

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel I. Integration von entwickelten Functionen einer Variabeln

Capitel I.

Integration von entwickelten Functionen einer Variablen.

§ 1.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

Für die unbestimmte Integration der einfachsten Functionen gelten die nachstehenden Fundamentalformeln:

$$1) \quad \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{Const.}, \quad \mu \geq -1.$$

$$2) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + \text{Const.}$$

$$3) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + \text{Const.}$$

$$4) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \text{Const.}$$

$$5) \quad \int e^x dx = e^x + \text{Const.}$$

$$6) \quad \int \cos x dx = \sin x + \text{Const.}$$

$$7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + \text{Const.}$$

$$8) \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + \text{Const.}$$

$$9) \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + \text{Const.}$$

Sind α, β, γ , etc. constante Grössen, u, v, w , etc. Functionen einer und derselben Variablen x , so geschieht die Integration des Aggregates $\alpha u + \beta v + \text{etc.}$ nach der Regel

$$10) \quad \int (\alpha u + \beta v + \gamma w + \dots) dx = \alpha \int u dx + \beta \int v dx + \gamma \int w dx + \dots$$

Im Fall die Anzahl der Summanden unendlich gross wird, bedarf es einer besonderen Untersuchung über die Gültigkeit dieser Formel.

Bei der Integration eines Productes uv kann häufig die sogenannte theilweise Integration angewendet werden, nämlich

$$11) \quad \int uv \, dx = u \int v \, dx - \int du \int v \, dx;$$

diese Formel empfiehlt sich in allen den Fällen, wo das Integral von $v \, dx$ leicht zu finden, und gleichzeitig du ein nicht zu verwickelter Ausdruck ist.

Handelt es sich um die Integration einer Function von einer Function d. h. um ein Integral von der Form

$$\int f[\varphi(x)] \, dx,$$

so leistet nicht selten die Substitution einer neuen Variablen gute Dienste; man setzt nämlich

$$\varphi(x) = y,$$

löst diese Gleichung nach x auf, wodurch ein Resultat von der Form

$$x = \psi(y)$$

entsteht, und betrachtet nun y als neue unabhängige Variable; es ist dann

$$\int f[\varphi(x)] \, dx = \int f[y] \, \psi'(y) \, dy.$$

Nach Ausführung der auf y bezüglichen Integration hat man für y wieder $\varphi(x)$ einzusetzen.

§ 2.

Integration rationaler Functionen.

1. Mittelst der Substitution $a + bx = y$ erhält man

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \, l(a + bx),$$

wobei der Kürze wegen die Integrationsconstante weggelassen ist, was im Folgenden immer geschehen wird.

2. Die nämliche Substitution giebt

$$\int (a + bx)^\mu \, dx = \frac{(a + bx)^{\mu+1}}{(\mu + 1) b}, \quad \mu \geq 1.$$

3. Auch das allgemeinere Integral

$$\int \frac{x^m \, dx}{(a + bx)^\mu}$$

lässt sich mittelst der genannten Substitution finden, sobald m eine ganze positive Zahl ist. Man erhält zunächst

$$\frac{1}{b^{m+1}} \int \frac{(y-a)^m}{y^n} dy,$$

man entwickelt nun $(y-a)^m$ nach dem binomischen Satze und integriert die einzelnen Summanden.

Hiernach ergeben sich z. B. folgende Formeln, worin immer

$$y = a + bx$$

zu nehmen ist:

$$\int \frac{x}{y} dx = \frac{1}{b^2} (y - aly),$$

$$\int \frac{x^2}{y} dx = \frac{1}{b^3} \left(\frac{1}{2} y^2 - 2ay + a^2ly \right),$$

$$\int \frac{x^3}{y} dx = \frac{1}{b^4} \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{3}{2} ay^2 + 3ay - a^2ly \right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{x}{y^2} dx = \frac{1}{b^2} \left(ly + \frac{a}{y} \right),$$

$$\int \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{1}{b^3} \left(y - 2aly - \frac{a^2}{y} \right),$$

$$\int \frac{x^3}{y^2} dx = \frac{1}{b^4} \left(\frac{1}{2} y^2 - 3ay + 3a^2ly + \frac{a^2}{y} \right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{x}{y^3} dx = \frac{1}{b^2} \left(-\frac{1}{y} + \frac{a}{2y^2} \right),$$

$$\int \frac{x^2}{y^3} dx = \frac{1}{b^3} \left(ly + \frac{2a}{y} - \frac{a^2}{2y^2} \right),$$

$$\int \frac{x^3}{y^3} dx = \frac{1}{b^4} \left(y - 3aly - \frac{3a^2}{y} + \frac{a^3}{2y^2} \right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{x}{y^4} dx = \frac{1}{b^2} \left(-\frac{1}{2y^2} + \frac{a}{3y^3} \right);$$

$$\int \frac{x^2}{y^4} dx = \frac{1}{b^3} \left(-\frac{1}{y} + \frac{a}{y^2} - \frac{a^2}{3y^3} \right);$$

$$\int \frac{x^3}{y^4} dx = \frac{1}{b^4} \left(ly + \frac{3a}{y} - \frac{3a^2}{2y^2} + \frac{a^3}{3y^3} \right).$$

u. s. w.

4. Unter der Voraussetzung ganzer positiver m und n kann das Integral

$$\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$$

mittels der Substitution

$$\frac{a}{x} + b = z$$

berechnet werden. Dasselbe geht zunächst über in

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n} dz$$

und hier entwickelt man $(z-b)^{m+n-2}$ nach dem binomischen Satze und integriert die einzelnen Summanden. Wird zu blosser Abkürzung

$$y = a + bx$$

gesetzt, so ergeben sich nachstehende Formeln:

$$\int \frac{dx}{xy} = -\frac{1}{a} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 y} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3 y} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{dx}{xy^2} = \frac{1}{ay} - \frac{1}{a^2} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 y^2} = -\frac{b}{a^2 y} - \frac{1}{a^2 x} + \frac{2b}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3 y^2} = \frac{b^2}{a^3 y} - \frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{2b}{a^3 x} - \frac{3b^2}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{dx}{xy^3} = \frac{1}{2ay^2} + \frac{1}{a^2y} - \frac{1}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2y^3} = -\frac{b}{2a^2y^2} - \frac{2b}{a^3y} - \frac{1}{a^3x} + \frac{3b}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3y^3} = \frac{b^2}{2a^3y^2} + \frac{3b^2}{a^4y} - \frac{1}{2a^3x^2} + \frac{3b}{a^4x} - \frac{6b^2}{a^5} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

u. s. w.

$$\int \frac{dx}{xy^4} = \frac{1}{3ay^3} + \frac{1}{2a^2y^2} + \frac{1}{a^3y} - \frac{1}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2y^4} = -\frac{b}{3a^2y^3} - \frac{b}{a^3y^2} - \frac{3b}{a^4y} - \frac{1}{a^4x} + \frac{4b}{a^5} l\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\int \frac{dx}{x^3y^4} = \frac{b^2}{3a^3y^3} + \frac{3b^2}{2a^4y^2} + \frac{6b^2}{a^5y} - \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{4b}{a^5x} - \frac{10b^2}{a^6} l\left(\frac{y}{x}\right).$$

u. s. w.

5. Das Integral

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$$

lässt sich mittelst der Substitution $x = \frac{\alpha}{\beta} \xi$ entwickeln, nämlich

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \int \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \arctan \xi = \frac{1}{\alpha\beta} \arctan \frac{\beta x}{\alpha}.$$

Für das analoge Integral

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

kann man die Substitution

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x} = \eta \quad \text{oder} \quad x = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\eta - 1}{\eta + 1}$$

benutzen und erhält

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \int \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\alpha\beta} l\eta = \frac{1}{2\alpha\beta} l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right).$$

Demnach gelten folgende zwei Formeln

$$\int \frac{dx}{a + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{c}{a}} \right), \quad \text{für } a > 0 \text{ und } c > 0,$$

$$\int \frac{dx}{a - cx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ac}} \ln \left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-c}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-c}} \right), \quad \text{für } a > 0 \text{ und } c < 0.$$

6. Aus der Differentialformel

$$d \left\{ \frac{x}{(a + cx^2)^n} \right\} = \left\{ \frac{2na}{(a + cx^2)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(a + cx^2)^n} \right\} dx$$

erhält man durch Integration die Recursionsformel

$$\int \frac{dx}{(a + cx^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na} \cdot \frac{x}{(a + cx^2)^n} + \frac{2n-1}{2na} \int \frac{dx}{(a + cx^2)^n};$$

diese giebt der Reihe nach für $n = 1, 2, 3$ etc., wenn die Abkürzung

$$z = a + cx^2$$

benutzt wird,

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{2az} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{x}{4az^2} + \frac{3x}{8a^2z} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{x}{6az^3} + \frac{5x}{24a^2z^2} + \frac{5x}{16a^3z} + \frac{5}{16a^3} \int \frac{dx}{z}.$$

u. s. w.

7. Wenn es unter der Voraussetzung ganzer positiver m und n auf die Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{x^m dx}{(a + cx^2)^n}$$

ankommt, so sind die Fälle zu unterscheiden, ob m eine ungerade Zahl ist $= 2k + 1$ oder eine gerade Zahl $= 2k$. Im ersten Falle setze man

$$x^2 = t \quad \text{mithin} \quad x dx = \frac{1}{2} dt$$

und es wird

$$\int \frac{x^{2k+1} dx}{(a + cx^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{t^k dt}{(a + ct)^n},$$

wo sich das Integral rechter Hand nach No. 3. berechnen lässt. So ist z. B.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{(a + cx^2)^3} &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(a + ct)^3} \\ &= \frac{1}{2c^3} \left\{ l(a + ct) + \frac{2a}{a + ct} - \frac{a^2}{2(a + ct)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2c^3} \left\{ l(a + cx^2) + \frac{2a}{a + cx^2} - \frac{a^2}{2(a + cx^2)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Wenn zweitens m eine gerade Zahl ist, so bedarf man einer Reductionsformel, welche aus der Gleichung

$$d \left\{ \frac{x^{m-1}}{(a + cx^2)^{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{(m-1)ax^{m-2}}{(a + cx^2)^n} - \frac{(2n-m-1)cx^m}{(a + cx^2)^n} \right\} dx$$

folgt und lautet

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{(a + cx^2)^n} &= - \frac{1}{(2n-m-1)c} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a + cx^2)^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(m-1)a}{(2n-m-1)c} \int \frac{x^{m-2} dx}{(a + cx^2)^n}. \end{aligned}$$

Für $n = 1$, $m = 2, 4, 6$ etc. und bei Gebrauch der Abkürzung

$$z = a + cx^2$$

erhält man mittelst dieser Formel

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{z} dx &= \frac{x}{c} - \frac{a}{c} \int \frac{dx}{z}, \\ \int \frac{x^4}{z} dx &= \frac{x^3}{3c} - \frac{ax}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \int \frac{dx}{z}, \\ \int \frac{x^6}{z} dx &= \frac{x^5}{5c} - \frac{ax^3}{3c^2} + \frac{a^2x}{c^3} - \frac{a^3}{c^3} \int \frac{dx}{z}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Für $n = 2$, $m = 2, 4, 6$ etc. und unter Rücksicht auf die in No. 6. ausgeführte Reduction des Integrals

$$\int \frac{dx}{z^2}$$

ergeben sich die Formeln

$$\int \frac{x^2}{z^2} dx = -\frac{x}{2cz} + \frac{1}{2c} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4}{z^2} dx = \frac{x}{c^2} + \frac{ax}{2c^2z} - \frac{3a}{2c^2} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6}{z^2} dx = \frac{x^3}{3c^2} - \frac{2ax}{c^3} - \frac{a^2x}{2c^3z} + \frac{5a^2}{2c^3} \int \frac{dx}{z};$$

u. s. w.

ferner für $n = 3, m = 2, 4, 6$ etc.

$$\int \frac{x^2}{z^3} dx = -\frac{x}{4cz^2} + \frac{x}{8acz} + \frac{1}{8ac} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4}{z^3} dx = \frac{ax}{4c^2z^2} - \frac{5x}{8c^2z} + \frac{3}{8c^2} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6}{z^3} dx = -\frac{a^2x}{4c^3z^2} + \frac{9ax}{8c^3z} + \frac{x}{c^3} - \frac{15a}{8c^3} \int \frac{dx}{z}.$$

u. s. w.

