Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XVII. Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Kapitel XVII.

Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns.

100. Einleitung. Die durch die Bewegung der Erde um die Sonne hervorgerufenen parallaktischen Verschiebungen der Fixsterne sind, wenn man von vereinzelten Fällen absieht, so außerordentlich klein, daß sie bei der Bestimmung absoluter Sternpositionen ganz oder fast ganz durch die zufälligen, bzw. systematischen Beobachtungsfehler verdeckt werden. Dagegen kann man durch mikrometrische Messungen die Unterschiede der parallaktischen Verschiebungen einander benachbarter Sterne mit verhältnismäßig großer Sicherheit bestimmen und hieraus die relative Parallaxe eines der Sterne, d. h. die Differenz zwischen seiner Parallaxe und dem Mittel der Parallaxen der übrigen Sterne berechnen. Die relative Parallaxe eines Sterns wird aber im allgemeinen nur wenig von der absoluten verschieden sein, wenn man als Vergleichsterne schwache Sterne mit geringer Eigenbewegung wählt; denn die bisher gemachten Erfahrungen zeigen übereinstimmend, daß die parallaktischen Verschiebungen solcher Sterne äußerst klein sind.

Zur Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns bedient man sich am besten eines Heliometers, und zwar mißt man entweder die Distanz des Sterns von einigen in seiner Nähe befindlichen schwachen Sternen mit kleiner Eigenbewegung, oder auch die Positionswinkel der durch diese Sterne und den zu untersuchenden Stern gehenden Bögen größten Kreises; außerdem eignen sich zu dem genannten Zweck noch die mit Hilfe eines Meridiankreises beobachteten Rektaszensionsdifferenzen*). Die nähere Erläuterung dieser Methoden ist in den drei folgenden Paragraphen enthalten, zuvor sollen aber noch die Formeln zusammengestellt werden, mit Hilfe deren man den Winkel zwischen dem Deklinations- und Breitenkreise eines Sterns finden kann. Man beginnt damit, die Länge und Breite des Sterns abzuleiten. Hierzu dienen die folgenden aus § 18 entnommenen Gleichungen, in denen α und δ die Rektaszension und Deklination des Sterns, ε die Schiefe der Ekliptik, λ und β die gesuchte Länge und Breite bedeuten.

$$(1)\qquad \begin{aligned} f \sin F &= \sin\delta \\ f\cos F &= \cos\delta\,\sin\alpha \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sin\beta &= f\sin(F-\varepsilon) \\ \cos\beta\,\sin\lambda &= f\cos(F-\varepsilon) \\ \cos\beta\,\cos\lambda &= \cos\delta\,\cos\alpha \end{aligned}$$

Wird nun der Winkel zwischen dem Deklinations- und Breitenkreise des Sterns mit $\varkappa$ bezeichnet, so hat man nach § 18

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sin h\,\sin y &= \sin\lambda \\ \sin h\,\cos y &= -\cos\lambda\,\sin\beta \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sin h\,\sin(y+\varkappa) &= \sin\alpha \\ \sin h\,\cos(y+\varkappa) &= -\cos\alpha\,\sin\delta \end{aligned}$$

*) Bezüglich der Anwendung der Sternphotographie muß auf die hierüber handelnden Spezialarbeiten verwiesen werden.

101. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Distanzbeobachtungen. In § 53 wurde gezeigt, daß eine gegebene Parallaxendifferenz den größten Einfluß auf die Distanz zweier Sterne hat, wenn der die Sterne verbindende Bogen senkrecht zu dem Breitenkreise des Mittelpunktes dieses Bogens steht. Nimmt man also an, daß die in der Umgebung eines Sterns S gelegenen schwachen und schwach bewegten Sterne gleiche Parallaxe haben, so wird sich aus Distanzbeobachtungen die relative Parallaxe von S am genauesten bestimmen lassen, wenn man die Vergleichsterne möglichst nahe dem Kreise wählt, welcher den Deklinationskreis des Sterns S in dem Positionswinkel $90^\circ - \varkappa$, bzw. $270^\circ - \varkappa$ schneidet. Nur wenn S dem Pol der Ekliptik nahe liegt, und demnach der aus § 53, (14) folgende Wert des Koeffizienten n wenig von 1 verschieden ist, welches auch der Wert von p sei, kann man die Vergleichsterne auf einem beliebigen durch S gehenden größten Kreise wählen. Gewöhnlich begnügt man sich mit zwei zu beiden Seiten des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns gelegenen und möglichst gleichweit von ihm entfernten Vergleichsternen, und mißt im Laufe eines Jahres wiederholt deren Abstände von dem Hauptstern. Um die Beobachtungen reduzieren zu können, hat man zunächst für jeden durch den Hauptstern und einen Vergleichstern begrenzten Bogen größten Kreises die Rektaszension und Deklination seines Mittelpunktes, sowie den auf diesen Mittelpunkt bezogenen Positionswinkel des Vergleichsterns zu berechnen; diese Größen mögen mit α_m, δ_m und p_m bezeichnet werden. Es sei nun α die Rektaszension und δ die Deklination des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns S, die entsprechenden für einen Vergleichstern S_i gültigen Werte seien α_i und δ_i; bedeutet dann $\varDelta_i$ den Abstand der Sterne S und S_i voneinander, und versteht man unter p_i den Positionswinkel von S_i in bezug auf S, so gelten die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sin\varDelta_i \sin p_i &= 2\cos\delta_i \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha) \\ \sin\varDelta_i \cos p_i &= \sin(\delta_i - \delta) + 2\cos\delta_i \sin\delta \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha) \end{aligned}$$

Nachdem man hieraus $\varDelta_i$ und p_i gefunden hat, setze man $90^\circ - \delta = D$, $90^\circ - \delta_m = D_m$, und wende die aus § 20, (22) durch die Substitution $p_1 = p_i$, $D_1 = D$, $\varDelta = \varDelta_i$ folgenden Gleichungen an

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_i \sin\tfrac{1}{2}(D + \tfrac{1}{2}\varDelta_i) \\ \sin\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_i \sin\tfrac{1}{2}(D - \tfrac{1}{2}\varDelta_i) \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_i \cos\tfrac{1}{2}(D + \tfrac{1}{2}\varDelta_i) \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_i \cos\tfrac{1}{2}(D - \tfrac{1}{2}\varDelta_i) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man p_m, $d\alpha$ und D_m; sodann ergibt sich $\alpha_m = \alpha + d\alpha$, $\delta_m = 90^\circ - D_m$. Dehnen sich die Beobachtungen nur auf 1 bis 2 Jahre aus, so genügt es im allgemeinen, für α und δ, sowie für α_i und δ_i ihre auf ein der mittleren Epoche der Beobachtungen nahe liegendes mittleres Äquinox bezogenen Werte anzuwenden.

Aus der Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes jedes Bogens leite man ferner die Länge und Breite des Mittelpunktes ab; diese mögen mit λ_m und β_m bezeichnet werden. Substituiert man dann die Werte von α_m, δ_m, λ_m und β_m in die Gleichungen (2), so erhält man die für die Mittelpunkte der Bögen gültigen, im folgenden mit $\varkappa_m$ bezeichneten Werte von $\varkappa$.

Die beobachteten und nach § 86 von der Refraktion befreiten Distanzen sind nun zunächst wegen Aberration zu korrigieren. Wenn k die Aberrationskonstante, $\odot$ die Länge der Sonne zur Zeit der Beobachtung, $\varDelta$ die wahre, und $\varDelta'$ die beobachtete (aber von der Refraktion befreite) Distanz bedeutet, so hat man nach § 64, (23)

$$\varDelta = \varDelta' + 2k \sin \tfrac{1}{2}\varDelta \cos\beta_m \sin(\odot - \lambda_m), \tag{5}$$

wo auf der rechten Seite statt $\varDelta$ der aus (3) folgende Wert $\varDelta_i$ benutzt werden darf.

