktialpunkte befindet; indessen kann man auch noch Beobachtungen benutzen, welche etwa drei Wochen vor oder nach der Zeit des Äquinoktiums angestellt worden sind. Die für diese Endtermine und das Jahr 1910 gültigen Werte der Rektaszension und Deklination der Sonne, sowie auch die auf das Äquinoktium 1910 bezogenen Rektaszensionen und Deklinationen der Sterne findet man in den beiden letzten Kolumnen der vorigen Tabelle aufgeführt. Diese Tabelle zeigt, daß, wenn a und d die Werte von A und D am 28. Februar bedeuten, die für den 15. Oktober gültigen Werte von A und D sehr nahe gleich $180^\circ - a$ und d sind. Wenn man also für jeden der vier Sterne aus den am 28. Februar und 15. Oktober erhaltenen Rektaszensionen das Mittel bildet, so sind diese der Gleichung (16) zufolge frei von einem konstanten Fehler in z, sowie auch frei von den Fehlern der für Φ und ε angenommenen Werte. Damit jedes Mittel auch frei von einem Fehler in der Refraktion sei, muß dR im Frühjahr und Herbst denselben Wert haben; letztere Bedingung ist nun wohl nicht in aller Strenge erfüllt, aber doch so nahe, daß ein merklicher Einfluß des Fehlers in der Refraktion nicht zu befürchten ist. In derselben Weise, wie es für die am 28. Februar und 15. Oktober erhaltenen Rektaszensionen geschehen ist, lassen sich auch die Beobachtungen an zwei anderen Tagen, denen die Werte a, d, bzw. $12^h - a$, d von A und D entsprechen, in Mittelwerte zusammenfassen.

Die hier für die beiden Wertepaare von A und D aufgestellte Bedingung braucht aber nur näherungsweise erfüllt zu sein. Nach dem Vorgange *Bessels* kann man z. B. aus allen für einen Stern erhaltenen Werten von α_0, welche zu Zeiten beobachtet wurden, wo die Deklination der Sonne zwischen 0° und $+2^\circ$ lag, zwei Gruppen bilden, von denen die eine den Frühjahrs- und die andere den Herbstbeobachtungen entspricht; wird für jede dieser beiden Gruppen das Mittel aus den zugehörigen α_0 gebildet, so ist das aus diesen Mittelwerten sich ergebende Gesamtmittel $\mathfrak{A}$ als hinlänglich nahe von den oben genannten Fehlern befreit anzusehen. Ebenso wird man auch diejenigen Werte von α_0 zusammenfassen, welche erhalten wurden, als die Deklination der Sonne zwischen den Grenzen $+2^\circ$ bis $+4^\circ$, $+4^\circ$

bis $+6^\circ$, ..., 0° bis -2°, -2° bis -4°, ..., lag; zum Schluß hat man nur noch das Mittel aus den verschiedenen Werten von $\mathfrak{A}$ zu nehmen, und erhält damit den Endwert der Rektaszension des Sterns. Aus den Rektaszensionen der angeführten vier Hauptsterne in Verbindung mit den beobachteten und unter Benutzung der Gleichungen (13), (14) und (15), sowie eventuell auch der Konstante $\varkappa$ korrigierten Durchgangsdifferenzen zwischen den vier Hauptsternen und den zwischen ihnen eingeschalteten Sternen ergeben sich schließlich auch die Rektaszensionen dieser letzteren.

93. Verbesserung eines Kataloges der Rektaszensionen von Zeitsternen. Selbst wenn es mit Hilfe einer guten Beobachtungsreihe gelungen wäre, einen fehlerfreien Katalog von Rektaszensionen abzuleiten, so würde unsere mangelhafte Kenntnis der Präzessionskonstante und der Eigenbewegungen der Sterne doch bewirken, daß die auf eine spätere Epoche übertragenen Rektaszensionen des Kataloges mehr oder weniger von der Wahrheit abweichen; es müssen also von Zeit zu Zeit die Korrektionen der für die Sterne angenommenen Rektaszensionen ermittelt werden. Zu diesem Zwecke beobachtet man an jedem klaren Abende die Kulminationszeiten einer möglichst großen Zahl der zu untersuchenden Sterne. Um genaue Resultate zu erhalten ist es notwendig, daß die zu den Durchgangsbeobachtungen verwandte Uhr gegen die Schwankungen des Luftdruckes und der Temperatur geschützt ist; der für die Ableitung der Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen nötige Gang der Uhr ist dann nur eine Funktion der Zeit und läßt sich mit großer Sicherheit aus den an verschiedenen Tagen beobachteten Durchgängen eines und desselben Sterns ableiten. Man hat aber noch einen anderen Punkt zu berücksichtigen. Für die große Mehrzahl der Beobachter ist nämlich die Zeit, zu der ein Stern einen Faden zu passieren scheint, um ein Geringes von der wahren Durchgangszeit verschieden, und zwar wird diese Differenz um so größer, je schwächer der Stern ist; die beobachtete Durchgangszeit ist also dementsprechend zu korrigieren. Bedeutet nun t die beobachtete Durchgangszeit eines Sterns von der Größe m und ϑ die Zeit, welche man beobachtet haben würde, wenn der Stern eine fest gewählte Größe, etwa die Größe 4.0, gehabt hätte, so kann man auf Grund der bisher gemachten Erfahrungen

$$\vartheta = \mathrm{t} + a(m-4) + b(m-4)^2 \tag{17}$$

annehmen, wo a und b zwei Konstanten bedeuten. Zur Bestimmung von a und b beobachtet man die Zeiten, wann ein Stern bei unbedecktem Objektiv die eine Hälfte der Fäden passiert, bedeckt dann das Objektiv durch ein Gitter und beobachtet hierauf die Durchgangszeiten des abgeblendeten Sterns durch die zweite Hälfte der Fäden. Sind t und t' die aus den Beobachtungen bei vollem, bzw. abgeblendetem Objektiv abgeleiteten Durchgangszeiten durch den Mittelfaden, und ist m die natürliche und m' die abgeblendete Größe des Sterns, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (17)

$$0 = \mathrm{t}' - \mathrm{t} + a(m'-m) + b[(m'-4)^2 - (m-4)^2] \tag{17^a}$$

Die durch das Gitter bewirkte Abblendung $m'-m$ läßt sich durch photometrische Messung bestimmen, dasselbe gilt von der Größe m des Sterns; die Koeffizienten von a und b in der letzten Gleichung sind also als bekannte Größen anzusehen, und somit kann man diese Gleichung dazu benutzen, um a und b selbst zu finden. An Stelle eines Gitters wendet man besser zwei bis drei verschiedener Dichte an und beobachtet mit jedem eine Anzahl von Sternen verschiedener Helligkeit.

Es sei nun α die angenommene mittlere Rektaszension eines Sterns und α' die hieraus abgeleitete scheinbare Rektaszension, x_α sei die zu bestimmende Korrektion von α, und ϑ die mittels der Gleichung (17) wegen der Helligkeitsgleichung korrigierte Durchgangszeit eines Sterns. Setzt man voraus, daß an ϑ erforderlichenfalls auch schon die im vorigen Paragraphen besprochenen, von der mittleren Zeit der Beobachtung und von dem Unterschiede zwischen Tag- und Nachtbeobachtung abhängigen Korrektionen angebracht seien, so ist $\alpha' + x_\alpha - \vartheta$ die Uhrkorrektion zur Zeit ϑ. Mit Benutzung des oben mit G bezeichneten täglichen Ganges der Uhr wird also die Uhrkorrektion zur Zeit ϑ_0 gleich $\alpha' + x_\alpha - \vartheta + \frac{G}{24}(\vartheta_0 - \vartheta)$. Man bilde jetzt für alle an einem Abend beobachteten Sterne die Differenzen $\alpha' - \vartheta = \varDelta\vartheta$ und reduziere diese durch Anbringung der Korrektion $\frac{G}{24}(\vartheta_0 - \vartheta)$ auf die Zeit ϑ_0. Die so erhaltenen genäherten Werte der Uhrkorrektion zur Zeit ϑ_0 benutzt man, um zunächst die relativen Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen zu bestimmen; das hierzu dienende Verfahren wird am besten durch ein Beispiel verständlich gemacht. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß nur vier um je sechs Stunden voneinander entfernte Sterne vorliegen; von diesen seien an einem Tage alle, an einem zweiten Tage drei und an einem dritten Tage nur zwei beobachtet worden. Die folgende kleine Tabelle gibt in der ersten Kolumne die auf eine Zehntelstunde abgerundeten Durchgangszeiten der Sterne, darauf folgen die am ersten Tage erhaltenen Werte von $\varDelta\vartheta$ und zur Seite die mittels des täglichen Ganges ($+0^s.24$ für den ersten Tag) auf das Mittel der beobachteten Zeiten (9^h) reduzierten $\varDelta\vartheta$. Für den zweiten und dritten Tag findet man ebenfalls zuerst die beobachteten, und sodann die unter Benutzung des täglichen Ganges ($+0^s.12$, bzw. $-0^s.08$) auf das jeweilige Mittel aus den Beobachtungszeiten (12^h, bzw. 15^h) bezogenen genäherten Uhrkorrektionen.

