

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

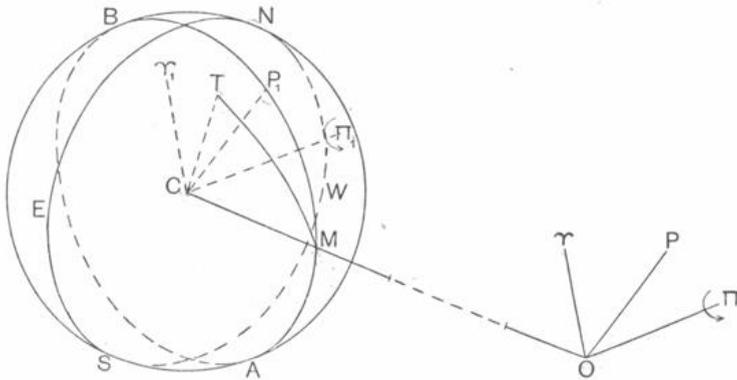
Kapitel XXI. Astrographische Ortsbestimmung

Kapitel XXI.

Astrographische Ortsbestimmung.

128. Bestimmung der Lage der Rotationsachse und der Drehungsgeschwindigkeit eines kugelförmigen Himmelskörpers. Astrozentrische und astrographische Länge und Breite eines Fleckes. Es sei M (Fig. 1) der Punkt, in dem die Verbindungslinie des Beobachtungsortes O mit dem Zentrum C des als kugelförmig gedachten Himmelskörpers die Oberfläche des letzteren schneidet; ferner sei $ENWS$ der Kreis, in dem der Himmelskörper von einer durch C senkrecht zu

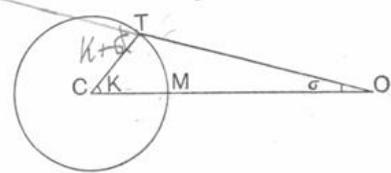
Fig. 1.



CO gelegten Ebene geschnitten wird. Mit Rücksicht darauf, daß die Dimensionen eines Körpers des Sonnensystems klein sind im Verhältnis zu seiner Entfernung von der Erde, kann man annehmen, daß der Kreis $ENWS$ mit der Linie zusammenfällt, längs deren ein durch O als Scheitel gelegter und den Himmelskörper einhüllender Kegel den Körper berührt; von O aus gesehen, wird sich demnach der Himmelskörper als eine durch den Kreis $ENWS$ begrenzte Scheibe mit dem Mittelpunkte M auf den Himmelsgrund projizieren.

Es sei nun OP die Richtung vom Beobachter zum Nordpol des Erdäquators und BMA der größte Kreis, in dem die Ebene POC verlängert den Himmelskörper schneidet. Bedeutet jetzt T einen auf der Oberfläche des Himmelskörpers sichtbaren Fleck, so läßt sich durch die Beobachtung sein Positionswinkel, bezogen auf M , d. h. — unter der Annahme, daß die von O aus gesehene Rektaszension von T größer ist als die von M — der sphärische Winkel $BMT = \pi$ bestimmen. Ferner gibt die Beobachtung die Distanz des Fleckes von der Mitte der Scheibe oder den Winkel COT ; hiermit aber kann der Winkel berechnet werden, unter dem der Bogen TM von C aus gesehen erscheint. Wenn nämlich in dem ebenen Dreiecke TOC (Fig. 2) der

Fig. 2.



Winkel bei O mit σ , und der gesuchte Winkel bei C mit K bezeichnet wird, so ist der Winkel bei T gleich $180^\circ - (K + \sigma)$, und man erhält, wenn $CT = r$ und $CO = \varrho$ gesetzt wird,

$$\sin \sigma : \sin(K + \sigma) = r : \varrho$$

Mit Einführung eines durch die Gleichung

$$\sin h' = \frac{r}{\varrho}$$

definierten Hilfswinkels h' gibt die vorige Proportion

$$(1) \quad \sin \sigma = \sin h' \sin(K + \sigma)$$

Da der Himmelskörper als kugelförmig vorausgesetzt wird, so ist h' gleich dem in der Entfernung ϱ von O aus gesehenen Winkelhalbmesser des Himmelskörpers.

Berücksichtigt man, daß $K + \sigma$ gleich dem Winkel ist, den die über T hinaus verlängerte Richtung OT mit der Richtung TC bildet, so sieht man ohne weiteres, daß für alle von O aus sichtbaren Flecke $K + \sigma \leq 90^\circ$ sein muß; somit ist durch die Gleichung (1) der Winkel K eindeutig bestimmt. Setzt man

$$(1^a) \quad \frac{\sin \sigma}{\sin h'} = \sin S$$

und wählt $S \leq 90^\circ$, so wird

$$(1^b) \quad K = S - \sigma$$

In Fig. 1 mögen OII und $O\gamma$ die Richtungen vom Beobachter zum Nordpol der Ekliptik, bzw. zum Frühlingsäquinox angeben; parallel zu diesen beiden Richtungen ziehe man die Geraden CII_1 und $C\gamma_1$. Wird die von O aus gesehene Breite von C mit β bezeichnet, so ist der Winkel $II_1CM = II_1CO = 180^\circ - HOC = 90^\circ + \beta$. Die von C aus gesehene und auf eine durch C parallel zur Ekliptik gelegte Ebene bezogene Breite des Beobachtungsortes O (oder auch des Mittelpunktes M der Himmelskörperscheibe) ist demnach gleich $-\beta$; diese Breite soll die astrozentrische Breite von O , bzw. von M genannt werden. Unter der astrozentrischen Länge von O , bzw. von M wird im folgenden der Winkel verstanden, um den die Ebene $II_1C\gamma_1$ um CII_1 in der durch den Pfeil dargestellten Richtung der wachsenden Längen gedreht werden muß, damit sie mit der Ebene II_1CM zusammenfalle; man hat also, wenn L die astrozentrische Länge von M , und λ die von O aus gesehene Länge von C bedeutet, $L = 180^\circ + \lambda$. Die von C aus gesehene Rektaszension und Deklination von O oder M soll die astrozentrische Rektaszension, bzw. Deklination von O oder M genannt werden; bezeichnet man mit α und δ die vom Beobachtungsort aus gesehene Rektaszension und Deklination des Himmelskörpers, so ist die astrozentrische Rektaszension, bzw. Deklination von O oder M gleich $180^\circ + \alpha$, bzw. $-\delta$. Zieht man CP_1 parallel zu OP , wo nun CP_1 in der Ebene des Kreises BMA liegt, so ist $P_1CM = 90^\circ + \delta$. Man verlängere jetzt die Richtungen $CM, CT, \dots, C\gamma_1$ bis zu ihren Durchschnitten M, T, \dots, γ_1 (Fig. 3) mit der um C beschriebenen Sphäre; in dem Dreieck P_1II_1M hat man dann, wenn ε

