Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel II. Quadraturen und Rectificationen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel II.

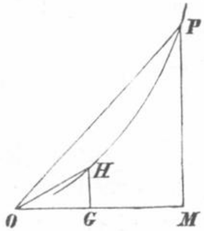
Quadraturen und Rectificationen.

§ 10.

Die Quadratur ebener Curven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Wenn es sich darum handelt, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes den Inhalt U derjenigen Fläche zu bestimmen, welche von der festen Ordinate GH, der beweglichen Ordinate MP, der Abscissenachse und der gegebenen Curve begrenzt wird, so gilt für $OM = x$ und $MP = y$ (Fig. 1) die Formel

Fig. 1.



1. $$U = \int y\,dx + Const.$$

Die Integrationsconstante ist hierbei so zu bestimmen, dass $U = 0$ wird für $x = OG$. Wählt man x zur unabhängigen Variabelen, so hat man die Gleichung der Curve nach y aufzulösen und den gefundenen Werth von y in No. 1. zu substituiren. Umgekehrt kann man auch y als unabhängige Variabele betrachten; die Curvengleichung ist dann nach x aufzulösen und der hieraus folgende Werth von dx in No. 1. einzusetzen. Wird die Curve durch zwei Gleichungen charakterisirt, in denen x und y als Functionen einer dritten unabhängigen Variabelen auftreten, so ist dx mithin auch $y\,dx$ durch diese Variabele auszudrücken.

Im Fall sämmtliche längs HP vorkommende Ordinaten negativ sind, erhält auch U einen negativen Werth; die Fläche einer Curve gilt daher als positiv oder negativ, jenachdem sie über oder unter der Abscissenachse liegt. Wenn die Curve HP die Abscissenachse schneidet, so liefert die Formel 1. nicht die arithmetische, sondern die algebraische Summe der einzelnen, über und unter der Abscissenachse liegenden Flächenstücke. Um die arithmetische Summe derselben zu finden, muss man die einzelnen Stücke einzeln berechnen und dabei von den verschiedenen Vorzeichen abstrahiren.

Erleidet die Curve HP eine Unterbrechung der Continuität, so besteht die Fläche aus getrennten Theilen, welche einzeln quadrirt werden müssen.

Die Fläche des Sectors HOP, welche S heissen möge, ergiebt sich mittelst der Formel

$$2. \qquad S = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx) + C.,$$

wobei hinsichtlich der Werthe von x, y, dx, dy dieselben Bemerkungen gelten wie für die Formel 1.

Für $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ d. h. bei Gebrauch von Polarcoordinaten wird aus der Formel 2.

$$3. \qquad S = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\theta + C.,$$

dabei hat man entweder r durch θ, oder θ mithin auch $d\theta$ durch r, oder r und θ durch eine dritte unabhängige Variable auszudrücken.

Erleidet die Curve HP eine Unterbrechung der Continuität, so besteht der Sector HOP aus mehreren Theilen, welche einzeln berechnet werden müssen.

Beispiel 1. Parabolische Curven. Wenn die Gleichung der Curve ist

$$k^{m-1}y = x^m,$$

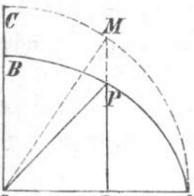
so unterscheide man die drei Fälle $m > -1$, $m = -1$, $m < -1$. Im ersten Falle beträgt die über der Abscisse x stehende Fläche den $(m+1)^{\text{ten}}$ Theil des Rechtecks aus Abscisse und Ordinate. Für $m = -1$ kommt man auf die bekannte Quadratur der gleichseitigen Hyperbel. Im Falle $m < -1$ kann man die Fläche nicht von $x = 0$ abrechnen, weil sie sonst unendlich gross werden würde; nimmt man dagegen die der positiven Abscisse a entsprechende Ordinate als feste Ordinate, so ist

$$U = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)k^{m-1}}.$$

Die von $x = a$ bis $x = \infty$ reichende Fläche besitzt hier einen endlichen Werth.

2. Die Ellipse. (Fig. 2.). Die über der Abscisse $OL = x$ stehende Fläche ist

Fig. 2.



$$U = \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right\}.$$

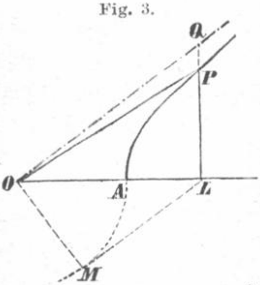
Für den Sector $AOP = S$ ergiebt sich durch Einführung des Winkels $AOM = \omega$

$$S = \tfrac{1}{2} ab\omega,$$

was einen leicht erkennbaren geometrischen Sinn hat.

3. Die Hyperbel. Wird $OL = x$, $LP = y$ und die Fläche $ALP = U$ gesetzt, so ist (Fig. 3.)

Fig. 3.



$$U = \tfrac{1}{2}\left\{xy - ab\, l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right\}.$$

Für den Sector $AOP = S$ ergiebt sich durch Einführung des Winkels $AOM = \omega$

$$S = \tfrac{1}{2} ab\, l\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\omega).$$

4. Die Gleichung der gegebenen Curve sei (vergl. Thl. I., S. 68.)

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x.$$

Bei der Quadratur desjenigen Zweiges, welcher nach unten convex gekrümmt ist und an der Stelle $x = 3a$ vom Negativen zum Positiven übergeht, sind die Fälle $x \leqq 3a$ und $x \geqq 3a$ zu unterscheiden. Für $x < 3a$ ist die von $x = 0$ bis zum Ende des x gerechnete Fläche negativ und zwar

$$U = \frac{2x(x - 5a)}{15}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

woraus sich z. B. als absolute Fläche des von der ganzen Curve gebildeten Blattes der Werth

$$\frac{8\sqrt{3}}{5} a^2$$

ergiebt. Im Falle $x > 3a$ hat die von $x = 3a$ bis zum Endpunkte des x gerechnete Fläche den Inhalt

$$U = \frac{4\sqrt{3}}{5} a^2 + \frac{2x(x - 5a)}{15}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

welcher Werth zu verdoppeln ist, wenn man die untere Fläche des zweiten Curvenzweiges im absoluten Sinne hinzunimmt.

Für $x = 5a$ entsteht ein Abschnitt von gleicher Grösse wie das vorher erwähnte Blatt.

5. Die schleifenähnliche Curve vierten Grades (vergl. Thl. I., S. 69.)

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

lässt sich algebraisch quadriren; über der Abscisse x ist die Fläche

$$U = \tfrac{1}{3} a^2 \left(1 - \frac{y^3}{x^3}\right).$$

Die Gesammtfläche der Curve beträgt $\frac{4}{3} a^2$.

6. Bei der Curve

$$x^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$$

ist die über der Strecke $x - a$ stehende Fläche

$$U = xy - ab \cdot arctan \frac{xy}{ab}$$

oder wenn

$$x = a\, sec\, \omega, \text{ mithin } y = b\, sin\, \omega$$

gesetzt wird,

$$U = ab\, (tan\, \omega - \omega).$$

7. In der Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

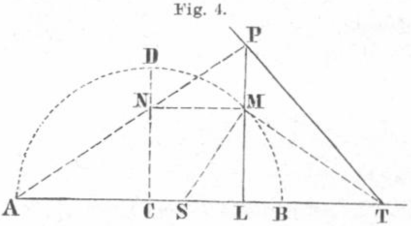
ist die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{8} ab \left\{\frac{x\,(5a^2 - x^2)}{a^4} \sqrt{a^2 - x^2} + 3\, arcsin \frac{x}{a}\right\}.$$

Die Gesammtfläche der Curve beträgt $\frac{3}{4} \pi ab$.

8. Verlegt man in der auf S. 69. des I. Thls. unter No. 7. betrachteten Curve den Coordinatenanfang nach der Spitze A, so erhält man als Gleichung der Curve (Fig. 4.)

Fig. 4.



$$a^2 y^2 = x^2 (2ax - x^2)$$

und für die über der Abscisse $AL = x$ stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} a^2\, arccos \frac{a - x}{a} - \frac{(a + x)(3a - 2x)}{6a} \sqrt{2ax - x^2}.$$

Für die Fläche, deren Basis die Abscisse des oberen Culminationspunktes ist, folgt hieraus der Werth $\frac{1}{3}\pi a^2$; der gesammte Flächeninhalt der Curve ist gleich der Fläche des erzeugenden Kreises.

9. Die Cissoide. Die Gleichung

$$(2a - x)\,y^2 = x^3$$

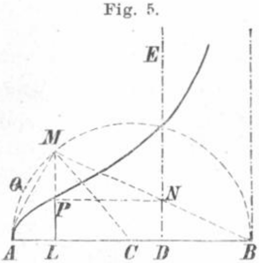
liefert für die über der Abscisse x stehende Fläche den Inhalt

$$U = \tfrac{3}{2}a^2 \, arccos \frac{a - x}{a} - \tfrac{1}{2}(3a + x)\sqrt{2ax - x^2}.$$

Der gesammte, zwischen der Curve und ihrer Asymptote liegende Flächenraum beträgt das Dreifache von der Fläche des erzeugenden Kreises.

