universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

# Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XVIII. Sternbedeckungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

Die Beobachtungen stellt man am besten zu solchen Zeiten an, wo der absolute Wert des Koeffizienten von $\pi - \pi_i$ gleich oder größer als etwa 0.5 ist. Um ferner die Werte von $\pi - \pi_i$ möglichst unabhängig von einem Fehler in den Eigenbewegungen zu machen, wird man die Beobachtungen so einrichten, daß sie wenigstens drei aufeinanderfolgende Epochen des Maximums der parallaktischen Verschiebung umfassen.

---

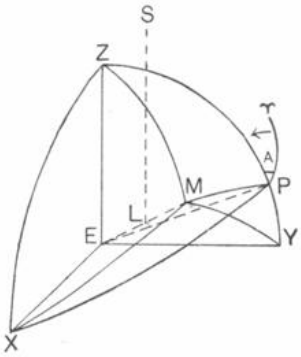
## Kapitel XVIII.

## Sternbedeckungen.

**104. Fundamentalgleichungen.** Die von einem Fixstern ausgehenden und den Mond einhüllenden Strahlen können stets als zueinander parallel betrachtet werden; wenn also der Mond als kugelförmig angesehen wird, so liegen die Strahlen auf der Oberfläche eines Kreiszylinders, dessen Achse die Verbindungslinie des Mondmittelpunktes mit dem Stern, und dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser des Mondes ist. Der betreffende Zylinder wird im folgenden kurzweg als Schattenzylinder bezeichnet werden. Der Augenblick, wo die Oberfläche dieses Zylinders durch den Ort eines Beobachters hindurchgeht, bedeutet für letzteren den Anfang oder das Ende der Bedeckung des Sterns durch den Mond; zur Zeit des Ein- und Austrittes des Sterns ist also der Abstand des Beobachtungsortes von der Achse des Schattenzylinders gleich dem Durchmesser des Mondes. Dieser Satz soll nun analytisch ausgedrückt werden.

In Fig. 1 sei $E$ der Mittelpunkt der Erde, $L$ der Mittelpunkt des Mondes und $LS$ die Richtung zum Stern. Durch $E$ lege man drei zueinander senkrechte Achsen, und zwar soll die $Z$-Achse ($EZ$) parallel zu $LS$ sein. Ist $P$ der Ort des Pols, so werde die der Richtung $EP$ zunächst gelegene Hälfte $EY$ der Durchschnittslinie der Ebene $ZEP$ mit der $XY$-Ebene als $Y$-Achse, und die zur $YZ$-Ebene senkrechte Linie $EX$ als $X$-Achse gewählt. Um die $X$-Achse genauer zu definieren, setze man fest, daß, wenn $P\gamma$ den durch das Frühlingsäquinox gehenden Deklinationskreis bedeutet und $\gamma PZ$ die Rektaszension von $Z$ angibt, die Rektaszension von $X$ gleich $90^\circ + \gamma PZ$ sein soll. Da die $X$-Achse senkrecht zu $EP$ ist, so fällt sie in die Durchschnittslinie des Äquators mit der $XY$-Ebene. Es sei jetzt $M$ der geozentrische Ort des Mondes oder der Punkt, worin die Richtung $EL$ verlängert die Sphäre trifft, ferner sei $\alpha$ die geozentrische Rektaszension, und $\delta$ die geozentrische Deklination des Mondes; es ist

Fig. 1.



dann $\gamma PM = \alpha$ und $PM = 90^\circ - \delta$. Da $EL$ verschwindend klein im Verhältnis zur Entfernung des Sterns ist, so ist auch die zu $LS$ parallele Gerade $EZ$ zum Stern gerichtet; wenn man also mit $A$ und $D$ die Rektaszension und Deklination des Sterns bezeichnet, so ist $\gamma PZ = A$ und $PZ = 90^\circ - D$.

Man setze nun $EL = r$; bedeuten dann $x$, $y$, $z$ die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes, so hat man

$$x = r \cos MEX, \qquad y = r \cos MEY, \qquad z = r \cos MEZ$$

Die hier vorkommenden Richtungscosinus von $EM$ lassen sich aus den sphärischen Dreiecken $MPX$, $MPY$, $MPZ$ bestimmen. Da nämlich $X$ der Pol des größten Kreises $ZP$ ist, so ist $PX$ und auch der Winkel $ZPX$ gleich $90^\circ$, also $MPX = 90^\circ - (\alpha - A)$; ferner ist $MPY = 180^\circ - (\alpha - A)$ und $PY = D$, endlich ist $ZPM = \alpha - A$; man erhält somit

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= r \cos\delta \sin(\alpha - A) \\ y &= r[\sin\delta \cos D - \cos\delta \sin D \cos(\alpha - A)] \\ z &= r[\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A)] \end{aligned}$$

Um $x$, $y$ und $z$ in Einheiten des Radius des Erdäquators auszudrücken, setzt man, wenn $\pi$ die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes bedeutet,

$$(2) \qquad r = \frac{1}{\sin\pi};$$

wendet man dann noch die Substitutionen an

$$(3) \qquad \begin{aligned} \nu \sin(D - i) &= \sin D \cos(\alpha - A) \\ \nu \cos(D - i) &= \cos D, \end{aligned}$$

so wird

$$(4) \qquad x = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - A)}{\sin\pi}, \qquad y = \frac{\nu \sin(\delta - D + i)}{\sin\pi}$$

Zur Zeit einer Sternbedeckung ist $\alpha - A$ ein kleiner Winkel; somit folgt aus (3), daß dann $\nu$ sich nicht viel von 1 unterscheidet, und $i$ klein ist.

Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der kleinen Größen $\log\nu$ und $i$ ist von *Küstner* angegeben worden. Aus den Gleichungen (3) folgt nämlich

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} D &= \log \operatorname{tang}(D - i) + \log \sec(\alpha - A) \\ \log\nu &= \log \cos D - \log \cos(D - i) \end{aligned}$$

Also wird für $D \equiv D + i$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang}(D + i) &= \log \operatorname{tang} D + \log \sec(\alpha - A) \\ \log\nu &= \log \cos(D + i) - \log \cos D \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt, daß $i$ die Änderung bezeichnet, welche $D$ erfährt, wenn sich $\log \operatorname{tang} D$ um $\log \sec(\alpha - A)$ ändert; ferner ergibt sich aus der zweiten Gleichung, daß $\log\nu$ den Betrag darstellt, um den sich $\log \cos D$ ändert, wenn $D$ durch $D + i$ ersetzt wird. Man hat also zunächst den $\log \sec(\alpha - A)$ zu berechnen; mit Hilfe dieses Wertes und der Differenz zwischen zwei in der Logarithmentafel aufeinander folgenden, dem jeweiligen Werte von $\log \operatorname{tang} D$ benachbarten $\log \operatorname{tang}$ erhält man $i$; der $\log\nu$ ergibt sich aus $i$ und der Differenz zwischen

zwei aufeinander folgenden, dem jeweiligen Werte von $\log \cos D$ benachbarten Tafelwerten von log cos. Das Vorzeichen von $i$ stimmt mit demjenigen von $D$ überein, $\log \nu$ ist stets negativ.