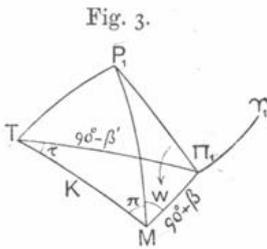


Fig. 3.

die Schiefe der Ekliptik bedeutet, $P_1\Pi_1 = \varepsilon$, $P_1M = 90^\circ + \delta$, $\Pi_1M = 90^\circ + \beta$, $P_1\Pi_1M = L - 90^\circ = 90^\circ + \lambda$. Wird also der Winkel $P_1M\Pi_1$ mit w bezeichnet, so ergibt sich

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos \delta \sin w &= \sin \varepsilon \cos \lambda \\ \cos \delta \cos w &= \cos \varepsilon \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \sin \lambda \end{aligned}$$

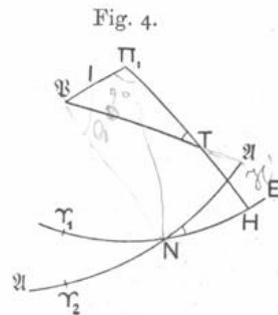
Hier können β , λ und ε als gegeben angenommen werden, und somit läßt sich aus (2) der Winkel w berechnen. Da aber der Winkel P_1MT gleich dem beobachteten Positionswinkel π des Fleckes ist, so ist nun auch der Winkel $TM\Pi_1 = w + \pi$ bekannt.

Es werde jetzt $\Pi_1T = 90^\circ - \beta'$ gesetzt, so daß β' die astrozentrische Breite des Fleckes darstellt; ferner bezeichne man die astrozentrische Länge des Fleckes oder den von $\Pi_1\gamma_1$ aus in der Richtung des Pfeiles gerechneten Winkel $\gamma_1\Pi_1T$ mit λ' . Die Werte von λ' und β' lassen sich mit Hilfe des Dreieckes $T\Pi_1M$ bestimmen. Da nämlich der Winkel $T\Pi_1M = L - \lambda' = 180^\circ - (\lambda' - \lambda)$ und die Seite $TM = K$ ist, so gelten die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda) &= \sin K \sin (\pi + w) \\ \cos \beta' \cos (\lambda' - \lambda) &= -\cos K \cos \beta - \sin K \sin \beta \cos (\pi + w) \\ \sin \beta' &= -\cos K \sin \beta + \sin K \cos \beta \cos (\pi + w) \end{aligned}$$

Hat man nun einen Fleck zu drei verschiedenen Zeiten beobachtet und die zugehörigen Werte von β' und λ' berechnet, so läßt sich die Lage der Rotationsachse und die Drehungsgeschwindigkeit des Himmelskörpers bestimmen. Um dies zu zeigen, denke man sich durch das Zentrum C des Himmelskörpers eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse, und eine zweite Ebene parallel zur Ekliptik gelegt; diese beiden Ebenen mögen die um C beschriebene Sphäre in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ (Fig. 4), bzw. γ_1E schneiden, wobei γ_1 dieselbe Bedeutung wie in Fig. 3 haben soll; \mathfrak{P} und Π_1 seien die Pole von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, bzw. von γ_1E ; T sei der astrozentrische Ort des Fleckes. Wird der Bogen γ_1N oder die Länge des aufsteigenden Knotens von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf γ_1E gleich ϑ gesetzt, so ist der Bogen $NH = \lambda' - \vartheta$, also der Winkel $\mathfrak{P}\Pi_1T = 90^\circ + \lambda' - \vartheta$. Wenn ferner auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ die Strecke $\gamma_2N = \gamma_1N = \vartheta$ abgetragen wird, und l' den von $\mathfrak{P}\gamma_2$ aus in der Richtung der wachsenden Längen gerechneten Winkel $\gamma_2\mathfrak{P}T$ bedeutet, so ist der Winkel $T\mathfrak{P}\Pi_1 = 90^\circ - (l' - \vartheta)$. Man setze jetzt noch $\mathfrak{P}T = 90^\circ - b'$ und $\mathfrak{P}\Pi_1 = J$, wo also J die Neigung des Äquators des Himmelskörpers gegen die Ekliptik bezeichnet; aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\Pi_1T$, dessen Seite $\Pi_1T = 90^\circ - \beta'$ ist, folgt dann

$$(4) \quad \begin{aligned} \cos b' \sin (l' - \vartheta) &= \sin \beta' \sin J + \cos \beta' \cos J \sin (\lambda' - \vartheta) \\ \cos b' \cos (l' - \vartheta) &= \cos \beta' \cos (\lambda' - \vartheta) \\ \sin b' &= \sin \beta' \cos J - \cos \beta' \sin J \sin (\lambda' - \vartheta) \end{aligned}$$



Führt man die Abkürzungen ein

$$(5) \quad \frac{\sin b'}{\cos J} = x, \quad \text{tang } J \cos \vartheta = y, \quad \text{tang } J \sin \vartheta = z,$$

so wird die letzte Gleichung

$$(6) \quad x + y \sin \lambda' \cos \beta' - z \cos \lambda' \cos \beta' = \sin \beta'$$

Jedes Wertepaar von β' und λ' liefert eine solche Gleichung, man kann also mit Hilfe von drei Wertepaaren die Unbekannten x , y und z berechnen; sodann erhält man aus (5) die Werte von J , ϑ und $\sin b'$. Die beiden ersten der Gleichungen (4) dienen zur Berechnung von $\cos b'$ und $l' - \vartheta$; da $\sin b'$ und ϑ bereits bekannt sind, so sind nun auch b' und l' als bekannte Größen anzusehen. Durch J und ϑ ist die Lage der Rotationsachse bestimmt; um auch die Rotationsgeschwindigkeit zu erhalten, hat man die Differenz zwischen zwei zu verschiedenen Beobachtungszeiten gehörigen Werten von l' durch die Epochendifferenz zu dividieren. Wird die Drehungsgeschwindigkeit mit n bezeichnet und n in Graden ausgedrückt, so gibt $360^\circ : n$ die Dauer einer Umdrehung an.