8. Mittelst der Substitution $\frac{1}{2}b + cx = u$ findet man

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = 4 \int \frac{du}{4ac - b^2 + 4u^2}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ell \left(\frac{b + 2cx - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2cx + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right), \text{ wenn } b^2 - 4ac > 0, \\ &= -\frac{2}{b + 2cx}, \text{ wenn } b^2 - 4ac = 0, \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{b + 2cx}{\sqrt{4ac - b^2}}, \text{ wenn } b^2 - 4ac < 0. \end{aligned}$$

9. Aus der Differentialformel

$$dl(a + bx + cx^2) = b \frac{dx}{a + bx + cx^2} + 2c \frac{x dx}{a + bx + cx^2}$$

erhält man durch Integration, wenn zur Abkürzung

$$T = a + bx + cx^2$$

gesetzt wird,

$$\int \frac{x}{T} dx = \frac{1}{2c} lT - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{T}.$$

10. Es sei m eine ganze positive Zahl > 1 ; die identische Gleichung

$$\int \frac{(a + bx + cx^2) x^{m-2}}{T} dx = \int x^{m-2} dx = \frac{x^{m-1}}{m-1}$$

liefert die Reductionsformel

$$\int \frac{x^m}{T} dx = \frac{x^{m-1}}{(m-1)c} - \frac{b}{c} \int \frac{x^{m-1}}{T} dx - \frac{a}{c} \int \frac{x^{m-2}}{T} dx;$$

aus dieser folgt für $m = 2, 3, 4$ etc. und unter Rücksicht auf die in No. 9. entwickelte Formel:

$$\int \frac{x^2}{T} dx = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2} lT + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x^3}{T} dx = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2 - ac}{2c^3} lT + \frac{b(3ac - b^2)}{2c^3} \int \frac{dx}{T}.$$

u. s. w.

11. Setzt man zur Abkürzung

$$\lambda = 4ac - b^2,$$

so erhält man aus der Differentialformel

$$d\left(\frac{b + 2cx}{T^n}\right) = n\lambda \frac{dx}{T^{n+1}} - 2(2n-1)c \frac{dx}{T^n}$$

die Reductionsformel

$$\int \frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b + 2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(4n-2)c}{n\lambda} \int \frac{dx}{T^n}.$$

Diese giebt der Reihe nach

$$\int \frac{dx}{T^2} = \frac{b + 2cx}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda} \int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{dx}{T^3} = \frac{b + 2cx}{\lambda} \left(\frac{1}{2T^2} + \frac{3c}{\lambda T} \right) + \frac{6c^2}{\lambda^2} \int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{dx}{T^4} = \frac{b + 2cx}{\lambda} \left(\frac{1}{3T^3} + \frac{5c}{3\lambda T^2} + \frac{10c^2}{\lambda^2 T} \right) + \frac{20c^3}{\lambda^3} \int \frac{dx}{T}$$

u. s. w.

12. Aus der Differentialformel

$$d \left(\frac{x^{m-1}}{T^{n-1}} \right) = (m-1) a \frac{x^{m-2}}{T^n} dx - (n-m) b \frac{x^{m-1}}{T^n} dx \\ - (2n-m-1) c \frac{x^m}{T^n} dx$$

ergiebt sich die Reductionsformel

$$\int \frac{x^m}{T^n} dx = - \frac{x^{m-1}}{(2n-m-1) c T^{n-1}} \\ - \frac{(n-m) b}{(2n-m-1) c} \int \frac{x^{m-1}}{T^n} dx + \frac{(m-1) a}{(2n-m-1) c} \int \frac{x^{m-2}}{T^n} dx.$$

In dem speciellen Falle $m = 2n - 1$ wird diese Formel unbrauchbar; man benutzt dann die identische Gleichung

$$\frac{x^{2n-1}}{T^n} = \frac{x^{2n-3} (T - a - bx)}{c T^n},$$

und leitet hieraus folgende Recursionsformel ab:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{T^n} dx = \frac{1}{c} \int \frac{x^{2n-3}}{T^{n-1}} dx \\ - \frac{a}{c} \int \frac{x^{2n-3}}{T^n} dx - \frac{b}{c} \int \frac{x^{2n-2}}{T^n} dx.$$

Nach diesen Bemerkungen erhält man für $n = 2, m = 1, 2, 3$ etc. mit Rücksicht auf No. 11.

$$\int \frac{x}{T^2} dx = - \frac{2a + bx}{\lambda T} - \frac{b}{\lambda} \int \frac{dx}{T}, \\ \int \frac{x^2}{T^2} dx = \frac{ab + (b^2 - 2ac) x}{c \lambda T} + \frac{2a}{\lambda} \int \frac{dx}{T}, \\ \int \frac{x^3}{T^2} dx = \frac{1}{2c^2} \lambda T + \frac{a(2ac - b^2) + b(3ac - b^2) x}{c^2 \lambda T} \\ - \frac{b(6ac - b^2)}{2c^2 \lambda} \int \frac{dx}{T};$$

für $n = 3, m = 1, 2$ etc. wird

$$\int \frac{x}{T^3} dx = - \frac{2a + bx}{2\lambda T^2} - \frac{3b(b + 2cx)}{2\lambda^2 T} - \frac{3bc}{\lambda^2} \int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x^2}{T^3} dx = \frac{ab + (b^2 - 2ac)x}{2c\lambda T^2} + \frac{(2ac + b^2)(b + 2cx)}{2c\lambda^2 T} \\ + \frac{2ac + b^2}{\lambda^2} \int \frac{dx}{T},$$

u. s. w.

13. Aus der identischen Gleichung

$$\int \frac{a + bx + cx^2}{xT} dx = lx$$

erhält man durch Integration der einzelnen Theile und Benutzung der Formel in No. 9.

$$\int \frac{dx}{xT} = \frac{1}{2a} l\left(\frac{x^2}{T}\right) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{T}.$$

14. Bezeichnet n eine ganze positive Zahl > 1 , so ist identisch

$$\int \frac{a + bx + cx^2}{xT^n} dx = \int \frac{dx}{xT^{n-1}};$$

die Integration der einzelnen Theile giebt, wenn zugleich die aus No. 12. bekannte Formel

$$\int \frac{x}{T^n} dx = -\frac{1}{(2n-2)cT^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{T^n}$$

angewendet wird,

$$\int \frac{dx}{xT^n} = \frac{1}{(2n-2)aT^{n-1}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{T^n} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{xT^{n-1}}.$$

Unter Rücksicht auf die Formeln in No. 11. und No. 13. findet man mittelst dieser Reductionsformel

$$\int \frac{dx}{xT^2} = \frac{1}{2a^2} l\left(\frac{x^2}{T}\right) + \frac{4ac - 2b^2 - 2bcx}{2a\lambda T} \\ - \frac{b(6ac - b^2)}{2a^2\lambda} \int \frac{dx}{T},$$

u. s. w.

für $n = 3, 4$ etc.

15. Die Differentialformel

$$d\left(-\frac{1}{x^{m-1} T^{n-1}}\right) = (m-1) a \frac{dx}{x^m T^n} + (m+n-2) b \frac{dx}{x^{m-1} T^n} \\ + (m+2n-3) c \frac{dx}{x^{m-2} T^n}$$

liefert durch Integration die Reductionsformel

$$\int \frac{dx}{x^m T^n} = -\frac{1}{(m-1) a x^{m-1} T^{n-1}} \\ - \frac{(m+n-2) b}{(m-1) a} \int \frac{dx}{x^{m-1} T^n} - \frac{(m+2n-3) c}{(m-1) a} \int \frac{dx}{x^{m-2} T^n}$$

wobei $m > 1$ sein muss.

Für $n = 1$, $m = 2, 3$ etc. folgen hieraus die Integralwerthe

$$\int \frac{dx}{x^2 T} = \frac{b}{2a^2} l\left(\frac{T}{x^2}\right) - \frac{1}{ax} + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{T}, \\ \int \frac{dx}{x^3 T} = \frac{ac - b^2}{2a^3} l\left(\frac{T}{x^2}\right) + \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{2ax^2} + \frac{b(3ac - b^2)}{2a^3} \int \frac{dx}{T},$$

u. s. w.

für $n = 2$, $m = 2, 3$ etc.

$$\int \frac{dx}{x^2 T^2} = \frac{b}{2a^3} l\left(\frac{T}{x^2}\right) - \frac{1}{a^2 x} + \frac{b(b^2 - 3ac) + c(b^2 - 2ac)x}{a^2 \lambda T} \\ - \frac{b^4 - 6ab^2c + 6a^2c^2}{a^3 \lambda} \int \frac{dx}{T}$$

u. s. w.

§ 3.

Fortsetzung. Integration durch Zerlegung in Partialbrüche.

Wenn $\psi(x)$ und $F(x)$ ganze Functionen bedeuten, deren erste von höherem Grade als die zweite ist, so lässt sich die in dem Quotienten $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ angedeutete Division soweit ausführen, dass die vorliegende unecht gebrochene Function in eine ganze Function $\varphi(x)$ und in eine echt gebrochene Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ zerfällt, dass also eine Gleichung von der Form

kann man zwar die gleiche Methode benutzen, gelangt aber mittelst der Substitution $x^3 = y$, $x^2 dx = \frac{1}{3} dy$ kürzer zum Ziele, nämlich

$$\int \frac{x^2}{a + bx^3} dx = \frac{l(a + bx^3)}{3b}.$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \int \frac{1}{x(a + bx^3)} dx &= \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{bx^2}{a + bx^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left\{ lx - \frac{l(a + bx^3)}{3} \right\} = \frac{1}{3a} l \left(\frac{x^3}{a + bx^3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \int \frac{1}{x^2(a + bx^3)} dx &= \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{bx}{a + bx^3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{x}{a + bx^3} dx. \end{aligned}$$

$$7. \quad \int \frac{1}{x^3(a + bx^3)} dx = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a} \int \frac{1}{a + bx^3} dx.$$

$$8. \quad \int \frac{1}{x^4(a + bx^3)} dx = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{3a^2} l \left(\frac{a + bx^3}{x^3} \right).$$

9. Zur Entwicklung der Integrale

$$\int \frac{dx}{(a + bx^3)^2}, \int \frac{dx}{(a + bx^3)^3},$$

u. s. w.

lässt sich die Zerlegung in Partialbrüche gleichfalls benutzen, bequemer ist indessen die Anwendung einer Reductionsformel, welche man sich durch Integration der Gleichung

$$d \left\{ \frac{x}{(a + bx^3)^n} \right\} = -\frac{3n-1}{(a + bx^3)^n} dx + \frac{3na}{(a + bx^3)^{n+1}} dx$$

verschafft; die Resultate sind

$$\int \frac{dx}{(a + bx^3)^2} = \frac{x}{3a(a + bx^3)} + \frac{2}{3a} \int \frac{dx}{a + bx^3},$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx^3)^3} = \frac{x(8a + 5bx^3)}{18a^2(a + bx^3)^2} + \frac{5}{9a^2} \int \frac{dx}{a + bx^3},$$

u. s. w.

10. Durch Differentiation des Ausdrucks

$$\frac{x^{m+1}}{(a + bx^3)^n}$$

gelangt man zu folgender Reductionsformel

$$\int \frac{x^m dx}{(a + bx^3)^{n+1}} = \frac{x^{m+1}}{3na(a + bx^3)^n} - \frac{m - 3n + 1}{3na} \int \frac{x^m dx}{(a + bx^3)^n},$$

welche die nachstehenden Werthe liefert

$$\int \frac{x dx}{(a + bx^3)^2} = \frac{x^2}{3a(a + bx^3)} + \frac{1}{3a} \int \frac{x dx}{a + bx^3},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a + bx^3)^2} = \frac{x^3}{3a(a + bx^3)},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(a + bx^3)^2} = -\frac{x}{3b(a + bx^3)} + \frac{1}{3b} \int \frac{dx}{a + bx^3},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(a + bx^3)^2} = -\frac{x^2}{3b(a + bx^3)} + \frac{2}{3b} \int \frac{x dx}{a + bx^3},$$

u. s. w.

$$\int \frac{x dx}{(a + bx^3)^3} = \frac{x^2(7a + 4bx^3)}{18a^2(a + bx^3)^2} + \frac{2}{9a^2} \int \frac{x dx}{a + bx^3},$$

u. s. w.

$$\int \frac{dx}{x(a + bx^3)^2} = \frac{1}{3a^2} \left\{ \frac{a}{a + bx^3} + l \left(\frac{x^3}{a + bx^3} \right) \right\},$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a + bx^3)^2} = -\frac{3a + 4bx^3}{3a^2x(a + bx^3)} - \frac{4b}{3a^2} \int \frac{x dx}{a + bx^3},$$

u. s. w.