Es werde jetzt in Fig. 1 unter $L$ ein Ort auf der Erdoberfläche, also unter $M$ das geozentrische Zenit des Beobachters verstanden; wird dann der in Teilen des Radius des Erdäquators ausgedrückte Radiusvektor des Beobachtungsortes mit $\varrho$, seine geozentrische Breite mit $\varphi'$ und seine Sternzeit mit $\mu$ bezeichnet, so ist $\gamma PM = \mu$ und $PM = 90^\circ - \varphi'$. Man erhält also die für die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des Beobachtungsortes gültigen Gleichungen, indem man in (1) $r$, $\alpha$, $\delta$ durch $\varrho$, $\mu$, $\varphi'$ ersetzt. Die Gleichungen lauten

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\xi &= \varrho \cos\varphi' \sin(\mu - A) \\
\eta &= \varrho \sin\varphi' \cos D - \varrho \cos\varphi' \sin D \cos(\mu - A) \\
\zeta &= \varrho \sin\varphi' \sin D + \varrho \cos\varphi' \cos D \cos(\mu - A)
\end{aligned}
$$

Da die $Z$-Achse parallel zu der Achse des Schattenzylinders ist, so ergibt sich der Abstand $\varDelta$ des Beobachtungsortes von dieser Zylinderachse aus der Gleichung

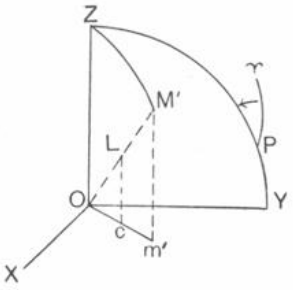
$$\varDelta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

Wie schon oben bemerkt wurde, muß $\varDelta$ zur Zeit des Ein- oder Austrittes eines Sterns gleich dem Mondradius sein; wird der in derselben Einheit wie $x$, $\xi$, $y$ und $\eta$, also in Teilen des Radius des Erdäquators ausgedrückte Halbmesser des Mondes mit $k$ bezeichnet, so erhält man als Bedingungsgleichung einer Sternbedeckung

$$(6) \qquad k^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

Diese Gleichung läßt sich auch zur Bestimmung von $k$ benutzen. Wenn nämlich eine Sternbedeckung an einem Orte beobachtet worden ist, dessen geographische Breite und Länge, letztere bezogen auf den Meridian der Mondephemeride, bekannt ist, wenn ferner der Ort des Sterns gegeben ist, und die Korrektionen der Mondephemeride bereits anderweitig, etwa durch Meridianbeobachtungen, gefunden sind, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (2) bis (5) die Werte von $x$, $y$, $\xi$ und $\eta$ berechnen (vergleiche § 106); substituiert man diese in die Gleichung (6), so ergibt sich der gesuchte Wert von $k$. Der Wert von $k$ ist gegenwärtig bereits recht genau bekannt, und zwar kann man nach *Lagrula* $\log k = 9.43544$ annehmen.

Fig. 2.




Die Gleichung (6) kann ebenfalls zur Vorausberechnung einer Sternbedeckung benutzt werden, indessen wendet man zu diesem Zwecke besser die hierunter abgeleiteten Gleichungen an. Man lege durch den Beobachtungsort $O$ drei zu den in Fig. 1 benutzten Achsen $EX$, $EY$, $EZ$ parallele Achsen $OX$, $OY$, $OZ$ (Fig. 2); $OZ$ bezeichnet demnach die Richtung zum Stern, und $OP$ die Richtung zum Pol. Ist nun $L$ das Mondzentrum und $M'$ der Punkt, in dem die Gerade $OL$ verlängert die Sphäre trifft, ist ferner $Ocm'$ die Durchschnittslinie einer durch $OZ$ und $OM'$ gelegten Ebene mit der $XY$-Ebene, und $cL$ parallel zu $OZ$, so sind die Projektionen von $Oc$ auf die $X$- und $Y$-Achse den früher mit $x - \xi$,

bzw. $y - \eta$ bezeichneten Koordinatendifferenzen gleich. Setzt man also den Winkel $YOm'$ gleich $Q$ und berücksichtigt, daß $Oc$ den vorhin mit $\varDelta$ bezeichneten Abstand des Beobachtungsortes von der Achse des Schattenzylinders darstellt, so hat man

$$x - \xi = \varDelta \sin Q, \qquad y - \eta = \varDelta \cos Q$$

Beim Ein- und Austritte ist aber $\varDelta = k$ und demnach

$$k \sin Q = x - \xi, \qquad k \cos Q = y - \eta \tag{7}$$

Wie man sieht, folgt hieraus wieder die Gleichung (6).

Mit Hilfe von $Q$ läßt sich der Punkt des Mondrandes bestimmen, an dem der Stern ein-, bzw. austritt. Zunächst ist $Q$ gleich dem sphärischen Winkel $PZM'$, und dieser stellt den Positionswinkel des Mondmittelpunktes, bezogen auf den Stern dar. Der Positionswinkel $\Pi$ des Berührungspunktes, bezogen auf den Mittelpunkt des Mondes, ist aber gleich dem Winkel, um den man $M'P$ um den Punkt $M'$ nach der Seite der wachsenden Rektaszensionen hin drehen muß, damit $M'P$ in die Richtung von $M'Z$ fällt; somit ist $\Pi = 360^\circ - PM'Z$. Im Augenblicke des Ein- oder Austrittes des Sterns berührt die Richtung $OZ$ den Mondrand; der Winkel $PM'Z$ ist dann also nur wenig von $180^\circ - Q$ verschieden. Da nun der Punkt des Mondrandes, an dem der Stern ein-, bzw. austritt, nur näherungsweise bekannt zu sein braucht, so kann man $PM'Z = 180^\circ - Q$ setzen, und erhält dann $\Pi = 180^\circ + Q$.

**105. Vorausberechnung einer Sternbedeckung für einen gegebenen Ort.** Die Vorausberechnung einer Sternbedeckung pflegt man auf dem Wege der sukzessiven Näherungen auszuführen; zum leichteren Verständnis sollen zuerst die zur Berechnung nötigen Gleichungen abgeleitet, und dann die für die praktische Anwendung derselben erforderlichen Erläuterungen hinzugefügt werden. Es sei $T$ die mittlere Zeit, welche man auf dem ersten Meridian, d. h. dem Meridian der Mondephemeride zählt, wenn, von einem gegebenen Beobachtungsort aus gesehen, der Mittelpunkt des Mondes und der Stern dieselbe Rektaszension haben; ferner sei $T + t$ die mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der an dem betreffenden Ort der Ein- oder Austritt stattfindet. Bezeichnet man nun die für die Zeit $T$ gültigen Werte von $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ mit $p$, $q$, $u$, $v$ und ihre Differentialquotienten mit $p'$, $q'$, $u'$, $v'$, so kann man für die der Zeit $T + t$ entsprechenden Werte von $x$, $y$, $\xi$ und $\eta$ in erster Näherung annehmen

$$\begin{aligned} x &= p + p't, & y &= q + q't \\ \xi &= u + u't, & \eta &= v + v't \end{aligned} \tag{8}$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (7) und setzt dann

$$\begin{aligned} m \sin M &= p - u, & n \sin N &= p' - u' \\ m \cos M &= q - v, & n \cos N &= q' - v' \end{aligned} \tag{9}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} k \sin Q &= m \sin M + tn \sin N \\ k \cos Q &= m \cos M + tn \cos N \end{aligned} \tag{10}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} k \sin (Q - N) &= m \sin (M - N) \\ k \cos (Q - N) &= m \cos (M - N) + tn \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn jetzt ein Winkel $\psi$ so bestimmt wird, daß

$$\cos\psi = \frac{m}{k}\sin(M-N) \qquad [\log k = 9.43544] \tag{12}$$

ist, so lehrt die erste der Gleichungen (11), daß $Q - N$ entweder gleich $90^\circ + \psi$ oder gleich $90^\circ - \psi$ sein muß; dementsprechend erhält man aus der zweiten der Gleichungen (11) zwei Werte für $t$, nämlich

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M-N) \mp \frac{k}{n}\sin\psi \tag{13}$$

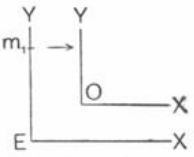
Wählt man nun für $\psi$ denjenigen der beiden aus der Gleichung (12) folgenden Werte, welcher kleiner als $180^\circ$ ist, so gilt das obere Vorzeichen in der Gleichung (13) für den Eintritt, und das untere für den Austritt des Sterns.