Es sei nun \mathcal{A} der in derselben Weise wie l' gerechnete Winkel zwischen $\mathfrak{P}\gamma_2$ und einem fest gewählten oder Hauptmeridian des Himmelskörpers zur Zeit t_0 ; zur Zeit t bildet dann dieser Meridian mit $\mathfrak{P}\gamma_2$ den Winkel $\mathcal{A} + n(t - t_0)$. Wird zur Abkürzung $\mathcal{A} + n(t - t_0) = l'_0$ gesetzt, und bezieht sich der für einen Fleck aus (4) gefundene Wert von l' auf die Zeit t , so gibt $l' - l'_0$ die astrographische Länge des Fleckes, bezogen auf den Hauptmeridian, an; den oben eingeführten Winkel b' bezeichnet man als die astrographische Breite des Fleckes. In der Folge wird zur Abkürzung $l' - l'_0 = l_1$ gesetzt werden.

Die Wahl des Hauptmeridians ist an und für sich beliebig. Bei der Sonne wird von manchen derjenige Meridian als Hauptmeridian betrachtet, welcher am 1. Januar 1854 um 0^h m. Zt. Greenwich durch den aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Ekliptik ging. In diesem Falle hat man also $t_0 = 1854$ Januar 1.0 m. Zt. Gr., und \mathcal{A} ist gleich dem Bogen $\gamma_2 N$ in Fig. 4, d. h. es ist $\mathcal{A} = \vartheta$. Die von $\mathfrak{P}\gamma_2$ aus gezählte Länge des Hauptmeridians zur mittleren Greenwicher Zeit t wird somit gleich $\vartheta + n(t - 1854 \text{ Januar } 1.0)$, und die heliographische Länge eines Fleckes, für den zur Zeit t der Winkel $\gamma_2 \mathfrak{P} T = l'$ ist, ergibt sich zu $l' - \vartheta - n(t - 1854 \text{ Januar } 1.0)$. Zur bequemen Berechnung des letzten Ausdruckes schlägt man den folgenden Weg ein. Bezeichnet T_0 eine zunächst beliebige Greenwicher Zeit, so ist der vorhin gegebene Ausdruck für die heliographische Länge des Fleckes identisch mit $l' - \vartheta - n(t - T_0) - n(T_0 - 1854 \text{ Januar } 1.0)$. Man wähle nun T_0 so, daß die Differenz $T_0 - 1854 \text{ Januar } 1.0$ gleich der Dauer von m ganzen Umdrehungen der Sonne, also gleich $m \frac{360^\circ}{n}$ ist; die heliographische Länge des Sonnenfleckes wird dann gleich $l' - \vartheta - n(t - T_0)$. Unter der Annahme, daß für einen mittleren Tag als Zeiteinheit $n = 14^\circ 1844$ ist, erhält man $\frac{360^\circ}{n} = 25.38$ mittlere Tage, und demnach bestimmt sich T_0 aus der Gleichung $T_0 - 1854 \text{ Januar } 1.0 = m \times 25.38$ mittlere Tage. Setzt man hierin für m alle negativen und positiven

ganzen Zahlen, so geben die entsprechenden Werte von T_0 die mittleren Greenwicher Zeiten an, zu denen der angenommene Hauptmeridian der Sonne durch den aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Ekliptik hindurchgegangen ist, bzw. gehen wird; z. B. ergeben sich für $m = 0, 1, 2, 3$ die folgenden Werte von T_0 : 1854 Januar 1.00, Januar 26.38, Februar 20.76, März 18.14. Hat man jetzt beispielsweise für einen im Jahre 1854, Februar 25.14 m. Zt. Gr. beobachteten Sonnenfleck mit Hilfe der Gleichungen (4) den Wert von $l' - \vartheta$ abgeleitet, so wird die heliographische Länge des Fleckes gleich $l' - \vartheta - 14^{\circ}1844$ (Februar 25.14 — Februar 20.76) = $l' - \vartheta - 14^{\circ}1844 \times 4.38 = l' - \vartheta - 62^{\circ}13$.

129. Bestimmung der Lage eines Fleckes gegen den Mittelpunkt der Himmelskörperscheibe. Die vorhin benutzten Größen π und σ lassen sich nicht unmittelbar durch die Beobachtung finden, sondern müssen durch Rechnung aus den Beobachtungsdaten abgeleitet werden. Zu diesem Zwecke kann man sich einer der folgenden Methoden bedienen.

Handelt es sich um einen Sonnenfleck, so beobachte man die Rektaszensionsdifferenz des Fleckes gegen den vorausgehenden und folgenden Sonnenrand, sowie die Deklinationsdifferenz gegen den nördlichen und südlichen Sonnenrand; aus diesen Messungen ergibt sich zunächst die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz des Fleckes gegen die Mitte der Sonnenscheibe. Bezeichnet man jetzt die Rektaszension und Deklination der Sonne mit α und δ , und sind α_x und δ_x die entsprechenden Koordinaten des Fleckes, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Mittelpunkte der Sonnenscheibe, dem Orte des Fleckes und dem Nordpol des Erdäquators

$$\begin{aligned}\sin \sigma \sin \pi &= \cos \delta_x \sin (\alpha_x - \alpha) \\ \sin \sigma \cos \pi &= \sin \delta_x \cos \delta - \cos \delta_x \sin \delta \cos (\alpha_x - \alpha)\end{aligned}$$

Da σ , $\alpha_x - \alpha$ und $\delta_x - \delta$ verhältnismäßig kleine Winkel sind, und die bei den Sonnenflecken zu erreichende Genauigkeit nicht sehr groß ist, so kann man die beiden letzten Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

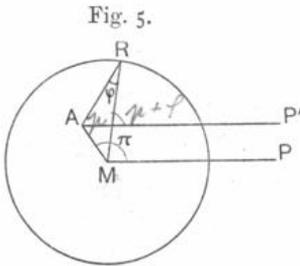
$$(7) \quad \begin{aligned}\sigma \sin \pi &= (\alpha_x - \alpha) \cos \delta \\ \sigma \cos \pi &= \delta_x - \delta\end{aligned}$$

Das hier für einen Sonnenfleck angegebene Verfahren läßt sich auch auf einen auf der Oberfläche eines Planeten sichtbaren Fleck anwenden.

