Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XIX. Sonnenfinsternisse

Jeder beobachtete Ein- oder Austritt liefert eine Bedingungsgleichung von der Form (38). Diese Gleichungen können aber nicht etwa zu einer zuverlässigen Bestimmung von Δk und $\Delta\pi_0$ verwandt werden, sondern sollen nur die Möglichkeit gewähren, die Längenkorrektion in der Form

$$\Delta l = c + \beta\Delta k + \gamma\Delta\pi_0$$

darzustellen. Abgesehen davon, daß man so beurteilen kann, inwieweit die Annahme $\Delta l = c$ durch die Unsicherheit der für k und π_0 zugrunde gelegten Werte beeinflußt ist, hat man noch den Vorteil, etwaige in der Zukunft gefundene kleine Verbesserungen der beiden zuletzt genannten Größen leicht berücksichtigen zu können.

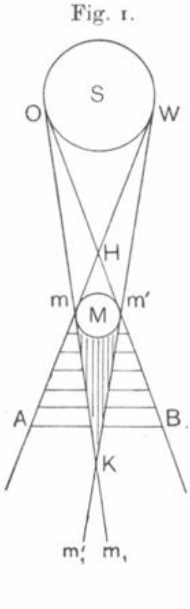
Kapitel XIX.

Sonnenfinsternisse.

I. Fundamentalgleichungen und Vorausberechnung einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort.

109. Einleitung. Unter der Voraussetzung, daß die Sonne und der Mond als vollkommen kugelförmig betrachtet werden können, sei S (Fig. 1) der Mittelpunkt der Sonne und M der Mittelpunkt des Mondes; H und K seien die auf der Verbindungslinie SM, bzw. deren Verlängerung gelegenen Scheitel der beiden, die Sonne und den Mond einhüllenden Kegel HAB, bzw. mKm'. Alle Punkte, welche sich innerhalb des Kegels mKm' befinden, empfangen kein Licht von der Sonne; für sie findet also eine totale Sonnenfinsternis statt. Jene Punkte aber, die innerhalb des zum Kegel HAB gehörigen Kegelstumpfes $mABm'$, jedoch außerhalb des Kegels mKm' liegen, werden zwar von der Sonne beleuchtet, aber nur von einem Teile derselben; die Sonnenfinsternis ist also für sie eine partielle. Man nennt nun den Kegel HAB den Halbschatten- und den Kegel Kmm' den Kernschattenkegel; die gemeinsame Achse beider Kegel wird die Schattenachse genannt. Von einem innerhalb der Verlängerung $m_1'Km_1$ des Kernschattenkegels befindlichen Punkte aus gesehen, erscheint der Mond ganz auf die Sonne projiziert, aber so, daß rings um ihn herum der Sonnenrand sichtbar bleibt; die Finsternis wird in diesem Falle als ringförmig bezeichnet.

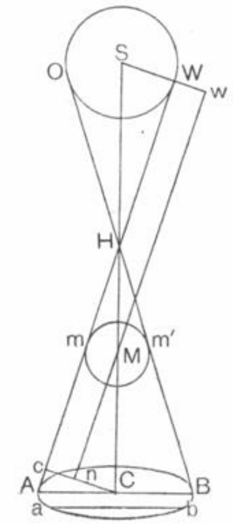
Fig. 1.



Eine durch den Halbschattenkegel senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene schneidet den Halbschattenkegel in einem Kreise; von allen Punkten eines solchen

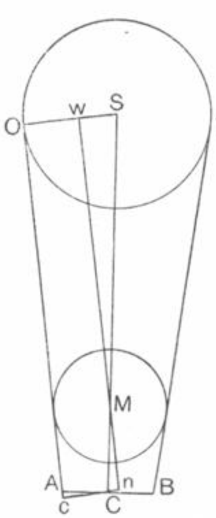
Kreises (z. B. des Kreises AbB in Fig. 2) aus gesehen, scheinen die Ränder des Mondes und der Sonne sich von außen zu berühren. Es möge nun BA die Richtung der Bewegung der Schattenachse angeben, wobei also A östlich von B liegt; ein in A befindlicher Beobachter sieht dann in dem auf die Berührung folgenden Moment einen Teil der Sonne verdeckt, für einen in B aufgestellten Beobachter dagegen hat sich der Mond von der Sonne entfernt. Die in Fig. 2 gezeichnete Lage entspricht also für den Beobachter A dem Beginn, und für den Beobachter B dem Ende der Finsternis.

Fig. 2.



Man stelle sich nun vor, daß, während sich die Schattenachse von B nach A bewegt, ein in a aufgestellter Beobachter seine Lage unverändert beibehalte; es ist dann ohne weiteres einleuchtend, daß dieser die Sonne am stärksten verfinstert sehen wird, wenn der Mittelpunkt der zu BA parallelen Sehne ba über ihn hinweggeht. Legt man also durch einen Beobachtungsort eine Ebene senkrecht zur Schattenachse, und ist C der Mittelpunkt des Kreises, den der Halbschattenkegel auf der Ebene ausschneidet, so findet das Maximum der Verfinsterung für den Beobachtungsort statt, wenn die Verbindungslinie des Ortes mit C senkrecht zu der Richtung steht, in der sich C bewegt. Infolge der bei der Ableitung dieses Resultates begangenen Vernachlässigungen stellt dasselbe nur eine rohe, wenn auch für eine späterhin zu behandelnde Aufgabe genügende Näherung dar; der Winkel, den die durch C und den Beobachtungsort bestimmte Gerade zur Zeit des Maximums der Verfinsterung mit der Bewegungsrichtung von C bildet, kann nämlich bis zu 20° von 90°, bzw. von 270° verschieden sein.

Fig. 3.



Denkt man sich die zur Schattenachse senkrechte Ebene durch den Kernschattenkegel hindurchgelegt (AB in Fig. 3), so findet für einen in A befindlichen Beobachter eine innere Ränderberührung des Mondes und der Sonne, und zwar auf der Ostseite der beiden Gestirne statt; die Sonne ist dann ganz verdeckt und bleibt es bis zu dem Augenblicke, wo der durch A als Scheitel gelegte und den Mond einhüllende Kegel den Westrand der Sonne berührt. Für den Beobachter in A beginnt demnach die totale Sonnenfinsternis. Auch für einen Beobachter in B findet eine innere Ränderberührung statt, jedoch bei dem Fortschreiten des Mondes nach Osten wird der Westrand der Sonne wieder frei. Für den Beobachter in B endigt also die totale Finsternis.

Geht die zur Schattenachse senkrechte Ebene durch die Verlängerung des Kernschattenkegels (AB in Fig. 4), so sieht ein in A aufgestellter Beobachter die Westränder der Sonne und des Mondes in Berührung, dagegen ist der Ostrand der Sonne frei; bei dem Fortschreiten des Mondes nach Osten wird auch der Westrand der Sonne für A sichtbar, und die Finsternis zu einer ringförmigen. Die von dem Beobachter A wahrgenommene innere Berührung des Sonnen- und Mondrandes bedeutet also für ihn den Beginn der ringförmigen Finsternis. Ein in B befindlicher Beobachter sieht ebenfalls den Sonnen- und Mondrand in innerer Berührung, aber auf der Ostseite der beiden Gestirne; in dem folgenden Zeitmoment beginnt jedoch der Mond aus der Sonnenscheibe auszutreten. Für B endet also die ringförmige Sonnenfinsternis.

Fig. 4.

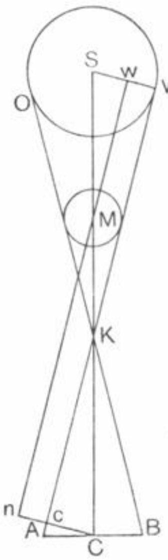
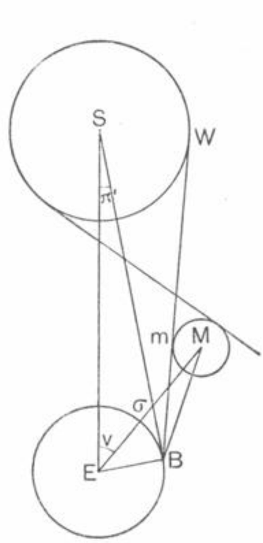


Fig. 5.



110. Bedingung für das Eintreten einer Sonnenfinsternis. In Fig. 5 seien S, M und E die Mittelpunkte der Sonne, des Mondes und der Erde; ferner werde angenommen, daß die erzeugende Gerade Wm des Halbschattenkegels die Erde schneide, und somit ein in dem Durchschnittspunkte B befindlicher Beobachter eine äußere Ränderberührung von Sonne und Mond wahrnehme. Verbindet man E mit B, und jeden dieser Punkte mit M und S, setzt man ferner $SEM = v$, $SBM = a$, $ESB = \pi'_1$, $EMB = \pi_1$, so erhält man für den Winkel $S\sigma M = x$ die beiden Ausdrücke

$$x = v + \pi'_1, \qquad x = a + \pi_1$$

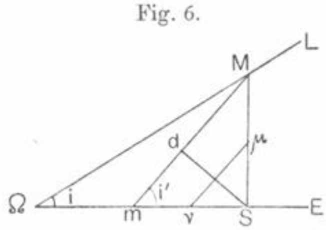
Hieraus folgt

$$a = v - (\pi_1 - \pi'_1)$$

Bezeichnet man die Winkel MBm und SBW, d. h. die vom Beobachtungsort aus gesehenen Halbmesser des Mondes und der Sonne mit $\bar{r}$, bzw. $\bar{r}'$, so ist für die äußere Ränderberührung $a = \bar{r} + \bar{r}'$; wenn aber der Beobachtungsort in den Halbschattenkegel eingetreten ist, so hat man $a < \bar{r} + \bar{r}'$. Mit Rücksicht auf den vorhin gegebenen Ausdruck für a ergibt sich also als Bedingung für das Eintreten einer Sonnenfinsternis

$$v \leqq \bar{r} + \bar{r}' + \pi_1 - \pi'_1$$

Fig. 6.



Nun ist eine Sonnenfinsternis nur dann möglich, wenn sich der Mond in der Nähe seiner Konjunktion mit der Sonne befindet und gleichzeitig der Ekliptik, also auch einem seiner Knoten nahe ist. Um entscheiden zu können, ob in einem Falle, wo diese beiden Bedingungen erfüllt sind, eine Finsternis wirklich stattfinden wird, muß zunächst der jedesmalige kleinste geozentrische Abstand zwischen den Mittelpunkten der Sonne und des Mondes berechnet werden. Es sei (Fig. 6) ΩE die Ekliptik, ΩL die Mondbahn und i die

Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, M und S seien die der Voraussetzung nach in der Nähe des Knotens der Mondbahn gelegenen, geozentrischen Örter des Mondes und der Sonne zur Zeit der Konjunktion in Länge; der Bogen MS ist also senkrecht zu ΩE. Bezeichnet man jetzt mit Δl und $\Delta l'$ die stündliche Bewegung des Mondes, bzw. der Sonne in Länge und mit Δb die stündliche Bewegung des Mondes in Breite, so geben $\Delta l - \Delta l'$ und Δb die relative stündliche Bewegung des Mondes in bezug auf die Sonne an; trägt man demnach auf $S\Omega$ und SM die Bögen $S\nu = \Delta l - \Delta l'$, bzw. $S\mu = \Delta b$ auf, so ist $\nu\mu$ parallel der relativen Bahn des Mondes in bezug auf die Sonne. Die Neigung dieser Bahn gegen die Ekliptik werde mit i' bezeichnet; wenn dann das Dreieck $S\mu\nu$ als eben betrachtet wird, so ergibt sich

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\Delta b}{\Delta l - \Delta l'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'} \, \frac{\Delta b}{\Delta l}$$

Innerhalb der Zeit, in welcher der Mond den der Annahme gemäß kleinen Bogen ΩM beschreibt, kann aber die Bewegung des Mondes als gleichförmig betrachtet werden; wird dieses Zeitintervall mit τ bezeichnet, so hat man also, wenn τ in Teilen einer Stunde ausgedrückt ist,

$$\Omega S = \Delta l \cdot \tau, \qquad MS = \Delta b \cdot \tau$$

Für die hier in Betracht kommende Genauigkeit läßt sich nun auch das Dreieck ΩMS als ein ebenes auffassen; mit Benutzung der beiden letzten Gleichungen folgt dann

$$\frac{\Delta b}{\Delta l} = \frac{MS}{\Omega S} = \operatorname{tang} i$$

Somit erhält man, wenn noch zur Abkürzung $\frac{\Delta l}{\Delta l'} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{tang} i$$

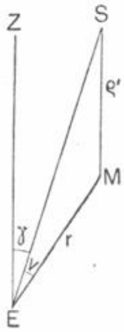
Die relative Bahn des Mondes in bezug auf die Sonne wird durch den zu $\mu\nu$ parallelen Bogen Mm dargestellt; der gesuchte kürzeste geozentrische Abstand der Mittelpunkte von Sonne und Mond ist demnach gleich dem durch S senkrecht zu Mm gelegte Bogen Sd. Setzt man nun $MS = \beta$, so daß β die Breite des Mondes zur Zeit des Neumondes bedeutet, so wird Sd gleich $\beta \cos i'$; dies ist also der kleinste Wert, den der im vorigen mit v bezeichnete Winkel annehmen kann. Die oben für das Eintreten einer Finsternis abgeleitete Bedingung lautet jetzt

$$\beta \leqq (\bar{r} + \bar{r}' + \pi_1 - \pi'_1) \sec i'$$

Nun folgt aus dem Verhältnis der Umlaufszeit der Erde um die Sonne zu derjenigen des Mondes um die Erde, daß der mittlere Wert von λ gleich 13.4 ist; ferner hat man $i = 5^\circ 9'$. Aus der für $\operatorname{tang} i'$ aufgestellten Gleichung ergibt sich somit $i' = 5^\circ 34'$. Die kleinsten Werte, welche $\bar{r}$, $\bar{r}'$ und $\pi_1 - \pi'_1$ annehmen können, sind $\bar{r} = 14.'4$, $\bar{r}' = 15.'7$, $\pi_1 - \pi'_1 = 52.'7$, und die größten $\bar{r} = 16.'8$, $\bar{r}' = 16.'3$, $\pi_1 - \pi'_1 = 61.'4$. Ist also zur Zeit des Neumondes $\beta < 82.'8 \sec 5^\circ 34' = 1^\circ 23'$, so ist eine Finsternis mit Sicherheit zu erwarten; hat man aber $\beta > 94.'5 \sec 5^\circ 34' = 1^\circ 35'$, so ist eine Finsternis unmöglich. Liegt β innerhalb der beiden angegebenen Grenzen, so hängt es von den Werten, welche $\bar{r}$, $\bar{r}'$ und $\pi_1 - \pi'_1$ haben, ab, ob eine Finsternis stattfinden wird.

Aus dem vorhin Gesagten folgt noch, daß die größte geozentrische Winkeldistanz der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes zur Zeit einer Finsternis gleich $1^\circ 34.'5$ ist. In Fig. 7 seien nun E, M und S die Mittelpunkte der Erde, des Mondes und der Sonne; zieht man EZ parallel zu MS und setzt $EM = r$, $MS = \varrho'$, $SEM = v$, $ZES = ESM = \gamma$, so ergibt sich

Fig. 7.



$$\sin\gamma = \frac{r}{\varrho'} \sin v$$

Es ist aber näherungsweise

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{1}{400},$$

demnach wird der dem Maximalwerte $v = 1^\circ 34.'5$ entsprechende Wert von γ gleich $14.''2$. Der größte geozentrische Abstand zwischen der Sonne und dem Punkte Z ist also bei einer Finsternis kleiner als $15''$.

111. Radius eines Kreisschnittes der Schattenkegel. Wie aus § 109 hervorgeht, kann eine Berührung der Ränder von Sonne und Mond nur dann stattfinden, wenn die Oberfläche eines der Schattenkegel durch den Ort des Beobachters hindurchgeht. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Abstand des Beobachters von der Schattenachse gleich dem Radius des Kreises ist, den die Mantelfläche des Schattenkegels auf einer durch den Beobachtungsort senkrecht zur Schattenachse gelegten Ebene AB ausschneidet. Um diese Bedingung durch eine Gleichung ausdrücken zu können, ist es notwendig, den Radius des erwähnten Kreises zu bestimmen. Zunächst soll der Fall betrachtet werden, wo die Ebene AB den Halbschattenkegel schneidet (Fig. 2). Es sei s der lineare Halbmesser des Mondes, s' der lineare Halbmesser der Sonne, ϱ' die Entfernung der Mittelpunkte beider Gestirne voneinander, Z' der Abstand des Mondmittelpunktes von der Ebene AB. Wird nun die Gerade Cc senkrecht zu AW gezogen, und bezeichnet man den halben Öffnungswinkel $AHC = cCA$ des Halbschattenkegels mit f_a und den gesuchten Radius AC mit u, so folgt

$$Cc = u \cos f_a$$

Wenn aber die Gerade nMw parallel zu AW gezogen wird, so ergibt sich

$$Cc = Cn + nc = Z' \sin f_a + s$$

Aus den zwei letzten Gleichungen erhält man

$$u = (Z' \sin f_a + s) \sec f_a \tag{1}$$

Aus dem Dreieck SMw folgt aber

$$\sin f_a = \frac{s + s'}{\varrho'} \tag{2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der weiterhin mitgeteilten Werte von s und s', sowie des Minimalbetrages von ϱ' ergibt sich, daß f_a höchstens gleich $16.'4$ werden kann.

Schneidet die durch den Beobachtungsort senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene AB den Kernschattenkegel (Fig. 3), so ziehe man Cen senkrecht, und nMw parallel zu der Tangente AO. Wird jetzt der halbe Öffnungswinkel $wMS = ACc$ des Kernschattenkegels mit φ, und der gesuchte Radius AC mit u bezeichnet, so erhält man für Cc die beiden Gleichungen

$$Cc = u\cos\varphi\,, \qquad Cc = s - Z'\sin\varphi$$

Hieraus ergibt sich

$$u = (-Z'\sin\varphi + s)\sec\varphi$$

Zur Bestimmung von φ hat man dem Dreiecke SMw zufolge

$$\sin\varphi = \frac{s' - s}{\varrho'}$$

Setzt man $\varphi = -f_i$, so werden die beiden letzten Gleichungen

(3) $$u = (Z'\sin f_i + s)\sec f_i$$

(4) $$\sin f_i = \frac{s - s'}{\varrho'}$$

Wenn die Ebene AB den verlängerten Kernschattenkegel schneidet (Fig. 4), und demnach für die zwischen A und B gelegenen Punkte eine ringförmige Sonnenfinsternis stattfindet, so ziehe man Cn senkrecht, und nMw parallel zu AW; bezeichnet man dann den Radius AC mit $-u$, und bedeutet φ wieder den Öffnungswinkel des Kernschattenkegels, so ergibt sich

$$Cc = -u\cos\varphi\,, \qquad Cc = Z'\sin\varphi - s$$

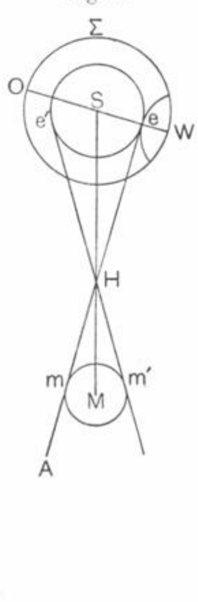
Hieraus folgt, wenn wie vorhin $\varphi = -f_i$ gesetzt, und die Gleichung (4) berücksichtigt wird,

(5) $$u = (Z'\sin f_i + s)\sec f_i$$

(6) $$\sin f_i = \frac{s - s'}{\varrho'}$$

Da jetzt $Z'\sin f_i$ seinem absoluten Werte nach größer wie s, und f_i negativ ist, so gibt die Gleichung (5) einen negativen Wert für u; mit Rücksicht hierauf ist der Radius AC gleich $-u$ gesetzt worden.