Dem vorigen Paragraphen zufolge ist der Positionswinkel des Sterns beim Ein- und Austritt, bezogen auf den Mittelpunkt des Mondes, gleich $180^\circ + Q$; durch Substitution der Werte $Q = 90^\circ + N \pm \psi$ erhält man demnach für den Positionswinkel beim Eintritt ($\Pi_e$), bzw. Austritt ($\Pi_a$)

$$\Pi_e = 270^\circ + N + \psi, \qquad \Pi_a = 270^\circ + N - \psi \tag{14}$$

Um die oben mit $T$ bezeichnete Zeit zu bestimmen, entnehme man zunächst aus dem Jahrbuche die mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der die geozentrische Rektaszension des Mondes der Rektaszension des Sterns gleich ist; diese Zeit, die mit $T_0$ bezeichnet werden möge, nennt man die Zeit der geozentrischen Konjunktion von Mond und Stern in Rektaszension, während $T$ als die Zeit der scheinbaren Konjunktion bezeichnet zu werden pflegt. Der Mittelpunkt des Mondes liegt also zur Zeit $T_0$ in der Ebene $PEZ$ (Fig. 1), und zur Zeit $T$ in der Ebene $POZ$ (Fig. 2). In Fig. 3 sei nun wieder $E$ der Mittelpunkt der Erde und $O$ der Beobachtungsort, $EX$, $EY$, $OX$ und $OY$ seien die in Fig. 1 und 2 benutzten Koordinatenachsen; projiziert man dann das Mondzentrum in seiner Lage zur Zeit $T_0$ auf die Ebene $EXY$, so fällt diese Projektion in die $Y$-Achse, beispielsweise in den Punkt $m_1$. Ist jetzt $\xi_0$ die ebenfalls für die Zeit $T_0$ gültige, auf die Achse $EX$ bezogene Koordinate von $O$, so erhält man die Zeit $T$, indem man $\xi_0$ durch die auf die $X$-Achse bezogene Komponente der relativen Geschwindigkeit des Mondes gegen den Beobachtungsort dividiert und den Quotienten zu $T_0$ hinzufügt. Wenn also $p'_0$ und $u'_0$ die für die Zeit $T_0$ gültigen Werte von $p'$ und $u'$ bedeuten, so ist annähernd

Fig. 3.




$$T = T_0 + \frac{\xi_0}{p'_0 - u'_0} \tag{15}$$

Zur Berechnung von $\xi_0$ verwandle man zuerst $T_0$ in Sternzeit und addiere zu letzterer die Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian (westlich vom ersten Meridian positiv gerechnet); man erhält so die der mittleren Zeit $T_0$ des ersten Meridians entsprechende Sternzeit des Beobachtungsortes. Wird diese mit $\mu_0$ bezeichnet, so folgt aus der ersten der Gleichungen (5)

$$\xi_0 = \varrho\cos\varphi'\sin(\mu_0 - A) \tag{16}$$

Den Wert von $p'_0$ erhält man, indem man die erste Gleichung (4) differenziert und dann die für die Zeit $T_0$ gültige Bedingung $\alpha = A$ einführt; dabei können aber $\delta$ und $\pi$ als konstant betrachtet werden. Es ergibt sich so

$$p'_0 = \frac{\cos\delta\, d\alpha}{\sin\pi}$$

Wenn nun $[\Delta\alpha]$ die in Zeitsekunden ausgedrückte Änderung der geozentrischen Rektaszension des Mondes in einer Stunde mittlerer Zeit bedeutet, so ist der auf diese Zeiteinheit bezogene und in Teilen des Radius ausgedrückte Wert von $d\alpha = [\Delta\alpha]\, 15 \sin 1''$; damit wird

$$p'_0 = \frac{[\Delta\alpha]\, 15 \sin 1'' \cos\delta}{\sin\pi} \tag{17}$$

Um $u'_0$ abzuleiten, hat man die erste der Gleichungen (5) zu differenzieren und dabei zu berücksichtigen, daß sich die Sternzeit in einer Stunde mittlerer Zeit um $3609^s.86$ ändert; wenn also

$$3609.86 \times 15 \sin 1'' = \lambda \qquad (\log\lambda = 9.41915) \tag{18}$$

gesetzt wird, so erhält man den auf die mittlere Stunde als Zeiteinheit bezogenen und in Teilen des Radius ausgedrückten Wert

$$u'_0 = \lambda\varrho \cos\varphi' \cos(\mu_0 - A) \tag{19}$$

Substituiert man die in (16) und (19) gegebenen Werte von $\xi_0$ und $u'_0$ in die Gleichung (15), so ergibt sich

$$T = T_0 + \frac{\varrho \cos\varphi' \sin(\mu_0 - A)}{p'_0 - \lambda\varrho \cos\varphi' \cos(\mu_0 - A)} \tag{20}$$

Der Wert von $p'_0$ schwankt zwischen 0.50 und 0.62; hat man nun für denselben Ort viele Sternbedeckungen vorauszuberechnen, so empfiehlt es sich, eine Tafel anzulegen, welche mit dem Argument $\mu_0 - A$ für $p'_0 = 0.50$ und $p'_0 = 0.60$ die Werte des Quotienten

$$\tau = \frac{\varrho \cos\varphi' \sin(\mu_0 - A)}{p'_0 - \lambda\varrho \cos\varphi' \cos(\mu_0 - A)} \tag{21}$$

gibt; eine einfache Interpolation liefert dann den einem beliebigen Werte von $p'_0$ zugehörigen Wert von $\tau$. Da bei der Berechnung von $p'_0$ und $u'_0$ eine mittlere Stunde als Zeiteinheit gewählt wurde, so erscheint auch $\tau$ in dieser Einheit ausgedrückt. Der Nenner des Ausdrucks für $\tau$ ist stets positiv; $\tau$ ist also positiv für $0^h < \mu_0 - A < 12^h$, und negativ für $12^h < \mu_0 - A < 24^h$.