Bei dem Monde soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo die Lage eines nicht weit von dem Mittelpunkte der Mondscheibe befindlichen Kraters gegen diesen Mittelpunkt gesucht wird; dabei werde angenommen, daß man nach *Bessels* Vorschlag die Abstände des Kraters von sieben Punkten des voll erleuchteten Mondrandes sowie auch die auf den Krater bezogenen Positionswinkel der sieben Randpunkte gemessen habe*). Im allgemeinen ist nur die Hälfte des Mondrandes erleuchtet; wählt man also die Randpunkte in der Weise, daß je einer in der Nähe der beiden

*) Die Gründe, welche *Bessel* bewogen haben, gerade sieben Punkte zu wählen, findet man in seiner Abhandlung »Über die Bestimmung der Libration des Mondes« (Astronomische Nachrichten, Bd. 16, Nr. 376) angegeben.

Hörner liegt, und daß die Differenz der auf den Krater bezogenen Positionswinkel je zweier einander benachbarter Randpunkte nahe dieselbe bleibt, so wird diese Differenz verhältnismäßig wenig von 30° verschieden sein; man wird demnach auch zu jeder gemessenen Distanz eine zweite finden, welche im Positionswinkel um nahe 90° von der ersteren abweicht. In Fig. 5 seien nun M , A und R die Durchschnittspunkte der vom Beobachtungsorte zum Mittelpunkte des Mondes, dem Orte des



Kraters und einem Randpunkte gehenden Richtungen mit der Sphäre, ferner seien PM und $P'A$ die Deklinationskreise von M und A . Nimmt man an, daß R in bezug auf AP' auf der Seite der wachsenden Rektaszensionen liegt, und setzt man $P'AR = p$, $RA = s$, so ist p der beobachtete Positionswinkel des Randpunktes, bezogen auf den Krater, und s die beobachtete Distanz; die gesuchten Größen sind $PMA = \pi$ und $AM = \sigma$.

Wird jetzt $ARM = \varphi$ und $MR = h'$ gesetzt, und berücksichtigt man, daß, da AP' nur einen verschwindend kleinen Winkel mit MP bildet, $RAM = 180^\circ - (\pi - p)$ ist, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck RAM , wenn noch der Sinus von h' , s und σ mit dem Bogen vertauscht, und $\cos h' = \cos s = \cos \sigma = 1$ angenommen wird,

$$(8) \quad \begin{aligned} h' \sin \varphi &= \sigma \sin(\pi - p) \\ h' \cos \varphi &= s + \sigma \cos(\pi - p) \end{aligned}$$

Ganz entsprechend ergibt sich für einen zweiten Randpunkt, wenn p' , s' , φ' die zugehörigen Werte von p , s , φ bedeuten,

$$(8^1) \quad \begin{aligned} h' \sin \varphi' &= \sigma \sin(\pi - p') \\ h' \cos \varphi' &= s' + \sigma \cos(\pi - p') \end{aligned}$$

Wenn aber $p' = 90^\circ + p$ ist, so werden die beiden letzten Gleichungen

$$(8^2) \quad \begin{aligned} h' \sin \varphi' &= -\sigma \cos(\pi - p) \\ h' \cos \varphi' &= s' + \sigma \sin(\pi - p) \end{aligned}$$

Der Voraussetzung nach ist σ nur ein kleiner Bruchteil von h' , und demnach sind φ und φ' verhältnismäßig kleine Winkel; setzt man also in erster Näherung $\cos \varphi = \cos \varphi' = 1$, so folgt aus den Gleichungen (8) und (8²)

$$(8^3) \quad \sin \varphi = \frac{h' - s'}{h'}, \quad \sin \varphi' = -\frac{h' - s}{h'}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit dem nach der Mondephemeride angenommenen Werte von h' ermöglichen eine genäherte Bestimmung von φ und φ' . Wird nun zur Abkürzung

$$(9) \quad \begin{aligned} h' \cos \varphi - s &= v \\ h' \cos \varphi' - s' &= v' \end{aligned}$$

gesetzt, so nimmt die zweite der Gleichungen (8), bzw. (8¹) die Form an

$$\begin{aligned} \sigma \cos(\pi - p) &= v \\ \sigma \cos(\pi - p') &= v' \end{aligned}$$

Durch Subtraktion und Addition dieser Gleichungen erhält man

$$(10) \quad \begin{aligned} 2\sigma \sin(\pi - \frac{1}{2}[p + p']) &= \frac{v' - v}{\sin \frac{1}{2}(p' - p)} \\ 2\sigma \cos(\pi - \frac{1}{2}[p + p']) &= \frac{v' + v}{\cos \frac{1}{2}(p' - p)} \end{aligned}$$

Substituiert man die hieraus sich ergebenden Werte von σ und π in die erste der Gleichungen (8), bzw. (8'), so lassen sich $\sin \varphi$ und $\sin \varphi'$ genauer bestimmen. Hierauf berechne man von neuem v und v' , und schließlich mit Hilfe von (10) nochmals σ und π ; die so gewonnenen Werte mögen mit σ_0 und π_0 bezeichnet werden.

