

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

Kapitel XX. Mondfinsternisse

[urn:nbn:at:at-ubi:2-6337](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:at:at-ubi:2-6337)

Kapitel XX.

Mondfinsternisse.

126. Bedingung für das Eintreten einer Mondfinsternis. In Fig. 1 seien S und E die Mittelpunkte der Sonne, bzw. der Erde, C sei die Spitze des von der Erde geworfenen Schattenkegels; die Entfernung EC werde mit g , und der Abstand SE mit r' bezeichnet. Sieht man von der Abplattung der Erde ab, und bezeichnet man die linear gemessenen Radien der Sonne und der Erde mit s' , bzw. e , so hat man die Proportion

$$g : e = r' : (s' - e)$$

Wenn aber der geozentrische Winkelhalbmesser der Sonne mit $\mathcal{A}'$, und die Parallaxe der Sonne mit π' bezeichnet wird, so ist

$$\sin \mathcal{A}' = \frac{s'}{r'}, \quad \sin \pi' = \frac{e}{r'}$$

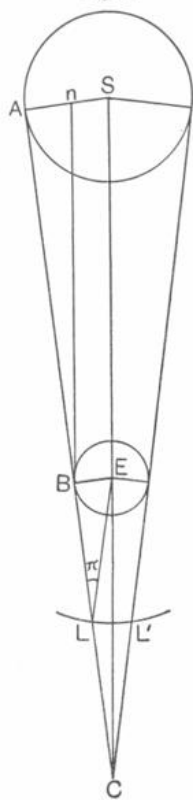
Demnach gibt die vorige Proportion

$$g = \frac{e}{\sin \mathcal{A}' - \sin \pi'}$$

Für die mittleren Werte $\mathcal{A}' = 960''$, $\pi' = 9''$ folgt hieraus $g = 217e$. Da aber die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde nur gleich $60e$ ist, so ist der Mond stets der Erde bedeutend näher als wie die Spitze C des von der Erde geworfenen Schattenkegels; der Mond kann also in den Schattenkegel eintreten und demnach verfinstert werden.

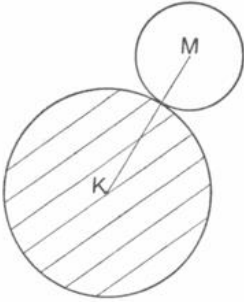
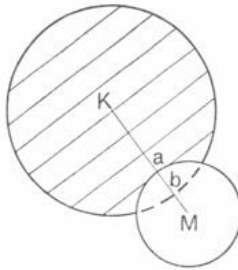
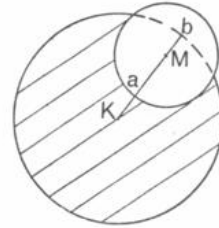
Die Bedingung, welche erfüllt sein muß, damit eine Mondfinsternis eintritt, läßt sich in folgender Weise ableiten. Ist r die Entfernung des Mondes von der Erde, so beschreibe man mit dem Radius r eine Kugel um E , und lege durch die Durchschnittslinie LL' dieser Kugel mit dem von der Erde geworfenen Schattenkegel eine Kegelfläche, deren Spitze der Punkt E bildet. Diese Kegelfläche schneidet eine senkrecht zu EC stehende Ebene in einem Kreise, dessen geozentrischer Winkelhalbmesser gleich LEC ist und mit k bezeichnet werden möge; der Mittelpunkt dieses Kreises ist in Fig. 2 mit K bezeichnet. Denkt man sich ferner senkrecht zu der Verbindungslinie von E mit dem Mittelpunkte des Mondes eine Ebene gelegt, so wird diese von dem durch E als Scheitel gelegten und den Mond einhüllenden Kegel in einem Kreise geschnitten, dessen geozentrischer Winkelhalbmesser gleich dem geozentrischen Winkelhalbmesser ($\mathcal{A}$) des Mondes ist; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der in Fig. 2 mit M bezeichnete Punkt. Bedeutet nun σ den vom Mittelpunkte der Erde aus gesehenen Abstand KM , so lehrt die Figur, daß im Moment,

Fig. 1.



wo der Mond den Kernschattenkegel von außen berührt, $\sigma = \mathcal{A} + k$ sein muß; für eine partielle Finsternis dagegen ist, wie Fig. 2^a zeigt, $\sigma < \mathcal{A} + k$. Eine Finsternis findet also nur statt, wenn $\sigma \leq \mathcal{A} + k$ ist. Um k zu bestimmen, berücksichtigt man,

Fig. 2.