Fig. 8.



Die Gleichungen (1) und (2) gestatten eine für die Berechnung der Finsternisse wichtige Anwendung. Wenn die in einem Punkte m (Fig. 8) an den Mondrand gelegte Tangente Ae die durch den Kreis $O\Sigma W$ bezeichnete Sonne im Punkte e trifft, so sieht ein in A befindlicher Beobachter die Sonne partiell verfinstert. Um die Größe der Verfinsterung anzugeben, denke man sich den durch e gehenden Sonnendurchmesser $OW = 2s'$ in zwölf gleiche Teile geteilt; ist dann eW gleich i solcher Teile, so sagt man, daß die Phase der Verfinsterung i Zoll betrage. Beschreibt man nun um S eine Kugel mit dem Radius $Se = \left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$, so findet für den Beobachter in A eine äußere Berührung des Randes dieser Kugel mit dem Mondrande statt; gleichzeitig läßt sich Ame als die erzeugende Gerade eines die genannte Kugel und den Mond einhüllenden Halbschattenkegels betrachten. Den Gleichungen (1) und (2) zufolge hat man also, wenn f den halben Öffnungswinkel des Kegels mHm', und u den Radius des Kreises bedeutet, welchen dieser Kegel auf der durch A senkrecht zur Schattenachse SM gelegten Ebene ausschneidet,

$$u = (Z' \sin f + s) \sec f \tag{7}$$

$$\sin f = \frac{s + \left(1 - \frac{i}{6}\right) s'}{\varrho'} \tag{8}$$

Betrachtet man eine äußere Berührung von Sonne und Mond als eine Verfinsterung von 0 Zoll, und eine innere Berührung, d. h. den Anfang oder das Ende einer totalen oder ringförmigen Finsternis als eine Verfinsterung von 12 Zoll, so schließen die Gleichungen (7) und (8) die oben für äußere und innere Ränderberührungen gesondert abgeleiteten Gleichungen (1) bis (6) bereits in sich. Mit Berücksichtigung des zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten hat man jetzt den Satz: In dem Augenblick, wo für einen Beobachtungsort die Phase der Verfinsterung i Zoll beträgt und gleichzeitig $i < 12$ ist, ist der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse gleich dem durch die Gleichungen (7) und (8) bestimmten Werte von u. Für $i = 12$ ist der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse gleich u, wenn es sich um eine totale Finsternis handelt, dagegen gleich $-u$, wenn die Finsternis ringförmig ist.

Für das Folgende ist es noch nötig, den Radius des Kreises zu bestimmen, den ein einem Werte $i \leqq 12$ entsprechender Schattenkegel auf einer durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zu der Schattenachse gelegten Ebene ausschneidet. Ist Z der Abstand des Mondes von dieser Ebene, und bezeichnet man den gesuchten Radius mit u', bzw. (wenn $i = 12$ ist, und unter dem Schattenkegel der verlängerte Kernschattenkegel zu verstehen ist) mit $-u'$, so ergibt sich aus (7)

$$u' = (Z \sin f + s) \sec f \tag{9}$$

Der unter einer bestimmten Annahme für i gültige Wert von f läßt sich durch die Gleichung (8) finden, jedoch pflegt letztere in einer anderen Form angewandt zu werden. Setzt man nämlich wie oben

$$\frac{s + s'}{\varrho'} = \sin f_a, \qquad \frac{s - s'}{\varrho'} = \sin f_i,$$

wo also f_a und f_i die der äußeren, bzw. inneren Berührung entsprechenden Werte von f bedeuten, so wird die Gleichung (8)

$$\sin f = \sin f_a - \frac{\sin f_a - \sin f_i}{12}\, i \tag{10}$$

Auch die Gleichung (9) läßt sich noch umformen. Aus (9) und (10) ergibt sich zunächst

$$u' \cos f = Z \sin f_a + s - \frac{Z \sin f_a - Z \sin f_i}{12}\, i$$

Wenn aber u'_a und u'_i die der äußeren, bzw. inneren Berührung entsprechenden Werte von u' bedeuten, so ist der Gleichung (9) zufolge

$$
\begin{aligned}
u'_a \cos f_a &= Z \sin f_a + s \\
u'_i \cos f_i &= Z \sin f_i + s
\end{aligned}
\tag{11}
$$

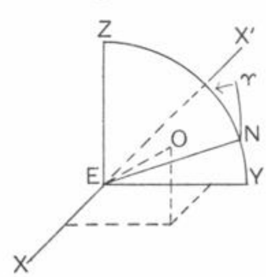
Da nun $\cos f_a = \cos f_i = \cos f$ angenommen werden kann, so erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$
u' = u'_a - \frac{u'_a - u'_i}{12}\, i
\tag{12}
$$

Das bei der praktischen Anwendung der Gleichungen (7) bis (12) einzuschlagende Verfahren findet man in § 114 angegeben.

112. Koordinaten des Beobachtungsortes. Um für den Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse einen zweiten Ausdruck zu erhalten, bezieht man den Ort auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist, und dessen eine Achse, die als Z-Achse gewählt werden möge, parallel zur Schattenachse läuft; kennt man dann auch noch die Koordinaten des Punktes, in dem die Schattenachse die XY-Ebene schneidet (§ 113), so ergibt sich ohne weiteres der gesuchte Abstand. In Fig. 9 sei E der Mittelpunkt der Erde, EZ die Z-Achse und EN die Richtung zum Pol. Die Ebene ZEN schneidet die XY-Ebene in einer Geraden, deren auf der Seite des Nordpols gelegene Hälfte EY als positive Y-Achse gewählt werden soll. Da die Richtung zum Pole in der ZY-Ebene liegt, so fällt die X-Achse in die Durchschnittslinie XX' der XY-Ebene mit der Ebene des Äquators. Als positive X-Achse soll jetzt diejenige der beiden Richtungen EX und EX' betrachtet werden, deren Zielpunkt eine um 90° größere Rektaszension hat als Z. Nimmt man also an, daß der Bogen $N\gamma$ zum Frühlingsäquinox hin gerichtet ist, und daß die Rektaszensionen, von N aus gesehen, von rechts nach links gezählt werden, so ist EX die Richtung der positiven X-Achse. Ist nun O der Beobachtungsort, und ϱ sein Abstand vom Mittelpunkte der Erde, sind ferner x, y, z die auf die Achsen EX, EY, EZ bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes, so hat man, wenn die Winkel OEX, OEY, OEZ mit OX, OY, OZ bezeichnet werden,

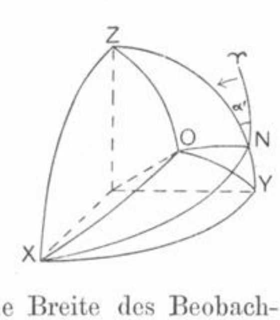
Fig. 9.



$$
x = \varrho \cos OX \qquad y = \varrho \cos OY \qquad z = \varrho \cos OZ
$$

Zur Bestimmung der hier auftretenden Richtungscosinus von EO verlängere man die Koordinatenachsen und die Richtungen EN, $E\gamma$, EO bis zu ihren Durchschnittspunkten X, Y, Z, N, γ und O mit der um E beschriebenen Sphäre (Fig. 10). Bedeutet μ' die Sternzeit und φ' die geozentrische Breite des Beobachtungsortes, so ist der Winkel γNO gleich μ', und ON gleich $90° - \varphi'$. Man setze jetzt

Fig. 10.

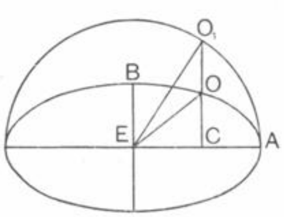


$\gamma NZ = \alpha'$ und $NZ = 90^\circ - \delta'$, so daß also α' die geozentrische Rektaszension, und δ' die geozentrische Deklination von Z bedeutet; es ergibt sich dann $ZNO = \mu' - \alpha'$, $ONX = 90^\circ - (\mu' - \alpha')$, $ONY = 180^\circ - (\mu' - \alpha')$, $NY = \delta'$, $XN = 90^\circ$. Berechnet man nun mit Hilfe der Dreiecke XON, YON, ZON die Werte von $\cos OX$, $\cos OY$, $\cos OZ$ und substituiert diese in die obigen Gleichungen für x, y und z, so wird

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - \alpha') \\
y &= \varrho [\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \\
z &= \varrho [\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Die Produkte $\varrho \cos\varphi'$ und $\varrho \sin\varphi'$ lassen sich durch andere Ausdrücke ersetzen. In Fig. 11 sei $EA = a$ der Radius des Erdäquators, $EB = b$ die halbe kleine Achse der Erde und O der Beobachtungsort; es ist dann $OEA = \varphi'$ und $EO = \varrho$. Beschreibt man nun mit dem Radius a einen Kreis um E und zieht durch O eine Parallele zu EB, welche den Kreis im Punkte O_1 schneidet, so ergibt sich, wenn $O_1EC = \varphi_1$ gesetzt wird,

Fig. 11.



$$
\begin{aligned}
\varrho \cos\varphi' &= a \cos\varphi_1 \\
\varrho \sin\varphi' &= a \sin\varphi_1 - OO_1
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Bekanntlich findet aber die Proportion statt

$$O_1C : OC = a : b$$

Hieraus folgt, wenn

$$\frac{a-b}{a} = c$$

gesetzt wird,

$$OO_1 = \frac{a-b}{b}\, OC = \frac{c}{1-c}\, \varrho \sin\varphi'$$

Substituiert man diesen Wert von OO_1 in die Gleichungen (14) und wählt als Einheit von ϱ den Radius des Erdäquators, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\varrho \cos\varphi' &= \cos\varphi_1 \\
\varrho \sin\varphi' &= (1 - c) \sin\varphi_1
\end{aligned}
\tag{14a}
$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke werden die Gleichungen (13)

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\varphi_1 \sin(\mu' - \alpha') \\
y &= (1 - c) \sin\varphi_1 \cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(\mu' - \alpha') \\
z &= (1 - c) \sin\varphi_1 \sin\delta' + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Diese Gleichungen sind an Stelle von (13) anzuwenden, wenn der Verlauf einer Finsternis für die ganze Erde vorauszuberechnen ist, und somit die Breiten der Orte, an denen die Finsternis sichtbar sein wird, erst bestimmt werden müssen.

Aus § 67, (1) und der Bedeutung von c folgt, wenn φ die geographische Breite bezeichnet,

$$\operatorname{tang}\varphi' = (1 - c)^2 \operatorname{tang}\varphi$$

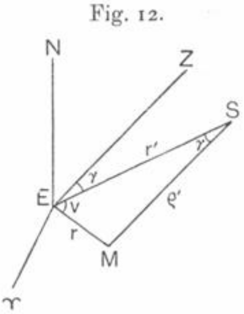
Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ergibt sich aus (14ᵃ)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{1 - c} \tag{15a}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich für jeden Wert von φ_1 das zugehörige φ berechnen.

Die Gleichungen (13) und (15) enthalten noch die Unbekannten α' und δ'. Um diese zu bestimmen, nehme man die Fig. 12 zu Hilfe, worin wieder E den Mittelpunkt der Erde, EN die Richtung zum Pol des Äquators, $E\Upsilon$ die Richtung zum Frühlingsäquinox bedeutet, und wo mit M und S die Mittelpunkte des Mondes, bzw. der Sonne bezeichnet sind; die Gerade EZ ist die vorhin als Z-Achse gewählte Parallele zur Schattenachse MS. Setzt man $EM = r$, $ES = r'$, $MES = v$, so erhält man für die früher mit ϱ' bezeichnete Entfernung MS

Fig. 12.



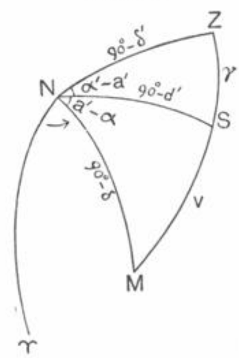
$$\varrho' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos v} \tag{16}$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck ESM, wenn $ESM = ZES = \gamma$ gesetzt wird,

$$\sin\gamma : \sin v = r : \varrho' \tag{17}$$

Man verlängere jetzt die Richtungen EN, EZ, ES, EM und $E\Upsilon$ bis zu ihren Durchschnittspunkten N, Z, S, M und Υ mit der Sphäre (Fig. 13). Da die Richtungen EZ, ES und EM in einer Ebene liegen, so liegen die Punkte Z, S und M auf einem größten Kreise. Wenn man nun die geozentrische Rektaszension und Deklination des Mondes und der Sonne mit α, δ, bzw. a', d' bezeichnet, so ist $SNZ = \alpha' - a'$, $MNS = a' - \alpha$, $NZ = 90^\circ - \delta'$, $NS = 90^\circ - d'$, $NM = 90^\circ - \delta$; ferner ist $MS = v$, $ZS = \gamma$. Aus den Dreiecken MNS und SNZ folgt also, wenn noch der Winkel NSM gleich S gesetzt wird,

Fig. 13.



$$\begin{aligned} \sin\gamma \sin S &= \cos\delta' \sin(\alpha' - a') \\ \sin v \sin S &= \cos\delta \sin(a' - \alpha) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \sin\gamma \cos S &= -\sin\delta' \cos d' + \cos\delta' \sin d' \cos(\alpha' - a') \\ \sin v \cos S &= \sin\delta \cos d' - \cos\delta \sin d' \cos(a' - \alpha) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\cos v = \sin d' \sin\delta + \cos d' \cos\delta \cos(a' - \alpha) \tag{20}$$

Sowohl aus (18) als aus (19) erhält man einen Ausdruck für $\sin\gamma : \sin v$; werden diese Ausdrücke in die Gleichung (17) substituiert, so folgt

$$\sin(\alpha' - a') = \frac{r\cos\delta}{\varrho'\cos\delta'}\sin(a' - \alpha)$$

(21) $$\sin\delta'\cos d' - \cos\delta'\sin d'\cos(\alpha' - a') =$$

$$= \frac{r}{\varrho'}[\cos\delta\sin d'\cos(a' - \alpha) - \sin\delta\cos d']$$

Die Gleichungen (16) und (21) lassen sich noch vereinfachen. Da $r:r'$ nahe gleich $1:400$, und v zur Zeit einer Finsternis kleiner als $1^\circ 35'$ ist (§ 110), so kann man in der Gleichung (16) $\cos v = 1$ setzen; damit wird

$$\varrho' = r' - r$$

Wenn jetzt π und π' die Äquatoreal-Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne bedeuten, und der Radius des Erdäquators als Längeneinheit gewählt wird, so hat man

(22) $$\frac{1}{r} = \sin\pi, \qquad \frac{1}{r'} = \sin\pi',$$

also

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\frac{1}{rr'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} = \frac{\sin\pi\sin\pi'}{\sin\pi - \sin\pi'}$$

oder, wie man setzen darf,

(23) $$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin\pi\sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')}$$

Der Wert von π läßt sich mit Hilfe der Mondtafeln berechnen. Um π' zu erhalten, benutzt man die Gleichung

(24) $$\pi' = \frac{\pi'_0}{R'},$$

wo π'_0 die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe und R' den Radiusvektor der Sonne, ausgedrückt in Einheiten der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, bedeutet; den $\log R'$ kann man den astronomischen Jahrbüchern entnehmen.

Zur Zeit einer Finsternis ist ferner $\gamma < 15''$ (§ 110), es müssen also auch $\delta' - d'$ und $(\alpha' - a')\cos d'$, absolut genommen, kleiner als $15''$ sein; folglich ist $|\alpha' - a'| < 15'' \sec 23^\circ 30' < 17''$. Demnach darf in der zweiten Gleichung (21) $\cos(\alpha' - a') = 1$ gesetzt werden, und man erhält

$$\sin(\alpha' - a') = \frac{r\cos\delta}{\varrho'\cos\delta'}\sin(a' - \alpha)$$

$$\sin(\delta' - d') = \frac{r}{\varrho'}[\cos\delta\sin d'\cos(a' - \alpha) - \sin\delta\cos d']$$

Nun ist auch $r:\varrho'$ nahe gleich $1:400$, ferner folgt aus der Ungleichheit $v < 1^\circ 35'$, daß zur Zeit einer Finsternis $|d' - \delta| < 1^\circ 35'$ und $|a' - \alpha| < 1^\circ 35' \sec 23^\circ 30' < 1^\circ 44'$ ist. Mit Rücksicht hierauf und auf die vorhin gefundene Ungleichheit $|\delta' - d'| < 15''$ kann man in der ersten der vorigen Gleichungen $\cos\delta' = \cos d'$, und in der letzten

$$\cos(a' - \alpha) = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2(a' - \alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}\cos\delta\sin d'\sin^2(a' - \alpha) = \tfrac{1}{4}\sin(\delta + d')\sin^2(a' - \alpha)$$

setzen. Wird dann noch die Abkürzung $D_0 = \frac{1}{2}(\delta + d')$ angewandt, und für $r : \varrho'$ sein aus (22) und (23) folgender Wert

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{\sin \pi'}{\sin(\pi - \pi')},$$

eingeführt, so ergibt sich

$$\sin(\alpha' - a') = \sin \pi' \frac{\cos \delta \sin(a' - \alpha)}{\cos d' \sin(\pi - \pi')}$$

$$\sin(\delta' - d') = \sin \pi' \frac{\sin(d' - \delta)}{\sin(\pi - \pi')} - \frac{1}{4} \frac{\sin \pi' \sin 2 D_0}{\sin(\pi - \pi')} \sin^2(a' - \alpha)$$

In dem zweiten Gliede auf der rechten Seite der letzten Gleichung kann man für π und π' ihre mittleren Werte π_0 und π'_0 annehmen; setzt man dann noch

$$\frac{\pi'_0 \sin 2 D_0}{4 \sin(\pi_0 - \pi'_0)} \sin^2(a' - \alpha) = \omega', \tag{25}$$

so hat man mit einer für alle Fälle ausreichenden Genauigkeit

$$\begin{aligned} \alpha' - a' &= \pi' \frac{(a' - \alpha) \cos \delta}{(\pi - \pi') \cos d'} \\ \delta' - d' &= \pi' \frac{d' - \delta}{\pi - \pi'} - \omega' \end{aligned} \tag{26}$$

In der nachstehenden Tafel sind die Werte von ω', insoweit sie 0.″005 erreichen, auf 3 Dezimalstellen gegeben; dabei ist $\pi'_0 = 8.''80$ und $\pi_0 = 57' \, 2.''68$ angenommen. Das Vorzeichen von ω' stimmt mit dem von D_0 überein. Für den praktischen Gebrauch leitet man aus dieser Tafel besser eine andere ab, welche in etwas kleineren Intervallen die auf 0.″01 abgerundeten Werte von ω' enthält.