11. Um den Werth des Integrales

$$\int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4}$$

zu finden, unterscheide man die Fälle, ob $b^2 - 4ac$ positiv, Null oder negativ ist. Für den ersten Fall sei zur Abkürzung

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = h;$$

man hat dann

$$\frac{1}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{4c}{(b - h + 2cx^2)(b + h + 2cx^2)}$$

und durch Zerlegung in zwei Partialbrüche

$$\int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{2c}{h} \int \frac{dx}{b - h + 2cx^2} - \frac{2c}{h} \int \frac{dx}{b + h - 2cx^2},$$

wo die einzelnen Integrale leicht zu finden sind.

Wenn zweitens $b^2 - 4ac = 0$ ist, so ergibt sich

$$\int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{2c}{b} \left\{ \frac{x}{b + 2cx^2} + \int \frac{dx}{b + 2cx^2} \right\},$$

Im dritten Falle $4ac > b^2$ müssen a und c gleiche Vorzeichen haben, die man immer als positiv voraussetzen kann, weil sich negative a und c dadurch positiv machen lassen, dass man Zähler und Nenner der zu integrierenden Function mit -1 multiplicirt. Es ist nun, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{2\sqrt{ac} - b} = k$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bx^2 + cx^4} &= \frac{1}{(\sqrt{a} - kx + \sqrt{c} \cdot x^2)(\sqrt{a} + kx + \sqrt{c} \cdot x^2)} \\ &= \frac{1}{2k\sqrt{a}} \left\{ \frac{k - \sqrt{c} \cdot x}{\sqrt{a} - kx + \sqrt{c} \cdot x^2} + \frac{k + \sqrt{c} \cdot x}{\sqrt{a} + kx + \sqrt{c} \cdot x^2} \right\} \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} &= \frac{1}{4k\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a} + kx + \sqrt{c} \cdot x^2}{\sqrt{a} - kx + \sqrt{c} \cdot x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{a}(2b + k^2)} \left\{ \arctan \frac{2\sqrt{c} \cdot x - k}{\sqrt{2b + k^2}} + \arctan \frac{2\sqrt{c} \cdot x + k}{\sqrt{2b + k^2}} \right\} \end{aligned}$$

12. Nach demselben Verfahren erhält man für den Fall, dass $b^2 - 4ac$ positiv ist,

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2 dx}{a + bx^2 + cx^4} \\ &= \frac{h - b}{h} \int \frac{dx}{b - h + 2cx^2} + \frac{h + b}{h} \int \frac{dx}{b + h + 2cx^2}, \end{aligned}$$

ferner für $b^2 - 4ac = 0$

$$\int \frac{x^2 dx}{a + bx^2 + cx^4} = -\frac{x}{b + 2cx^2} + \int \frac{dx}{b + 2cx^2},$$

endlich für ein negatives $b^2 - 4ac$

$$\int \frac{x^2 dx}{a + bx^2 + cx^4} = -\frac{1}{4k\sqrt{c}} \ln \left(\frac{\sqrt{a} + kx + \sqrt{c} \cdot x^2}{\sqrt{a} - kx + \sqrt{c} \cdot x^2} \right) \\ + \frac{1}{2\sqrt{c}(2b + k^2)} \left\{ \arctan \frac{2\sqrt{c} \cdot x - k}{\sqrt{2b + k^2}} + \arctan \frac{2\sqrt{c} \cdot x + k}{\sqrt{2b + k^2}} \right\}.$$

13. Die noch hierher gehörenden Integrale

$$\int \frac{x dx}{a + bx^2 + cx^4} \text{ und } \int \frac{x^3 dx}{a + bx^2 + cx^4}$$

können mittelst der Substitution $x^2 = \xi$ entwickelt werden.

14. Setzt man zur Abkürzung

$$4ac - b^2 = \lambda, \quad a + bx^2 + cx^4 = U,$$

so findet man

$$\int \frac{dx}{U^2} = \frac{(2ac - b^2)x - bcx^3}{2a\lambda U} + \frac{6ac - b^2}{2a\lambda} \int \frac{dx}{U} - \frac{bc}{2a\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U}, \\ \int \frac{x^2 dx}{U^2} = \frac{bx + 2cx^3}{2\lambda U} - \frac{b}{2\lambda} \int \frac{dx}{U} + \frac{c}{\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U}$$

und allgemeiner

$$\int \frac{dx}{U^{n+1}} = \frac{(2ac - b^2)x - bcx^3}{2na\lambda U^n} + \frac{(8n-2)ac - (2n-1)b^2}{2na\lambda} \int \frac{dx}{U^n} \\ - \frac{(4n-3)bc}{2na\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U^n},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{U^{n+1}} = \frac{bx + 2cx^3}{2n\lambda U^n} - \frac{b}{2n\lambda} \int \frac{dx}{U^n} + \frac{(4n-3)c}{n\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U^n}$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 U} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{U} - \frac{c}{a} \int \frac{x^2 dx}{U}.$$

$$16. \int \frac{dx}{x^4 U} = \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{3ax^3} + \frac{b^2 - ac}{a^2} \int \frac{dx}{U} + \frac{bc}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{U}.$$

Bestimmt man die Coefficienten P , Q , R aus den drei Gleichungen

$$2acP + b\alpha Q + \alpha R = 2Ac,$$

$$2bcP + (b\beta + 2c\alpha)Q + \beta R = 2Bc,$$

$$cP + \beta Q = C,$$

so erhält man folgende Integralformel

$$\int \frac{A + Bx + Cx^2}{(\alpha + \beta x)(a + bx + cx^2)} dx$$

$$= \frac{P}{\beta} l(\alpha + \beta x) + \frac{Q}{2c} l(a + bx + cx^2) + \frac{R}{2c} \int \frac{dx}{a + bx + cx^2}.$$

Specielle einfachere Formeln entstehen hieraus für $A = 1$, $B = C = 0$, für $B = 1$, $C = A = 0$, und für $C = 1$, $A = B = 0$.

§ 4.

Integration irrationaler Functionen.

1. Aus der schon früher bewiesenen allgemeinen Formel

$$\int (a + bx)^\mu dx = \frac{(a + bx)^{\mu+1}}{(\mu + 1)b}, \quad \mu > -1$$

folgt für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2\sqrt{a + bx}}{b}.$$

Durch Differentiation des Ausdrucks $2x^m \sqrt{a + bx}$ gelangt man ferner zu der Reductionsformel

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2x^m \sqrt{a + bx}}{(2m + 1)b} - \frac{2ma}{(2m + 1)b} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{a + bx}},$$

welche der Reihe nach liefert

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx}} = -\frac{2(2a - bx)}{3b^2} \sqrt{a + bx},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx}} = +\frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a + bx},$$

u. s. w.

Dieselben Resultate kann man auch mittelst der Substitution $\sqrt{a + bx} = y$ finden.

2. Durch die so eben erwähnte Substitution erhält man

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left(\frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}}\right), \quad \text{für } a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}}, \text{ für } a < 0.$$

Aus der Reductionsformel in No. 1. wird für $m = -n + 1$

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{(n-1)ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{(2n-2)a} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a+bx}}$$

und hieraus folgen der Reihe nach die Gleichungen

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a+bx}} = -\frac{2a-3bx}{4a^2x^2} \sqrt{a+bx} + \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

u. s. w.

3. Dieselben Methoden führen zu folgenden Formeln:

$$\int \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^3}}{3b},$$

$$\int x \sqrt{a+bx} \cdot dx = -\frac{2(2a-3bx) \sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2},$$

$$\int x^2 \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2) \sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3},$$

u. s. w.

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2 \sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^3} dx = -\frac{(2a+bx) \sqrt{a+bx}}{4ax^2} - \frac{b^2}{8a} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

u. s. w.

4. Mittelst ähnlicher Methoden gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = -\frac{2}{b \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = 2 \frac{2a+bx}{b^2 \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = -2 \frac{8a^2 + 4abx - b^2x^2}{3b^3 \sqrt{a+bx}},$$

u. s. w.

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{2}{a \sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a+bx)^3}} = -\frac{3b+ax}{a^2 x \sqrt{a+bx}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx}},$$

u. s. w.

5. Zur Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

dient die identische Gleichung

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4c} + c \left(x + \frac{b}{2c}\right)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{k+cu^2}}, \end{aligned}$$

worin die Bedeutungen von k und u unmittelbar einleuchten. Man setze nun

$$\frac{u}{\sqrt{k+cu^2}} = v, \text{ mithin } u = \frac{\sqrt{k} \cdot v}{\sqrt{1-cv^2}},$$

$$\sqrt{k+cu^2} = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-cv^2}}, \text{ mithin } du = \frac{\sqrt{k} \cdot dv}{\sqrt{(1-cv^2)^3}};$$

es wird dann

$$\int \frac{du}{\sqrt{k+cu^2}} = \int \frac{dv}{1-cv^2}$$

und hier lässt sich die letzte Integration ausführen, wenn man positive und negative c unterscheidet. Diess giebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \left\{ \frac{b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}}{b+2cx-2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}} \right\}, \text{ für } c > 0,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l\{b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\}, \text{ für } c > 0;$$

ferner ist

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan \frac{-(b+2cx)}{2\sqrt{-c}(a+bx+cx^2)}, & \text{für } c < 0, \\ &= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-(b+2cx)}{\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{für } c < 0. \end{aligned}$$

6. Bezeichnet man das Trinom $a+bx+cx^2$ zur Abkürzung mit T und benutzt die in § 2., No. 12. erwähnte Reductionsformel für $n = \frac{1}{2}$; $m = 1, 2, 3$ etc., so erhält man folgende Integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{T}} &= \frac{\sqrt{T}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}, \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{T}} &= -\frac{3b-2cx}{4c^2} \sqrt{T} + \frac{3b^2-4ac}{8c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}, \\ \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{T}} &= \frac{15b^2-16ac-10bcx+8c^2x^2}{24c^3} \sqrt{T} \\ &\quad - \frac{b(5b^2-12ac)}{16c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{T}} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

7. Wendet man diese Formeln an um in der identischen Gleichung

$$\int \sqrt{T} \cdot dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{T}} + b \int \frac{x dx}{\sqrt{T}} + c \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{T}}$$

die rechts stehenden Integrale zu reduciren, so findet man

$$\int \sqrt{T} \cdot dx = \frac{b+2cx}{4c} \sqrt{T} + \frac{4ac-b^2}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$

und nachher giebt die Reductionsformel in § 2., No. 12. für $n = -\frac{1}{2}$, $m = 1, 2$ etc.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{T} \cdot dx &= \frac{8ac-3b^2+2bcx+8c^2x^2}{24c^2} \sqrt{T} - \frac{b(4ac-b^2)}{16c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}, \\ \int x^2 \sqrt{T} \cdot dx &= \frac{b(15b^2-52ac)+2(12ac-5b^2)cx+8bc^2x^2+48c^3x^3}{192c^3} \sqrt{T} \\ &\quad - \frac{(4ac-b^2)(4ac-5b^2)}{128c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{T}} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

8. Mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{mithin} \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{a + bx + cx^2}} &= - \int \frac{dy}{\sqrt{c + by + ay^2}} \\ \int \frac{dx}{x \sqrt{a + bx + cx^2}} &= - \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{2a + bx + 2\sqrt{a(a + bx + cx^2)}}{x} \right\}, \quad \text{für } a > 0, \\ &= - \frac{2\sqrt{a + bx + cx^2}}{bx}, \quad \text{für } a = 0, \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a + bx}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \text{für } a < 0. \end{aligned}$$

9. Die in § 2. unter No. 12. entwickelte Reductionsformel liefert für $n = \frac{1}{2}$, $m = -1$, -2 etc.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{T}} &= - \frac{\sqrt{T}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}, \\ \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{T}} &= - \frac{2a - 3bx}{4a^2 x^2} \sqrt{T} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

10. Durch Benutzung der identischen Gleichung

$$\sqrt{T} = \frac{a + bx + cx^2}{\sqrt{T}}$$

gelangt man zu den Formeln

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{T}}{x} dx &= \sqrt{T} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{T}} + a \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}, \\ \int \frac{\sqrt{T}}{x^2} dx &= - \frac{\sqrt{T}}{x} + c \int \frac{dx}{\sqrt{T}} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}, \\ \int \frac{\sqrt{T}}{x^3} dx &= - \frac{2a + bx}{4ax^2} \sqrt{T} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

11. Die Reductionsformeln in No. 11. des § 2. geben, wenn zur Abkürzung $4ac - b^2 = \lambda$ gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T^3}} = \frac{2(b + 2cx)}{\lambda \sqrt{T}},$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{T^3}} = -\frac{2(2a + bx)}{\lambda \sqrt{T}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{T^3}} = \frac{2ab + (2b^2 - 4ac)x}{c\lambda \sqrt{T}} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}$$

u. s. w.