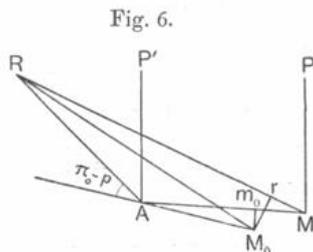
Um nun aus den sieben beobachteten Distanzen und Positionswinkeln die wahrscheinlichsten Werte von $\sigma = \sigma_0 + d\sigma$ und $\pi = \pi_0 + d\pi$ zu finden, berechne man zunächst mittels der Gleichungen (8) und unter Anwendung der Näherungswerte σ_0 und π_0 die den sieben Randpunkten entsprechenden Werte von h' und φ ; dieselben sollen mit h'_0 und φ_0 bezeichnet werden. Wenn dann in Fig. 6 M , A , R , MP und AP' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 5, und $P'AM_0 = 180^\circ - \pi_0$, $AM_0 = \sigma_0$ gemacht wird, so ist M_0 der genäherte Ort der Mondmitte, und man hat $M_0R = h'_0$, und $M_0RA = \varphi_0$; ferner ist $P'AM = 180^\circ - (\pi_0 + d\pi)$, $AM = \sigma_0 + d\sigma$. Beschreibt man jetzt mit dem Radius AM_0 den Kreisbogen M_0m_0 , so ist $Mm_0 = d\sigma$ und $M_0m_0 = \sigma_0 d\pi$; ferner hat man, wenn M_0r einen mit dem Radius RM_0 beschriebenen Kreisbogen bedeutet, und $MR = h'_0 + dh'$ gesetzt wird, $Mr = dh'$. Nun können die kleinen Bögen M_0m_0 und M_0r als geradlinig und senkrecht zu AM , bzw. RM betrachtet werden; wenn also der Winkel $AMR = \chi$ gesetzt wird, so ergibt sich $dh' = Mr = Mm_0 \cos \chi - M_0m_0 \sin \chi = d\sigma \cos \chi - \sigma_0 d\pi \sin \chi$. Der Winkel χ ist aber nur wenig von AM_0R verschieden, und letzterer Winkel ist gleich $\pi_0 - p - \varphi_0$; demnach wird die letzte Gleichung

$$dh' = d\sigma \cos(\pi_0 - p - \varphi_0) - \sigma_0 d\pi \sin(\pi_0 - p - \varphi_0)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Mondrand genau kreisförmig ist, ist $h'_0 + dh'$ gleich dem Halbmesser des Mondes; nimmt man für diesen Halbmesser einen Näherungswert H_0 an (beispielsweise das Mittel aus den sieben für h'_0 erhaltenen Werten), und bedeutet dH die Korrektur von H_0 , so wird $H_0 + dH = h'_0 + dh'$ oder nach Substitution des für dh' gefundenen Ausdrucks

$$(11) \quad dH - d\sigma \cos(\pi_0 - p - \varphi_0) + \sigma_0 d\pi \sin(\pi_0 - p - \varphi_0) = h'_0 - H_0$$

Den sieben Randpunkten entsprechen ebenso viele Bedingungsgleichungen von der Form (11). Nachdem man mit ihrer Hilfe die wahrscheinlichsten Werte von dH , $d\sigma$ und $\sigma_0 d\pi$ gefunden hat, hat man nur noch die Summen $H_0 + dH$, $\sigma_0 + d\sigma$ und $\pi_0 + d\pi$ zu bilden, und erhält damit die wahrscheinlichsten Werte des Mondhalbmessers sowie von σ und π . Die Differenzen $h'_0 + d\sigma \cos(\pi_0 - p - \varphi_0) - (H_0 + dH) = h'_0 - H_0 - [dH - d\sigma \cos(\pi_0 - p - \varphi_0) + \sigma_0 d\pi \sin(\pi_0 - p - \varphi_0)]$, wo für dH , $d\sigma$ und $\sigma_0 d\pi$ ihre aus den Bedingungs-



gleichungen (11) folgenden Werte zu substituieren sind, rühren zum Teil von den Beobachtungsfehlern, zum Teil von den Unebenheiten des Mondrandes her.

Es werde jetzt angenommen, daß man für einen dem Mittelpunkte der Mondscheibe nahe gelegenen Krater — z. B. für Mösting A — die Werte von σ und π bestimmt habe; um dann die Lage eines beliebig weit vom Mittelpunkte der Mondscheibe entfernten Kraters in bezug auf diesen Mittelpunkt zu finden, hat man nur nötig, den Positionswinkel des betreffenden Kraters, bezogen auf Mösting A , und die Distanz der beiden Krater zu messen. Sind nämlich in Fig. 7 M , A und T die von dem Beobachtungsort aus gesehenen Örter des Mittelpunktes der Mondscheibe, des Kraters Mösting A und des zu bestimmenden Kraters, und sind MP und AP' die Deklinationskreise von M und A , so erhält man aus dem sphärischen Dreieck MAT , wenn $PMT = \pi'$, $MT = \sigma'$, $P'AT = p$, $AT = s$, $PMA = \pi$ (also $P'AM = 180^\circ - \pi$), $MA = \sigma$ und $\sin s = s$, $\sin \sigma' = \sigma'$, $\cos s = \cos \sigma = 1$ gesetzt wird,

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma' \sin(\pi' - \pi) &= s \sin(p - \pi) \\ \sigma' \cos(\pi' - \pi) &= \sigma + s \cos(p - \pi) \end{aligned}$$

Alle auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Größen sind bekannt, man kann also mit Hilfe von (12) die gesuchten Werte von π' und σ' berechnen.

130. Die Cassinischen Gesetze. Die Oberfläche des Mondes zeigt eine große Zahl von Gebilden, welche sich scharf beobachten lassen, und die man unter Anwendung der im vorigen abgeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der Lage der Rotationsachse des Mondes gegen die Ekliptik, sowie auch zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung benutzen kann. Aus derartigen Untersuchungen hat nun *D. Cassini* die folgenden nach ihm benannten Gesetze abgeleitet:

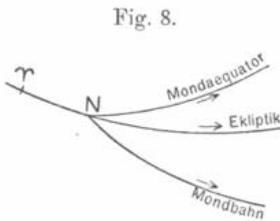


Fig. 8.

1. Die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondäquators auf der Ekliptik ist gleich der um 180° vermehrten Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, oder, mit anderen Worten: Der aufsteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik fällt mit dem absteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik zusammen (Fig. 8).

2. Die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik ist konstant.

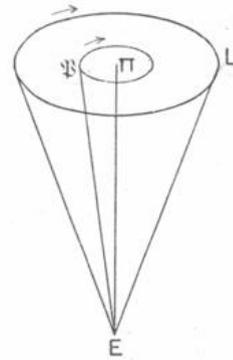
3. Der Mond dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Achse, und zwar in demselben Sinne, in dem sich der Mond um die Erde bewegt. Die Umdrehungszeit des Mondes um seine Achse ist gleich seiner Umlaufszeit um die Erde; die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist also gleich der mittleren siderischen Bewegung des Mondes in seiner Bahn.