D \ $a' - \alpha$	1° 44′	1° 36′	1° 28′	1° 20′	1° 12′	1° 4′	0° 56′	0° 48′	0° 40′	0° 32′
24°	0.″090	0.″077	0.″065	0.″053	0.″043	0.″034	0.″026	0.″019	0.″013	0.″009
22	0.084	0.072	0.060	0.050	0.041	0.032	0.024	0.018	0.013	0.008
20	0.078	0.067	0.056	0.046	0.037	0.030	0.023	0.017	0.012	0.007
18	0.071	0.061	0.051	0.042	0.034	0.027	0.021	0.015	0.011	0.007
16	0.064	0.055	0.046	0.038	0.031	0.024	0.019	0.014	0.010	0.006
14	0.057	0.049	0.041	0.034	0.027	0.022	0.016	0.012	0.008	0.005
12	0.049	0.042	0.035	0.029	0.024	0.019	0.014	0.011	0.007	
10	0.042	0.035	0.030	0.025	0.020	0.016	0.012	0.009	0.006	
8	0.034	0.029	0.024	0.020	0.016	0.013	0.010	0.007		
6	0.025	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.007	0.005		
4	0.017	0.014	0.012	0.010	0.008	0.006				
2	0.008	0.007	0.006	0.005						

113. Koordinaten der XY-Spur der Schattenachse. In Fig. 14 mögen S und M die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes bedeuten, EN sei die vom Mittelpunkte der Erde zum Nordpol des Äquators gehende Richtung, EX, EY und EZ seien die in § 112 definierten Koordinatenachsen; die Z-Achse ist also parallel zu MS, und die Y-Achse liegt in der Ebene ZEN. Bezeichnet man mit X und Y die Koordinaten des Punktes e, in dem die Schattenachse die XY-Ebene schneidet, so ist, wenn die Winkel MEX und MEY mit MX, bzw. MY bezeichnet werden, und EM wieder gleich r gesetzt wird,

$$X = r \cos MX, \qquad Y = r \cos MY$$

Fig. 14.

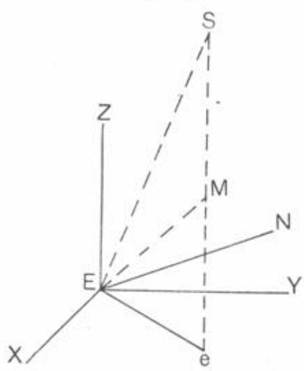
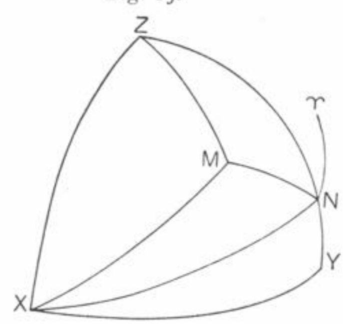


Fig. 15.



Man verlängere nun die Geraden EX, EY, EZ, EM und EN bis zu ihren Durchschnittspunkten X, Y, Z, M, N mit der Sphäre (Fig. 15), und es sei $N\Upsilon$ die Richtung vom Pol zum Frühlingsäquinox. Mit Anwendung der früheren Bezeichnungen hat man dann $ZNM = \alpha - \alpha'$, also $MNX = 90^\circ - (\alpha - \alpha')$ und $MNY = 180^\circ - - (\alpha - \alpha')$; ferner ist $MN = 90^\circ - \delta$, $NY = \delta'$, $XN = 90^\circ$. Berechnet man jetzt aus den Dreiecken MNX und MNY die Werte von $\cos MX$ und $\cos MY$, und substituiert dieselben in die vorigen Gleichungen, so ergibt sich

$$X = r \cos\delta \sin(\alpha - \alpha')$$
$$Y = r\,[\cos\delta' \sin\delta - \sin\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha')]$$

oder, wenn an Stelle von r die Parallaxe des Mondes eingeführt und berücksichtigt wird, daß zur Zeit einer Finsternis auch $\alpha - \alpha' < 1^\circ 44'$ ist,

$$X = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - \alpha')}{\sin\pi}$$

(27)

$$Y = \frac{1}{\sin\pi}\left[\sin(\delta - \delta') + \tfrac{1}{2}\sin\delta' \cos\delta \sin^2(\alpha - \alpha')\right]$$

Aus Fig. (14), worin Me mit dem in § 111 eingeführten Z identisch ist, folgt noch $Z = r \cos ZEM$. Da aber der Winkel ZEM gleich dem Bogen ZM in Fig. 15 ist, so erhält man mit Hilfe des sphärischen Dreiecks ZNM

$$Z = r\,[\sin\delta' \sin\delta + \cos\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha')]$$

oder

(28) $$Z = \frac{1}{\sin\pi}\left[\cos(\delta - \delta') - \tfrac{1}{2}\cos\delta' \cos\delta \sin^2(\alpha - \alpha')\right]$$

114. Berechnung von u. Subtrahiert man die Gleichungen (9) und (7) voneinander, so erhält man

$$u = u' - (Z - Z') \operatorname{tang} f$$

Es ist aber $Z - Z' = z$. Jenachdem hier für z sein in (13) oder (15) gegebener Wert angewandt wird, ergibt sich

$$u = u' - [\varrho \sin\varphi' \sin\delta' + \varrho \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \operatorname{tang} f \tag{29}$$

oder

$$u = u' - [(1 - c) \sin\varphi_1 \sin\delta' + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \operatorname{tang} f \tag{29a}$$

Um mit Hilfe einer dieser Gleichungen u berechnen zu können, müssen f und u' bekannt sein; doch sind zuvor s' und s zu bestimmen. Bezeichnet man mit Δ' den Winkelhalbmesser der Sonne in ihrer mittleren Entfernung $\mathfrak{R}'$ von der Erde, so ist, wenn s' und $\mathfrak{R}'$ in einer beliebigen Längeneinheit ausgedrückt werden, $s' = \mathfrak{R}' \sin\Delta'$. Wenn aber, der früheren Festsetzung gemäß, der Radius des Erdäquators als Längeneinheit gewählt wird, so hat man $\mathfrak{R}' = 1 : \sin\pi'_0$ und demnach $s' = \sin\Delta' : \sin\pi'_0$. Unter der Annahme $\Delta' = 15'59''.63$, $\pi'_0 = 8''.80$ wird $s' = 109.048$. Für s hat sich aus den Sternbedeckungen der Wert 0.2725 ergeben. Substituiert man die Werte von s und s' sowie den Ausdruck (23) für $1 : \varrho'$ in die Gleichungen (2) und (4), so folgt

$$(30)\qquad \begin{aligned} \sin f_a &= \quad 109.3205 \frac{\sin\pi \sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')} \\ \sin f_i &= -108.7755 \frac{\sin\pi \sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')} \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (11)

$$(31)\qquad \begin{aligned} u'_a &= (Z \sin f_a + 0.2725) \sec f_a \\ u'_i &= (Z \sin f_i + 0.2725) \sec f_i \end{aligned}$$

Hat man aus (30), (31) und (28) f_a, f_i, u'_a und u'_i gefunden, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (10) und (12) die für $i \leqq 12$ gültigen Werte von f und u' berechnen; letztere sind dann in (29), bzw. (29a) zu substituieren. Für die äußere Berührung ist $f = f_a$, $u' = u'_a$; für innere Berührungen hat man $f = f_i$, $u' = u'_i$.

Im vorigen sind alle Gleichungen mitgeteilt worden, welche zur Berechnung von u erforderlich sind; es muß aber noch eine Änderung erwähnt werden, die man mit dem in (29), bzw. (29a) auftretenden Argument $\mu' - \alpha'$ vornehmen kann. Schreibt man nämlich die erste der Gleichungen (26) in der Form $\alpha' - a' = \Delta\alpha'$, so wird $\mu' - \alpha' = \mu' - a' + \Delta\alpha'$. Nun ist $\mu' - a'$ die wahre Zeit des Beobachtungsortes; bezeichnet man diese mit t, so folgt $\mu' - \alpha' = t + \Delta\alpha'$.

115. Darstellung der Koordinaten X und Y als Funktionen der Zeit. Es seien T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2 fünf gleichweit voneinander entfernte wahre Zeiten des Meridians, für welchen die Sonnen- und Mondephemeride gelten, oder, kurz ausgedrückt, des ersten Meridians, X_{-2}, X_{-1}, $\ldots$, X_2 seien die diesen Zeiten entsprechenden Werte von X; dabei möge für T_0 ein der Zeit der geozentrischen Konjunktion von Sonne und Mond naher Moment, etwa die der Konjunktion in

Rektaszension zunächst liegende volle Stunde gewählt werden. Die zu lösende Aufgabe besteht dann darin, für jede zwischen T_{-2} und T_2 gelegene Zeit T einen Koeffizienten $\mathfrak{x}$ so zu bestimmen, daß der zu T gehörige Wert von X mit Hilfe der Gleichung

$$X = X_0 + \mathfrak{x}(T - T_0) \tag{A}$$

gefunden werden kann. Zu diesem Zwecke bilde man zunächst die ersten, zweiten und dritten Differenzen zwischen den Werten X_{-2}, X_{-1}, ..., wie dies in den mit $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ und $\Delta^{(3)}$ bezeichneten Kolumnen der folgenden Tabelle geschehen ist.

		$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
T_{-2}	X_{-2}			
		$X_{-1} - X_{-2}$		
T_{-1}	X_{-1}		$X_0 - 2X_{-1} + X_{-2}$	
		$X_0 - X_{-1}$		$X_1 - 3X_0 + 3X_{-1} - X_{-2}$
T_0	X_0		$X_1 - 2X_0 + X_{-1}$	
		$X_1 - X_0$		$X_2 - 3X_1 + 3X_0 - X_{-1}$
T_1	X_1		$X_2 - 2X_1 + X_0$	
		$X_2 - X_1$		
T_2	X_2			

Sind nun $\mathfrak{x}_{-2}$, $\mathfrak{x}_{-1}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ die Werte von $\mathfrak{x}$, welche den Werten T_{-2}, T_{-1}, T_1, T_2 von T entsprechen, und bedeutet w das Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Zeiten T_{-2}, T_{-1}, ..., so ergibt sich aus der Gleichung (A)

$$\mathfrak{x}_{-2} = \frac{X_{-2} - X_0}{-2w}, \qquad \mathfrak{x}_1 = \frac{X_1 - X_0}{w}$$

$$\mathfrak{x}_{-1} = \frac{X_{-1} - X_0}{-w}, \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{X_2 - X_0}{2w}$$

Der zu $T = T_0$ gehörige Wert von $\mathfrak{x}$, der mit $\mathfrak{x}_0$ bezeichnet werden möge, ist, der Gleichung (A) zufolge, gleich dem ersten Differentialquotienten von X nach T, gültig für $T = T_0$. Wenn aber die Werte einer Funktion $f(t)$ für die Werte $-2w$, $-w$, 0, w, $2w$ des Arguments t gegeben sind, und die Funktionswerte sowie ihre ersten, zweiten und dritten Differenzen in der Weise bezeichnet werden, wie es in den vier letzten Kolumnen der folgenden Tabelle geschehen ist,

		$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
$-2w$	$f(-2)$			
		$f'(-\frac{3}{2})$		
$-w$	$f(-1)$		$f''(-1)$	
		$f'(-\frac{1}{2})$		$f'''(-\frac{1}{2})$
0	$f(0)$		$f''(0)$	
		$f'(\frac{1}{2})$		$f'''(\frac{1}{2})$
w	$f(1)$		$f''(1)$	
		$f'(\frac{3}{2})$		
$2w$	$f(2)$			

so erhält man nach § 4, wenn noch

$$\tfrac{1}{2}[f'(-\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})] = f'(0), \qquad \tfrac{1}{2}[f'''(-\tfrac{1}{2}) + f'''(\tfrac{1}{2})] = f'''(0)$$

gesetzt wird,

$$\left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0} = \frac{1}{w}\,[f'(0) - \tfrac{1}{6}f'''(0)]$$

Diese Formel ist nun auf die oben für X_{-2}, X_{-1}, ..., X_2 und ihre Differenzen gegebene Tabelle anzuwenden; es folgt dann

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{X_1 - X_{-1}}{2w} + \frac{2(X_1 - X_{-1}) - (X_2 - X_{-2})}{12w}$$

Nachdem man so die für T_{-2}, T_{-1}, T_0, ... gültigen Werte von $\mathfrak{x}$ gefunden hat, erhält man aus diesen durch Interpolation den einer beliebigen Zeit T entsprechenden Wert von $\mathfrak{x}$.

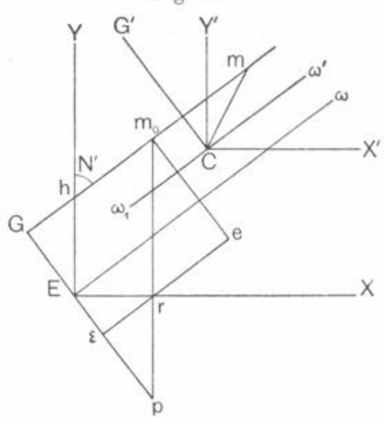
Eine ganz ähnliche Gleichung wie die für X aufgestellte gilt auch für Y; wird der zugehörige, dem $\mathfrak{x}$ analoge Koeffizient mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so hat man also

(32) $$\begin{aligned} X &= X_0 + \mathfrak{x}(T - T_0) \\ Y &= Y_0 + \mathfrak{y}(T - T_0) \end{aligned}$$

Im folgenden wird angenommen, daß das vorhin mit w bezeichnete Zeitintervall in Einheiten einer wahren Stunde ausgedrückt ist; es ist dann auch $T - T_0$ in dieser Einheit auszudrücken.

116. Fundamentalgleichungen. Mit Hilfe der Gleichungen (32) kann man für jede der Konjunktion benachbarte Zeit T den Ort der XY-Spur der Schattenachse finden; dieser Ort läßt sich aber auch noch auf andere Weise bestimmen. Zunächst folgt aus (32), daß, wenn $T - T_0$ in Einheiten einer wahren Stunde ausgedrückt wird, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als die Komponenten der mittleren stündlichen Geschwindigkeit der Spur der Schattenachse betrachtet werden können. Ist demnach in Fig. 16 m_0 der Ort der Spur zur Zeit T_0, und m der Ort zur Zeit T, so hat man, wenn die mittlere stündliche Geschwindigkeit der Spur mit n, und der Winkel zwischen der Y-Achse und der Richtung $m_0 m$ mit N' bezeichnet wird,

Fig. 16.



(33) $$\mathfrak{x} = n \sin N', \qquad \mathfrak{y} = n \cos N'$$

Da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bekannt sind, so kann man mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen n und N' berechnen.

Man ziehe jetzt EG und $m_0 e$ senkrecht zu Gm, ferner $m_0 p$ parallel zur Y-Achse, und re, sowie $E\omega$ parallel zu Gm. Da $Er = X_0$, $rm_0 = Y_0$ und der Winkel $Gpm_0 = XE\omega = 90^0 - N'$ ist, so folgt, wenn $EG = \gamma$ und $\varepsilon e = Gm_0 = \varkappa_0$ gesetzt wird,

(34) $$\begin{aligned} \gamma &= Y_0 \sin N' - X_0 \cos N' \\ \varkappa_0 &= X_0 \sin N' + Y_0 \cos N' \end{aligned}$$

Es ist aber $Gm = m_0 m + Gm_0$ und $m_0 m = n(T - T_0)$; setzt man also $Gm = \omega$ und substituiert für $Gm_0 = \varkappa_0$ seinen vorigen Wert, so erhält man

$$\omega = n\left[T - T_0 + \frac{1}{n}\left(X_0 \sin N' + Y_0 \cos N'\right)\right]$$

oder, wenn von der Abkürzung

$$\mu = T_0 - \frac{1}{n}\left(X_0 \sin N' + Y_0 \cos N'\right) \tag{35}$$

Gebrauch gemacht wird,

$$\omega = (T - \mu)n \tag{35^a}$$

Mit Rücksicht darauf, daß n sich im Laufe einiger Stunden nur wenig ändert, und daß $\varkappa_0$, der über T_0 gemachten Annahme zufolge, verhältnismäßig klein ist, kann man $\varkappa_0 : n$ als das Zeitintervall betrachten, innerhalb dessen die Spur die Strecke $G m_0$ durchläuft; μ gibt dann die wahre Zeit des ersten Meridians an, zu der die Spur ihren kleinsten Abstand vom Erdmittelpunkte erreicht. Es bedeute nun λ die vom ersten Meridian aus nach Osten hin positiv gezählte Länge eines Beobachtungsortes; der wahren Zeit T des ersten Meridians entspricht dann die wahre Zeit $T + \lambda$ des Beobachtungsortes. Wird letztere wie früher mit t bezeichnet, so folgt $T = t - \lambda$; substituiert man diesen Wert in die Gleichung (35ª), so wird

$$\omega = (t - \lambda - \mu)n \tag{36}$$

Die Größen ω und γ stellen die Koordinaten des Punktes m, also des Ortes der XY-Spur der Schattenachse zur Zeit T dar, und zwar bezogen auf zwei zueinander senkrechte Achsen, von denen die eine die zu Gm parallele Gerade $E\omega$ ist, während die andere in die Richtung EG fällt. Um die auf dieselben Achsen bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes zu erhalten, denke man sich letzteren auf die Ebene EXY projiziert; diese Projektion möge in den Punkt C fallen. Bezeichnet man die Koordinaten von C, bezogen auf EG und $E\omega$ mit Γ, bzw. Ω, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma &= y \sin N' - x \cos N' \\ \Omega &= x \sin N' + y \cos N' \end{aligned} \tag{37}$$

Die Koordinaten von m bezogen auf die beiden zu EG und $E\omega$ parallelen Achsen CG' und $C\omega'$ sind gleich $\gamma - \Gamma$, bzw. $\omega - \Omega$. Zieht man jetzt CX' und CY' parallel zu EX, bzw. EY und setzt $Cm = \bar{\varrho}$, so daß $\bar{\varrho}$ den Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse angibt, bezeichnet man ferner mit Θ den von CY' in der Richtung nach CX' gezählten Winkel $Y'Cm$, so lassen sich die auf CG' und $C\omega'$ bezogenen Koordinaten von m auch durch $\bar{\varrho} \sin(N' - \Theta)$, bzw. $\bar{\varrho} \cos(N' - \Theta)$ ausdrücken. Demnach gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} \sin(N' - \Theta) &= \gamma - \Gamma \\ \bar{\varrho} \cos(N' - \Theta) &= \omega - \Omega \end{aligned} \tag{38}$$

oder, wie man auch schreiben kann,

$$\begin{aligned} -\bar{\varrho} \sin[N' - (\Theta + 180^\circ)] &= \gamma - \Gamma \\ -\bar{\varrho} \cos[N' - (\Theta + 180^\circ)] &= \omega - \Omega \end{aligned} \tag{38^a}$$

Damit nun eine Finsternis zustande kommt, muß, wie früher gezeigt wurde, $\bar{\varrho} = \pm u$ sein; dabei hat man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je nachdem u positiv oder negativ ist. Geht man, falls u positiv ist, von der Gleichung (38) aus, so erhält man als Bedingungsgleichungen für das Eintreten einer Finsternis

$$(39)\qquad \begin{aligned} u\sin(N'-\Theta) &= \gamma - \Gamma = \gamma - y\sin N' + x\cos N' \\ u\cos(N'-\Theta) &= \omega - \Omega = \omega - x\sin N' - y\cos N'; \end{aligned}$$

ist aber u negativ, so folgt durch Anwendung der mit (38) identischen Gleichungen (38^a)

$$\begin{aligned} u\sin[N'-(\Theta+180^\circ)] &= \gamma - \Gamma \\ u\cos[N'-(\Theta+180^\circ)] &= \omega - \Omega \end{aligned}$$

Ersetzt man in den zwei letzten Gleichungen $180^\circ + \Theta$ durch Θ', so nehmen sie dieselbe Form an wie die beiden vorhergehenden; es genügt also, sich auf die Gleichungen (39) zu beschränken. Falls dann u negativ und demnach die Finsternis ringförmig ist, hat man nur zu berücksichtigen, daß der bei der Auflösung der Gleichungen (39) sich ergebende Wert von Θ nicht gleich dem Winkel $Y'Cm$ (Fig. 16), sondern gleich $Y'Cm + 180^\circ$ ist; auf diesen Punkt wird unten zurückgekommen werden.