12. Nach den vorhin genannten Formeln erhält man

$$\int \sqrt{T^3} \cdot dx = \frac{(b + 2cx)(3\lambda + 8cT)}{64c^2} \sqrt{T} + \frac{3\lambda^2}{128c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int x \sqrt{T^3} \cdot dx = \frac{\sqrt{T^5}}{5c} - \frac{b}{2c} \int \sqrt{T^3} \cdot dx,$$

$$\int x^2 \sqrt{T^3} \cdot dx = -\frac{(7b - 10cx)\sqrt{T^5}}{60c^2} + \frac{7b^2 - 4ac}{24c^2} \int \sqrt{T^3} \cdot dx,$$

u. s. w.

13. Mittelst der Substitution $x = \frac{1}{y}$ gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{T^3}} = \frac{4ac - 2b^2 - 2bcx}{a\lambda \sqrt{T}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x \sqrt{T}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{T^3}} = -\frac{\lambda + 4cx(b + 2cx)}{a\lambda x \sqrt{T}} - \frac{3b}{2a} \int \frac{dx}{x \sqrt{T^3}},$$

u. s. w.

14. Auf ähnliche Weise wie in No. 10. erhält man:

$$\int \frac{\sqrt{T^3}}{x} dx = \frac{32ac + 3b^2 + 14bcx + 8c^2x^2}{24c} \sqrt{T}$$

$$+ \frac{(12ac - b^2)b}{16c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}} + a^2 \int \frac{dx}{x \sqrt{T}}$$

u. s. w.

15. Mittelst der Reductionsformeln 12. und 11. des § 2. ergeben sich die Formeln:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T^5}} = \frac{2(b + 2cx)}{3\lambda \sqrt{T}} \left(\frac{8c}{\lambda} + \frac{1}{T} \right),$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{T^5}} = -\frac{2}{3\lambda \sqrt{T}} \left\{ \frac{4b(b + 2cx)}{\lambda} + \frac{2a + bx}{T} \right\},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{T^5}} = \frac{2}{3 c \lambda \sqrt{T}} \left\{ \frac{(4 a c + b^2) (b + 2 c x)}{\lambda} + \frac{a b + (b^2 - 2 a c) x}{T} \right\}$$

u. s. w.

Aus diesen Integralen, welche den in No. 11. entwickelten analog sind, können wie in No. 12., 13. und 14. wieder drei neue Formelgruppen abgeleitet werden.

§ 5.

Fortsetzung. Integration durch Rationalisirung.

1. Wenn in einem Integrale nur eine Wurzel von der Form $\sqrt[m]{a + b x}$ vorkommt, so kann sie durch die Substitution

$$\sqrt[m]{a + b x} = y, \quad x = \frac{y^m - a}{b}, \quad dx = \frac{m}{b} y^{m-1} dy$$

weggeschafft und damit das Integral rational gemacht werden. Für den Fall $m = 2$ giebt der vorige Paragraph No. 1. bis No. 4. Beispiele hierzu; für $m = 3$ und $m = 4$ dienen die folgenden Aufgaben.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{a + b x}} = - \frac{3 (3 a - 2 b x)}{10 b^2} \sqrt[3]{(a + b x)^2},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{a + b x}} = \frac{3 (9 a^2 - 6 a b x + 5 b^2 x^2)}{40 b^3} \sqrt[3]{(a + b x)^2},$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{a + b x}} = - \frac{4 (4 a - 3 b x)}{21 b^2} \sqrt[4]{(a + b x)^3},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{a + b x}} = \frac{4 (32 a^2 - 24 a b x + 21 b^2 x^2)}{231 b^3} \sqrt[4]{(a + b x)^3}.$$

2. Enthält ein Integral nur eine Wurzel von der Form $\sqrt{a + c x^2}$, so giebt es zu deren Wegschaffung zwei Methoden. Nach dem älteren Verfahren sind drei Fälle zu unterscheiden und diesen entsprechend drei verschiedene Substitutionen anzuwenden, nämlich:

$$\text{für positive } a \begin{cases} \frac{\sqrt{a + c x^2} - \sqrt{c} \cdot x}{\sqrt{a}} = z, & x = \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \frac{1 - z^2}{2 z}, \\ \text{und } c: & \sqrt{a + c x^2} = \sqrt{a} \frac{1 + z^2}{2 z}, & dx = - \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \frac{1 + z^2}{2 z^2} dz; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\text{für negat. } a \left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{c \cdot x - \sqrt{a + cx^2}}}{\sqrt{-a}} = z, \quad x = \sqrt{-\frac{a}{c}} \cdot \frac{1+z^2}{2z}, \\ \text{u. positive } c: \end{aligned} \right. \\
&\left\{ \begin{aligned} \sqrt{a + cx^2} = \sqrt{-a} \frac{1-z^2}{2z}, \quad dx = -\sqrt{-\frac{a}{c}} \cdot \frac{1-z^2}{2z^2} dz; \\ \text{für positive } a \end{aligned} \right. \\
&\left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{a - \sqrt{-c} \cdot x}}{\sqrt{a + \sqrt{-c} \cdot x}} = z^2, \quad x = \sqrt{-\frac{a}{c}} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}, \\ \text{u. negative } c: \end{aligned} \right. \\
&\left\{ \begin{aligned} \sqrt{a + cx^2} = \sqrt{a} \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = -\sqrt{-\frac{a}{c}} \cdot \frac{4z dz}{(1+z^2)^2}. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Hiernach lassen sich folgende Integrale entwickeln:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} &= \frac{1}{\beta} \imath (\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}), \\
\int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} &= -\frac{1}{\alpha} \imath \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}{x} \right), \\
\int \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}{x} dx &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} - \alpha \imath \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}{x} \right); \\
\int \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}} &= \frac{1}{\beta} \imath (\beta x + \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}), \\
\int \frac{dx}{x \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}} &= \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha}{\beta x}, \\
\int \frac{\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}}{x} dx &= \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2} + \alpha \arcsin \frac{\alpha}{\beta x}; \\
\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} &= \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\beta x}{\alpha}, \\
\int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} &= -\frac{1}{\alpha} \imath \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}}{x} \right), \\
\int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}}{x} dx &= -\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} - \alpha \imath \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}}{x} \right); \\
\int \frac{dx}{(g+hx) \sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}} \imath \left(\frac{g+hx-h\sqrt{1+x^2}+\sqrt{g^2+h^2}}{g+hx-h\sqrt{1+x^2}-\sqrt{g^2+h^2}} \right), \\
\int \frac{dx}{(g+hx) \sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{g^2-h^2}} \imath \left(\frac{g+hx-h\sqrt{x^2-1}+\sqrt{g^2-h^2}}{g+hx-h\sqrt{x^2-1}-\sqrt{g^2-h^2}} \right), \\
&\text{für } g^2 > h^2,
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2}{\sqrt{h^2-g^2}} \arctan \frac{g+hx-h\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{h^2-g^2}},$$

für $g^2 < h^2$,

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{g^2-h^2}} \arctan \sqrt{\frac{(g-h)(1-x)}{(g+h)(1+x)}},$$

für $g^2 > h^2$,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{h^2-g^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{(h+g)(1+x)} + \sqrt{(h-g)(1-x)}}{\sqrt{(h+g)(1+x)} - \sqrt{(h-g)(1-x)}} \right), \text{ für } g^2 < h^2.$$

3. Bezeichnet $\varphi(x^2)$ eine rationale Function von x^2 , so lässt sich das Integral

$$\int \frac{\varphi(x^2) dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

dadurch von der Wurzel befreien, dass man setzt

$$\frac{kx}{\sqrt{a+cx^2}} = u \quad \text{mithin} \quad x = u \sqrt{\frac{a}{k^2-cu^2}},$$

$$\sqrt{a+cx^2} = k \sqrt{\frac{a}{k^2-cu^2}}, \quad dx = k^2 \sqrt{\frac{a}{(k^2-cu^2)^3}} \cdot du,$$

worin k eine beliebige Constante bezeichnet; es wird nämlich:

$$\int \frac{\varphi(x^2) dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \int \varphi\left(\frac{au^2}{k^2-cu^2}\right) \frac{k du}{k^2-cu^2}.$$

Hiernach ist z. B. für $k=1$

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\gamma x^2)\sqrt{a+cx^2}} = \int \frac{du}{\alpha+(a\gamma-\alpha c)u^2}$$

und daraus folgt sehr leicht

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2) \sqrt{a + cx^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)}} \ln \left\{ \frac{\alpha \sqrt{a + cx^2} + \sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)} \cdot x}{\alpha \sqrt{a + cx^2} - \sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)} \cdot x} \right\} \\
&\quad \alpha(a\gamma - \alpha c) < 0, \\
& \int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2) \sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x}{\sqrt{a + cx^2}}, \quad a\gamma - \alpha c = 0, \\
& \int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2) \sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(a\gamma - \alpha c)}} \arctan \frac{\sqrt{\alpha(a\gamma - \alpha c)} \cdot x}{\alpha \sqrt{a + cx^2}}, \\
&\quad \alpha(a\gamma - \alpha c) > 0.
\end{aligned}$$

4. Mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{\sqrt{a + cx^2}}{\alpha + \gamma x^2} = \frac{1}{\gamma} \left\{ c + \frac{a\gamma - \alpha c}{\alpha + \gamma x^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}}$$

kann das Integral

$$\int \frac{\sqrt{a + cx^2}}{\alpha + \gamma x^2} dx$$

leicht auf das vorhergehende zurückgeführt werden.

5. Nach der in No. 3. auseinandergesetzten Methode lässt sich das Integral

$$\int \frac{dx}{(g + hx) \sqrt{a + cx^2}}$$

zwar nicht direct entwickeln, wohl aber dadurch, dass man dasselbe folgendermassen zerlegt

$$\int \frac{g dx}{(g^2 - h^2 x^2) \sqrt{a + cx^2}} - \int \frac{hx dx}{(g^2 - h^2 x^2) \sqrt{a + cx^2}}$$

und im ersten Integrale die unter No. 3. angegebene Substitution benutzt und im zweiten Integrale einfach $\sqrt{a + cx^2} = v$ setzt; man erhält für $k = 1$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(g + hx) \sqrt{a + cx^2}} \\
&= \int \frac{g du}{g^2 - (ah^2 + cg^2)u^2} - \int \frac{h dv}{ah^2 + cg^2 - h^2 v^2},
\end{aligned}$$

und hieraus folgende drei Formeln

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{1}{2\mu} l \left\{ \frac{ah - cgx + \mu\sqrt{a+cx^2}}{ah - cgx - \mu\sqrt{a+cx^2}} \right\},$$

$$ah^2 + cg^2 > 0, \quad \mu = \sqrt{ah^2 + cg^2};$$

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}} = \frac{h}{cg} \cdot \frac{\sqrt{a+cx^2}}{g+hx}, \quad ah^2 + cg^2 = 0;$$

$$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{1}{v} \arctan \frac{v\sqrt{a+cx^2}}{ah - cgx},$$

$$ah^2 + cg^2 < 0, \quad v = \sqrt{-(ah^2 + cg^2)}.$$

Die Specialisirungen $a = +1$, $c = +1$, $a = -1$, $c = +1$, $a = +1$, $c = -1$ führen wieder auf die in No. 2. erwähnten Integrale zurück.

