

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

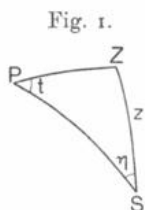
Leipzig, 1912

Kapitel XXII. Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch Beobachtungen
außerhalb des
Meridians

Kapitel XXII.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch Beobachtungen außerhalb des Meridians.

133. Bestimmung der Zeit mittels der Zenitdistanz eines Sterns. Aus dem Dreieck (Fig. 1) zwischen dem Pol (P), dem Zenit (Z) und dem Orte eines Sterns (S) folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination, z die Zenitdistanz und t den Stundenwinkel des Sterns bedeutet,



oder

(1)

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Wie diese Gleichung zeigt, kann man durch Beobachtung der Zenitdistanz eines Sterns den zugehörigen Stundenwinkel finden, vorausgesetzt, daß die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Deklination des Sterns bekannt sind. Ist dann α die Rektaszension des Sterns und Θ die gesuchte Sternzeit der Beobachtung, so folgt

$$(2) \quad \Theta = t + \alpha$$

Zur Berechnung von t wird an Stelle von (1) gewöhnlich eine andere Gleichung angewandt. Nach § 11, (10^a) hat man, wenn a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks bedeuten, und A den der Seite a gegenüberliegenden Winkel bezeichnet,

$$\tan \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

Wendet man diese Formel auf das Dreieck PZS (Fig. 1) an und setzt zur Abkürzung

$$(3) \quad s' = \frac{1}{2}(z + \varphi + \delta),$$

so erhält man die für die Berechnung von t dienende Gleichung

$$(4) \quad \tan \frac{1}{2} t = \pm \sqrt{\frac{\sin(s' - \varphi) \sin(s' - \delta)}{\cos s' \cos(s' - z)}},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem der Stern westlich oder östlich vom Meridian beobachtet wurde.

Um die Zeit zu bestimmen, bedient man sich heller Sterne. Die Örter dieser Sterne finden sich in den astronomischen Jahrbüchern angegeben und können als fehlerfrei betrachtet werden; es genügt also zu untersuchen, welchen Einfluß ein Fehler in der angenommenen Polhöhe oder in der gemessenen Zenitdistanz auf den Wert von t hat. Wendet man nun die Differentialformel der sphärischen Trigonometrie (§ 13, (17'))

$$(I) \quad da = \cos B dc + \sin B \sin c dA + \cos C db$$

auf das Dreieck PZS (Fig. 1) an, indem man dabei die in (I) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten $z, 90^\circ - \delta, 90^\circ - \varphi$ des Dreiecks PZS identifiziert, ferner den Winkel $PZS = 180^\circ - \alpha$ und $d\delta = 0$ setzt, so folgt

$$(5) \quad dt = \frac{dz}{\sin \alpha \cos \varphi} - \frac{d\varphi}{\tan \alpha \cos \varphi}$$

Für eine gegebene Polhöhe wird demnach der Einfluß eines Fehlers in z und φ auf den Stundenwinkel um so kleiner, je näher der Winkel α , d. h. das Azimut des Sterns bei 90° oder 270° liegt. Um also mit Hilfe der Messungen von Zenitdistanzen die Zeit möglichst genau zu bestimmen, wird man die Beobachtungen in der Nähe des ersten Vertikals anstellen.

Falls eine größere Zahl von Zenitdistanzen in der Nähe des ersten Vertikals gemessen worden ist, so kann man das folgende Reduktionsverfahren anwenden. Bezeichnet man mit t_0 und z_0 den Stundenwinkel und die Zenitdistanz eines Sterns zur Zeit seines Durchgangs durch den ersten Vertikal, und sind $\left(\frac{dt}{dz}\right)_0, \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0, \dots$ die für diese Zeit gültigen Werte der Differentialquotienten von t nach z , so hat man

$$t = t_0 + \left(\frac{dt}{dz}\right)_0 (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0 (z - z_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3t}{dz^3}\right)_0 (z - z_0)^3 + \dots$$