	I		II		III	
	täglicher Gang $+0^s.24$		täglicher Gang $+0^s.12$		täglicher Gang $-0^s.08$	
ϑ	$\varDelta\vartheta$	9^h	$\varDelta\vartheta$	12^h	$\varDelta\vartheta$	15^h
$0^h.0$	$-10^s.58$	$-10^s.49$				
6.0	-10.40	-10.37	$-5^s.04$	$-5^s.01$		
12.0	-10.42	-10.45	-5.17	-5.17	$-4^s.07$	$-4^s.08$
18.0	-10.28	-10.37	-5.08	-5.11	-4.02	-4.01

Bezeichnet man die Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen der vier Sterne mit x_0, x_6, x_{12}, x_{18}, und ist k die wahre Uhrkorrektion für 9^h Sternzeit des ersten Tages, so hat man

$$
\begin{aligned}
k &= -10^s.49 + x_0 \\
k &= -10.37 + x_6 \\
k &= -10.45 + x_{12} \\
k &= -10.37 + x_{18}
\end{aligned}
$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung von den folgenden ergibt sich

$$x_6 - x_0 = -0^s.12$$
$$x_{12} - x_0 = -0.04$$
$$x_{18} - x_0 = -0.12$$

In derselben Weise erhält man aus den am zweiten und dritten Tage für 12^h, bzw. 15^h gefundenen Uhrkorrektionen, wenn $x_{12} - x_6 = x_{12} - x_0 - (x_6 - x_0)$, ... gesetzt wird,

$$x_{12} - x_0 - (x_6 - x_0) = +0^s.16$$
$$x_{18} - x_0 - (x_6 - x_0) = +0.10$$
$$x_{18} - x_0 - (x_{12} - x_0) = -0.07$$

Behandelt man die sechs letzten Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergeben sich zunächst die Normalgleichungen

$$3(x_6 - x_0) - (x_{12} - x_0) - (x_{18} - x_0) = -0^s.38$$
$$-(x_6 - x_0) + 3(x_{12} - x_0) - (x_{18} - x_0) = +0.19$$
$$-(x_6 - x_0) - (x_{12} - x_0) + 3(x_{18} - x_0) = -0.09$$

Hieraus folgen die relativen Korrektionen

$$x_6 - x_0 = -0^s.165, \qquad x_{12} - x_0 = -0^s.022, \qquad x_{18} - x_0 = -0^s.092$$

Man setze jetzt $x_0 = 0$, also $x_6 = -0^s.165$, $x_{12} = -0^s.022$, $x_{18} = -0.092$ und bringe diese Korrektionen an die angenommenen Werte der mittleren Rektaszensionen der Sterne an; ist dann der wahre Wert von x_0 gleich E, so erfordern alle in der eben angegebenen Weise korrigierten Rektaszensionen die Korrektion E. In welcher Weise man den Wert von E, welcher die Korrektion des Äquinoktiums genannt wird, bestimmen kann, soll gleich gezeigt werden; zuvor aber möge noch eine Bemerkung über das zur Ableitung der relativen Korrektionen der Rektaszensionen benutzte Verfahren Platz finden. Wie man ohne weiteres sieht, ist dieses auf eine beliebige Zahl von Sternen anwendbar. Sollen aber die gesuchten Korrektionen genau werden, so muß jede Differenz zweier Rektaszensionskorrektionen häufiger bestimmt worden sein; man bildet in diesem Falle die Mittel aus den für die verschiedenen Differenzen erhaltenen Einzelwerten und legt den Mitteln die ihnen zugehörigen Gewichte bei. Nachdem sodann jede einem Mittel entsprechende Bedingungsgleichung mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes multipliziert worden ist, leitet man mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten relativen Rektaszensionskorrektionen ab.

Um die Korrektion des Äquinoktiums zu finden, beobachtet man außer den Durchgangszeiten der zu untersuchenden Sterne auch noch die Durchgangszeit der Sonne und ihre Zenitdistanz im Meridian. Die Durchgangsbeobachtungen in Verbindung mit den wegen der relativen Rektaszensionskorrektionen verbesserten scheinbaren Rektaszensionen der Sterne dienen dazu, die Rektaszension der Sonne abzuleiten. Beispielsweise hatte man in Pulkowa am 7. und 8. September 1881 die in der zweiten Kolumne der folgenden Tafel angeführten Kulminationszeiten beobachtet. Dieselben sind bereits wegen der Instrumentalfehler korrigiert; man nehme aber an, daß auch die im vorigen Paragraphen erwähnte, von der mittleren Zeit der Beobachtung abhängende Korrektion berücksichtigt sei und ebenso die den einzelnen Sternen entsprechende Korrektion wegen Helligkeitsgleichung. Zur Seite der Kulminationszeiten der Sterne sind die scheinbaren Rektaszensionen angegeben; dabei denke man sich, daß die relativen Rektaszensionskorrektionen schon berücksichtigt seien. Subtrahiert man nun die in der zweiten und dritten Kolumne stehenden Angaben voneinander, so erhält man die mit $\Delta\vartheta$ bezeichneten Werte.

	Uhrzeit	α'	$\Delta\vartheta$
α Gemin. pr.	$7^h 27^m 41^s.36$	$7^h 27^m 2^s.99$	$-38^s.37$
» » sq.	7 27 41.72	7 27 3.38	.34
α Canis min.	7 33 45.03	7 33 6.80	.23
β Gemin.	7 38 43.15	7 38 4.83	.32
α Hydrae	9 22 24.62	9 21 46.27	.35
α Leonis	10 2 42.34	10 2 4.04	.30
Sonne	11 8 33.85		
β Leonis	11 43 39.54	11 43 1.20	.34
α Virginis	13 19 36.04	13 18 57.70	.34
α Bootis	14 10 54.34	14 10 15.93	.41
α Coronae	15 30 19.35	15 29 41.01	.34
α Serpentis	15 39 5.33	15 38 27.01	.32

Unter der Annahme, daß die in Pulkowa benutzte Uhr unter konstantem Druck und unter konstanter Temperatur gehalten worden sei, kann man ihren Gang als der Zeit proportional betrachten. Nimmt man also das Mittel aus den den 11 Sternen entsprechenden Werten von $\Delta\vartheta$, so würde dieses die für das Mittel aus den Durchgangszeiten der Sterne gültige Uhrkorrektion sein, wenn die angenommenen Rektaszensionen keine konstante Korrektion erforderten. Das Mittel aus den 11 Werten von $\Delta\vartheta$ ist gleich $-38^s.333$, und das Mittel aus den zugehörigen Uhrzeiten gleich $10^h.9$; da sich aus den Beobachtungen zweier aufeinander folgender Kulminationen eines und desselben Sterns für den stündlichen Gang der Uhr der Wert $-0^s.008$ ergeben hatte, so wird der auf die Durchgangszeit der Sonne reduzierte Wert von $\Delta\vartheta$ gleich $-38^s.335$. Die mit Vernachlässigung der Korrektion des Äquinoktiums sich ergebende scheinbare Rektaszension der Sonne ist demnach gleich $11^h 7^m 55^s.515$.