Fände die durch das dritte *Cassinische* Gesetz behauptete Gleichheit von Umlaufszeit und Umdrehungszeit des Mondes nur näherungsweise statt, bestünde also

eine wenn auch nur kleine Differenz zwischen den beiden genannten Zeiten, so würden im Laufe der Jahrhunderte an dem einen Rande des Mondes neue Gebilde auftauchen, und an dem entgegengesetzten früher sichtbare verschwinden; soweit man aber nach der Vergleichung der ältesten Beschreibungen des Mondes mit dem Bilde, welches er gegenwärtig bietet, urteilen kann, sieht man den Mond noch heute so, wie ihn die früheren Beobachter sahen.

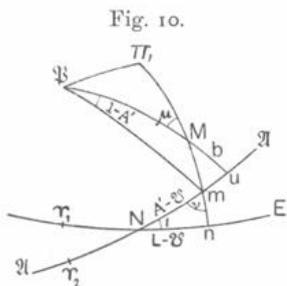
Bekanntlich ändert die Schnittlinie der Mondbahn mit der Ekliptik fortwährend ihre Lage, und zwar so, daß der Punkt N in Fig. 8 sich mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit rückläufig auf der Ekliptik bewegt; die Zeit, innerhalb deren der Punkt N einmal die Ekliptik durchläuft, beträgt $18\frac{2}{3}$ Jahre. Dem ersten *Cassini*schen Gesetze zufolge muß also auch die Durchschnittslinie des Mondäquators und der Ekliptik letztere in $18\frac{2}{3}$ Jahren rückläufig und mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen. Ferner haben die Untersuchungen über die Bewegung des Mondes ergeben, daß die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik konstant ist, wenigstens wenn man von kleinen periodischen Störungen absieht; die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik zeigt demnach dasselbe Verhalten wie die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik. Zieht man also (Fig. 9) vom Mittelpunkt E der Erde aus drei Gerade, von denen eine (EII) senkrecht zur Ebene der Ekliptik, die zweite (EL) senkrecht zur Ebene der Mondbahn und die dritte ($E\mathfrak{P}$) parallel zur Rotationsachse des Mondes ist, so beschreiben EL und $E\mathfrak{P}$ in $18\frac{2}{3}$ Jahren und mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit rückläufig je einen Kreiskegel um die Achse EII ; dabei liegen $E\mathfrak{P}$, EII und EL stets in einer Ebene, und zwar befinden sich $E\mathfrak{P}$ und EL auf entgegengesetzten Seiten von EII . Die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik oder der Winkel IEL beträgt $5^{\circ}9'$; da der Winkel $IE\mathfrak{P}$ nach der Bestimmung von *Hayn* gleich $1^{\circ}32'$ ist, so ist der Winkel $\mathfrak{P}EL$ oder die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die Mondbahn gleich $6^{\circ}41'$.

Fig. 9.



131. Die optische Libration des Mondes. Selenographische Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe. Die Exzentrizität der Erdbahn und die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik bewirken, daß der Mittelpunkt der Mondscheibe nicht stets mit demselben Punkte der Mondoberfläche zusammenfällt; aber wegen der Gleichheit von Umlaufzeit und Umdrehungszeit des Mondes kann er ein gewisses engbegrenztes Gebiet der Mondoberfläche nicht überschreiten. Mit Rücksicht darauf, daß es sich hier nicht um eine Schwankung des Mondkörpers handelt, bezeichnet man die erwähnte Erscheinung als optische Libration des Mondes. Um die Ausdehnung des Gebietes berechnen zu können, innerhalb dessen der Mittelpunkt der Mondscheibe eingeschlossen bleibt, sollen im folgenden die Koordinaten dieses Mittelpunktes in bezug auf den Äquator und einen fest gewählten Meridian des Mondes bestimmt werden. In Fig. 10 mögen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $\nu_1 E$ Bögen der größten Kreise bedeuten, in denen der Mondäquator, bzw. eine durch das Mond-

zentrum parallel zur Ekliptik gelegte Ebene die Sphäre schneidet, \mathfrak{P} und Π_1 seien die Pole von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, bzw. $\gamma_1 E$, N sei der aufsteigende Knoten von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf $\gamma_1 E$,



und M der selenozentrische Ort des Beobachtungsortes, also auch des Mittelpunktes der vom Beobachtungsort aus gesehenen Mondscheibe. Durch M lege man den Bogen $\Pi_1 n$ senkrecht zu $\gamma_1 E$, und $\mathfrak{P}u$ senkrecht zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, ferner ziehe man noch den Bogen größten Kreises $\mathfrak{P}m$. Bezeichnet γ_1 den Punkt, in dem eine durch das Mondzentrum parallel zu der Richtung Erde—Frühlingsäquinox gezogene Gerade den größten Kreis $\gamma_1 E$ schneidet, so ist $\gamma_1 N$ die Länge des aufsteigenden Knotens von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf $\gamma_1 E$; diese Länge werde mit ϑ , und die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik mit J bezeichnet. Man trage nun auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ den Bogen $N\gamma_2 = N\gamma_1 = \vartheta$ ab und setze $\gamma_2 \mathfrak{P}M = l$, $\gamma_2 \mathfrak{P}m = A'$; dann ist der Winkel $m\mathfrak{P}u = l - A'$ und $Nm = A' - \vartheta$. Ferner werde $Mu = b$, $mn = B'$, $\gamma_1 \Pi_1 n = L$, $Mn = B$ gesetzt, wo demnach L und B die selenozentrische Länge und Breite des Beobachtungsortes, bzw. des Mittelpunktes der Mondscheibe bedeuten. Wird jetzt noch der Winkel $Nmn = Mmu$ mit ν bezeichnet, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke Nmn

$$(13) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang}(A' - \vartheta) &= \operatorname{tang}(L - \vartheta) \sec J \\ \operatorname{tang} B' &= \sin(L - \vartheta) \operatorname{tang} J \\ \sin \nu &= \cos J \sec B' \\ \cos \nu &= \cos(L - \vartheta) \sin J \end{aligned}$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke Mum , wenn der Winkel bei M gleich μ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $Mm = B - B'$ und $mu = l - A'$ ist,

$$(14) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang}(l - A') &= \operatorname{tang}(B - B') \cos \nu \\ \cos \mu &= \cos(l - A') \sin \nu \\ \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang}(B - B') \cos \mu \end{aligned}$$

Wenn λ und β die Länge und Breite des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus, bedeuten, so ist $L = 180^\circ + \lambda$ und $B = -\beta$; ferner hat man dem ersten Cassinischen Gesetze zufolge $\vartheta = 180^\circ + \Omega$, wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik bezeichnet. Die Werte von λ , β und Ω sind als bekannt zu betrachten; nimmt man also noch nach *Hayn* $J = 1^\circ 32'$ an, so kann man mit Hilfe der Gleichungen (13) und (14) B' , l und b berechnen.