Um die mittels der Gleichung (5) erhaltenen Werte von $\varDelta$ auf eine und dieselbe Epoche reduzieren zu können, muß man für den Hauptstern und für die Vergleichsterne die jährliche Eigenbewegung nach Größe und Richtung bestimmen. Sind $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die Komponenten der Eigenbewegung des Hauptsterns in Rektaszension und Deklination, und werden die entsprechenden für einen Vergleichstern gültigen Komponenten mit $\frac{d\alpha_i}{dt}$ und $\frac{d\delta_i}{dt}$ bezeichnet, so folgt, wenn ϱ und ϱ_i die für den Haupt-, bzw. Vergleichstern gültigen Werte der Eigenbewegung im größten Kreise bedeuten, und γ, bzw. γ_i die Positionswinkel dieser Bewegungen angeben

$$\begin{aligned} \varrho \sin\gamma &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta & \qquad \varrho_i \sin\gamma_i &= \frac{d\alpha_i}{dt}\cos\delta_i \\ \varrho \cos\gamma &= \frac{d\delta}{dt} & \qquad \varrho_i \cos\gamma_i &= \frac{d\delta_i}{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

Da die Eigenbewegung der Vergleichsterne als sehr klein vorausgesetzt wird, so kann man das Quadrat von ϱ_i vernachlässigen; aus der in § 57 gegebenen Formel (22^a) folgt dann*), wenn $\varDelta$ für die Epoche t der Beobachtung und $\varDelta_0$ für eine fest gewählte Epoche t_0 gilt,

$$\varDelta_0 = \varDelta + [\varrho\cos(\gamma - p_m) - \varrho_i \cos(\gamma_i - p_m)](t - t_0) - \frac{\varrho^2 \sin^2(\gamma - p_m)}{2\varDelta_i}(t - t_0)^2 \tag{7}$$

Um aus diesen $\varDelta_0$ die relative Parallaxe des Hauptsterns zu finden, benutzt man die Formeln (11) und (12) des § 53; man berechnet also zunächst mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} n \sin N &= -\sin(\varkappa_m + p_m) \\ n \cos N &= \cos(\varkappa_m + p_m)\sin\beta_m \end{aligned} \tag{8}$$

für jeden der den Hauptstern mit den beiden Vergleichsternen verbindenden Bögen die Werte von n und N. Sind dann π_1 und π_2 die Parallaxen der Vergleichsterne, und werden die den Abständen des Hauptsterns von den beiden Vergleichsternen entsprechenden Werte von n, N, $\varDelta_0$ und λ_m ebenfalls durch die Indizes 1 und 2 voneinander unterschieden, so erhält man, wenn $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ die heliozentrischen Distanzen bedeuten, und wenn π die Parallaxe des Hauptsterns, und R den Radiusvektor der Sonne zur Zeit der Beobachtung angibt,

$$\begin{aligned} \varDelta_0^{(1)} &= D^{(1)} + Rn_1(\pi - \pi_1)\cos[\odot - (\lambda_m^{(1)} + N_1)] \\ \varDelta_0^{(2)} &= D^{(2)} + Rn_2(\pi - \pi_2)\cos[\odot - (\lambda_m^{(2)} + N_2)] \end{aligned} \tag{9}$$

---

*) Die in § 57 gewählten Bezeichnungen n, N, n_i, N_i, $\varDelta''$, t', t sind gleichbedeutend mit den hier benutzten ϱ, γ, ϱ_i, γ_i, $\varDelta$, t, t_0.

Wenn man nun die Vergleichsterne in der zu Beginn dieses Paragraphen angebenen Weise gewählt hat, so sind die Werte der Koeffizienten von $\pi - \pi_1$ und $\pi - \pi_2$ für jeden Beobachtungsabend dem absoluten Werte nach nahe einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Falls also die aus den Beobachtungen abgeleiteten und der Voraussetzung nach wenig voneinander verschiedenen Werte $\varDelta_0^{(1)}$ und $\varDelta_0^{(2)}$ mit Fehlern behaftet sind, welche der Distanz proportional sind (wie es beispielsweise bei einer unrichtigen Annahme des Skalenwertes der Fall sein würde), so beeinflussen diese Fehler den aus $\varDelta_0^{(1)}$ folgenden Wert von $\pi - \pi_1$ in entgegengesetzter Weise wie den aus $\varDelta_0^{(2)}$ abgeleiteten Wert von $\pi - \pi_2$; das Mittel aus diesen Werten, d. h. die relative Parallaxe $\pi - \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ des Hauptsterns in bezug auf die beiden Vergleichsterne ist also frei von den erwähnten Fehlern.