Nun folgt aus (5)

$$(5^a) \quad \frac{dt}{dz} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \varphi},$$

und hieraus

$$(5^b) \quad \frac{d^2t}{dz^2} = - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \varphi} \frac{d\alpha}{dz},$$

$$(5^c) \quad \frac{d^3t}{dz^3} = - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \varphi} \frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \varphi} \left[1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2$$

Durch Anwendung der obigen Differentialformel (I) auf das Dreieck PZS (Fig. 1) ergibt sich aber, wenn jetzt die in (I) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten $90^\circ - \delta, z, 90^\circ - \varphi$ des Dreiecks PSZ identifiziert werden, ferner der Winkel bei S mit η bezeichnet, und $d\delta = d\varphi = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\cos \eta}{\sin t \cos \varphi} = \frac{\sin \alpha \sin t \sin \varphi + \cos \alpha \cos t}{\sin t \cos \varphi}$$

Da im ersten Vertikal $\cos \alpha = 0$ und $\sin \alpha = \pm 1$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (5^a) bis (5^c)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_0 = \pm \sec \varphi, \quad \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3t}{dz^3}\right)_0 = \pm \tan^2 \varphi \sec \varphi$$

Folglich wird

$$(6) \quad t = t_0 \pm (z - z_0) \sec \varphi \pm \frac{1}{6} (z - z_0)^3 \tan^2 \varphi \sec \varphi,$$

wo man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden hat, je nachdem die Zenitdistanzen in der Nähe der West- oder der Osthälfte des ersten Vertikals gemessen worden sind.

Für den ersten Vertikal selbst gelten die Gleichungen

$$\cos t_o = \frac{\tan \delta}{\tan \varphi}, \quad \cos z_o = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$$

Hieraus erhält man, wenn die Formel

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{1}{2} x$$

benutzt, und t_o zwischen den Grenzen 0° bis $\pm 180^\circ$ angenommen wird,

$$(7) \quad \tan \frac{1}{2} t_o = \pm \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}}, \quad \tan \frac{1}{2} z_o = \sqrt{\frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich t_o und z_o berechnen. Bezeichnet man jetzt den absoluten Wert von t_o mit τ_o , so wird die Gleichung (6)

$$(8) \quad t = \pm [\tau_o + (z - z_o) \sec \varphi + \frac{1}{6}(z - z_o)^3 \tan^2 \varphi \sec \varphi],$$

wo wieder das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden ist, je nachdem die Zenitdistanzen im Westen oder im Osten gemessen sind. Für eine gegebene Polhöhe läßt sich nun leicht eine Tafel konstruieren, aus der man mit dem Argument $z - z_o$ die Summe der zu τ_o hinzuzufügenden Glieder entnehmen kann; mit Hilfe einer solchen Tafel und der aus (7) erhaltenen Werte von τ_o und z_o findet man dann nach (8) den jeder gemessenen Zenitdistanz zugehörigen Wert von t , also mit Benutzung der Gleichung (2) auch die Sternzeit der Beobachtung.

In den Formeln (6) und (8) sind die von der vierten und den höheren Potenzen von $z - z_o$ abhängigen Glieder vernachlässigt worden; der daraus entstehende Fehler beträgt in mittleren Breiten und für $[z - z_o] \leq 2^\circ$ höchstens $0^s.01$.

134. Zeitbestimmung aus gleichen Höhen zweier Sterne. Man denke sich zwei in Deklination um höchstens zwei bis drei Grade, aber in Rektaszension um mehrere Stunden voneinander verschiedene Sterne, von denen der eine östlich, der andere westlich vom Meridian sich befindet. Die Rektaszension und Deklination des im Osten gelegenen Sterns möge mit α_o , bzw. δ_o bezeichnet werden, die entsprechenden für den im Westen gelegenen Stern gültigen Bezeichnungen seien α_w und δ_w . Hat man nun durch die Beobachtung gefunden, daß die Zenitdistanz des östlichen Sterns zu der Uhrzeit U_o dieselbe ist wie diejenige des westlichen Sterns zu der Uhrzeit U_w , und kennt man außerdem die Polhöhe des Beobachtungsortes, so läßt sich die Korrektur der Uhr in folgender Weise bestimmen.