Man denke sich jetzt, daß man in der eben auseinandergesetzten Weise aus den im Laufe eines Jahres erhaltenen Durchgangsbeobachtungen der Sonne und der Zeitsterne die ohne Rücksicht auf eine etwaige Korrektion des Äquinoktiums resultierende scheinbare Rektaszension der Sonne abgeleitet habe, desgleichen sei mit Hilfe der Gleichung (5) aus den Zenitdistanzen der Sonne ihre scheinbare Deklination erhalten worden. Bildet man sodann die Differenzen zwischen diesen und den aus der Ephemeride entnommenen Werten der Rektaszension und Deklination der Sonne, so läßt sich die Korrektion des Äquinoktiums in der folgenden Weise bestimmen. Es seien $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ die in der Ephemeride gegebenen Werte der Rektaszension und Deklination der Sonne; diese sind, unter Benutzung der den Sonnentafeln entnommenen

Werte der Länge (λ) und Breite (β) der Sonne, mit Hilfe der aus den Gleichungen (15^a) des § 19 (für $\sin\beta = \beta \sin 1''$, $\cos\beta = 1$) folgenden Formeln berechnet worden

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
\sin \mathfrak{D}' &= \sin\lambda \sin\varepsilon + \beta \sin 1'' \cos\varepsilon \\
\cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{A}' &= \sin\lambda \cos\varepsilon - \beta \sin 1'' \sin\varepsilon \\
\cos \mathfrak{D}' \cos \mathfrak{A}' &= \cos\lambda
\end{aligned}
$$

Die Sonnenbreite kann als richtig betrachtet werden. Um zu finden, welchen Einfluß eine Korrektion der aus den Tafeln folgenden Sonnenlänge, bzw. eine Korrektion des für die Schiefe der Ekliptik angenommenen Wertes auf die Werte von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ hat, wende man die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie

$$
\begin{aligned}
da &= \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin b \sin C\, dA \\
\sin a\, dB &= \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA
\end{aligned}
$$

auf das durch den Pol der Ekliptik, den Pol des Äquators und den Ort der Sonne (S') gebildete Dreieck an. Berücksichtigt man dabei, daß, wenn der Winkel bei S' mit S' bezeichnet wird,

$$\cos\varepsilon = \beta \sin 1'' \sin \mathfrak{D}' + \cos \mathfrak{D}' \cos S'$$

also

$$\cos S' = \cos\varepsilon \sec \mathfrak{D}' - \beta \sin 1'' \operatorname{tang} \mathfrak{D}'$$

ist, so ergibt sich mit Vernachlässigung des verschwindend kleinen Produkts $\beta \sin 1'' d\lambda$

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
d\mathfrak{D}' &= \sin\varepsilon \cos \mathfrak{A}'\, d\lambda + \sin \mathfrak{A}'\, d\varepsilon \\
d\mathfrak{A}' &= \cos\varepsilon \sec^2 \mathfrak{D}'\, d\lambda - \operatorname{tang} \mathfrak{D}' \cos \mathfrak{A}'\, d\varepsilon
\end{aligned}
$$

Bedeutet nun D' wieder die mit Hilfe der Gleichung (5) aus der beobachteten Zenitdistanz abgeleitete scheinbare Deklination der Sonne, und sind $d\Phi$ und dR die Korrektionen der für die Gleichung (5) benutzten Werte der mittleren Polhöhe, bzw. der Refraktion, bezeichnet man ferner mit dz eine an die beobachteten Zenitdistanzen der Sonne anzubringende konstante Korrektion, so folgt aus den in § 91 gemachten Bemerkungen, daß der wahre Wert der scheinbaren Deklination der Sonne gleich $D' + dz + d\Phi + dR$ ist. Nach dem vorhin Gesagten ist aber die scheinbare Deklination der Sonne auch gleich $\mathfrak{D}' + d\mathfrak{D}'$. Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich und substituiert für $d\mathfrak{D}'$ seinen in (19) gegebenen Wert, so folgt

$$
(20) \qquad D' - \mathfrak{D}' = \sin\varepsilon \cos \mathfrak{A}'\, d\lambda + \sin \mathfrak{A}'\, d\varepsilon - dR - (dz + d\Phi)
$$

Bei der Genauigkeit, mit welcher die Bewegung der Erde gegenwärtig bekannt ist, darf man $d\lambda$ während eines ganzen Jahres und auch länger als konstant betrachten; dasselbe gilt von $d\varepsilon$. Die Korrektion dR dagegen ist im Laufe eines Jahres veränderlich. Da für die Berechnung der Refraktion gewisse theoretische Annahmen zu machen, beziehungsweise gewisse empirisch bestimmte Konstanten zu benutzen sind, so hängt der für dR zu substituierende Ausdruck davon ab, welche dieser Annahmen oder Konstanten als verbesserungsfähig betrachtet wird. Ist man beispielsweise der Ansicht, daß der zugrunde gelegte Wert der Refraktionskonstante nicht hinlänglich sicher bestimmt sei, so wird man, wenn $\varkappa_0$ den angenommenen und

$\varkappa_0(1+n)$ den wahren Wert der Refraktionskonstante bedeutet, $dR = Rn$ setzen, wo nun n eine zu ermittelnde Konstante bezeichnet. Damit ergibt sich

(21) $$D' - \mathfrak{D}' = \sin\varepsilon \cos\mathfrak{A}' d\lambda + \sin\mathfrak{A}' d\varepsilon - Rn - (dz + d\Phi)$$

Aus einer genügend großen Anzahl solcher möglichst gleichmäßig über ein Jahr verteilter Gleichungen lassen sich die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $d\lambda$, $d\varepsilon$, n und $dz + d\Phi$ ableiten. Zur Vereinfachung der Rechnung werden aber die Gleichungen (21) zunächst in Monatsmittel zusammengefaßt. Bei der Gewichtsbestimmung dieser Mittel ist zu berücksichtigen, daß die Beobachtungen mit systematischen, von Monat zu Monat veränderlichen Fehlern behaftet sein können; für solche Monate, welche ausnahmsweise viele Beobachtungen geliefert haben, wird man demnach die Gewichte der Gleichungen etwas kleiner annehmen, als es mit Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungen geschehen müßte.

Hat man nun die wahrscheinlichsten Werte von $d\lambda$ und $d\varepsilon$ gefunden und substituiert dieselben in die zweite der Gleichungen (19), so läßt sich für jedes Wertepaar von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ die Korrektion $d\mathfrak{A}'$ berechnen. Das Jahresmittel aus den zwölf, jedesmal für die Mitte eines Monats gültigen Werten von $d\mathfrak{A}'$ werde mit $d\mathfrak{A}'_\odot$ bezeichnet; $d\mathfrak{A}'_\odot$ stellt also die für das betreffende Jahr gültige mittlere Korrektion der mit Hilfe der Tafeln berechneten Rektaszension der Sonne dar. Da der mittlere Jahreswert von $\cos\varepsilon \sec^2\mathfrak{D}'$ nahe gleich 1 und derjenige von $\tang\mathfrak{D}' \cos\mathfrak{A}'$ nahe gleich 0 ist, so folgt aus der zweiten Gleichung (19), daß sich $d\mathfrak{A}'_\odot$ nur wenig von $d\lambda$ unterscheidet.

Es bedeute jetzt $\alpha_\odot$ die aus den Durchgangsbeobachtungen der Sonne und der Sterne abgeleitete scheinbare Rektaszension der Sonne; nimmt man dann das Mittel aus allen im Laufe eines Monats erhaltenen Differenzen $\alpha_\odot - \mathfrak{A}'$ und vereinigt diese Monatsmittel in ein Jahresmittel $(\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m$, so ist die Summe aus $(\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m$ und der oben mit E bezeichneten Korrektion des Äquinoktiums ebenfalls gleich $d\mathfrak{A}'_\odot$. Aus der Gleichung $d\mathfrak{A}'_\odot = (\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m + E$ folgt nun

(22) $$E = d\mathfrak{A}'_\odot - (\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m$$

Kapitel XIVᵃ.

Bildung eines Fundamentalkatalogs.

93ᵃ. Vergleichung zweier Sternkataloge. Man denke sich zwei Sternkataloge gegeben, deren Epochen nur um wenige Jahre voneinander abweichen; die Positionen der diesen Katalogen gemeinsamen Sterne seien auf dasselbe Äquinox und auf dieselbe Epoche reduziert worden. Bildet man dann die Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ zwischen den reduzierten Positionen und ordnet diese nach der Deklination der Sterne, so findet man fast ohne Ausnahme, daß die Differenzen eine Abhängigkeit von der Deklination zeigen. Um diese Abhängigkeit deutlicher hervortreten zu lassen, teilt man die Sterne in Zonen von etwa 5° oder 10° Breite ein und bildet für jede Zone die Mittel aus den $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\delta$ sowie auch das genäherte Mittel aus den Deklinationen der verglichenen Sterne; die Mittelwerte der Differenzen mögen mit $\varDelta\alpha_\delta$, bzw. $\varDelta\delta_\delta$ bezeichnet werden. Trägt man dann auf Millimeterpapier die mittleren Deklinationen der Zonen als Abszissen und die Differenzenmittel als Ordinaten auf, so läßt sich für die $\varDelta\alpha_\delta$ und $\varDelta\delta_\delta$ je eine ausgleichende Kurve so zeichnen, daß die Abweichungen der aus den Kurven folgenden $\varDelta\alpha_\delta$ und $\varDelta\delta_\delta$ von den durch die Vergleichung der Kataloge erhaltenen auf Rechnung der zufälligen Beobachtungsfehler gesetzt werden können. Bei der Zeichnung der Kurven ist einige Willkür nicht zu vermeiden; im allgemeinen wählt man möglichst einfach verlaufende Kurven, d. h. Kurven mit möglichst wenig Wellen. Für die Sterne in hohen Deklinationen empfiehlt es sich, nicht die Differenzen $\varDelta\alpha$, sondern die Werte von $\varDelta\alpha\cos\delta$ durch eine Kurve auszugleichen.