An Stelle der Gleichungen (9) wendet man gewöhnlich ihre Differenz an. Schreibt man die Gleichungen in der abgekürzten Form

$$\begin{aligned} \varDelta_0^{(1)} &= D^{(1)} + a_1(\pi - \pi_1) \\ \varDelta_0^{(2)} &= D^{(2)} + a_2(\pi - \pi_2) \end{aligned} \tag{10}$$

und setzt

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) + \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2) \\ \pi_2 &= \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) - \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2), \end{aligned} \tag{11}$$

so folgt zunächst

$$\varDelta_0^{(1)} - \varDelta_0^{(2)} = D^{(1)} - D^{(2)} + (a_1 - a_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (a_1 + a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

Liegen nun die Vergleichsterne auf einem durch den Hauptstern gehenden größten Kreise, so unterscheidet sich $a_1 + a_2$ stets wenig von 0. Man ist aber mitunter genötigt, Sterne zu wählen, für welche die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist. Damit auch in einem solchen Falle $a_1 + a_2$ nahe gleich 0 wird, muß man die Beobachtungen auf die Zeiten beschränken, zu denen $a_1 - a_2$ am größten ist. Nimmt man an, daß dies geschehen sei, und setzt

$$\begin{aligned} h \sin H &= n_1 \sin(\lambda_m^{(1)} + N_1) - n_2 \sin(\lambda_m^{(2)} + N_2) \\ h \cos H &= n_1 \cos(\lambda_m^{(1)} + N_1) - n_2 \cos(\lambda_m^{(2)} + N_2), \end{aligned} \tag{12}$$

so wird mit Vernachlässigung des von $\frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2)$ abhängigen Gliedes

$$\varDelta_0^{(1)} - \varDelta_0^{(2)} = D^{(1)} - D^{(2)} + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\, Rh \cos(\odot - H) \tag{13}$$

Es sei jetzt d_0 ein Näherungswert von $D^{(1)} - D^{(2)}$ und x die Korrektion von d_0; ferner werde angenommen, daß die für die Vergleichsterne und den Hauptstern benutzten Werte der Eigenbewegung eine kleine Korrektion erfordern, und daß demgemäß auf der rechten Seite der vorigen Gleichung noch ein Glied $y(t - t_0)$ hinzugefügt werden müsse, wo y eine unbekannte Konstante bedeutet. Setzt man dann noch $\varDelta_0^{(1)} - \varDelta_0^{(2)} - d_0 = n$, so folgt

$$x + (t - t_0)y + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\, Rh \cos(\odot - H) = n \tag{14}$$

Auch aus diesen Gleichungen erhält man die relative Parallaxe unabhängig von den der Distanz proportionalen Fehlern, vorausgesetzt, daß $\varDelta_0^{(1)}$ nahe gleich $\varDelta_0^{(2)}$ ist; ist aber letztere Bedingung nicht erfüllt, so sind zuvor die gemessenen Distanzen, bzw. ihre Differenzen zu korrigieren. Um die Korrektionen abzuleiten, berücksichtige man die aus (10) und (11) folgende Gleichung

$$(15)\quad \Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)} = D^{(1)} + D^{(2)} + (a_1 + a_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

und nehme an, daß $\Delta_0^{(1)}$ und $\Delta_0^{(2)}$ die Korrektionen $\varpi\Delta_0^{(1)}$, bzw. $\varpi\Delta_0^{(2)}$ erfordern, wo ϖ eine von Abend zu Abend wechselnde Konstante bedeutet; ferner nehme man an, daß infolge der Ungenauigkeit der für die Eigenbewegungen der Sterne benutzten Werte an $\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}$ die Korrektion $E(t - t_0)$ angebracht werden müsse, wo E eine Konstante, t die Epoche der Beobachtung und t_0 die mittlere Epoche der Beobachtungen bedeutet. Vernachlässigt man dann das von $a_1 + a_2$ abhängige Glied und setzt $\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)} = s$, so ergibt sich aus (15)

$$(15^a)\quad D^{(1)} + D^{(2)} = s + \varpi s + (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} + E(t - t_0)$$