Man wähle jetzt einen bestimmten Meridian des Mondes als Hauptmeridian, und es sei \mathcal{A} der Winkel zwischen der Ebene dieses Meridians und der durch den größten Kreis $\mathfrak{P}\gamma_2$ gelegten Ebene zur Zeit t_0 ; zur Zeit t bilden dann die beiden Ebenen den Winkel $\mathcal{A} + n(t - t_0)$ miteinander, wo n die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Mondes bedeutet. Setzt man zur Abkürzung $\mathcal{A} + n(t - t_0) = l_0$ und versteht unter t die Zeit, für welche der aus (14) folgende Wert von l gilt, so wird $l - l_0$ die selenographische Länge des Mittelpunktes der Mondscheibe oder auch die Libration in Länge genannt. Den Winkel b nennt man die selenographische Breite

des Mittelpunktes der Mondscheibe oder auch die Libration in Breite. Die Wahl des Hauptmeridians ist ganz frei, man kann also für \mathcal{A} jeden Wert annehmen. Setzt man nun \mathcal{A} gleich der mittleren selenozentrischen Länge der Erde zur Zeit t_0 und berücksichtigt, daß nach dem dritten *Cassinischen* Gesetz die Drehungsgeschwindigkeit des Mondes gleich der mittleren siderischen Bewegung des Mondes in seiner Bahn ist, so folgt, daß l_0 gleich der mittleren selenozentrischen Länge der Erde zur Zeit t ist. Unter der vorhin für \mathcal{A} gemachten Annahme läßt sich also die Lage des Haupt- oder ersten Mondmeridians jederzeit leicht angeben.

Den Gleichungen (13) und (14) kann man durch Reihenentwicklung eine andere, für die Rechnung bequemere Form geben. Zunächst folgt aus der dritten der Gleichungen (14), nach § 1, (18^a),

$$(15) \quad b = B - B' - \tan^2 \frac{1}{2} \mu \sin 2(B - B') + \dots,$$

und außerdem $|b| \leq |B - B'|$. Nun kann B' höchstens gleich J , und B höchstens gleich der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik (gleich $5^\circ 9'$) werden; somit ist $|B - B'| \leq 6^\circ 41'$. Ferner ergibt sich aus dem Dreieck $\mathfrak{P}H_1M$ (Fig. 10), worin der Winkel bei H_1 gleich $90^\circ + L - \vartheta$, $\mathfrak{P}M = 90^\circ - b$ und $\mathfrak{P}H_1 = J$ ist,

$$\cos b \sin \mu = \sin J \cos(L - \vartheta)$$

Da $\cos b$ nahe gleich 1 ist, so folgt aus der letzten Gleichung, daß μ nahe innerhalb der Grenzen $\pm J$ liegt. Das Glied $\tan^2 \frac{1}{2} \mu \sin 2(B - B')$ ist also sehr klein; vernachlässigt man dasselbe, so wird

$$(15^a) \quad b = B - B'$$

Ferner geht aus der vierten der Gleichungen (13) hervor, daß $\cos \nu$ nicht größer als $\sin J$ werden kann; da nun $|B - B'| \leq 6^\circ 41'$ ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (14), daß $|l - A'| < 11'$ ist und darum

$$l = A' + (B - B') \cos \nu$$

gesetzt werden darf. Die Anwendung der aus § 1, (18) unter der Annahme $n = \sec J$ folgenden Reihenentwicklung auf die erste der Gleichungen (13) gibt aber

$$A' = L + \tan^2 \frac{1}{2} J \sin 2(L - \vartheta) + \dots$$

Substituiert man diesen Wert von A' in die vorige Gleichung, so erhält man

$$l = L + \tan^2 \frac{1}{2} J \sin 2(L - \vartheta) + (B - B') \cos \nu$$

Soll das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung in Bogenminuten ausgedrückt erhalten werden, so ist dasselbe noch durch $\text{arc } 1'$ zu dividieren oder mit 3437.75 zu multiplizieren.

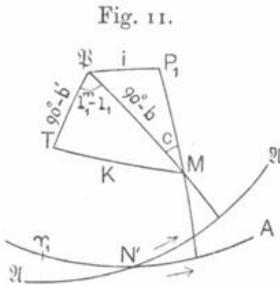
Die Differenz $l - l_0$ gibt dem oben Gesagten zufolge die selenographische Länge des Mittelpunktes der Mondscheibe an; wird diese Länge mit $l_1^{(m)}$ bezeichnet, so ist

$$(16) \quad l_1^{(m)} = L - l_0 + \tan^2 \frac{1}{2} J \sin 2(L - \vartheta) \frac{1}{\text{arc } 1'} + (B - B') \cos \nu$$

L unterscheidet sich von l_0 nur durch periodische Glieder, und $B - B'$ ist periodisch veränderlich; aus (15) und (16) folgt demnach, daß $l_1^{(m)}$ und b nur periodischen Ver-

änderungen unterworfen sein können. Die Extremwerte von $l_1^{(m)}$ unterscheiden sich um rund 16° , diejenigen von b um rund 14° voneinander; der Ort des Mittelpunktes der Mondscheibe auf der Mondoberfläche kann sich also von seiner mittleren Lage nie um mehr wie 11° entfernen.