6. Beachtet man die identische Gleichung

$$\int \frac{dx}{\alpha x + \beta \sqrt{a+cx^2}}$$

$$= \int \frac{\alpha x dx}{\alpha^2 x^2 - \beta^2 (a+cx^2)} - \int \frac{\beta \sqrt{a+cx^2} \cdot dx}{\alpha^2 x^2 - \beta^2 (a+cx^2)}$$

und wendet im zweiten Integrale rechter Hand die unter No. 3. erwähnte Methode an, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\alpha x + \beta \sqrt{a+cx^2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 c} \left\{ \frac{1}{2} \alpha l [(\alpha^2 - \beta^2 c)x^2 - \beta^2 a] - \beta \int \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 u - \beta^2} + \frac{c}{1 - cu^2} \right) du \right\}$$

und nach gehöriger Zusammenrechnung

$$\int \frac{dx}{\alpha x + \beta \sqrt{a+cx^2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 c} \left\{ \alpha l (\alpha x + \beta \sqrt{a+cx^2}) - \beta \sqrt{c} \cdot l (\sqrt{c} \cdot x + \sqrt{a+cx^2}) \right\}, c > 0$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 c} \left\{ \alpha l (\alpha x + \beta \sqrt{a+cx^2}) + \beta \sqrt{-c} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{-c} \cdot x}{\sqrt{a}} \right\}, c < 0.$$

7. Bedeutet $F(x, y)$ eine rationale algebraische Function von x und y , also im Allgemeinen einen Bruch, dessen Zähler aus Summanden von der Form $Ax^m y^n$, und dessen Nenner aus Sum-

manden von der ähnlichen Form $Bx^p y^q$ besteht, so erhellt leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$F(x, \sqrt{a + cx^2}) = \frac{M + N\sqrt{a + cx^2}}{P + Q\sqrt{a + cx^2}},$$

worin M, N, P, Q ganze rationale Functionen von x sind. Multiplicirt man ferner Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches mit $P - Q\sqrt{a + cx^2}$, so erhält man

$$\begin{aligned} & F(x, \sqrt{a + cx^2}) \\ &= \frac{MP - NQ(a + cx^2)}{P^2 - Q^2(a + cx^2)} + \frac{(NP - MQ)(a + cx^2)}{P^2 - Q^2(a + cx^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}} \\ &= R + S \cdot \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}}, \end{aligned}$$

und hier sind R und S rationale gebrochene Functionen von x . Die letztere habe die gewöhnliche Form

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots} \\ &= \frac{\alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \dots + x(\alpha_1 + \alpha_3 x^2 + \alpha_5 x^4 + \dots)}{\beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \dots + x(\beta_1 + \beta_3 x^2 + \beta_5 x^4 + \dots)}, \end{aligned}$$

multiplicirt man Zähler und Nenner mit

$$\beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \dots - x(\beta_1 + \beta_3 x^2 + \beta_5 x^4 + \dots),$$

so erscheint S in Form eines Bruches, dessen Nenner nur gerade Potenzen von x , und dessen Zähler sowohl gerade als ungerade Potenzen von x enthält; es ist also

$$S = \frac{\gamma_0 + \gamma_2 x^2 + \gamma_4 x^4 + \dots + x(\gamma_1 + \gamma_3 x^2 + \gamma_5 x^4 + \dots)}{\delta_0 + \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4 + \delta_6 x^6 + \dots}$$

oder wenn mit dem Nenner in jeden Theil des Zählers dividirt wird

$$S = \varphi(x^2) + x\psi(x^2),$$

wo φ und ψ rationale Functionen bezeichnen. Nach diesen Erörterungen ist

$$\int F(x, \sqrt{a + cx^2}) dx = \int R dx + \int \frac{\varphi(x^2) dx}{\sqrt{a + cx^2}} + \int \frac{\psi(x^2) x dx}{\sqrt{a + cx^2}};$$

das erste Integral rechter Hand lässt sich mittelst der im § 3. angegebenen Methoden entwickeln; für das zweite Integral benutzt man die Substitution

$$\frac{kx}{\sqrt{a+cx^2}} = u,$$

im dritten setzt man

$$\sqrt{a+cx^2} = v,$$

und bringt somit das gesuchte irrationale Integral auf drei rationale Integrale zurück, nämlich

$$\begin{aligned} & \int F(x, \sqrt{a+cx^2}) dx \\ &= \int R dx + \int \varphi\left(\frac{au^2}{k^2-cu^2}\right) \frac{kdu}{k^2-cu^2} + \int \psi\left(\frac{v^2-a}{c}\right) \frac{dv}{c}. \end{aligned}$$

Hiernach ist z. B.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \sqrt{a+cx^2}} \\ &= \int \frac{\alpha + (a\gamma - c\alpha)u^2}{a_1 + b_1u^2 + c_1u^4} du + \int \frac{\beta c}{a_2 + b_2v^2 + c_2v^4} dv, \\ & a_1 = \alpha^2, \quad b_1 = a(2\alpha\gamma - \beta^2) - 2c\alpha^2, \\ & c_1 = a^2\gamma^2 - ac(2\alpha\gamma - \beta^2) + c^2\alpha^2, \\ & a_2 = a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2, \quad b_2 = c(2\alpha\gamma - \beta^2) - 2a\gamma^2, \quad c_2 = \gamma^2. \end{aligned}$$

8. Benutzt man die identische Gleichung

$$a + bx + cx^2 = a - \frac{b^2}{4c} + c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2$$

und setzt

$$a - \frac{b^2}{4c} = a', \quad x + \frac{b}{2c} = \xi,$$

so erhält man

$$\int F(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx = \int F\left(\xi - \frac{b}{2c}, \sqrt{a'+c\xi^2}\right) d\xi;$$

hier kann rechter Hand wieder die in No. 7. erörterte Methode angewendet werden.

Beispielweis ist

$$\int \frac{dx}{(\lambda + x) \sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{d\xi}{(g' + \xi) \sqrt{a'+c\xi^2}}, \quad g' = \lambda - \frac{b}{2c},$$

mithin nach den Formeln in No. 5.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(\lambda+x)\sqrt{a+bx+cx^2}} \\
&= -\frac{1}{2\mu} \imath \left\{ \frac{a - \frac{1}{2}b\lambda + (\frac{1}{2}b - c\lambda)x + \mu\sqrt{a+bx+cx^2}}{a - \frac{1}{2}b\lambda + (\frac{1}{2}b - c\lambda)x - \mu\sqrt{a+bx+cx^2}} \right\}, \\
& \quad a - b\lambda + c\lambda^2 > 0, \quad \mu = \sqrt{a - b\lambda + c\lambda^2}; \\
& \int \frac{dx}{(\lambda+x)\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{a+bx+cx^2}}{(b-2c\lambda)(\lambda+x)}, \\
& \quad a - b\lambda + c\lambda^2 = 0; \\
& \int \frac{dx}{(\lambda+x)\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{v} \arctan \frac{2v\sqrt{a+bx+cx^2}}{2a - b\lambda + (b-2c\lambda)x}, \\
& \quad a - b\lambda + c\lambda^2 < 0, \quad v = \sqrt{-a + b\lambda - c\lambda^2}.
\end{aligned}$$

§ 6.

Integration exponentialer und logarithmischer Functionen.

1. Wenn das zu entwickelnde Integral nur die Exponentialgrösse e^{ky} enthält, mithin der Form $\int f(e^{ky}) dy$ angehört, so erhält es durch die Substitution

$$e^{ky} = x, \quad y = \frac{\imath x}{k}, \quad dy = \frac{dx}{kx}$$

eine von Exponentialgrössen freie Gestalt. Hiernach sind die folgenden Integrale zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dy}{a + b e^{ky}} = \frac{1}{ak} \left\{ ky - \imath (a + b e^{ky}) \right\}, \\
& \int \frac{dy}{(a + b e^{ky})^2} = \frac{1}{a^2 k} \left\{ ky + \frac{a}{a + b e^{ky}} - \imath (a + b e^{ky}) \right\} \\
& \int \frac{dy}{a e^{-ky} + b e^{ky}} = \frac{1}{k\sqrt{ab}} \arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a}} e^{ky} \right), \quad a > 0, \quad c > 0, \\
& \int \frac{dy}{a e^{-ky} + b e^{ky}} = \frac{1}{2k\sqrt{-ab}} \imath \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{-b} \cdot e^{ky}}{\sqrt{a} - \sqrt{-b} \cdot e^{ky}} \right), \\
& \quad \quad \quad a > 0, \quad c < 0. \\
& \int \frac{e^{ky} dy}{\sqrt{a + b e^{ky}}} = \frac{2}{kb} \sqrt{a + b e^{ky}},
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a + be^{ky}}} = \frac{1}{k\sqrt{a}} l \left(\frac{\sqrt{a + be^{ky}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{ky}} + \sqrt{a}} \right), \quad a > 0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a + be^{ky}}} = \frac{2}{k\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a + be^{ky}}{-a}}, \quad a < 0,$$

2. Mittelst theilweiser Integration lässt sich das Integral

$$\int y^m e^{ky} dy$$

entwickeln, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet; in jedem anderen Falle muss man eine Reihenentwicklung zu Hülfe nehmen. Die Werthe des genannten Integrales sind für $m = 1, 2, 3, 4, 5$ etc.

$$\int y e^{ky} dy = \left(\frac{y}{k} - \frac{1}{k^2} \right) e^{ky},$$

$$\int y^2 e^{ky} dy = \left(\frac{y^2}{k} - 2 \frac{y}{k^2} + 2 \frac{1}{k^3} \right) e^{ky},$$

$$\int y^3 e^{ky} dy = \left(\frac{y^3}{k} - 3 \frac{y^2}{k^2} + 6 \frac{y}{k^3} - 6 \frac{1}{k^4} \right) e^{ky},$$

$$\int y^4 e^{ky} dy = \left(\frac{y^4}{k} - 4 \frac{y^3}{k^2} + 12 \frac{y^2}{k^3} - 24 \frac{y}{k^4} + 24 \frac{1}{k^5} \right) e^{ky},$$

$$\int y^5 e^{ky} dy = \left(\frac{y^5}{k} - 5 \frac{y^4}{k^2} + 20 \frac{y^3}{k^3} - 60 \frac{y^2}{k^4} + 120 \frac{y}{k^5} - 120 \frac{1}{k^6} \right) e^{ky},$$

u. s. w.

Hiernach können alle Integrale von der Form

$$\int \varphi(y) e^{ky} dy$$

entwickelt werden, sobald $\varphi(y)$ eine algebraische ganze und rationale Function von y ist.

3. Mit Hülfe der Substitution

$$lz = y, \quad z = e^y, \quad dz = e^y dy,$$

erhält man

$$\int z^\mu f(lz) dz = \int e^{(\mu+1)y} f(y) dy$$

also z. B.

$$\int \frac{dz}{z(a + blz)} = \frac{l(a + blz)}{b},$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{a + blz}} = \frac{2\sqrt{a + blz}}{b},$$

$$\int z^\mu l z dz = z^{\mu+1} \left[\frac{lz}{\mu+1} - \frac{1}{(\mu+1)^2} \right], \quad \mu \geq 1,$$

$$\int z^\mu (lz)^2 dz = z^{\mu+1} \left[\frac{(lz)^2}{\mu+1} - \frac{2lz}{(\mu+1)^2} + \frac{2}{(\mu+1)^3} \right], \quad \mu \geq 1,$$

u. s. w.