Hat man die Zeit $T = T_0 + \tau$ gefunden, so lassen sich auch die ihr entsprechenden, oben mit $p$ und $q$ bezeichneten Werte von $x$ und $y$ berechnen. Zunächst folgt aus den Gleichungen (1) und (2), wenn $p_0$, $q_0$ und $q'_0$ die für die Zeit $T_0$, also für $\alpha = A$ gültigen Werte von $p$, $q$ und $q'$ bedeuten, und $\Delta\delta$ die Änderung der geozentrischen Deklination des Mondes in einer Stunde mittlerer Zeit angibt,

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = \frac{\sin(\delta - D)}{\sin\pi}, \qquad q'_0 = \frac{\cos(\delta - D)}{\sin\pi}\, \Delta\delta \sin 1'' \tag{22}$$

Die Werte von $q_0$ und $q'_0$ sowie auch den aus (17) folgenden Wert von $p'_0$ findet man in den Jahrbüchern unter den »Elementen der Sternbedeckungen« angegeben; mit ihrer Hilfe erhält man dann

$$p = p'_0 \tau, \qquad q = q_0 + q'_0 \tau \tag{23}$$

Diese Werte hat man in die Gleichungen (9) zu substituieren, während für die nur wenig veränderlichen Differentialquotienten $p'$ und $q'$ ihre der Zeit $T_0$ entsprechenden Werte beibehalten werden können.

Um $u$, $v$, $u'$ und $v'$ zu berechnen, ist in den Gleichungen (5) die der mittleren Zeit des ersten Meridians $T_0 + \tau$ zugehörige Ortssternzeit $\mu$ zu benutzen; da der mittleren Zeit $T_0$ die bereits vorhin gefundene Ortssternzeit $\mu_0$ entspricht, so wird, wenn $\varepsilon$ die Reduktion des Zeitintervalls $\tau$ auf Sternzeit bedeutet,

$$\mu = \mu_0 + \tau + \varepsilon \tag{24}$$

oder mit einer für den vorliegenden Zweck vollkommen ausreichenden Genauigkeit

$$\mu = \mu_0 + \tau \tag{24a}$$

Aus (5), bzw. aus den durch Differentiation von (5) gewonnenen Gleichungen erhält man dann

$$\begin{aligned} u &= \varrho \cos\varphi' \sin(\mu - A) \\ v &= \varrho \sin\varphi' \cos D - \varrho \cos\varphi' \sin D \cos(\mu - A) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda\varrho \cos\varphi' \cos(\mu - A) \\ v' &= \lambda\varrho \cos\varphi' \sin D \sin(\mu - A) \end{aligned} \tag{25a}$$

Damit sind nun alle für die Auflösung der Gleichungen (9) bis (14) notwendigen Größen bekannt.

Bezeichnet man die aus (13) für den Ein- und Austritt erhaltenen Werte von $t$ mit $t_e$ und $t_a$, so geben $T + t_e$ und $T + t_a$ die mittleren Zeiten des ersten Meridians an, zu denen der Stern am Beobachtungsort verschwindet, bzw. wiedererscheint. Bedeutet jetzt $l$ die auf den ersten Meridian bezogene, westlich von diesem positiv gerechnete Länge des Beobachtungsortes, so erhält man als mittlere Ortszeiten des Ein-, bzw. Austrittes $T + t_e + l$, bzw. $T + t_a + l$.

Will man die in der oben erläuterten Weise abgeleitete Zeit des Ein- und Austrittes noch schärfer bestimmen, so berechne man zunächst für den genähert bekannten Moment $\mathfrak{E}$ des Eintrittes die Werte von $p$, $q$, $u$, $v$, ..., und wende dann wiederum die Gleichungen (9) bis (13) an. Es ergeben sich damit zwei Werte von $t$, von denen der der Zeit $\mathfrak{E}$ zunächst gelegene ($\mathfrak{t}_e$) eine genauere Zeit $\mathfrak{E} + \mathfrak{t}_e$ des Eintrittes liefert, während der andere ($\mathfrak{t}_a$) zu einer rohen Zeitangabe $\mathfrak{E} + \mathfrak{t}_a$ für den Austritt führt und zu verwerfen ist. Desgleichen sind auch für die in erster Näherung erhaltene Zeit $\mathfrak{A}$ des Austrittes $p$, $q$, $u$, $v$, ... von neuem zu berechnen und dann die Gleichungen (9) bis (13) nochmals aufzulösen. Bezeichnet man den kleineren der beiden so für $t$ erhaltenen Werte mit $\mathfrak{t}'_a$, so ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{t}'_a$ die genauere Zeit des Austrittes; der andere Wert von $t$ ist wieder zu vernachlässigen.

Wenn die vorauszuberechnenden Sternbedeckungen zahlreich sind und sich auf ein relativ kurzes Zeitintervall verteilen, wenn also beispielsweise für eine totale

Mondfinsternis auch die Ein- und Austritte der schwachen Sterne vorausbestimmt werden sollen, so empfiehlt sich die Anwendung eines graphischen Verfahrens. Man bedient sich zu diesem Zwecke einer in größerem Maßstabe gezeichneten oder photographisch hergestellten Sternkarte. Für das Zeitintervall, welches für die Beobachtungen in Frage kommt, nimmt man etwa für jede halbe Stunde den geozentrischen Ort des Mondes aus der Ephemeride, bringt an diesen die Parallaxe an und trägt die so erhaltenen scheinbaren Örter des Mondzentrums in die Karte ein; gleichzeitig vermerkt man bei jedem Ort die ihm entsprechende Zeit. Verbindet man die das Mondzentrum darstellenden Punkte durch eine Kurve, so gibt diese den scheinbaren Lauf des Mondes an; mit Hilfe der beigeschriebenen Zeiten läßt sich ferner für jeden Punkt der Kurve bestimmen, wann er mit dem Zentrum des Mondes zusammenfallen wird. Bedeutet nun $d$ den vom Mittelpunkte der Erde und $d'$ den vom Beobachtungsort aus gesehenen Radius des Mondes, so ist annähernd, wenn unter $\pi$ die Horizontal-Äquatorealparallaxe des Mondes, und unter $\zeta$ seine geozentrische Zenitdistanz verstanden wird,

$$d' = d(1 + \sin\pi \cos\zeta)$$

Offenbar muß ein Stern, dessen Abstand von der oben erwähnten Kurve kleiner als $d'$ ist, vom Monde bedeckt werden. Beschreibt man um einen solchen Stern einen Kreis mit dem Radius $d'$, so schneidet dieser die Kurve im allgemeinen in zwei Punkten, welche die Lage des Mondzentrums zu den Zeiten des Ein- und Austrittes angeben; diese Zeiten selbst erhält man unmittelbar mittels der vorhin erwähnten, in der Kurve gemachten Zeitangaben. Der Winkel, den die Richtung von einem Durchschnittspunkte der Kurve zum Stern hin mit der Richtung von dem Durchschnittspunkte zum Pol hin bildet, von letzterer aus in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen hin gezählt, gibt den Positionswinkel des Ein-, bzw. Austrittspunktes an.

**106. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen.** **Erste Methode.** Die Beobachtungen der Sternbedeckungen bieten ein vorzügliches Mittel, sowohl die Länge des Beobachtungsortes als auch die Parallaxe, den Halbmesser und den Ort des Mondes zu bestimmen. Die Bestimmung der Länge des Beobachtungsortes ist aber nur dann möglich, wenn man den Ort des Mondes, bzw. die Fehler der Mondephemeride kennt, und umgekehrt muß die Länge des Beobachtungsortes bekannt sein, wenn man die Fehler der Mondephemeride finden will. Was die in den Gleichungen auftretenden Koordinaten der bedeckten Sterne betrifft, so lassen sich diese durch Meridianbeobachtungen mit so großer Genauigkeit bestimmen, daß sie hier als fehlerfrei betrachtet werden können.