Als Beispiel möge eine Vergleichung des Cap Katalogs 1860 mit dem Williamstown Kataloge (Melbourne, Observations, Astr. Res., Vol I) folgen*). Die den beiden Katalogen gemeinsamen Sterne liegen in Wirklichkeit zwischen den Grenzen $\delta = +40^\circ$ und $\delta = -90^\circ$; indessen sollen hier nur die Resultate mitgeteilt werden, welche die Vergleichung der Positionen der zwischen $\delta = -5^\circ$ und $\delta = -80^\circ$ gelegenen Sterne ergeben hat. Die erste Kolumne der nachstehenden Tabelle gibt die mittlere Deklination jeder Zone an, die zweite Kolumne enthält die Mittel der Differenzen Cap—Williamstown und die vierte die Anzahl der verglichenen Sterne.

δ	$\varDelta\alpha_\delta$	Kurve	Sterne	δ	$\varDelta\delta_\delta$	Kurve	Sterne
$-8^\circ\!.0$	$+0^s\!.028$	$+0^s\!.03$	15	$-8^\circ\!.1$	$-0''\!.11$	$-0''\!.2$	14
-13.2	$+0.024$	$+0.03$	7	-13.3	-0.19	-0.1	7
-17.0	$+0.018$	$+0.03$	20	-17.2	-0.03	0.0	16
-22.5	$+0.025$	$+0.02$	12	-22.4	$+0.08$	$+0.1$	11
-27.5	$+0.010$	0.00	20	-27.8	-0.07	$+0.1$	14
-32.2	-0.018	-0.01	13	-32.3	$+0.06$	$+0.1$	12
-36.8	-0.010	-0.03	20	-36.8	$+0.25$	$+0.1$	15
-42.2	-0.061	-0.04	11	-42.2	-0.52	-0.1	9
-47.0	-0.023	-0.06	4	-47.0	-0.30	-0.3	3
-58.8	-0.099	-0.06	10	-58.5	-0.51	-0.7	5
-62.5	-0.054	-0.05	9	-61.3	-0.90	-0.7	2
-67.8	-0.010	-0.01	18	-67.9	-0.74	-0.9	5
-72.0	$+0.108$	$+0.06$	6	-74.4	-0.93	-1.0	3
-77.7	$+0.058$	$+0.06$	8	-78.8	-1.35	-1.1	6

*) *L. de Ball*, Untersuchungen über die eigene Bewegung des Sonnensystems. Bonn 1877. Inauguraldissertation.

Mit Hilfe der unter δ, $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ gegebenen Werte wurden zwei Kurven konstruiert, welche die in der folgenden Tabelle mitgeteilten ausgeglichenen Differenzen: Cap—Williamstown lieferten.

δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$	δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$	δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$
-10°	$+0^s.03$	$-0''.1$	-34°	$-0^s.02$	$+0''.1$	-58°	$-0^s.06$	$-0''.7$
-14	$+0.03$	0.0	-38	-0.03	0.0	-62	-0.05	-0.8
-18	$+0.03$	0.0	-42	-0.04	-0.1	-66	-0.03	-0.9
-22	$+0.02$	$+0.1$	-46	-0.05	-0.3	-68	-0.01	-0.9
-26	$+0.01$	$+0.1$	-50	-0.06	-0.4	-70	$+0.03$	-1.0
-30	0.00	$+0.1$	-54	-0.06	-0.5	-72	$+0.06$	-1.0

Nachdem man für zwei miteinander zu vergleichende Sternkataloge eine Tabelle wie die vorstehende gewonnen hat, subtrahiere man von den oben mit $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ bezeichneten Einzeldifferenzen die ihnen entsprechenden, aus der Tabelle folgenden Differenzen $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ und ordne die verbleibenden Reste nach der Rektaszension der Sterne; es zeigt sich dann gewöhnlich, daß eine Beziehung zwischen den Resten und der Rektaszension besteht. Diese läßt sich entweder mit Hilfe von Kurven oder durch Gleichungen ausdrücken, und zwar haben die von *Boss* ausgeführten Katalogvergleichungen gelehrt, daß man im allgemeinen eine befriedigende Darstellung der Reste erhält, wenn man

(1) $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta = (a + b \operatorname{tang}\delta)\sin\alpha + (c + d \operatorname{tang}\delta)\cos\alpha + a_2 \sin 2\alpha + c_2 \cos 2\alpha$

(2) $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta = a' \sin\alpha + c' \cos\alpha + a'_2 \sin 2\alpha + c'_2 \cos 2\alpha$

setzt. In diesen Gleichungen bedeutet α die Rektaszension und δ die Deklination des Sterns, auf den sich die Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ beziehen; a, b, c, d, a_2, ... sind zu bestimmende Konstanten.

Es könnte auffallend erscheinen, daß in der Gleichung (1) noch die von der Deklination abhängigen Glieder $b \operatorname{tang}\delta \sin\alpha$ und $d \operatorname{tang}\delta \cos\alpha$ auftreten, nachdem doch die Abhängigkeit der Differenzen $\Delta\alpha$ von δ bereits untersucht und in Rechnung gezogen wurde. Die Erklärung liegt in folgendem. Um die $\Delta\alpha_\delta$ zu bestimmen, bildet man, wie schon bemerkt, für alle einer Zone angehörigen Sterne die Mittelwerte aus den durch die Vergleichung der Kataloge gefundenen $\Delta\alpha$; unter der Voraussetzung aber, daß die in einer Zone enthaltenen Sterne sich in Rektaszension gleichmäßig über den ganzen Kreis verteilen, wird $\Sigma \sin\alpha = \Sigma \cos\alpha = 0$, und somit verschwinden in den $\Delta\alpha_\delta$ die von b und d abhängigen Glieder.

Man greife nun aus den Resten $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ diejenigen heraus, welche sich auf die etwa zwischen $\delta = -15^\circ$ und $\delta = +15^\circ$ gelegenen Sterne beziehen, und vereinige alle derselben Rektaszensionsstunde angehörigen Reste in je einen Mittelwert; diese Mittelwerte mögen mit $\Delta\alpha_\alpha$ bezeichnet werden. Da b und d erfahrungsgemäß höchstens einige Hundertstel einer Zeitsekunde betragen, da ferner $\operatorname{tang}\delta$ innerhalb der angegebenen Grenzen von δ stets klein und bald positiv, bald negativ ist, so heben sich bei der Bildung der $\Delta\alpha_\alpha$ die von b und d abhängigen Glieder gegenseitig auf; es wird also, wenn α_m die einem $\Delta\alpha_\alpha$ zugehörige mittlere Rektaszension bedeutet,

$$\Delta\alpha_\alpha = a \sin\alpha_m + c \cos\alpha_m + a_2 \sin 2\alpha_m + c_2 \cos 2\alpha_m$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich aus den 24 Mittelwerten $\varDelta\alpha_\alpha$ und den ihnen entsprechenden Werten von α_m die Konstanten a, c, a_2, c_2 bestimmen. Hierauf berechnet man eine Tafel, welche mit dem Argument α den Wert von

$$(3) \qquad \varDelta\alpha_\alpha = a \sin\alpha + c \cos\alpha + a_2 \sin 2\alpha + c_2 \cos 2\alpha$$

gibt.