4. Durch theilweise Integration findet man

$$\int \frac{lz dz}{(a+bz)^2} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{z lz}{a+bz} - \frac{l(a+bz)}{b} \right\},$$

$$\int \frac{l(\alpha+\beta z)}{(a+bz)^2} dz = \frac{1}{a\beta-b\alpha} \left\{ \frac{\alpha+\beta z}{a+bz} l(\alpha+\beta z) - \frac{\beta}{b} l(a+bz) \right\},$$

$$\int \frac{l(\alpha^2+\beta^2 z^2)}{z^2} dz = \frac{2\beta}{\alpha} \arctan \frac{\beta z}{\alpha} - \frac{l(\alpha^2+\beta^2 z^2)}{z},$$

$$\int \frac{lz dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b} \left\{ (lz-2)\sqrt{a+bz} + \sqrt{a} \cdot l \left(\frac{\sqrt{a+bz} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+bz} - \sqrt{a}} \right) \right\}, \quad a > 0,$$

$$= \frac{2}{b} \left\{ (lz-2)\sqrt{a+bz} + 2\sqrt{-a} \cdot \arctan \sqrt{\frac{a+bz}{-a}} \right\}, \quad a < 0;$$

$$\int \frac{lz dz}{\sqrt{(a+cz^2)^3}} = \frac{z lz}{a\sqrt{a+cz^2}} - \frac{1}{a\sqrt{c}} l(\sqrt{c} \cdot z + \sqrt{a+cz^2}), \quad c > 0,$$

$$= \frac{z lz}{a\sqrt{a+cz^2}} - \frac{1}{a\sqrt{-c}} \arcsin \frac{\sqrt{-c} \cdot z}{\sqrt{a}}, \quad c < 0;$$

$$\int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} l\left(\frac{\alpha+\beta z}{\alpha-\beta z}\right) dz = -\sqrt{1-z^2} \cdot l\left(\frac{\alpha+\beta z}{\alpha-\beta z}\right) + \frac{2}{\beta} \left\{ \alpha \arcsin z - \sqrt{\alpha^2-\beta^2} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \cdot z}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2 z^2}} \right\}, \quad \alpha^2 > \beta^2.$$

§ 7.

Integration goniometrischer Functionen.

1. Wenn das zu entwickelnde Integral nur goniometrische Functionen eines und desselben Bogens u enthält, mithin unter der Form

$$\int F(\sin u, \cos u, \tan u, \dots) du$$

begriffen ist, so kann man alle vorkommenden Functionen durch $\sin u$ ausdrücken, wodurch das Integral die Form

$$\int f(\sin u) du$$

bekommt, und nachher $\sin u = x$ substituiren; es wird dann

$$\int f(\sin u) du = \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beispiele hierzu sind

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sin u \cos u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u,$$

$$\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u = -\frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{12}\cos 3u,$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 u du &= \frac{3}{8}u - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\sin u + \sin^3 u\right) \cos u \\ &= \frac{3}{8}u - \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{32}\sin 4u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 u du &= -\frac{1}{5}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sin^2 u + \sin^4 u\right) \cos u, \\ &= -\frac{5}{8}\cos u + \frac{5}{48}\cos 3u - \frac{1}{80}\cos 5u, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\int \frac{du}{\sin u} = l \tan \frac{1}{2}u,$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u,$$

$$\int \frac{du}{\sin^3 u} = -\frac{1}{2}\frac{\cos u}{\sin^2 u} + \frac{1}{2}l \tan \frac{1}{2}u,$$

$$\int \frac{du}{\sin^4 u} = -\cot u - \frac{1}{3}\cot^3 u,$$

$$\int \frac{du}{\sin^5 u} = -\frac{2 + 3\sin^2 u}{8\sin^4 u} \cos u + \frac{3}{8}l \tan \frac{1}{2}u,$$

u. s. w.

2. Drückt man alle unter dem Integralzeichen stehenden goniometrischen Functionen durch $\cos u$ aus, so führt die Substitution $\cos u = y$ zu ähnlichen Rechnungen wie vorhin. Z. B.

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\cos u \sin u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u,$$

$$\int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \sin u = \frac{2}{3}\sin u + \frac{1}{12}\sin 3u,$$

$$\begin{aligned} \int \cos^4 u du &= \frac{3}{8}u + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cos u + \cos^3 u\right) \sin u, \\ &= \frac{3}{8}u + \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{32}\sin 4u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^5 u \, du &= \frac{1}{5} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \cos^2 u + \cos^4 u \right) \sin u, \\ &= \frac{5}{8} \sin u + \frac{5}{48} \sin 3u + \frac{1}{80} \sin 5u, \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\cos u} &= l \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} u \right), \\ \int \frac{du}{\cos^2 u} &= \tan u, \\ \int \frac{du}{\cos^3 u} &= \frac{1}{2} \frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{1}{2} l \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} u \right), \\ \int \frac{du}{\cos^4 u} &= \tan u + \frac{1}{3} \tan^3 u, \\ \int \frac{du}{\cos^5 u} &= \frac{2 + 3 \cos^2 u}{8 \cos^4 u} \sin u + \frac{3}{8} l \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} u \right), \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

3. Drückt man die unter dem Integralzeichen stehenden goniometrischen Functionen durch $\tan u$ aus und substituirt $\tan u = z$, so wird

$$\int \psi(\tan u) \, du = \int \frac{\psi(z) \, dz}{1 + z^2}.$$

Beispiele hierzu sind

$$\begin{aligned}\int \tan u \, du &= -l \cos u, \\ \int \tan^2 u \, du &= \tan u - u, \\ \int \tan^3 u \, du &= \frac{1}{2} \tan^2 u + l \cos u, \\ \int \tan^4 u \, du &= \frac{1}{3} \tan^3 u - \tan u + u, \\ \int \tan^5 u \, du &= \frac{1}{4} \tan^4 u - \frac{1}{2} \tan^2 u - l \cos u, \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

4. Am bequemsten ist meistens die Substitution

$$\tan \frac{1}{2} u = t,$$

aus welcher folgt

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad du = \frac{2dt}{1+t^2};$$

enthält nämlich das ursprüngliche Integral keine Wurzel, so ist dann auch das neue, auf t bezügliche Integral von Wurzeln frei.

Hiernach ist z. B., wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen bedeuten,

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du = 2^{m+1} \int \frac{t^m (1-t^2)^n}{(1+t^2)^{m+n+1}} dt,$$

woraus folgende specielle Integralwerthe hervorgehen

$$\int \sin^2 u \cos^2 u \, du = \frac{4u - \sin 4u}{32},$$

$$\int \sin^2 u \cos^3 u \, du = \frac{30 \sin u - 5 \sin 3u - 3 \sin 5u}{80},$$

$$\int \frac{\cos^2 u}{\sin u} \, du = \cos u + l \tan \frac{1}{2} u,$$

$$\int \frac{\cos^3 u}{\sin^2 u} \, du = -\frac{1 + \sin^2 u}{\sin u},$$

$$\int \frac{\cos^4 u}{\sin^2 u} \, du = -\frac{3}{2} u - \frac{3}{2} \sin u \cos u - \frac{\cos^3 u}{\sin u},$$

$$\int \frac{\cos^4 u}{\sin^3 u} \, du = -\frac{3 \cos u - 2 \cos^3 u}{2 \sin^2 u} - \frac{3}{2} l \tan \frac{1}{2} u.$$

5. Mittelst derselben Substitution erhält man

$$\begin{aligned} & \int \frac{du}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}} l \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} - \gamma + (\beta - \alpha) \tan \frac{1}{2} u}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} + \gamma - (\beta - \alpha) \tan \frac{1}{2} u} \right\}, \quad \text{für } \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \\ &= -\frac{1}{\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u}, \quad \text{für } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}} \arctan \frac{\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}, \quad \text{für } \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \beta$ gelten diese Formeln nicht; es ist dann

$$\int \frac{du}{\alpha (1 + \cos u) + \gamma \sin u} = \frac{1}{\gamma} l (\alpha + \gamma \tan \frac{1}{2} u).$$

6. Unter Rücksicht auf die Reductionsformel

$$\begin{aligned} & \int \frac{(1+x^2) dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{c} \left\{ -\frac{x}{a+bx+cx^2} + (a+c) \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{c(4ac-b^2)} \left\{ \frac{(a+c)b + (b^2 - 2ac + 2c^2)x}{a+bx+cx^2} + 2c(a+c) \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} \right\} \end{aligned}$$

findet man mittelst der vorigen Substitution

$$\int \frac{du}{(\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)} \left\{ \frac{\alpha \gamma (1 + \cos u) + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha \beta) \sin u}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u} \right.$$

$$\left. + \alpha (\alpha - \beta) \int \frac{du}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u} \right\}$$

wobei weder $\alpha = \beta$ noch $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ sein darf. Für diese speciellen Fälle ist

$$\int \frac{du}{[\alpha (1 + \cos u) + \gamma \sin u]^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma^3} \left\{ \frac{\gamma (\alpha \sin u - \gamma \cos u)}{\alpha (1 + \cos u) + \gamma \sin u} - \alpha l(\alpha + \gamma \tan \tfrac{1}{2} u) \right\}, \quad \alpha = \beta$$

$$\int \frac{du}{(\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u)^2}$$

$$= - \frac{\tan \frac{1}{2} u}{[\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u]^2} - \frac{\alpha}{[\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u]^3}, \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

7. Durch theilweise Integration erhält man

$$\int u^m \cos u \, du = u^m \sin u - m \int u^{m-1} \sin u \, du$$

$$= u^m \sin u + m u^{m-1} \cos u - m(m-1) \int u^{m-2} \cos u \, du$$

und hieraus der Reihe nach

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u,$$

$$\int u^2 \cos u \, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \sin u,$$

$$\int u^3 \cos u \, du = (3u^2 - 6) \cos u + (u^3 - 6u) \sin u,$$

$$\int u^4 \cos u \, du = (4u^3 - 24) \cos u + (u^4 - 12u^2 + 24) \sin u,$$

u. s. w.

8. Nach demselben Verfahren ergibt sich

$$\int u^m \sin u \, du = -u^m \cos u + m \int u^{m-1} \cos u \, du$$

$$= -u^m \cos u + m u^{m-1} \sin u - m(m-1) \int u^{m-2} \sin u \, du$$

und hieraus der Reihe nach

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u,$$

$$\int u^2 \sin u \, du = 2u \sin u - (u^2 - 2) \cos u,$$

$$\int u^3 \sin u \, du = (3u^2 - 6) \sin u - (u^3 - 6u) \cos u,$$

$$\int u^4 \sin u \, du = (4u^3 - 24u) \sin u - (u^4 - 12u^2 + 24) \cos u,$$

u. s. w.

9. Durch zweimalige partielle Integration erhält man

$$\int e^{ku} \cos u \, du = \frac{e^{ku} (k \cos u + \sin u)}{k^2 + 1},$$

$$\int e^{ku} \cos^2 u \, du = \frac{e^{ku} \cos u (k \cos u + 2 \sin u)}{k^2 + 4} + \frac{2 e^{ku}}{k (k^2 + 4)},$$

und allgemeiner

$$\begin{aligned} \int e^{ku} \cos^n u \, du &= \frac{e^{ku} \cos^{n-1} u (k \cos u + n \sin u)}{k^2 + n^2} \\ &+ \frac{n (n-1)}{k^2 + n^2} \int e^{ku} \cos^{n-2} u \, du. \end{aligned}$$

9. Dasselbe Verfahren giebt

$$\int e^{ku} \sin u \, du = \frac{e^{ku} (k \sin u - \cos u)}{k^2 + 1},$$

$$\int e^{ku} \sin^2 u \, du = \frac{e^{ku} \sin u (k \sin u - 2 \cos u)}{k^2 + 4} + \frac{2 e^{ku}}{k (k^2 + 4)},$$

$$\begin{aligned} \int e^{ku} \sin^n u \, du &= \frac{e^{ku} \sin^{n-1} u (k \sin u - n \cos u)}{k^2 + n^2} \\ &+ \frac{n (n-1)}{k^2 + n^2} \int e^{ku} \sin^{n-2} u \, du. \end{aligned}$$

§ 8.

Integration cyclometrischer Functionen.

1. Benutzt man die theilweise Integration in der Form

$$\int f(x) \, dx = f(x) x - \int f'(x) x \, dx,$$

so gelangt man zu folgenden Integralwerthen

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} l(1+x^2),$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} l(1+x^2).$$

2. Auf ähnliche Weise erhält man allgemeiner für $n \geq -1$

$$\int x^n \arcsin x \, dx = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int x^n \arccos x \, dx = \frac{x^{n+1} \arccos x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int x^n \arctan x \, dx = \frac{x^{n+1} \arctan x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2},$$

$$\int x^n \operatorname{arccot} x \, dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arccot} x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2}$$

also z. B.