10. Ueber $AB = 2a$ als Durchmesser (Fig. 5.) ist ein Kreis beschrieben und senkrecht zu AB eine Gerade DE in der Entfernung $BD = b$ gezogen; irgend ein Punkt M der Kreisperipherie wird einerseits auf AB projicirt, andererseits mit B durch die Gerade MB verbunden, welche DE in N schneidet, endlich sei $LP = DN$. Alle so construirten Punkte P liegen in einer Curve, welche für $AL = x$, $LP = y$ durch die Gleichung

Fig. 5.



$$y = b\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

oder wenn $\angle\, ACM = \omega$ gesetzt wird, durch die beiden Gleichungen

$$x = a\,(1 - cos\,\omega), \quad y = b\,tan\,\tfrac{1}{2}\omega$$

ausgedrückt werden kann. (Die in Thl. I., S. 71. unter No. 9. betrachtete Curve stellt hiervon den speciellen Fall $b = 2a$ dar.) Die über der Abscisse x stehende Fläche ist

$$U = ab\,(\omega - sin\,\omega)$$

und steht in constantem Verhältnisse zu dem Kreisabschnitte $AMQA$. Die gesammte, zwischen der Curve und ihrer Asymptote enthaltene Fläche beträgt $2\pi ab$.

11. Es sei die in Thl. I., S. 71. unter No. 10. betrachtete Curve zu quadriren, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Benutzt man in dem Integrale für U die Substitution $x = \xi^3$, so findet man als Fläche über der Abscisse x

$$U = \tfrac{1}{16}\left\{3a^2 \arcsin \sqrt[3]{\frac{x}{a}} - x^{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}\right\}$$

und die Gesammtfläche $= \frac{3}{8}\pi a^2$.

Eleganter gestaltet sich die Quadratur, wenn man

$$x = a \cos^3 \omega, \quad y = a \sin^3 \omega$$

setzt und die Fläche des Sectors bestimmt, welcher von OA, dem Radiusvector OP und der Curve begrenzt wird; man erhält

$$S = \tfrac{3}{64} a^2 (4\omega - \sin 4\omega).$$

Dasselbe Verfahren passt auch auf die Evolute der Ellipse.

12. Auf einer Geraden sind zwei feste Punkte A und B gegeben (Fig. 6.) und mit einem veränderlichen Punkte P geradlinig verbunden; für den Fall, dass zwischen den nach derselben Drehungsrichtung gerechneten Winkeln $DAP = \varphi$ und $DBP = \psi$ die Beziehung $\psi = 3\varphi$ stattfindet, ist der geometrische Ort des Punktes P eine Curve dritten Grades, deren Gleichung lautet

$$y = \pm (\tfrac{1}{2}c + x)\sqrt{\frac{c - x}{c + x}};$$

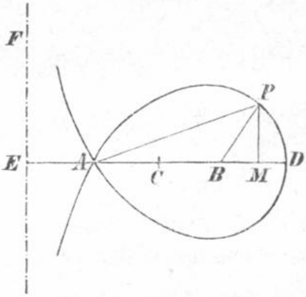
hierbei ist $AB = c$ gesetzt, der Mittelpunkt C von AB zum Coordinatenanfange und CD zur Abscissenachse genommen. Die Curve besitzt eine verticale Asymptote in der Entfernung $CE = -c$ und schneidet die Abscissenachse in zwei Punkten A und D, deren Abscissen sind $CA = -\frac{1}{2}c$ und $CD = +c$. Für $CM = x$ ist der Inhalt der über der Abscisse $c - x = MD$ stehenden Fläche MDP

$$U = \tfrac{1}{2}\sqrt{(c - x)^3 (c + x)}.$$

Die von der Curve gebildete Schlinge umschliesst den Flächenraum

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} c^2;$$

Fig. 6.



ebenso gross ist auch die Fläche zwischen der Asymptote und den beiden von A aus nach der Asymptote zu laufenden unendlichen Zweigen der Curve.

13. Die logarithmische Linie. In der Curve

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

ist die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = ab\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right) = a\,(y - b).$$

Die von $x = 0$ bis $x = -\infty$ reichende Fläche hat die endliche Grösse ab.

14. Die Gewölblinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2} b\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ergiebt sich für die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} ab\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\sqrt{y^2 - b^2},$$

wonach U leicht zu construiren ist.

15. Die Tractorie der Geraden. Beachtet man, dass aus der Gleichung der Curve nämlich

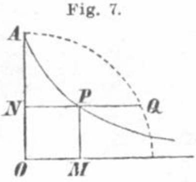
$$x = \tfrac{1}{2} a\, l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

folgt

$$dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy,$$

so erhält man für die mit $x = 0$ und $y = a$ beginnende Fläche (Fig. 7.)

Fig. 7.



$$U = \tfrac{1}{2}\left\{a^2 \arccos\frac{y}{a} - y\sqrt{a^2 - y^2}\right\};$$

dieselbe ist demnach gleich der Fläche $ANQA$ in dem mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreise. Die Gesammtfläche der Curve kommt der Fläche des erwähnten Kreises gleich.

16. Die Cycloide. Bezeichnet ω den Wälzungswinkel, so ist (Thl. I., S. 87., No. 14.)

$$x = b\,(\omega - \sin\omega),\quad y = b\,(1 - \cos\omega)$$

und hieraus folgt für die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} b^2\,(3\omega - 4\sin\omega + \sin\omega\cos\omega).$$

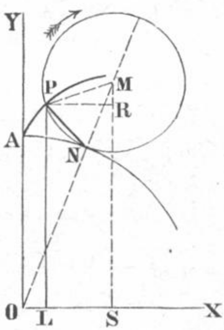
Der Flächeninhalt der ganzen Cycloide beträgt demnach das Dreifache vom Flächeninhalte des erzeugenden Kreises.

17. Die Epicycloide und die Hypocycloide. Vertauscht man in den auf S. 90. des I. Thls. angegebenen Gleichungen x und y gegen einander, so dass nunmehr OA die Abscissenachse ist, so hat man als Gleichungen der Curve (Fig. 8.)

$$x = (a + b)\cos\frac{b\omega}{a} - b\cos\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b)\sin\frac{b\omega}{a} - b\sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

Fig. 8.



und hieraus findet sich als Fläche des zwischen OA und OP enthaltenen Sectors

$$S = \frac{(a+b)(a+2b)b}{2a}(\omega - \sin\omega).$$

Dieselbe steht in constantem Verhältniss zu dem zwischen der Sehne NP und dem Bogen NP liegenden Abschnitte des rollenden Kreises. Für $\omega = 2\pi$ wird der Sector gleich einer gewissen Kreisfläche.

Nimmt man b und ω gleichzeitig negativ, so erhält man die entsprechende Formel für die Hypocycloide.

18. Spiralen, deren Gleichungen unter der Form

$$r = a\theta^m$$

enthalten sind, liefern

$$S = \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{\theta^{2m+1}}{2m+1} + Const.\right), \quad m \gtrless -\tfrac{1}{2}.$$

Im Falle $m > -\frac{1}{2}$ kann man den Sector von $\theta = 0$ an rechnen, wodurch $Const. = 0$ wird; für $m < -\frac{1}{2}$ nimmt man am zweckmässigsten die Fläche von $\theta = 1$ an.

Hiernach ist für die Spirale des Archimedes:

$$S = \tfrac{1}{6}a^2\theta^3 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r^2}{a},$$

für die parabolische Spirale:

$$S = \tfrac{1}{4}a^2\theta^2 = \left(\frac{r^2}{2a}\right)^2,$$

für die hyperbolische Spirale:

$$S = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = \frac{a(a-r)}{2}.$$

Die gesammte, von $\theta = 1$ bis $\theta = \infty$ reichende Fläche ist hier von endlicher Grösse $= \frac{1}{2} a^2$.

Für den Ausnahmefall $m = -\frac{1}{2}$, welcher der reciproken parabolischen Spirale entspricht, ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} a^2\, l\theta = a^2\, l\left(\frac{a}{r}\right),$$

wobei der Sector von $\theta = 1$ an gerechnet ist.

19. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung

$$r = a e^{\beta\theta}$$

ergiebt sich für den von $\theta = 0$ an gerechneten Sector

$$S = \frac{a^2\,(e^{2\beta\theta} - 1)}{4\beta} = \frac{r^2 - a^2}{4\beta}.$$

Die von $\theta = 0$ bis $\theta = -\infty$ reichende Fläche hat die Grösse $\frac{a^2}{4\beta}$.

20. Die Cardioide. Die Polargleichung

$$r = 2a\,(1 + \cos\theta)$$

führt zu der Formel

$$S = a^2\,(3\theta + 4\sin\theta + \sin\theta\cos\theta),$$

wobei der Sector von $\theta = 0$ an gerechnet ist. Die Gesammtfläche der Curve beträgt das Sechsfache des erzeugenden Kreises.

21. Die Lemniscate. Aus der Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

folgt, wenn der Sector von $\theta = 0$ an gerechnet wird,

$$S = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2\theta,$$

was sich einfach construiren lässt. Die Gesammtfläche der Curve ist gleich dem Quadrate über der Halbachse a.

22. Die Fusspunktcurve der Ellipse. Für den von $\theta = 0$ an gerechneten Sector der Curve

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$

findet man

$$S = \tfrac{1}{8} \left\{(a^2 + b^2)\, 2\theta + (a^2 - b^2) \sin 2\theta\right\};$$

die Gesammtfläche der Curve kommt der Fläche eines mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ beschriebenen Kreises gleich.

23. Projicirt man den Mittelpunkt einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse auf alle Normalen der letzteren, so bilden die erhaltenen Fusspunkte eine Curve, deren Gleichung ist

$$r = \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}};$$

der von $\theta = 0$ an gerechnete Sector besitzt den Inhalt

$$S = \tfrac{1}{8}\left\{(a^2 + b^2)\,2\theta + (a^2 - b^2)\sin 2\theta\right\} - \frac{ab}{2}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right).$$

Bezeichnen S_1, S_2, S_3 die drei Sectoren der Ellipse, der Tangentenfusspunktcurve (No. 22.) und der soeben besprochenen Curve, so findet die Relation $S_3 = S_2 - S_1$ statt.