Es werde jetzt angenommen, daß man die Korrektionen der Mondephemeride in irgend einer Weise — sei es durch Meridianbeobachtungen, sei es durch das im folgenden Paragraphen angegebene Verfahren — bestimmt habe und nun eine beobachtete Sternbedeckung zur Ableitung der Länge des Beobachtungsortes benutzen wolle. Zu diesem Zwecke kann man von den Gleichungen (7) Gebrauch machen. Mit Hilfe der Gleichungen (5), in denen $\mu$ als beobachtete Größe bekannt ist, lassen sich zunächst die in (7) vorkommenden Koordinaten $\xi$ und $\eta$ berechnen; dabei ist

aber noch etwas zu berücksichtigen, was bisher vernachlässigt wurde. Die Gleichungen (6) und (7) setzen voraus, daß der durch die Koordinaten $\xi$ und $\eta$ definierte Punkt auf der Oberfläche des Schattenzylinders liege. Es möge jetzt die in § 77, Fig. 2 mit $Sa$ bezeichnete Gerade einen der genannten Zylinderfläche angehörigen Strahl bedeuten; infolge der Refraktion wird dieser nach $b$, $c$, $E$ abgelenkt, und somit nimmt ein in $E$ befindlicher Beobachter eine Bedeckung des Sterns durch den Mond wahr. Die früher gemachte Annahme, daß der Beobachtungsort zurzeit des Ein- und Austrittes auf der Oberfläche des Schattenzylinders liege, ist also nicht richtig; wohl aber liegt der Punkt $s$, in dem der Strahl $Sa$ verlängert die Richtung $CZ$ trifft, auf jener Oberfläche. In den Gleichungen (6) und (7) darf man darum unter $\xi$ und $\eta$ nicht die Koordinaten des Beobachtungsortes verstehen, dagegen ist es erlaubt, für $\xi$ und $\eta$ ihre dem Punkte $s$ entsprechenden Werte zu substituieren. Da die Zeit, in der das Licht die Strecke $as$ zurücklegt, nur unmerklich von derjenigen verschieden ist, welche das Licht gebraucht, um den Bogen $abcE$ zu durchlaufen, so erhält man die Koordinaten von $s$, wenn man in den Gleichungen (5) $\mu$ gleich der beobachteten Zeit des Ein-, bzw. Austrittes annimmt und für $\varrho$ die Entfernung des Punktes $s$ vom Mittelpunkte der Erde substituiert. Wird letztere mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet, und setzt man $CE$ oder die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde gleich $r_0$, und $Es = \mathfrak{x}$, so ist $\bar{\varrho} = r_0 + \mathfrak{x}$. Bedeutet aber $\mathfrak{m}_0$ den Brechungsexponenten der Luft am Beobachtungsort, $z$ die scheinbare, und $z_0$ die wahre Zenitdistanz des Ein-, bzw. Austrittspunktes, so hat man nach § 77, Gleichung ($37^a$), wenn die dort angewandten Bezeichnungen $x$, $\mu_0$ und $\zeta$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{m}_0$ und $z_0$ ersetzt werden,

$$\mathfrak{x} = r_0 \left( \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0} - 1 \right)$$

Somit wird

$$\bar{\varrho} = r_0 \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$$

Ist nun $h$ die Seehöhe des Beobachtungsortes, und bezeichnet man mit $\varrho$ die Entfernung eines im Meeresniveau und unter derselben Breite wie der Beobachtungsort gelegenen Punktes vom Zentrum der Erde, so ergibt sich $r_0 = \varrho + h$ und demnach

$$\bar{\varrho} = \varrho \left( 1 + \frac{h}{\varrho} \right) \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$$

Bei der Berechnung von $h : \varrho$ kann man für $\varrho$ seinen mittleren Wert $6\,366\,000^{\mathrm{m}}$ annehmen; drückt man auch $h$ in Metern aus, so folgt dann

$$\bar{\varrho} = \varrho (1 + 0.000\,000\,157 h) \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0} \tag{26}$$

Um $\bar{\varrho}$ in Teilen des Äquatorealradius der Erde ausgedrückt zu erhalten, hat man in der letzten Gleichung an Stelle von $\varrho$ den in § 67, ($2^a$) mit $[\varrho]$ bezeichneten Wert anzuwenden, also

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')} \qquad [e = 0.081\,826] \tag{$26^a$}$$

zu setzen, wobei $\varphi$ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet.

Der Wert von $\mathfrak{m}_0$ hängt von dem Luftdruck und der Temperatur ab. Legt man aber auch hier einen mittleren Wert zugrunde, so kann der Faktor $\mathfrak{m}_0 \sin z : \sin z_0$ in eine Tafel mit dem Argument $z_0$ gebracht werden; besser ist es noch, den aus (5) für $\varrho = 1$ folgenden Wert von $\log \zeta$, welcher nahe gleich $\log \cos z_0$ ist, als Argument zu wählen. Man erhält so:

| $\log \zeta$ | $\frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$ | $\log \zeta$ | $\frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$ |
|---|---|---|---|
| 9.6 | 0.000001 | 9.2 | 0.000005 |
| 9.5 | 0.000001 | 9.1 | 0.000008 |
| 9.4 | 0.000002 | 9.0 | 0.000012 |
| 9.3 | 0.000003 | 8.9 | 0.000017 |

Mit Benutzung dieser Tafel läßt sich aus (26) und (26[a]) der zur Berechnung der Koordinaten $\xi$ und $\eta$ des Punktes $s$ nötige Wert von $\bar{\varrho}$ ableiten.

Um die für die Gleichungen (7) zu benutzenden Werte von $x$ und $y$ zu erhalten, schlägt man den folgenden Weg ein. Es ist immer möglich, einen genäherten Wert für die Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian, zu finden — so z. B. mit Hilfe einer Karte, oder, wenn die Beobachtung zur See angestellt worden ist, mit Hilfe einer Zeitbestimmung und der Vergleichung der Ortszeit mit der durch die an Bord befindliche Uhr genähert bekannten Zeit eines Hauptmeridians der Erde —; sollte übrigens auch die angenommene Länge ziemlich fehlerhaft sein, so wird man durch die wiederholte Anwendung des hierunter erläuterten Verfahrens doch zu einem genauen Wert der Länge gelangen. Wird die angenommene Länge mit $l_0$ bezeichnet, und rechnet man $l_0$ westlich von dem ersten Meridian positiv, so entspricht der Ortssternzeit $\mu$ die genäherte Sternzeit $\mu + l_0$ des ersten Meridians; die dieser entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians sei $T'$. Man entnehme nun aus der Mondephemeride für die der Zeit $T'$ zunächst gelegene volle Stunde $T_m$ sowie auch für je eine oder zwei dieser Stunde unmittelbar vorausgehende, bzw. folgende Stunden die Werte von $\alpha$ und $\delta$, bringe an $\alpha$ und $\delta$ ihre als bekannt vorausgesetzten Korrektionen an und leite außerdem mit Hilfe der Mondtafeln die Werte von $\pi$ ab; indem man sodann von den Gleichungen (3) bis (4) Gebrauch macht, kann man die für die betreffenden Stunden gültigen Werte von $x$ und $y$ berechnen. Bildet man hierauf die Differenzen zwischen den $x$, bzw. $y$, so lassen sich mittels der Formel § 4, (24) die für den Beginn der einzelnen Stunden gültigen Werte der ersten Differentialquotienten von $x$ und $y$ ($x'$, bzw. $y'$) bestimmen; diese können auch als die mittleren Änderungen von $x$ und $y$ in einer Stunde mittlerer Zeit bezeichnet werden. Nachdem man so die Werte gefunden hat, welche $x$, $y$, $x'$ und $y'$ für die Zeit $T_m$ und für die dieser vorausgehenden und folgenden Stunden haben, kann man durch Interpolation ihre der Zeit $T'$ entsprechenden Werte finden.