In (39) führe man jetzt an Stelle von x und y ihre in (15) gegebenen Ausdrücke ein und vertausche in letzteren sowie auch in der Gleichung (29^a) das Argument $\mu' - \alpha'$ mit dem ihm gleichen $t + \varDelta\alpha'$ (S. 325); substituiert man dann noch für ω seinen Wert (36) und setzt

$$(40)\qquad \Theta - N' = \psi$$

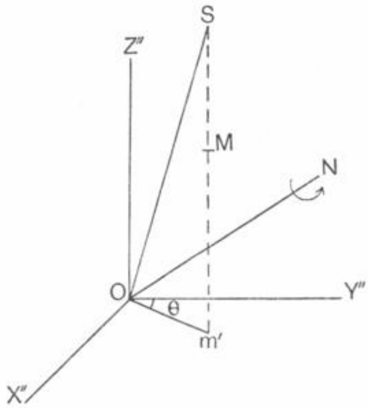
so erhält man die Fundamentalgleichungen

$$(41^1)\qquad u = u' - [(1-c)\sin\varphi_1\sin\delta' + \cos\varphi_1\cos\delta'\cos(t+\varDelta\alpha')]\operatorname{tang} f$$

$$(41^2)\qquad \begin{aligned} u\sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1\cos\delta'\sin N' - \cos\varphi_1[\sin\delta'\sin N'\cos(t+\varDelta\alpha') + \\ &\qquad + \cos N'\sin(t+\varDelta\alpha')] \\ u\cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos\delta'\cos N' + \\ &\qquad + \cos\varphi_1[\sin\delta'\cos N'\cos(t+\varDelta\alpha') - \sin N'\sin(t+\varDelta\alpha')] \end{aligned}$$

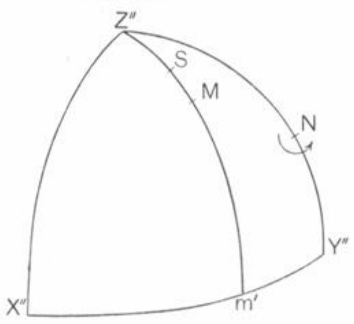
Der vorhin mit Θ bezeichnete Winkel hat eine besondere Bedeutung, welche jetzt erläutert werden soll. Man ziehe vom Beobachtungsorte O (Fig. 17) aus OX'', OY'', OZ'' parallel zu den früher benutzten Achsen X, Y, Z; ON bezeichne die in der $Y''Z''$-Ebene gelegene Richtung zum Nordpol des Äquators, und m' die Projektion der Schattenachse auf die Ebene $X''Y''$. Es ist dann der Winkel $Y''Om'$ gleich Θ. Da OZ'' parallel zur Schattenachse ist, so liegen die Punkte, in denen OZ'' und die von O nach den Mittelpunkten S und M der Sonne und des Mondes gehenden Richtungen die Sphäre treffen, auf einem größten Kreise. Dieser ist in Fig. 18 mit $Z''m'$ bezeichnet; X'', Y'' und m' bedeuten die Durchschnittspunkte der Richtungen OX'', OY'' und Om' mit der Sphäre, N gibt den Ort des Pols, S den Ort der Sonne und M den Ort des Mondes an. Infolge der über die Lage der X- und Y-Achse getroffenen Bestimmung wachsen die Rektaszensionen in der Rich-

Fig. 17.



tung des Pfeils, und somit bedeutet $Y''Z''m' = \Theta$ den Positionswinkel von Sonne und Mond, bezogen auf Z''. Wenn sich nun die als kreisförmig angenommenen Ränder von Sonne und Mond berühren, so geht der durch die Mittelpunkte beider Gestirne gelegte größte Kreis Zm' auch durch den Berührungspunkt. Falls also der Berührungspunkt auf derselben Seite von Z'' liegt, wie die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, so ist sein Positionswinkel, bezogen auf Z'', ebenfalls gleich Θ; liegt der Berührungspunkt dagegen auf der entgegengesetzten Seite, so ist der Positionswinkel desselben gleich $180^\circ + \Theta$. Der erste Fall tritt ein, wenn Sonne und Mond sich von außen berühren (Fig. 2), der zweite, wenn bei einer totalen Finsternis eine innere Berührung stattfindet (Fig. 3).

Fig. 18.



Berücksichtigt man nun noch, daß die Richtung OZ'' zur Zeit einer Sonnenfinsternis sehr nahe mit der Verbindungslinie von O mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt, so kann man sich auch folgendermaßen ausdrücken: »Bei einer äußeren Berührung bezeichnet Θ den Positionswinkel des Ein- oder Austrittspunktes, gemessen am Mittelpunkte der Sonne; für die einer totalen Finsternis entsprechende innere Berührung gibt $180^\circ + \Theta$ den Positionswinkel des Berührungspunktes an.« Bezieht sich die innere Berührung auf eine ringförmige Finsternis, so liegt der Berührungspunkt wieder auf derselben Seite von Z'' wie die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes (Fig. 4), sein Positionswinkel in bezug auf Z'', bzw. auf den Mittelpunkt der Sonne ist also gleich $NZ''M$ (Fig. 18); aber bei einer ringförmigen Finsternis ist der aus den Gleichungen (39), bzw. (41) folgende Wert von Θ gleich $NZ''M + 180^\circ$, und somit ist der Positionswinkel des Berührungspunktes gleich $180^\circ + \Theta$.

117. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Hansen*. Bei der Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort handelt es sich zunächst darum, die Zeiten der ersten und letzten äußeren Berührung sowie die Positionswinkel der Berührungspunkte, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, zu bestimmen. Ist die Finsternis total oder ringförmig, so müssen auch die Zeiten der inneren Berührung ermittelt werden; wenn aber die Finsternis nur partiell ist, so hat man außer den Zeiten der äußeren Berührung noch die Zeit und Größe des Maximums der Verfinsterung zu bestimmen. Bei der Lösung dieser Aufgaben begnügt man sich mit Näherungswerten der gesuchten Größen und setzt demgemäß in den Gleichungen (41) $\Delta\alpha' = 0$ und $\delta' = d'$; die Gleichungen werden damit

$$(42^1) \qquad u = u' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t] \operatorname{tang} f$$

$$(42^2) \qquad \begin{aligned} u \sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 [\sin d' \sin N' \cos t + \\ &\qquad + \cos N' \sin t] \\ u\cos\psi &= (t - \lambda - \mu) n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \\ &\qquad + \cos\varphi_1 [\sin d' \cos N' \cos t - \sin N' \sin t] \end{aligned}$$

Je nachdem die Zeiten der äußeren oder der inneren Berührung gefunden werden sollen, hat man in (42^1) für u' und f die aus den Gleichungen (31), (30) und (28) folgenden Werte von u'_a und f_a, bzw. von u'_i und f_i anzuwenden. Es sei nun t_0 ein für die wahre Ortszeit t einer Berührung angenommener Wert; beispielsweise kann man $t_0 = \mu + \lambda$ setzen, wo μ durch die Gleichung (35) bestimmt ist, und λ die vom ersten Meridian aus nach Osten hin positiv gerechnete Länge des Beobachtungsortes bezeichnet. Wenn dann auf der rechten Seite von (42^1) und (42^2) alle Größen mit Ausnahme von t als konstant betrachtet werden, so erhält man

$$(43^1) \qquad \begin{aligned} u = u' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0] \operatorname{tang} f + \\ + (t - t_0) \cos\varphi_1 \cos d' \sin t_0 \operatorname{tang} f \end{aligned}$$

$$(43^2) \qquad \begin{aligned} u \sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 [\sin d' \sin N' \cos t_0 + \cos N' \sin t_0] + \\ &\quad + (t - t_0) \cos\varphi_1 [\sin d' \sin N' \sin t_0 - \cos N' \cos t_0] \\ u \cos\psi &= (t_0 - \lambda - \mu) n - (1-c) \sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \\ &\quad + \cos\varphi_1 [\sin d' \cos N' \cos t_0 - \sin N' \sin t_0] \\ &\quad + (t - t_0)[n - \cos\varphi_1 (\sin d' \cos N' \sin t_0 + \sin N' \cos t_0)] \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich, wie gleich gezeigt werden soll, der Wert von $t - t_0$ bestimmen. Um aber $t - t_0$ in Einheiten einer Stunde ausgedrückt zu erhalten, hat man noch $t - t_0$ durch $(t - t_0)\, 15 \operatorname{arc} 1^\circ$ zu ersetzen; nur in dem in (43^2) enthaltenen Produkt $n(t - t_0)$ ist $t - t_0$ beizubehalten. Werden jetzt die Bezeichnungen eingeführt

$$\varkappa = 15 \operatorname{arc} 1^\circ \qquad (\log \varkappa = 9.41797)$$

und

$$(44) \qquad u_1 = u' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0] \operatorname{tang} f,$$

so nimmt die Gleichung (43^1) die Form an

$$u = u_1 + \varkappa (t - t_0) \cos\varphi_1 \cos d' \sin t_0 \operatorname{tang} f$$

Diesen Ausdruck substituiere man in die Gleichungen (43^2) und setze dann

$$(45^1) \qquad \begin{aligned} \cos g &= \cos d' \sin N' & \cos k &= \cos d' \cos N' \\ \sin g \sin G &= \sin d' \sin N' & \sin k \sin K &= \sin N' \\ \sin g \cos G &= \cos N' & \sin k \cos K &= \sin d' \cos N' \end{aligned}$$

$$(45^2) \qquad \begin{aligned} \sin g' \sin G' &= \sin d' \sin N' \cos f - \cos d' \sin f \sin\psi \\ \sin g' \cos G' &= \cos N' \cos f \end{aligned}$$

$$(45^3) \qquad \begin{aligned} \sin k' \sin K' &= \sin N' \\ \sin k' \cos K' &= \sin d' \cos N' + \cos d' \operatorname{tang} f \cos\psi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$(46) \qquad \begin{aligned} u_1 \sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos g - \cos\varphi_1 \sin g \sin(G + t_0) - \\ &\quad - \varkappa (t - t_0) \cos\varphi_1 \sin g' \cos(G' + t_0) \sec f \\ u_1 \cos\psi &= (t_0 - \lambda - \mu) n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0) + \\ &\quad + (t - t_0)[n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin k' \sin(K' + t_0)] \end{aligned}$$

oder, wenn

$$(47^1)\quad \begin{aligned} m \sin M &= \gamma - (1 - c) \sin\varphi_1 \cos g + \cos\varphi_1 \sin g \sin(G + t_0) \\ m \cos M &= (t_0 - \lambda - \mu)n - (1 - c) \sin\varphi_1 \cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0) \end{aligned}$$

$$(47^2)\quad \begin{aligned} m' \sin M' &= - \varkappa \cos\varphi_1 \sin g' \cos(G' + t_0) \sec f \\ m' \cos M' &= n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin k' \sin(K' + t_0) \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(48)\quad \begin{aligned} u_1 \sin\psi &= - m \sin M + (t - t_0)\, m' \sin M' \\ u_1 \cos\psi &= m \cos M + (t - t_0)\, m' \cos M' \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(49)\quad \begin{aligned} u_1 \sin(M' - \psi) &= m \sin(M + M') \\ u_1 \cos(M' - \psi) &= m \cos(M + M') + m'(t - t_0) \end{aligned}$$

Wenn nun χ einen Wert von $M' - \psi$ bedeutet, welcher der Gleichung

$$(49^1)\quad \sin(M' - \psi) = \frac{m}{u_1} \sin(M + M')$$

genügt, so genügt dieser Gleichung auch der Wert $M' - \psi = 180^\circ - \chi$. Aus der zweiten der Gleichungen (49) folgt aber

$$(49^2)\quad t = t_0 - \frac{m}{m'} \cos(M + M') + \frac{u_1}{m'} \cos(M' - \psi)$$

Substituiert man hierin die beiden Werte von $M' - \psi$, so erhält man zwei Werte von t. Ist X derjenige Wert von $M' - \psi$, für welchen $u_1 \cos(M' - \psi) : m'$ negativ wird, so gibt der durch die Substitution $M' - \psi = X$ erhaltene Wert von t die wahre Ortszeit des Beginns der Finsternis an, dagegen bezieht sich der der Substitution $M' - \psi = 180^\circ - X$ entsprechende Wert von t auf das Ende der Finsternis. Den beiden Werten von $M' - \psi$ entsprechen, der Gleichung (40) zufolge, die Werte $\Theta = M' + N' - X$, bzw. $\Theta = M' + N' - (180^\circ - X)$. Wenn nun p den Positionswinkel des Berührungspunktes von Sonne und Mond, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, bedeutet, so hat man bei einer äußeren Berührung $p = \Theta$ (S. 330); für den Eintritt ist somit $p = M' + N' - X$, und für den Austritt $p = M' + N' - (180^\circ - X)$. Bei einer inneren Berührung sind die Positionswinkel der Berührungspunkte gleich den um 180° vermehrten Werten von Θ.

Die Gleichung (49^2) wird gewöhnlich in der Form

$$(49^3)\quad t = t_0 - \frac{m}{m'} \cos(M + M') \mp \frac{u_1}{m'} \cos\chi$$

angegeben; unter χ ist dann derjenige der beiden aus (49^1) folgenden Werte von $M' - \psi$ zu verstehen, für welchen $u_1 \cos(M' - \psi) : m$ positiv wird. In diesem Falle erhält man durch Anwendung des oberen Vorzeichens die Zeit des Anfangs, und durch Anwendung des unteren Vorzeichens die Zeit des Endes der Finsternis. Da ferner $\chi = 180^\circ - X$ ist, so wird bei einer äußeren Berührung, wenn p_1 den Positionswinkel des Eintritts-, und p_2 den Positionswinkel des Austrittspunktes bedeutet, $p_1 = M' + N' - (180^\circ - \chi)$, $p_2 = M' + N' - \chi$. Bei einer inneren Berührung ist zu diesen Werten 180° zu addieren.

Was die Anwendung der im vorigen abgeleiteten Formeln betrifft, so kann man zunächst in (45^2) und (45^3) die den kleinen Faktor $\sin f$, bzw. $\tang f$ enthaltenden Glieder vernachlässigen und $\cos f = 1$ setzen; damit wird $g' = g$, $G' = G$, $k' = k$ und $K' = K$. Die Werte von g, G, k und K sowie auch von u', f, d', γ, μ, N' und n findet man im Berliner astronomischen Jahrbuch für fünf der Konjunktion benachbarte wahre Berliner Zeiten vorausberechnet; mit Hilfe dieser Werte kann man für jeden Ort, dessen Länge gegen Berlin bekannt ist, die der wahren Ortszeit t_0 entsprechenden Werte der angeführten Größen ableiten. Durch Anwendung der Gleichungen (44), (47^1), (47^2), (49^1) und (49^2), bzw. (49^3) erhält man sodann die genäherten wahren Ortszeiten t_1 und t_2 der ersten und letzten Berührung. Solche Näherungswerte lassen sich übrigens ohne Rechnung finden, wenn man sich der in einigen Jahrbüchern gegebenen Karten bedient*). Auf letzteren sind nämlich alle Punkte der Erde, für welche der Anfang oder das Ende einer Finsternis auf den Beginn einer und derselben Stunde des ersten Meridians fällt, durch Kurven verbunden. Mit Hilfe dieser Kurven kann man durch Schätzung die Zeiten des ersten Meridians bestimmen, zu denen die Finsternis an einem seiner geographischen Lage nach bekannten Orte beginnt oder endigt; hieraus in Verbindung mit der Länge des Ortes ergeben sich die entsprechenden Ortszeiten.

Um die Berührungszeiten genauer zu bestimmen, denke man sich in den Gleichungen (44) bis (49^2) t_0 zunächst durch t_1 ersetzt, und lege demgemäß den Größen u', f, d', γ, μ, N' und n ihre für die wahre Ortszeit t_1 gültigen Werte bei. Man kann auch wieder g', G', k', K' den Größen g, G, k, K beziehungsweise gleich annehmen und hat dann für letztere ihre der Zeit t_1 entsprechenden Werte zu substituieren; hierauf sind m, M, m' und M' neu zu rechnen. Die Gleichungen (49^1) und (49^2), bzw. (49^3) liefern jetzt wieder zwei Werte von t, von denen der dem t_1 zunächst gelegene einen genaueren Wert für die Zeit der ersten Berührung darstellt, während der zweite eine rohe Zeitangabe für die zweite Berührung bedeutet und zu vernachlässigen ist. In ganz analoger Weise gelangt man zu einer genaueren Bestimmung der Zeit der zweiten Berührung.

Es muß jetzt noch gezeigt werden, in welcher Weise die Zeit des Maximums der Verfinsterung und die Größe dieses Maximums gefunden werden kann. Man nehme zunächst an, daß man in den Gleichungen (10) bis (12) $i = i_1$ gesetzt habe, wo i_1 eine zwischen 0 und 12 gelegene Zahl bedeuten soll; die damit erhaltenen Werte von f und u' denke man sich in die Gleichung (44) substituiert. Macht man dann über t_0 wieder dieselbe oder eine ähnliche Annahme wie oben, und wendet die Gleichungen (45) bis (49^3) an, so erhält man im allgemeinen ebenfalls zwei Werte von t; diese geben die Zeiten an, zu denen die Phase der Verfinsterung i_1 Zoll beträgt. In dem Falle aber, wo i_1 das Maximum der Verfinsterung für den Beobachtungsort darstellt, fallen die beiden Werte von t in einen zusammen. Da u, bzw. u_1 im allgemeinen von 0 verschieden, und m' endlich ist, so ergibt sich als Bedingung dafür, daß die Gleichung (49^3) nur einen Wert von t liefert, $\cos\chi =$

*) Siehe die den Verlauf der Sonnenfinsternisse 1904 März 16, bzw. 1902 Oktober 30, darstellenden Karten am Schlusse dieses Buches.