24. Der geometrische Ort des Endpunktes der Polarnormale der Ellipse wird durch folgende Gleichung bestimmt (Thl. I., S. 101., Aufg. 6.)

$$r^2 = \frac{a^2b^2\,(a^2 - b^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3};$$

für den von $\theta = 0$ an gerechneten Sector ergiebt sich hieraus

$$S = \frac{(a^2 - b^2)^2}{16}\left\{\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right) - \frac{(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^2}\right\}.$$

Der Gesammtflächeninhalt der Curve ist

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{(a^2 - b^2)^2}{ab}.$$

25. Die Kreisevolvente. Aus den Gleichungen

$$r = a\sqrt{1 + \omega^2}, \qquad \theta = \omega - \arctan\omega$$

erhält man für die von $\omega = 0$ an gerechnete Sectorenfläche

$$S = \tfrac{1}{6}a^2\omega^3;$$

dieselbe kann als der dritte Theil einer gewissen Dreiecksfläche betrachtet werden.

26. Die Tractorie des Kreises. Die Gleichungen

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \qquad \theta = \omega - \operatorname{artan}\omega$$

liefern für die mit $\omega = 0$ beginnende Sectorenfläche

$$S = \tfrac{1}{4}a^2\left(\arctan\omega - \frac{\omega}{1 + \omega^2}\right) = \tfrac{1}{4}\left[(a^2 - r^2)\,\omega - a^2\theta\right],$$

was sich mittelst zweier Kreissectoren construiren lässt.

27. Durch die beiden Gleichungen

$$x = a[(1 - \omega^2)\cos\omega + 2\omega\sin\omega - 1],$$
$$y = a[(1 - \omega^2)\sin\omega - 2\omega\cos\omega]$$

wird eine vom Coordinatenanfange ausgehende Spirale charakterisirt; dabei ist

$$x\,dy - y\,dx = a^2\omega^2(1 + \omega^2)\,d\omega$$

mithin die Fläche des von $\omega = 0$ an gerechneten Sectors

$$S = \tfrac{1}{30}a^2\omega^3(5 + 3\omega^2)$$

oder auch

$$S = \frac{3\varrho^2 - a\varrho - 2a^2}{30}\sqrt{\frac{\varrho - a}{a}},$$

wobei ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

28. In eine gegebene Parabel ist eine Gerade von constanter Länge als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer unendlich vielen möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Parabel gelegt; man sucht die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Curve und deren Fläche.

Ist in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$y = \frac{x^2}{2h}$$

die Gleichung der Parabel, mithin

$$\eta - y = \frac{x}{h}(\xi - x)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte xy, bezeichnen ferner x_0, y_0 und x_1, y_1 die Coordinaten der Endpunkte der constanten Sehne $2c$, ξ und η die Coordinaten des Tangentendurchschnittes, so müssen folgende fünf Bedingungen erfüllt sein:

$$\alpha)\qquad h(\eta - y_0) = x_0(\xi - x_0),\quad h(\eta - y_1) = x_1(\xi - x_1),$$

$$\beta)\qquad 2hy_0 = x_0^2,\qquad 2hy_1 = x_1^2,$$

$$\gamma)\qquad (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 4c^2.$$

Aus den Gleichungen β) erhält man mit Rücksicht auf α)

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \xi,$$

ferner, wenn hierzu die Gleichung γ) genommen wird,

$$\frac{x_0 - x_1}{2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \xi^2}};$$

diese Gleichungen liefern x_0, x_1, und nachher geben die Gleichungen α)

$$\eta = \frac{\xi^2}{2h} - \frac{c^2 h}{2\,(h^2 + \xi^2)},$$

oder wenn der Coordinatenanfang um $\frac{c^2}{2h}$ abwärts verschoben wird,

$$\eta = \frac{c^2}{2h} + \frac{\xi^2}{2h} - \frac{c^2 h}{2\,(h^2 + \xi^2)}.$$

Die Fläche zwischen dieser Curve und der Parabel beträgt, von $\xi = 0$ an gerechnet,

$$U = \tfrac{1}{2} c^2 \arctan \frac{\xi}{h}.$$

Die gesammte, zwischen der Ortscurve und der Parabel enthaltene Fläche ist $= \frac{1}{2}\pi c^2$, also unabhängig vom Parameter der Parabel und gleich der Fläche des über $2c$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises.

29. In einer Ellipse ist eine Gerade von der constanten Länge $2c$ als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Ellipse gelegt; man sucht die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Curve und deren Fläche.

Bezeichnet man ebenso wie in der vorigen Aufgabe, schreibt als Gleichung der Ellipse $Ax^2 + By^2 = 1$ und setzt $\frac{1}{c^2} = C$, so sind folgende fünf Bedingungen zu erfüllen

$$\alpha)\qquad A x_0 \xi + B y_0 \eta = 1, \quad A x_1 \xi + B y_1 \eta = 1,$$

$$\beta)\qquad A {x_0}^2 + B {y_0}^2 = 1, \quad A {x_1}^2 + B {y_1}^2 = 1,$$

$$\gamma)\qquad (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = \frac{4}{C}.$$

Die Differenz der Gleichungen α) giebt mit γ) zusammen

$$\delta)\quad x_0 - x_1 = \frac{2B\eta}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}},\ y_0 - y_1 = -\frac{2A\xi}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}};$$

ferner erhält man aus der Differenz der Gleichungen β)

$$\frac{B(y_0 + y_1)}{A(x_0 + x_1)} = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}$$

oder wenn rechter Hand die Werthe in δ) benutzt werden,

$$\eta(x_0 + x_1) - \xi(y_0 + y_1) = 0.$$

Nimmt man hierzu die Summe der Gleichungen α) nämlich

$$A\xi(x_0 + x_1) + B\eta(y_0 + y_1) = 2,$$

so hat man zwei Gleichungen mit den Unbekannten $x_0 + x_1$ und $y_0 + y_1$; für letztere findet man

$$\varepsilon) \qquad x_0 + x_1 = \frac{2\xi}{A\xi^2 + B\eta^2}, \quad y_0 + y_1 = \frac{2\eta}{A\xi^2 + B\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen δ) und ε) erhält man die Werthe von x_0 und y_0, welche man nur in die erste der Gleichungen α) zu substituiren braucht, um die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η zu erhalten, nämlich

$$C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)(A\xi^2 + B\eta^2 - 1) = AB(A\xi^2 + B\eta^2)^2.$$

Setzt man

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2},$$

und führt Polarcoordinaten ein mittelst der gewöhnlichen Substitutionen $\xi = \varrho \cos\theta$, $\eta = \varrho \sin\theta$, so erhält man

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}} + \frac{1}{\frac{b^2 - c^2}{c^2} \cdot \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cdot \frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

oder kurz

$$\varrho^2 = r^2 + r_1^2,$$

wobei r den zum Polarwinkel θ gehörenden Radiusvector der gegebenen Ellipse, r_1 dagegen den zum nämlichen Polarwinkel gehörenden Vector eines Hülfskegelschnittes bedeutet. Für $c < b$ ist dieser Hülfskegelschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2 - c^2}}, \; b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2 - c^2}};$$

für $c = b$ wird derselbe zu zwei Geraden, welche in den Entfernungen $\pm \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ parallel zur Abscissenachse liegen und die Asymptoten der Ortscurve bilden; für $c > b$ (aber $c < a$) geht der Hülfskegelschnitt in eine Hyperbel über, deren Asymptoten zugleich Asymptoten der Ortscurve sind. Nach diesen Bemerkungen führt die Gleichung $\varrho = \sqrt{r^2 + r_1^2}$ zu einer leichten Construction der gesuchten Curve.

Bezeichnet S den mit $\theta = 0$ anfangenden Sector der gegebenen Ellipse, S_1 den Sector des Hülfskegelschnittes, und Σ den Sector der Ortscurve, so ist immer

$$\Sigma = S + S_1.$$

Die gesammte, zwischen der Ortscurve und dem Hülfskegelschnitte enthaltene Fläche kommt der Ellipsenfläche gleich.

30. In eine Hyperbel ist eine Gerade von der constanten Länge $2c$ als Sehne eingetragen und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Hyperbel gelegt; man sucht die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Curve und deren Fläche.

Als Polargleichung der Ortscurve ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}} - \frac{1}{\frac{b^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

oder

$$\varrho^2 = r^2 - r_1^2,$$

worin r den Radiusvector der gegebenen Hyperbel, r_1 den Vector eines Hülfskegelschnittes bedeutet. Letzterer ist für $c < a$ eine aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

construirte Ellipse, welche in dem speciellen Falle $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ zu einem Kreise wird. Für $c = a$ besteht der Hülfskegelschnitt aus zwei Geraden, welche in den Entfernungen $\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ parallel zur Ordinatenachse liegen; für $c > a$ wird er zu einer Hyperbel. In jedem Falle sind die Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel zugleich Asymptoten der Ortscurve.

Zwischen den Sectoren S, S_1, Σ der gegebenen Hyperbel des Hülfskegelschnittes und der Ortscurve besteht die Relation

$$\Sigma = S - S_1.$$

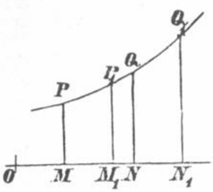
In dem Falle $c < a$ ist die gesammte zwischen der Hyperbel und der Ortscurve liegende Fläche von endlicher Grösse und lässt sich durch einen Kreissector darstellen.

§ 11.

Vermischte Aufgaben über Qnadraturen.