Es sei nun $l = l_0 + \Delta l$ die wahre Länge des Beobachtungsortes, und $T' + \tau'$ die der Sternzeit $\mu + l$ entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians; ferner seien $x_0$, $y_0$, $x_0'$, $y_0'$ die Werte von $x$, $y$, $x'$, $y'$ zur Zeit $T'$. Wenn dann $\tau'$ hinreichend klein ist, so erhält man für die Koordinaten des Mondes zur Zeit $T' + \tau'$

$$x = x_0 + x_0'\tau', \qquad y = y_0 + y_0'\tau'$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (7) und setzt

$$(27)\qquad \begin{aligned} m' \sin M' &= x_0 - \xi & n' \sin N' &= x_0' \\ m' \cos M' &= y_0 - \eta & n' \cos N' &= y_0', \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} k \sin Q &= m' \sin M' + \tau' n' \sin N' \\ k \cos Q &= m' \cos M' + \tau' n' \cos N' \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(28)\qquad \begin{aligned} k \sin (Q - N') &= m' \sin (M' - N') \\ k \cos (Q - N') &= m' \cos (M' - N') + \tau' n' \end{aligned}$$

Der ersten dieser Gleichungen genügen zwei Werte von $Q - N'$; wird der eine mit $\psi'$ bezeichnet, so ist der andere gleich $180 - \psi'$. Demnach erhält man aus der zweiten der Gleichungen (28)

$$(29)\qquad \tau' = -\frac{m'}{n'} \cos (M' - N') \mp \frac{k}{n'} \cos \psi'$$

Versteht man unter $\psi'$ den positiven oder negativen spitzen Winkel, welcher der Gleichung

$$(29^a)\qquad \sin \psi' = \frac{m'}{k} \sin (M' - N')$$

genügt, so entspricht das obere Vorzeichen in (29) dem Ein-, und das untere dem Austritt des Sterns.

Da $x_0'$ und $y_0'$ die Änderungen von $x_0$ und $y_0$ in einer Stunde mittlerer Zeit bedeuten, so bezieht sich auch $n'$ auf diese Zeiteinheit, und demnach ist der aus (29) folgende Wert von $\tau'$ in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückt. Die der beobachteten Ortssternzeit $\mu$ des Ein- oder Austrittes zugehörige mittlere Zeit des ersten Meridians, nämlich $T' + \tau'$, ist also jetzt bekannt; verwandelt man diese in Sternzeit ($\Theta$), so wird die gesuchte Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian, gleich $\Theta - \mu$. Um $T' + \tau'$ in Sternzeit zu verwandeln, berücksichtige man, daß $T'$ die der Sternzeit $\mu + l_0$ des ersten Meridians entsprechende mittlere Zeit bedeutet; man hat also nur noch $\tau'$ in Sternzeit zu verwandeln, und dies geschieht dadurch, daß man $\tau'$ mit der in einer Stunde mittlerer Zeit enthaltenen Zahl von Sternzeitsekunden, also mit $3609^s.86$ multipliziert. Es wird somit $\Theta = \mu + l_0 + 3609^s.86\,\tau'$. Substituiert man für $\tau'$ seinen in (29) gegebenen Wert, so folgt für die Länge des Beobachtungsortes

$$(30)\qquad l = l_0 - \frac{3609^s.86\, m'}{n'} \cos (M' - N') \mp \frac{3609^s.86\, k}{n'} \cos \psi',$$

wo das obere Vorzeichen für den Ein-, und das untere für den Austritt anzuwenden ist.

Ist $l$ stark von $l_0$ verschieden, so kann man die vorige Rechnung wiederholen, indem man dabei $\mu + l$ als die der Ortssternzeit $\mu$ entsprechende Sternzeit des ersten Meridians annimmt, diese in mittlere Zeit verwandelt und die für letztere gültigen Werte $x_0$, $y_0$, $x_0'$, $y_0'$ ableitet. Die Anwendung der Gleichungen (27) bis ($29^a$) führt dann zu einem neuen Wert von $\tau'$; wird dieser mit $\tau_1'$ bezeichnet, so erhält man als genaueren Wert der Länge des Beobachtungsortes

$$l_1 = l + 3609^s.86\, \tau_1'$$

**107. Bestimmung des Ortes, des Halbmessers und der Parallaxe des Mondes aus Beobachtungen von Sternbedeckungen.** Diese Bestimmung ist, wie schon bemerkt, nur dann möglich, wenn die auf den ersten Meridian bezogene Länge des Beobachtungsortes bekannt ist. Es sei wieder $\mu$ die beobachtete Ortssternzeit der Bedeckung, $\mu + l$ die dieser entsprechende Sternzeit des ersten Meridians, und $T'$ die zugehörige mittlere Zeit des ersten Meridians. Man entnehme zunächst aus der Mondephemeride für die der Zeit $T'$ benachbarte volle Stunde sowie für je eine oder zwei dieser Stunde vorausgehende und folgende Stunden die Werte von $\alpha$ und $\delta$, und berechne mittels der Mondtafeln die zugehörigen Werte von $\pi$. Wendet man alsdann die Gleichungen (3) und (4) an, so erhält man für $x$ und $y$ je drei oder fünf Werte und kann mit deren Hilfe die der Zeit $T'$ entsprechenden Werte von $x$ und $y$ finden; letztere mögen mit $x_0$ und $y_0$ bezeichnet werden.

Es seien jetzt $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\pi$ die Korrektionen der angenommenen Werte von $\alpha$, $\delta$ und $\pi$. Um die diesen Korrektionen entsprechenden Änderungen von $x$ und $y$ zu erhalten, differenziere man die Gleichungen (1); setzt man dabei $r = 1 : \sin\pi$, so folgt

$$dx = \frac{\cos\delta\cos(\alpha - A)}{\sin\pi}\Delta\alpha - \frac{\sin\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\pi}\Delta\delta - x\operatorname{cotg}\pi\cdot\Delta\pi$$

$$dy = \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\pi}\sin D\Delta\alpha + [\cos\delta\cos D + \sin\delta\sin D\cos(\alpha - A)]\frac{\Delta\delta}{\sin\pi} - \\ - y\operatorname{cotg}\pi\cdot\Delta\pi$$