Denkt man sich jetzt für jeden Beobachtungsabend eine solche Gleichung aufgestellt und aus allen diesen das Mittel gebildet, so verschwindet infolge der über t_0 getroffenen Bestimmung das von E abhängige Glied; ferner kann auch das Produkt aus $\frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2)$ und dem Mittel der teils positiven, teils negativen Koeffizienten $a_1 - a_2$ als verschwindend klein betrachtet werden. Wenn man also noch die Annahme macht, daß die Koeffizienten ϖ bald positiv, bald negativ sind und sich gegenseitig nahezu aufheben, so wird $D^{(1)} + D^{(2)}$ gleich dem Mittel aus den s. Dieses Mittel möge mit s_0 bezeichnet werden; man hat dann $D^{(1)} + D^{(2)} = s_0$, und somit folgt aus (15^a)

$$\varpi = \frac{s_0 - s}{s} - (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2s} - \frac{E}{s}(t - t_0)$$

Nun ist $\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)}$ stets sehr klein gegenüber s. Bei der Berechnung der an diese Differenz anzubringenden Korrektion $\varpi(\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)})$ kann man demnach die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der vorigen Gleichung vernachlässigen und erhält damit als Wert der Korrektion $(\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)})(s_0 - s) : s$ oder hinreichend genau, wenn mit d_0 der mittlere Wert von $\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)}$ bezeichnet wird, $d_0(s_0 - s) : s_0$.

102. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Positionswinkelmessungen. Falls man die relative Parallaxe eines Fixsterns mit Hilfe von Positionswinkelmessungen bestimmen will, so sind die beiden Vergleichsterne in der Nähe des Kreises zu wählen, welcher den Deklinationskreis des zu untersuchenden Sterns im Positionswinkel $180^\circ - \varkappa$, bzw. $360^\circ - \varkappa$ schneidet. Zur Reduktion der Beobachtungen ist es erforderlich, daß man für jeden der durch den Hauptstern und einen Vergleichstern begrenzten Bögen nach den in den zwei vorigen Paragraphen gegebenen Gleichungen die Werte von Δ_i, p_i, α_m, δ_m, p_m, λ_m, β_m und $\varkappa_m$ berechnet; dabei kann man für α, δ, α_i und δ_i die Werte annehmen, welche diese Koordinaten in bezug auf ein dem Mittel der Beobachtungszeiten nahes mittleres Äquinox haben.

Die beobachteten und mit Hilfe der in § 86 mitgeteilten Formeln von der Refraktion befreiten Positionswinkel sollen zuerst wegen der Aberration korrigiert werden. Zu diesem Zwecke berechnet man für jeden Bogen mittels der Gleichungen [§ 64, (21)]

$$(16)\qquad \begin{aligned} u \sin U &= k \operatorname{tang} \delta_m \sin \alpha_m \\ u \cos U &= k \operatorname{tang} \delta_m \cos \alpha_m \cos \varepsilon \end{aligned}$$

die Werte von u und U, und erhält dann nach § 64, (22), wenn p den wahren, p' den beobachteten (aber von der Refraktion befreiten) Positionswinkel, und $\odot$ die Länge der Sonne zur Zeit der Beobachtung bedeutet,

$$(17)\qquad p = p' + u \cos(\odot - U)$$

Die Werte von p sind jetzt auf dasselbe mittlere Äquinox zu reduzieren. Zu diesem Zwecke berechnet man zunächst nach den in § 50 gegebenen Formeln (34) und (35)

$$\begin{aligned} \Psi &= \left[5036''.8 + 0''.5 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} - 1''.1 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - \\ &\quad - 17''.2 \sin \Omega + 0''.2 \sin 2\Omega - 1''.3 \sin 2L \\ \Delta\varepsilon &= 9''.2 \cos \Omega - 0''.1 \cos 2\Omega + 0''.6 \cos 2L, \end{aligned}$$

wo Ω die mittlere Länge des Mondknotens, L die mittlere Länge der Sonne zur Zeit t der Beobachtung angibt, und wo t_0 die Epoche des mittleren Äquinox bedeuten soll, auf welches sich α_m und δ_m beziehen; bezeichnet man die auf dieses mittlere Äquinox reduzierten Positionswinkel mit $\mathfrak{p}_0$, so folgt aus § 50, (36)

$$(18)\qquad \mathfrak{p}_0 = p + [\Delta\varepsilon \cos \alpha_m - \Psi \sin \varepsilon \sin \alpha_m] \sec \delta_m$$