Aus den durch den Pol, das Zenit und die beiden Sternörter gebildeten sphärischen Dreiecken erhält man, wenn t_o und t_w die Stundenwinkel zur Zeit der Beobachtung bedeuten, und z die für beide Sterne gleiche Zenitdistanz bezeichnet,

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos t_o \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_w + \cos \varphi \cos \delta_w \cos t_w \end{aligned}$$

Man setze jetzt

$$(9) \quad -\frac{1}{2}(t_o + t_w) = s, \quad -\frac{1}{2}(t_o - t_w) = d;$$

also

$$t_o = -s - d, \quad t_w = -s + d$$

$$\begin{aligned} s + d &= -\frac{1}{2}t_o - \frac{1}{2}t_w - \frac{1}{2}t_o + \frac{1}{2}t_w \\ s + d &= -t_o \quad t_o = -s - d \\ s - d &= -\frac{1}{2}t_o - \frac{1}{2}t_w + \frac{1}{2}t_o - \frac{1}{2}t_w \\ s - d &= -t_w \quad t_w = -s + d \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte in die vorhin für $\cos z$ aufgestellten Gleichungen und subtrahiert dann die Gleichungen voneinander, so folgt

$$\tan \varphi (\sin \delta_o - \sin \delta_w) = \cos d \cos s (\cos \delta_w - \cos \delta_o) + \sin d \sin s (\cos \delta_w + \cos \delta_o)$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$(10) \quad \frac{1}{2}(\delta_o + \delta_w) = \sigma, \quad \frac{1}{2}(\delta_o - \delta_w) = \mathcal{A}$$

gesetzt wird,

$$(11) \quad \tan \varphi = \cos d \tan \sigma \cos s + \sin d \cotg \mathcal{A} \sin s$$

Diese Gleichung läßt sich in eine andere Form bringen. Führt man nämlich zwei Hilfsgrößen n und m ein, welche den Gleichungen

$$(12) \quad \begin{aligned} n \sin m &= \cos d \tan \sigma \\ n \cos m &= \sin d \cotg \mathcal{A} \end{aligned}$$

genügen, so ergibt sich an Stelle von (11)

$$(13) \quad \sin(m + s) = \frac{\tan \varphi}{n}$$

Man wähle nun die Sterne so aus, daß sie kurz nacheinander die gleiche Höhe erreichen, und daß demgemäß $U_o - U_w$ klein ist; die Uhr läßt sich dann leicht so regulieren, daß ihr Gang während der Zeitdifferenz $U_o - U_w$ vernachlässigt werden darf. Da unter diesen Umständen, wenn u die Uhrkorrektur bedeutet,

$$(14) \quad t_o = U_o + u - \alpha_o, \quad t_w = U_w + u - \alpha_w$$

ist, so wird die zweite der Gleichungen (9)

$$(15) \quad d = \frac{1}{2}(\alpha_o - \alpha_w) - \frac{1}{2}(U_o - U_w)$$

Der Wert von d ist also bekannt. Da dasselbe auch von σ und $\mathcal{A}$ gilt, so kann man mit Hilfe der Gleichungen (12) n und m berechnen; aus der Gleichung (13) ergibt sich sodann der Winkel s . Rechnet man östliche Stundenwinkel negativ, so ist in dem gegenwärtigen Falle $t_o + t_w$ verhältnismäßig klein; dasselbe gilt also auch von $s = -\frac{1}{2}(t_o + t_w)$. Substituiert man in diesen Ausdruck die in (14) gegebenen Werte von t_o und t_w , und dividiert dann noch s durch 15, um alles in Zeit ausgedrückt zu bekommen, so erhält man für die Uhrkorrektur

$$(16) \quad u = \frac{1}{2}(\alpha_o + \alpha_w) - \frac{1}{2}(U_o + U_w) - \frac{s}{15}$$