Subtrahiert man den Ausdruck (3) von dem unter (1) für $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta$ gegebenen Ausdruck, so erhält man

$$(4) \qquad \varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha = (b \sin\alpha + d \cos\alpha) \operatorname{tang}\delta$$

Um b und d zu bestimmen, bilde man für alle Sterne, welche nicht zur Bestimmung von $\varDelta\alpha_\alpha$ benutzt worden sind (also, unter der vorhin gemachten Annahme, für die außerhalb der Grenzen $\delta = -15^\circ$ und $\delta = +15^\circ$ gelegenen), die Differenzen $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha$ und vereinige diese nach der Rektaszension in Gruppen, so daß beispielsweise die erste Gruppe alle Differenzen enthält, welche sich auf die zwischen $\alpha = 0^h$ und $\alpha = 2^h$ liegenden Sterne beziehen; die zweite Gruppe enthalte alle Differenzen, welche sich auf die zwischen $\alpha = 2^h$ und $\alpha = 4^h$ liegenden Sterne beziehen, usw. Hierauf teile man die einer Gruppe angehörigen $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha$ in Zonen ein und bilde für jede Zone das Mittel aus den Differenzen $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha$, sowie auch die diesem Mittelwert entsprechende mittlere Deklination δ_m. Multipliziert man dann jeden Mittelwert mit dem zugehörigen $\cos\delta_m$ und setzt, indem die Anzahl der Mittelwerte einer Gruppe mit n bezeichnet wird,

$$\frac{1}{n}\Sigma(\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha)\cos\delta_m = M,$$

so hat man der Gleichung (4) zufolge, wenn α_m die mittlere Rektaszension der Gruppe bedeutet,

$$M = b \sin\alpha_m \frac{\Sigma \sin\delta_m}{n} + d \cos\alpha_m \frac{\Sigma \sin\delta_m}{n}$$

Jede Gruppe liefert eine solche Gleichung; aus der Gesamtheit derselben ergeben sich die gesuchten Werte von b und d. Nachdem man diese gefunden hat, konstruiert man noch eine Tafel, welche mit den Argumenten α und δ den Wert von

$$(5) \qquad \varDelta'\alpha = (b \sin\alpha + d \cos\alpha) \operatorname{tang}\delta$$

gibt.

Im vorhergehenden ist die Abhängigkeit der Differenzen $\varDelta\alpha$ von der Rektaszension und Deklination untersucht worden; es bleibt jetzt noch übrig, auch die Abhängigkeit der $\varDelta\alpha$ von der Größe der Sterne zu untersuchen. Zu diesem Zweck subtrahiere man zunächst von den den einzelnen Sternen entsprechenden Differenzen $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha$ die aus (5) folgenden $\varDelta'\alpha$; die verbleibenden Reste $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta - \varDelta\alpha_\alpha - \varDelta'\alpha$ teile man dann in Zonen ein und bilde für jede Zone die den einzelnen Größenklassen entsprechenden Mittelwerte der Reste. Werden diese Mittelwerte mit $\varDelta\alpha_m$ bezeichnet, und bedeutet m die einem $\varDelta\alpha_m$ zugehörige mittlere Größe, so lassen sich, wie die Erfahrung gelehrt hat, für jede Zone zwei Konstanten i_1 und i_2 so bestimmen, daß die der Zone entsprechenden $\varDelta\alpha_m$ der Gleichung genügen

$$(6) \qquad \varDelta\alpha_m = i_1 m + i_2 m^2$$

Hat man die für die verschiedenen Zonen gültigen Werte von i_1 und i_2 gefunden, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung (6) für jede Zone der einem gegebenen m zugehörige Wert von $\varDelta\alpha_m$ berechnen.

Wenn die zu vergleichenden Kataloge keine dem Äquator benachbarten Sterne gemeinsam haben, so läßt sich das oben erläuterte Verfahren, die Abhängigkeit der Reste $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta$ von der Rektaszension zu ermitteln, nicht anwenden. Man wird in einem solchen Falle die nach der Deklination geordneten Reste $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta$ in Zonen teilen und die einer Zone angehörigen $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta$ nach der Rektaszension ordnen. Bildet man dann für jede Zone die 24 Stundenmittel aus den $\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta$ und setzt, wenn $[\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta]_m$ das der Rektaszension α_m zugeordnete Stundenmittel bedeutet,

$$[\varDelta\alpha - \varDelta\alpha_\delta]_m = A \sin\alpha_m + B\cos\alpha_m + a_2 \sin 2\alpha_m + c_2 \cos 2\alpha_m ,$$

so lassen sich mit Hilfe dieser Gleichungen die Werte von A, B, a_2 und c_2 bestimmen. Wie man aus der Vergleichung der letzten Gleichung mit der Gleichung (1) sieht, ist, wenn δ_m die mittlere Deklination einer Zone bedeutet,

$$A = a + b \operatorname{tang}\delta_m , \qquad B = c + d \operatorname{tang}\delta_m$$

Hat man also für jede Zone die Werte von A und B bestimmt, und sind die für die einzelnen Zonen gültigen mittleren Deklinationen δ_m hinreichend voneinander verschieden, so kann man auch die Koeffizienten a, b, c und d bestimmen. Falls aber die für die einzelnen Zonen erhaltenen Werte von A und B innerhalb der Grenzen ihrer wahrscheinlichen Fehler miteinander übereinstimmen und demnach b und d verschwindend klein sind, wird man für alle Zonen die mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Mittelwerte von A und B benutzen; eine entsprechende Bemerkung gilt für die Koeffizienten a_2 und c_2.

Um die Abhängigkeit der Reste $\varDelta\delta - \varDelta\delta_\delta$ von der Rektaszension zu untersuchen, bilde man für alle derselben Rektaszensionsstunde angehörigen Sterne das Mittel aus den $\varDelta\delta - \varDelta\delta_\delta$; bezeichnet man diesen Mittelwert mit $\varDelta\delta_\alpha$ und die einem $\varDelta\delta_\alpha$ entsprechende mittlere Rektaszension mit α_m, so ist der Gleichung (2) zufolge

$$\varDelta\delta_\alpha = a' \sin\alpha_m + c' \cos\alpha_m + a'_2 \sin 2\alpha_m + c'_2 \cos 2\alpha_m$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus den 24 Stundenmitteln $\varDelta\delta_\alpha$ die Konstanten a', c', a'_2, c'_2 bestimmen. Sodann läßt sich eine Tafel berechnen, aus der man für jeden Wert von α das zugehörige

$$\varDelta\delta_\alpha = a' \sin\alpha + c' \cos\alpha + a'_2 \sin 2\alpha + c'_2 \cos 2\alpha \tag{7}$$

entnehmen kann. Subtrahiert man hierauf von jeder Differenz $\varDelta\delta - \varDelta\delta_\delta$ den ihr entsprechenden Wert von $\varDelta\delta_\alpha$, ordnet dann die verbleibenden Reste nach der Größe der Sterne und bildet für jede Größenklasse das Mittel $(\varDelta\delta_m)$ aus den $\varDelta\delta - \varDelta\delta_\delta - \varDelta\delta_\alpha$, so kann man mit Hilfe dieser Mittelwerte die Abhängigkeit der Differenzen $\varDelta\delta$ von der Größe der Sterne bestimmen.

93[b]. Reduktion mehrerer Sternkataloge auf ein mittleres System. Man denke sich einen durch Genauigkeit hervorragenden Sternkatalog S mit mehreren anderen Katalogen, die mit A, B, C, ... bezeichnet werden mögen, verglichen, und es seien Δ_1, Δ_2, ... die einer beliebig gewählten Deklination entsprechenden Werte der in dem Sinne $S-A$, $S-B$, ... genommenen ausgeglichenen Differenzen $\Delta\alpha_\delta$; man hat dann die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
S - S &= 0 \\
S - A &= \Delta_1 \\
S - B &= \Delta_2 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Die Differenzen Δ_1, Δ_2, ..., rühren von den systematischen Fehlern der Kataloge A, B, ... und des Katalogs S her. Wenngleich sich nun nicht angeben läßt, wie groß die systematischen Fehler eines bestimmten der verglichenen Kataloge sind, so wird man doch von vornherein — je nach der Qualität des Instruments, der Sorgfalt, welche der Beobachter darauf verwandt hat, den Einfluß der verschiedenen bekannten Fehlerquellen auf seine Beobachtungen zu eliminieren, usw. — sich ein gewisses Urteil über den Grad der Zuverlässigkeit der einzelnen Kataloge bilden und diesen Gewichte beilegen können. Es sei jetzt p_0 das für den Katalog S angenommene Gewicht, p_a, p_b, ... seien die Gewichte der Kataloge A, B, ...; multipliziert man dann die erste der Gleichungen (8) mit p_0, die zweite mit p_a, die dritte mit p_b, ..., und dividiert die Summe der Produkte durch $p_0 + p_a + p_b + \cdots$, so folgt

$$
\frac{Sp_0 + Ap_a + Bp_b + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots} = S - \frac{p_a\Delta_1 + p_b\Delta_2 + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots}
\tag{9}
$$

Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Quotient stellt das mit Berücksichtigung der Gewichte gebildete Mittel aus den Katalogen S, A, B, ... dar; wenn also

$$
\frac{p_a\Delta_1 + p_b\Delta_2 + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots} = \Delta
\tag{10}
$$

gesetzt wird, so ist $-\Delta$ die von den Differenzen $\Delta\alpha_\delta$ abhängende Reduktion des Katalogs S auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... Nachdem die den verschiedenen Deklinationsgraden entsprechenden Werte von $-\Delta$ gefunden sind, lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (8) auch die zur Reduktion der Kataloge A, B, ... auf das Mittel von S, A, B, ... dienenden Korrektionen ableiten. Bezeichnet man diese nämlich mit $r(\alpha_\delta)$, so erhält man

(11)

Katalog	$r(\alpha_\delta)$
S	$-\Delta$
A	$\Delta_1 - \Delta$
B	$\Delta_2 - \Delta$

In derselben Weise, in der man die den Differenzen $\Delta\alpha_\delta$ entsprechenden Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ bestimmt, bestimmt man auch die den Differenzen $\Delta\alpha_\alpha$, $\Delta\delta_\delta$, $\Delta\delta_\alpha$, $\Delta\alpha_m$, $\Delta\delta_m$ entsprechenden Korrektionen; letztere mögen mit $r(\alpha_\alpha)$, $r(\delta_\delta)$, $r(\delta_\alpha)$, $r(\alpha_m)$, $r(\delta_m)$ bezeichnet werden. Was die Berücksichtigung der oben mit $\Delta'\alpha$ bezeichneten Differenzen betrifft, so gibt der nächste Paragraph die nötige Aufklärung.

Die in den Katalogen mitgeteilten Sternpositionen beruhen gewöhnlich auf Beobachtungen in der oberen Kulmination; jedoch gibt es mehrere Kataloge, welche für Zirkumpolarsterne die im Mittel aus den Beobachtungen in beiden Kulminationen folgenden Örter angeben. In einem solchen Falle sind die für die Zirkumpolarsterne anzuwendenden Reduktionswerte gesondert zu bestimmen; ausgenommen sind hierbei die vorhin mit $r(\alpha_m)$, bzw. $r(\delta_m)$ bezeichneten Größen. Ist die Anzahl der in beiden Kulminationen beobachteten Sterne eines Katalogs zu klein, um die direkte Ableitung einer für diese Sterne gültigen speziellen Reduktionstafel zu ermöglichen, so wird man aus der für die obere Kulmination gefundenen Tafel die für α und $\alpha + 12^h$ gültigen Reduktionswerte $r(\alpha_\alpha)$ und $r(\delta_\alpha)$ entnehmen, und die Mittel aus diesen Werten nebst den der oberen Kulmination entsprechenden $r(\alpha_\delta)$ und $r(\delta_\delta)$ als für die Zirkumpolarsterne gültig betrachten.

93^c. Bildung eines Fundamentalkatalogs. Es seien α_s, δ_s, bzw. α_a, δ_a, bzw. α_b, δ_b, ... die Werte, welche man für die Rektaszension und Deklination eines Sterns erhält, wenn die in den Katalogen S, A, B, ... angegebenen Koordinaten auf dasselbe Äquinox und dieselbe Epoche reduziert werden; dabei werde vorausgesetzt, daß die Beobachtungsepochen der Kataloge sich nur um wenige Jahre voneinander unterscheiden, und somit der Einfluß der Eigenbewegung klein ist. Will man dann die wahrscheinlichsten Werte der auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... bezogenen Rektaszension und Deklination des Sterns ableiten, so sind zunächst zu den aus den Katalogen folgenden Positionen die Reduktionswerte $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$, $r(\alpha_m)$, bzw. $r(\delta_\delta)$, $r(\delta_\alpha)$, $r(\delta_m)$ zu addieren. Es ist aber auch noch auf das in § 93^a mit $\Delta'\alpha$ bezeichnete Glied Rücksicht zu nehmen. Wie selten dasselbe auftritt, geht aus der von *L. Boss* ausgeführten Vergleichung seines Katalogs von 627 Sternen mit 62 anderen Katalogen hervor (The Astronomical Journal, Band 23, p. 191 ff.); es fanden sich nämlich nur vier an und für sich schon weniger genaue Kataloge, bei denen die Differenzen zwischen den in ihnen enthaltenen Rektaszensionen und denjenigen des *Boss*schen Katalogs in unzweifelhafter Weise auf die Existenz eines Gliedes von der für $\Delta'\alpha$ angenommenen Form hinweisen. In diesem speziellen Falle rührt die Differenz $\Delta'\alpha$ offenbar von den systematischen Fehlern der vier Kataloge her. Man darf aber auf Grund der *Boss*schen Untersuchungen auch allgemein annehmen, daß, wenn man für den oben mit S bezeichneten Vergleichskatalog einen erstklassigen Katalog wählt, dieser selbst keinen Anlaß zur Entstehung eines Gliedes $\Delta'\alpha$ geben kann; sollte also ein vereinzelter unter den mit S verglichenen Katalogen Differenzen ergeben, welche zu der Annahme eines derartigen Gliedes nötigen, so wird man den Grund hiervon in einem systematischen Fehler des betreffenden Katalogs zu suchen haben, und demnach zu den aus letzterem Katalog entnommenen Rektaszensionen außer $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$ und $r(\alpha_m)$ auch noch die Reduktion $\Delta'\alpha$ hinzufügen.

Die in der angegebenen Weise reduzierten Werte der Rektaszension und Deklination eines Sterns mögen mit α'_s, δ'_s, bzw. α'_a, δ'_a, ... bezeichnet werden; sind dann ω_o, ω_a, ... die Gewichte von α'_s, α'_a, ..., und u_o, u_a, ... die Gewichte von δ'_s, δ'_a, ..., so erhält man für die wahrscheinlichsten Werte der auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... bezogenen Koordinaten des Sterns

$$(12) \qquad \alpha = \frac{\omega_o\alpha'_s + \omega_a\alpha'_a + \omega_b\alpha'_b + \cdots}{\omega_o + \omega_a + \omega_b + \cdots}, \qquad \delta = \frac{u_o\delta'_s + u_a\delta'_a + u_b\delta'_b + \cdots}{u_o + u_a + u_b + \cdots}$$

Die zu Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe wäre also gelöst, wenn man imstande wäre, die Gewichte ω_o, ω_a, ω_b, ..., u_o, u_a, u_b, ... zu bestimmen. Um diese Bestimmung ausführen zu können, müßte man die mittleren Fehler (ε_1) der in den Sternkatalogen gegebenen Koordinaten, und die mittleren Fehler (ε_2) der Reduktionsgrößen $r(\alpha_\delta)$, $r(\delta_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$, $r(\delta_\alpha)$, ... kennen. Wenn nun e den für einen der Kataloge gültigen mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet, so würde, dem § 6 zufolge, der einer auf n Beobachtungen beruhenden Koordinate zugehörige mittlere Fehler ε_1 gleich $e:\sqrt{n}$ sein; bei einer genügend großen Zahl von Beobachtungen würde also ε_1 beliebig klein werden. Es leuchtet aber ohne weiteres ein, daß dies nicht der Fall sein kann; vielmehr muß es bei jeder Beobachtungsreihe eine von der Qualität des Instruments, der Art seiner Aufstellung, der Eignung des Beobachters usw. abhängige Grenze der Genauigkeit geben, welche bei einer auch noch so großen Zahl von Beobachtungen nicht überschritten werden kann. Um dies durch eine Gleichung auszudrücken, kann man $\varepsilon_1 = \eta + f(n)$ setzen, wo η eine Konstante und $f(n)$ eine Funktion von n bedeutet, deren Wert mit wachsendem n stetig abnimmt. Da die Werte, welche η und $f(n)$ für die einzelnen Kataloge annehmen, unbekannt sind, und da dasselbe von den mittleren Fehlern der Reduktionsgrößen $r(\alpha_\delta)$, $r(\delta_\delta)$, ... gilt, so lassen sich die Gewichte der Koordinaten α'_s, α'_a, ..., δ'_s, δ'_a, ... von vornherein nicht berechnen; man ist also genötigt, diese Gewichte mehr oder weniger willkürlich anzunehmen. Hat man aber einmal bestimmte Annahmen für die Gewichte gemacht, und bildet man dann, mit Hilfe der Gleichungen (12), für eine größere Zahl von Sternen die Werte von α und δ, so kann man diese dazu benutzen, um die Gewichte auf dem Wege der Rechnung genauer zu bestimmen.