$= \cos(M' - \psi) = 0$. Die Zeit t_m der größten Phase ist also durch die Gleichung bestimmt

$$t_m = t_0 - \frac{m}{m'} \cos(M + M') \tag{50}$$

Um diese Gleichung aufzulösen, nehme man für t_0 etwa das Mittel aus den Zeiten der ersten und letzten Berührung an und berechne die zugehörigen Werte von m, M, m', M'; mit Hilfe von (50) erhält man dann einen Näherungswert $t_m^{(0)}$ von t_m. Indem man hierauf in (50) t_0 gleich $t_m^{(0)}$ annimmt und m, M, m' und M' für die Zeit $t_m^{(0)}$ berechnet, ergibt sich ein genauerer Wert für die wahre Ortszeit der größten Phase. Wäre aber $t_m^{(0)}$ bereits der genaue Wert, so müßte das Glied $m \cos(M + M') : m'$ verschwinden; da m im allgemeinen von 0 verschieden, und m' endlich ist, so müßte also $\cos(M + M') = 0$ sein. Zur Zeit der größten Phase ist demnach $\sin(M + M') = \pm 1$. Gleichzeitig ist dann aber, wie vorhin gefunden wurde, $\cos\chi = \cos(M - \psi) = 0$, also $\sin\chi = \sin(M' - \psi) = \pm 1$. Berücksichtigt man nun noch, daß bei einer partiellen Sonnenfinsternis u positiv ist, und daß m stets als positiv betrachtet wird, so ergibt sich aus der ersten der Gleichungen (49), daß der der größten Phase entsprechende Wert von u gleich m ist; hierbei hat man für m seinen in letzter Näherung gefundenen Wert anzuwenden.

Nun ist nach Gleichung (12)

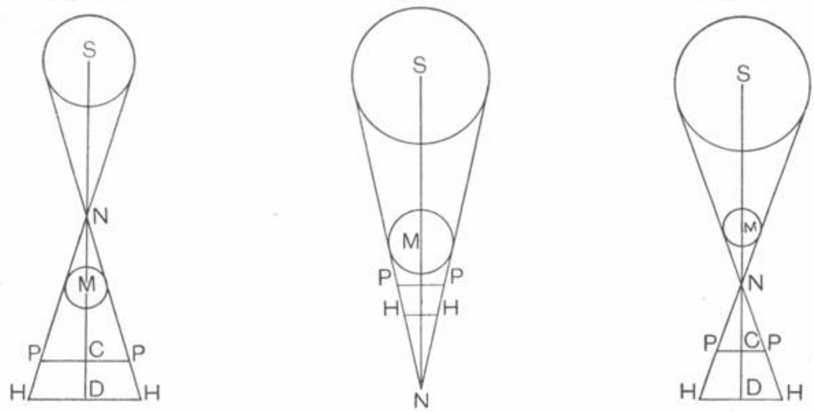
$$i = 12 \frac{u'_a - u'}{u'_a - u'_i}$$

Legt man hierin u' seinen aus der Gleichung (42^1) für $u = m$ und $t = t_m$ folgenden Wert bei, so erhält man das Maximum der Verfinsterung, ausgedrückt in Zollen. Gewöhnlich setzt man aber in diesem Falle $u' = u$, also $u' = m$ und somit

$$i = 12 \frac{u'_a - m}{u'_a - u'_i} \,*)$$

118. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Bessel*. In Fig. 19ᵃ, 19ᵇ und 19ᶜ sei HH die durch den Mittelpunkt der Erde

Fig. 19a. Fig. 19b. Fig. 19c.



*) An den Inhalt dieses Paragraphen schließt sich unmittelbar die in den §§ 119 ff. gegebene Ableitung der zur Vorausberechnung des Verlaufs einer Finsternis auf der Erde nötigen Formeln an; der § 118 kann also übergangen werden.

senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene, und PP eine zu HH parallele, durch den Beobachtungsort gehende Ebene; erstere möge die H-, letztere die P-Ebene genannt werden. Es sei ferner Z der Abstand des Mondmittelpunktes von der H-Ebene, s der lineare Halbmesser des Mondes, s' der lineare Halbmesser der Sonne, ϱ' die Entfernung der Mittelpunkte dieser beiden Gestirne voneinander, F_a der Öffnungswinkel des Halbschattenkegels, c_a der Abstand der Spitze dieses Kegels von der H-Ebene, F_i der Öffnungswinkel des Kernschattenkegels, und c_i der Abstand der Spitze des Kernschattenkegels von der H-Ebene; dabei soll c_i positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Spitze des Kernschattenkegels auf derselben (Fig. 19[c]) oder auf der entgegengesetzten Seite von der H-Ebene liegt wie der Mittelpunkt des Mondes (Fig. 19[b]). Man hat dann die Gleichungen

$$(51) \qquad \sin F_a = \frac{s' + s}{\varrho'}, \qquad c_a = Z + \frac{s}{\sin F_a}$$

$$(52) \qquad \sin F_i = \frac{s' - s}{\varrho'}, \qquad c_i = Z - \frac{s}{\sin F_i}$$

Die in Einheiten des Radius des Erdäquators ausgedrückten Werte von Z und $1 : \varrho'$ sind durch die Gleichungen (28) und (23) bestimmt; für s und s' hat man ihre in § 114 gegebenen Werte zu substituieren. Es werde nun der Abstand des Beobachtungsortes von der H-Ebene (also auch der P- von der H-Ebene) mit z bezeichnet, und zwar soll z positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die P-Ebene auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der H-Ebene liegt wie der Mittelpunkt des Mondes; ferner setze man den Radius des von dem Halbschattenkegel auf der H-Ebene ausgeschnittenen Kreises (DH in Fig. 19[a]) gleich U'_a, und den Radius des von dem Kernschatten, bzw. dem verlängerten Kernschattenkegel ausgeschnittenen Kreises (DH in Fig. 19[b] und 19[c]) gleich U'_i; dabei soll U'_i als eine negative Größe aufgefaßt werden, wenn die H-Ebene durch den Kernschattenkegel hindurchgeht (Fig. 19[b]). Wenn dann noch U_a den Radius des von dem Halbschatten-, und U_i den Radius des von dem Kernschatten- oder von dem verlängerten Kernschattenkegel auf der P-Ebene ausgeschnittenen Kreises bedeutet, und U_i negativ gerechnet wird, falls die P-Ebene den Kernschattenkegel schneidet (Fig. 19[b]), so ist

$$(53) \qquad U'_a = c_a \operatorname{tang} F_a, \qquad U_a = (c_a - z) \operatorname{tang} F_a$$

$$(54) \qquad U'_i = c_i \operatorname{tang} F_i, \qquad U_i = (c_i - z) \operatorname{tang} F_i$$

Hieraus ergibt sich

$$(55) \qquad U_a = U'_a - z \operatorname{tang} F_a$$

$$(56) \qquad U_i = U'_i - z \operatorname{tang} F_i$$

Nun kann man eine i-zöllige Finsternis — wenn $i < 6$ ist — als eine äußere Berührung des Mondes mit einer Kugel auffassen, welche mit dem Radius $\left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$ um den Mittelpunkt der Sonne beschrieben ist (S. 317). Der Öffnungswinkel F des diese Kugel und den Mond einhüllenden Halbschattenkegels mHm' (Fig. 8) und die

Entfernung c der Spitze dieses Kegels von der H-Ebene sind dann nach (51) durch die Gleichungen bestimmt

$$(57) \qquad \sin F = \frac{\left(1 - \frac{i}{6}\right)s' + s}{\varrho'}, \qquad c = Z + \frac{s}{\sin F}$$

Ferner erhält man aus (53) für die Radien U' und U der durch den Kegel mHm' auf der H- und P-Ebene ausgeschnittenen Kreise

$$(58) \qquad U' = c \operatorname{tang} F, \qquad U = (c - z) \operatorname{tang} F$$

und demnach

$$(59) \qquad U = U' - z \operatorname{tang} F$$

Verbindet man die erste der Gleichungen (57) mit den Gleichungen (51) und (52), so ergibt sich

$$(60) \qquad \sin F = \sin F_a - \frac{i}{12}(\sin F_a + \sin F_i)$$

Ferner folgt aus (58) und der zweiten Gleichung (57)

$$(61) \qquad U' \cos F = c \sin F = Z \sin F + s\,,$$

und aus den Gleichungen (53) und (51), bzw. (54) und (52), wenn $\cos F_a = \cos F_i = \cos F$ gesetzt wird,

$$(62) \qquad \begin{aligned} U_a' \cos F &= Z \sin F_a + s \\ U_i' \cos F &= Z \sin F_i - s \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$(63) \qquad Z(\sin F_a + \sin F_i) = (U_a' + U_i') \cos F$$

Substituiert man nun den für $\sin F$ gefundenen Ausdruck (60) in die Gleichung (61), so erhält man mit Berücksichtigung von (63) und der ersten der Gleichungen (62)

$$(64) \qquad U' = U_a' - \frac{i}{12}(U_a' + U_i')$$

oder, wenn $i : 12 = \mathfrak{G}$ gesetzt wird, so daß $\mathfrak{G}$ den Bruchteil des durch die Mondscheibe bedeckten Sonnendurchmessers oder die Größe der Verfinsterung bedeutet,

$$(65) \qquad \mathfrak{G} = \frac{U_a' - U'}{U_a' + U_i'}$$

Eine i-zöllige Finsternis, für die $i > 6$ ist, läßt sich als eine innere Berührung des Mondes mit einer Kugel betrachten, deren Radius gleich $\left(\frac{i}{6} - 1\right)s'$ ist, und deren Mittelpunkt mit demjenigen der Sonne zusammenfällt. Bedeutet F_1 den Öffnungswinkel des diese Kugel und den Mond einhüllenden Kernschattenkegels, und bezeichnet man mit U_1' und U_1 die Radien der von diesem Kegel auf der H- und P-Ebene ausgeschnittenen Kreise, so erhält man $F_1 = -F$, $U_1' = -U'$, $U_1 = -U$ und

$$\mathfrak{G} = \frac{U_a' + U_1'}{U_a' + U_i'} = \frac{U_a' - U'}{U_a' + U_i'}$$

Die Gleichung (65) ist also auch für $i > 6$ gültig.

Aus Fig. 16 (S. 327) folgt jetzt, wenn die auf die Achsen EX und EY bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes, statt wie bisher mit x und y, mit ξ und η bezeichnet werden,

$$X - \xi = \bar{\varrho} \sin \Theta, \qquad Y - \eta = \bar{\varrho} \cos \Theta \tag{66^a}$$

oder auch

$$X - \xi = - \bar{\varrho} \sin(180^\circ + \Theta), \qquad Y - \eta = - \bar{\varrho} \cos(180^\circ + \Theta) \tag{66^b}$$

In diese Gleichungen ist die Bedingung einzuführen, daß $\bar{\varrho}$ zur Zeit einer äußeren oder inneren Berührung der Sonne (bzw. der um den Mittelpunkt der Sonne mit dem Radius $\pm\left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$ beschriebenen Kugel) und des Mondes gleich dem Radius des Kreises sein muß, welcher von dem Halbschatten-, bzw. von dem Kernschatten- oder von dem verlängerten Kernschattenkegel auf der P-Ebene ausgeschnitten wird. Die für diesen Radius gefundenen Ausdrücke (55), (56) und (59) haben die gemeinsame Form

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}' - z \operatorname{tang} \mathfrak{F} \tag{67}$$

Dabei ist $\mathfrak{U}$ negativ, wenn die P-Ebene den Kernschattenkegel schneidet, und somit die Finsternis für den Beobachtungsort total ist; betrachtet man also $\bar{\varrho}$ als wesentlich positiv, so hat man, falls $\mathfrak{U} < 0$ ist, $\bar{\varrho} = - \mathfrak{U}$ zu setzen. Wendet man nun bei einem positiven Wert von $\mathfrak{U}$ die Gleichung (66^a), und bei einem negativen Wert von $\mathfrak{U}$ die Gleichung (66^b) an, so erhält man als Bedingungsgleichung für das Eintreten einer äußeren oder inneren Berührung, bzw. einer i-zölligen Verfinsterung (vgl. S. 328f.)

$$X - \xi = \mathfrak{U} \sin \Theta, \qquad Y - \eta = \mathfrak{U} \cos \Theta \tag{68}$$

Ist $\mathfrak{U}$ positiv, so ist der aus der Auflösung dieser Gleichungen folgende Wert von Θ gleich dem Winkel $Y''Z''m'$ in Fig. 18; ist dagegen $\mathfrak{U}$ negativ, so ist Θ gleich $180^\circ + Y''Z''m'$. Durch Betrachtungen, welche den auf S. 329f. angestellten ganz analog sind, ergibt sich dann weiterhin, daß sowohl bei einer äußeren Berührung, als auch bei der einer totalen oder ringförmigen Finsternis entsprechenden inneren Berührung die aus den Gleichungen (68) folgenden Werte von Θ die Positionswinkel der Berührungspunkte, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, angeben.

Zur Berechnung von $\mathfrak{U}$ substituiere man in (67) den durch die letzte der Gleichungen (13) bestimmten Wert von z. Da das in den Gleichungen (13) vorkommende Argument $\mu' - \alpha'$ den Stundenwinkel des Poles der Schattenachse am Beobachtungsorte bedeutet, so kann man, wenn der für den ersten Meridian gültige Wert dieses Stundenwinkels mit H bezeichnet wird, $\mu' - \alpha' = H + \lambda$ setzen, wo λ wieder die vom ersten Meridian nach Osten hin gezählte Länge des Beobachtungsortes angibt. Somit wird der für die Gleichungen (68) zu verwendende Wert von $\mathfrak{U}$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}' - [\varrho \sin \varphi' \sin \delta' + \varrho \cos \varphi' \cos \delta' \cos(H + \lambda)] \operatorname{tang} \mathfrak{F} \tag{69}$$

Je nachdem die Zeiten der äußeren oder der inneren Berührung oder einer i-zölligen Verfinsterung berechnet werden sollen, hat man für $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{F}$ die Werte von U'_a, F_a, bzw. U'_i, F_i, bzw. U', F anzuwenden.

Um die Auflösung der Gleichungen (68) und (69) zu erleichtern, geben einige astronomische Jahrbücher von 10 zu 10 Minuten mittlerer Zeit des ersten Meridians die mit Hilfe der Gleichungen (27) berechneten Werte von X und Y, sowie die Änderungen X' und Y', welche X und Y in einer Minute mittlerer Zeit erfahren; ferner geben die betreffenden Jahrbücher noch die Werte von U'_a, F_a und H, sowie, bei totalen und ringförmigen Finsternissen, auch die von U'_i und F_i. Der irgendeiner mittleren Zeit des ersten Meridians entsprechende Wert von H ist in der Weise erhalten worden, daß man die mittlere Zeit in Sternzeit verwandelt, und von dieser die oben mit α' bezeichnete Rektaszension des Pols der Schattenachse subtrahiert hat. Kennt man H, so lassen sich auch die Koordinaten ξ und η berechnen; denn es folgt aus den Gleichungen (13), wenn $\mu' - \alpha' = H + \lambda$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi' \sin(H+\lambda) \\ \eta &= \varrho \sin\varphi' \cos\delta' - \varrho \cos\varphi' \sin\delta' \cos(H+\lambda) \end{aligned} \tag{70}$$

Für die Vorausberechnung einer Finsternis ist es nun noch notwendig, die in einer Minute mittlerer Zeit stattfindenden Änderungen von ξ und η zu berechnen. Bezeichnet man diese Änderungen, ausgedrückt in Teilen des Radius, mit ξ', bzw. η', und nimmt für die einer Minute mittlerer Zeit entsprechende Änderung von H den mittleren Wert $60^s\!.014$ an, so wird ξ' gleich dem nach H genommenen Differentialquotienten von ξ, multipliziert mit dem Produkt $60^s\!.014 \times 15 \times \sin 1'' = 0.0043644$; in derselben Weise läßt sich auch η' finden, wobei dann die verhältnismäßig geringe Änderung von δ' vernachlässigt wird. Man erhält also

$$\begin{aligned} \xi' &= 0.0043644\, \varrho \cos\varphi' \cos(H+\lambda) \\ \eta' &= 0.0043644\, \xi \sin\delta' \end{aligned} \tag{71}$$

Es sei jetzt $\mathfrak{T}$ eine willkürlich angenommene, der Zeit der Konjunktion von Sonne und Mond in Rektaszension benachbarte mittlere Zeit des ersten Meridians, und $\mathfrak{T} + \tau$ die unbekannte mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der an einem Orte, dessen Länge vorhin mit λ bezeichnet wurde, eine Berührung stattfindet; wenn dann X, Y, ξ und η für die Zeit $\mathfrak{T}$ des ersten Meridians gelten, so müssen die Gleichungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin\Theta &= X - \xi + (X' - \xi')\tau \\ \mathfrak{U} \cos\Theta &= Y - \eta + (Y' - \eta')\tau \end{aligned} \tag{72}$$

Hier kann man für das nur wenig veränderliche $\mathfrak{U}$ den Wert annehmen, den es zur Zeit $\mathfrak{T}$ hat; diesen erhält man, indem man in (69) für $\mathfrak{U}'$, H und $\mathfrak{F}$ ihre der Zeit $\mathfrak{T}$ entsprechenden Werte substituiert. Setzt man nun

$$\begin{aligned} X - \xi &= m \sin M, \qquad & X' - \xi' &= n \sin N \\ Y - \eta &= m \cos M, \qquad & Y' - \eta' &= n \cos N \end{aligned} \tag{73}$$

so werden die Gleichungen (72)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin\Theta &= m \sin M + \tau n \sin N \\ \mathfrak{U} \cos\Theta &= m \cos M + \tau n \cos N \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin(\Theta - N) &= m \sin(M - N) \\ \mathfrak{U} \cos(\Theta - N) &= m \cos(M - N) + \tau n \end{aligned} \tag{74}$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\sin(\Theta - N) = \frac{m}{\mathfrak{U}} \sin(M - N) \tag{74^a}$$

Bezeichnet man die dieser Gleichung genügenden Werte von $\Theta - N$ mit Ψ und $180^\circ - \Psi$, und substituiert dieselben in die zweite der Gleichungen (74), so erhält man

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos(M - N) \mp \frac{\mathfrak{U}}{n} \cos \Psi \tag{75}$$

Infolge der oben getroffenen Bestimmung, daß X', Y', ξ' und η' die Änderungen der Koordinaten X, Y, ξ, η in einer Minute mittlerer Zeit bezeichnen sollen, sind die aus der letzten Gleichung folgenden Werte von τ in mittleren Zeitminuten ausgedrückt. Es möge nun Ψ denjenigen der beiden Werte von $\Theta - N$ bedeuten, für welchen $\mathfrak{U} \cos(\Theta - N) : n$ positiv wird; wenn dann der dem oberen Vorzeichen in der vorigen Gleichung entsprechende Wert von τ mit τ_1, und der dem unteren Vorzeichen entsprechende Wert von τ mit τ_2 bezeichnet wird, so sind $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ die genäherten mittleren Zeiten des ersten Meridians, zu denen die Finsternis an dem Beobachtungsorte beginnt, bzw. endigt. Um diese Zeiten genauer zu bestimmen, hat man die vorige Rechnung zu wiederholen, indem man dabei für die oben mit $\mathfrak{T}$ bezeichnete Zeit einmal $\mathfrak{T} + \tau_1$ und dann $\mathfrak{T} + \tau_2$ annimmt. Sowohl unter der Annahme $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T} + \tau_1$ als unter der Annahme $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T} + \tau_2$ erhält man aus (75) zwei Werte von τ, von denen wie auf S. 333 nur je einer beizubehalten ist. Addiert man dann noch zu den für den ersten Meridian gültigen Zeiten die Länge λ, so erhält man die mittlere Ortszeit des Beginns und Endes der Finsternis.