Die Rechnung wird einfacher, wenn die Deklinationsdifferenz der beiden Sterne einen halben Grad nicht wesentlich übersteigt. In diesem Falle wird nämlich s so klein, daß man $\cos s = 1$ und $\sin s = s \sin 1''$ setzen kann; da man dann auch $\tan d$ mit $d \sin 1''$ vertauschen darf, so folgt aus (11)

$$(17) \quad s = d \left(\frac{\tan \varphi}{\sin d} - \frac{\tan \sigma}{\tan d} \right)$$

Unter der angegebenen Voraussetzung genügen also die Gleichungen (10), (15), (17) und (16), um die Uhrkorrektion zu finden.

Anstatt die Zeiten zu beobachten, wann zwei Sterne zu verschiedenen Seiten des Meridians kurz nacheinander dieselbe Zenitdistanz, bzw. Höhe haben, kann man auch die Zeiten ermitteln, zu denen ein und derselbe Stern vor und nach seinem Meridiandurchgang dieselbe Höhe erreicht; diese Methode, die Zeit durch korrespondierende Höhen zu bestimmen, ist aber umständlicher und auch weniger genau wie die vorige.

135. Zeitbestimmung mittels Durchgangsbeobachtungen im Vertikal des Polarsterns. In Fig. 2 sei P der Pol, Z das Zenit und ZV der Bogen eines Vertikalkreises. Dieser Kreis werde von dem Polarstern im Punkte S und von einem

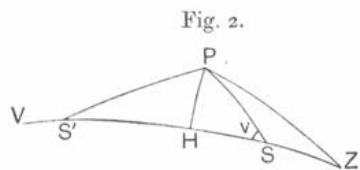


Fig. 2.

zweiten Stern im Punkte S' passiert; der Durchgang des Polarsterns durch den Punkt S finde zur Uhrzeit U , der Durchgang des zweiten Sterns durch den Punkt S' finde zur Uhrzeit U' statt. Die Uhr wird als so genau reguliert vorausgesetzt, daß ihr Gang innerhalb der Zeit $U' - U$ vernachlässigt werden darf. Setzt man $ZPS = t$ und $ZPS' = t'$, so ist t der Stundenwinkel des Polarsterns zur Uhrzeit U , und t' der Stundenwinkel des zweiten Sterns zur Uhrzeit U' ; man hat also, wenn α die Rektaszension des Polarsterns, α' die Rektaszension des zweiten Sterns und u die für die Zeiten U und U' gültige Uhrkorrektion bedeutet,

$$t = U + u - \alpha, \quad t' = U' + u - \alpha'$$

Somit wird

$$(18) \quad t' - t = U' - U - (\alpha' - \alpha)$$

Bezeichnet man nun die Deklination des Polarsterns mit δ , und die Deklination des zweiten Sterns mit δ' , so folgt aus dem Dreieck $PS'S$, wenn der Winkel bei S gleich v und $SS' = d$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin d \sin v &= \cos \delta' \sin(t' - t) \\ \sin d \cos v &= \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos(t' - t) \end{aligned}$$

Man ziehe jetzt den Bogen PH senkrecht zu $S'Z$; wenn dann in dem Dreieck HSP der Winkel bei P mit $90^\circ - x$ bezeichnet wird, so ergibt sich

$$\tan x = \tan v \sin \delta$$

oder mit Berücksichtigung der zwei vorhergehenden Gleichungen

$$(19) \quad \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} \delta \cotg \delta' \sin(t' - t)}{1 - \operatorname{tang} \delta \cotg \delta' \cos(t' - t)}$$

Die Werte von α , δ , α' , δ' können als bekannt angenommen werden; der Gleichung (18) zufolge ist somit auch $t' - t$ bekannt, und es läßt sich also mit Hilfe von (19) x berechnen.