Zur Erläuterung des Gesagten diene das folgende Beispiel. In Nr. XIV der Publikationen der Astronomischen Gesellschaft teilt *Auwers* die in den Katalogen Pulkowa 1845, Greenwich 1861, Pulkowa 1871, Cambridge 1872 und Greenwich 1872 enthaltenen Rektaszensionen von 539 Sternen, reduziert auf das mittlere Äquinox und die Epoche 1875.0 mit*). Außerdem gibt *Auwers* auch die zur Reduktion auf ein mittleres System dienenden systematischen Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ und $r(\alpha_\alpha)$ an, dagegen sind die in früheren Jahren wenig beachteten, von der Größe der Sterne abhängigen Korrektionen vernachlässigt worden. Den mit Berücksichtigung der Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ und $r(\alpha_\alpha)$ gewonnenen Rektaszensionen wurden nun Gewichte beigelegt. Beispielsweise nahm *Auwers* für eine auf 1 oder 2 Beobachtungen beruhende Rektaszension des Katalogs Pulkowa 1845 das Gewicht 1 an, für eine auf 3 bis 7 Beobachtungen beruhende das Gewicht 2, für eine auf 8 bis 12 Beobachtungen beruhende Rektaszension das Gewicht 3 und für die auf mehr wie 12 Beobachtungen beruhenden Rektaszensionen das Gewicht 4; die für Greenwich 1861 angenommenen Gewichte sind 1, 2 und 3, jenachdem die Zahl der Beobachtungen 1 bis 4, bzw. 5

*) Die Epochen der diesen Katalogen zugrunde liegenden Beobachtungen sind z. T. schon weit voneinander entfernt; wenn *Auwers* trotzdem die in den Katalogen gegebenen Rektaszensionen zur Aufstellung eines Fundamentalkatalogs verwandt hat, so liegt der Grund hiervon in dem Umstande, daß zu hoffen war, daß die durch die kleinen Fehler der benutzten Eigenbewegungen hervorgerufene Unsicherheit reichlich durch den infolge der Benutzung einer größeren Zahl von Katalogen erzielten Gewinn an Genauigkeit kompensiert werde.

bis 15, bzw. größer als 15 ist, usw. Mit Hilfe dieser Gewichte ließen sich unter Anwendung der Gleichungen (12) bereits sehr nahe richtige Rektaszensionen der 539 Sterne ableiten; vergleicht man also den aus diesen Rektaszensionen gebildeten Katalog (F) mit den ihm zugrunde liegenden, auf ein mittleres System reduzierten Sternkatalogen, so werden die sich ergebenden Unterschiede hauptsächlich den Fehlern der mit F verglichenen Kataloge zuzuschreiben sein.

Um die aus irgend einem der angeführten Kataloge, z. B. aus dem Kataloge Greenwich 1872, folgenden Rektaszensionen mit denjenigen des Katalogs F zu vergleichen, teile man zunächst die Sterne in Zonen ein und bilde für jede Zone die Differenzen zwischen den Rektaszensionen des Katalogs F und den mit Hilfe der systematischen Korrektionen $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$ verbesserten Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872; diese Differenzen vereinige man dann in Gruppen. Die erste Gruppe der Differenzen möge sich auf diejenigen Rektaszensionen beziehen, für welche die in dem Katalog Greenwich 1872 angegebene Zahl der Beobachtungen 1 bis 5 beträgt; die zweite beziehe sich auf die Rektaszensionen, welche auf 6 bis 10 Beobachtungen beruhen, usw. Bildet man jetzt für jede Gruppe das Mittel aus den absoluten Werten der Differenzen F—Greenwich 1872, so können die damit erhaltenen Mittelwerte, dem obigen zufolge, kurz als Durchschnittsfehler des Katalogs Greenwich 1872 bezeichnet werden. — Für die südlich von $\delta = +50^\circ$ gelegenen Sterne z. B. haben sich die in der dritten Kolumne der folgenden Tabelle angeführten Durchschnittsfehler der Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872 ergeben:

Zahl der Beob.	Mittlere Zahl der Beob.	Durchschnitts-fehler	Sterne	Formel
1—5	3.7	0ˢ.026	80	0ˢ.027
6—10	7.7	0.019	34	0.020
11—19	14.7	0.020	26	0.015
20—29	24.9	0.012	33	0.013
30—39	35.0	0.010	24	0.012
40—49	45.3	0.010	24	0.011
50—69	59.5	0.009	25	0.011
> 70	102.6	0.011	30	0.010

Sucht man die gefundenen, für $\delta = +25^\circ$ gültigen Durchschnittsfehler durch eine Gleichung von der Form

$$\text{(13)} \qquad \text{Durchschnittsfehler} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{n}}$$

darzustellen, wo n die jeweilige mittlere Zahl der Beobachtungen bedeutet, so findet man $a^2 = 0^s.000070$, $\log b^2 = 7.385$; hierbei ist die zu dem Logarithmus 7.385 gehörige Zahl in Teilen einer Zeitsekunde ausgedrückt zu verstehen. Die mit Hilfe der Formel (13) und der Werte von a^2 und $\log b^2$ sich ergebenden Durchschnittsfehler sind in der fünften Kolumne der vorstehenden Tafel enthalten; wie man sieht, stimmen dieselben mit den der Rechnung zugrunde gelegten Werten in befriedigender Weise überein.

Im allgemeinen wächst der einem gegebenen n entsprechende Durchschnittsfehler einer Rektaszension mit der Deklination der Sterne. Dabei zeigt sich jedoch bei den meisten Katalogen, daß, wenn D den einer Zone von der mittleren Deklination δ entsprechenden Durchschnittsfehler einer auf n Beobachtungen beruhenden Rektaszension bedeutet, das demselben Wert von n zugehörige Produkt $D \cos\delta$ für alle Zonen als konstant betrachtet werden darf; in solchen Fällen wird man die für nahe gleiche Werte von n gefundenen Produkte $D \cos\delta$ in Mittelwerte zusammenfassen und letztere durch eine Formel ausgleichen. Um die Durchschnittsfehler zu erhalten, sind dann die aus der Formel folgenden Werte von $D \cos\delta$ noch mit $\sec\delta$ zu multiplizieren. — Beruht ein Teil der in einem Sternkataloge enthaltenen Positionen auf Beobachtungen in der oberen Kulmination, und der andere Teil auf Beobachtungen in beiden Kulminationen, so müssen die Durchschnittsfehler für diese beiden Gruppen von Positionen gesondert bestimmt werden.

Der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge ist der mittlere Fehler einer Beobachtung gleich dem Produkt aus dem Durchschnittsfehler und der Quadratwurzel aus $\frac{\pi}{2}$. Da nun die Gewichte zweier Beobachtungen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der mittleren Fehler der Beobachtungen, so verhalten sie sich auch umgekehrt wie die Quadrate der Durchschnittsfehler. Nachdem also die für die verschiedenen Werte von n gültigen ausgeglichenen Durchschnittsfehler gefunden worden sind, hat man nur noch den der Gewichtseinheit entsprechenden Durchschnittsfehler zu wählen und erhält dann ohne weiteres die gesuchten, den Werten von n zugehörigen Gewichte. Für den Durchschnittsfehler einer Rektaszension vom Gewicht 1 nimmt man gewöhnlich einen Ausdruck von der Form $h \sec\delta$ an, wo h eine beliebig zu wählende Konstante bedeutet; da nämlich für die überwiegende Mehrzahl der Kataloge der Durchschnittsfehler der Rektaszension eines Sterns der Sekante der Deklination proportional ist, so hängt dann für alle diese Kataloge das Gewicht einer Rektaszension nur von der Zahl der Beobachtungen ab.