132. Anwendungen der selenographischen Koordinaten des Mittelpunktes der Mondscheibe. Mit Hilfe der selenographischen Länge ($l_1^{(m)}$) und Breite (b) des Mittelpunktes der Mondscheibe lassen sich die selenographischen Koordinaten eines Punktes der Mondoberfläche finden, dessen Lage gegen den Mittelpunkt der Mondscheibe bekannt ist. Es sei T in Fig. 11 der Punkt, dessen selenographische Länge (l_1) und Breite (b') gesucht wird, $\gamma_1 A$ sei ein Bogen des größten Kreises, in dem die durch das Mondzentrum parallel zum Erdäquator gelegte Ebene die Sphäre schneidet, P_1 bedeute den Pol von $\gamma_1 A$, und \mathfrak{P} den Nordpol des Mondes; die als gegeben betrachtete Lage von T gegen den Mittelpunkt M der Mondscheibe möge durch den Positionswinkel $P_1 M T = \pi$ und durch die von der Erde aus gesehene Distanz σ des Punktes T von M bestimmt sein. Mit Hilfe von σ und



des vom Beobachtungsort aus gesehenen Mondhalbmessers h' erhält man zunächst aus (1^a) und (1^b) den Bogen $TM = K$. Man setze jetzt $P_1 M \mathfrak{P} = c$; es ist dann $\mathfrak{P} M T = \pi - c$. Der Wert von c läßt sich in folgender Weise bestimmen. Wenn γ_1 wieder den Punkt bezeichnet, in dem die vom Mondzentrum aus parallel zu der Richtung Erde—Frühlingsäquinok gezogene Gerade die Sphäre trifft, so ist der Winkel $\gamma_1 P_1 M$ die selenozentrische Rektaszension von M , und der Bogen $\gamma_1 N'$ die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondäquators $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf dem Erdäquator. Es sei nun α die Rektaszension des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus; man hat dann $\gamma_1 P_1 M = 180^\circ + \alpha$, also, wenn $\gamma_1 N' = \Omega'$ gesetzt wird, $\mathfrak{P} P_1 M = 270^\circ + \alpha - \Omega'$. Die zur Berechnung der Knotenlänge Ω' und der Neigung i des Mondäquators gegen den Erdäquator dienenden Formeln ergeben sich aus dem von den Durchschnittspunkten der Ekliptik, des Erd- und Mondäquators gebildeten Dreieck; übrigens findet man die Werte von Ω' und i bereits in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilt. Setzt man demnach Ω' und i als bekannt voraus und berücksichtigt, daß der Bogen $\mathfrak{P} M = 90^\circ - b$ der Annahme nach gegeben ist, so sieht man, daß der Winkel c mittels der aus dem Dreieck $\mathfrak{P} M P_1$ folgenden Formel berechnet werden kann

$$(17) \quad \cos b \sin c = - \sin i \cos (\alpha - \Omega')$$

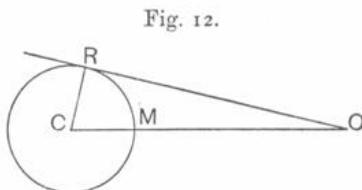
Da $\cos b$ stets nahe gleich 1 ist, so überschreitet c nur wenig die Grenzen $\pm i$. Um jetzt die gesuchten, für T gültigen Werte von l_1 und b' zu erhalten, hat man nur noch die aus dem Dreieck $\mathfrak{P} M T$ sich ergebenden Gleichungen anzuwenden

$$(18) \quad \begin{aligned} \cos b' \sin (l_1^{(m)} - l_1) &= \sin K \sin (\pi - c) \\ \cos b' \cos (l_1^{(m)} - l_1) &= \cos b \cos K - \sin b \sin K \cos (\pi - c) \\ \sin b' &= \sin b \cos K + \cos b \sin K \cos (\pi - c) \end{aligned}$$

Diese Formeln kann man auch benutzen, um für eine beobachtete Sternbedeckung die selenographischen Koordinaten des Ein- oder Austrittspunktes zu berechnen; die Kenntnis dieser Koordinaten ist für die Bestimmung der Unebenheiten des Mondrandes von Wichtigkeit (S. 310f.). In dem angegebenen Falle ist $K = 90^\circ - h'$, wo h' wieder den Winkelhalbmesser des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus, bedeutet. Der Positionswinkel π des Ein- oder Austrittspunktes läßt sich mit Hilfe des sphärischen Dreieckes bestimmen, welches von dem Pol des Erdäquators, dem Stern und dem Orte des Mondes zur Zeit der Bedeckung gebildet wird; dabei ist der den Stern und den Mond verbindende Bogen gleich h' zu setzen. Der Winkel c ergibt sich aus der Gleichung (17). Werden die dem Ein- oder Austrittspunkt entsprechenden Werte von l_1 und b' mit $l_1^{(r)}$ und b_r' bezeichnet, so folgt aus (18), wenn $\sin K = \cos h' = 1$ gesetzt wird,

$$(19) \quad \begin{aligned} \cos b_r' \sin(l_1^{(m)} - l_1^{(r)}) &= \sin(\pi - c) \\ \cos b_r' \cos(l_1^{(m)} - l_1^{(r)}) &= \cos b \sin h' - \sin b \cos(\pi - c) \\ \sin b_r' &= \sin b \sin h' + \cos b \cos(\pi - c) \end{aligned}$$

Die Kenntnis der selenographischen Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe ist noch für einen anderen Zweck notwendig. Die Libration des Mondes bewirkt nämlich, daß einige Teile der Mondoberfläche zu gewissen Zeiten sichtbar, und zu anderen unsichtbar sind. Um nun zu bestimmen, wann ein bestimmtes Objekt der Mondoberfläche der Beobachtung zugänglich ist, betrachte man das ebene Dreieck COR (Fig. 12), worin C das Mondzentrum, O den Ort des Beobachters und OR eine Tangente an den Mondrand bedeutet. Es ist dann einleuchtend, daß man von O aus nur diejenigen Teile des Mondes wahrnehmen kann, welche von C aus betrachtet, um den Winkel $RCO = 90^\circ - h'$ oder weniger von der Richtung CO entfernt sind. Nun folgt aus dem sphärischen Dreieck $T\mathfrak{M}$ (Fig. 11)



$$\cos K = \sin b' \sin b + \cos b' \cos b \cos(l_1^{(m)} - l_1),$$

wo K den selenozentrischen Winkel zwischen dem Mittelpunkt der Mondscheibe und dem Objekt T bedeutet; nach dem vorhin Gesagten ist also das Objekt sichtbar oder nicht, je nachdem der aus dieser Gleichung folgende Wert von K innerhalb oder außerhalb der Grenzen $\pm (90^\circ - h')$ liegt*).

*) Weitere Belehrung über den in diesem Kapitel behandelten Gegenstand findet man in meiner Schrift: Theorie der astrographischen Ortsbestimmung (Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien, Band 118, Abt. II^a).