Fig. 2^a.Fig. 2^b.

daß, wenn der Winkel BLE (Fig. 1) oder die Horizontalparallaxe des Mondes mit π , und der Winkel BCE oder der halbe Öffnungswinkel des Schattenkegels mit f bezeichnet wird,

$$\pi = f + k$$

ist. Es ist aber, wenn Bn parallel zu SE gezogen wird,

$$\sin f = \frac{s' - e}{r'} = \sin \mathcal{A}' - \sin \pi'$$

oder, mit einer für den gegenwärtigen Zweck hinreichenden Genauigkeit,

$$f = \mathcal{A}' - \pi'$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhin für π erhaltenen, so ergibt sich $k = \pi + \pi' - \mathcal{A}'$. Dieser theoretisch gefundene Wert von k ist aber den Beobachtungen zufolge zu klein, und zwar muß derselbe, um mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu kommen, mit $\frac{51}{50}$ multipliziert werden. Man hat also zu setzen

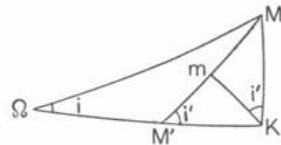
$$(1) \quad k = \frac{51}{50}(\pi + \pi' - \mathcal{A}')$$

Somit wird die Bedingung für das Eintreten einer Mondfinsternis

$$(2) \quad \sigma \leq \mathcal{A} + \frac{51}{50}(\pi + \pi' - \mathcal{A}')$$

Nun ist eine Mondfinsternis nur dann möglich, wenn sich der Mond in der Nähe eines der Durchschnittspunkte seiner Bahn mit der Ekliptik und gleichzeitig in der Nähe seiner Opposition mit der Sonne, somit in der Nähe seiner Konjunktion mit dem oben mit K bezeichneten Punkte befindet. Es sei jetzt ΩK (Fig. 3) die Ekliptik, ΩM die Mondbahn, und i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik. Ferner seien M und K die geozentrischen Örter des Mondes und des Punktes K zur Zeit ihrer Konjunktion in Länge; MK ist somit senkrecht zu ΩK . Da M in der Nähe des Knotenpunktes Ω liegen soll, so kann man die Bewegung

Fig. 3.



des Mondes innerhalb der Zeit τ , während deren er den Bogen ΩM beschreibt, als gleichförmig, und das Dreieck ΩMK als eben betrachten. Bezeichnet man also mit $\mathcal{A}l$ und $\mathcal{A}b$ die stündliche Bewegung des Mondes in Länge, bzw. Breite, so hat man $\Omega K = \mathcal{A}l \cdot \tau$, $MK = \mathcal{A}b \cdot \tau$, folglich, weil MK senkrecht zu ΩK steht,

$$(3) \quad \text{tang } i = \frac{\mathcal{A}b}{\mathcal{A}l}$$

Es möge jetzt $\mathcal{A}l'$ die stündliche Bewegung der Sonne also auch des Punktes K in Länge bezeichnen; die stündliche Bewegung des Mondes in Länge und Breite, relativ zur Sonne, ist dann gleich $\mathcal{A}l - \mathcal{A}l'$, bzw. $\mathcal{A}b$. Trägt man also auf der Ekliptik den Bogen $M'K = (\mathcal{A}l - \mathcal{A}l')\tau$ ab, so stellt $M'M$ die Mondbahn relativ zum Punkte K dar; demnach gibt die von K aus auf $M'M$ gefällte Senkrechte Km den kleinsten geozentrischen Abstand zwischen dem Monde und dem Punkte K an. Wird nun der Winkel $MM'K$ mit i' , und KM oder die Breite des Mondes zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne, d. h. zur Zeit des Vollmondes mit b bezeichnet, so ergibt sich $Km = b \cos i'$; dies ist also der kleinste Wert, den der oben mit σ bezeichnete Winkel annehmen kann. Somit wird die für das Eintreten einer Mondfinsternis gefundene Bedingungsgleichung (2)

$$(4) \quad b \leq [\mathcal{A} + \frac{51}{50}(\pi + \pi' - \mathcal{A}')] \sec i'$$