Um die für die Epoche t_0 gültigen Werte p_0 der Positionswinkel zu finden, hat man die in § 57 abgeleitete Gleichung (23ᵃ) anzuwenden*), und zwar erhält man

$$(19)\quad p_0 = \mathfrak{p}_0 + \frac{1}{\Delta_i \sin 1''} [\varrho \sin(\gamma - p_m) - \varrho_i \sin(\gamma_i - p_m)](t - t_0) + \frac{\varrho^2 \sin 2(\gamma - p_m)}{2 \Delta_i^2 \sin 1''} (t - t_0)^2$$

Die Werte von p_0 dienen zur Ableitung der Parallaxe. Man wendet zunächst die Formeln an [§ 53, (11)]

$$(20)\qquad \begin{aligned} m \sin M &= - \cos(\varkappa_m + p_m) \\ m \cos M &= - \sin(\varkappa_m + p_m) \sin \beta_m \end{aligned}$$

und berechnet für die durch den Hauptstern und die beiden Vergleichsterne gelegten Bögen die zugehörigen Werte von m und M; werden diese sowie auch die bezüglichen Werte von p_0, Δ_i und λ_m durch die Indizes 1 und 2 voneinander unterschieden, so hat man nach § 53, (12), wenn π_1 und π_2 die Parallaxen der Vergleichsterne, ferner $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die heliozentrischen, auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0 bezogenen Positionswinkel der Vergleichsterne, gültig für die Epoche t_0, bezeichnen,

$$(21)\qquad \begin{aligned} p_0^{(1)} &= P^{(1)} + \frac{R m_1}{\Delta_1 \sin 1''} (\pi - \pi_1) \cos[\odot - (\lambda_m^{(1)} + M_1)] \\ p_0^{(2)} &= P^{(2)} + \frac{R m_2}{\Delta_2 \sin 1''} (\pi - \pi_2) \cos[\odot - (\lambda_m^{(2)} + M_2)] \end{aligned}$$

*) Die in § 57 gewählten Bezeichnungen n, N, n_i, N_i, p'', t', t haben dieselbe Bedeutung wie die in (19) angewandten ϱ, γ, ϱ_i, γ_i, $\mathfrak{p}_0$, t, t_0.

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$(p_0^{(1)} - P^{(1)})\,\Delta_1 \sin 1'' = b_1(\pi - \pi_1)$$
$$(p_0^{(2)} - P^{(2)})\,\Delta_2 \sin 1'' = b_2(\pi - \pi_2)$$

und subtrahiert dieselben, nachdem man zuvor noch π_1 und π_2 durch ihre in (11) gegebenen Ausdrücke ersetzt hat, so folgt

$$[p_0^{(1)} - P^{(1)}]\Delta_1 \sin 1'' - [p_0^{(2)} - P^{(2)}]\Delta_2 \sin 1'' = (b_1 - b_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (b_1 + b_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

Nun pflegen die Beobachtungen zu Zeiten angestellt zu werden, wo der Koeffizient $b_1 - b_2$, absolut genommen, möglichst groß ist; gleichzeitig ist dann aber $b_1 + b_2$ nahe gleich 0, und somit kann das letzte Glied auf der rechten Seite der vorigen Gleichung vernachlässigt werden. Führt man also wieder an Stelle von b_1 und b_2 ihre Werte ein und setzt

$$(22)\qquad \begin{aligned} h' \sin H' &= m_1 \sin(\lambda_m^{(1)} + M_1) - m_2 \sin(\lambda_m^{(2)} + M_2) \\ h' \cos H' &= m_1 \cos(\lambda_m^{(1)} + M_1) - m_2 \cos(\lambda_m^{(2)} + M_2), \end{aligned}$$

so erhält man

$$[p_0^{(1)} - P^{(1)}]\Delta_1 \sin 1'' - [p_0^{(2)} - P^{(2)}]\Delta_2 \sin 1'' = [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]Rh' \cos(\odot - H')$$