Hier läßt sich $\Delta\pi$ durch die Korrektion des für die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes angenommenen Wertes $\pi_0$ ersetzen. Bezeichnet man nämlich die Entfernung des Mondes von der Erde zur Zeit der Beobachtung mit $r$, und die mittlere Entfernung des Mondes mit $r_0$, so ist

$$r\sin\pi = r_0\sin\pi_0$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt, wenn $\cos\pi = \cos\pi_0$ und $\sin\pi\, dr = \sin\pi_0 dr_0$ gesetzt wird,

$$\Delta\pi = \frac{r_0}{r}\Delta\pi_0 = \frac{\sin\pi}{\sin\pi_0}\Delta\pi_0$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichungen für $dx$ und $dy$, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4)

$$dx = x\operatorname{cotg}(\alpha - A)\Delta\alpha - x\operatorname{tang}\delta\Delta\delta - x\cos\pi\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}$$

$$dy = x\sin D\Delta\alpha + \frac{\nu\cos(\delta - D + i)}{\sin\pi}\Delta\delta - y\cos\pi\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}$$

oder, wenn

$$(31)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a} = -x\operatorname{cotg}(\alpha - A), && \mathfrak{b} = x\operatorname{tang}\delta, && \mathfrak{p} = x\cos\pi \\ &\mathfrak{a}' = -x\sin D, && \mathfrak{b}' = -\frac{\nu\cos(\delta - D + i)}{\sin\pi}, && \mathfrak{p}' = y\cos\pi \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(32)\qquad \begin{aligned} -dx &= \mathfrak{a}\Delta\alpha + \mathfrak{d}\Delta\delta + \mathfrak{p}\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} \\ -dy &= \mathfrak{a}'\Delta\alpha + \mathfrak{d}'\Delta\delta + \mathfrak{p}'\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\pi_0 : \sin\pi_0$ kann man gleichzeitig mit $x$ und $y$ von Stunde zu Stunde berechnen; es ergeben sich dann durch Interpolation ihre für die Zeit $T'$ gültigen Werte.

Die wahren Koordinaten des Mondes zur Zeit $T'$ sind nun $x_0 + dx$, $y_0 + dy$; substituiert man diese in die Gleichung (6), so erhält man, wenn mit $\Delta k$ die Korrektion des für $k$ angenommenen Wertes $k_0$ bezeichnet wird,

$$(k_0 + \Delta k)^2 = (x_0 + dx - \xi)^2 + (y_0 + dy - \eta)^2$$

oder, mit Vernachlässigung der Quadrate von $\Delta k$, $dx$ und $dy$,

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - k_0^2 + 2(x_0 - \xi)dx + 2(y_0 - \eta)dy - 2k_0\Delta k = 0$$

In diese Gleichung hat man die in (32) gegebenen Ausdrücke einzuführen. Setzt man dann

$$(33)\qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - k^2] \\ M &= \mathfrak{a}(x_0 - \xi) + \mathfrak{a}'(y_0 - \eta) \\ N &= \mathfrak{d}(x_0 - \xi) + \mathfrak{d}'(y_0 - \eta) \\ P &= \mathfrak{p}(x_0 - \xi) + \mathfrak{p}'(y_0 - \eta) \end{aligned}$$

wo nun $\xi$ und $\eta$ die Werte bedeuten, welche man aus (5) erhält, wenn für $\varrho$ der aus (26) und ($26^a$) folgende Wert von $\bar{\varrho}$ substituiert wird, so ergibt sich

$$(34)\qquad k_0\Delta k + M\Delta\alpha + N\Delta\delta + P\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} = L$$

Jeder beobachtete Ein- oder Austritt liefert eine solche Bedingungsgleichung. Um aus einer Reihe derartiger Gleichungen die Parallaxe des Mondes bestimmen zu können, müssen die Sternbedeckungen an weit voneinander entfernten Orten beobachtet werden. Verfügt man aber nur über Beobachtungen, welche an einer einzigen Sternwarte angestellt worden sind, so begnügt man sich damit, — vorausgesetzt, daß die Zahl der Beobachtungen hinreichend groß ist —, $\Delta k$, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ als Funktionen von $\Delta\pi_0$ zu bestimmen. Für eine gute gleichzeitige Bestimmung von $\Delta k$ und $\Delta\alpha$ ist es notwendig, außer den Eintritten auch eine Anzahl von Austritten zu beobachten. Wie sehr durch die Beobachtung beider Phänomene die Genauigkeit der Resultate gesteigert wird, geht aus einer Untersuchung *Lagrulas* hervor, der unter der Bedingung, daß die Durchschnittspunkte eines Monddurchmessers mit den relativen Bahnen der Sterne gleichmäßig über den Durchmesser verteilt sind, die Gewichte von $\sin\pi_0\Delta k$ und $\Delta\alpha$ für die Fälle berechnete, 1. daß entweder 20 Eintritte oder ebensoviele Austritte beobachtet sind, 2. daß 10 Beobachtungen von Eintritten und 10 von Austritten vorliegen; es ergab sich

| | I | II |
|---|---|---|
| Gewicht von $\sin\pi_0\Delta k$ | 4.58 | 20.00 |
| » » $\Delta\alpha$ | 2.74 | 11.98 |

Die Beobachtungen am hellen Rande des Mondes sind, namentlich bei schwächeren Sternen, erheblich unsicherer als die am dunklen Rand erhaltenen; die auf ersteren beruhenden Bedingungsgleichungen haben demnach ein geringeres Gewicht. Nach *Lagrula* kann man einer Bedingungsgleichung in erster Näherung das Gewicht 1 oder $\frac{1}{2}$ geben, jenachdem der Ein-, bzw. Austritt am dunklen oder am hellen Rand beobachtet wurde. Bildet man unter dieser Annahme die Normalgleichungen und substituiert deren Lösungen in die Bedingungsgleichungen, so läßt sich mit Hilfe der übrig bleibenden Fehler feststellen, ob die zu Anfang über die Gewichte gemachte Annahme einer Verbesserung bedarf.

Ist die Zahl der an einem Abend erhaltenen Beobachtungen klein, so lassen sich die Gleichungen (34) nur dazu benutzen, die bei den gegenwärtig zu Gebote stehenden Mondtafeln immer noch beträchtlichen Korrektionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ als Funktionen von $\Delta k$ und $\Delta\pi_0$ darzustellen. Wenn es dann späterhin gelingt, die gegenwärtig für $\pi_0$ und $k$ gemachten, bereits sehr nahe richtigen Annahmen noch weiter zu verbessern, so erhält man sofort die den neuen Werten von $\pi_0$ und $k$ entsprechenden $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$.

Hat man die Werte von $k$ und $\pi_0$ gefunden, so läßt sich auch der Winkel $w$ bestimmen, unter dem der Mondradius, in der mittleren Entfernung $r_0$ des Mondes von der Erde, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird. Man hat nämlich der Definition von $k$ gemäß, wenn $s$ und $a$ die linearen Halbmesser des Mondes, bzw. des Erdäquators bedeuten,

$$k = \frac{s}{a} = \frac{s}{r_0 \sin \pi_0} \tag{35}$$

also, da $\sin w = s : r_0$ ist,

$$\sin w = k \sin \pi_0 \tag{36}$$

Bisher ist der Rand der Mondscheibe als kreisförmig betrachtet worden; diese Annahme ist indessen nicht streng erfüllt, vielmehr sind am Mondrand Erhebungen und Vertiefungen deutlich wahrnehmbar. Mit Hilfe einer photographischen Aufnahme lassen sich die Erhöhungen und Vertiefungen in bezug auf einen idealen kreisförmigen Rand des Mondes ermitteln; es hat sich dabei gezeigt, daß der wahre Rand nicht nur an einzelnen Punkten, sondern wiederholt in einer Ausdehnung von mehreren Graden über das mittlere Niveau hinausragt, bzw. unter dasselbe herabsinkt. Wenn es nun auch mit großen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, auf die isolierten Unebenheiten des Mondrandes Rücksicht zu nehmen, so läßt sich doch die Erhebung oder Vertiefung größerer Strecken des Randes ohne Mühe in Rechnung ziehen. Ist nämlich $r$ die Entfernung des Mondes von der Erde zur Zeit der Beobachtung, und $w'$ der Winkel, unter dem dann der Radius des idealen kreisförmigen Mondrandes vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird, ist ferner $\Delta w'$ die aus den Mondphotographien abgeleitete, in Winkelmaß ausgedrückte Erhöhung des wirklichen Mondrandes über den idealen Rand, so ergibt sich die Erhöhung in linearem Maß gleich $r\Delta w'$. In der Gleichung (35) ist also $s$ durch $s_0 + r\Delta w'$ zu ersetzen, wo unter $s_0$ der lineare Radius des idealen Mondrandes zu verstehen ist; der für die Gleichung (6) zu verwendende Wert von $k$ wird demnach

$$k = \frac{s_0 + r\Delta w'}{a} = \frac{s_0}{a} + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$$