I. Auf der Abscissenachse hat man eine Reihe gleicher Strecken $MM_1 = NN_1 \cdots = h$ abgeschnitten (Fig. 9.) und darüber die Flächen MM_1P_1P, NN_1Q_1Q u. s. w. construirt, welche von einer durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Curve begrenzt werden; man sucht die grösste oder kleinste dieser Flächen.

Fig. 9.



Wenn für den Augenblick

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

gesetzt wird, so ist $F(x+h) - F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen; hieraus folgt

$$F'(x+h) - F'(x) = 0 \text{ oder } f(x+h) = f(x),$$

ein Maximum oder Minimum kann also nur dann eintreten, wenn die Ordinaten MP und M_1P_1 gleich sind.

Beispiel 1. Für die Curve

$$b^2 y = a^2 x - x^3$$

ergiebt sich

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\tfrac{1}{3}(4a^2 - h^2)} - h\right\},$$

und zwar entspricht diesem Werthe das Maximum des Flächenstreifens MM_1P_1P, falls $h < 2a$ ist.

Beispiel 2. Für die Curve

$$y = \frac{b^2 x}{a^2 + x^2}$$

erhält man, dem Maximum des Flächenstreifens entsprechend,

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 + h^2} - h\right).$$

Beispiel 3. Für die Curve

$$y = x - b e^{\frac{x}{a}}$$

ist

$$x = a l\left\{\frac{a\varkappa}{b(e^\varkappa - 1)}\right\}, \qquad \varkappa = \frac{h}{a},$$

und zwar entspricht diesem Werthe das Maximum des Flächenstreifens.

II. Wie bei der vorigen Aufgabe sei $MM_1 = NN_1 \cdots$ constant $= h$; man verlangt dasjenige x, bei welchem der zwischen dem Bogen PP_1 und der zugehörigen Sehne enthaltene mondförmige Abschnitt die grösste oder kleinste Fläche besitzt.

Das Maximum oder Minimum des Segmentes

$$\tfrac{1}{2}h\,[f(x+h)+f(x)] - [F(x+h) - F(x)]$$

tritt ein, wenn die Bedingung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f'(x+h)+f'(x)}{2}$$

erfüllt ist. Bezeichnet man mit σ den Winkel zwischen der Sehne PP_1 und der Abscissenachse, mit τ und τ_1 die Winkel, welche die Tangenten in P und P_1 mit der x-Achse bilden, so kann man die vorstehende Bedingung in der einfachen Form darstellen

$$\tan\sigma = \tfrac{1}{2}(\tan\tau + \tan\tau_1).$$

Beispiel. Die Gleichung der Curve sei

$$b^3 y = x^3(a - x);$$

es ergiebt sich dann

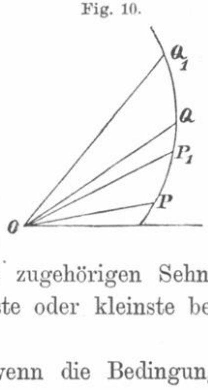
$$x = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}h,$$

und zwar entspricht diesem Werthe das Minimum des Segmentes.

III. Unter allen in einer gegebenen Curve möglichen Sectoren POP_1, deren Centriwinkel POP_1 constant $= \gamma$ ist, soll der an Fläche grösste oder kleinste Sector bestimmt werden. (Fig. 10.)

Das Maximum oder Minimum tritt ein, wenn die einschliessenden Radienvectoren $OP = r$ und $OP_1 = r_1$, absolut genommen von gleicher Grösse sind.

Fig. 10.



Beispiel. In der Curve

$$r = \tfrac{1}{2}a\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)$$

erhält der Sector seinen Minimalwerth für

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\gamma^2+4} - \gamma\right).$$

IV. Unter allen, demselben Centriwinkel γ entsprechenden, von dem Bogen PP_1 und der zugehörigen Sehne begrenzten Segmenten soll das an Fläche grösste oder kleinste bestimmt werden.

Das Maximum oder Minimum tritt ein, wenn die Bedingung

$$r_1^2 - r^2 = \left(r\frac{dr_1}{d\theta} + r_1\frac{dr}{d\theta}\right) sin\gamma$$

erfüllt ist.

Beispiel. Für die reciproke parabolische Spirale erhält man

$$\theta = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - sin^2\gamma}} - 1\right)$$

und zwar entspricht diesem Werthe das Minimum des Segmentes.

V. In einer Curve sind Sehnen so gelegt, dass durch sie mondförmige Curvensegmente von gleicher Fläche abgeschnitten werden; man sucht die Einhüllende jener Sehnen.

In Beziehung auf rechtwinklige Coordinaten sei $y = f(x)$ die Gleichung der Curve und zur Abkürzung

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.;$$

ferner mögen p und q die Abscissen der beiden Curvenpunkte bezeichnen, durch welche die Sehne geht, endlich sei c^2 die Fläche des abgeschnittenen Segmentes; als Gleichung der Sehne hat man

$$(q-p)y - [f(q) - f(p)]x = qf(p) - pf(q)$$

und dabei sind p und q an die Bedingung gebunden

$$\tfrac{1}{2}(q-p)\left\{f(q) + f(p)\right\} - \left\{F(q) - F(p)\right\} = c^2.$$

Differenzirt man diese Gleichungen indem man q als abhängig von p betrachtet, und eliminirt aus den vier vorhandenen Gleichungen p, q und $\frac{dq}{dp}$, so erhält man die Gleichung der Einhüllenden.

Beispiel 1. Nimmt man als Gleichung der Parabel

$$y = \frac{x^2}{a},$$

so werden die obigen zwei Gleichungen zu den folgenden

$$(p+q)x - ay = pq, \qquad (q-p)^3 = 6ac^2$$

und aus ihnen ergiebt sich

$$y = \frac{x^2}{a} + b,$$

wobei alle Segmente demjenigen Segmente gleichkommen, welches die Gerade $y = b$ von der ursprünglichen Parabel abschneidet.

Beispiel 2. Bei der Ellipse ist es zweckmässig

$$p = a\,sin\,\varphi, \qquad f(p) = b\,cos\,\varphi$$
$$q = a\,sin\,\psi, \qquad f(q) = b\,cos\,\psi$$

zu setzen; man findet dann leicht, dass die Einhüllende eine der ursprünglichen Ellipse ähnliche Ellipse ist.

Für die Hyperbel gilt ein analoger Satz.

Beispiel 3. Die gegebene Curve sei eine Parabel dritten Grades, nämlich

$$y = \frac{x^3}{a^2};$$

die zwei Anfangsgleichungen sind dann

$$(p^2 + pq + q^2)x - a^2 y = (p + q)pq,$$
$$(q - p)^3 (q + p) = 4a^2 c^2.$$

Aus der Vergleichung der hiernach berechneten Werthe von $\frac{dq}{dp}$ erhält man

$$p + q = 2x$$

nachher p, q und schliesslich als Gleichung der Einhüllenden

$$y = \frac{x^3}{a^2} + \sqrt[3]{b^2 x},$$

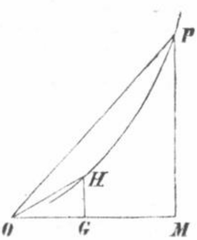
wobei b zur Abkürzung eingeführt ist.

§ 12.

Die Rectification ebener Curven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Ist die gegebene Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen (Fig. 11.), $OM = x$, $MP = y$ und s der zu rectificirende Bogen, welcher von dem festen Punkte H und dem beweglichen Punkte P begrenzt wird, so gilt die Formel

Fig. 11.



$$1.\quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx + Const.$$

wobei die Integrationsconstante so zu bestimmen ist, dass $s = 0$ wird für $x = OG$. Die vorstehende Formel findet unmittelbare Anwendung, wenn x als unabhängige Variabele betrachtet und demgemäss die Gleichung der Curve nach y aufgelöst werden kann. Falls es dagegen leichter ist, die Curvengleichung nach x aufzulösen, nimmt man y zur unabhängigen Variabelen und schreibt

$$2. \qquad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy + Const.$$

Wird die Curve durch zwei Gleichungen charakterisirt, in denen x und y als Functionen einer dritten unabhängigen Variabelen erscheinen, so sind auch dx und dy durch diese Variabele auszudrücken.

In Polarcoordinaten hat man, falls r als Function von θ angesehen wird

$$3. \qquad s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta + Const.,$$

und umgekehrt, wenn θ als Function von r betrachtet wird,

$$4. \qquad s = \int \sqrt{1 + \left(r\,\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \cdot dr + Const.$$

Sind r und θ von einer dritten Variabelen abhängig, so sind auch dr und $d\theta$ durch diese auszudrücken.

Im Fall die Curve HP eine Unterbrechung der Continuität erleidet, besteht dieselbe aus einzelnen, für sich continuirlichen Bögen; letztere müssen dann einzeln rectificirt werden.