Aus dem Dreieck HSP folgt noch

$$\sin x = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} HP$$

Das Dreieck HPZ gibt aber, wenn der Winkel bei P mit $90^\circ - m$ bezeichnet, und $PZ = 90^\circ - \varphi$ gesetzt wird, wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bedeutet,

$$\sin m = \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} HP$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$(20) \quad \sin m = \operatorname{tang} \varphi \cotg \delta \sin x$$

Da φ und δ als bekannt betrachtet werden, und x bereits gefunden wurde, so läßt sich aus (20) der Wert von m ableiten. Nun ist der Stundenwinkel t des Polarsterns zur Uhrzeit U gleich $ZPS = HPZ - HPS = x - m$ oder, in Zeit ausgedrückt, gleich $(x - m) : 15$; da aber, nach obigem, t auch gleich $U + u - \alpha$ ist, so wird die Uhrkorrektur

$$(21) \quad u = \alpha - U + \frac{x - m}{15}$$

136. Bestimmung der Polhöhe durch Messung der Zenitdistanz eines Sterns. Aus dem Dreieck zwischen dem Pol, dem Zenit und dem Ort eines Sterns folgt, wenn die Polhöhe mit φ , die Deklination des Sterns mit δ und sein Stundenwinkel mit t bezeichnet wird,

$$(22) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

Setzt man hierin

$$(23) \quad \begin{aligned} \sin \delta &= m \sin M \\ \cos \delta \cos t &= m \cos M, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\cos z = m \cos(M - \varphi)$$

oder, wenn für m sein aus der ersten der Gleichungen (23) folgender Wert substituiert wird,

$$(24) \quad \cos(M - \varphi) = \frac{\cos z \sin M}{\sin \delta}$$

Hat man nun die Zenitdistanz eines bekannten Sterns beobachtet, und kennt man auch die Sternzeit Θ der Beobachtung, so sind z , δ und (wenn α die Rektaszension des Sterns bedeutet) $t = \Theta - \alpha$ gegebene Größen; man kann also aus (23) den Wert von M , und dann mit Hilfe von (24) die Polhöhe finden.

Der Gleichung (5) zufolge hat man

$$d\varphi = \sec \alpha \, dx - \tan \alpha \cos \varphi \, dt,$$

wo α das Azimut des Sterns angibt. Ein Fehler in der beobachteten Zenitdistanz und in dem Wert von t hat also einen um so geringeren Einfluß auf φ , je näher der Stern dem Meridian ist. Wenn aber der Stern in der Nähe des Meridians beobachtet worden ist, und man einen approximativen Wert von φ kennt, so lassen sich die Formeln (23) und (24) durch andere, für die Rechnung bequemere ersetzen. Zunächst werde der Fall betrachtet, wo die Beobachtungen in der Nähe der oberen Kulmination stattgefunden haben. Man bringe dann die Gleichung (22) in die Form

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t$$

Je nachdem der Stern nördlich oder südlich vom Zenit kulminiert, ist seine Zenitdistanz zur Zeit der oberen Kulmination, absolut genommen, gleich $\pm(\delta - \varphi)$; bezeichnet man diese Zenitdistanz mit z_0 , so wird

$$(25) \quad \cos z = \cos z_0 - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(26) \quad \sin \frac{1}{2}(z - z_0) = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2}(z_0 + z)}$$

oder, wenn $z - z_0 = x_0$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $\frac{1}{2}(z_0 + z) = \frac{1}{2}[\pm(\delta - \varphi) + z]$ ist,

$$(27) \quad \sin \frac{1}{2} x_0 = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2}[\pm(\delta - \varphi) + z]},$$

wo man das obere oder untere Vorzeichen zu wählen hat, je nachdem die obere Kulmination nördlich oder südlich vom Zenit stattfindet. Hat man x_0 gefunden und durch die Verbindung von x_0 mit dem beobachteten z den Wert von $z_0 = z - x_0$ abgeleitet, so erhält man die Polhöhe aus der Gleichung

$$(28) \quad \varphi = \delta \mp z_0,$$

wobei die Vorzeichenregel dieselbe ist wie für (27).