Man wähle jetzt für $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die Näherungswerte $P_0^{(1)}$ und $P_0^{(2)}$, und bezeichne die Differenz $(P^{(1)} - P_0^{(1)})\,\Delta_1 \sin 1'' - (P^{(2)} - P_0^{(2)})\,\Delta_2 \sin 1''$ mit x; ferner nehme man an, daß die benutzten Werte der Eigenbewegungen der Sterne kleiner Korrektionen bedürfen, und daß demgemäß auf der rechten Seite der vorigen Gleichungen das Glied $e'(t - t_0)$ hinzugefügt werden müsse, wo e' eine Konstante bedeutet. Wenn dann noch

$$[p_0^{(1)} - P_0^{(1)}]\,\Delta_1 \sin 1'' - [p_0^{(2)} - P_0^{(2)}]\,\Delta_2 \sin 1'' = \nu$$

gesetzt wird, so lauten die zur Bestimmung von x, e' und $\pi - \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ dienenden Bedingungsgleichungen

$$(23)\qquad x + e'(t - t_0) + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]Rh' \cos(\odot - H') = \nu$$

103. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Rektaszensionsdifferenzen. Man wähle für den Stern, dessen Parallaxe bestimmt werden soll, zwei möglichst symmetrisch zu ihm gelegene und seinem Parallel nahe Vergleichsterne oder auch Paare derselben, und beobachte nun mit Hilfe eines Meridiankreises ein oder zwei Jahre hindurch die Rektaszensionsdifferenzen zwischen diesen Sternen und dem Hauptstern. Die in den verschiedenen Jahren erhaltenen und von der Helligkeitsgleichung (§ 93) befreiten Differenzen sind zuerst auf den jedesmaligen Jahresanfang (t_0), und sodann auf ein gemeinsames mittleres Äquinox, bzw. auf eine gemeinsame Epoche zu reduzieren. Zu diesem Zwecke berechne man zunächst

$$(24)\qquad n = \left[133\overset{s}{.}675 - 0\overset{s}{.}057\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\frac{1}{100},$$

ferner, wenn unter α_0, δ_0, bzw. $\alpha_i^{(0)}$, $\delta_i^{(0)}$ die auf das mittlere Äquinox und die Epoche des Jahresanfangs bezogene Rektaszension und Deklination des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns verstanden wird,

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
a - a_i &= n(\sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 - \sin\alpha_i^{(0)} \operatorname{tang}\delta_i^{(0)})\\
b - b_i &= \cos\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 - \cos\alpha_i^{(0)} \operatorname{tang}\delta_i^{(0)}\\
c - c_i &= \cos\alpha_0 \sec\delta_0 - \cos\alpha_i^{(0)} \sec\delta_i^{(0)}\\
d - d_i &= \sin\alpha_0 \sec\delta_0 - \sin\alpha_i^{(0)} \sec\delta_i^{(0)}
\end{aligned}
$$

Es seien nun μ und μ_i die Werte der jährlichen Eigenbewegung des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns in Rektaszension, t sei die Epoche einer Beobachtung und T ein der mittleren Epoche der Beobachtungen nahe liegender Jahresanfang; ferner seien p und p_i die dem Intervall $t_0 - T$ entsprechenden Werte der Präzession in Rektaszension, gültig für den Haupt-, bzw. Vergleichstern. Sind dann α' und α'_i die beobachteten, und α und α_i die auf das mittlere Äquinox zur Zeit T bezogenen und auch für die Epoche T gültigen Rektaszensionen des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns, so hat man, wenn A, B, C, D die in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilten, zur Reduktion auf den mittleren oder scheinbaren Ort dienenden Größen bezeichnen,

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\alpha - \alpha_i = \alpha' - \alpha'_i - [(p - p_i) + (a - a_i)A + (b - b_i)B + (c - c_i)C\\
+ (d - d_i)D + (\mu - \mu_i)(t - T)]
\end{aligned}
$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ die für die Epoche T gültige und auf das mittlere Äquinox dieser Epoche bezogene heliozentrische Rektaszension des Hauptsterns und π die Parallaxe desselben, ferner sollen $\mathfrak{a}_i$ und π_i die entsprechende Bedeutung für einen Vergleichstern haben; wenn dann

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{m}\sin\mathfrak{M} &= \sin\alpha \qquad & \mathfrak{m}_i\sin\mathfrak{M}_i &= \sin\alpha_i\\
\mathfrak{m}\cos\mathfrak{M} &= \cos\alpha\cos\varepsilon \qquad & \mathfrak{m}_i\cos\mathfrak{M}_i &= \cos\alpha_i\cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

gesetzt wird, so hat man nach § 52, (5)