Die aus (74ª) erhaltenen Werte von Θ geben die Positionswinkel der Berührungspunkte an (S. 337). Da nun $\mathfrak{U} \cos(\Theta - N) : n$ für $\Theta - N = \Psi$ positiv, also für $\Theta - N = 180^\circ - \Psi$ negativ sein soll, so folgt aus der zweiten Gleichung (74), daß τ für $\Theta = N + \Psi$ größer ist als für $\Theta = N + 180^\circ - \Psi$. Somit ist $N + 180^\circ - \Psi$ der Positionswinkel für die erste äußere oder innere Berührung, und $N + \Psi$ der Positionswinkel für die zweite Berührung.

Denkt man sich in den vorigen Gleichungen $\mathfrak{U}$ durch U ersetzt, so bedeuten $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ die Zeiten, zu denen die Phase der Verfinsterung i Zoll beträgt. Wenn aber i seinen Maximalwert erreicht, so fallen $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ zusammen; die Bedingung für den Eintritt des Maximums der Verfinsterung ist demnach $U \cos \Psi : n = 0$ oder, da $U : n$ im allgemeinen von 0 verschieden ist, $\cos \Psi = \cos(\Theta - N) = 0$. Damit ergibt sich aus (75), wenn jetzt an Stelle von τ die Bezeichnung τ_m angewandt wird,

$$\tau_m = -\frac{m}{n} \cos(M - N) \tag{76}$$

Substituiert man in diese Gleichung die für die mittlere Zeit $\mathfrak{T}$ des ersten Meridians berechneten Werte von m, M, n und N, und bezeichnet man den damit erhaltenen Wert von τ_m mit $\tau_m^{(0)}$, so bedeutet $\mathfrak{T} + \tau_m^{(0)} = \mathfrak{T}_1$ die genäherte Zeit des Maximums der Verfinsterung. Um diese Zeit schärfer zu bestimmen, berechne man die für $\mathfrak{T}_1$ gültigen Werte von m, M, n und N, und substituiere dieselben in die

Gleichung (76). Wird der sich so ergebende neue Wert von τ_m mit $\tau_m^{(1)}$ bezeichnet und die Summe $\mathfrak{T}_1 + \tau_m^{(1)} = \mathfrak{T}_2$ gebildet, so gibt $\mathfrak{T}_2$ einen genaueren Wert für die Zeit des Maximums der Finsternis an. Die entsprechende mittlere Ortszeit ist $\mathfrak{T}_2 + \lambda$.

Für den Fall, daß $\mathfrak{T}_2$ bereits die genaue Zeit des Maximums darstellt, erhält man durch die Substitution der für $\mathfrak{T}_2$ gültigen Werte von m, M, n und N in (76) $\tau_m = 0$; da nun $m : n$ im allgemeinen von 0 verschieden ist, so muß zur Zeit der größten Verfinsterung $\cos(M - N) = 0$, also $\sin(M - N) = \pm 1$ sein. Aus der vorhin für diese Zeit gefundenen Bedingung $\cos(\Theta - N) = 0$ folgt aber, daß dann auch $\sin(\Theta - N) = \pm 1$ sein muß. Berücksichtigt man jetzt, daß m als wesentlich positive Größe aufgefaßt wird, und daß auch U positiv ist, so erhält man aus der ersten der Gleichungen (74), worin dem oben Gesagten zufolge $\mathfrak{U} = U$ zu setzen ist, $U = m$. Nun unterscheidet sich U' nur wenig von U, und somit ist U' zur Zeit der größten Phase einer Finsternis nahe gleich m. Macht man also von der Gleichung (65) Gebrauch, so findet man für die Maximalgröße der Verfinsterung

$$\mathfrak{G} = \frac{U'_a - m}{U'_a + U'_i} \tag{77}$$

II. Vorausberechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsternis auf der Erde.

119. Nördliche und südliche Grenzkurve. Wählt man den Durchmesser des Erdäquators als Längeneinheit, so ist $2u'_a$ oder der Durchmesser des Kreises, welchen der Halbschattenkegel auf der durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zur Schattenachse gelegten Ebene ausschneidet, höchstens gleich 0.583. Die Erde kann demnach nie ganz in den Halbschattenkegel eintauchen, vielmehr wird bei jeder Finsternis entweder zu beiden Seiten des Halbschattenkegels oder auf einer Seite desselben ein Teil der Erde über ihn hinausragen. In dem ersten Falle schneidet der Halbschattenkegel bei seinem Fortschreiten über die Erdoberfläche aus dieser eine Zone aus, welche nach Norden und Süden hin durch je eine Kurve — die sogenannte nördliche, bzw. südliche Grenzkurve — begrenzt ist; in dem zweiten Falle existiert nur eine dieser Kurven. Es kommt auch vor, daß im Verlauf einer Finsternis der am nördlichsten oder südlichsten gelegene Teil der Mantelfläche des Schattenkegels die Erdoberfläche zwar niemals schneidet, aber sie in einem gewissen Moment berührt. Ist diese Berührung eine innere, so reduziert sich eine der Grenzkurven auf einen Punkt; ist die Berührung eine äußere, so entfällt eine der Grenzkurven, und die andere reduziert sich wieder auf einen Punkt.

Für alle Punkte, welche auf der nördlichen oder südlichen Grenzkurve gelegen sind, findet nur eine äußere Berührung der Ränder von Sonne und Mond statt. Da also für diese Orte die äußere Berührung das Maximum der Finsternis darstellt, so muß für jeden derselben die auf S. 334 angegebene Bedingungsgleichung $\cos(M' - \psi) = 0$ erfüllt sein; somit ist M' entweder gleich $90° + \psi$ oder gleich $270° + \psi$, und demnach

$$\tan\psi = -\cot M'$$

Der Ausdruck für $\operatorname{cotg} M'$ ergibt sich aus den Gleichungen (47^2) in Verbindung mit den Gleichungen (45^2) und (45^3). In letzteren kommt zwar ebenfalls die Unbekannte ψ vor, da aber die betreffenden Glieder den kleinen Faktor $\sin f$, bzw. $\operatorname{tang} f$ enthalten, so kann man für sie einen Näherungswert von ψ benutzen. Der Gleichung (40) zufolge ist nun $\psi = -(N' - \Theta)$, und aus Fig. 16 (S. 327) folgt, daß $N' - \Theta$ gleich dem Winkel ist, den der Radiusvektor Cm mit der Bahn Gm der Schattenachsenspur bildet; wie aber schon auf S. 313 erwähnt wurde, ist dieser Winkel zur Zeit des Maximums der Verfinsterung um höchstens 20° von 90°, bzw. 270° verschieden. Nimmt man jetzt die Näherungswerte $\psi = 90^\circ$ und $\psi = 270^\circ$ an, und bezeichnet die diesen entsprechenden Werte von g' und G' mit g_1, bzw. G_1, so geben die Gleichungen (45^2)

$$(78)\qquad \begin{aligned} \sin g_1 \sin G_1 &= \sin d' \sin N' \cos f \mp \cos d' \sin f \\ \sin g_1 \cos G_1 &= \cos N' \cos f \end{aligned} \qquad \left(\psi = {90^\circ \atop 270^\circ}\right)$$

Gleichzeitig werden die rechten Seiten der Gleichungen (45^3) identisch mit denen der zur Berechnung von k und K dienenden Gleichungen (45^1), so daß also $k' = k$ und $K' = K$ zu setzen ist. Wenn jetzt noch in (47^2) statt des Näherungswertes t_0 der unbekannte wahre Wert t eingeführt wird, so nimmt die oben für das Maximum der Finsternis gefundene Bedingungsgleichung die Form an

$$(79)\qquad \operatorname{tang} \psi = \frac{\dfrac{n}{\varkappa} - \cos \varphi_1 \sin k \sin(K + t)}{\cos \varphi_1 \sin g_1 \cos(G_1 + t)} \cos f$$

Mit dieser Gleichung sind nun die für jede Ränderberührung gültigen Gleichungen (42^1) und (42^2) zu verbinden; letztere sollen aber hier in einer etwas anderen Form angewandt werden. Man substituiere nämlich den in (42^1) gegebenen Ausdruck von u in die erste der Gleichungen (42^2), und nehme in den mit dem kleinen Faktor $\operatorname{tang} f$ behafteten Gliedern die Näherungswerte $\psi = 90^\circ$ und $\psi = 270^\circ$ an; führt man dann die durch die Gleichungen (78) und (45^1) definierten Hilfsgrößen g_1, G_1, k und K ein, und setzt

$$(80)\qquad \cos g_1 = \cos d' \sin N' \cos f \pm \sin d' \sin f \qquad \left(\psi = {90^\circ \atop 270^\circ}\right)$$

so erhält man

$$(81)\qquad \begin{aligned} u' \sin \psi &= -\gamma + (1 - c) \sin \varphi_1 \cos g_1 \sec f - \cos \varphi_1 \sin g_1 \sin(G_1 + t) \sec f \\ u \cos \psi &= (t - \lambda - \mu) n - (1 - c) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos(K + t) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (79) und (81), und eines für t angenommenen Wertes lassen sich die Koordinaten φ_1 und λ eines Ortes auf der Erde bestimmen, welcher zu der wahren Ortszeit t eine äußere Ränderberührung wahrnimmt, und für den diese Ränderberührung das Maximum der Finsternis bedeutet; dieser Ort stellt also einen Punkt der nördlichen oder südlichen Grenzkurve dar. Die unter verschiedenen Annahmen für t erhaltenen Punkte zusammengenommen legen dann die Grenzkurven selbst fest. Die Rechnung kann man in folgender Weise ausführen. Setzt man

$$(82)\qquad \begin{aligned} a \sin A &= \sin g_1 \sin(G_1 + t) \\ a \cos A &= (1 - c) \cos g_1 \end{aligned}$$

und $\sec f = 1$, so folgt aus der ersten Gleichung (81)

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{a} \tag{83}$$

Man nehme zunächst $\psi = 90^\circ$ an, setze also

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u'}{a} \tag{83^a}$$

und berechne mit Hilfe von (78), (80) und (82) für eine Reihe von Werten von t die Werte von a und A. Substituiert man dann in (83^a) für u' den der äußeren Berührung entsprechenden Wert u'_a, so gibt jedes Wertepaar A, a (wenn $a > |\gamma + u'|$ ist) einen Näherungswert φ_1. Für jeden dieser Näherungswerte und das zugehörige t erhält man aus (79), unter Benutzung der für die Zeit t gültigen Werte von n, k, K, g_1 und G_1, einen Wert von ψ; wird dieser in (83) substituiert, so ergibt sich ein genauerer Wert von φ_1. Hierauf leitet man aus (42^1), wo $f = f_a$ anzunehmen ist, den Wert von u ab und erhält dann aus der zweiten Gleichung (81)

$$\lambda = t - \mu - \frac{1-c}{n} \sin\varphi_1 \cos k + \frac{1}{n} \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t) - \frac{u}{n} \cos\psi \tag{84}$$

Endlich läßt sich noch mit Hilfe der Gleichung (15^a) der zu φ_1 gehörige Wert von φ berechnen.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Annahme $\psi = 270^\circ$ zugrunde legt. Aus (83) folgt dann

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma - u'}{a}$$

Substituiert man den hieraus sich ergebenden Wert von φ_1 und die für die angenommene Zeit t gültigen Werte von n, k, K, g_1 und G_1 in die Gleichung (79), so ergibt sich ein genauerer Wert von ψ. Mit Hilfe dieses Wertes läßt sich aus (83) wiederum φ_1 bestimmen; sodann berechne man, wie vorhin, u, λ und φ.

Jedes reelle Wertepaar φ, λ liefert einen Grenzkurvenpunkt. Da nun u' bei einer äußeren Ränderberührung positiv ist, so ist der aus der Gleichung (83) folgende Wert von φ_1 für positive Werte von $\sin\psi$ größer als für negative. Einem zwischen 0° und 180° gelegenen Werte von ψ entspricht also ein Punkt der nördlichen Grenzkurve, während der zu $180^\circ < \psi < 360^\circ$ gehörige Punkt auf der südlichen Grenzkurve liegt.

Wenn der aus (83) folgende Wert von $\sin(\varphi_1 - A)$ nahe gleich ± 1 ist, so ist das vorhin zur Bestimmung der nördlichen und südlichen Grenzkurve angegebene Verfahren nicht anwendbar. Man geht in diesem Falle von der aus der ersten Gleichung (81) für $\sec f = 1$ folgenden Beziehung

$$\sin(G_1 + t) = (1 - c) \operatorname{cotg} g_1 \operatorname{tang} \varphi_1 - (\gamma + u' \sin\psi) \sec\varphi_1 \operatorname{cosec} g_1 \tag{85}$$

aus und wählt φ_1 als unabhängige Variable. Setzt man dann ψ entweder gleich 90° oder gleich 270° und nimmt für φ_1 einen Wert an, für den das auf der rechten Seite der Gleichung (85) stehende Aggregat die Einheit nicht übertrifft, so gibt diese Gleichung einen Näherungswert von t. Wird dieser und der angenommene Wert von

φ_1 in die Gleichung (79) substituiert, so erhält man einen genaueren Wert von ψ; mit Hilfe dessen kann dann aus (85) ein genauerer Wert von t abgeleitet werden. Nachdem t gefunden ist, ergibt sich aus (84) die Länge λ, welche in Verbindung mit dem zu φ_1 gehörigen φ einen Punkt der nördlichen, bzw. südlichen Grenzkurve bestimmt.

Im vorigen wurden für u' und f ihre der äußeren Ränderberührung entsprechenden Werte angewandt; wählt man an deren Stelle die einer inneren Berührung entsprechenden Werte u'_i und f_i, so erhält man die nördliche und südliche Grenze der Zone, innerhalb deren die Finsternis total oder ringförmig ist. Will man ferner die Kurven bestimmen, auf denen das Maximum einer Finsternis i Zoll beträgt, so hat man die aus (12) und (10) folgenden Werte von u' und f zu benutzen.

120. Kurve der zentralen Finsternis, und Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit auf dieser Kurve. Wenn von einem Orte der Erde aus gesehen die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes sich decken, so bezeichnet man die Finsternis für diesen Ort als zentral; die Verbindungslinie aller Orte, an denen eine zentrale Bedeckung wahrzunehmen ist, nennt man die Kurve der zentralen Finsternis. Zur Berechnung dieser Kurve hat man nur zu berücksichtigen, daß die für jede Ränderberührung gültigen Gleichungen (42^1) und (81) auch dann noch gelten, wenn die Radien der Gestirne gleich 0 sind, d. h., wenn man sich Sonne und Mond auf ihre Mittelpunkte reduziert denkt; die Ränderberührung bedeutet in diesem Falle das Zusammenfallen der Mittelpunkte. Für $s = s' = 0$ wird aber $f = 0$, und somit auch $u' = 0$ und $u = 0$; aus (81) und (83) ergeben sich also die folgenden Gleichungen für die Kurve der zentralen Finsternis

$$(86^1) \qquad \sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma}{a}$$

$$(86^2) \qquad \lambda = t - \mu - \frac{1-c}{n} \sin\varphi_1 \cos k + \frac{1}{n} \cos\varphi_1 \sin k \cos(K+t)$$

Um die Kurvenpunkte zu erhalten, berechne man zunächst aus (82) für verschiedene Werte von t die Hilfsgrößen a und A; die Gleichung (86^1) gibt sodann die zugehörigen Werte von φ_1. Mit Hilfe von φ_1 läßt sich, wie oben, φ berechnen.

Ist der absolute Wert von γ nahe gleich a, so wird die Formel (86^1) unbrauchbar. Man benutzt dann die aus (81) durch die Substitution $u' = f = 0$ folgende Gleichung

$$(87) \qquad \sin(G_1 + t) = (1 - c) \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{cotg} g_1 - \gamma \sec\varphi_1 \operatorname{cosec} g_1$$

und berechnet mit ihrer Hilfe die einer Reihe von angenommenen Werten von φ_1 entsprechenden Werte von t; hierauf lassen sich mittels der Gleichung (86^2) die zugehörigen Werte von λ finden. Die Bestimmung des Anfangs- und Endpunktes der Kurve der zentralen Finsternis wird in § 122 erläutert werden.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit an einem auf der Kurve der zentralen Finsternis gelegenen Orte zu kennen; hierzu gelangt man in folgender Weise. Zur Zeit einer zentralen Bedeckung geht die Schattenachse durch den Beobachtungsort hindurch; die Projektionen des Beobachtungsortes und der Schattenachse auf eine zu letzterer senkrechte Ebene fallen also in einen Punkt zusammen, es sei das der Punkt C in Fig. 16 (S. 327). Ferner sei $\omega_1\,\omega'$ die während der stets nur kurzen Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit von der Spur der Schattenachse in der XY-Ebene beschriebene, als geradlinig zu betrachtende Bahn. Ist t_0 die wahre Ortszeit der zentralen Finsternis und $2\Delta t$ die Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit, ist ferner ω_1 die Projektion der Schattenachse zur Zeit $t_0 - \Delta t$ und ω' die Projektion der Schattenachse zur Zeit $t_0 + \Delta t$, so folgt aus der auf S. 341 erläuterten Bedeutung des Winkels ψ, daß derselbe zur Zeit $t_0 - \Delta t$ gleich 180°, und zur Zeit $t_0 + \Delta t$ gleich 0° ist. Die zweite der Gleichungen (81) wird also, wenn u_{-1} und u_{+1} die den Zeiten $t_0 - \Delta t$ und $t_0 + \Delta t$ entsprechenden Werte von u bedeuten,

$$\begin{aligned} -u_{-1} &= (t_0 - \Delta t - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0 - \Delta t) \\ u_{+1} &= (t_0 + \Delta t - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

Wird nun der zur Zeit t_0 gehörige Wert von u mit u_0 bezeichnet, so kann man, in Anbetracht der geringen Veränderlichkeit von u, unbedenklich $u_{-1} = u_{+1} = u_0$ annehmen; ferner hat man, wenn Δt in Teilen einer Stunde ausgedrückt und, wie früher, $15 \operatorname{arc} 1^\circ = \varkappa$ gesetzt wird,

$$\cos(K + t_0 \mp \Delta t) = \cos(K + t_0) \pm \varkappa \Delta t \sin(K + t_0)$$

Demnach ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen für $-u_{-1}$ und u_{+1}

$$2u_0 = 2\Delta t[n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin k \sin(K + t_0)]$$

Multipliziert man den hieraus sich ergebenden Wert von $2\Delta t$ mit 60, so erhält man die in Zeitminuten ausgedrückte Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit; wird diese mit τ' bezeichnet und $120 : \varkappa = \varkappa'$ gesetzt ($\log \varkappa' = 2 \cdot 6612$), so folgt

$$\tau' = \frac{\varkappa' u_0}{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K + t_0)} \tag{88}$$

Zur Berechnung von u_0 hat man die Gleichung (42^1) anzuwenden und dabei für u' und f ihre für die Zeit t_0 gültigen, der inneren Berührung entsprechenden Werte u'_i und f_i zu substituieren; es wird also

$$u_0 = u'_i - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0] \operatorname{tang} f_i \tag{88^1}$$

Ist die Finsternis ringförmig und demnach u_0 negativ, so ist in (88) u_0 durch $-u_0$ zu ersetzen.