Beispiel 1. Die Parabel. Nimmt man als Gleichung der Curve

$$y = \frac{x^2}{2h},$$

so erhält man für den vom Scheitel bis zum Punkte xy gerechneten Bogen

$$s = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{h^2 + x^2}}{h} + hl\left(\frac{x + \sqrt{h^2 + x^2}}{h}\right)\right\}.$$

Der zwischen zwei Punkten xy und $x_1 y_1$ enthaltene Bogen ist

$$s_1 - s = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x_1\sqrt{h^2 + x_1^2} - x\sqrt{h^2 + x^2}}{h} + hl\left(\frac{x_1 + \sqrt{h^2 + x_1^2}}{x + \sqrt{h^2 + x^2}}\right)\right\}.$$

Versteht man unter $\varkappa$ irgend eine absolute Zahl und setzt

$$\tfrac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) = \lambda, \qquad \tfrac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{1}{\varkappa}\right) = \mu,$$

$$x_1 = \lambda x + \mu\sqrt{h^2 + x^2},$$

so wird

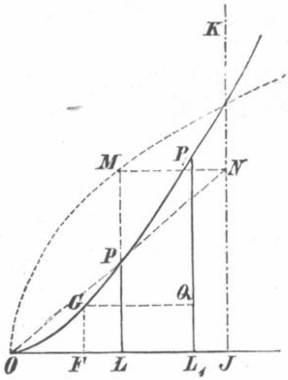
$$\sqrt{h^2 + x_1^2} = \mu x + \lambda\sqrt{h^2 + x^2},$$

und hieraus folgt

$$s_1 - s = \tfrac{1}{2}\left\{\mu\,\frac{\lambda\,(h^2+2x^2)+2\mu x\sqrt{h^2+x^2}}{h}+h\,l\varkappa\right\}.$$

2. Die semicubische Parabel lässt sich auf nachstehende Weise aus der gewöhnlichen Parabel herleiten. Es sei O der Scheitel, F der Brennpunkt der letzteren Parabel (Fig. 12.), $OF = a$, $OJ = 3a$, JK senkrecht zur Parabelachse; $OL = x$ und $LM = 2\sqrt{ax}$ mögen die Coordinaten eines Parabelpunktes M darstellen. Verbindet man den Fusspunkt N der von M auf JK gefällten Senkrechten mit O durch eine gerade Linie, so schneidet ON (oder deren Verlängerung) die Parabelordinate LM in einem Punkte P, welcher der semicubischen Parabel angehört und für welchen

Fig. 12.



$$LP = y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

ist. Der Bogen OP hat demnach die Länge

$$s = \tfrac{2}{3}\left\{\sqrt{\frac{(x+a)^3}{a}} - a\right\},$$

welche sich auf folgende Weise construiren lässt. Man nehme $LL_1 = a$ und vermindere die zu L_1 gehörige Ordinate L_1P_1 um die zum Punkte F gehörende Ordinate FG; der Rest P_1Q ist $= arc\ OP$.

3. Für die auf S. 68. des I. Thls. unter No. 5. betrachtete Curve hat man

$$y = \frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

und hieraus folgt für den vom Coordinatenanfange bis zum Punkte xy gerechneten Bogen

$$s = \frac{x+3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} = 2\sqrt{ax} + y = \sqrt{\tfrac{4}{3}x^2 + y^2}.$$

Die von der Curve gebildete Schlinge besitzt den Umfang $4\sqrt{3}\cdot a$.

4. Rechnet man in der Curve

$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}$$

den Bogen s vom unteren Culminationspunkte bis zum Punkte xy, so ist

$$s = \frac{x^3}{6a^2} - \frac{a^2}{2x} + \tfrac{1}{3}a.$$

5. Die Gleichung der Curve sei

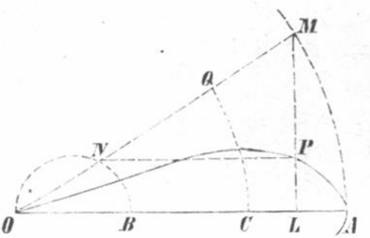
$$y = \tfrac{3}{8}\left\{\sqrt[3]{\frac{x^4}{a}} - 2\sqrt[3]{ax^2}\right\};$$

der vom Coordinatenanfange ab bis zum Punkte xy gerechnete Bogen ist dann

$$s = y + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2}.$$

6. Mit dem Radius $OA = a$ ist aus O ein Kreis beschrieben (Fig. 13.) und über den Durchmesser $OB = \frac{a}{\sqrt{8}}$ ein zweiter Kreis; wird nun durch O eine beliebige Gerade gelegt, welche den ersten Kreis in M, den zweiten in N schneidet, und durch M eine Senkrechte zu OA, durch N eine Parallele zu OA gelegt, so ist der Durchschnitt der letzteren zwei Geraden ein Punkt P, zwischen dessen Coordinaten $OL = x$ und $LP = y$ die Gleichung besteht

Fig. 13.



$$8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2).$$

Für den Bogen $OP = s$ der vom Punkte P beschriebenen Curve gilt die Formel

$$s = y + \frac{a}{\sqrt{2}}\, arcsin\, \frac{x}{a}\,.$$

Beschreibt man aus O mit dem Radius $OC = 2\,OB$ einen zwischen die Schenkel des Winkels AOM fallenden Kreisbogen CQ, so ist $arc\; OP = LP + arc\; CQ$. Der ganze Umfang der schleifenförmigen Curve gleicht der Peripherie des mit OC beschriebenen Kreises.

7. Die Gleichung der gegebenen Curve sei

$$9b^4x^2 = 4(y^2 - b^2)^3;$$

da es hier bequemer ist, nicht x sondern y als unabhängige Variabele zu betrachten, so drückt man auch s durch y aus und erhält

$$s = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{y^3}{b^2} - y + \tfrac{1}{3}b,$$

wobei der Bogen von dem Durchschnitte der Curve mit der Ordinatenachse an gerechnet ist.

8. Die Cissoide. Bezeichnet man den Durchmesser des erzeugenden Kreises mit b, so erhält man aus der Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{b-x}}$$

die folgende Formel für den Bogen

$$s = \tfrac{1}{2} b \int \sqrt{\frac{4b-3x}{b-x}} \cdot \frac{dx}{b-x}.$$

Die Integration ist leicht auszuführen mittelst der Substitution

$$\frac{4b-3x}{b-x} = u^2,$$

und zwar findet man für den vom Coordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s = b\left\{\sqrt{\frac{4b-3x}{b-x}} - 2 - \sqrt{3} \cdot l\left(\frac{\sqrt{4b-3x} + \sqrt{3(b-x)}}{(2+\sqrt{3})\sqrt{b}}\right)\right\}.$$

9. Bei der in Thl. I., S. 71. unter No. 10. betrachteten sternförmigen Curve ist es von Vortheil, die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

durch die beiden Gleichungen

$$x = a \cos^3\omega, \qquad y = a \sin^3\omega$$

zu ersetzen; der von A bis P gerechnete Bogen bestimmt sich dann mittelst der Formel

$$s = \tfrac{3}{2}\, a \sin^2\omega = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{a y^2},$$

wonach der Bogen $AP = \frac{3}{2}\, PS$ ist. Der Umfang der ganzen Curve gleicht dem Umfange des in den Kreis AQB beschriebenen regelmässigen Sechsecks.

10. Die Evolute der Ellipse. Bezeichnet a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse, so ist die Gleichung der Ellipsenevolute

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \qquad a_1 = \frac{a^2-b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2-b^2}{b},$$

wofür man bequemer schreibt

$$x = a_1 \cos^3\omega, \qquad y = b_1 \sin^3\omega.$$

Der Bogen vom Durchschnitte der Curve mit der Abscissenachse bis zum Punkte xy ist hiernach

$$s = \frac{\sqrt{(a_1^2 \sin^2\omega + b_1^2 \cos^2\omega)^3} - b_1^3}{a_1^2 - b_1^2}$$

und der ganze Umfang der Evolute

$$= 4\,\frac{a_1^3 - b_1^3}{a_1^2 - b_1^2} = 4\,\frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

11. Die Cardioide. Aus der Gleichung

$$r = 2a\,(1 + \cos\theta)$$

ergiebt sich für den von $\theta = 0$ ab gerechneten Bogen

$$s = 8a \sin \tfrac{1}{2}\,\theta.$$

Der ganze Umfang der Curve beträgt $16a$.

12. Die Gleichung einer Curve sei

$$y = al\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right);$$

der vom Coordinatenanfange aus gerechnete Bogen ist dann

$$s = al\left(\frac{a + x}{a - x}\right) - x.$$

13. Die Gleichung einer Curve sei

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a}{2}\,l\left(\frac{x}{a}\right);$$

für den vom unteren Culminationspunkte an gerechneten Bogen ergiebt sich dann

$$s = \frac{x^2 - a^2}{4a} + \frac{a}{2}\,l\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x^2}{2a} - (\tfrac{1}{2}\,a + y).$$

14. Die Gleichung einer Curve sei

$$y = 2al\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right) - 4\sqrt{ax};$$

der vom Coordinatenanfange aus gerechnete Bogen ist dann

$$s = 2al\left(\frac{a}{a - x}\right) - x.$$

15. Die logarithmische Linie. Aus der Gleichung

$$y = b e^{\frac{x}{a}} \text{ oder } x = a l \left(\frac{y}{b}\right)$$

folgt als Länge des Bogens, dessen Horizontalprojection x ist,

$$s = \sqrt{a^2 + y^2} - \sqrt{a^2 + b^2} + a l \left(\frac{b}{y} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right).$$

16. Die Kettenlinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ergiebt sich für die Länge des Bogens, welcher x zur Horizontalprojection hat

$$s = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2},$$

woraus eine einfache Construction des Bogens folgt.

17. Die Tractorie der Geraden. Aus der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2} a l \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

ergiebt sich als Länge des Bogens, dessen Horizontalprojection x ist

$$s = a l \left(\frac{y}{a}\right).$$

18. Die Spirale des Archimedes. Die Gleichung $r = a\theta$ liefert für den vom Coordinatenanfang gerechneten Bogen

$$s = \tfrac{1}{2} a \left\{\theta \sqrt{1 + \theta^2} + l\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right\}.$$

19. Die Polargleichung einer Curve sei

$$r = a\,(\theta^2 - 1);$$

für den von $\theta = 0$ ab gerechneten Bogen ist dann

$$s = a\,(\theta + \tfrac{1}{3}\theta^3).$$

Die von der Curve gebildete Schlinge hat den Umfang $\frac{8}{3} a$.