Im Anschluß an das vorhin Gesagte sollen jetzt die Gewichte der auf das von *Auwers* gewählte mittlere System reduzierten Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872 mitgeteilt werden. Die zweite Kolumne der folgenden Tabelle enthält für die in der ersten Kolumne angeführten Werte von n die mittels der Formel (13) berechneten, also für $\delta = +25^\circ$ gültigen Quadrate des Durchschnittsfehlers. Wählt man in Übereinstimmung mit *Auwers* (Gewichtstafeln für Sternkataloge, Astr. Nachr. Nr. 3615—16, Band 151) als mittleren Fehler einer Rektaszension vom Gewichte 1 den Wert $\pm 0^s.0356 \sec\delta$, so wird der der Gewichtseinheit entsprechende Durchschnittsfehler für $\delta = +25^\circ$ gleich $0^s.0313$; mit Hilfe des Quadrates dieses Wertes und der in der zweiten Kolumne angegebenen Quadrate erhält man die in der dritten Kolumne stehenden Gewichte.

n		Gewicht	n		Gewicht
3	0.000879	1	25	0.000167	6
6	475	2	50	119	8
10	313	3	80	100	10
15	232	4	100	094	10

Nachdem man mittels des im vorhergehenden erläuterten Verfahrens die den oben mit A, B, C, ... bezeichneten Katalogen zukommenden Gewichte bestimmt hat, lassen sich durch die Gleichungen (12) genauere Werte von α und δ finden; bildet man hierauf die Differenzen $\alpha - \alpha'_s = v_s$, $\alpha - \alpha'_a = v_a$, ..., $\delta - \delta'_s = v'_s$, $\delta - \delta'_a = v'_a$, ... (wo α'_s, α'_a, ... die auf S. 273 angegebene Bedeutung haben), und bezeichnet man mit m die Anzahl der zur Ableitung der Koordinaten eines Sterns benutzten Kataloge, so ergibt sich, wenn ε, bzw. ε' den mittleren Fehler einer Rektaszension, bzw. Deklination vom Gewicht 1 bedeutet,

$$(14) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\omega_0 v_s^2 + \omega_a v_a^2 + \omega_b v_b^2 + \cdots}{m-1}}, \quad \varepsilon' = \pm\sqrt{\frac{u_0 v_s'^2 + u_a v_a'^2 + u_b v_b'^2 + \cdots}{m-1}}$$

Für den mittleren Fehler von α, bzw. δ erhält man demnach

$$(15) \qquad \varepsilon_\alpha = \pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega_0 + \omega_a + \omega_b + \cdots}}, \qquad \varepsilon_\delta = \pm\frac{\varepsilon'}{\sqrt{u_0 + u_a + u_b + \cdots}}$$

Ein in der vorhin für einen einzelnen Stern beschriebenen Weise mit Hilfe mehrerer Kataloge gebildetes Verzeichnis von Sternpositionen bezeichnet man als Fundamentalkatalog. Man denke sich jetzt, daß im Laufe eines Jahrhunderts alle Kataloge, deren mittlere Epochen beispielsweise demselben Jahrzehnt angehören, zur Aufstellung je eines Fundamentalkatalogs benutzt worden wären, und daß nun ein auf allen diesen Fundamentalkatalogen beruhender neuer Katalog gebildet werden solle. Um dieses Ziel zu erreichen, reduziere man die in den Fundamentalkatalogen enthaltenen Positionen zunächst auf das der Mitte des Jahrhunderts (t_0) entsprechende Äquinox und gleiche die damit erhaltenen Koordinaten α und δ durch die Formeln aus

$$(16) \qquad \alpha = \alpha_0 + \varDelta\alpha_0 + \mu(t - t_0), \qquad \delta = \delta_0 + \varDelta\delta_0 + \nu(t - t_0),$$

wo α_0 und δ_0 Näherungswerte der für die Epoche t_0 gültigen Rektaszension, bzw. Deklination, $\varDelta\alpha_0$ und $\varDelta\delta_0$ die Korrektionen von α_0, bzw. δ_0, und μ und ν die jährliche Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination bedeuten.

Sind μ und ν groß, so setze man $\mu = \mu_0 + \varDelta\mu_0$, $\nu = \nu_0 + \varDelta\nu_0$, wo mit μ_0 und ν_0 Näherungswerte bezeichnet werden sollen; bildet man dann die Produkte

$$(17) \qquad \begin{aligned} -\mu_0\nu_0 \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_0(t - t_0)^2 &= \pi_1, \\ \tfrac{1}{2}(15\mu_0)^2 \sin 1'' \sin\delta_0 \cos\delta_0(t - t_0)^2 &= \pi_2, \end{aligned}$$

so lauten die zur Bestimmung von $\varDelta\alpha_0$, $\varDelta\delta_0$, $\varDelta\mu_0$ und $\varDelta\nu_0$ dienenden Bedingungsgleichungen (S. 150)

$$(18) \qquad \begin{aligned} \varDelta\alpha_0 + \varDelta\mu_0(t - t_0) &= \alpha - \alpha_0 + \pi_1 - \mu_0(t - t_0) \\ \varDelta\delta_0 + \varDelta\nu_0(t - t_0) &= \delta - \delta_0 + \pi_2 - \nu_0(t - t_0) \end{aligned}$$

Die mit Hilfe der Gleichungen (16), bzw. (18) erhaltenen Werte $\alpha_0 + \varDelta\alpha_0$, $\delta_0 + \varDelta\delta_0$, μ, ν, bzw. $\mu_0 + \varDelta\mu_0$, $\nu_0 + \varDelta\nu_0$ stellen die wahrscheinlichsten Werte der Rektaszension und Deklination, bzw. der Eigenbewegung dar; nachdem man diese für alle in den neuen Fundamentalkatalog aufzunehmenden Sterne gefunden hat, ist die gestellte Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Die Reste, welche sich nach Substitution der für die Unbekannten gefundenen Werte in die Bedingungsgleichungen (16), bzw. (18) ergeben, stellen die Differenzen zwischen dem neuen Fundamentalkatalog und den zugrunde gelegten Fundamentalkatalogen dar; mit Hilfe dieser Differenzen lassen sich nach § 93[a] die zur Reduktion jedes einzelnen der ursprünglichen Fundamentalkataloge auf den neuen dienenden Tafeln bilden. Da die Differenzen zwischen den ursprünglichen Fundamentalkatalogen und den zu ihrer Bildung benutzten Katalogen bereits bekannt sind, so kann man jetzt auch für jeden dieser letzteren Kataloge eine Tafel aufstellen, mit der man alle in dem Kataloge enthaltenen Positionen (also auch die Positionen der nicht in die Fundamentalkataloge aufgenommenen Sterne) auf den neuen Fundamentalkatalog reduzieren kann.

Kapitel XV.

Bestimmung der Konstante der Lunisolarpräzession und der Eigenbewegung des Sonnensystems.

94. Bestimmung eines Näherungswertes der Konstante der Lunisolarpräzession. Aus den Gleichungen (106), (107) und (105) des § 31 folgt, wenn die von $l'\Delta\varepsilon$ und l'^3 abhängigen Glieder vernachlässigt werden, und der Buchstabe l' durch die nach S. 98 gleichbedeutende Bezeichnung $(-\psi)_t$ ersetzt wird,

$$\mathfrak{m} = (-\psi)_t \cos\varepsilon - (a)_t, \qquad \mathfrak{n} = (-\psi)_t \sin\varepsilon$$

Substituiert man hier für $(-\psi)_t$ und $(a)_t$ ihre auf S. 100, bzw. 101 gegebenen Ausdrücke, so erhält man

$$(1)\quad \begin{aligned} \mathfrak{m} &= \cos\varepsilon\left[5036''.84 + 0''.494\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\frac{t - t_0}{100} - \cdots \\ &\quad - \left[13''.417 - 1''.887\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\frac{t - t_0}{100} + \cdots \\ \mathfrak{n} &= \sin\varepsilon\left[5036''.84 + 0''.494\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\frac{t - t_0}{100} - \cdots \end{aligned}$$

Man bezeichne jetzt mit α_1, δ_1, bzw. α_2, δ_2, bzw. α_m, δ_m die auf das mittlere Äquinox zu den Zeiten t_1, bzw. t_2, bzw. $t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ bezogene Rektaszension und Deklination eines Sterns. Ferner verstehe man unter m_m und n_m die Werte, welche die in (1) enthaltenen Koeffizienten von $\frac{t - t_0}{100}$ für $t_0 = t_m$ annehmen, d. h. es sei, wenn ε_m den für die Zeit t_m gültigen Wert von ε bedeutet und zur Abkürzung

$$(2)\quad \begin{aligned} \Psi_m &= 5036''.84 + 0''.494\,\frac{t_m - 1850}{100} \\ A_m &= 13''.417 - 1''.887\,\frac{t_m - 1850}{100} \end{aligned}$$