121. Östliche und westliche Grenzkurve. Mit dem Namen der östlichen und westlichen Grenzkurve bezeichnet *Hansen* die Verbindungslinien aller Punkte der Erdoberfläche, für welche die Finsternis bei Sonnenauf- oder -untergang beginnt, bzw. endet; auf diesen Kurven liegen auch die Punkte, in denen der Halbschattenkegel zum ersten, bzw. letzten Male die Erde berührt. Um die östliche und westliche Grenzkurve zu finden, hat man den für die Ränderberührung gültigen Gleichungen noch die Bedingung hinzuzufügen, daß der Abstand des Berührungspunktes vom Zenit gleich 90° sein muß; in der Praxis ersetzt man diese durch eine andere, nämlich die, daß die Zenitdistanz des Mittelpunktes der Sonne gleich 90° sein soll. Hierbei ist noch folgendes zu berücksichtigen. Infolge der Refraktion erscheint der Mittelpunkt der Sonne schon im Horizont, wenn er in Wirklichkeit sich um rund einen halben Grad unter dem Horizont befindet; bezeichnet man die Horizontalrefraktion mit (r), so wäre also die Bedingung für die östliche und westliche Grenzkurve die, daß die wahre Zenitdistanz der Sonne gleich $90° + (r)$ sei. Hierbei ist (r) noch von der Dichtigkeit und der Temperatur der Luft abhängig. Man könnte für (r) einen mittleren Wert annehmen, aber in Anbetracht dessen, daß die Beobachtungen einer Finsternis an solchen Orten, welche auch nur in der Nähe der östlichen oder westlichen Grenzkurve liegen, gar keine praktische Bedeutung haben, und daß demnach die genaue Bestimmung dieser Kurven ohne Interesse ist, soll weiterhin von (r) ganz abgesehen werden. Wenn nun ζ die Zenitdistanz der Sonne bezeichnet, so ist

$$\cos\zeta = \sin\varphi \sin d' + \cos\varphi \cos d' \cos t$$

Da der Voraussetzung nach $\cos\zeta = 0$ ist, so kann der Faktor von $\operatorname{tang} f$ in der Gleichung (42^1) nur sehr klein sein, denn $1 - e$ ist wenig von 1, und φ_1 wenig von φ verschieden; berücksichtigt man also noch, daß auch $\operatorname{tang} f$ klein ist, so sieht man, daß für die östliche und westliche Grenzkurve $u = u'$ angenommen werden darf. Damit ergibt sich aus (42^2)

$$(89)\quad \begin{aligned} u' \sin\psi &= -\gamma + (1-e)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 \sin d' \sin N' \cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1 \cos N' \sin t \\ u' \cos\psi &= (t - \lambda - \mu)n - (1-e)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \cos\varphi_1 \sin d' \cos N' \cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1 \sin N' \sin t \end{aligned}$$

Nun folgt aus dem von dem Zenit des Beobachtungsortes, dem Pol des Äquators und dem Mittelpunkte der Sonne gebildeten sphärischen Dreieck, wenn der Winkel an dem Mittelpunkte der Sonne mit ϑ bezeichnet, und die Zenitdistanz der Sonne gleich 90° angenommen wird,

$$(90)\quad \begin{aligned} \cos\varphi \sin t &= \sin\vartheta \\ \cos\varphi \cos t &= -\sin d' \cos\vartheta \\ \sin\varphi &= \cos d' \cos\vartheta \end{aligned}$$

Vertauscht man also in den Gleichungen (89) φ_1 mit dem nur um höchstens $6'$ von ihm verschiedenen φ, so erhält man

$$\begin{aligned} u' \sin\psi &= -\gamma + (1 - e\cos^2 d') \sin N' \cos\vartheta - \cos N' \sin\vartheta \\ u' \cos\psi &= (t - \lambda - \mu)n - (1 - e\cos^2 d')\cos N' \cos\vartheta - \sin N' \sin\vartheta \end{aligned}$$

Mit Rücksicht darauf, daß $e = 1 : 298$ und $d' < 24°$ ist, kann man $1 - e\cos^2 d' = 1 - e$ annehmen; setzt man dann noch

$$(91)\quad \begin{aligned} e\sin(N' + \nu) &= (1-e)\sin N', \qquad & e'\sin(N' + \nu') &= \sin N' \\ e\cos(N' + \nu) &= \cos N', & e'\cos(N' + \nu') &= (1-e)\cos N' \end{aligned}$$

und

$$(92)\quad N' - \vartheta = W$$

so wird

$$
(93)\qquad
\begin{aligned}
u' \sin\psi &= -\gamma + e\sin(W+\nu)\\
u' \cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - e'\cos(W+\nu'),
\end{aligned}
$$

wo e, ν, e' und ν' als bekannte Größen zu betrachten sind.

Um diese Gleichungen aufzulösen, gibt man entweder ψ eine Reihe von willkürlich gewählten Werten und berechnet den aus der ersten der Gleichungen (93) für $\sin(W+\nu)$ folgenden Ausdruck

$$
(93^1)\qquad \sin(W+\nu) = \frac{\gamma + u'\sin\psi}{e},
$$

oder man nimmt für W beliebige Werte an und berechnet hiermit

$$
(93^2)\qquad \sin\psi = \frac{e\sin(W+\nu)-\gamma}{u'}
$$

In dem ersten Falle erhält man für jeden Wert von ψ, für den $|\gamma + u'\sin\psi| < e$ ist, zwei Werte von $W+\nu$ also auch von W; im zweiten Falle entsprechen jedem Wert von W, für den $|e\sin(W+\nu)-\gamma| < u'$ ist, zwei Werte von ψ. Mit Hilfe der Gleichung (92) lassen sich die den Werten W zugehörigen Werte von ϑ finden, hierauf ergeben sich aus (90) φ und t. Bequemer ist es, an Stelle der Gleichungen (90) die aus ihnen folgenden anzuwenden

$$
(94)\qquad \operatorname{tang} t = -\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\sin d'}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{cotg} d'\cos t
$$

Der Quadrant, in dem t zu nehmen ist, bestimmt sich mit Hilfe der Bemerkung, daß der ersten Gleichung (90) zufolge $\sin t$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin\vartheta$. Nachdem φ und t gefunden sind, erhält man aus der zweiten der Gleichungen (93)

$$
(95)\qquad \lambda = t - \mu - \frac{u'\cos\psi + e'\cos(W+\nu')}{n}
$$

Mit Rücksicht auf die für die Geschwindigkeit n der Bewegung der Schattenachse gewählte Zeiteinheit wird der Wert des auf der rechten Seite der Gleichung (95) stehenden Quotienten in Einheiten einer Stunde wahrer Sonnenzeit ausgedrückt erhalten.

Trägt man die auf dem eben angegebenen Wege berechneten Werte von φ und λ auf einer Karte auf, so erhält man zwei Kurven, die entweder ganz voneinander getrennt sind, oder aber in einem Punkte zusammenstoßen*). Für die Punkte der westlichen Grenzkurve liegt die wahre Ortszeit t zwischen 180° und 360°, diese Punkte sehen demnach entweder den Anfang oder das Ende der Sonnenfinsternis bei Sonnenaufgang; für die Punkte der östlichen Grenzkurve liegt t zwischen 0° und 180°, und es findet somit der Anfang oder das Ende der Finsternis bei Sonnenuntergang statt. Es bleibt nun noch übrig zu entscheiden, auf welchem Teile der östlichen, bzw. westlichen Grenzkurve der Anfang, und auf welchem Teile das Ende der Finsternis wahrgenommen wird.

---

*) Siehe die am Schlusse des Buches mitgeteilten Karten des Verlaufs der Sonnenfinsternisse 1904 März 16 und 1902 Oktober 30.

Wenn eine an einem gegebenen Beobachtungsorte wahrgenommene äußere Ränderberührung den Beginn der Finsternis bedeutet, so tritt der Ort in dem auf die Berührung folgenden Moment in das Innere des Halbschattenkegels ein; der Abstand des Ortes von der Schattenachse wird also kleiner. Entspricht aber die Ränderberührung dem Ende der Finsternis, so ist der Beobachtungsort in dem folgenden Augenblick weiter von der Schattenachse entfernt wie zuvor; der Abstand beider nimmt also zu. Wird demnach der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse wieder, wie oben, mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet, so bedeutet eine an dem Orte wahrgenommene äußere Ränderberührung den Anfang oder das Ende der Finsternis, jenachdem $\frac{d\bar{\varrho}}{dt}$ negativ oder positiv ist. Nun ist zur Zeit der Ränderberührung $\bar{\varrho} = u$, und es gelten in diesem Falle die Gleichungen (42^2); außerhalb dieser Zeit aber hat $\bar{\varrho}$ einen von u verschiedenen Wert, und es ist dann

$$\begin{aligned}\bar{\varrho} \sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 \sin d' \sin N' \cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1 \cos N' \sin t \\ \bar{\varrho} \cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \\ &\quad + \cos\varphi_1 \sin d' \cos N' \cos t - \cos\varphi_1 \sin N' \sin t\end{aligned}$$

Bei der Differentiation dieser Gleichungen ist zu beachten, daß der Beobachtungsort als gegeben betrachtet wird, und daß demnach φ_1 und λ als Konstante zu behandeln sind. Die Größen γ, d', N', μ und n ändern sich freilich mit der Zeit, jedoch im Verhältnis zu $\bar{\varrho}$ und ψ nur so wenig, daß man diese Änderungen vernachlässigen kann. Berücksichtigt man ferner, daß als Zeiteinheit eine Stunde gewählt wurde, und drückt demnach auch das Differential dt in Teilen einer Stunde aus, so folgt, wenn $15 \operatorname{arc} 1^\circ = \varkappa$ gesetzt wird, $d\cos t = -\varkappa \sin t\, dt$ und $d \sin t = \varkappa \cos t\, dt$. Die Differentiation der obigen Gleichungen gibt also

$$\sin\psi \frac{d\bar{\varrho}}{dt} + \bar{\varrho}\cos\psi \frac{d\psi}{dt} = \varkappa \cos\varphi_1 \sin d' \sin N' \sin t - \varkappa \cos\varphi_1 \cos N' \cos t$$

$$\cos\psi \frac{d\bar{\varrho}}{dt} - \bar{\varrho}\sin\psi \frac{d\psi}{dt} = n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin d' \cos N' \sin t - \varkappa \cos\varphi_1 \sin N' \cos t$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = n\cos\psi - \varkappa \sin d' \cos\varphi_1 \sin t \cos(N'+\psi) - \varkappa \cos\varphi_1 \cos t \sin(N'+\psi)$$

Vertauscht man jetzt wieder φ_1 mit φ und wendet die Gleichungen (90) und (92) an, so erhält man

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = n\cos\psi + \varkappa \sin d' \sin(W+\psi) \tag{96}$$

Das Vorzeichen des auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdrucks entscheidet also darüber, auf welchem Zweige der östlichen, bzw. westlichen Grenzkurve der Beginn, und auf welchem Zweige das Ende der Finsternis wahrgenommen wird.

122. Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche, sowie des Anfangs- und Endpunktes der Kurve der zentralen Finsternis. Ist t_1 die wahre Ortszeit an dem Punkte, in dem die Erde zuerst vom Halbschattenkegel berührt wird, und bedeutet λ_1 die östliche Länge dieses Punktes in bezug auf den Hauptmeridian, ist ferner t_2 die wahre Ortszeit und λ_2 die östliche Länge desjenigen Punktes der Erdoberfläche, in dem diese zuletzt von dem Halbschattenkegel berührt wird, so sind $t_1 - \lambda_1$ und $t_2 - \lambda_2$ die auf dem Hauptmeridian gezählten Zeiten der ersten, bzw. letzten Berührung des Halbschattenkegels mit der Erde. Sollen aber $t_1 - \lambda_1$ und $t_2 - \lambda_2$ die Zeiten der ersten, bzw. letzten Berührung sein, also dem Anfang, bzw. dem Ende der Finsternis überhaupt entsprechen, so muß $t_1 - \lambda_1$ das Minimum, und $t_2 - \lambda_2$ das Maximum von $t - \lambda$ sein; es gilt demnach die Bedingungsgleichung $d(t - \lambda) = 0$. Da nun die Punkte, in denen die Erde zuerst, bzw. zuletzt vom Halbschattenkegel berührt wird, der westlichen, bzw. östlichen Grenzkurve angehören, so kann man die Gleichungen (93) anwenden; differenziert man dieselben, indem man dabei nur ψ, W und $t - \lambda$ als veränderlich betrachtet und $dW = -d\vartheta$ setzt, so folgt

$$\begin{aligned} u' \cos\psi \, d\psi &= - e \cos(W + \nu) d\vartheta \\ - u' \sin\psi \, d\psi &= n d(t - \lambda) - e' \sin(W + \nu') d\vartheta \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von $d\psi$

$$n\, d(t - \lambda) = [e \cos(W + \nu) \operatorname{tang}\psi + e' \sin(W + \nu')] d\vartheta$$

Soll nun $d(t - \lambda) = 0$ werden, so muß der Faktor von $d\vartheta$ gleich 0 sein; man hat demnach als Bedingungsgleichung für die Punkte, in denen die Erde zuerst und zuletzt vom Halbschattenkegel berührt wird,

$$(97) \qquad \operatorname{tang}\psi = - \frac{e' \sin(W + \nu')}{e \cos(W + \nu)}$$

Mit dieser Gleichung sind die für die östliche und westliche Grenzkurve gültigen Gleichungen (93^1) bis (95) zu verbinden. Nun sind e und e' nahe gleich 1, und ν und ν' sind klein; somit folgt aus (97), daß $\operatorname{tang}\psi$ nahe gleich $-\operatorname{tang} W$, und demnach ψ nahe gleich $-W$ oder gleich $180^\circ - W$ ist. Substituiert man diese Werte in die Gleichung (93^1) und setzt außerdem $e = 1$, $\nu = 0$, so erhält man für $\sin W$ den Näherungsausdruck

$$\sin W = \frac{\gamma}{1 \pm u'}$$

Hieraus ergeben sich vier Werte für W. Mit Hilfe dieser und der bekannten Werte von e, e', ν, ν' berechnet man nach (97) ψ, und erhält dann aus (93^1) genauere Werte von W; die den letzteren zugehörigen Werte von ϑ folgen aus der Gleichung (92). Zum Schluß hat man noch die Gleichungen (94) und (95) anzuwenden und findet damit t, φ und λ. Von den vier Wertepaaren von φ und λ gelten zwei für die äußere und zwei für die innere Berührung des Halbschattenkegels mit der Erde. Dasjenige Wertepaar, für welches $t - \lambda$ zu einem Minimum wird, bestimmt den Ort auf der Erde, an dem die Finsternis überhaupt beginnt; dagegen entspricht das dem Maximalwerte von $t - \lambda$ zugehörige Wertepaar dem Ort, an dem die Finsternis endigt. Die Differenz des Maximal- und Minimalwertes von $t - \lambda$ gibt die Dauer der Finsternis an.

Die Betrachtungen, welche zur Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche geführt haben, lassen sich auch dazu verwenden, den Anfangs- und Endpunkt der Kurve der zentralen Finsternis zu bestimmen. In diesem Falle reduziert sich der Schattenkegel auf die die Mittelpunkte von Sonne und Mond verbindende Gerade, und man hat dann nach § 120 $u' = 0$ anzunehmen. Damit wird die Gleichung (93^1)

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e} \tag{98}$$

Hieraus erhält man zwei Werte von W, denen nach (92) zwei Werte von ϑ entsprechen; die diesen zugehörigen Werte von t und φ ergeben sich aus (94). Endlich folgt aus (95) für $u' = 0$

$$\lambda = t - \mu - \frac{e' \cos(W + \nu')}{n} \tag{99}$$

Das dem Minimalwerte von $t - \lambda$ entsprechende Wertepaar φ, λ gibt den Anfangspunkt, das andere den Endpunkt der Kurve der zentralen Finsternis.

123. Berührungspunkte der nördlichen und südlichen mit der östlichen und westlichen Grenzkurve. Um diese Punkte zu erhalten, hat man die für die östliche und westliche Grenzkurve geltenden Gleichungen (89) und (90), bzw. die aus diesen abgeleiteten Gleichungen (93^1) bis (95) mit der für die nördliche und südliche Grenzkurve gefundenen Bedingungsgleichung (79) zu verbinden. Setzt man in letzterer $\varphi_1 = \varphi$, $g_1 = g$, $G_1 = G$ und $\cos f = 1$, so erhält man mit Berücksichtigung von (45^1)

$$\tang \psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi \cos t \sin N' - \cos\varphi \sin t \sin d' \cos N'}{\cos\varphi \cos t \cos N' - \cos\varphi \sin t \sin d' \sin N'}$$

oder, indem man die Gleichungen (90) benutzt und, wie früher, $N' - \vartheta = W$ setzt,

$$\tang \psi = - \frac{\frac{n}{\varkappa} + \sin d' \sin W}{\sin d' \cos W} \tag{100}$$

Dem § 119 zufolge kann man nun für die nördliche Grenzkurve den Näherungswert $\psi = 90^\circ$ annehmen; damit erhält man aus (93^1)

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma + u'}{e}$$

Die beiden dieser Gleichung genügenden Werte von W sind in die Gleichung (100) zu substituieren; mit Rücksicht auf die für die nördliche Grenzkurve gültige Bedingung $\sin\psi > 0$ ergeben sich dann höchstens zwei Werte von ψ, welche in Verbindung mit der Gleichung (93^1) eine genauere Bestimmung der Werte von W ermöglichen. Nachdem dann noch die diesen entsprechenden Werte von $\vartheta = N' - W$ gebildet sind, erhält man aus (94) und (95) die Koordinaten φ und λ der beiden Berührungspunkte der nördlichen mit der östlichen und westlichen Grenzkurve.

Um die Punkte zu finden, in denen die südliche Grenzkurve von der östlichen und westlichen berührt wird, hat man von dem Näherungswerte $\psi = 270^\circ$ auszugehen, und demnach W zunächst mit Hilfe der Gleichung

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma - u'}{e}$$

zu bestimmen. Die Substitution der in ähnlicher Weise wie vorhin sich ergebenden genaueren Werte von ψ, W und ϑ in die Gleichungen (94) und (95) führt dann zur Kenntnis der Koordinaten der gesuchten Punkte.