20. Die hyperbolische Spirale. Rechnet man den Bogen von dem Punkte an, dessen Radiusvector $= a$ ist, so führt die Gleichung $r\theta = a$ zu der Formel

$$s = a \left\{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta} + l\left(\frac{\theta + \sqrt{1 + \theta^2}}{1 + \sqrt{2}}\right)\right\}.$$

21. Die Gleichung einer Spirale sei

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r} + \frac{r}{a}\right)$$

und der Bogen werde von demjenigen Punkte an gerechnet, dessen Radiusvector $= a$ ist; man hat für diesen Fall

$$s = \frac{r^2 - a^2}{4a} + \frac{a}{2}\, l\left(\frac{r}{a}\right).$$

22. Die logarithmische Spirale. Rechnet man den Bogen von dem Punkte aus, dessen Radiusvector $= a$ ist, so führt die Gleichung $r = a e^{\beta\theta}$ zu der Formel

$$s = \frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\,(e^{\beta\theta} - 1) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\,(r - a).$$

Für $\theta = -\infty$ erhält man den von jenem Anfangspunkte bis zum asymptotischen Punkte gehenden, aus unendlich vielen Windungen bestehenden Bogen; derselbe ist von endlicher Grösse und seinem absoluten Werthe nach

$$= \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\, a.$$

23. Die Gleichung einer Spirale sei

$$r = a\,\frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta} + 1};$$

für den vom Coordinatenanfange ab gerechneten Bogen ergiebt sich

$$s = a\theta - r.$$

24. Die Kreisevolvente. Wird der Bogen vom Anfangspunkte der Curve aus gerechnet, so führt die Gleichung

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\,\frac{a}{r}$$

zu der Formel

$$s = \frac{r^2 - a^2}{2a},$$

welche eine einfache Construction gestattet.

25. Die Tractorie des Kreises. Aus der Gleichung

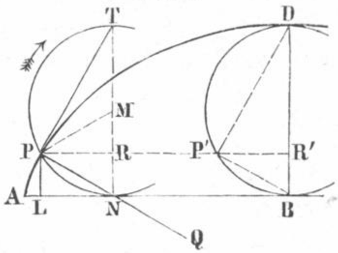
$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - Arccos\,\frac{r}{a}$$

ergiebt sich für den von $r = a$ an gerechneten Bogen

$$s = a\,l\left(\frac{r}{a}\right).$$

26. Die Cycloide. Ist $MN = b$ der Radius des erzeugenden Kreises, $\angle NMP = \omega$ der Wälzungswinkel, $AL = x$, $LP = y$ und $arc\ AP = s$ (Fig. 14.), so führen die Gleichungen

Fig. 14.



$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega)$$

zu der Formel

$$s = 4b\,(1 - \cos\tfrac{1}{2}\,\omega).$$

Die Länge eines Cycloidenzuges beträgt hiernach $8b$. Ferner ist

$$arc\ DP = 2\,DP'$$

oder für $DR' = \xi$, $arc\ DP = \sigma$

$$\sigma = 2\sqrt{2b\xi};$$

die vom Scheitel D an gerechneten Bögen lassen sich hiernach als Ordinaten einer Parabel construiren, deren Scheitel D und deren Brennpunkt B ist.

27. Die Epicycloide. Aus den Gleichungen

$$x = (a + b)\sin\frac{b\omega}{a} - b\sin\frac{(a + b)\,\omega}{a},$$

$$y = (a + b)\cos\frac{b\omega}{a} - b\cos\frac{(a + b)\,\omega}{a},$$

erhält man für den von $\omega = 0$ an gerechneten Bogen

$$s = \frac{4(a + b)b}{a}\,(1 - \cos\tfrac{1}{2}\,\omega),$$

mithin für einen ganzen Zug der Curve die Länge

$$\frac{8(a + b)b}{a}.$$

Der von der Mitte eines Zuges aus gerechnete Bogen lässt sich mit der Tangente am Endpunkte des Bogens in eine einfache Beziehung setzen.

Für die Hypocycloide gelten ähnliche Formeln.

28. Eine Curve sei durch folgende zwei Gleichungen bestimmt

$$x = (2a - b) \sin\varphi - (a - b) \sin^3\varphi,$$
$$y = (2b - a) \cos\varphi + (a - b) \cos^3\varphi;$$

der mit $\varphi = 0$ beginnende Bogen ist dann

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b)\varphi + \tfrac{3}{2}(a - b) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Der ganze Umfang der Curve gleicht der Peripherie eines mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}(a + b)$ beschriebenen Kreises.

29. Durch die beiden Gleichungen

$$x = a\,[(1 - \omega^2) \cos\omega + 2\omega \sin\omega - 1],$$
$$y = a\,[(1 - \omega^2) \sin\omega - 2\omega \cos\omega]$$

wird eine Spirale bestimmt; der vom Coordinatenanfange ausgehende Bogen ist

$$s = a\,(\omega + \tfrac{1}{3}\omega^3) = \frac{2a + \varrho}{3}\sqrt{\frac{\varrho - a}{a}},$$

wobei ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

30. Eine Curve sei durch folgende zwei Gleichungen bestimmt

$$r = a e^{\arcsin t}\sqrt{1 - t^2}, \qquad \theta = \arcsin t - \tfrac{1}{2}\, l(1 - t^2);$$

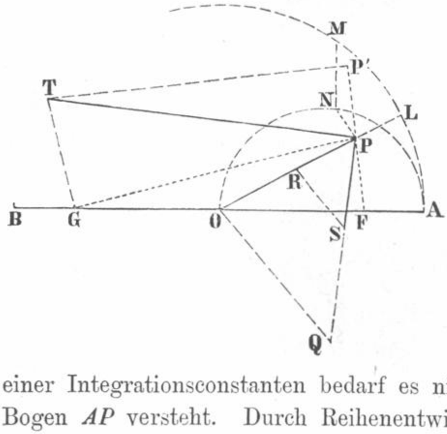
der von $t = 0$ ab gerechnete Bogen ist dann

$$s = \sqrt{2}\cdot a\left(e^{\arcsin t} - 1\right),$$

woraus für die Gesammtlänge der Spirale ein endlicher Werth folgt.

31. Die Lemniscate. Aus der Polargleichung $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ erhält man

Fig. 15.



$$s = a\int\frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}$$

oder, wenn man den Winkel $AOM = \varphi$ (Fig. 15.) mittelst der Gleichung

$$\sin\theta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$$

als unabhängige Variabele einführt,

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}};$$

einer Integrationsconstanten bedarf es nicht, sobald man unter s den Bogen AP versteht. Durch Reihenentwickelung ergiebt sich

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \left\{ P_0 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{P_4}{2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{P_6}{2^3} + \cdots \right\},$$

$$P_0 = \varphi, \quad P_n = \frac{1}{n} \left\{ (n-1) P_{n-2} - \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi \right\}.$$

Für den Lemniscatenquadranten $APO = q$ findet man einfacher

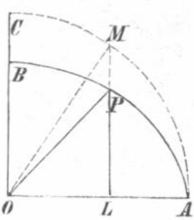
$$q = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \right\},$$

woraus folgt, dass die Länge der ganzen Curve $= 5{,}2441 \cdot a$ ist.

32. Die Ellipse. Ersetzt man die Gleichung der Curve durch die beiden Gleichungen

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi,$$

Fig. 16.



worin φ den Winkel COM (Fig. 16.) bedeutet, so ist die Länge des Bogens BP

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

oder, wenn ε die numerische Excentricität der Ellipse bedeutet

$$s = a \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

Mittelst des binomischen Satzes erhält man

$$s = a \left\{ P_0 - \frac{P_2}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{P_4}{4} \varepsilon^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{P_6}{6} \varepsilon^6 - \cdots \right\},$$

wobei P_0, P_2, P_4, etc. dieselbe Bedeutung haben wie in No. 31.

Für die Länge des Ellipsenquadranten ergiebt sich hieraus

$$E = \tfrac{1}{2} \pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots \right\}.$$

Wenn a und b wenig von einander verschieden sind, so kann man nach Thl. I., S. 246., No. 12. näherungsweis

$$E = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right\}$$

nehmen, und der begangene Fehler beträgt dann weniger als

$$\frac{\pi a}{100} \cdot \frac{\varepsilon^6}{1 - \varepsilon^2}.$$

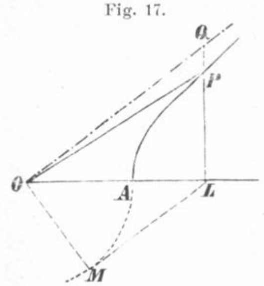
Bezeichnet E_1 den Quadranten einer aus den Halbachsen 1 und $\frac{b}{a}$ construirten Ellipse, welche der vorigen Ellipse ähnlich ist, so beträgt die entsprechende numerische Excentricität ε_1 ebensoviel wie ε, und daher ist

$$E = a E_1;$$

die Umfänge ähnlicher Ellipsen verhalten sich demnach wie deren Halbachsen. Auf diesem Satze beruht die Einrichtung einer Tafel der Ellipsenumfänge.