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= \mathfrak{a} + R\pi\,\mathfrak{m}\,\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta\\
\alpha_i &= \mathfrak{a}_i + R\pi_i\mathfrak{m}_i\sin(\odot - \mathfrak{M}_i)\sec\delta_i
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung, daß π_i sehr klein ist, kann man in der letzten Gleichung $\mathfrak{m}_i\sec\delta_i = \mathfrak{m}\sec\delta$ und $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ annehmen; durch Subtraktion der Gleichungen (28) erhält man dann

$$
\alpha - \alpha_i = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i + (\pi - \pi_i)R\,\mathfrak{m}\,\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta
$$

Wenn nun $(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i)_0$ einen Näherungswert von $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i$, und x die Korrektion dieses Näherungswertes bedeutet, wenn ferner die Korrektion des für die Differenz der Eigenbewegungen angenommenen Wertes $\mu - \mu_i$ mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet, und $\alpha - \alpha_i - (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i)_0 = v$ gesetzt wird, so ergeben sich die zur Bestimmung von x, $\mathfrak{e}$ und $\pi - \pi_i$ dienenden Gleichungen

$$
(29)\qquad x + \mathfrak{e}(t - T) + (\pi - \pi_i)R\,\mathfrak{m}\,\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta = v
$$

Das Mittel der aus den Rektaszensionsdifferenzen zwischen dem Hauptsterne und jedem der Vergleichsterne erhaltenen Werten von $\pi - \pi_i$ gibt die relative Parallaxe des Hauptsterns an.

Die Beobachtungen stellt man am besten zu solchen Zeiten an, wo der absolute Wert des Koeffizienten von $\pi - \pi_i$ gleich oder größer als etwa 0.5 ist. Um ferner die Werte von $\pi - \pi_i$ möglichst unabhängig von einem Fehler in den Eigenbewegungen zu machen, wird man die Beobachtungen so einrichten, daß sie wenigstens drei aufeinanderfolgende Epochen des Maximums der parallaktischen Verschiebung umfassen.

Kapitel XVIII.

Sternbedeckungen.

104. Fundamentalgleichungen. Die von einem Fixstern ausgehenden und den Mond einhüllenden Strahlen können stets als zueinander parallel betrachtet werden; wenn also der Mond als kugelförmig angesehen wird, so liegen die Strahlen auf der Oberfläche eines Kreiszylinders, dessen Achse die Verbindungslinie des Mondmittelpunktes mit dem Stern, und dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser des Mondes ist. Der betreffende Zylinder wird im folgenden kurzweg als Schattenzylinder bezeichnet werden. Der Augenblick, wo die Oberfläche dieses Zylinders durch den Ort eines Beobachters hindurchgeht, bedeutet für letzteren den Anfang oder das Ende der Bedeckung des Sterns durch den Mond; zur Zeit des Ein- und Austrittes des Sterns ist also der Abstand des Beobachtungsortes von der Achse des Schattenzylinders gleich dem Durchmesser des Mondes. Dieser Satz soll nun analytisch ausgedrückt werden.

In Fig. 1 sei E der Mittelpunkt der Erde, L der Mittelpunkt des Mondes und LS die Richtung zum Stern. Durch E lege man drei zueinander senkrechte Achsen, und zwar soll die Z-Achse (EZ) parallel zu LS sein. Ist P der Ort des Pols, so werde die der Richtung EP zunächst gelegene Hälfte EY der Durchschnittslinie der Ebene ZEP mit der XY-Ebene als Y-Achse, und die zur YZ-Ebene senkrechte Linie EX als X-Achse gewählt. Um die X-Achse genauer zu definieren, setze man fest, daß, wenn $P\gamma$ den durch das Frühlingsäquinox gehenden Deklinationskreis bedeutet und γPZ die Rektaszension von Z angibt, die Rektaszension von X gleich $90^\circ + \gamma PZ$ sein soll. Da die X-Achse senkrecht zu EP ist, so fällt sie in die Durchschnittslinie des Äquators mit der XY-Ebene. Es sei jetzt M der geozentrische Ort des Mondes oder der Punkt, worin die Richtung EL verlängert die Sphäre trifft, ferner sei α die geozentrische Rektaszension, und δ die geozentrische Deklination des Mondes; es ist

Fig. 1.