124. Instantane Durchschnittskurve des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche. Um die Kurve zu finden, längs deren der Halbschattenkegel zu der wahren Zeit τ des ersten Meridians die Erdoberfläche schneidet, hat man zu berücksichtigen, daß für alle Punkte dieser Kurve die Gleichungen (42^1) und (42^2) erfüllt sein müssen. Führt man zunächst in (42^2) an Stelle von ψ seinen in (40) gegebenen Wert $\Theta - N'$ ein und setzt

$$\text{(101)} \qquad \begin{aligned} d \sin D &= \sin d' \\ d \cos D &= (1 - c) \cos d', \end{aligned}$$

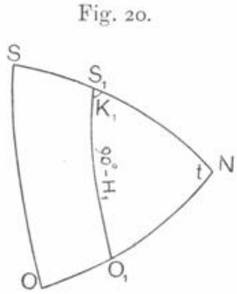
so erhält man durch eine leichte Transformation

$$\text{(102)} \qquad \begin{aligned} u \sin \Theta &= -\gamma \cos N' + (t - \lambda - \mu)\, n \sin N' - \cos\varphi_1 \sin t \\ u \cos\Theta &= \quad \gamma \sin N' + (t - \lambda - \mu)\, n \cos N' - d(\sin\varphi_1 \cos D - \cos\varphi_1 \sin D \cos t) \end{aligned}$$

Ferner wird die Gleichung (42^1), wenn in dem den kleinen Faktor $\operatorname{tang} f$ enthaltenden Gliede $c = 0$, also zufolge (101) $d' = D$, und $d = 1$ gesetzt wird,

$$\text{(102}^a\text{)} \qquad u = u' - (\sin\varphi_1 \sin D + \cos\varphi_1 \cos D \cos t) \operatorname{tang} f$$

Fig. 20.



In Fig. 20 sei nun N der Nordpol des Äquators, S der Ort des Mittelpunktes der Sonne, und O das Zenit eines auf der Durchschnittskurve des Halbschattenkegels mit der Erde gelegenen Ortes; es ist dann der von NO aus nach Westen gezählte Winkel SNO gleich der wahren Zeit t dieses Ortes, und zwar ist $t = \tau + \lambda$. Trägt man jetzt auf NS und NO die Bögen $NS_1 = 90^\circ - D$ und $NO_1 = 90^\circ - \varphi_1$ ab, so ergibt sich, wenn $S_1 O_1 = 90^\circ - H_1$, und $NS_1 O_1 = K_1$ gesetzt wird,

$$\text{(103)} \qquad \begin{aligned} \cos H_1 \sin K_1 &= \cos\varphi_1 \sin t \\ \cos H_1 \cos K_1 &= \sin\varphi_1 \cos D - \cos\varphi_1 \sin D \cos t \\ \sin H_1 &= \sin\varphi_1 \sin D + \cos\varphi_1 \cos D \cos t \end{aligned}$$

Demnach werden die Gleichungen (102^a) und (102)

$$\text{(104}^1\text{)} \qquad u = u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f$$

$$\text{(104}^2\text{)} \qquad \begin{aligned} u \sin \Theta &= -\gamma \cos N' + (\tau - \mu)\, n \sin N' - \cos H_1 \sin K_1 \\ u \cos\Theta &= \quad \gamma \sin N' + (\tau - \mu)\, n \cos N' - d \cos H_1 \cos K_1 \end{aligned}$$

Man substituiere jetzt den in (104^1) gegebenen Wert von u in die Gleichungen (104^2) und setze

$$(105^1) \qquad \begin{aligned} S \sin \Sigma &= \gamma \\ S \cos \Sigma &= (\tau - \mu) n \end{aligned} \qquad \Sigma' = N' - \Sigma$$

$$(105^2) \qquad \begin{aligned} l \sin L &= \sin K_1 \\ l \cos L &= d \cos K_1 ; \end{aligned}$$

es wird dann

$$\begin{aligned} (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f) \sin \Theta &= S \sin \Sigma' - l \sin L \cos H_1 \\ (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f) \cos \Theta &= S \cos \Sigma' - l \cos L \cos H_1 \end{aligned}$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser Gleichungen, so ergibt sich

$$\cos(L - \Sigma') = \frac{S^2 + l^2 \cos^2 H_1 - (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2}{2 S l \cos H_1}$$

oder mit Rücksicht darauf, daß

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \frac{1 - \cos(L - \Sigma')}{1 + \cos(L - \Sigma')}$$

ist,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \frac{(u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2 - (S - l \cos H_1)^2}{(S + l \cos H_1)^2 - (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2}$$

Da l nahe gleich 1, und $f < 17'$ ist, so kann man

$$\begin{aligned} \sin H_1 \operatorname{tang} f &= l \sin H_1 \sin f \\ l \cos H_1 &= l \cos H_1 \cos f \end{aligned}$$

setzen; damit wird

$$(106) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \pm \sqrt{\frac{[u' + S - l \cos(H_1 - f)]\,[u' - S + l \cos(H_1 + f)]}{[S + u' + l \cos(H_1 + f)]\,[S - u' + l \cos(H_1 - f)]}}$$

In dieser Gleichung sind alle Größen bis auf L, l und H_1 bekannt. Setzt man in erster Näherung $l = 1$, so bleiben die Unbekannten L und H_1 übrig, von denen eine als unabhängige Variabele zu wählen ist. Man nehme nun für H_1 einen beliebigen aber, mit Rücksicht auf die Bedeutung von H_1, zwischen $0°$ und $90°$ gelegenen Wert an, und berechne nach (106) die beiden zugehörigen Werte von L; diesen entsprechen zwei Werte von K_1, welche sich mit Hilfe der aus (105^2) folgenden Gleichung

$$(107) \qquad \operatorname{tang} K_1 = d \operatorname{tang} L$$

berechnen lassen. Wendet man darauf eine der Gleichungen

$$l = \frac{\sin K_1}{\sin L} = \frac{d \cos K_1}{\cos L}$$

an, so erhält man einen genaueren Wert von l und kann nun die Rechnung, angefangen von (106), wiederholen.

Nachdem die dem zugrunde gelegten Werte von H_1 entsprechenden Werte von K_1 gefunden sind, lassen sich mit Hilfe von (103) φ_1 und t berechnen. Setzt man nämlich

$$(108)\qquad \begin{aligned} h' \sin H' &= \sin H_1 \\ h' \cos H' &= \cos H_1 \cos K_1 \end{aligned}$$

also

$$\cos H_1 \sin K_1 = h' \cos H' \operatorname{tang} K_1 ,$$

so folgt aus (103)

$$(109)\qquad \begin{aligned} \cos\varphi_1 \sin t &= h' \cos H' \operatorname{tang} K_1 \\ \cos\varphi_1 \cos t &= h' \sin(H' - D) \\ \sin\varphi_1 &= h' \cos(H' - D) \end{aligned}$$

Anstatt die Gleichungen (108) und (109) zur Berechnung von φ_1 und t zu benutzen, kann man auch folgende Formeln anwenden. Aus (108) ergibt sich zunächst

$$(110)\qquad \operatorname{tang} H' = \operatorname{tang} H_1 \sec K_1$$

Der Quadrant, in dem H' zu wählen ist, entscheidet sich durch die Bemerkung, daß $\sin H'$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin H_1$. Ferner erhält man aus den zwei ersten der Gleichungen (109)

$$(111)\qquad \operatorname{tang} t = \frac{\cos H' \operatorname{tang} K_1}{\sin(H' - D)} ,$$

wobei zu beachten ist, daß $\cos t$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin(H' - D)$. Endlich ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen (109)

$$(112)\qquad \operatorname{tang} \varphi_1 = \operatorname{cotg}(H' - D) \cos t$$

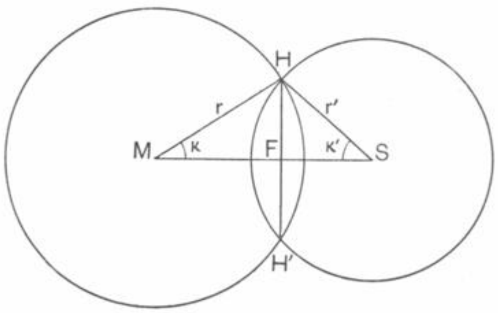
Damit sind φ_1 und t gefunden. Mit Hilfe von φ_1 läßt sich nun φ berechnen; aus t und der gegebenen Zeit τ des ersten Meridians folgt schließlich $\lambda = t - \tau$.

III. Verwendung der zur Zeit einer Sonnenfinsternis angestellten Hörnerbeobachtungen.

125. Bestimmung der Korrektion der Mondephemeride mit Hilfe der Beobachtung der relativen Lage der Hörnerspitzen. Hat man gelegentlich einer Sonnenfinsternis den Abstand der Hörnerspitzen oder den Positionswinkel der diese Spitzen verbindenden Sehne beobachtet, so kann man die erhaltenen Messungen dazu benutzen, die Differenz der Korrektionen der Mond- und Sonnenephemeride zu berechnen. Nun ist aber die Theorie der Sonnenbewegung gegenwärtig so genau bekannt, daß, wenn man nur die Korrektionen der Sonnenephemeride an einigen die Finsternis einschließenden Tagen bestimmt und in einen Mittelwert vereinigt hat, dieser als für die Zeit der Finsternis gültig betrachtet werden darf. Verbindet man demnach den erhaltenen Mittelwert mit der Differenz der Ephemeridenkorrektionen von Sonne und Mond, so ergibt sich ohne weiteres die Korrektion der Mondephemeride. Mit Rücksicht darauf, daß die Hörnerbeobachtungen das einzige Mittel bilden, den Ort des Mondes zur Zeit seiner Konjunktion mit der Sonne zu bestimmen, sind dieselben für die Theorie der Mondbewegung von großer Wichtigkeit.

Ehe gezeigt wird, wie man mit Hilfe der Messungen des Abstandes der Hörnerspitzen die Differenz der Korrektionen der Sonnen- und Mondephemeride bestimmen kann, muß erläutert werden, in welcher Weise man unter Benutzung der in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Örter und Durchmesser des Mondes und der Sonne den Abstand der Hörnerspitzen berechnet. In Fig. 21 seien M und S die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne zur Zeit einer partiellen Sonnenfinsternis, HH' sei die der Sonne und dem Mond gemeinsame Sehne, F sei der Schnittpunkt von MS und HH'. Bezeichnet man mit α und δ die Rektaszension und Deklination des Mondes, mit α' und δ' die Rektaszension und Deklination der Sonne, mit p den Positionswinkel der Richtung MS in bezug auf den Mond, mit p' den Positionswinkel der Richtung MS in bezug auf die Sonne und mit σ den vom Beobachtungsort aus gesehenen Winkelabstand der Mittelpunkte M und S, so folgt aus dem sphärischen Dreieck zwischen M, S und dem Pol

Fig. 21.



$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma\,\sin\tfrac{1}{2}(p+p') = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma\,\cos\tfrac{1}{2}(p+p') = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der für den Beobachtungsort gültigen scheinbaren Werte von α, δ, α', δ' lassen sich σ und $\frac{1}{2}(p+p')$ berechnen; doch kann man hierzu auch die folgenden Näherungsformeln benutzen, in denen ω die halbe Summe $\frac{1}{2}(p+p')$ bedeutet,

$$(113)\qquad \begin{aligned}\sigma\sin\omega &= (\alpha'-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\\ \sigma\cos\omega &= \delta'-\delta\end{aligned}$$

Die Seiten $MH = \bar{r}$ und $SH = \bar{r}'$ in Fig. 21 bezeichnen die vom Beobachtungsort aus gesehenen Halbmesser des Mondes und der Sonne; diese ergeben sich aus den in den Ephemeriden mitgeteilten, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehenen Halbmessern durch Anwendung der in § 70 abgeleiteten Formel (26) in Verbindung mit den Formeln (14), (15) und (12) des § 68. Wird jetzt das Dreieck MHS als ein ebenes betrachtet, und bezeichnet man den Winkel bei M mit $\varkappa$, und den Winkel bei S mit $\varkappa'$, so ergibt sich zunächst

$$(114)\qquad \sigma = \bar{r}'\cos\varkappa' + \bar{r}\cos\varkappa$$

Wenn sodann $HF = \frac{1}{2}s'$ gesetzt wird, so hat man

$$\bar{r}'^2 = \left(\frac{s'}{2}\right)^2 + (\bar{r}'\cos\varkappa')^2, \qquad \bar{r}^2 = \left(\frac{s'}{2}\right)^2 + (\bar{r}\cos\varkappa)^2$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man

$$\bar{r}'^2 - \bar{r}^2 = (\bar{r}'\cos\varkappa' + \bar{r}\cos\varkappa)(\bar{r}'\cos\varkappa' - \bar{r}\cos\varkappa)$$

oder mit Rücksicht auf (114)

$$\frac{(\bar{r}' + \bar{r})(\bar{r}' - \bar{r})}{\sigma} = \bar{r}' \cos\varkappa' - \bar{r} \cos\varkappa \tag{115}$$

Nachdem man mit Hilfe der Gleichungen (114) und (115) $\cos\varkappa$ und $\cos\varkappa'$ gefunden hat, ergibt sich s' aus einer der Gleichungen

$$s' = 2\bar{r} \sin\varkappa, \qquad s' = 2\bar{r}' \sin\varkappa' \tag{116}$$

Infolge der Fehler der Sonnen- und Mondephemeride ist der berechnete Wert von s' fehlerhaft. Um die Korrektion von s' zu erhalten, differenziere man zunächst die erste der Gleichungen (116); es ergibt sich dann

$$\tfrac{1}{2} ds' = \bar{r} \cos\varkappa \, d\varkappa + \sin\varkappa \, d\bar{r} \tag{117}$$

Projiziert man nun die Seiten SM und HM auf SH, und berücksichtigt, daß der Winkel $SHM = 180^\circ - (\varkappa + \varkappa')$ ist, so folgt

$$\bar{r}' = \sigma \cos\varkappa' - \bar{r} \cos(\varkappa + \varkappa')$$

Durch Differentiation dieser Gleichung findet man

$$d\bar{r}' = -\sigma \sin\varkappa' \, d\varkappa' + \cos\varkappa' \, d\sigma + \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \, d(\varkappa + \varkappa') - \cos(\varkappa + \varkappa') \, d\bar{r}$$

Da aber

$$\sigma \sin\varkappa' = \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \tag{118}$$

ist, so wird die vorige Gleichung

$$\cos\varkappa' \, d\sigma = d\bar{r}' - \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \, d\varkappa + \cos(\varkappa + \varkappa') \, d\bar{r} \tag{119}$$

Man multipliziere jetzt die Gleichung (117) mit $\sin(\varkappa + \varkappa')$ und die Gleichung (119) mit $\cos\varkappa$; addiert man dann die Produkte, so erhält man

$$ds' = \frac{2 \cos\varkappa}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r}' + \frac{2 \cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r} - \frac{2 \cos\varkappa \cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\sigma \tag{120}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (113) ergibt sich aber bis auf Glieder erster Ordnung genau

$$\begin{aligned} \sin\omega \, d\sigma + \sigma \cos\omega \, d\omega &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) \\ \cos\omega \, d\sigma - \sigma \sin\omega \, d\omega &= d(\delta' - \delta) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sin\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) + \cos\omega \, d(\delta' - \delta) \\ \sigma d\omega &= \cos\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) - \sin\omega \, d(\delta' - \delta) \end{aligned} \tag{121}$$

Substituiert man den hier für $d\sigma$ erhaltenen Ausdruck in die Gleichung (120) und setzt den wahren Wert der Sehne HH' oder $s' + ds' = s$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s - s' = \frac{2 \cos\varkappa}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r}' + \frac{2 \cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r} - \frac{2 \cos\varkappa \cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} \sin\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) \\ - \frac{2 \cos\varkappa \cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} \cos\omega \, d(\delta' - \delta) \end{aligned} \tag{122}$$

Jedem beobachteten Hörnerabstand s entspricht eine solche Gleichung; aus allen Gleichungen zusammengenommen lassen sich die Korrektionen von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$, als Funktionen von $d\bar{r}'$ und $d\bar{r}$ ausgedrückt, bestimmen.

Der aus den Gleichungen (113) folgende Wert von ω gibt die halbe Summe der auf die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes bezogenen Positionswinkel der Richtung MS an. Nach § 20 ist aber, wenn p_m den Positionswinkel von MS, bezogen auf den Mittelpunkt von MS bedeutet,

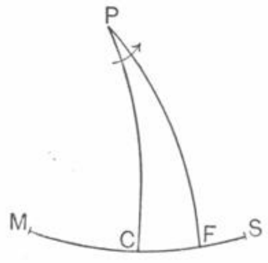
$$\omega - p_m = \tfrac{1}{16}\sigma^2 \sin 1'' \sin 2p_m [1 + 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)]$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist selbst für $\sigma = 32'$ und $\frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 24^\circ$ kleiner als $1''\!.6$; die Differenz $\omega - p_m$ kann also vernachlässigt werden, und somit wird $p_m = \omega$. Addiert man jetzt zu dem mit Hilfe der Gleichungen (113) berechneten Wert von ω die aus der zweiten Gleichung (121) folgende Korrektion $d\omega$, so erhält man für den wahren Wert von p_m

$$p_m = \omega + \frac{\cos\omega}{\sigma} \cos \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\, d(\alpha' - \alpha) - \frac{\sin\omega}{\sigma}\, d(\delta' - \delta) \tag{123}$$

Der Wert von p_m läßt sich aber auch aus den Beobachtungen ableiten. Die Beobachtung liefert zwar direkt nur den Positionswinkel der Sehne $H'H$ (Fig. 21), bezogen auf den Mittelpunkt F; bezeichnet man diesen Positionswinkel mit p_1, so ist der auf F bezogene Positionswinkel der Richtung MS gleich $90^\circ + p_1$. Man betrachte nun die Fig. 22, worin M, S und F dieselbe Bedeutung wie in Fig. 21 haben, und wo C den Mittelpunkt von MS, und P den Nordpol des Äquators bezeichnet. Wie mit Hilfe von Fig. 21 ersichtlich ist, ist die Seite CF gleich $\bar{r}\cos\varkappa - \frac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa + \bar{r}'\cos\varkappa') = = \frac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')$; der Winkel PFC ist gleich $180^\circ - (90^\circ + p_1)$, und der Winkel PCF gleich p_m. Nimmt man noch $\frac{1}{2}(PC + PF) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ an, so erhält man durch Anwendung einer der *Napier*schen Analogien auf das Dreieck PCF

Fig. 22.



$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \frac{\sin \frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) + p_m]}{\sin \frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) - p_m]} \operatorname{tang}[\tfrac{1}{4}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')]$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) - p_m]$ und $\frac{1}{4}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')$ kleine Winkel sind, und setzt $\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) + p_m] = p_m = \omega$, so gibt die vorige Gleichung

$$90^\circ + p_1 - p_m = \tfrac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa') \sin\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \tag{124}$$

Der Wert des auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdrucks ist stets klein und wird durch die Fehler der Sonnen- und Mondephemeride nicht beeinflußt. Substituiert man nun in (124) für p_m seinen in (123) gegebenen Wert und setzt dann

$$\omega + \tfrac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa') \sin\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \Pi, \tag{125}$$

so erhält man die zur Bestimmung der Korrektionen von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ dienende Gleichung

$$90^\circ + p_1 - \Pi = \frac{\cos\omega}{\sigma} \cos \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\, d(\alpha' - \alpha) - \frac{\sin\omega}{\sigma}\, d(\delta' - \delta) \tag{126}$$

Hierbei ist σ in Teilen des Radius auszudrücken.