33. Die Hyperbel. Ersetzt man die Gleichung der Curve durch die beiden Gleichungen

Fig. 17.



$$x = a \sec\varphi, \qquad y = b \tan\varphi,$$

worin φ den Winkel AOM bezeichnet (Fig. 17.), so ist die Länge des Bogens AP

$$s = a\varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Mittelst des binomischen Satzes folgt hieraus

$$s = a\left\{\varepsilon \tan\varphi - \frac{Q_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\frac{Q_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{Q_4}{6\varepsilon^5} - \cdots\right\},$$

$$Q_0 = \varphi, \quad Q_n = \frac{1}{n}\left\{(n-1)\,Q_{n-2} + \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi\right\}.$$

Die Verlängerung der Ordinate LP schneidet von der Asymptote eine Strecke $OQ = z$ ab, deren Grösse ist

$$z = \varepsilon x = a\varepsilon \sec\varphi;$$

hiernach ist

$$z - s = a\varepsilon \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

$$+ \frac{a}{2\varepsilon}\left\{Q_0 + \frac{1}{2}\,\frac{Q_2}{2\varepsilon^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{Q_4}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\}.$$

Bei unendlich wachsenden x convergirt φ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\pi$ und es wird

$$Lim\,(z - s) = \frac{\pi a}{4\varepsilon}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{1}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\};$$

der Unterschied zwischen einer vom Coordinatenanfange aus ins Unendliche gehenden Asymptote und dem zugehörigen Hyperbelquadranten ist demnach von endlicher Grösse.

34. Durch die Gleichung

$$r = a\cos\theta + b$$

wird eine Curve charakterisirt, von welcher die Cardioide ein besonderer Fall ist; für den von $\theta = 0$ ab gerechneten Bogen erhält man

$$s = \int \sqrt{(a+b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta + (a-b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta} \cdot d\theta$$

Construirt man eine Ellipse aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \pm \frac{a-b}{2},$$

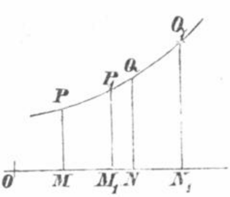
nimmt darin den Winkel $\varphi = \frac{1}{2}\theta$ und nennt s_1 den entsprechenden Ellipsenbogen, so ist $s = 4s_1$.

§ 13.

Vermischte Aufgaben über Rectificationen.

I. Auf der Abscissenachse hat man eine Reihe gleicher Strecken $MM_1 = NN_1 \cdots = h$ abgeschnitten, welche die Horizontalprojectionen der Bögen PP_1, $QQ_1 \cdots$ darstellen; man sucht den grössten oder kleinsten jener Bögen (Fig. 18.).

Fig. 18.



Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Curve $PP_1QQ_1 \cdots$, so tritt das Maximum oder Minimum ein, wenn die Bedingung

$$[f'(x+h)]^2 = [f'(x)]^2$$

stattfindet d. h. wenn die Tangenten in P und P_1 gleiche Winkel mit der Abscissenachse bilden.

Beispiel. In der Curve

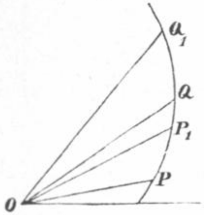
$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}$$

wird der fragliche Bogen am grössten für

$$x = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}h^2} - \tfrac{1}{2}h.$$

II. Unter allen in einer gegebenen Curve zu gleichen Centriwinkeln $POP_1 = QOQ_1 \cdots = \gamma$ gehörenden Bögen PP_1, QQ_1, $\cdots$ soll der grösste oder kleinste bestimmt werden. (Fig. 19.)

Fig. 19.



Ist $r = f(\theta)$ die Polargleichung der Curve, so tritt das gesuchte Maximum oder Minimum ein für

$$[f(\theta + \gamma)]^2 + [f'(\theta + \gamma)]^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

d. h. wenn die Polarnormalen in den Punkten P und P_1 gleich sind.

Beispiel. Die Gleichung der Curve sei

$$r = a(2\theta - \theta^2);$$

der fragliche Bogen wird dann am kleinsten für

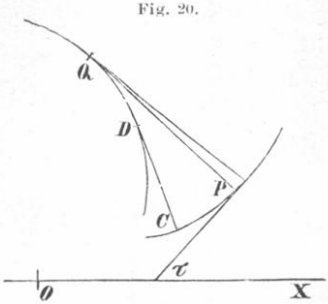
$$\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

§ 14.

Quadratur und Rectification zweier besonderen Gattungen von Curven.

I. Die Evoluten. In einer durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Curve sei C ein fester, P ein beweglicher Punkt (Fig. 20.), und es mögen diesen Punkten die Krümmungsmittelpunkte D und Q entsprechen; man sucht den Flächeninhalt V des Vierecks, welches von den Krümmungsradien CD, PQ, dem Bogen CP und dem zugehörigen Evolutenbogen DQ begrenzt wird.

Fig. 20.



Das Differential von V lässt sich als ein Kreissector betrachten, dessen Radius $QP = \varrho$ und dessen Centriwinkel $= d\tau$ ist; man hat demnach

$$dV = \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\tau$$

und vermöge der Werthe von ϱ und τ

$$V = \tfrac{1}{2}\int \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\, dx + Const.$$

Beispiele hierzu bieten die Parabel, Ellipse, Hyperbel, logarithmische Linie, Kettenlinie u. A.

Die Rectification der Evoluten beruht auf den für den Punkt Q geltenden Gleichungen

$$\xi = x - \varrho \sin\tau, \qquad \eta = y + \varrho \cos\tau.$$

Unter Rücksicht auf die Formeln

$$\cos\tau = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\tau = \frac{dy}{ds}, \qquad \varrho = \frac{ds}{d\tau}$$

erhält man

$$d\xi = -\sin\tau \cdot d\varrho, \qquad d\eta = +\cos\tau \cdot d\varrho$$

mithin für das Bogenelement $d\tau$ der Evolute

$$d\sigma = d\varrho,$$

woraus folgt

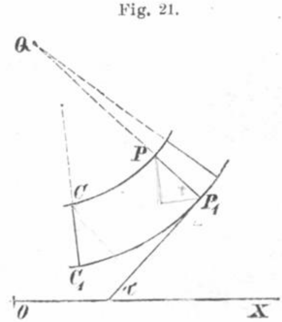
$$\sigma = \varrho + Const.$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei Punkte der Evolute an, so ergiebt sich, dass der zwischenliegende Bogen gleich der Differenz zwischen den entsprechenden Krümmungsradien der ursprünglichen Curve ist.

Wird ein vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer Faden um die Evolute herumgelegt, mit einem Ende an derselben befestigt und so abgewickelt, dass er immer gespannt bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt die ursprüngliche Curve (Evolvente). Ist die Gleichung der letzteren eine algebraische, so ist ϱ eine algebraische Function von x mithin auch von ξ, folglich kann die Evolute in diesem Falle algebraisch rectificirt werden.

II. Parallele Curven. Auf der zum beliebigen Punkte P einer gegebenen Curve gehörenden Normale PQ ist von P aus die Strecke $PP_1 = c$ abgeschnitten worden (Fig. 21.); verfährt man auf diese Weise mit allen Curvenpunkten, so erhält man als geometrischen Ort des Punktes P_1 eine neue Curve C_1P_1, welche der ersten parallel ist in der Entfernung $CC_1 = PP_1 = c$. Hierbei wird c als positiv oder negativ angesehen, jenachdem P_1 auf der Verlängerung des Krümmungshalbmessers QP oder umgekehrt liegt. Bezeichnen x_1 und y_1 die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P_1, so gelten die Gleichungen

Fig. 21.



$$x_1 = x + c\sin\tau, \qquad y_1 = y - c\cos\tau,$$

aus denen man erhält

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} : \frac{dx_1}{dx} = \frac{y''}{1 + \frac{cy''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}}$$

und für den Krümmungshalbmesser der Parallelcurve

$$\varrho_1 = \varrho + c.$$

Ferner ergiebt sich für die Bögen

$$s = \int sec\,\tau\, dx$$

$$s_1 = \int sec\,\tau\, dx_1 = \int sec\,\tau (dx + c\cos\tau\, d\tau)$$
$$= s + c\tau + Const.$$

Rechnet man beide Bögen von einer gemeinschaftlichen Normale CC_1 ab, welche mit der Ordinatenachse den Winkel γ einschliesst, so verschwinden $arc\, CP = s$ und $arc\, C_1 P_1 = s_1$ gleichzeitig für $\tau = \gamma$, und es ist daher

$$s_1 - s = c\,(\tau - \gamma)$$

also die Differenz der correspondirenden Bögen gleich einem Kreisbogen, welcher c zum Radius und den Winkel zwischen den begrenzenden Bögen zum Centriwinkel hat.

Das Differential der Fläche $CC_1P_1P = U$ lässt sich als Unterschied zweier Kreissectoren betrachten, daher

$$U = \tfrac{1}{2}\int \varrho_1^{\,2} d\tau - \tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\tau = \tfrac{1}{2} c \int (2\varrho + c)\, d\tau$$
$$= \tfrac{1}{2} c\,(2s + c\tau) + Const.$$

oder weil U für $\tau = \gamma$ verschwindet

$$U = cs + c^2(\tau - \gamma).$$

Unter Rücksicht auf die vorige Relation $c(\tau - \gamma) = s_1 - s$ wird hieraus

$$U = \tfrac{1}{2} c\,(s_1 + s)$$

d. h. die Fläche CPP_1C_1 kommt der Fläche eines Trapezes gleich, welches die Bögen CP, C_1P_1 zu parallelen Seiten und den Abstand CC_1 zur Höhe hat.

Die beiden erwähnten Sätze sind übrigens an die Bedingung gebunden, dass die parallelen Bögen keine Inflexionspunkte oder Spitzen enthalten.

§ 15.