Zur Bestimmung von i' hat man

$$\text{tang } i' = \frac{\mathcal{A}b}{\mathcal{A}l - \mathcal{A}l'} = \frac{\mathcal{A}l}{\mathcal{A}l - \mathcal{A}l'} \frac{\mathcal{A}b}{\mathcal{A}l}$$

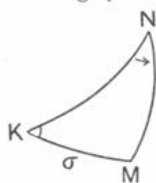
oder, wenn

$$(5) \quad \frac{\mathcal{A}l}{\mathcal{A}l'} = \lambda$$

gesetzt, und die Gleichung (3) berücksichtigt wird,

$$(6) \quad \text{tang } i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \text{tang } i$$

127. Vorausberechnung einer Mondfinsternis. In Fig. 4 seien M , K , N die geozentrischen Örter des Mondes, der Spitze des Schattenkegels und des Nordpols des Äquators. Die Rektaszension und Deklination des Mondes möge mit α , bzw. δ bezeichnet werden; α' , bzw. δ' bedeute die Rektaszension und Deklination der Sonne, also $180^\circ + \alpha'$, bzw. $-\delta'$ die Rektaszension und Deklination des Punktes K . Setzt man jetzt den Winkel NKM gleich Q , und den Bogen KM , wie früher, gleich σ , so ergibt sich



$$(7) \quad \begin{aligned} \sin \sigma \sin Q &= \cos \delta \sin[\alpha - (180^\circ + \alpha')] \\ \sin \sigma \cos Q &= \sin \delta \cos \delta' + \cos \delta \sin \delta' \cos[\alpha - (180^\circ + \alpha')] \end{aligned}$$

Oben wurde gefunden, daß zur Zeit der äußeren Berührung des Mondrandes mit dem Kernschattenkegel $\sigma = k + \mathcal{A}$ sein muß; zur Zeit der inneren Berührung dagegen, d. h. zu Anfang oder zu Ende einer totalen Mondfinsternis gilt die Gleichung

$\sigma = k - \mathcal{A}$. Wird also für k sein durch die Gleichung (1) gegebener Wert substituiert, so hat man für den Anfang und das Ende der Finsternis überhaupt

$$(8) \quad \sigma = \frac{51}{50}(\pi + \pi' - \mathcal{A}') + \mathcal{A},$$

und für den Anfang und das Ende der totalen Finsternis

$$(9) \quad \sigma = \frac{51}{50}(\pi + \pi' - \mathcal{A}') - \mathcal{A}$$

In der Nähe der Finsternis sind σ , $\alpha - (180^\circ + \alpha')$ und $\delta + \delta'$ verhältnismäßig kleine Winkel; setzt man also zur Abkürzung

$$(10) \quad x = \sigma \sin Q, \quad y = \sigma \cos Q,$$

so kann man an Stelle der Gleichungen (7) die folgenden anwenden:

$$(11) \quad x = [\alpha - (180^\circ + \alpha')] \cos \delta, \quad y = \delta + \delta'$$

Es sei nun T_0 eine der Konjunktionszeit der Punkte K und M in Länge zunächst liegende volle Stunde; man berechne dann für die Zeiten $T_0 - 3^h$, T_0 , $T_0 + 3^h$ die zugehörigen Werte von x und y , und bestimme mit ihrer Hilfe auch genäherte Werte der stündlichen Änderungen von x und y für die Zeit T_0 . Werden letztere mit x' , bzw. y' , und die der Zeit T_0 entsprechenden Werte von x und y mit x_0 und y_0 bezeichnet, so sind die Werte, welche x und y zur Zeit $T = T_0 + \tau$ haben,

$$(12) \quad x = x_0 + x' \tau, \quad y = y_0 + y' \tau$$

Man setze jetzt

$$(13) \quad \begin{aligned} x_0 &= m \sin M, & x' &= n \sin N \\ y_0 &= m \cos M, & y' &= n \cos N \end{aligned}$$

und substituieren für x und y die Ausdrücke (10); es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sigma \sin Q &= m \sin M + \tau n \sin N \\ \sigma \cos Q &= m \cos M + \tau n \cos N \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma \sin(Q - N) &= m \sin(M - N) \\ \sigma \cos(Q - N) &= m \cos(M - N) + \tau n \end{aligned}$$