Ist der Stern in der Nähe der unteren Kulmination beobachtet worden, so setze man $t = 180^\circ + \tau$; der Gleichung (22) läßt sich dann die Form geben

$$\cos z = \cos[180^\circ - (\varphi + \delta)] + 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} \tau$$

Da aber, wenn z_u die Zenitdistanz des Sterns in der unteren Kulmination bedeutet, $z_u = 180^\circ - (\varphi + \delta)$ ist, so kann man die letzte Gleichung ersetzen durch

$$(29) \quad \cos z = \cos z_u + 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} \tau$$

Hieraus folgt

$$(30) \quad \sin \frac{1}{2}(z_u - z) = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin \frac{1}{2}(z_u + z)}$$

oder, wenn $x_u - z = x_u$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß

$$\frac{1}{2}(x_u + z) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)$$

ist,

$$(31) \quad \sin \frac{1}{2}x_u = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2}z}{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich x_u bestimmen. Aus x_u und dem beobachteten z erhält man sodann $z_u = x_u + z$, endlich wird

$$(32) \quad \varphi = 180^\circ - (z_u + \delta)$$

Bei nicht zu großen Werten von t , bzw. τ^* , also auch von $z - z_0$, bzw. $x_u - z$ wendet man mit Vorteil eine Reihenentwicklung an. Setzt man nämlich $\sin \frac{1}{2}(z_0 + z) = \sin[z_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)]$, so gibt der *Taylorsche* Satz

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(z_0 + z)} = \frac{1}{\sin z_0} - \frac{1}{2}(z - z_0) \sin 1'' \frac{\cotg z_0}{\sin z_0} + \dots$$

Somit wird die Gleichung (26)

$$\sin \frac{1}{2}(z - z_0) = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z_0} \sin^2 \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(z - z_0) \sin 1'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z_0} \cotg z_0 \sin^2 \frac{1}{2}t + \dots$$

oder, wenn $\sin \frac{1}{2}(z - z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0) \sin 1''$ gesetzt wird,

$$z - z_0 = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z_0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}t}{\sin 1''} - \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z_0} \right)^2 \cotg z_0 \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2}t}{\sin 1''} + \dots$$

Setzt man hierin z_0 gleich $\delta - \varphi$ oder gleich $\varphi - \delta$, je nachdem die obere Kulmination nördlich oder südlich vom Zenit stattfindet, und führt die Abkürzungen ein

$$(33) \quad \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)} = A_0, \quad \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}t}{\sin 1''} = m_0, \quad \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2}t}{\sin 1''} = n_0,$$

so erhält man

$$(34) \quad \varphi = \delta \mp z + A_0 m_0 - A_0^2 n_0 \cotg(\delta - \varphi) \quad \begin{array}{l} \text{OK nördlich} \\ \text{, südlich} \end{array}$$

In derselben Weise ergibt sich aus (30), wenn

$$(35) \quad \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta + \varphi)} = A_u, \quad \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} = m_u, \quad \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} = n_u$$

gesetzt wird,

$$(36) \quad \varphi = 180^\circ - \delta - z - A_u m_u + A_u^2 n_u \cotg(\delta + \varphi) \quad UK$$

Die Werte von m_0 , n_0 , m_u , n_u kann man den *Albrechtschen* Tafeln entnehmen.

137. Bestimmung der Polhöhe aus zwei gleichen Höhen verschiedener Sterne. Es seien Θ_n und Θ_s die Sternzeiten, zu denen zwei Sterne, von denen der eine nördlich, der andere südlich vom Zenit sich befindet, dieselbe Zenitdistanz z erreichen. Sind α_n^* und δ_n , bzw. α_s und δ_s die Rektaszension und Deklination des

*) Die folgenden Formeln geben in mittleren geographischen Breiten den Wert von φ bis auf 0,01 genau, wenn bei der Anwendung auf den Polarstern t , bzw. τ die Grenzen $\pm 2^h$ nicht wesentlich überschreitet; für Sterne von der Deklination $2\varphi - 90^\circ$ sind die Grenzen beiläufig $\pm 20^m$.

nördlich, bzw. südlich vom Zenit gelegenen Sterns, so sind $t_n = \Theta_n - \alpha_n$ und $t_s = \Theta_s - \alpha_s$ die Stundenwinkel der Sterne zur Zeit der Beobachtung. Man hat nun die Gleichungen