Bedeutet nun $k_0$ einen angenommenen Wert von $s_0 : a$, und $\Delta k_0$ die Korrektion desselben, so folgt

$$k = k_0 + \Delta k_0 + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$$

Man hat also in der Gleichung (34) $\Delta k$ durch $\Delta k_0 + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$ zu ersetzen und erhält dann als Bedingungsgleichung

$$k_0 \Delta k_0 + M \Delta \alpha + N \Delta \delta + P \frac{\Delta \pi_0}{\sin \pi_0} = L - k_0 \frac{\Delta w'}{\sin \pi} \tag{37}$$

Die Summe $k_0 + \Delta k_0$ stellt den Radius des idealen Mondrandes, gemessen in Teilen des Radius des Erdäquators, dar, und der Sinus des Winkels, unter dem dieser Radius in der mittleren Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird, ist nach (36) gleich $(k_0 + \Delta k_0) \sin \pi_0$.

Zu dem Vorstehenden ist noch eine Bemerkung zu machen. Da die sogenannte Libration des Mondes zur Folge hat, daß die Grenze des Mondrandes nicht immer durch dieselben Gebilde der Mondoberfläche hindurchgeht, sondern in bezug auf letztere periodischen Schwankungen unterworfen ist, so muß man, um auf die Abweichungen des Mondes von der Kugelgestalt Rücksicht nehmen zu können, die auf ein fest mit dem Mondkörper verbundenes Achsensystem bezogenen Koordinaten des Ein-, bzw. Austrittspunktes kennen. In welcher Weise man diese Koordinaten bestimmt, wird im 21. Kapitel gezeigt werden.

**108. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen. Zweite Methode.** Für die Ermittlung der Länge eines Beobachtungsortes kann man auch die Gleichung (34), bzw. (37) benutzen. Wenn $\mu$ wieder die Ortssternzeit eines beobachteten Ein- oder Austrittes, $l_0$ die auf den ersten Meridian bezogene genäherte Länge des Beobachtungsortes, $\Delta l$ die in Zeitsekunden ausgedrückte Korrektion von $l_0$, $\alpha$ und $\delta$ die für die der Sternzeit $\mu + l_0$ entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians aus der Ephemeride entnommene Rektaszension und Deklination des Mondes bedeuten und die an $\alpha$ und $\delta$ anzubringenden, als bekannt vorausgesetzten Korrektionen mit $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ bezeichnet werden, wenn ferner $m$ und $n$ die Änderungen von $\alpha$ und $\delta$ in einer Sternzeitsekunde angeben, so stellen $\alpha + \Delta \alpha + m \Delta l$ und $\delta + \Delta \delta + n \Delta l$ die wahre Rektaszension und Deklination des Mondes zur Zeit der Beobachtung dar. Um $m$ und $n$ zu erhalten, sind die aus der Ephemeride folgenden, für eine Stunde mittlerer Zeit gültigen Änderungen von $\alpha$ und $\delta$ durch 3609.86 zu dividieren. In der Gleichung (34) muß nun $\Delta \alpha$ durch $\Delta \alpha + m \Delta l$, und $\Delta \delta$ durch $\Delta \delta + n \Delta l$ ersetzt werden; man erhält dann

$$k_0 \Delta k + (Mm + Nn) \Delta l + P \frac{\Delta \pi_0}{\sin \pi_0} = L - M \Delta \alpha - N \Delta \delta \tag{38}$$

Will man auf die Unebenheiten des Mondrandes Rücksicht nehmen, so ist auf der rechten Seite dieser Gleichung das in (37) vorkommende Glied $- k_0 \Delta w' : \sin \pi$ hinzuzufügen.

Jeder beobachtete Ein- oder Austritt liefert eine Bedingungsgleichung von der Form (38). Diese Gleichungen können aber nicht etwa zu einer zuverlässigen Bestimmung von $\Delta k$ und $\Delta \pi_0$ verwandt werden, sondern sollen nur die Möglichkeit gewähren, die Längenkorrektion in der Form

$$\Delta l = c + \beta \Delta k + \gamma \Delta \pi_0$$

darzustellen. Abgesehen davon, daß man so beurteilen kann, inwieweit die Annahme $\Delta l = c$ durch die Unsicherheit der für $k$ und $\pi_0$ zugrunde gelegten Werte beeinflußt ist, hat man noch den Vorteil, etwaige in der Zukunft gefundene kleine Verbesserungen der beiden zuletzt genannten Größen leicht berücksichtigen zu können.

---

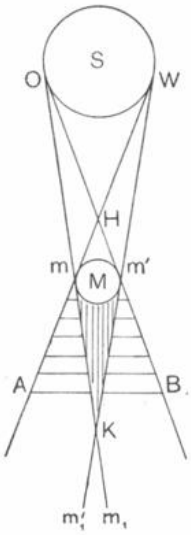
# Kapitel XIX.

## Sonnenfinsternisse.

### I. Fundamentalgleichungen und Vorausberechnung einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort.

**109. Einleitung.** Unter der Voraussetzung, daß die Sonne und der Mond als vollkommen kugelförmig betrachtet werden können, sei $S$ (Fig. 1) der Mittelpunkt der Sonne und $M$ der Mittelpunkt des Mondes; $H$ und $K$ seien die auf der Verbindungslinie $SM$, bzw. deren Verlängerung gelegenen Scheitel der beiden, die Sonne und den Mond einhüllenden Kegel $HAB$, bzw. $mKm'$. Alle Punkte, welche sich innerhalb des Kegels $mKm'$ befinden, empfangen kein Licht von der Sonne; für sie findet also eine totale Sonnenfinsternis statt. Jene Punkte aber, die innerhalb des zum Kegel $HAB$ gehörigen Kegelstumpfes $mABm'$, jedoch außerhalb des Kegels $mKm'$ liegen, werden zwar von der Sonne beleuchtet, aber nur von einem Teile derselben; die Sonnenfinsternis ist also für sie eine partielle. Man nennt nun den Kegel $HAB$ den Halbschatten- und den Kegel $Kmm'$ den Kernschattenkegel; die gemeinsame Achse beider Kegel wird die Schattenachse genannt. Von einem innerhalb der Verlängerung $m_1' K m_1$ des Kernschattenkegels befindlichen Punkte aus gesehen, erscheint der Mond ganz auf die Sonne projiziert, aber so, daß rings um ihn herum der Sonnenrand sichtbar bleibt; die Finsternis wird in diesem Falle als ringförmig bezeichnet.

Fig. 1.




Eine durch den Halbschattenkegel senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene schneidet den Halbschattenkegel in einem Kreise; von allen Punkten eines solchen