Bedeutet also ψ einen Winkel, welcher der Gleichung

$$(15) \quad \sin \psi = \frac{m \sin(M - N)}{\sigma}$$

genügt, so genügen der ersten der Gleichungen (14) die Werte

$$Q - N = \psi, \quad Q - N = 180^\circ - \psi$$

und die zweite Gleichung (14) gibt demnach

$$\tau = - \frac{m \cos(M - N)}{n} \mp \frac{\sigma}{n} \cos \psi$$

Somit wird

$$(16) \quad T = T_0 - \frac{m \cos(M - N)}{n} \mp \frac{\sigma}{n} \cos \psi$$

Für ψ soll nun derjenige der zwei der Gleichung (15) genügenden Werte gewählt werden, für welchen $\cos \psi$ positiv ist. Falls dann für σ sein durch die Gleichung (8) gegebener Wert angewandt wird, so gibt der dem oberen Vorzeichen in (16) entsprechende Wert von T die Zeit des Anfangs, und der dem unteren Vorzeichen entsprechende die Zeit des Endes der Mondfinsternis überhaupt an; substituiert man dagegen für σ den Wert (9), so gilt das obere Vorzeichen für den Anfang, und das untere für das Ende der totalen Mondfinsternis.

Ist das Produkt $b \cos i'$, d. h. der kleinste Wert, den σ um die Zeit des Vollmondes herum annehmen kann, zwar kleiner als $k + \mathcal{A}$, aber größer als $k - \mathcal{A}$, so ist nur eine partielle Finsternis möglich; die erstere Bedingung wurde schon in § 126 angegeben, die Bedingung $\sigma > k - \mathcal{A}$ entspricht dem Falle, wo der Mittelpunkt des Mondes innerhalb des um K beschriebenen Schattenkreises liegt (Fig. 2^b). Wenn aber die Finsternis nur partiell ist, so ist es wünschenswert, die Zeit des Maximums der Verfinsterung zu kennen. Um diese Zeit zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß das Maximum nur einmal stattfindet, daß also dann die Gleichung (16) nicht mehr wie einen Wert von T geben kann; es muß demnach das Glied $\frac{\sigma}{n} \cos \psi$ verschwinden, und somit ergibt sich, wenn T_m die Zeit des Maximums der Verfinsterung bedeutet,

$$(17) \quad T_m = T_0 - \frac{m \cos(M - N)}{n}$$

Da σ bei einer partiellen Finsternis nicht gleich 0 werden kann, und da n endlich ist, so verschwindet das Glied $\frac{\sigma}{n} \cos \psi$ nur, wenn $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 270^\circ$ ist. Der Gleichung (15) zufolge hat man aber für $\psi = 90^\circ$, bzw. $\psi = 270^\circ$

$$(18) \quad \sigma = \pm m \sin(M - N);$$

dies ist also der Wert von σ zur Zeit des Maximums einer partiellen Finsternis.

Das Verhältnis der Strecke ab (Fig. 2^a, bzw. 2^b) zu dem Durchmesser des Mondes nennt man die Größe der Finsternis; wird diese mit G bezeichnet, so ergibt sich, wenn die mit σ bezeichnete Distanz als positive Größe betrachtet wird,

$$(19) \quad G = \frac{k + \mathcal{A} - \sigma}{2\mathcal{A}}$$

Um mit Hilfe dieser Gleichung die Größe des Maximums der Verfinsterung zu erhalten, hat man für σ den absoluten Wert von $m \sin(M - N)$ zu substituieren.