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_n + \cos \varphi \cos \delta_n \cos t_n$$

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_s + \cos \varphi \cos \delta_s \cos t_s$$

In § 134 ist bereits gezeigt worden, wie man mit Hilfe solcher Gleichungen bei bekannter Polhöhe die Zeit ableitet; die dort gegebenen Gleichungen (9) bis (13), in denen nur die Indizes o und w mit n und s zu vertauschen sind, ermöglichen es aber auch, die Polhöhe zu bestimmen, wenn die Zeit bekannt ist.

138. Die Horrebow-Talcottische Methode. Ist z_n die Meridianzenitdistanz eines nördlich, und z_s die Meridianzenitdistanz eines südlich vom Zenit kulminierenden Sterns, so hat man

$$z_n = \delta_n - \varphi, \quad z_s = \varphi - \delta_s$$

Hieraus folgt

$$\varphi = \frac{1}{2}(z_s - z_n) + \frac{1}{2}(\delta_n + \delta_s)$$

Wenn nun die Meridianzenitdistanzen der beiden Sterne nahe gleich sind, so läßt sich die Differenz $z_s - z_n$ mikrometrisch sehr genau bestimmen; sind außerdem die Deklinationen der beiden Sterne gegeben, so ist jetzt auch φ bekannt. Auf diesem Prinzip beruht die nach *Horrebow* und *Talcott* benannte Methode der Polhöhenbestimmung.

139. Bestimmung der Polhöhe aus Durchgangsbeobachtungen im ersten Vertikal. Aus dem rechtwinkligen Dreieck zwischen dem Pol (P), dem Zenit (Z) und einem im ersten Vertikal befindlichen Stern (S) folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination und t den Stundenwinkel des Sterns bedeutet,

$$(37) \quad \tan \varphi = \frac{\tan \delta}{\cos t}$$

Sind nun U_o und U_w die beobachteten Durchgangszeiten des Sterns durch die Ost- und Westhälfte des ersten Vertikals, so hat man $t = \pm \frac{1}{2}(U_w - U_o)$, wo $U_w - U_o$ eventuell wegen des Ganges der Uhr zu verbessern ist. Da somit t bekannt ist, so kann man aus (37) die Polhöhe bestimmen, wenn man die Deklination des Sterns kennt.

Durch Anwendung der Differentialformel der sphärischen Trigonometrie (§ 13, (20))

$$(II) \quad \sin a \, dB = \sin C \, db - \cos a \sin B \, dc - \sin b \cos C \, dA$$

auf das Dreieck PZS erhält man, wenn die in (II) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten $z, 90^\circ - \delta, 90^\circ - \varphi$ des Dreieckes PZS identifiziert werden, und der Winkel bei S mit η bezeichnet wird,

$$d\varphi = \frac{\cos \delta \cos \eta}{\cos z} dt + \frac{\sin \eta \, d\delta}{\cos z}$$

oder, da

$$\cos \delta \cos \eta = \sin \varphi \sin z$$

ist,

$$d\varphi = \sin \varphi \tan z \, dt + \sin \eta \sec z \, d\delta$$

Ein Fehler in der beobachteten Durchgangszeit übt also einen um so geringeren Einfluß auf φ aus, je kleiner z ist, d. h. je näher die Deklination des Sterns gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes ist. Für $z = 0$ wird $\eta = 90^\circ$ und somit $d\varphi = d\delta$; ein Fehler der Deklination des Sterns geht also ganz in die Polhöhe über.

Gibt man der Gleichung (37) die Form

$$\cos t = \frac{\tan \delta}{\tan \varphi}$$

und bildet den Ausdruck für $1 - \cos t$, so folgt

$$(38) \quad \sin(\varphi - \delta) = 2 \sin^2 \frac{1}{2} t \sin \varphi \cos \delta$$

Diese Gleichung wendet man an Stelle von (37) an, wenn φ näherungsweise bekannt ist.