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{1}{4} \{ (2x^2 - 1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \},$$

$$\int x^2 \arcsin x \, dx = \frac{1}{9} \{ 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2) \sqrt{1-x^2} \},$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx = l \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right) - \frac{\arcsin x}{x},$$

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} \{ (x^2 + 1) \arctan x - x \},$$

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{1}{6} \{ 2x^3 \arctan x - x^2 - l(1+x^2) \},$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} \, dx = lx - \frac{1}{2} l(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \, dx &= 2 \sqrt{x} \cdot \arctan x + \frac{1}{\sqrt{2}} l \left(\frac{1 + \sqrt{2x} + x}{1 - \sqrt{2x} + x} \right) \\ &\quad - \sqrt{2} \{ \arctan(\sqrt{2x} + 1) + \arctan(\sqrt{2x} - 1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} \, dx &= -2 \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}} l \left(\frac{1 + \sqrt{2x} + x}{1 - \sqrt{2x} + x} \right) \\ &\quad + \sqrt{2} \{ \arctan(\sqrt{2x} + 1) + \arctan(\sqrt{2x} - 1) \}. \end{aligned}$$

3. Gleichfalls durch theilweise Integration findet man

$$\int \frac{\arcsin x}{(1+x)^2} \, dx = -\frac{\arcsin x}{1+x} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{(\alpha + \beta x)^2} \, dx &= -\frac{\arcsin x}{\beta(\alpha + \beta x)} - \frac{2}{\beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arctan \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)(1-x)}{(\alpha + \beta)(1+x)}}, \\ &\quad \alpha^2 > \beta^2, \end{aligned}$$

$$= -\frac{\arcsin x}{\beta(\alpha + \beta x)} - \frac{1}{\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{(\beta + \alpha)(1+x)} + \sqrt{(\beta - \alpha)(1-x)}}{\sqrt{(\beta + \alpha)(1+x)} - \sqrt{(\beta - \alpha)(1-x)}} \right),$$

$$\alpha^2 < \beta^2.$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\arcsin x}{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\},$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{(1+\gamma x^2)^2} dx = -\frac{\arcsin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma+1}} \arctan \frac{\sqrt{\gamma+1} \cdot x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\gamma > -1,$$

$$= -\frac{\arcsin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)} + \frac{1}{\gamma\sqrt{-(\gamma+1)}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{-(\gamma+1) \cdot x}}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{-(\gamma+1) \cdot x}} \right\},$$

$$\gamma < -1.$$

$$\int \frac{\arctan x}{(\alpha + \beta x)^2} dx = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \ln \left(\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - \frac{\beta - \alpha x}{\alpha + \beta x} \arctan x \right\}$$

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{1 + x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} dx = \frac{x \arctan x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}},$$

$$a < b,$$

$$= \frac{x \arctan x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{a-b}} \ln \left(\frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2} + \sqrt{a-b}} \right), \quad a > b,$$

4. Mittelst der Substitution $\arcsin x = u$ findet man die Werthe folgender Integrale

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x (\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x,$$

$$\int e^{k \arcsin x} dx = \frac{e^{k \arcsin x} (x + k \sqrt{1-x^2})}{k^2 + 1}.$$

§ 9.

Integration mittelst unendlicher Reihen.

1. Durch unmittelbare Anwendung des binomischen Satzes erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^9}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^{13}}{13} + \dots$$

Zerlegt man dagegen $(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und entwickelt den ersten Factor in eine Reihe, so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = P_0 - \frac{1}{2} P_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P_4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P_6 + \dots,$$

wobei die mit $P_0, P_2, P_4, \dots$ bezeichneten Integrale auf folgende Weise zu berechnen sind

$$P_0 = \arcsin x, \quad P_n = \frac{(n-1) P_{n-2} - x^{n-1} \sqrt{1-x^2}}{n}.$$

Nur bei kleinen x convergiren diese Reihen rasch genug für die numerische Berechnung; ist dagegen x nur wenig kleiner als die Einheit, so setze man $x = \sqrt{1-y^2}$, und entwickle in der Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\frac{1}{2}y^2)}}$$

den Factor $(1 - \frac{1}{2}y^2)^{-\frac{1}{2}}$; diess giebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ Q_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{Q_4}{2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{Q_6}{2^3} + \dots \right\},$$

$$Q_0 = \arccos x, \quad Q_n = \frac{(n-1) Q_{n-2} - x \sqrt{(1-x^2)^{n-1}}}{n}.$$

2. Bei der Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^{-4}}}$$

sind die Fälle $x^2 < 1$ und $x^2 > 1$ zu unterscheiden; für $x^2 < 1$ erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^9}{9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^{13}}{13} + \dots,$$

dagegen ist für $x^2 > 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5x^5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{9x^9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{13x^{13}} - \dots$$

Um eine andere Entwicklung zu gewinnen, welche die Unterscheidung der obigen Fälle nicht erfordert, beachte man die identische Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}}$$

und substituirt

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ oder } \frac{2x}{1 + x^2} = y,$$

wodurch sich ergibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \frac{1}{2}y^2)}}, \quad y^2 < 1.$$

Man erhält jetzt ähnlich wie in No. 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{2} \left\{ R_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{R_4}{2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{R_6}{2^3} + \dots \right\},$$

$$R_0 = 2 \arctan x, \quad R_n = \frac{1}{n} \left\{ (n-1) R_{n-2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{n-1} \right\}.$$

3. Unter den Bedingungen $\varepsilon^2 < 1$ und $x^2 < 1$ gilt eine Reihenentwicklung von folgender Form

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon x + x^2}} = 1 - \frac{c_1}{1} x + \frac{c_2}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{c_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

worin sich die Coefficienten c_1, c_2 etc. ebensowohl recurrirend als independent bestimmen lassen. Zu dem ersten Zwecke benutzt man die Aufgabe 16, S. 237 des I. Theiles für

$$\mu = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 2\varepsilon, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 \dots = 0,$$

$$b_n = \frac{(-1)^n c_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

und erhält

$$\begin{aligned} c_1 &= \varepsilon, \\ c_2 &= 3\varepsilon^2 - 1, \\ c_3 &= 15\varepsilon^3 - 9\varepsilon, \\ c_4 &= 105\varepsilon^4 - 90\varepsilon^2 + 9, \\ c_5 &= 945\varepsilon^5 - 1050\varepsilon^3 + 225\varepsilon, \\ c_6 &= 10395\varepsilon^6 - 14175\varepsilon^4 + 4725\varepsilon^2 - 225, \\ &\dots \end{aligned}$$

oder allgemein

$$c_n = (2n-1)\varepsilon c_{n-1} - (n-1)^2 c_{n-2};$$

zur independenten Bestimmung dient die letzte Formel auf S. 33. des I. Theiles, welche liefert

$$c_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d^n [(\varepsilon^2 - 1)^n]}{d\varepsilon^n}.$$

Hieraus ergibt sich für $\varepsilon^2 < 1$ und $z^2 < 1$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dz}{\sqrt{1 + 2\varepsilon z^2 + z^4}} \\ &= \frac{z}{1} - \frac{c_1}{1} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{c_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{z^5}{5} - \frac{c_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{z^7}{7} + \dots, \end{aligned}$$

dagegen für $\varepsilon^2 < 1$ und $z^2 > 1$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dz}{\sqrt{1 + 2\varepsilon z^2 + z^4}} \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{c_1}{1} \cdot \frac{1}{3z^3} - \frac{c_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5z^5} + \frac{c_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{7z^7} - \dots \end{aligned}$$

4. Wenn $x^2 < 1$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2 + x^3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} \\ &= \frac{x}{1} + \frac{b_1 x^2}{2} + \frac{b_2 x^3}{3} + \frac{b_3 x^4}{4} + \dots, \end{aligned}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{8}, \quad b_3 = -\frac{1}{16}, \quad b_4 = +\frac{5}{128}, \dots$$

$$b_n = -\frac{(2n-1)b_{n-1} + (2n-2)b_{n-2} + (2n-3)b_{n-3}}{2n}.$$

Im Falle $x^2 > 1$ setze man $\frac{1}{x} = \xi$, wodurch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2 + x^3}} = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi \cdot \sqrt{1 + \xi + \xi^2 + \xi^3}}}$$

wird, und entwickle $(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3)^{-\frac{1}{2}}$; man erhält

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2 + x^3}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{b_1}{3x} + \frac{b_2}{5x^2} + \frac{b_3}{7x^3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Um eine andere Entwicklung zu erhalten substituirt man erst $1 + x = y^2$; es wird dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2 + \frac{1}{2}y^4}},$$

und hieraus folgt für $\frac{1}{2}y^4 = z^4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \sqrt[4]{8} \int \frac{dz}{\sqrt{1+2\varepsilon z^2+z^4}},$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Nunmehr können die in No. 3. gegebenen Entwicklungen benutzt werden, wobei die Fälle $x < \sqrt{2} - 1$ und $x > \sqrt{2} - 1$ zu unterscheiden sind.

5. Das allgemeinere Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta^2 x^2)}}$$

lässt sich auf vier verschiedene Weisen in Reihen verwandeln.

Im Falle $\alpha^2 x^2 < 1$ entwickelt man den Factor $(1+\alpha x)^{-\frac{1}{2}}$, für $\beta^2 x^2 < 1$ den zweiten Factor $(1+\beta^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}$; ist gleichzeitig $\alpha^2 x^2 < 1$ und $\beta^2 x^2 < 1$, so entwickelt man beide Factoren und multiplicirt die erhaltenen Reihen; endlich gelangt man durch Anwendung der Substitution

$$\sqrt{1+\alpha x} = y, \quad x = \frac{y^2 - 1}{\alpha}$$

zu der Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta^2 x^2)}} = 2 \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta^2 y^2 + \beta^2 y^4}}$$

welche für

$$y^4 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} z^4$$

übergeht in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta^2 x^2)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+2\varepsilon z^2+z^4}},$$

$$\varepsilon = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\beta(1+\alpha x)}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Hier können wieder die in No. 2. gegebenen Entwicklungen benutzt werden.

6. Unter den Voraussetzungen $\lambda^2 < 1$ und $x^2 < 1$ hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} = \frac{x}{1} + \frac{b_1 x^3}{3} + \frac{b_2 x^5}{5} + \dots,$$

$$b_1 = \frac{1}{2} (1 + \lambda),$$

$$b_2 = \frac{1}{8} (3 + 2\lambda + 3\lambda^2),$$

$$b_3 = \frac{1}{16} (5 + 3\lambda + 3\lambda^2 + 5\lambda^3),$$

$$\dots \dots \dots$$

Will man das obige Integral nicht nach Potenzen von x sondern nach Potenzen von λ entwickeln, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} \\ &= P_0 + \frac{1}{2} P_2 \lambda + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P_4 \lambda^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P_6 \lambda^3 + \dots, \end{aligned}$$

wo P_0, P_2, P_4 etc. dieselbe Bedeutung haben wie in No. 1.