Die Rectification räumlicher Curven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Wenn die Curve durch ihre Projectionen auf die Ebenen xy und xz bestimmt ist, so gilt für den zwischen einem festen Punkte $x_0 y_0 z_0$ und dem beweglichen Punkte xyz enthaltenen Bogen s die Formel

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx + Const.,$$

und zwar ist hier die Constante so zu bestimmen, dass s verschwindet, wenn gleichzeitig $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ gesetzt wird. Im Fall die Curve durch ihre Projectionen auf die Ebenen zy und zx bestimmt ist, hat man analog

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \cdot dz + Const.,$$

wobei für die Constante wieder die vorige Bemerkung gilt. Wenn die Curve durch drei Gleichungen in der Weise bestimmt ist, dass jede der Coordinaten x, y, z als Function einer vierten Variabelen t erscheint, so hat man dx, dy, dz mithin auch ds und s durch t auszudrücken.

Nicht selten sind unmittelbar nur zwei Flächen gegeben, als deren Durchschnitt die zu rectificirende Curve betrachtet wird; in diesem Falle müssen die Gleichungen von zwei Projectionen der Curve aus den Gleichungen jener Flächen hergeleitet werden.

Erleidet die Curve zwischen den Punkten $x_0 y_0 z_0$ und xyz Unterbrechungen der Continuität, so besteht der Bogen s aus mehreren Bögen, welche einzeln rectificirt werden müssen.

Beispiel 1. In der durch die Gleichungen

$$y = \frac{x^2}{2a}, \qquad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

bestimmten Curve ist der vom Coordinatenanfange ab gerechnete Bogen

$$s = x + z.$$

2. Die Gleichungen der Curve mögen sein

$$y = \frac{x^2}{4a}, \qquad z = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}};$$

es ist dann, wenn der Bogen vom Coordinatenanfange aus gerechnet wird,

$$s = x + y.$$

3. Die Gleichungen

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} + 2\sqrt{ax}, \qquad z = \sqrt{5ax}$$

geben für den vom Coordinatenanfang ab gerechneten Bogen

$$s = y + \frac{z}{\sqrt{5}}.$$

4. Aus den beiden Gleichungen

$$y = 2\sqrt{ax} - x, \qquad z = x - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

erhält man für den vom Coordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s = x + y - z.$$

5. Rechnet man in der Curve

$$y = 2\sqrt{2bx}, \qquad z = bl\left(\frac{x}{a}\right)$$

den Bogen von $x = a$ aus, so ist

$$s = x + z - a$$

6. Die Gleichungen

$$y = \sqrt{2ax - x^2}, \qquad z = al\left(\frac{2a}{2a - x}\right)$$

liefern für den vom Coordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s = al\left(\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x}}\right).$$

7. Aus den Gleichungen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad z = \tfrac{1}{4}al\left(\frac{a + x}{a - x}\right) - \tfrac{1}{2}x$$

ergiebt sich für den von $x = 0$ ab gerechneten Bogen

$$s = x + z.$$

8. Aus den Gleichungen

$$y = a \cdot arcsin\frac{x}{a}, \qquad z = \tfrac{1}{4}al\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$$

ergiebt sich für den vom Coordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s = x + z.$$

9. Die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

liefern für den von $x = a$ aus gerechneten Bogen

$$s = \varepsilon \sqrt{x^2 - a^2},$$

worin ε die numerische Excentricität der Horizontalprojection bedeutet.

10. Die Gleichungen der Curve mögen sein

$$x = \tfrac{1}{2} c\, l \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - z^2}}{c - \sqrt{c^2 - z^2}}\right) - \sqrt{c^2 - z^2}, \qquad y = c \cdot arcsin \frac{z}{c},$$

und der Bogen werde von $z = c$ an gerechnet; beachtet man, dass der Zunahme von z eine Abnahme von s entspricht, mithin ds negativ zu nehmen ist, so erhält man

$$s = x + \sqrt{c^2 - z^2}.$$

11. Eine Curve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$4ax = (y + z)^2, \qquad \tfrac{4}{3} x^2 + y^2 = z^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; beachtet man, dass die zweite Gleichung in der Form

$$(z + y)(z - y) = \tfrac{4}{3} x^2$$

dargestellt werden kann, so findet man leicht

$$z + y = 2\sqrt{ax}, \qquad z - y = \tfrac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

und hieraus

$$s = z\sqrt{2},$$

wobei der Bogen vom Coordinatenanfange aus gezählt ist.

12. Eine Curve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$(z - y)^2 = 3a(z + y), \qquad z^2 = \tfrac{9}{8} x^2 + y^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; auf ähnliche Weise wie vorhin findet man

$$z - y = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{ax^2}, \qquad z + y = \tfrac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}}$$

und für den vom Coordinatenanfange aus gezählten Bogen

$$s = z\sqrt{2}.$$

13. Eine Curve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$z = \frac{x^2 - y^2}{9c\sqrt{2}}, \qquad (x+y)^2 = \frac{3(x-y)z}{\sqrt{2}},$$

deren erste ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; drückt man x und y durch z aus, so erhält man für den vom Coordinatenanfange ab gerechneten Bogen

$$s = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + z.$$

14. Eine Curve sei bestimmt als Durchschnitt einer Cylinderfläche dritten Grades und eines elliptischen Kegels, deren Gleichungen sind

$$x^3 = a(y+z), \qquad z^2 = \tfrac{1}{3}x^2 + y^2;$$

rechnet man den Bogen von der Stelle aus, wo die Horizontalprojection der Curve die x-Achse schneidet; so erhält man

$$s = y\sqrt{2}.$$

15. Die zu rectificirende Curve sei die conische Schraubenlinie (Thl. I., S. 115.), welche als Durchschnitt der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\gamma, \quad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$$

angesehen werden kann; drückt man x und y durch z aus, so erhält man

$$s = \frac{1}{2\cos\gamma}\left\{\frac{z\sqrt{k^2+z^2}}{k} + k\,l\left(\frac{z+\sqrt{k^2+z^2}}{k}\right)\right\},$$

wobei der Bogen vom Coordinatenanfange aus gerechnet und zur Abkürzung $\frac{c}{\sin\gamma} = k$ gesetzt ist.

16. Der Durchschnitt der Flächen

$$x^2 + y^2 = cz, \qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$$

liefert eine paraboloidische Schraubenlinie; der vom Coordinatenanfange gerechnete Bogen wird durch die Formel

$$s = \sqrt{cz} + \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{c}} = r + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{rz}{c}$$

bestimmt, in welcher zur Abkürzung $\sqrt{x^2+y^2} = r$ gesetzt ist.

17. Der Durchschnitt der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 = \gamma^2 z^2, \qquad \beta\, Arctan \frac{y}{x} = l\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$$

bildet eine conische Spirale, deren Horizontalprojection eine logarithmische Spirale ist. Setzt man

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \qquad \frac{y}{x} = tan\,\theta$$

und betrachtet r als unabhängige Variabele, so hat man einfacher

$$\theta = \frac{1}{\beta} l\left(\frac{r}{a}\right), \qquad z = \frac{r}{\gamma};$$

ferner ist $dx^2 + dy^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$ mithin

$$s = \int \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} \cdot dr$$

und vermöge der Werthe von θ und z

$$s = r\sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}},$$

wobei der Bogen vom Coordinatenanfange aus gerechnet ist.

18. Auf einem durch die Gleichung

$$2bz = x^2 + y^2$$

bestimmten Rotationsparaboloide ist eine Spirale construirt, deren Horizontalprojection die Gleichung

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\frac{a}{r}$$

hat, also eine Kreisevolvente ist; nach dem vorigen Verfahren ergiebt sich für den von $r = a$ aus gerechneten Bogen

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

19. Auf einer durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

bestimmten Kugelfläche ist eine Spirale construirt, deren Horizontalprojection die Gleichung

$$r = \frac{a}{\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})}$$

besitzt; es ergiebt sich dann für den von $r = a$ aus gerechneten Bogen

$$s = a\sqrt{2} \cdot arccos\frac{r}{a}.$$

Die gesammte, vom Aequator bis zu den Polen reichende sphärische Spirale hat demnach die endliche Länge $\pi\sqrt{2} \cdot a$.

20. Die beiden Flächen

$$cx = z(b + z), \qquad c^2(x^2 + y^2) = b^2 z^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein Rotationskegel ist, schneiden sich in einer Curve, von welcher die Horizontalprojection durch die Gleichung

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c}x\right)^2 = \frac{b^4}{c^2}(x^2 + y^2)$$

repräsentirt wird, also eine über dem Durchmesser $2a = \frac{b^2}{c}$ construirte Cardioide bildet. Führt man θ als unabhängige Variabele ein, so hat man die Gleichungen

$$r = \frac{b^2}{c}(1 + cos\theta), \qquad z = b(1 + cos\theta)$$

aus denen sich ergiebt

$$s = \frac{2b}{c}\int\sqrt{b^2 + c^2 sin^2\tfrac{1}{2}\theta} \cdot cos\tfrac{1}{2}\theta\, dt$$

oder, wenn die Integration ausgeführt und der Bogen von $\theta = 0$ an gerechnet wird,

$$s = \frac{2b}{c}\left\{sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{b^2 + c^2 sin^2\tfrac{1}{2}\theta} + \frac{b^2}{c}\, l\left(\frac{c\, sin\tfrac{1}{2}\theta + \sqrt{b^2 + c^2 sin^2\tfrac{1}{2}\theta}}{b}\right)\right\}.$$

Die Gesammtlänge der geschlossenen Durchschnittslinie ist hiernach leicht zu finden.