Eine dritte Entwicklung ergibt sich, wenn man erst die Substitution

$$\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = z \quad \text{oder} \quad x = \frac{2z}{1+z^2}$$

anwendet, wodurch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} = 2 \int \frac{dz}{\sqrt{1+2(1-2\lambda)z^2+z^4}}$$

wird, und nachher von den Formeln in No. 2. Gebrauch macht; man findet bei positiven echt gebrochenen λ

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} \\ &= 2 \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{A_1}{3} \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right)^3 + \frac{A_2}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right)^5 - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$A_1 = 1 - 2\lambda,$$

$$A_2 = 1 - 6\lambda + 6\lambda^2,$$

$$A_3 = 1 - 12\lambda + 30\lambda^2 - 20\lambda^3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = \frac{(2n-1)(1-2\lambda)A_{n-1} - (n-1)A_{n-2}}{n}$$

oder auch unter independenter Form

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{d^n [\lambda^n (1 - \lambda)^n]}{d\lambda^n}$$

$$= 1 - (n)_1 (n+1)_1 \lambda + (n)_2 (n+2)_2 \lambda^2 - (n)_3 (n+3)_3 \lambda^3 + \dots$$

7. Die vorigen Transformationen passen auch auf das Integral

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}},$$

namentlich giebt die zuletzt erwähnte Substitution

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}} = 8 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{[1+2(1-2\lambda)z^2+z^4]^3}}.$$

Um den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck nach Potenzen von z zu entwickeln, benutze man entweder die Aufgabe 16, S. 237. des I. Theiles für $\mu = -\frac{3}{2}$ oder man differenzire die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+2(1-2\lambda)z^2+z^4}} = 1 - A_1 z^2 + A_2 z^4 - A_3 z^6 + \dots$$

partiell in Beziehung auf λ ; man erhält schliesslich

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}} = 8 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^3 - \frac{B_1}{5} \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^5 + \frac{B_2}{7} \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^7 - \dots \right\},$$

$$B_1 = 3(1-2\lambda),$$

$$B_2 = 6(1-5\lambda+5\lambda^2),$$

$$B_3 = 10(1-9\lambda+21\lambda^2-14\lambda^3),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_n = \frac{(2n+1)(1-2\lambda)B_{n-1} - (n+1)B_{n-2}}{n}$$

oder independent ausgedrückt,

$$B_{n-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{d^{n+1} [\lambda^n (1-\lambda)^n]}{d\lambda^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 1(n)_1(n+1)_1 - 2(n)_2(n+2)_2 \lambda + 3(n)_3(n+3)_3 \lambda^2 - \dots \}.$$

8. Nach den vorigen Methoden kann auch das Integral

$$\int \sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}} dx$$

behandelt werden, welches sich übrigens auf zwei früher entwickelte Integrale zurückführen lässt. Es gilt nämlich folgende, durch Differentiation leicht zu prüfende Gleichung

$$\int \sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}} dx = \lambda x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\lambda x^2}} + (1-\lambda) \left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} + \lambda \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}} \right\}$$

und hier können die Integrale rechter Hand nach No. 6. und 7. entwickelt werden. Setzt man $A_n - 4\lambda B_{n-1} = C_n$, so erhält man

$$\int \sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}} dx = \lambda x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\lambda x^2}} + 2(1-\lambda) \left\{ \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{C_1}{3} \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^3 + \frac{C_2}{5} \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^5 - \dots \right\}$$

$$C_1 = 1 - 6\lambda,$$

$$C_2 = 1 - 18\lambda + 30\lambda^2,$$

$$C_3 = 1 - 36\lambda + 150\lambda^2 - 140\lambda^3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_n = \frac{1}{1.2.3\dots n} \left\{ \frac{d^n [\lambda^n (1-\lambda)^n]}{d\lambda^n} + 2\lambda \frac{d^{n+1} [\lambda^n (1-\lambda)^n]}{d\lambda^{n+1}} \right\}$$

$$= 1 - 3(n)_1(n+1)_1\lambda + 5(n)_2(n+2)_2\lambda^2 - 7(n)_3(n+3)_3\lambda^3 + \dots$$

9. Mittelst der Exponentialreihe findet man

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \frac{1}{2} l(x^2) + \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{1.2.3} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots$$

10. Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\int \frac{e^{az}}{b+z} dz = P_0 + \frac{a}{1} P_1 + \frac{a^2}{1.2} P_2 + \frac{a^3}{1.2.3} P_3 + \dots$$

$$P_0 = l(b+z), \quad P_n = \frac{z^n}{n} - b P_{n-1},$$

welche Entwicklung bei kleinen a vorthellhaft ist.

Unter der Bedingung $z^2 < b^2$ hat man ferner

$$\int \frac{e^{az}}{b+z} dz = \frac{Q_0}{b} - \frac{Q_1}{b^2} + \frac{Q_2}{b^3} - \frac{Q_3}{b^4} + \dots,$$

$$Q_0 = \frac{e^{az}}{a}, \quad Q_n = \frac{z^n e^{az} - n Q_{n-1}}{a}.$$

Mittelst der Substitution $b+z = x$ gelangt man zu der dritten Entwicklung

$$\int \frac{e^{az}}{b+z} dx = e^{-ab} \left\{ l(b+z) + \frac{a}{1} \cdot \frac{b+z}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(b+z)^2}{2} + \dots \right\}.$$

11. Durch Benutzung der logarithmischen Reihe ergibt sich

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{x} = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots, \quad 0 \leq x < 1,$$

welche Reihe für $x \leq \frac{1}{2}$ rasch convergirt, dagegen für nahe an der Einheit liegende x unvortheilhaft ist.

Setzt man $x = 1 - y$ und wendet die theilweise Integration an, so folgt

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{x} = -ly \cdot l(1-y) + \int \frac{l(1-y)}{y} dy$$

und hieraus durch Entwicklung des zweiten Integrales

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{x} = l\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot lx - \left\{ \frac{1-x}{1^2} + \frac{(1-x)^2}{2^2} + \dots \right\};$$

diese Reihe convergirt sehr gut für $\frac{1}{2} < x < 1$.

12. Unter der Voraussetzung $0 \leq x < 1$ ist

$$\int \frac{l(1+x)}{x} dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \dots, \quad 0 \leq x < 1.$$

Man hat andererseits

$$\int \frac{l(1+x)}{x} dx = \int l\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \frac{dx}{x} - \int l\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{x};$$

setzt man im ersten Integrale rechter Hand $x^2 = \xi$, so werden die vorigen Entwicklungen anwendbar und liefern

$$\begin{aligned}
& \int \frac{l(1+x)}{x} dx \\
&= l(1+x) \cdot lx - \left\{ \frac{1-x}{1^2} + \frac{(1-x)^2}{2^2} + \frac{(1-x)^3}{3^2} + \dots \right\} \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-x^2}{1^2} + \frac{(1-x^2)^2}{2^2} + \frac{(1-x^2)^3}{3^2} + \dots \right\} \\
& \quad 0 \leq x < 1.
\end{aligned}$$

Im Falle $x > 1$, setze man $x = \frac{1}{u}$ und benutze die vorhergehenden Entwicklungen; diess giebt

$$\begin{aligned}
\int \frac{l(1+x)}{x} dx &= [l(1+x) - \frac{1}{2}lx] lx \\
& \quad + \frac{1}{1^2} \left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots \\
& \quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^2 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^3 + \dots \right\},
\end{aligned}$$

und noch

$$\int \frac{l(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{1^2} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 - \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{x} \right)^3 + \dots$$

Je nachdem x in einem der vier Intervalle

$$0 \dots \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \dots 1, \quad 1 \dots 2, \quad 2 \dots \infty$$

enthalten ist, sind die vier gefundenen Reihen bequem anzuwenden.

13. Um das Integral

$$\int \frac{z^{a-1}}{b+lz} dz$$

in eine Reihe zu entwickeln, benutze man zuerst die Substitution $b+lz = x$ und nachher die Exponentialreihe; man findet

$$\begin{aligned}
& \int \frac{z^{a-1}}{b+lz} dz \\
&= e^{-ab} \left\{ l(b+lz) + \frac{a}{1} \cdot \frac{b+lz}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(b+lz)^2}{2} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

14. Mittels der Substitution $\sin \varphi = x^2$ und durch Benutzung der in No. 1. gegebenen Entwicklungen erhält man

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} = \sqrt{\sin \varphi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^4 \varphi}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\sin^6 \varphi}{13} + \dots \right\}.$$

15. Setzt man

$$\sin \varphi = x, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \lambda,$$

so findet man u. A.

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{a} \left\{ \tan \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} A_1 \tan^3 \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{5} A_2 \tan^5 \frac{1}{2} \varphi - \dots \right\},$$

wobei die Coefficienten A_1, A_2 etc. ebenso wie in No. 6. berechnet werden.

16. Dasselbe Verfahren liefert

$$\int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{2b^2}{a} \left\{ \tan \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} C_1 \tan^3 \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{5} C_2 \tan^5 \frac{1}{2} \varphi - \dots \right\},$$

worin die Coefficienten C_1, C_2 etc. die nämlichen sind wie in No. 8.

17. Durch Anwendung der Substitution

$$\tan \psi = \frac{a}{b} x$$

ergiebt sich u. A.

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{a^4 \cos^4 \psi + b^4 \sin^4 \psi}} = \frac{1}{2ab} \left\{ R_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{R_4}{2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{R_6}{2^3} + \dots \right\},$$

wobei die Grössen R_0, R_2, R_4 etc. nach folgenden Formeln zu berechnen sind:

$$R_0 = 2 \arctan \left(\frac{b}{a} \tan \psi \right),$$

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ (n-1) R_{n-2} - \frac{\beta + \alpha \cos 2\psi}{\alpha + \beta \cos 2\psi} \left(\frac{ab \sin 2\psi}{\alpha + \beta \cos 2\psi} \right)^{n-1} \right\},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad \beta = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

18. Unter der Voraussetzung, dass ω zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, findet man mittelst der Substitution $\tan \frac{1}{2}\omega = x$

$$\int \frac{\omega}{\sin \omega} d\omega = 2 \left\{ \frac{1}{1^2} \tan \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3^2} \tan^3 \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{5^2} \tan^5 \frac{1}{2}\omega - \dots \right\}.$$

19. Für ein zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegendes ω hat man durch Anwendung der Substitution $\sin \omega = x$

$$\int \frac{\omega}{\tan \omega} d\omega = \frac{\sin \omega}{1^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 \omega}{3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^5 \omega}{5^2} + \dots$$

20. Bezeichnet ε einen positiven oder negativen echten Bruch, so ist

$$\int l(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = -\frac{1}{4} P_2 \varepsilon^2 - \frac{1}{2} P_4 \varepsilon^4 - \frac{1}{3} P_6 \varepsilon^6 - \dots,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi), \quad P_m = \frac{1}{m} \left\{ (m-1) P_{m-2} - \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi \right\}.$$

Eine andere Entwicklung ergibt sich, wenn man unter der Bedingung $\varphi^2 < \pi^2$

$$\tan \frac{1}{2}\varphi = x, \quad \varepsilon = \sin \vartheta$$

setzt und nachher die auf S. 257. des I. Theiles angegebene logarithmische Reihe benutzt; es wird

$$\int l(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$$= -8 \left\{ \frac{1}{4} Q_1 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} Q_2 \sin^2 2\vartheta + \frac{1}{3} Q_3 \sin^2 3\vartheta - \dots \right\},$$

$$Q_1 = \tan \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi, \quad Q_n = \frac{\tan^{2n-1} \frac{1}{2}\varphi}{2n-1} - Q_{n-1}.$$

21. Um das Integral

$$\int \frac{e^{\lambda \omega} + e^{-\lambda \omega}}{2} \sin^\mu \omega d\omega$$

zu entwickeln, setze man erst $\sin \omega = x$ und benutze nachher die auf S. 235. des I. Theiles (Aufgabe 16.) angegebene Reihe, welche erforderlichen Falls zu differenzieren ist; unter der Bedingung $-\frac{1}{2}\pi < \omega < +\frac{1}{2}\pi$ ergibt sich

$$\int \frac{e^{\lambda \omega} + e^{-\lambda \omega}}{2} \sin^\mu \omega d\omega = \frac{\sin^\mu + 1}{\mu + 1} \omega + \frac{\lambda^2 + 1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\sin^{\mu+3} \omega}{\mu + 3}$$

$$+ \frac{(\lambda^2 + 1^2)(\lambda^2 + 3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^{\mu+5} \omega}{\mu + 5} + \dots$$

22. Dasselbe Verfahren liefert die Entwicklung

$$\int \frac{e^{\lambda \omega} - e^{-\lambda \omega}}{2} \sin^{\mu} \omega d\omega = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\sin^{\mu+2} \omega}{\mu+2} + \frac{\lambda(\lambda^2 + 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\sin^{\mu+4} \omega}{\mu+4} \\ + \frac{\lambda(\lambda^2 + 2^2)(\lambda^2 + 4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\sin^{\mu+6} \omega}{\mu+6} + \dots$$

23. Mittelt der Substitution

$$\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} = x$$

und durch Anwendung der Reihen auf S. 236. des I. Theiles (Aufgabe 14.) erhält man, vorausgesetzt, dass ω zwischen $\sqrt{2} - 1$ und $\sqrt{2} + 1$ liegt,

$$\int \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda} \cos \mu \omega d\omega \\ = \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+1} - \frac{\mu^2 + 1^2}{1 \cdot 2 (\lambda+3)} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+3} \\ + \frac{(\mu^2 + 1^2)(\mu^2 + 3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (\lambda+5)} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+5} - \dots$$

24. Dasselbe Verfahren liefert unter gleicher Bedingung:

$$\int \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda} \sin \mu \omega d\omega \\ = \frac{\mu}{1(\lambda+2)} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+2} - \frac{\mu(\mu^2 + 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 (\lambda+4)} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+4} \\ + \frac{\mu(\mu^2 + 2^2)(\mu^2 + 4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (\lambda+6)} \left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \right)^{\lambda+6} - \dots$$